
Математическое моделирование

УДК 517.9

Структура решений и динамический хаос в нелинейных дифференциальных уравнениях

С. В. Сидоров

*Учебно-научный институт гравитации и космологии
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6*

Рассмотрена структура решений нелинейных диссипативных систем дифференциальных уравнений, включая системы дифференциальных уравнений с хаотическим поведением. Показано, что структура решений таких систем, представленная предельными циклами или инвариантными торами, определяется спектром показателей Флоке. Важную роль в формировании структуры решений вещественных нелинейных систем играют предельные циклы, имеющие комплексные, но не комплексно сопряжённые показатели Флоке. Приведены примеры использования понятия структуры решений нелинейных дифференциальных уравнений при исследовании образования уединённых бегущих волн и явления турбулентности.

Ключевые слова: нелинейные диссипативные дифференциальные уравнения, динамический хаос, бифуркации, хаотические аттракторы.

1. Введение

Согласно замечанию В.И. Арнольда наибольшая часть путей, связывающих абстрактные математические теории с приложениями в самых различных областях знаний, проходит через дифференциальные уравнения [1]. В наибольшей мере это относится к физике, которая находится на переднем рубеже познания мира и где в наибольшей степени развит аппарат математических моделей. Стремление глубже познать природу окружающего нас мира неумолимо приводит к использованию нелинейных дифференциальных уравнений. Мощный интерес к исследованию нелинейных уравнений в прошлом столетии выявил, с одной стороны, наличие структур в решениях этих уравнений, а с другой — привёл к открытию явления, получившего название динамического хаоса. Данная работа посвящена обсуждению указанных вопросов и их роли в теоретической физике.

Долгое время основным классическим подходом к изучению нелинейных динамических систем было явное или приближённое нахождение частного решения, индивидуальной траектории. Однако такой подход, как отмечалось ещё в работах А. Пуанкаре [2], не является эффективным даже при исследовании достаточно простых динамических систем, таких, например, как задача трёх тел. Поэтому для нелинейных уравнений проблема описания структуры решений, как некоторого множества траекторий в пространстве состояний, объединённых некоторым общим признаком, является чрезвычайно важной.

Важным аргументом в пользу исследования структуры решений нелинейных уравнений в математической физике служит то обстоятельство, что в отличие от линейных уравнений, где имеет место принцип суперпозиции, и, следовательно, структура решений является непрерывной, линейные уравнения могут иметь только дискретную структуру независимо от того, является ли модель локальной, представленной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, или распределённой, описываемой дифференциальными уравнениями в частных производных. Существование дискретной структуры решений нелинейных дифференциальных уравнений может иметь важное значение для квантовой физической теории. Установление структуры решения нелинейных дифференциальных уравнений позволяет установить базу как математическую, так и физическую,

которая необходима для достаточно полного и всестороннего охвата нелинейности в уже известной нам области и, что ещё важнее, для дальнейшего развития физической теории.

И, наконец, актуальность данной проблеме придаёт открытие в нелинейных динамических системах дифференциальных уравнений такого явления, как динамический (или детерминированный) хаос, суть которого состоит в появлении при определённых условиях хаотических режимов даже в достаточно простых нелинейных системах дифференциальных уравнений с «хорошей» гладкой правой частью. Вопрос о причине появления хаотического поведения решений в нелинейных динамических системах также непосредственно связан со структурой решений нелинейных дифференциальных уравнений.

Появление работ, определивших структуру решений нелинейных дифференциальных уравнений, следует отнести, по-видимому, к середине прошлого столетия. В конце 30-х начале 40-х годов А. Андрономым и Е. Хопфом [3, 4] в нелинейных диссипативных дифференциальных уравнениях было открыто существование особого вида решений — предельных циклов, изолированных периодических решений. Несколько позже, в конце 40-х годов, Тьюринг установил существование в параболических нелинейных системах дифференциальных уравнений другого вида изолированных решений — диссипативных стационарных структур [5].

Следующим ярким примером существования структуры решений в нелинейных дифференциальных уравнениях явилось открытие группой С. Курдюмова и А. Самарского [6] режимов с обострением. Было установлено, что в зависимости от начальных условий и свойств среды в решениях некоторых нелинейных уравнений теплопроводности развиваются структуры различной сложности, описываемые собственными функциями соответствующего автомодельного уравнения. Затем последовали и другие замечательные открытия: спиральные автоволны, структуры в реакциях Белоусова–Жаботинского и пр., указывающие на принципиальную возможность существования различных структур решений в нелинейных дифференциальных уравнениях.

Предпринятые в прошлом попытки развить понятие структуры решений на весь класс диссипативных нелинейных уравнений [7, 8] натолкнулись на открытую во второй половине прошлого века проблему динамического хаоса в решениях таких систем. Эта проблема существовала, почти на сорок лет затормозила установление структуры решений в диссипативных нелинейных системах нелинейных дифференциальных уравнений.

