ПРОБЛЕМА КВАНТОВАНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ И ПОЛЕВАЯ ПАРАДИГМА МИ–ЭЙНШТЕЙНА

Ю.П. Рыбаков

Российский университет дружбы народов

Обсуждается проблема квантования гравитационного поля как в рамках стандартного подхода Гейзенберга–Дирака, так и с точки зрения полевой парадигмы Ми–Эйнштейна. Отмечаются трудности стандартного подхода и показывается, что в рамках полевой парадигмы необходимость квантования гравитационного поля отпадает, так как частицы рассматриваются как сгустки некоторых фундаментальных полей, включая и гравитационное.

Ключевые слова: квантовая гравитация, полевая парадигма, фундаментальные поля, солитоны, протяженные частицы.

Введение

Проблема квантования гравитационного поля, то есть объединения квантовой и общерелятивистской теорий, возникла сразу же после создания Эйнштейном теории гравитации и построения квантовой теории поля Дираком, Паули и Гейзенбергом. Первоначальные попытки квантования гравитации были предприняты М.П. Бронштейном [1] в предположении, что гравитационное поле слабое и в первом приближении его можно рассматривать как подчиняющееся линеаризованным уравнениям Эйнштейна, что позволяло квантовать его как тензорное поле второго ранга. При этом все квантовые эффекты взаимодействия гравитационного поля с другими полями учитывались по теории возмущений.

В дальнейшем были предприняты попытки строгого квантования гравитационного поля как нелинейного [2; 3]. Формально предложенные квантовые теории гравитации были безукоризненны, так как они опирались на строгий метод Дирака построения гамильтоновой теории поля со связями [4; 5]. Однако вскоре выяснилась глубокая внутренняя противоречивость такого подхода к квантовой гравитации, так как сама основная полевая переменная (метрика) задавала структуру пространства-времени, определяющего эволюцию системы.

Кроме того, квантовая теория гравитации оказалась неперенормируемой, что не позволяло решить проблему расходимостей [6–8]. Внутренняя противоречивость ряда предлагавшихся подходов к построению квантовой гравитации была предметом обсуждения во многих работах [9–12].

Полевая парадигма Ми–Эйнштейна: неиспользованные возможности

Совершенно новый подход к описанию частиц был предложен в работах Густава Ми [13], который опубликовал серию статей, посвященных *полевой теории материи.* В этих работах было выдвинуто предположение о том, что в рамках нелинейной электродинамики, обобщающей теорию электромагнетизма Максвелла, возможно существование решений, описывающих заряженную частицу (электрон) как сгусток электромагнитного поля (без источников). Такое решение в самом деле было найдено Г. Ми в рамках нелинейной электродинамики, в которой роль источника играли степени инварианта $A_\mu A^\mu$. Так, для статического электрического поля, задаваемого скалярным потенциалом $A_0 = \varphi$, получалось уравнение $\Delta\varphi + 4\pi\ g^2\varphi^5 = 0$, которое сейчас известно как *уравнение Ми–Эмдена.* Это уравнение допускает сферически-симметричное решение, обобщающее потенциал Кулона для точечного заряда и регулярное при $r = 0$:

$$\varphi(r) = \frac{q}{\left(r_0^2+r^2\right)^{1/2}}, \tag{1}$$

где характерный размер r_0 солитонного сгустка и электрический заряд q связаны условием $3r_0^2 = 4\pi g^2 q^4$. К сожалению, найденное Г. Ми решение оказалось неустойчивым, и для его стабилизации в дальнейшем пришлось использовать в качестве источника другие поля помимо электромагнитного (в частности 8-спиноры).

Появление указанных работ Г. Ми подвигло Эйнштейна на создание общей теории относительности. Он также рассматривал частицы как сгустки *(bunched fields)* некоторого *фундаментального поля* (геометрического происхождения), *связанного с гравитацией* [14; 15]. Именно эта идея Эйнштейна, как мы надеемся, сыграет ключевую роль при возможном объединении квантовой и общерелятивистской теорий.

Как известно, Эйнштейн полагал, что квантовая механика не является полной законченной теорией и её содержание сводится лишь к дополнительным ограничениям – *правилам квантования.* Он надеялся, что в последовательной нелинейной полевой теории протяженных частиц, в основе которой и лежит теория гравитационного поля, подобные ограничения возникнут сами собой. Таким образом, он считал, что квантовая механика будет следствием будущей полевой теории материи. Близкую позицию занимал также де Бройль [16] и многие другие известные физики.

