

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ NUMERICAL METHODS OF ANALYSIS OF STRUCTURES

DOI 10.22363/1815-5235-2019-15-5-374-383  
УДК 69:624.074:624.012.4

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

### Сравнительный анализ результатов определения параметров напряженно-деформированного состояния оболочки одинакового ската с направляющим эллипсом в основании

В.Н. Иванов, О.О. Алёшина\*

Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6  
\*xiaofeng@yandex.ru

#### История статьи:

Поступила в редакцию: 02 мая 2019 г.  
Доработана: 15 августа 2019 г.  
Принята к публикации: 12 сентября 2019 г.

#### Аннотация

**Актуальность.** Тонкостенные конструкции типа оболочек составляют обширный класс в архитектуре, гражданском и промышленном строительстве, машиностроении и приборостроении, в авиа-, ракетно- и кораблестроении и т.д. Каждая поверхность имеет определенные преимущества перед другими. Так, торсовая поверхность может быть развернута на плоскость всеми ее точками без складок и разрывов, при этом длины кривых и углы между любыми кривыми, принадлежащими поверхности, не изменяются. Исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочки одинакового ската с направляющим эллипсом в основании представлено на сегодняшний день в малом объеме. **Цель.** Получение данных для сравнительного анализа результатов напряженно-деформированного состояния торсовых оболочек одинакового ската с направляющим эллипсом в основании методом конечных элементов и вариационно-разностным методом. **Методы.** Для оценки напряженно-деформированного состояния оболочки одинакового ската с направляющим эллипсом в основании используется вычислительный комплекс SCAD Office на основе метода конечных элементов и программа PLATEVRM, написанная на основе вариационно-разностного метода. **Результаты.** Получены и проанализированы численные результаты напряженно-деформированного состояния торсовой оболочки одинакового ската с направляющим эллипсом в основании, выявлены плюсы и минусы результатов расчетов методом конечных элементов (МКЭ) и вариационно-разностным методом (ВРМ).

**Ключевые слова:** теория тонких оболочек; торсовая оболочка; поверхность одинакового ската; геометрическое моделирование; вычислительный комплекс SCAD Office; метод конечных элементов; вариационно-разностный метод

#### Для цитирования

Иванов В.Н., Алёшина О.О. Сравнительный анализ результатов определения параметров напряженно-деформированного состояния оболочки одинакового ската с направляющим эллипсом в основании // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15. № 5. С. 374–383. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-374-383>

#### Введение

С появлением аналитических, а затем и численных методов расчета оболочек, возникших в ре-

зультате успехов строительной механики и техники возведения зданий и сооружений, строительство и архитектура обогатились неизвестными ранее конструктивно-архитектурными элементами. Современное развитие вычислительной техники и состояние строительной сферы позволяют более широко внедрять большепролетные пространственные конструкции в практику строительства.

Для расчета сложных структур и оболочек используются различные аналитические [1], численно-аналитические и численные методы [2]. К численным методам относят метод конечных элемен-

Иванов Вячеслав Николаевич, доктор технических наук, профессор департамента строительства Инженерной академии. ORCID iD: 0000-0003-4023-156X. eLIBRARY SPIN-код: 3110-9909.

Алёшина Ольга Олеговна, инженер, аспирант департамента строительства Инженерной академии. eLIBRARY SPIN-код: 8550-4986.

© Иванов В.Н., Алёшина О.О., 2019

This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

тов (МКЭ), вариационно-разностный метод (ВРМ), метод конечных разностей (МКР) и др., к численно-аналитическим – метод Канторовича – Власова, метод Ритца – Тимошенко, метод Бубнова – Галеркина и др. Аналитические методы применяются для узкого класса пространственных конструкций или для их приближенного расчета.

Современные пространственные конструкции возводятся с использованием разнообразных видов материалов, в том числе железобетона [3], дерева [4], пластмасс и композитов [5]. Широко применяются компьютерные расчеты, экспериментальные исследования, современные методы моделирования [6; 7], новые технологии и возможности строительно-монтажного оборудования.

### 1. Метод конечных элементов

На сегодняшний день существуют несколько численных методов определения напряженно-деформированного состояния (НДС) зданий и сооружений, которые реализованы в виде расчетных программ. Наиболее широко применяется метод конечных элементов.

Метод конечных элементов [8; 9] начал разрабатываться в середине 1960-х годов и является в настоящее время самым эффективным способом численного решения огромного ряда статических и динамических задач. Данный метод расчета реализован во многих компьютерных комплексах в России и за рубежом, например, ANSYS ([www.ansys.com](http://www.ansys.com)), NASTRAN ([www.mscsoftware.com](http://www.mscsoftware.com)), COSMOS ([www.cosmosm.com](http://www.cosmosm.com)), а также SCAD ([www.scadgroup.com](http://www.scadgroup.com)) [10] и PROKON ([www.prokon.com](http://www.prokon.com)).

Достоинством любой компьютерной расчетной системы на базе МКЭ является то, что пользователь может не знать ни принципы, ни последовательности, ни основы данного метода. Инженер должен знать решаемую задачу и уметь ввести исходные данные так, чтобы можно было использовать вычислительный комплекс. При расчете здания или сооружения с помощью ЭВМ предусматривается замена реальной конструкции соответствующей расчетной схемой. Данная операция является самой ответственной и важной частью вычислительного процесса, поэтому необходимо создать расчетную модель, как можно ближе соответствующую действительным условиям работы. При создании расчетной схемы учитываются геометрические и физические характеристики конструкции, условия опирания, распределение нагрузок и т.п. В результате расчета получаем перемещения узлов, напряжения в элементах оболочек и внутренние усилия в стержневых элементах.

Несмотря на кажущуюся простоту использования расчетных программ, существуют сложности и даже минусы работы с данными компьютерными комплексами. Невозможность полного соответствия реальной конструкции и расчетной модели, неточности моделирования (аппроксимации) расчетной схемы являются одними из основных ошибок [11; 12]. Кроме того, А.В. Перельмутер отмечает: «...ответственность за используемые результаты компьютерных программ лежит на пользователе. Даже на абсолютно безошибочную программу нельзя возложить ответственность за достоверность задаваемой информации и тем более за принимаемые расчетные предпосылки. И это относится к наиболее сложной части автоматизированного проектирования – выполнению статических и динамических расчетов объекта...» [12].