Даже приведённые немногочисленные примеры ясно показывают, что вопрос о структуре решений нелинейных дифференциальных уравнений ввиду их большого разнообразия не может быть решён достаточно просто и однозначно, как в линейных дифференциальных уравнениях. В данной работе речь пойдёт о структуре решений нелинейных диссипативных систем дифференциальных уравнений. Результаты исследования решений диссипативных систем нелинейных обыкновенных автономных дифференциальных уравнений, неавтономных дифференциальных уравнений, уравнений с запаздывающим аргументом, эволюционных параболических систем дифференциальных уравнений в частных производных позволяют, по-видимому, говорить о существовании единой структуры решений этого класса уравнений [9, 10].

2. Метод исследования решений динамических систем

Для нелинейных систем дифференциальных уравнений практически отсутствуют аналитические методы решения. Попытка решать такие задачи с помощью методов линеаризации или теории возмущений дают, как правило, некоторые приближения, пригодные в основном для оценок. Наиболее часто таким подходом пользуются физики, упуская при этом возможность ухватить суть нелинейного явления в целом.

Приведённое здесь исследование нелинейных систем дифференциальных уравнений опирается на численный метод. Использование численных методов в решении задач нелинейной динамики, а тем более при исследовании хаотических систем, обычно вызывает беспокойство относительно достоверности результатов.

В основном это связано с тем, что оценка погрешности численного интегрирования дифференциальных уравнений, полученная в предположении выполнения условия Липшица для правой части системы, может расти экспоненциально времени интегрирования [11]. Однако эта оценка является чрезвычайно грубой и не соответствует наблюдениям в реальном времени при численном моделировании устойчивых решений. Если же помимо условия Липшица наложить на правую часть дифференциального уравнения некоторые дополнительные условия, то получается более корректная оценка погрешности [12, 13]. Например, в [12] показано, что в случае скалярного дифференциального уравнения оценка погрешности не зависит от длины промежутка интегрирования, если производная правой части по решению этого уравнения отрицательна. Р. П. Федоренко получил более корректную оценку погрешности численного интегрирования системы

$$\dot{x}(t) = F(x(t)), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad F = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T. \quad (1)$$

В [13] показано, что если матрица $A(x) = F_x(x)$ симметрична (или является симметричной частью $F_x(x)$), то даже для «неустойчивых» систем, у которых матрица $A(x)$ неположительна в смысле $(A(x)\xi, \xi) \leq 0 \quad \forall \xi, x$, численное решение на произвольном промежутке времени имеет точность $O(\tau^{k-1})$, где τ — шаг интегрирования системы, k — порядок аппроксимации численного метода.

Наибольшее значение в динамических системах имеет исследование их аттракторов: неподвижных точек, предельных циклов, инвариантных торов. В работе для исследования нелинейных диссипативных систем дифференциальных уравнений автором использован *метод продолжения по параметру устойчивых решений* — аттракторов этих систем. Такой подход наиболее защищён от погрешностей численных экспериментов и позволяет воспроизвести результаты практически на любом компьютере. В связи с этим устойчивость и точность численных методов принципиально важны при интегрировании на больших промежутках времени систем дифференциальных уравнений, обладающих орбитально устойчивыми периодическими решениями. Автором была получена оценка точности численного интегрирования устойчивого периодического решения за время, соизмеримое с периодом [14].

Пусть нелинейная система (1) обыкновенных дифференциальных уравнений имеет орбитально устойчивое периодическое решение $x_0(t+T) = x_0(t)$, представленное в фазовом пространстве своим предельным циклом. Линеаризованная на её решении $x_0(t)$ неавтономная система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\dot{y}(t) = A(t)y, \quad (2)$$

где $y(t) = x(t) - x_0(t)$, $A(t) = F_x(x(t))$ — непрерывная на $(-\infty, +\infty)$ T -периодическая матрица, то есть $A(t+T) \equiv A(t)$, $T > 0$. Основным результатом для системы (2) определён теоремой Флоке [15, 16], согласно которой для линейной системы с T -периодической матрицей нормированная при $t = 0$ фундаментальная матрица решений имеет вид

$$Y(t) = P(t)e^{Bt}, \quad (3)$$

где $P(t) \in C^1$ — T -периодическая неособенная матрица, причём $P(0) = E$, а B — постоянная матрица. Иными словами, фундаментальную матрицу $Y(t)$ решений можно представить как произведение периодической матрицы $P(t)$ с периодом T и матрицы-решения для системы с постоянными коэффициентами. Причём существует неособенная действительная матрица C такая, что $Y(t+T) = Y(t)C$. Матрица $C = Y(T)$, называемая матрицей монодромии, и матрица B связаны следующим образом [15, 16]

$$C = e^{BT}, \quad B = \frac{1}{T} \ln C.$$

Используя преобразование Ляпунова

$$y(t) = P(t)e^{-Bt}u, \quad (4)$$

легко показать, что линейная система (2) с периодической матрицей $A(t)$ приводима. Действительно, подставляя (4) в (2), найдём

$$\dot{y}(t) \equiv \dot{Y}(t)e^{-Bt}u(t) - Y(t)e^{-Bt}Bu(t) + Y(t)e^{-Bt}\dot{u}(t) = A(t)Y(t)e^{-Bt}u(t).$$

Принимая во внимание $\dot{Y}(t) = A(t)Y(t)$, получим

$$\dot{u}(t) = Bu(t), \quad (5)$$

что свидетельствует о приводимости линейной периодической системы.