Вернемся, однако, в 1933 год, когда вышла очередная статья Г. Ми, посвященная *геометрии 8-спиноров* [17]. По мысли Г. Ми, именно 8-спиноры должны быть тем фундаментальным полем, из которого строятся частицы как сгустки, описываемые регулярными решениями уравнений поля. Впоследствии такие решения получили название *частицеподобных (particle-like)* или *солитонных* (по аналогии с гидродинамикой, где подобные решения уже давно были известны как одиночные волны «solitary waves»).

Выбор 8-спиноров, как вскоре выяснилось, был вовсе не случайным и обусловлен *требованием устойчивости*. Чтобы обеспечить устойчивость трехмерных частиц – солитонов, пришлось наделить их необычными топологическими характеристиками – *топологическими инвариантами*, или зарядами.

Именно такие инварианты можно построить из 8-спиноров, если исходить из тождества, открытого итальянским геометром Ф. Бриоски [18], который изучал 8-мерное пространство и применил для его описания комплексные проективные координаты, оказавшиеся 8-спинорами. Точнее, в 8-мерном пространстве фундаментальный спинор («корень квадратный из вектора») является 16-мерным, но Ф. Бриоски использовал полуспиноры, для которых вывел замечательное тождество (*тождество Бриоски*):

$$j_\mu j^\mu - \tilde{j}_\mu \tilde{j}^\mu = s^2 + p^2 + \vec{v}^2 + \vec{a}^2, \tag{2}$$

где использованы известные билинейные конструкции из 8-спиноров ψ, и в частности 4-ток Дирака $j_\mu = \bar{\psi}\,\gamma_\mu\psi$.

С помощью 8-спиноров можно построить трёхмерные солитонные конфигурации [19], наделенные топологическими зарядами Q двух типов: либо *степенью отображения*, либо *индексом Хопфа*. Обычно топологические инварианты связываются с отображениями различных многомерных сфер S^n. При этом степень отображения $Q = deg(S^3 \to S^3)$ интерпретируется как *барионное число* B, впервые введенное английским физиком-ядерщиком Тони Скирмом [20], который построил нелинейную полевую модель, рассматривающую нуклоны как *топологические солитоны*.

Близкую идею, но уже для описания *лептонов* как топологических солитонов, наделенных другим специальным топологическим инвариантом – *индексом Хопфа*, связанным с отображением $S^3 \to S^2$ и интерпретируемым как *лептонное число* L, высказал Л.Д. Фаддеев [21]. Топологические инварианты, связанные с барионным и лептонным числами, характеризуют, таким образом, отображения $S^3 \to S^3$ и $S^3 \to S^2$. Для их построения в рамках спинорной полевой модели заметим, что исходное трехмерное многообразие S^3 (область задания отображения) соответствует компактификации трехмерного координатного пространства:

$R^3 \cup \{\infty\} = S^3$, а целевые многообразия S^3 и S^2относятся к 8-спинорам и отвечают выбору соответствующей билинейной комбинации в правой части тождества Бриоски (2). Например, можно рассмотреть следующие реализации этих многообразий, отвечающие соответственно моделям Скирма и Фаддеева: $S^3 = \{s^2 + \vec{a}^2 = const\}$, $\quad S^2 = \{\vec{v}^2 = const\}$.

Выбор указанных многообразий может быть осуществлен, если привлечь популярный в физике частиц *принцип спонтанного нарушения симметрии,* когда симметрия лагранжиана оказывается более широкой, чем симметрия основного состояния системы. Например, этот принцип реализуется, если включить в лагранжиан модели *потенциал Хиггса* специального вида:

$$V = \frac{\sigma^2}{8}\left(j_\mu j^\mu - \kappa_0^2\right)^2, \tag{3}$$

где $\kappa_0 -$ универсальная постоянная, определяющая вакуумное состояние ψ_0 системы, а σ^2 −некоторый инвариант, который может содержать информацию о гравитационном поле (например, тензор кривизны Римана). При этом на пространственной бесконечности, если исходить из требования конечности энергии системы, должно выполняться естественное граничное условие $\lim_{|\vec{x}|\to\infty} j_\mu j^\mu = \kappa_0^2$, при конкретной реализации которого и выбирается соответствующее многообразие S^3 или S^2, отвечающее либо барионному, либо лептонному сектору.

Как было показано в работах Скирма и Фаддеева, при подходящем выборе полевых моделей энергия системы оказывается ограниченной снизу некоторой монотонно растущей функцией от топологических зарядов, что и обеспечивает устойчивость солитонных топологических конфигураций в смысле А.М. Ляпунова. Таким образом, предвидение Г. Ми о фундаментальной роли 8-спиноров в полевой теории материи оказалось верным.