Учитывая отмеченные выше достоинства МКЭ, положим его в основу дальнейших исследований НДС линейчатых оболочек одинакового ската.

### 2. Вариационно-разностный метод

Вариационно-разностный метод также хорошо зарекомендовал себя и широко используется на практике [9; 13]. Оба, ВРМ и МКЭ, основаны на принципе Лагранжа, то есть в основу положен принцип минимума полной энергии деформаций. В отличие от МКЭ, в котором сооружение разбивается на конечные элементы, и перемещения в этих конечных элементах аппроксимируются функциями формы, в ВРМ на поверхность рассчитываемой конструкции наносится разностная сетка, производные в функционале полной энергии деформаций заменяются разностными отношениями.

Вариационно-разностный метод обладает неоспоримым преимуществом, позволяет инженерам-расчетчикам самостоятельно написать программы с помощью языков программирования для расчета конструкций. Таким образом, у данного метода более простая программная реализация. Более того, в работе [9] подчеркивается, что сравнение результатов расчета МКЭ и ВРМ при одинаковых сетках показывает близкую точность, а в ряде случаев ВРМ дает даже большую точность результатов.

Проверим это утверждение на примере тонкой оболочки одинакового ската с эллипсом в основании.

### 3. Краткая информация об оболочках одинакового ската

Поверхность одинакового ската является развертывающейся поверхностью, которая образовывается касательными линиями к своему ребру возврата. У конуса ребро возврата вырождается в точ-

ку, а у цилиндра удаляется на бесконечность. Если взять эллипс в качестве направляющей кривой, то прямые линии равного наклона к плоскости эллипса будут образовывать торсовую поверхность одинакового ската (рис. 1). Оболочка, имеющая поверхность одинакового ската в качестве срединной поверхности, будет, соответственно, называться оболочкой одинакового ската.

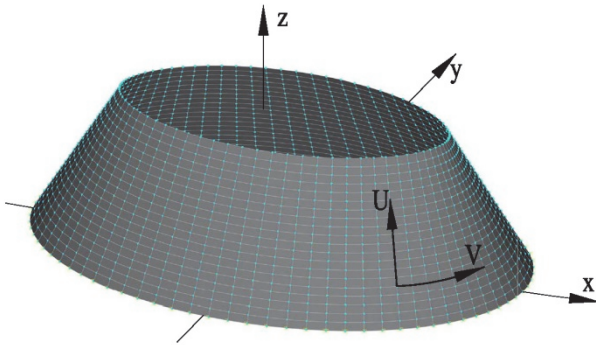


Рис. 1. Расчетная модель (общий вид)  
[Figure 1. Computational model (general view)]

Пусть направляющий эллипс в основании задается уравнениями

$$x = x(v) = a \cos v, \quad y = y(v) = b \sin v, \quad (1)$$

тогда параметрические уравнения поверхности одинакового ската будут иметь следующий вид [1; 14; 15]:

$$x = x(u, v) = a \cos v - \frac{ub \cos a \cos v}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}},$$

$$y = y(u, v) = b \sin v - \frac{ub \cos a \sin v}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}},$$

$$z = z(u) = u \sin a. \quad (2)$$

Ранее оболочки одинакового ската с эллипсом в основании уже привлекали внимание исследователей как с геометрической [1; 15–18], так и с прочностной точек зрения [1; 14; 19; 20]. Это показывает, что рассматриваемые оболочки могут найти применение в строительстве, архитектуре или в машиностроении.

#### 4. Исследование напряженно-деформированного состояния оболочки одинакового ската МКЭ и ВРМ

Исследуем напряженно-деформированное состояние оболочки одинакового ската с направляющим эллипсом в основании со следующими геометрическими параметрами эллипса:  $a = 3$  м,

$b = 2$  м. Угол наклона прямолинейных направляющих  $\alpha = 60^\circ$ , длина прямолинейных направляющих  $u = 2$  м [14], толщина оболочки  $\delta = 5$  см, материал – сталь, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ . Конструкция рассчитывается на восприятие только статического равномерно-распределенного собственного веса.

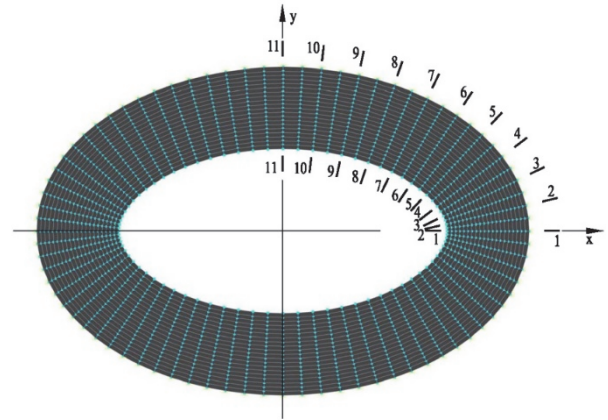


Рис. 2. Сечения для сравнения результатов МКЭ и ВРМ  
[Figure 2. Cross sections for comparison of FEM and VDM results]

Первый расчет выполняется в вычислительном комплексе SCAD Office, представляющем интегрированную систему прочностного анализа и проектирования конструкций на основе метода конечных элементов. Вид расчетной модели при аппроксимации срединной поверхности совокупностью четырехугольных и треугольных плоских элементов показан на рис. 1. Максимальное расстояние между узлами конечных элементов 0,235 м. Количество элементов – 1600, узлов – 1680.

Второй расчет выполняется в программе SHELLVRM, написанной на основе вариационно-разностного метода и состоящей из управляющей программы и 5 подпрограмм. В управляющей программе вводятся исходные данные, определяются размеры рабочих массивов и происходит обращение к подпрограммам. Подпрограмма SHESF формирует матрицу жесткости, подпрограмма SHLOAD организует ввод нагрузок и формирует правую часть системы уравнений, подпрограмма DSLT решает систему алгебраических уравнений ленточного типа, подпрограмма SHSORT организует реорганизацию перемещений с учетом граничных условий и подготавливает массив для расчета деформаций и внутренних усилий, в подпрограмме SHRES рассчитываются деформации, внутренние усилия и организуется вывод результатов. Расчетная сетка аналогична сетке в МКЭ.