Таким образом, собственные значения λ_j , определяемые из векового уравнения

$$\det(B - \lambda E) = 0,$$

являются одновременно корнями характеристического уравнения системы (5).

Собственные числа матрицы B называются характеристическими показателями системы (2), или показателями Флоке, а собственные числа матрицы C называют мультипликаторами. Показатели Флоке λ_j связаны с мультипликаторами ρ_j следующим соотношением [15, 16]

$$\lambda_j = \frac{1}{T}(\ln |\rho_j| + i \arg \rho_j + 2k\pi), \quad (j = 1, 2, \dots, m, \quad k \in \mathbb{Z}).$$

Важным является то обстоятельство, что периодическая система (2) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда по крайней мере один из её мультипликаторов равен 1.

Устойчивость периодических решений в первом приближении по Ляпунову определяется устойчивостью соответствующей линейной системы с непрерывной периодической матрицей. Такая система устойчива тогда и только тогда, когда все её мультипликаторы ρ_i , ($i = 1, 2, \dots, m$) системы (2) лежат внутри замкнутого единичного круга $|\rho| \leq 1$, причём мультипликаторы, лежащие на окружности $|\rho| = 1$, имеют простые элементарные делители. Отсюда следует, что устойчивая периодическая система должна иметь неположительную матрицу Флоке. В [14] показано, если на матрицу Флоке наложить условие $(B\xi, \xi) \leq 0$, $\forall \xi$ из заданной области решения, тогда имеет место следующая оценка для полной погрешности численного интегрирования устойчивых систем дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими решениями на промежутке $0 \leq t \leq t_n = n\tau \sim C/\tau$

$$E(\tau) \leq \max_n |x_n - x(t_n)| = e^{C_1} \cdot O(\tau^{k-1} + \delta/\tau), \quad (6)$$

где x_n и $x(t_n)$ — соответственно значения численного и точного решений на n -ом шаге интегрирования, δ — погрешность округления.

Важно, что в выражении (6) функция $E(\tau)$ имеет единственный локальный экстремум — минимум при значении $\tau = \tau_{\text{опт}}$. Последнее означает, что погрешность уменьшается при уменьшении шага интегрирования τ только до некоторого значения $E_{\text{min}} = E(\tau_{\text{опт}})$. Попытка увеличить точность решения задачи (1) при аппроксимации разностной схемой за счёт уменьшения величины шага дискретизации τ приводит при $\tau < \tau_{\text{опт}}$ к резкому увеличению погрешности. Заметим, что высокий порядок аппроксимации методов Рунге–Кутты позволяет интегрировать дифференциальные уравнения с высокой точностью при сравнительно высоком шаге дискретизации.

3. Универсальный сценарий перехода к хаосу в диссипативных нелинейных дифференциальных уравнений

3.1. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Долгое время, начиная с известной работы Э. Лоренца [17], явление динамического (или детерминированного) хаоса в системах нелинейных дифференциальных уравнений связывалось со сверхвысокой чувствительностью решений к начальным условиям. Однако в случае систем дифференциальных уравнений достаточно простого вида с невысокой размерностью, с «хорошей» гладкой правой частью, с ограниченными производными решения по начальным условиям и по параметрам сверхчувствительность решений к начальным условиям при строго определённых значениях параметров представляется достаточно странным явлением. Использование аналитических методов для решения проблемы динамического хаоса в течение почти сорока лет не дало ясных ответов на природу этого явления. Результатом аналитических исследований стало появление нескольких сценариев образования хаоса в решениях нелинейных уравнений. Это — для обыкновенных дифференциальных уравнений — сценарий удвоения периода предельных циклов (или сценарий Фейгенбаума) и сценарий «перемежаемости», предложенный П. Берже, И. Помо и П. Манневилем [18, 19], и почему-то отдельный сценарий Д. Рюэля, Ф. Такенса и С. Ньюхауса [20] для уравнений в частных производных, сценарий образования хаоса путём разрушения трёхмерных торов сколь угодно малым возмущением.

Различные, не связанные друг с другом сценарии, естественно, вызывают вопросы относительно их области «определения» — в каких случаях, на каких множествах дифференциальных уравнений имеет место тот или иной сценарий, об их отношении друг к другу. Неудивительно, что в результате разрозненных численных исследований большого числа отличных друг от друга диссипативных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений было введено множество различных определений нерегулярных аттракторов: «странный» аттрактор, хаотический аттрактор, стохастический аттрактор, гиперболический аттрактор, квазиаттрактор, аттрактор типа Лоренца, спиральный аттрактор и др., что ещё более затруднило понимание природы динамического хаоса.

Последовательное применение метода численного продолжения по параметру устойчивых решений позволило изучать не отдельные решения и их бифуркации, а каскады бифуркаций устойчивых решений, что дало возможность установить закономерность перехода к динамическому хаосу, общую для широкого класса диссипативных систем нелинейных дифференциальных уравнений, включая неавтономные двумерные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, автономные системы с размерностью более двух, дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом и параболические уравнения [21]. Основные черты этого сценария продемонстрируем на хорошо известной системе Лоренца из трёх обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = x(r - z) - y, \quad \dot{z} = xy - bz, \quad (7)$$

основное достоинство которой наряду с её простым видом состоит в том, что в этой системе наиболее отчётливо проявились все существенные черты единого механизма образования динамического хаоса.

