УДК 532.5, 519.6

Численное моделирование волн-убийц в океане

А. В. Горленко[*]**, А. И. Смирнова**[†]**,**
Р. В. Шамин[‡]**, А. В. Юдин**[§]

[*] *Кафедра прикладной математики*
Московский государственный технологический университет «Станкин»
127994, Москва, Вадковский пер., 1

[†] *Кафедра информационных технологий*
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, 117198, Россия

[‡] *Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН*
Российский университет дружбы народов
Новосибирский государственный университет
Нахимовский проспект, д. 36, Москва, 117851, Россия

[§] *Кафедра дифференциальных уравнений и математической физики*
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, 117198, Россия

Рассматриваются современные подходы к изучению аномально больших поверхностных волн в океане, так называемых волн-убийц с помощью вычислительных экспериментов. Дано описание вычислительной экспериментальной установки, описаны численные используемые численные методы, приведён обзор полученных результатов.

Ключевые слова: волны на воде, волны-убийцы, гидродинамика идеальной жидкости, вычислительные эксперименты.

1. Введение

В последнее время большое количество научных работ посвящено изучению волн-убийц в Мировом океане. Действительно, эти волны представляют собой внезапные одиночные волны огромной амплитуды (более 30 м). Такие аномально большие волны, в русскоязычной научной литературе называемые волнами убийцами, представляют собой серьёзную опасность, как для крупных судов, так и для морских сооружений. Описание многочисленных катастрофических случаев, связанных с волнами убийцами можно найти в монографиях: [1,2]. По объективным причинам изучение таких волн непосредственно в океане с помощью натурных экспериментов является очень затруднённым. С другой стороны попытки изучения волн-убийц с помощью лабораторных экспериментов также оказываются очень сложными. Наиболее перспективным методом изучения таких волн становится вычислительный эксперимент. Отметим некоторые работы, посвящённые волнам-убийцам: [3–7].

С помощью вычислительных экспериментов можно изучать различные аспекты волн-убийц. Наиболее актуальными нам представляются следующие направления в изучении волн-убийц с помощью вычислительных методов:

1) получение характерных портретов волн-убийц;
2) получение оценок вероятностей возникновения волн-убийц в зависимости от параметров начального волнения;
3) изучение качественных характеристик волн-убийц;

Статья поступила в редакцию 7 июля 2012 г.

Авторы благодарят академика РАН В.Е. Захарова за внимание и постоянную поддержку нашей работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта НШ-7550.2006.2 и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Математические методы в нелинейной динамике», а также при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих учёных в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (Договор №11.G34.31.0035 от 25 ноября 2010 между МинОбрНауки РФ, НГУ и ведущим учёным).

4) выяснение вопросов устойчивости волн-убийц относительно внешних возмущений;
5) изучение динамических процессов во время образования волн-убийц;
6) моделирование воздействия волн-убийц на суда и морские сооружения.

Для решения указанных проблем необходимо иметь хорошо разработанный инструментарий для проведения вычислительных экспериментов и обработки результатов. В частности, необходимо иметь средства для моделирования волн-убийц, удовлетворяющие следующим требованиям:

1) высокая точность проводимых расчётов,
2) проведение расчётов на больших временных интервалах,
3) построение начальных данных, соответствующих волнам в океане,
4) достаточно высокая скорость проведения расчётов.

В настоящей работе рассматриваются математические модели, основанные на динамических уравнениях в конформных переменных. Эти уравнения рассматривались в ряде работ [8–10]. Мы будем использовать вариант уравнений, предложенный в работах [11, 12]. Эти уравнения являются эквивалентными уравнениям Эйлера, описывающим нестационарное потенциальное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью. Многие научные работы, посвящённые волнам убийцам, основаны на этих уравнениях. Практика их использования показала, что эти уравнения обладают рядом превосходных качеств:

1) простота программирования численных методов
2) очень высокая точность расчётов
3) возможность проводить расчёты на огромных временных интервалах
4) вычислительная устойчивость численных схем

Помимо вычислительного аспекта эти уравнения оказались очень удобными и для теоретического изучения. В цикле работ [13–17] были изучены вопросы существования и единственности решений, оценка времени существования, сходимость численных методов.

