УДК 530.12:531.51

Функция Грина в гравистатике Эйнштейна

Ц. И. Гуцунаев, А. А. Шайдеман, Х. Д. Ариас Эрнандес, Х. Ф. Визуэте Франко, А. В. Калмыков

Кафедра теоретической физики
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

В статье применяется метод функции Грина для построения статических аксиально-симметричных решений уравнений Эйнштейна.

Ключевые слова: уравнения Эйнштейна, статические решения, функция Грина.

1. Введение

Для вакуумных статических уравнений Эйнштейна было получено в 1916 г. сферическое симметричное решение Шварцшильдом [1]. Для статических аксиально-симметричных уравнений Вейля [2] были получены решения Шази [3], Керзоном [4] и другими. Данная работа основана на методе функции Грина. С помощью этого метода были получены некоторые статические решения уравнений Эйнштейна.

2. Основные уравнения

Для аксиально-симметричных статических вакуумных гравитационных полей линейный элемент Вейля имеет вид:

$$ds^2 = \frac{1}{f}\left[e^{2\gamma}(\mathrm{d}\rho^2 + \mathrm{d}z^2) + \rho^2\mathrm{d}\varphi^2\right] - f\mathrm{d}t^2, \tag{1}$$

где ρ, z, φ и t — канонические координаты Вейля и время. Здесь $f = f(\rho, z)$ и $\gamma = \gamma(\rho, z)$.

Уравнения Эйнштейна для аксиально-симметричных гравитационных полей вне источника имеют вид:

$$f\Delta f = (\vec{\nabla} f)^2. \tag{2}$$

$$4\frac{\partial\gamma}{\partial\rho} = \rho f^{-2}\left(\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right), \quad 2\frac{\partial\gamma}{\partial z} = \rho f^{-2}\frac{\partial f}{\partial\rho}\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{3}$$

Операторы Δ и $\vec{\nabla}$ определяются по формулам

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{4}$$

$$\vec{\nabla} \equiv \vec{\rho_0}\frac{\partial}{\partial\rho} + \vec{z_0}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{5}$$

При замене

$$f = e^{2\Psi} \tag{6}$$

уравнение (2) становится линейным:

$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = 0. \tag{7}$$

Статья поступила в редакцию 26 мая 2009 г.

3. Метод функции Грина

В правой части (7) содержится нуль, хотя на самом деле должна быть сингулярная функция, характеризующая распределение источников.

Пусть $\sigma(\rho, z)$ — массовая плотность таких источников, и тогда перепишем (7) в виде

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=\sigma(\rho, z), \tag{8}$$

Пример 1. Пусть

$$\sigma(\rho, z)=2m\delta(z)\int\limits_0^{+\infty}g(k)J_0(k\rho)k\mathrm{d}k, \tag{9}$$

где $\delta(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\chi z}\mathrm{d}\chi$ — δ-функция Дирака, $J_0(k\rho)$ — функция Бесселя, m — вещественная постоянная, $g(k)$ — производная гладкая функция.

Будем искать решение в форме

$$\Psi(\rho, z)=\frac{2}{\pi}m\int\limits_0^{+\infty}k\mathrm{d}k\int\limits_0^{+\infty}g(k)J_0(k\rho)e^{i\chi z}G(k,\chi)\mathrm{d}\chi. \tag{10}$$

Функция Грина $G(k,\chi)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta^{-1}[J_0(k\rho)e^{i\chi z}]=G(k,\chi)J_0(k\rho)e^{i\chi z}, \tag{11}$$

где Δ^{-1} — обратный оператор к (4).

С помощью уравнения Бесселя:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)J_0(k\rho)=-k^2J_0(k\rho) \tag{12}$$

мы находим

$$G(k,\chi)=-\frac{1}{k^2+\chi^2}. \tag{13}$$

Если подставим (13) в (10), то получим решение

$$\Psi(\rho, z)=-m\int\limits_0^{+\infty}g(k)J_0(k\rho)e^{-kz}\mathrm{d}z. \tag{14}$$

а) В случае $g(k)=k^n$, где $n=0,1,2,\ldots$, мы имеем решения

$$\Psi(\rho, z)=-m\Gamma(n+1)\left(\sqrt{\rho^2+z^2}\right)^{-n-1}\times P_n\left(\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\right), \tag{15}$$

где P_n — полиномы Лежандра, $\Gamma(n+1)$ — гамма-функция. Легко видеть, что решение (15) удовлетворяет уравнению (7).