Сразу отметим, что приведённый выше результат относительно погрешности численного интегрирования устойчивых систем с периодическими решениями позволил исключить из дальнейшего рассмотрения один из сценариев перехода к хаосу, а именно сценарий «перемежаемости», установленный, к слову сказать, также в системе Лоренца. В системе (7) имеется цикл, устойчивый в диапазоне значений параметра $r \in (148,5; 166,07)$ (рис. 1а). При большем значении параметра, например, при $r = 166,1$, было обнаружено [19], что система находится в режиме так называемой «перемежаемости», когда движение в окрестности бывшего цикла прерывается нерегулярными хаотическими всплесками (рис. 1б). При

этом предполагалось [18], что система, якобы, «помнит» о существовавшем в ней цикле. При дальнейшем увеличении параметра r в системе возникает хаос.

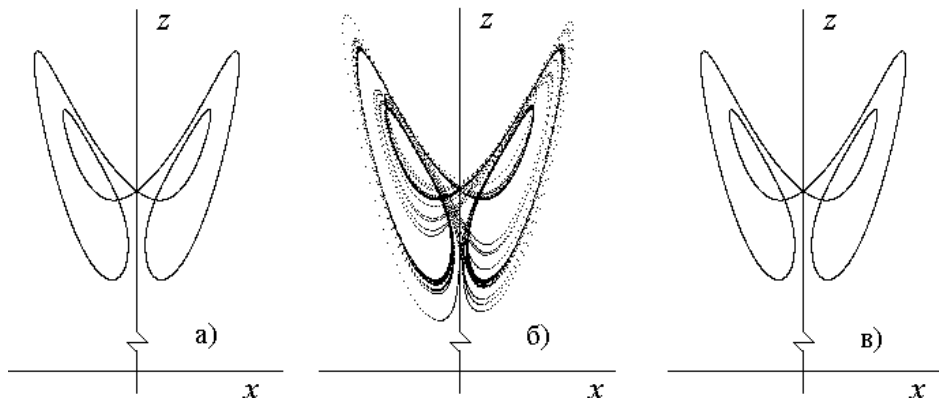


Рис. 1. Проекция на плоскость (x, z) фазового портрета цикла: а) при $r = 166$, $\tau = 0,003$; б) при $r = 166,1$, $\tau = 0,03$ и в) при $r = 170$, $\tau = 0,03$

Действительно, хаотический всплеск имеет место в системе (7) при $r = 166,1$, если принять при интегрировании системы методом Рунге–Кутты 4-го порядка шаг интегрирования $\tau \sim 10^{-3} \div 10^{-5}$. Если же взять $\tau = 2 \cdot 10^{-2}$, то никаких хаотических всплесков не наблюдается ни при $r = 166,1$, ни даже при $r = 166,8$. Более того, при $\tau = 0,03$ этот же устойчивый предельный цикл в системе существует вплоть до значения $r \approx 170$. Таким образом, в системе Лоренца переход к хаосу через «пережимаемость» связан исключительно с численными ошибками.

Началом сценария перехода к хаосу всегда является каскад бифуркаций удвоения периода циклов (гармонический каскад Фейгенбаума), который сходится к хаотическому аттрактору Фейгенбаума (рис. 2). Последний представляет собой полуустойчивую траекторию с бесконечным периодом, заключённую в узкой ограниченной области фазового пространства.

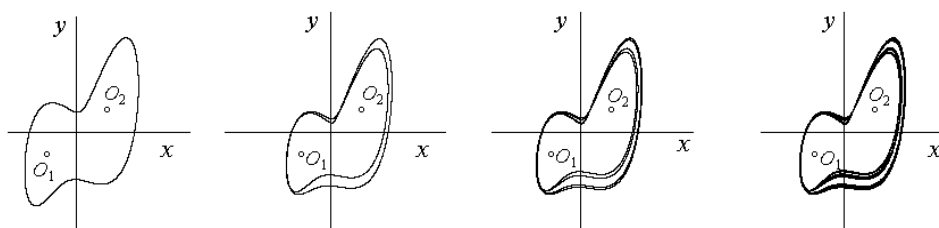


Рис. 2. Пример каскада бифуркаций удвоения периода цикла в системе Лоренца

Более сложная структура хаотического аттрактора создаётся субгармоническим каскадом бифуркаций рождения устойчивых циклов, период которых определяется согласно порядку Шарковского [22]. Этот каскад завершается рождением цикла периода 3, после потери устойчивости которого образуется более сложный хаотический аттрактор (рис. 3)

Дальнейшее усложнение хаотических аттракторов, рождающихся в точках накопления значений бифуркационного параметра, идёт через гомоклинический каскад бифуркаций рождения устойчивых циклов, сходящихся к гомоклиническому контуру — петле сепаратрисы особой точки типа седло–фокус (рис. 4).