2. Вычислительная экспериментальная установка

Для решения указанных выше задач по изучению волн-убийц в лаборатории нелинейных волновых процессов Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН под руководством академика РАН В.Е.Захарова развёрнуты работы по созданию мощной вычислительной экспериментальной установки, под названием RWSH (Rogue Waves Simulation Host). Данная установка представляет собой масштабируемый программный комплекс, позволяющий проводить вычислительные эксперименты по моделированию нелинейной динамики поверхностных волн идеальной жидкости. С помощью данного комплекса возможно проводить самые различные вычислительные эксперименты с нелинейными волнами на воде. Можно проводить как единичные эксперименты, так и потоковые однотипные эксперименты. Вычислительная установка может быть развернут как на персональном компьютере, так и на высокопроизводительных кластерах. Приведём основные блоки системы RWSH:

1) интерфейсный блок построения начальных условий
2) ядро расчётов
3) модуль визуализации
4) база данных
5) сайт в Интернет для удалённого управления расчётами и доступа к результатам экспериментов

С помощью вычислительной экспериментальной установки уже были получены важные результаты о вероятности возникновения волн-убийц, представленные в работе [18].

Отметим, что помимо чисто научных задач данный комплекс играет важную роль и в привлечении к научной работе молодёжи - прежде всего, студентов.

Так, части программного комплекса RWSH были представлены на авторитетном международном конкурсе Imagine Cup 2011.

3. Основные уравнения

В настоящей работе моделирование волн-убийц основано на численном решении уравнений, описывающих нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью. Мы будем рассматривать плоское течение с бесконечно глубоким дном. По горизонтальной переменной мы будем рассматривать 2π-периодические условия. Такие предположения являются естественными для моделирования волн-убийц.

Пусть идеальная жидкость занимает бесконечную область (в переменных (x, y)), ограниченную криво-линейной границей. Мы вводим комплексную плоскость $z = x + iy$. Эту область мы можем (по теореме Римана) конформно отобразить на нижнюю полуплоскость с переменными $w = u + iv$. Обратное конформное отображение выражается аналитической функцией

$$z = z(t, w).$$

Эта функция является также функцией времени, поскольку мы рассматриваем нестационарную задачу. Зная функцию $z(t, u)$, мы можем восстановить профиль свободной поверхности. Для описания потенциального течения идеальной жидкости необходимо также знать потенциал скоростей. Поскольку потенциал является гармонической функцией, то все его значения могут быть описаны значением этого потенциала лишь на границе области. Пусть $\psi(t, x)$ — значение потенциала скоростей на свободной поверхности. Соответственно, через $\Phi(t, z)$ мы обозначим аналитическую в нижней полуплоскости функцию такую, что $\operatorname{Re}\Phi(t, x) = \Psi(t, x)$. Будем рассматривать функцию $\Pi(t, w) = \Phi(t, z(t, w))$, которая также будет аналитичной в нижней полуплоскости. Теперь мы введём новые переменные:

$$R(t, w) = \frac{1}{z'(t, w)}, \quad V(t, w) = i\frac{\Pi'(t, w)}{z'(t, w)}.$$

Здесь и далее штрихом мы обозначаем производную по переменной w. Эти функции являются аналитичными в нижней полуплоскости и удовлетворяют краевым условиям:

$$R(t, w) \to 1, \quad \operatorname{Im} w \to -\infty, \quad V(t, w) \to 0, \quad \operatorname{Im} w \to -\infty.$$

Поскольку мы рассматриваем поверхностные волны 2π-периодические по переменной x, то и функции R и V также будут 2π-периодическими по переменной u. Тогда функции R и V можно представить в виде рядов Фурье:

$$R(w, t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) e^{-ikw},$$

$$V(w, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) e^{-iku}.$$

Функции R и V полностью описывают динамику поверхностных волн идеальной жидкости. При этом нам достаточно знать лишь значения этих функций на вещественной оси (при $v = 0$) поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать аргумент u вместо w.