Сравнение полученных результатов методом конечных элементов и вариационно-разностным методом выполняется по 11 сечениям (рис. 2),

в статье представлены результаты в виде таблиц для сечений 1–1 (табл. 1), 3–3 (табл. 2), 5–5 (табл. 3), 7–7 (табл. 4), 9–9 (табл. 5), 11–11 (табл. 6), для сечений 2–2, 4–4, 6–6, 8–8, 10–10 представлены вы-

борочные результаты в виде эпюр (рис. 3–7), также приводятся поля распределения нормальных напряжений и изгибающих моментов из вычислительного комплекса SCAD Office (рис. 8–9).

Таблица 1

**Численные результаты расчетов – сечение 1–1**  
 [Table 1. Numerical results of calculations – section 1–1]

Координата срединной поверх- ности оболочки по оси $U$ (м) [Coordinates of the middle surface of the shell along the $U$ -axis (m)]	$N_v$ МКЭ (кН/м) [FEM (kN/m)]	$N_v$ ВРМ (кН/м) [VDM (kN/m)]	$N_u$ МКЭ (кН/м) [FEM (kN/m)]	$N_u$ ВРМ (кН/м) [VDM (kN/m)]	$M_v$ МКЭ (Н·м/м) [FEM (N·m/m)]	$M_v$ ВРМ (Н·м/м) [VDM (N·m/m)]	$M_u$ МКЭ (Н·м/м) [FEM (N·m/m)]	$M_u$ ВРМ (Н·м/м) [VDM (N·m/m)]
0,000	-3,2365	-3,2962	-10,7885	-10,9872	6,1712	6,2853	20,5706	20,9542
0,200	-3,2155	-3,2147	-10,2200	-10,2122	-0,1415	-0,0726	4,6682	4,7274
0,400	-2,7115	-2,7311	-9,2780	-9,2744	-2,9337	-2,8380	-0,9024	-0,7987
0,600	-2,3045	-2,3348	-8,2500	-8,2453	-3,8115	-3,6532	-1,6332	-1,5853
0,800	-2,0140	-2,0503	-7,1575	-7,1554	-4,4339	-4,1379	-1,5809	-1,5255
1,000	-1,7770	-1,8207	-6,0060	-6,0076	-5,6731	-5,1532	-2,0134	-1,8776
1,200	-1,5625	-1,6187	-4,7965	-4,8049	-7,9972	-7,1485	-3,1254	-2,8596
1,400	-1,3695	-1,4431	-3,5420	-3,5581	-11,8114	-10,4869	-5,0523	-4,5695
1,600	-1,2400	-1,3214	-2,2800	-2,2995	-17,5136	-15,5292	-7,9335	-7,0916
1,800	-1,2825	-1,3342	-1,0915	-1,1036	-24,8724	-22,2000	-9,6594	-8,8378
2,000	-0,8245	-0,9791	-0,1985	-0,0322	-33,5112	-29,7537	1,8510	0,0759

Таблица 2

**Численные результаты расчетов – сечение 3–3**  
 [Table 2. Numerical results of calculations – section 3–3]

Координата срединной поверх- ности оболочки по оси $U$ (м) [Coordinates of the middle surface of the shell along the $U$ -axis (m)]	$N_v$ МКЭ (кН/м) [FEM (kN/m)]	$N_v$ ВРМ (кН/м) [VDM (kN/m)]	$N_u$ МКЭ (кН/м) [FEM (kN/m)]	$N_u$ ВРМ (кН/м) [VDM (kN/m)]	$M_v$ МКЭ (Н·м/м) [FEM (N·m/m)]	$M_v$ ВРМ (Н·м/м) [VDM (N·m/m)]	$M_u$ МКЭ (Н·м/м) [FEM (N·m/m)]	$M_u$ ВРМ (Н·м/м) [VDM (N·m/m)]
0,000	-2,9650	-3,0352	-9,8825	-10,1141	2,0433	2,0434	6,8110	6,8121
0,200	-3,2225	-3,2363	-9,3590	-9,3784	0,2817	0,3520	4,7915	4,8805
0,400	-3,1500	-3,1686	-8,4920	-8,5082	-2,4946	-2,4594	1,5497	1,5863
0,600	-2,9485	-2,9656	-7,5270	-7,5390	-4,9726	-4,9482	-0,9186	-0,9457
0,800	-2,7020	-2,7154	-6,5010	-6,5099	-6,8915	-6,8356	-2,4354	-2,4623
1,000	-2,4490	-2,4613	-5,4380	-5,4446	-8,5050	-8,3915	-3,3194	-3,3109
1,200	-2,2050	-2,2180	-4,3505	-4,3556	-10,2395	-10,0454	-4,0085	-3,9534
1,400	-1,9760	-1,9895	-3,2445	-3,2471	-12,5282	-12,2135	-4,9523	-4,8138
1,600	-1,7880	-1,7923	-2,1300	-2,1298	-15,6879	-15,1859	-6,3502	-6,0822
1,800	-1,6840	-1,6618	-1,0360	-1,0271	-19,5379	-18,9137	-6,3678	-6,3902
2,000	-1,0700	-1,1301	-0,1790	0,0205	-23,4915	-23,2399	2,3406	-0,0492

Таблица 3

**Численные результаты расчетов – сечение 5–5**  
 [Table 3. Numerical results of calculations – section 5–5]

Координата срединной поверх- ности оболочки по оси $U$ (м) [Coordinates of the middle surface of the shell along the $U$ -axis (m)]	$N_v$ МКЭ (кН/м) [FEM (kN/m)]	$N_v$ ВРМ (кН/м) [VDM (kN/m)]	$N_u$ МКЭ (кН/м) [FEM (kN/m)]	$N_u$ ВРМ (кН/м) [VDM (kN/m)]	$M_v$ МКЭ (Н·м/м) [FEM (N·m/m)]	$M_v$ ВРМ (Н·м/м) [VDM (N·m/m)]	$M_u$ МКЭ (Н·м/м) [FEM (N·m/m)]	$M_u$ ВРМ (Н·м/м) [VDM (N·m/m)]
0,000	-2,3385	-2,4191	-7,7945	-8,0684	-9,9630	-10,3201	-33,2101	-34,4135
0,200	-3,0175	-3,0656	-7,3825	-7,4536	0,0796	0,1123	-0,2808	-0,1756
0,400	-3,9255	-3,9701	-6,7330	-6,7875	1,2306	1,1792	8,4997	8,4503