В частном случае $n=0$ мы получаем решение Шази–Керзона

$$\Psi(\rho, z)=-\frac{m}{\sqrt{\rho^2+z^2}}. \tag{16}$$

б) В случае $g(k) = +k^n J_n(\gamma k)$, где n, $\nu = 0,1,2,\ldots$; γ, m — вещественные постоянные, $J_\nu(\gamma k)$ — функция Бесселя, мы имеем решение

$$\Psi(\rho,z) = -\frac{mz^{-n-\nu-1}}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\nu} \times \\ \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+\nu+1+2k)}{k!\Gamma(k+1)} F\left(-k,-k;\nu+1;\frac{\gamma^2}{\rho^2}\right)\left(-\frac{\rho^2}{4z^2}\right)^k, \quad (17)$$

где $\Gamma(\nu)$ — гамма-функция, $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ — гипергеометрическая функция. При $n = \nu = \gamma = 0$ мы получаем (16).

Пример 2. Пусть

$$\sigma(\rho,z) = 2\frac{\delta(\rho)}{\rho}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \tilde{g}(\chi)\frac{\sin\chi m}{\chi}\cos\chi z \mathrm{d}\chi, \quad (18)$$

где $\delta(\rho) = \int\limits_0^{+\infty} \rho J_0(k\rho)k\mathrm{d}k$ — δ-функция Дирака, $J_0(k\rho)$ — функция Бесселя, $\tilde{g}(\chi)$ — произвольная гладкая функция.

Будем искать решение в форме

$$\Psi(\rho,z) = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \tilde{g}(\chi)J_0(k\rho)\frac{\cos\chi z\sin\chi m}{\chi}G(k,\chi)\mathrm{d}\chi. \quad (19)$$

Функция Грина $G(k,\chi)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta^{-1}[J_0(k\rho)\cos\chi z] = G(k,\chi)J_0(k\rho)\cos\chi z. \quad (20)$$

Из (20) находим

$$G(k,\chi) = -\frac{1}{k^2+\chi^2}.$$

В этом случае получим решение

$$\Psi(\rho,z) = -\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\chi z\sin\chi m}{\chi}\tilde{g}(\chi)K_0(\chi\rho)\mathrm{d}\chi = \\ = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(z-m)\chi}{\chi}\tilde{g}(\chi)K_0(\chi\rho)\mathrm{d}\chi - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(z+m)\chi}{\chi}\tilde{g}(\chi)K_0(\chi\rho)\mathrm{d}\chi, \quad (21)$$

где $K_0(\chi\rho)$ — функция Макдональда.

Если $\tilde{g}(\chi) = \chi^{\lambda+1}$, $\lambda = \mathrm{const}$, то мы получим

$$\Psi(\rho,z) = 2\frac{2^\lambda\Gamma^2(\frac{2+\lambda}{\lambda})}{\pi\rho^{2+\lambda}}\left[(z-m)F\left(\frac{2+\lambda}{2},\frac{2+\lambda}{2};\frac{3}{2};-\frac{(z-m)^2}{\rho^2}\right) - \right. \\ \left. -(z+m)F\left(\frac{2+\lambda}{2},\frac{2+\lambda}{2};\frac{3}{2};-\frac{(z+m)^2}{\rho^2}\right)\right], \quad (22)$$

где $F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ — гипергеометрическая функция. В частном случае $\lambda = -1$ мы получим решение Шварцшильда

$$\Psi(\rho,z) = \ln\frac{z-m+\sqrt{\rho^2+(z-m)^2}}{z+m+\sqrt{\rho^2+(z+m)^2}}.$$

4. Заключение

Что можно сказать о физическом смысле полученных решений? По всей видимости, они описывают поля деформированных статических аксиально-симметричных источников. Кроме того, преимуществом метода функции Грина является то, что он позволяет строить в явном виде функции источников рассматриваемых решений.

Литература

1. *Schwarzschild K.* Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinishen Theorie // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. — 1916. — Vol. 7. — P. 189.
2. *Weyl H.* Zur Gravitationstheorie // Annal. Physik. — 1917. — Vol. 54. — P. 117.
3. *Chazy I.* Sur le champ de gravitation de deux masses fixes dans la théorie de la relativité // Bull. Soc. Math. France. — 1924. — Vol. 52. — P. 17.
4. *Curzon H.* Bipolar Solutions of Einstein's Gravitational Equations // Proc. Math. Soc. London. — 1924. — Vol. 23. — P. 477.

UDC 530.12:531.51

The Green's Function for Static Gravitational Einstein Fields

Ts. I. Gutsunaev, A. A. Shaideman, J. D. Arias Hernandez, J. F. Vizuete Franco, A. V. Kalmykov

Department of Theoretical Physics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

We apply the method of Green's function to generating axisymmetric static solutions to Einstein's equations.

Key words and phrases: Einstein's equations, static solutions, Green's function.