Покажем, как с помощью этих функций восстановить свободную поверхность и значение потенциала на свободной поверхности. Для функции $\frac{1}{R}$ имеет место представление

$$\frac{1}{R} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) e^{-iku}.$$

Значения коэффициентов c_k несложно получить рекуррентно из соотношения

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) e^{-ikw}\right) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) e^{-ikw}\right) = 1.$$

Умножением рядов можно получить разложение

$$-i\frac{V(t,u)}{R} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t) e^{-iku}.$$

Теперь восстановим функцию $z(t,u)$ следующим образом

$$z(t,u) = u + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-ik} c_k(t) e^{-iku},$$

а функцию $\Pi(u,t)$ — по формуле

$$\Pi(u,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-ik} d_k(t) e^{-iku}.$$

Свободную поверхность мы получим как геометрическое место точек по следующему правилу

$$\Gamma(t) = \{(\operatorname{Re} z(t,u), \operatorname{Im} z(t,u)) :\ u \in (0, 2\pi)\}.$$

Значение потенциала на свободной поверхности находится по формуле

$$\Psi(t,u) = \operatorname{Re} \Pi(t,u).$$

Функции R и V удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered}
\dot{R}(t,u) = i(U(t,u)R'(t,u) - U'(t,u)R(t,u)), \\
\dot{V}(t,u) = i(U(t,u)V'(t,u) - B'(t,u)R(t,u)) + g(R(t,u) - 1), \\
0 < u < 2\pi, \quad 0 < t < T, \\
R(t,0) = R(t,2\pi),\ V(t,0) = V(t,2\pi),\ 0 < t < T, \\
R(0,u) = R_0(u),\ V(0,u) = V_0(u),\ 0 < u < 2\pi.
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь функции U и B вычисляются по формулам:

$$U = P(V\overline{R} + \overline{V}R),\ B = P(V\overline{V}),\ P = \frac{1}{2}(I + iH).$$

4. Численные методы

Рассмотрим построение численных методов для моделирования системы (1). Поскольку рассматриваемая система уравнений является системой эволюционных дифференциальных уравнений в частных производных, то мы будем использовать проекционный метод сведения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Учитывая, что система (1) является системой интегро-дифференциальных уравнений, то мы будем использовать представление неизвестных функций с помощью рядов Фурье.

Пусть $N \geq 1$ — фиксированное число размерности приближенной задачи. Приближенные решения будем искать в виде

$$R^N(t,u) = 1 + \sum_{k=1}^{N} r_k^N(t)e^{-iku}, \quad V^N(t,u) = \sum_{k=1}^{N} v_k^N(t)e^{-iku}.$$

Использование представления в виде конечных сумм Фурье имеет существенные преимущества при вычислении оператора P. Действительно, пусть

$$h = \sum_{k=-N}^{N} h_k e^{-iku}.$$

Тогда мы имеем

$$P[h] = \frac{h_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} h_k e^{-iku}.$$

Поскольку операция умножения функций не является замкнутой в классе функций, представимых в виде конечных сумм Фурье, введём бинарную операцию $*$, которая является замкнутой для множества таких функций. Пусть

$$A = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{-iku}, B = \sum_{k=-N}^{N} b_k e^{-iku}.$$

Тогда для $C = AB$ имеем

$$C = \sum_{k=-2N}^{2N} c_k e^{-iku}.$$

Операцию $*$ введём следующим образом

$$A * B = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{-iku},$$

где c_k — коэффициенты Фурье функции C.

Приближенные решения R^N и V^N будем искать как решения системы уравнений

$$\dot{R}_i^N = i\left(U^N * R_u^N - U_u^N * R^N\right),$$
$$\dot{V}_i^N = i\left(U^N * V_u^N - B_u^N * R^N\right) + g\left(R^N - 1\right),$$

где

$$U^N = P\left(V^N * \overline{R}^N + \overline{V}^N * R^N\right), B = P\left(V^N * \overline{V}^N\right).$$

Полученная система является системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов Фурье функций R и V. Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений уже может быть решена численно с помощью стандартного метода Рунге–Кутта 4-го порядка.

5. Обзор результатов численного моделирования

В предыдущем пункте мы привели формулы для численного расчёта динамики поверхностных волн на воде. В частности по этим формулам можно рассчитывать волны-убийцы. Приведём некоторые результаты вычислительных экспериментов, в которых изучались волны-убийцы.

На рис. 1 мы приводим профиль характерной волны-убийцы, возникшей в ходе нелинейной динамики поверхностных волн в океане. Начальные данные соответствовали волнам, бегущим в одну сторону, что в океане соответствует морской зыби.