Обратим теперь внимание на роль гравитационного поля в построении нелинейных полевых моделей частиц – солитонов. Заметим, что масса M солитонной конфигурации должна определяться поведением спинорного поля в асимптотической области $|\vec{x}| \to \infty$. В самом деле, если рассмотреть слабое возмущение ξ вакуумного состояния, положив $\psi = \psi_0 + \xi,$ то поле ξ оказывается решением линеаризованных уравнений поля, и в частности уравнения Клейна–Гордона $\xi = m^2\xi, \quad m = Mc/\hbar.$ Здесь предполагается, что лагранжиан, кроме потенциала Хиггса (3), содержит также и сигма-модельный член:

$$L_0 = \frac{1}{2\lambda^2}\overline{\nabla_\mu\psi}\ \gamma^\nu j_\nu \nabla^\mu\psi \equiv \frac{D}{2\lambda^2}, \tag{4}$$

явно задающий взаимодействие с гравитационным полем, где $\nabla_\mu = \partial_\mu - \Gamma_\mu$ – ковариантная производная спинора, $\nabla_\mu = \partial_\mu - \Gamma_\mu -$ ковариантная производная спинора, $\lambda -$ некоторая фундаментальная постоянная. При этом комптоновская длина волны $\hbar/Mc$ будет отвечать массе реальной частицы – солитона, если выполняется условие $m = 2\sigma\lambda\kappa_0$. Это условие и в самом деле реализуется, если подобрать особую структуру скаляра σ^2 в потенциале Хиггса (3):

$$\sigma^2 = -\frac{16D^3c^6}{\lambda^2G^2K^2\hbar^2\kappa_0^8}, \tag{5}$$

где $G -$ гравитационная постоянная Ньютона, $K -$ инвариант Кречманна:

$$K = \frac{1}{48} R_{\mu\nu\sigma\lambda} R^{\mu\nu\sigma\lambda} \,, \tag{6}$$

выражаемый через тензор кривизны Римана.

Отметим, что указанное выше согласование комптоновской длины волны и массы солитонной конфигурации вытекает из (5) и (6), если учесть, что для островных систем асимптотическое поведение метрики определяется решением Шварцшильда уравнений гравитационного поля Эйнштейна. Действительно, применяя метрику Шварцшильда, найдем для $r = |\vec{x}| \to \infty$:

$$D = -\frac{r_g^2}{4r^4}\kappa_0^2, \quad K = \frac{r_g^2}{r^6}, \quad r_g = \frac{GM}{c^2}\,.$$

Как видно, выполнение этих соотношений эквивалентно справедливости квантовых уравнений Планка – де Бройля: $E = \hbar\omega,\ \vec{p} = \hbar\vec{k}$, то есть стандартным волновым свойствам квантовой частицы. При этом волновая функция частицы строится, если известно солитонное решение, имеющее заданную асимптотику ξ. Например, можно использовать очень удобное *стохастическое представление волновой функции*, описанное в работах [19; 22; 23]. В этом случае волновая функция строится как суперпозиция солитонных решений со случайными фазами. Можно показать, что в предельном случае, когда неточность измерения координаты значительно превышает размер частицы – солитона, выполняется правило М. Борна о представлении средних значений в виде эрмитовых квадратичных форм в гильбертовом пространстве, то есть *подтверждаются основные принципы квантовой механики.*

Следует также подчеркнуть, что в рамках предложенной солитонной концепции естественно объясняется и вероятностная интерпретация волновой функции [22], поскольку протяженная частица – солитон подвержена самым разнообразным случайным воздействиям. Поэтому описание движения частиц – солитонов как протяженных объектов неизбежно должно быть *статистическим.* Как известно, именно эту точку зрения защищал Эйнштейн во время своей дискуссии с Бором по интерпретации квантовой механики [24; 25].