В системах большей размерности сценарий перехода к хаосу может осуществляться не на предельных циклах, а на двумерных инвариантных торах, как это

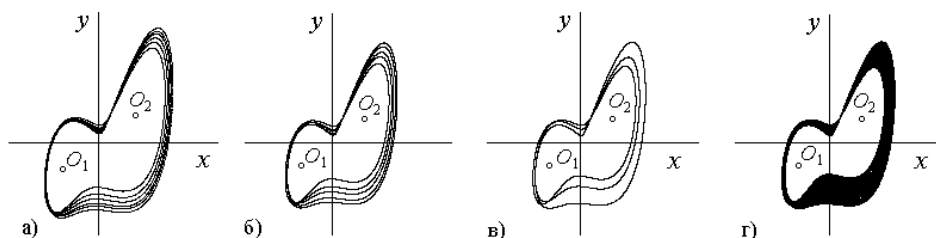


Рис. 3. Пример субгармонического каскада бифуркаций рождения в системе Лоренца циклов, кратность периода которых определяется порядком Шарковского

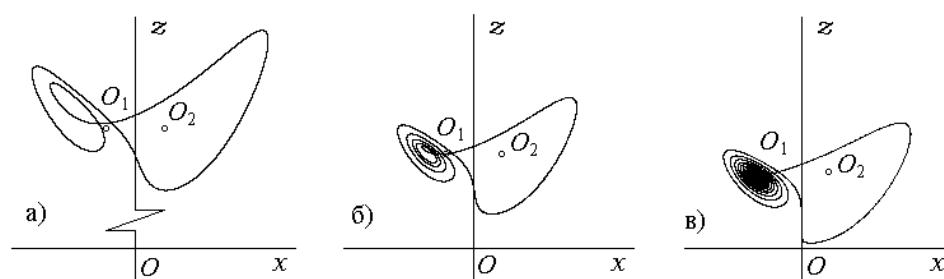


Рис. 4. Циклы гомоклинического каскада в системе Лоренца

имеет место в комплексной системе уравнений Лоренца,

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y, \quad \dot{Y} = -XZ + rX - aY, \quad \dot{Z} = -bZ + \frac{1}{2}(X^*Y + XY^*), \quad (8)$$

где $X = x_1 + ix_2$, $Y = y_1 + iy_2$, $a = a_1 + ia_2$, $r = r_1 + ir_2$, которая эквивалентна пятимерной вещественной системе в переменных $x_1 = \operatorname{Re} X$, $x_2 = \operatorname{Im} X$, $y_1 = \operatorname{Re} Y$, $y_2 = \operatorname{Im} Y$, $z = Z$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\sigma x_1 + \sigma y_1, & \dot{x}_2 &= -\sigma x_2 + \sigma y_2, \\ \dot{y}_1 &= -x_1 z + r_1 x_1 - y_1 - e y_2 - r_2 x_2, & \dot{y}_2 &= -x_2 z + r_1 x_2 + e y_1 - y_2 + r_2 x_1, \\ \dot{z} &= x_1 y_1 + x_2 y_2 - b z. \end{aligned} \quad (9)$$

В этой системе после потери устойчивости предельного цикла (рис. 5а) сначала рождается устойчивый двумерный инвариантный тор (рис. 5б), представленный топологическим произведением двух предельных циклов — исходного (рис. 5а) и вторичного (рис. 5в), появившегося в результате повторной бифуркации Андронова–Хопфа. При продолжении решения по параметру двумерный тор теряет устойчивость, и в результате бифуркации удвоения периода вторичного внешнего цикла рождается двумерный инвариантный тор удвоенного по этому циклу периода (рис. 6б).

С этого решения начинается каскад бифуркаций удвоения периода двумерного инвариантного тора по вторичному циклу, который завершается образованием аттрактора Фейгенбаума. При продолжении решения по параметру после рождения аттрактора Фейгенбаума имеет место субгармонический каскад бифуркаций рождения устойчивых двумерных инвариантных торов, о чем свидетельствует появление двумерного тора с периодом кратности 3 по вторичному циклу (рис. 6в). Этот каскад завершается образованием субгармонического хаотического аттрактора на двумерном инвариантном торе (рис. 6г).

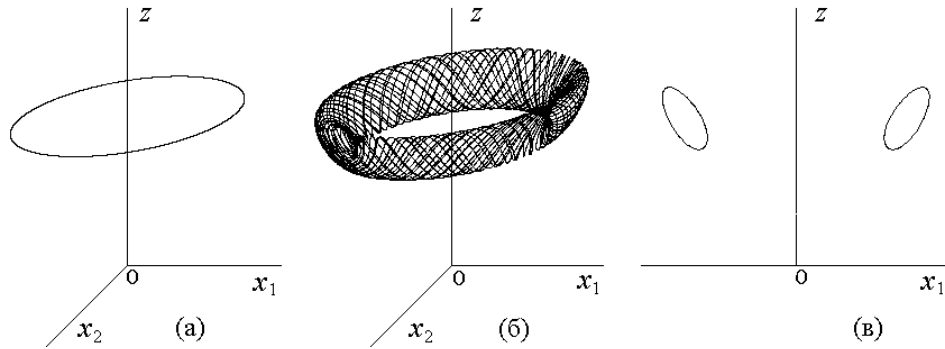


Рис. 5. Двумерный инвариантный тор в системе (9)