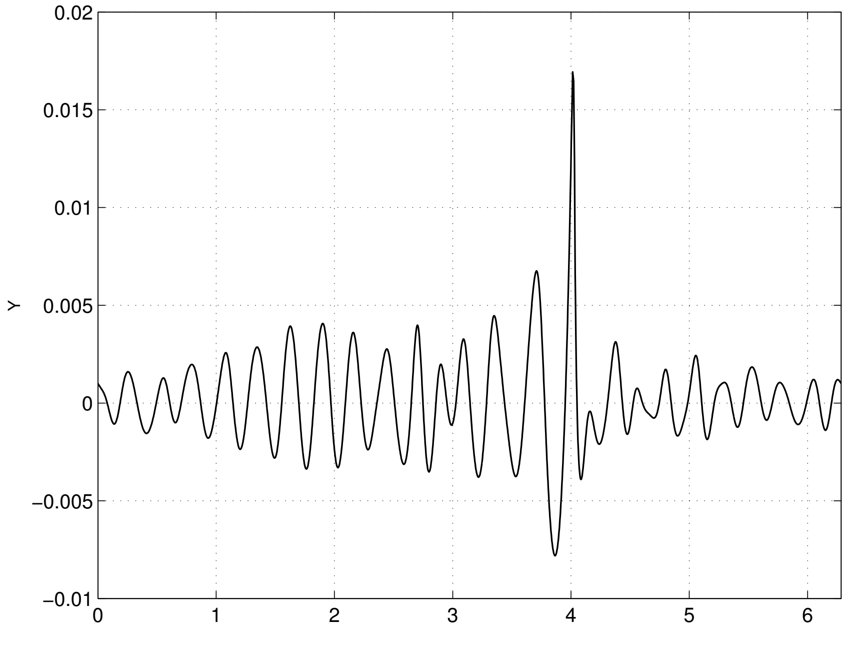

Рис. 1. Характерный профиль волны-убийцы

В совместных работах с академиком РАН В.Е. Захаровым проводились масштабные вычислительные эксперименты по моделированию волн-убийц с целью получения вероятности возникновения волн-убийц. Результаты этих исследований можно найти в работах [18, 19].

С помощью нашей вычислительной экспериментальной установки мы проводили также численные опыты по исследованию вопросов устойчивости волн-убийц относительно внешних воздействий и возмущения начальных данных. На рис. 2 мы приводим сравнительные графики профиля волны-убийцы и этой же волны, рассчитанной при наличии внешнего возмущения.

Из этого рисунка и из многочисленных подобных численных опытом можно заключить, что волны-убийцы в океане представляют собой устойчивый объект относительно внешнего (ветрового) возмущения.