Заключение

В предлагаемом подходе, опирающемся на полевую парадигму Ми–Эйнштейна, собственное гравитационное поле частицы – солитона (как и предполагал Эйнштейн) определяет волновые, то есть квантовые свойства частицы. При этом гравитационное поле подчиняется некоторым нелинейным уравнениям, которые только на больших расстояниях от центра частицы – солитона совпадают с уравнениями Эйнштейна. Таким образом, в специальной процедуре «квантования» гравитационного поля в рамках данного подхода нет никакой необходимости, так как обобщенная теория поля с учетом гра-витации сама объясняет квантовые свойства материи, а соответствующие фундаментальные постоянные $G,\ \hbar,\ c$ изначально входят в лагранжиан, как это можно видеть из формулы (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бронштейн М.П.* Квантование гравитационных волн // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 433–445.
2. *Gupta S.* Quantization of the Gravitational Field. General Theory // Proc. Phys. Soc. 1952. Vol. A65. P. 608–619.
3. *DeWitt B.S.* Quantum Theory of Gravity. II. The Manifestly Covariant Theory. III. Applications of the Covariant Theory // Phys. Rev. 1967. Vol. 162. P. 1195–1233, 1239–1256.
4. *Dirac P.A.M.* Theory of Gravity in Hamiltonian Form // Proc. Roy. Soc. 1958. Vol. A246. P. 333–343.
5. *Швингер Ю.* Квантованное гравитационное поле // Гравитация и топология. Актуальные проблемы / под ред. Д. Иваненко. М.: Мир, 1966. С. 67–83.
6. *Де Витт Б.С.* Квантовая гравитация: новый синтез // Общая теория относительности / под ред. С. Хокинга и В. Израэля. М.: Мир, 1983. С. 296–362.
7. *Хокинг С.* Интегралы по траекториям в приложении к квантовой гравитации // Общая теория относительности / под ред. С. Хокинга и В. Израэля. М.: Мир, 1983. С. 363–406.
8. *Вейнберг С.* Ультрафиолетовые расходимости в квантовых теориях гравитации // Общая теория относительности / под ред. С. Хокинга и В. Израэля. М.: Мир, 1983. С. 407–455.
9. *Владимиров Ю.С.* К вопросу о построении квантовой теории гравитации // Философские проблемы теории тяготения Эйнштейна и релятивистской космологии. Киев: Наукова думка, 1965. С. 137–144.
10. *Андерсен Дж.* Квантование общей теории относительности // Гравитация и относительность / под ред. Х. Цзю и В. Гоффмана. М.: Мир, 1965. С. 435–467.
11. *Тредер Х.-Ю.* Проблема физического смысла квантования гравитационных полей // Астрофизика, кванты и теория относительности / под ред. академика АН БССР Ф.И. Федорова. М.: Мир, 1982. С. 469–497.
12. *Уолд Р.М.* Общая теория относительности. Гл. 14. М.: РУДН, 2008. 694 с.
13. *Mie G.* Grundlagen einer Theorie der Materie // Ann. d. Physik. 1912. B. 39. Heft 1. S. 1–40.
14. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. Т. 2. М.: Наука, 1966. С. 719–731.
15. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. Т. 4. М.: Наука, 1967. С. 167–169.
16. *De Broglie L.* La Thermodynamique de la particule isolée (ou Thermodynamique cachée des particules). Paris: Gauthier-Villars, 1964.
17. *Mie G.* Die Geometrie der Spinoren // Ann. d. Physik. 1933. B. 17. Heft 5. S. 465–500.
18. *Картан Э.* Теория спиноров. Волгоград: Платон, 1997. 223 с.
19. *Rybakov Yu.P.* Topological Solitons in the Skyrme – Faddeev Spinor Model and Quantum Mechanics // Gravitation and Cosmology. 2016. Vol. 22. No. 2. P. 179–186.
20. *Skyrme T.H.R.* A Unified Field Theory of Mesons and Baryons // Nucl. Phys. 1962. Vol. 31. No. 4. P. 556–569.
21. *Фаддеев Л.Д.* Калибровочно-инвариантная модель электромагнитного и слабого взаимодействия лептонов // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210. № 4. С. 807–810.
22. *Рыбаков Ю.П.* Солитоны и квантовая механика // Динамика сложных систем. 2009. № 4. Т. 3. С. 3–15.
23. *Rybakov Yu.P.* On the Causal Interpretation of Quantum Mechanics // Found. Phys. 1974. Vol. 4. No. 2. P. 149–161.

24. *Бор Н.* Атомная физика и человеческое познание. М.: Изд-во иностранной литературы, 1961.
25. *Рыбаков Ю.П.* Проблема скрытых параметров в квантовой механике // Квантовая механика. Новые формулировки и приложения. М.: Изд-во МГОУ, 2009. С. 4–52.

PROBLEM OF QUANTIZING OF THE GRAVITATIONAL FIELD AND THE MIE–EINSTEIN FIELD PARADIGM

Yu.P. Rybakov

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

We discuss the problem of quantizing the gravitational field both in the frame of the standard Heisenberg – Dirac approach and also on the basis of the field paradigme by Mie – Einstein. We outline the difficulties of the standard approach and show that within the scope of the field paradigme even the necessity of quantizing the gravitational field does not arise since the particles are considered as bunched fundamental fields, with the gravitational field being included.

Keywords: quantum gravity, field paradigme, fundamental fields, solitons, extended particles.