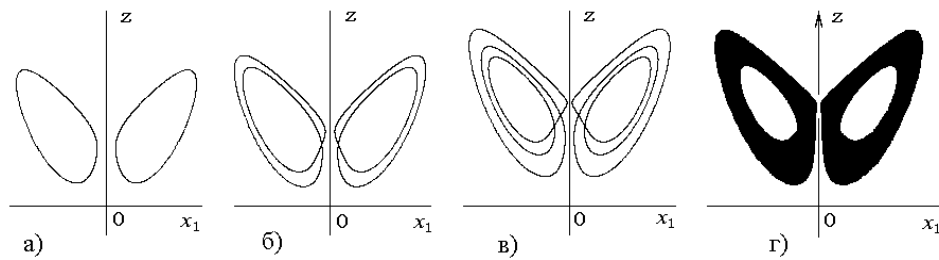


Рис. 6. Каскад бифуркаций двумерного инвариантного системы (9), показанный в сечении Пуанкаре плоскостью $x_2 = 0$

3.2. Дифференциальные уравнения в частных производных

Образование динамического хаоса в распределённых системах рассмотрим на примере нестационарного уравнения Гинзбурга–Ландау [23]

$$W_\tau = W + (1 + ic_1)W_{rr} - (1 + ic_2)W|W|^2, \quad (10)$$

где $W = u + iv$ — комплекснозначная функция, c_1 и c_2 — действительные постоянные, и модели «брюсселятора»

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 u_{xx} + (B - 1)u + A^2 v + h(u, v), \\ v_t &= d_2 v_{xx} - Bu - A^2 v - h(u, v), \end{aligned} \quad (11)$$

где d_1, d_2 — коэффициенты диффузии, $h(u, v) = (B/A)u^2 + 2Auv + u^2v$.

Уравнение (10) описывает решения динамической системы после потери устойчивости стационарного состояния — термодинамической ветви. Вид решения зависит от типа краевой задачи. В случае второй краевой задачи сначала рождается устойчивое пространственно однородное периодическое решение, а в первой краевой задаче — пространственно неоднородное также периодическое решение.

Рассмотрим вначале вторую краевую задачу на отрезке $l = \pi$. В вещественных переменных эта задача выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} u_t &= u + u_{xx} - c_1 v_{xx} - (u - c_2 v)(u^2 + v^2), \\ v_t &= v + c_1 u_{xx} + v_{xx} - (c_2 u + v)(u^2 + v^2), \\ u_x(0, t) &= u_x(l, t) = v_x(0, t) = v_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \\ 0 &\leq x \leq l, \quad 0 \leq t < \infty. \end{aligned} \quad (12)$$

Для анализа решений этого уравнения в бесконечномерном фазовом пространстве удобно использовать сечение данного пространства гиперплоскостью $u(l/2) = 0$. Рассмотрим отображение Пуанкаре в координатах $(u(0), v(l/2))$ этой гиперплоскости. При фиксированном значении параметра c_1 исследовалась эволюция устойчивых решений при изменении параметра c_2 . Было установлено, что однородное по пространству периодическое решение, которое в фазовом пространстве переменных (u, v) соответствует предельному циклу, при изменении параметра c_2 теряет устойчивость, и появляется периодическое, но неоднородное по пространству решение, также представленное предельным циклом. Последний при дальнейшем продолжении по параметру теряет устойчивость, и в результате бифуркации Андронова–Хопфа происходит рождение двумерного инвариантного тора (рис. 7а). Этот тор также теряет устойчивость вследствие бифуркации удвоения периода первичного (исходного) предельного цикла, и рождается двумерный инвариантный тор с удвоенным по первичному циклу периодом (рис. 7б). Далее следует каскад бифуркаций удвоения периода тора по первичному циклу (рис. 7в), завершающийся образованием хаотического аттрактора Фейгенбаума (рис. 7г).

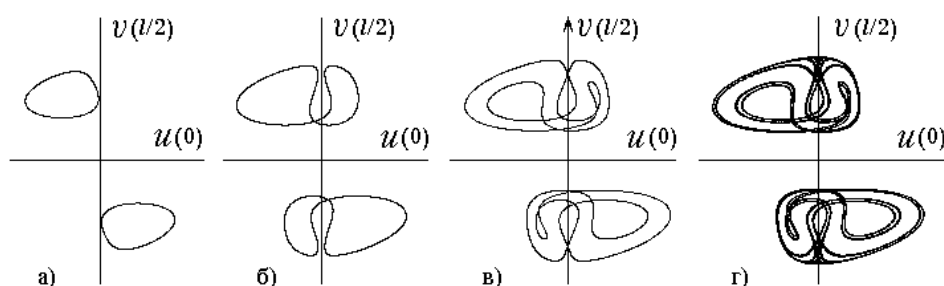


Рис. 7. Каскад бифуркаций удвоения периода двумерного инвариантного тора по первичному циклу показан в отображениях Пуанкаре для второй краевой задачи уравнения (10)

Численно показано, что во второй краевой задаче уравнения (10) может иметь место также субгармонический каскад бифуркаций рождения устойчивых двумерных инвариантных торов по вторичному (внешнему) циклу, входящему в топологическое произведение. Из рис. 8 видно, что субгармонический каскад бифуркаций по вторичному циклу реализовался на торе удвоенного по первичному (внутреннему) циклу периода.