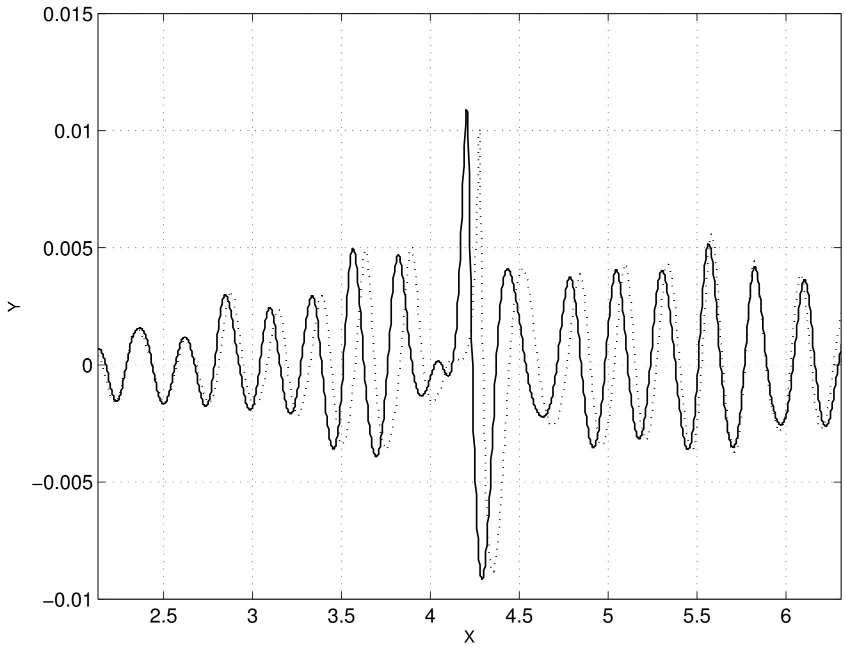

Рис. 2. Устойчивость волны-убийцы относительно внешнего возмущения

6. Заключение

В настоящем кратком обзоре мы рассмотрели чрезвычайно эффективные методы моделирования волн на воде, которые мы использовали для изучения волн-убийц в океане. Центральное место мы уделили достаточно подробному изложению численных методов, с помощью которых мы проводили вычислительные эксперименты. Отметим, что использование техники конформных переменных для расчёта нелинейной динамики поверхностных волн идеальной жидкости, позволяет использовать достаточно простые численные методы, которые отличаются вычислительной устойчивостью. Приведённые формулы в разделах 3 и 5 могут быль легко реализованы на обычных персональных компьютерах.

Литература

1. *Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A.* Rogue Waves in the Ocean // The European Physical Journal — Special Topics. — 2010. — Vol. 185, No 1. — Pp. 67–80. — [Springer, 2009. 15. Slunyaev A. Primary Title: Freak Wave Events and the Wave Phase Coherence].
2. *Давидан И. Н., Лопатухин Л. И.* На встречу со штормами. — Л.: Гидрометеоиздат, 1982. [*Davidan I. N., Lopatukhin L. I.* Na vstrechu so shtormami. — L.: Gidrometeoizdat, 1982.]
3. *Бухановский А. В., Лопатухин Л. И., Рожков В. А.* Физика и статистика необычных морских ветровых волн // Известия Русского географического общества. — 2005. — Т. 137, № 6. — С. 19–28. [*Bukhanovskiyj A. V., Lopatukhin L. I., Rozhkov V. A.* Fizika i statistika neobihchnihkh morskikh vetrovihkh voln // Izvestiya Russkogo geograficheskogo obthestva. — 2005. — T. 137, No 6. — S. 19–28.]
4. *Рубан В. П.* Гигантские волны в слабо-скрещенных состояниях морской поверхности // ЖЭТФ. — 2010. — Т. 137(3). — С. 599–607. [*Ruban V. P.* Gigantskie volnih v slabo-skrethennihkh sostoyaniyakh morskoyj poverkhnosti // ZhEhTF. — 2010. — T. 137(3). — S. 599–607.]