Окончание табл. 3

Координата срединной поверх- ности оболочки по оси $U$ (м) [Coordinates of the middle surface of the shell along the $U$ -axis (m)]	$N_v$ МКЭ (кН/м) [FEM (kN/m)]	$N_v$ BPM (кН/м) [VDM (kN/m)]	$N_u$ МКЭ (кН/м) [FEM (kN/m)]	$N_u$ BPM (кН/м) [VDM (kN/m)]	$M_v$ МКЭ (Н·м/м) [FEM (N·m/m)]	$M_v$ BPM (Н·м/м) [VDM (N·m/m)]	$M_u$ МКЭ (Н·м/м) [FEM (N·m/m)]	$M_u$ BPM (Н·м/м) [VDM (N·m/m)]
0,600	-4,3840	-4,4174	-5,9860	-6,0341	-1,6618	-1,7923	5,7629	5,6486
0,800	-4,4020	-4,4282	-5,1735	-5,2160	-5,0150	-5,2140	0,8965	0,7887
1,000	-4,1860	-4,2085	-4,3305	-4,3664	-7,3595	-7,6400	-2,3648	-2,4525
1,200	-3,8975	-3,9181	-3,4810	-3,5090	-8,5274	-8,9291	-3,6117	-3,7092
1,400	-3,6120	-3,6287	-2,6310	-2,6516	-8,8174	-9,4048	-3,5497	-3,7170
1,600	-3,3445	-3,3560	-1,7705	-1,7844	-8,5330	-9,3999	-2,6921	-3,0823
1,800	-3,0410	-3,0627	-0,8910	-0,8938	-7,8912	-9,1841	-0,6767	-1,6971
2,000	-2,4645	-2,5418	-0,1790	0,0044	-7,3781	-9,2557	1,7156	-0,0089

Таблица 4

Численные результаты расчетов – сечение 7–7  
[Table 4. Numerical results of calculations – section 7–7]

Координата срединной поверх- ности оболочки по оси $U$ (м) [Coordinates of the middle surface of the shell along the $U$ -axis (m)]	$N_v$ МКЭ (кН/м) [FEM (kN/m)]	$N_v$ BPM (кН/м) [VDM (kN/m)]	$N_u$ МКЭ (кН/м) [FEM (kN/m)]	$N_u$ BPM (кН/м) [VDM (kN/m)]	$M_v$ МКЭ (Н·м/м) [FEM (N·m/m)]	$M_v$ BPM (Н·м/м) [VDM (N·m/m)]	$M_u$ МКЭ (Н·м/м) [FEM (N·m/m)]	$M_u$ BPM (Н·м/м) [VDM (N·m/m)]
0,000	-1,7255	-1,7923	-5,7520	-5,9733	-26,6859	-27,6348	-88,5929	-92,1159
0,200	-2,5595	-2,6242	-5,4670	-5,5534	-3,2352	-3,3089	-16,3604	-16,4906
0,400	-4,3880	-4,4528	-5,0790	-5,1385	6,1452	6,0459	14,0328	13,8517
0,600	-5,7535	-5,8105	-4,6155	-4,6637	6,9748	6,8533	18,2650	18,1289
0,800	-6,3545	-6,4030	-4,0865	-4,1300	4,6782	4,5263	12,6330	12,5666
1,000	-6,3905	-6,4324	-3,5085	-3,5483	2,3227	2,1258	6,2603	6,2470
1,200	-6,1440	-6,1793	-2,8940	-2,9273	1,0163	0,7490	2,3885	2,3672
1,400	-5,8115	-5,8389	-2,2460	-2,2730	0,7689	0,3888	1,0796	0,9243
1,600	-5,4820	-5,5054	-1,5590	-1,5784	1,1785	0,6191	1,3079	0,7899
1,800	-5,1740	-5,2209	-0,8170	-0,8294	1,8038	0,9908	1,9206	0,7616
2,000	-4,9795	-5,0502	-0,2140	-0,0039	2,1826	1,3126	1,2296	0,0007

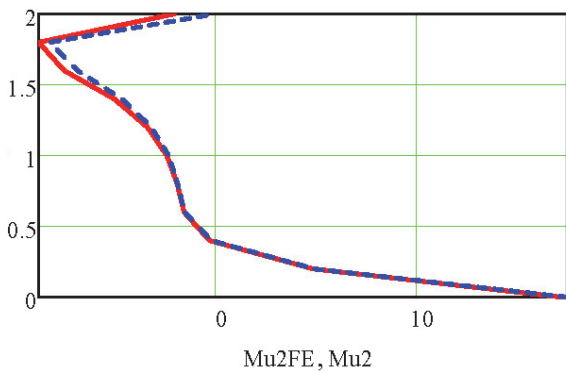
Таблица 5

Численные результаты расчетов – сечение 9–9  
[Table 5. Numerical results of calculations – section 9–9]