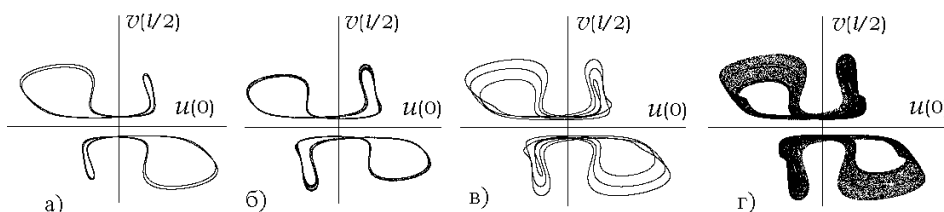


Рис. 8. Субгармонический каскад рождения устойчивых двумерных инвариантных торов по вторичному циклу для второй краевой задачи уравнения (10)

Для первой краевой задачи уравнения (10) в широком диапазоне изменения параметров c_1 и c_2 и длины отрезка l хаотических решений не установлено. Здесь при продолжении устойчивых решений по параметру имеет место каскад бифуркаций рождения устойчивых многомерных инвариантных торов. Этот процесс показан на рис. 9 вплоть до образования четырёхмерного тора.

В системе брюсселятор (11) установлено, что хаотические режимы существуют и в первой, и во второй краевой задаче [24]. Переход к хаотическим режимам в

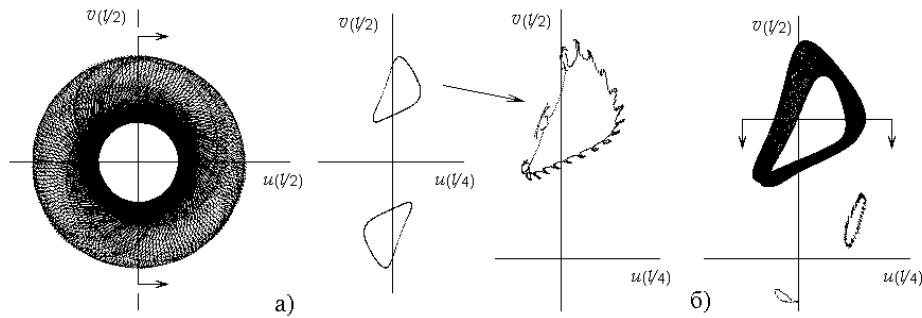


Рис. 9. Каскад бифуркаций рождения устойчивых многомерных инвариантных торов в задаче Дирихле на отрезке для уравнения (10)

модели (11) в случае первой краевой задачи осуществляется через каскад бифуркаций удвоения периода циклов и субгармонический каскад бифуркаций рождения устойчивых циклов (рис. 10), а в случае второй краевой задачи — через каскад бифуркаций рождения устойчивых двумерных инвариантных торов, который аналогичен рассмотренному выше для уравнения Гинзбурга–Ландау (рис. 11).

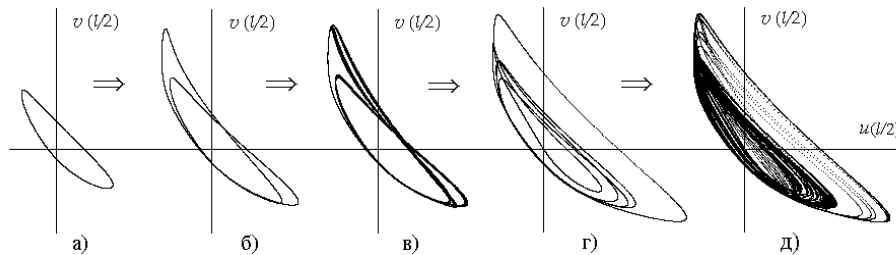


Рис. 10. Субгармонический каскад бифуркаций предельных циклов в задаче Дирихле на отрезке для системы (11)

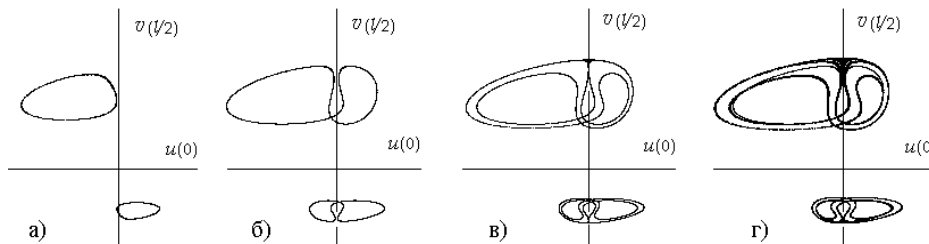


Рис. 11. Фрагменты отображения Пуанкаре в сечении $u(l/2) = 0$ на плоскость $(u(0), v(l/2))$: а) двумерного тора; б) двумерного тора удвоенного периода по внутренней частоте; в) двумерного инвариантного тора периода 4 по внутренней частоте; г) сингулярного аттрактора Фейгенбаума