5. *Chalikov D.* Freak Waves: Their Occurrence and Probability // Phys. Fluids. — 2009. — Vol. 21, No 7. — Pp. 076602–1–076602–18.
6. *Slunyaev A.* Primary Title: Freak Wave Events and the Wave Phase Coherence // The European Physical Journal - Special Topics. — 2010. — Vol. 185, No 1. — Pp. 67–80.
7. *Zakharov V. E., Dyachenko A. I., Prokofiev A. O.* Freak Waves as Nonlinear Stage of Stokes Wave Modulation Instability // Eur. J. Mech. B Fluids. — 2006. — Pp. 677–692.
8. *Whitney J. C.* The Numerical Solution of Unsteady Free-Surface Flows by Conformal Mapping // Proc. Se-cond Inter. Conf. on Numer. Fluid Dynamics / Ed. by M. Holt. — 1971. — Pp. 458–462.
9. *Овсянииков Л. В.* К обоснованию теории мелкой воды // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. / Акад. наук СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 2010. — № 15. — С. 104–125. [*Ovsyaniikov L. V.* K obosnovaniyu teorii melkoyj vodih // Dinamika sploshnoyj sredih: sb. nauch. tr. / Akad. nauk SSSR, Sib. otd-nie, In-t gidrodinamiki. — 2010. — No 15. — S. 104–125.]
10. *Chalikov D., Sheinin D.* Sheinin D. Modeling of Extreme Waves Based on Equations of Potential Flow with a Free Surface // Journ. Comp. Phys. — 2005. — Vol. 210. — Pp. 247–273.
11. *Дъяченко А. И.* О динамике идеальной жидкости со свободной поверхностью // Докл. Акад. наук. — 2001. — Т. 376, № 1. — С. 27–29. [*Djyachenko A. I.* O dinamike idealjnoyj zhidkosti so svobodnoyj poverkhnostjyu // Dokl. Akad. nauk. — 2001. — T. 376, No 1. — S. 27–29.]
12. *Zakharov V. E., Dyachenko A. I., Vasilyev O. A.* New Method for Numerical Simulation of a Nonstationary Potential Flow of Incompressible Fluid with a Free Surface // Eur. J. Mech. B Fluids. — 2002. — Vol. 21. — Pp. 283–291.
13. *Шамин Р. В.* Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. — М.: Наука, 2008. [*Shamin R. V.* Vihchisliteljnihe ehksperimentih v modelirovanii poverkhnostnihkh voln v okeane. — M.: Nauka, 2008.]
14. *Шамин Р. В.* Динамика идеальной жидкости со свободной поверхностью в конформных переменных // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2008. — Т. 28. — С. 3–144. [*Shamin R. V.* Dinamika idealjnoyj zhidkosti so svobodnoyj poverkhnostjyu v konformnihkh peremennihkh // Sovremennaya matematika. Fundamentaljnihe napravleniya. — 2008. — T. 28. — S. 3–144.]
15. *Шамин Р. В.* К вопросу об оценке времени существования решений системы Коши-Ковалевской с примерами в гидродинамике со свободной поверхностью // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — Т. 21. — С. 133–148. [*Shamin R. V.* K voprosu ob ocenke vremeni suthestvovaniya resheniyj sistemih Koshi-Kovalevskoyj s primerami v gidrodinamike so svobodnoyj poverkhnostjyu // Sovremennaya matematika. Fundamentaljnihe napravleniya. — 2007. — T. 21. — S. 133–148.]
16. *Шамин Р. В.* Об одном численном методе в задаче о движении идеальной жидкости со свободной поверхностью // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2006. — Т. 9, № 4. — С. 379–389. [*Shamin R. V.* Ob odnom chislennom metode v zadache o dvizhenii idealjnoyj zhidkosti so svobodnoyj poverkhnostjyu // Sibirskiyj zhurnal vihchisliteljnoyj matematiki. — 2006. — T. 9, No 4. — S. 379–389.]
17. *Шамин Р. В.* Поверхностные волны на воде минимальной гладкости // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2010. — Т. 35. — С. 126–140. [*Shamin R. V.* Poverkhnostnihe volnih na vode minimaljnoyj gladkosti // Sovremennaya matematika. Fundamentaljnihe napravleniya. — 2010. — T. 35. — S. 126–140.]
18. *Захаров В. Е., Шамин Р. В.* О вероятности возникновения волн-убийц //

Письма в ЖЭТФ. — 2010. — Т. 91, № 2. — С. 68–71. [*Zakharov V. E., Shamin R. V.* O veroyatnosti vozniknoveniya voln-ubiyjc // Pisjma v ZhEhTF. — 2010. — T. 91, No 2. — S. 68–71.]

19. *Zakharov V. E., Dyachenko A. I., Shamin R. V.* How Probability for Freak Wave Formation can be Found // The European Physical Journal — Special Topics. — 2010. — Vol. 185, No 1. — Pp. 113–124.

UDC 532.5, 519.6

Numerical Simulation of Freak Waves in the Ocean

A. V. Gorlenko[*], **A. I. Smirnova**[†], **R. V. Shamin**[‡], **A. V. Udin**[§]

[*] *Department of Applied Mathematics*
Moscow State Technological University «Stankin»
Vadkovsky lane, 1, Moscow, 127994, Russia
[†] *Department of Information Technology*
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia
[‡] *P.P.Shirshov Institute of Marine Geology and Geophysics FEB RAS*
Peoples' Friendship University of Russia
Novosibirsk State University
Nahimovski prospect, 36, Moscow, 117997, Russia
[§] *Department of Differential Equations and Mathematical*
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia

Modern approaches to studying of freak waves at ocean by means of computing experiments are consi-dered. The description of computing experimental installation is given, used numerical methods are described, and the review of the received results is given too.

Key words and phrases: freak waves, water waves, numerical experiments, free surface.