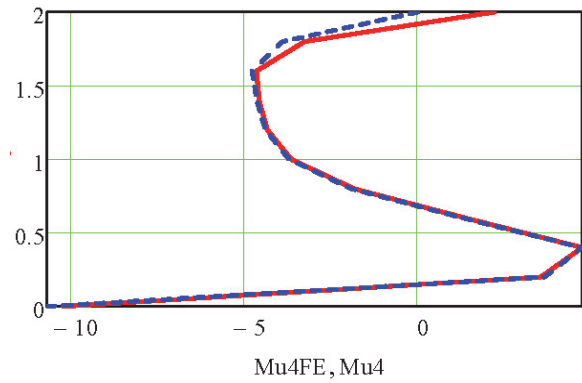
Координата срединной поверх- ности оболочки по оси $U$ (м) [Coordinates of the middle surface of the shell along the $U$ -axis (m)]	$N_v$ МКЭ (кН/м) [FEM (kN/m)]	$N_v$ BPM (кН/м) [VDM (kN/m)]	$N_u$ МКЭ (кН/м) [FEM (kN/m)]	$N_u$ BPM (кН/м) [VDM (kN/m)]	$M_v$ МКЭ (Н·м/м) [FEM (N·m/m)]	$M_v$ BPM (Н·м/м) [VDM (N·m/m)]	$M_u$ МКЭ (Н·м/м) [FEM (N·m/m)]	$M_u$ BPM (Н·м/м) [VDM (N·m/m)]
0,000	-1,3600	-1,4009	-4,5335	-4,6696	-40,9204	-42,4381	-136,4013	-141,4602
0,200	-2,1680	-2,2298	-4,3335	-4,3949	-8,1522	-8,3395	-35,4499	-35,9733
0,400	-4,5375	-4,6078	-4,1190	-4,1496	8,2662	8,1600	14,3722	13,9989
0,600	-6,6085	-6,6786	-3,8400	-3,8593	13,3517	13,3318	28,2120	28,0468
0,800	-7,8020	-7,8686	-3,4990	-3,5169	13,0467	13,1062	24,9814	24,9959
1,000	-8,2005	-8,2630	-3,0980	-3,1176	11,2335	11,3404	17,1469	17,2656
1,200	-8,1020	-8,1570	-2,6370	-2,6575	9,7411	9,8689	10,5854	10,6929
1,400	-7,7830	-7,8313	-2,1095	-2,1298	9,0203	9,1164	6,6897	6,6178
1,600	-7,4295	-7,4791	-1,5045	-1,5235	8,8630	8,8731	4,6470	4,1516
1,800	-7,1650	-7,2417	-0,8040	-0,8218	8,9442	8,8300	3,1393	2,0022
2,000	-7,1840	-7,2771	-0,2335	-0,0055	9,0038	9,0576	0,9647	0,0036

**Численные результаты расчетов – сечение 11–11**  
**[Table 6. Numerical results of calculations – section 11–11]**

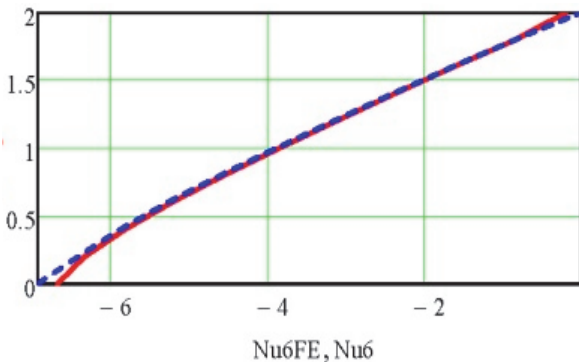
Координата срединной поверх- ности оболочки по оси $U$ (м) [Coordinates of the middle surface of the shell along the $U$ -axis (m)]	$Ny$ МКЭ	$Ny$ ВРМ	$Nu$ МКЭ	$Nu$ ВРМ	$Mv$ МКЭ	$Mv$ ВРМ	$Mu$ МКЭ	$Mu$ ВРМ
	(кН/м)	(кН/м)	(кН/м)	(кН/м)	(Н·м/м)	(Н·м/м)	(Н·м/м)	(Н·м/м)
	[FEM (kN/m)]	[VDM (kN/m)]	[FEM (kN/m)]	[VDM (kN/m)]	[FEM (N·m/m)]	[VDM (N·m/m)]	[FEM (N·m/m)]	[VDM (N·m/m)]
0,000	-1,2495	-1,2782	-4,1645	-4,2615	-46,3761	-48,1181	-154,5870	-160,3935
0,200	-2,0310	-2,0866	-3,9910	-4,0358	-10,4431	-10,6831	-43,7826	-44,4982
0,400	-4,5665	-4,6323	-3,8300	-3,8426	8,5468	8,4337	13,4742	13,0081
0,600	-6,8890	-6,9563	-3,6060	-3,6081	15,3333	15,3527	31,5612	31,3724
0,800	-8,3200	-8,3856	-3,3200	-3,3217	15,9322	16,0786	29,8679	29,9009
1,000	-8,8860	-8,9457	-2,9720	-2,9783	14,4501	14,6758	21,8237	21,9940
1,200	-8,8725	-8,9242	-2,5580	-2,5673	12,9670	13,2337	14,2560	14,4207
1,400	-8,5780	-8,6230	-2,0680	-2,0797	12,1247	12,3802	9,1828	9,1390
1,600	-8,2250	-8,2708	-1,4880	-1,5019	11,8268	12,0074	6,0593	5,5672
1,800	-7,9725	-8,0491	-0,7995	-0,8139	11,8121	11,8799	3,6652	2,5182
2,000	-8,0460	-8,1384	-0,2375	-0,0004	11,8271	12,1448	0,7421	0,0040



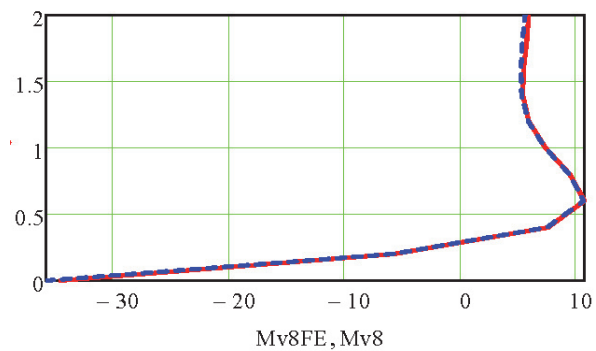
**Рис. 3.** Сравнение изгибающих моментов  $Mu$  (Н·м/м) в сечении 2–2:  
 МКЭ – сплошная линия; ВРМ – пунктирная линия  
**[Figure 3.** Comparison of bending moments  $Mu$  (N·m/m) in section 2–2:  
 FEM – solid line; VDM – dotted line]



**Рис. 4.** Сравнение изгибающих моментов  $Mu$  (Н·м/м) в сечении 4–4:  
 МКЭ – сплошная линия; ВРМ – пунктирная линия  
**[Figure 4.** Comparison of bending moments  $Mu$  (N·m/m) in section 4–4:  
 FEM – solid line; VDM – dotted line]

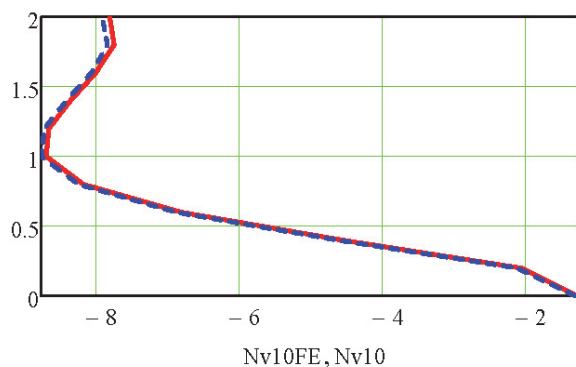


**Рис. 5.** Сравнение нормальных сил  $Nu$  (кН/м) в сечении 6–6:  
 МКЭ – сплошная линия; ВРМ – пунктирная линия  
**[Figure 5.** Comparison of normal forces  $Nu$  (kN/m) in section 6–6:  
 FEM – solid line; VDM – dotted line]

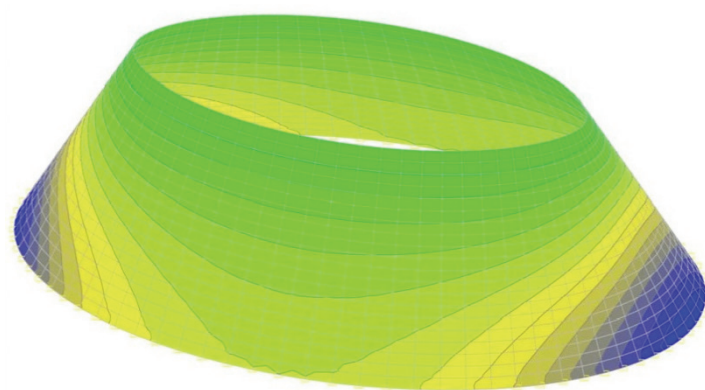


**Рис. 6.** Сравнение изгибающих моментов  $Mv$  (Н·м/м) в сечении 8–8:  
 МКЭ – сплошная линия; ВРМ – пунктирная линия  
**[Figure 6.** Comparison of bending moments  $Mv$  (N·m/m) in section 8–8:  
 FEM – solid line; VDM – dotted line]



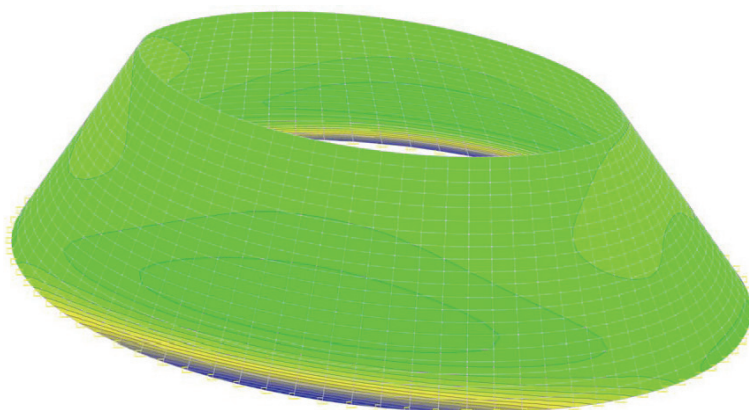


**Рис. 7.** Сравнение нормальных сил  $N_\nu$  (кН/м) в сечении 10–10:  
 МКЭ – сплошная линия; BPM – пунктирная линия  
**[Figure 7.** Comparison of normal forces  $N_\nu$  (кН/м) in section 10–10:  
 FEM – solid line; VDM – dotted line]



-216,16	-202,87
-202,87	-189,57
-189,57	-176,28
-176,28	-162,98
-162,98	-149,69
-149,69	-136,39
-136,39	-123,1
-123,1	-109,8
-109,8	-96,51
-96,51	-83,21
-83,21	-69,92
-69,92	-56,62
-56,62	-43,33
-43,33	-30,03
-30,03	-16,74
-16,74	-3,44

**Рис. 8.** Нормальное напряжение  $N_u$  (кН/м<sup>2</sup>) вдоль прямолинейных направляющих  
**[Figure 8.** Normal stress  $N_u$  along the linear coordinates  $U$  of the surface (кН/м<sup>2</sup>)]



-154,587	-142,914
-142,914	-131,2409
-131,2409	-119,5678
-119,5678	-107,8947
-107,8947	-96,2217
-96,2217	-84,5486
-84,5486	-72,8755
-72,8755	-61,2025
-61,2025	-49,5294
-49,5294	-37,8563
-37,8563	-26,1832
-26,1832	-14,5102
-14,5102	-2,8371
-2,8371	8,836
8,836	20,509
20,509	32,1821

**Рис. 9.** Изгибающий момент  $M_u$  (кН·м/м) вдоль прямолинейных направляющих  
**[Figure 9.** Bending moment  $M_u$  along the linear coordinates  $U$  of the surface (кН·м/м)]

Сравнение результатов расчетов методом конечных элементов и вариационно-разностным методом показывает хорошее схождение.

Отклонения результатов в исследуемых узлах составляют от 1 до 10 %, только в узлах с коор-

динатами 1,6, 1,8 и 2,0 м по прямолинейным направляющим  $U$  расхождения доходят до 100 % в нормальных силах  $N_u$ , изгибающих моментах  $M_u$  и  $M_\nu$ . При значении прямолинейных направляющих  $U = 0$  м закрепление эллипса в основании

жесткое (заделка), при значении прямолинейных направляющих  $U = 2$  м – свободный край, следовательно, в данном направлении (направлении прямолинейных направляющих  $U$ ) торсовая оболочка работает как консоль. Из сопротивления материалов известно, что значение изгибающего момента от равномерно-распределенной нагрузки на конце консоли равно нулю, таким образом, результаты, полученные при решении вариационно-разностным методом для изгибающего момента  $M_i$  в узлах оболочки с координатами 1,6, 1,8 и 2,0 м по прямолинейным направляющим  $U$ , точнее. Также значения результатов нормальных сил  $N_i$  в узлах оболочки с координатами 2,0 м по прямолинейным направляющим  $U$  являются более точными.

Значения нормальных напряжений вдоль прямолинейных и криволинейных направляющих оболочки свидетельствует о том, что данная оболочка одинакового ската с направляющим эллипсом в основании работает на сжатие. Таким образом, оболочки данного класса могут изготавливаться из большого ряда строительных материалов, что является безусловно большим плюсом при выборе из разных видов оболочек.

### Заключение

Благодаря результатам, полученным при исследовании напряженно-деформированного состояния торсовой оболочки одинакового ската с эллипсом в основании можно резюмировать, что данный вид оболочек достоин внимания архитекторов. Следует отметить возможность изготовления данной оболочки из листового материала, благодаря способности разворачиваться на плоскость без складок и разрывов, таким образом, выполнение опалубки при возведении таких оболочек из монолитного железобетона не вызовет больших сложностей [1].

Сравнение результатов, полученных методом конечных элементов и вариационно-разностным методом, показывает плюсы и недочеты каждого из методов. Использование вычислительного комплекса SCAD Office на базе МКЭ является более универсальным по сравнению с ВРМ для решения сложных пространственных конструкций и сооружений. Однако полученные результаты в некоторых узлах оболочки являются более корректными и правильными при решении ВРМ. Для разъяснения данного вопроса авторы готовят письмо в редакцию SCAD Office. Также О.О. Алёшина работает над получением аналитического решения для вычисления НДС оболочек одинакового ската с эллипсом в основании. После нахождения

аналитического решения будет выполнено сравнение напряженно-деформированного состояния данной оболочки тремя разными методами решения.

### Список литературы

1. *Кривошапко С.Н.* Геометрия линейчатых поверхностей с ребром возврата и линейная теория расчета торсовых оболочек: монография. М.: РУДН, 2009. 357 с.
2. *Иванов В.Н.* Основы численных методов расчета конструкций: конспект лекций. М.: Изд-во РУДН, 2007. 64 с.
3. *Krivoshapko S.N., Christian A. Bock Hyeng, Mamiyeva I.A.* Chronology of erection of the earliest reinforced concrete shells // International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences. 2014. Vol. 18. Iss. 2. Pp. 95–108.
4. *Кривошапко С.Н., Пятикрестовский К.П.* Из истории строительства деревянных оболочек и их возможности в настоящем и будущем // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 1. С. 3–18.
5. *Krivoshapko S.N.* The perspectives of application of thin-walled plastic and composite polymer shells in civil and industrial architecture // Journal of Reinforced Plastics and Composites. 2018. Vol. 37. Iss. 4. Pp. 217–229. DOI: 10.1177/0731684417740770
6. *Иванов В.Н., Романова В.А.* Конструкционные формы пространственных конструкций. Визуализация поверхностей в системах MathCAD, AutoCAD. М.: АСВ, 2016. 412 с.
7. *Cajamarca-Zúñiga, D., Alyoshina, O.* Análisis estructural numérico del modelo a escala 1:10 del cascarón no-canónico “Yasuni” generado sobre la base de la arquitectura biónica // Killkana Tecnica. 2019. Vol. 3. No. 1. Pp. 7–12. DOI: 10.26871/killkana\_tecnica.v3i1.414. URL: [http://killkana.ucacue.edu.ec/index.php/killkana\\_tecnico/article/view/414](http://killkana.ucacue.edu.ec/index.php/killkana_tecnico/article/view/414)
8. *Аганов В.П.* Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций. М.: АСВ, 2004. 248 с.
9. *Иванов В.Н.* Основы метода конечных элементов и вариационно-разностного метода: учебное пособие. М.: РУДН, 2008. 168 с.
10. SCAD Office. Версия 21. Вычислительный комплекс SCAD++ / В.С. Карпиловский, Э.З. Криксунов, А.А. Маляренко, А.В. Перельмутер, С.Ю. Фиалко. М.: СКАД СОФТ, 2015. 848 с.
11. *Шмельтер Я., Дацко М., Добровичинский С., Вечорек М.* Метод конечных элементов в статике сооружений / пер. с пол. М.В. Предтеченского; под ред. В.Н. Сидорова. М.: Стройиздат, 1986. 220 с.
12. *Перельмутер А.В., Сливкер В.И.* Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. 4-е изд., перераб. М.: СКАД СОФТ, 2011. 736 с.
13. *Иванов В.Н.* Вариационно-разностный метод и метод глобальных элементов в расчете сопряжений отсеков оболочек // Строительная механика инженер-



ных конструкций и сооружений: межвузовский сборник научных трудов. Вып. 12. М.: АСВ, 2003. С. 34–41.

14. Алёшина О.О. Исследования по геометрии и расчету торсовых оболочек одинакового ската // Строительная механика и расчет сооружений. 2019. № 3. С. 63–70.

15. Кривошапко С.Н., Крутов А.В. Ребра возврата, линии раздела и самопересечения некоторых технологических поверхностей откоса // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2001. № 1. С. 98–104.

16. Романова В.А., Тхома А. Автоматическое моделирование поверхностей одинакового ската в системе AutoCAD посредством языка AutoLISP // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 5. С. 5–11.

17. Romanova V.A., Rynkovskaya M., Ivanov V. Automatic modeling of surfaces with identical slopes // *Advanced Structured Materials*. 2019. Vol. 92. Pp. 143–156.

18. Карташев А.И. Поверхности одинакового ската: автореф. ... дис. канд. техн. наук. Л.: Ленинградский институт инженеров железнодорожного транспорта, 1954.

19. Кривошапко С.Н., Тимошин М.А. Статический расчет торсовой оболочки одинакового ската с направляющим эллипсом // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2008. № 1. С. 3–10.

20. Тимошин М.А. Численные результаты статического расчета на прочность и устойчивость трех оболочек нулевой гауссовой кривизны с направляющим эллипсом // Инженерные системы – 2008: труды Всероссийской научно-практической конференции (Москва, 7–11 апреля 2008 г.). М.: РУДН, 2008. С. 209–212.

RESEARCH PAPER

## Comparative analysis of the results of determining the parameters of the stress-strain state of equal slope shell

Vyacheslav N. Ivanov, Olga O. Alyoshina \*

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

\*xiaofeng@yandex.ru

### Article history:

Received: May 02, 2019

Revised: August 15, 2019

Accepted: September 12, 2019

### Abstract

**Relevance.** Thin-walled structures of shells constitute a large class in architecture, in civil and industrial construction, mechanical engineering and instrument making, aircraft, rocket and shipbuilding, etc. Each surface has certain advantages over the other. So the torso surface can be deployed on the plane of all its points without folds and breaks, with the length of the curves and the angles between any curves belonging to the surface, do not change. The investigation of the stress-strain state of the equal slope shell with a director ellipse at the base is presented to date in a small volume. **The aim of the work.** Obtaining data for comparative analysis of the results of the stress-strain state of equal slope shells by the finite element method and the variational-difference method. **Methods.** To assess the stress-strain state of the equal slope shell, the SCAD Office computer complex based on the finite element method and the “PLATEVRM” program, written on the basis of the variational-difference method, are used. **Results.** The numerical results of the stress-strain state of the equal slope shell are obtained and analyzed, the pros and cons of the results of calculations by the finite element method and the variational-difference method are revealed.

**Keywords:** theory of thin shells; torso shell; equal slope shell; geometric modeling; computational complex “SCAD Office”; finite element method; variational-difference method

### For citation

Ivanov V.N., Alyoshina O.O. (2019). Comparative analysis of the results of determining the parameters of the stress-strain state of equal slope shell. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 15(5), 374–383. <http://dx.doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-5-374-383>. (In Russ.)

### References

1. Krivoshapko S.N. (2009). *Geometry of Ruled Surfaces with Cuspidal Edge and Linear Theory of Analysis*

*of Tangential Developable Shells: Monograph*. Moscow: RUDN Publ. (In Russ.)

2. Ivanov V.N. (2007). *The Basis of Numerical Methods of Analysis of Structures*. Moscow: RUDN Publ. (In Russ.)

3. Krivoshapko S.N., Christian A. Bock Hyeng, Mamiya I.A. (2014). Chronology of erection of the earliest reinforced concrete shells. *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*, 18(2), 95–108.

**Olga O. Alyoshina**, Engineer, Ph.D. Student, Department of Civil Engineering, Engineering Academy. eLIBRARY SPIN-code: 8550-4986.

**Vyacheslav N. Ivanov**, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Civil Engineering, Engineering Academy. ORCID iD: 0000-0003-4023-156X. eLIBRARY SPIN-code: 3110-9909.

4. Krivoshapko S.N., Pyatikrestovskiy K.P. (2014). On history of building of wooden shells and their opportunities at present and in the future. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (1), 3–18. (In Russ.)
5. Krivoshapko S.N. (2018). The perspectives of application of thin-walled plastic and composite polymer shells in civil and industrial architecture. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 37(4), 217–229. DOI: 10.1177/0731684417740770
6. Ivanov V.N., Romanova V.A. (2016). *Konstruksionnye formy prostranstvennykh konstruksiy (vizualizatsiya poverkhnostey v sistemakh MathCAD, AutoCAD)* [Constructive Forms of Spatial Structures (Visualization of Surfaces in MathCAD, AutoCAD)]. Moscow, ASV Publ. (In Russ.)
7. Cajamarca-Zúñiga D., Alyoshina O. (2019). Análisis estructural numérico del modelo a escala 1:10 del cascarón no-canónico “Yasuni” generado sobre la base de la arquitectura biónica. *Killkana Tecnica*, 3(1), 7–12. DOI: 10.26871/killkana\_tecnica.v3i1.414. [http://killkana.ucacue.edu.ec/index.php/killkana\\_tecnico/article/view/414](http://killkana.ucacue.edu.ec/index.php/killkana_tecnico/article/view/414)
8. Agapov V.P. (2004). *Finite Element Method in Statics, Dynamics, and Stability of Structures*. Moscow: ASV Publ. (In Russ.)
9. Ivanov V.N. (2008). *The Basis of Finite Element Method and Variational-Difference Energy Method*. Moscow: RUDN Publ. (In Russ.)
10. Karpilovskyy V.S., Kryksunov E.Z., Maliarenko A.A., Perelmuter A.V., Perelmuter M.A., Fialko S.Y. (2015). *SCAD Office. V. 21. System Scad++*. Moscow, SCAD Office Publ.
11. Szmelter J., Dacko M., Dobrocinski S., Wiczo-rek M. (1986). *Metoda elementow skonczonech w statyce konstrukcyj [FEM in Statics of Buildings]*. Moscow: Stroyizdat Publ. (In Russ.)
12. Perelmuter A.V., Slivker V.I. (2011). *Raschetnie modeli sooruzheniy i vozmozhnost ih analiza [Calculation models of structures and possibility of their analysis]*. Moscow: SCAD SOFT Publ. (In Russ.)
13. Ivanov V.N. (2003). Variational-difference method and global elements in the calculation of the mates of the compartments of the shells. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (12), 34–41. (In Russ.)
14. Alyoshina O.O. (2019). Investigation of the geometry and calculation of equal slope shells. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (3), 63–70. (In Russ.)
15. Krivoshapko S.N., Krutov A.V. (2001). Cuspidal edges, lines of division and self-intersection of some technological surfaces of slope. *RUDN Journal of Engineering Researches*, (1), 98–104. (In Russ.)
16. Romanova V.A., Thoma Anamariya. (2017). Automatic modeling of the surfaces of the equal slope in AutoCAD system through language AutoLISP. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (5), 5–11. (In Russ.)
17. Romanova V.A., Rynkovskaya M., Ivanov V. (2019). Automatic modeling of surfaces with identical slopes. *Advanced Structured Materials*, 92, 143–156.
18. Kartashev A.I. (1954). *Equal Slope Surfaces* (Dissertation Abstract of Candidate of Technical Sciences). Leningrad: LIIZhT Publ. (In Russ.)
19. Krivoshapko S.N., Timoshin M.A. (2008). Static analysis of a torse shell of equal slope with a director ellipse. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, (1), 3–10. (In Russ.)
20. Timoshin M.A. (2008). Numerical results of the strength and buckling static analysis three shells of zero gauss curvature with a director ellipse. *Injenernie Systemi – 2008: trudi Vseross. nauchno-pract. conf. (Moscow, April 7–11, 2008)* (pp. 209–212). Moscow: RUDN Publ. (In Russ.)