Заметим, что хаотические аттракторы — аттрактор Фейгенбаума, субгармонический и гомоклинический аттракторы образуются не в результате одномоментного разрушения некоторого регулярного решения при воздействии сколь угодно малого возмущения, а вследствие бесконечных каскадов бифуркаций рождения всё более сложных устойчивых периодических и квазипериодических решений, заключённых в достаточно узкой ограниченной области фазового пространства. Отсюда понятна так называемая сверхвысокая чувствительность решений к начальным условиям: в связи с высокой плотностью траекторий в ограниченной

области фазового пространства при любой сколь угодно малой погрешности интегрирования таких систем неминуемо будут иметь место перескакивания решения с одной траектории на другую или с одного участка траектории на другой.

Другим важным результатом изложенного выше численного исследования является следующее наблюдение. Хаотические аттракторы — аттрактор Фейгенбаума, субгармонический и гомоклинический аттракторы образуются в точках накопления бифуркационного параметра, т. е. при некоторых критических значениях бифуркационного параметра, отвечающих завершению соответствующего каскада бифуркаций. Следовательно, эти хаотические аттракторы не являются структурно устойчивыми образованиями.

4. Динамика показателей Флоке в каскаде бифуркаций удвоения периода предельных циклов

Ключ для понимания механизма образования хаотических решений даёт исследование спектра мультипликаторов и показателей Флоке в хаотических системах дифференциальных уравнений при их эволюции в пространстве параметров. В работе [25] установлены особенности спектра матрицы монодромии и матрицы Флоке для каскада бифуркаций удвоения периода цикла, определяющие структуру решений диссипативных нелинейных систем с хаотическим поведением.

Установлено, что в спектре матрицы монодромии, соответствующей хаотической системе, существует пара мультипликаторов, имеющих при образовании устойчивого цикла вещественные значения, одно из которых расположено внутри единичного круга вблизи точки $+1$, другое — вблизи точки $+0$. При продолжении устойчивого периодического решения по параметру эти мультипликаторы сближаются до одинаковой положительной величины, после чего становятся комплексно сопряжёнными и движутся по траектории, близкой к круговой, до момента, пока снова не примут равные отрицательные величины. Затем эти мультипликаторы снова расходятся: один из них устремляется по вещественной оси к -1 , другой движется к точке -0 (рис. 12а).

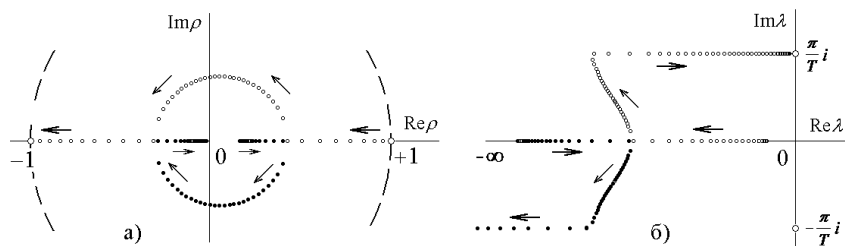


Рис. 12. Динамика мультипликаторов (а) и показателей Флоке (б)

При сближении мультипликаторов с положительными величинами соответствующая им пара показателей Флоке также сближается, оставаясь на вещественной прямой в отрицательной полуплоскости (рис. 12б). Когда мультипликаторы становятся комплексно сопряжёнными, показатели Флоке также принимают комплексно сопряжённые значения, при этом их мнимые части равны $\pm i\alpha/T$, где α — фаза комплексно сопряжённых мультипликаторов, T — период устойчивого предельного цикла. Изменение мнимой части пары комплексно сопряжённых показателей Флоке происходит до величины $\pm i\pi/T$, соответствующей переходу мультипликаторов из комплексно сопряжённых в вещественные отрицательные величины. При расхождении мультипликаторов в отрицательной полуплоскости мнимые части показателей Флоке более не меняются, оставаясь равными $\pm i\pi/T$. При этом вещественная часть одного из показателей Флоке стремится к нулю, а другого к $-\infty$. При пересечении одним из показателей Флоке мнимой оси слева направо предельный цикл с периодом T теряет устойчивость, и рождается устойчивый предельный цикл удвоенного периода, снова имеющий пару вещественных мультипликаторов, в которой величина одного из них близка к значению $+1$, а

другого — к значению $+0$. При продолжении этого устойчивого решения по параметру сценарий повторяется.

Предельный цикл, имеющий комплексные показатели Флоке, у которых вещественные части различны, а мнимые отличаются на $2\pi i/T$, назван *сингулярным* [26, 27].

5. Основные структуры решений в диссипативных нелинейных дифференциальных уравнений

Существование структуры решений в нелинейных диссипативных системах дифференциальных уравнений обусловлено тем, что в динамических системах важнейшую роль играют инвариантные объекты фазового потока: изолированные периодические орбиты, инвариантные торы, инвариантные устойчивые и неустойчивые многообразия, центральные многообразия и т. д. Одним из основных элементов структуры в решениях рассмотренных выше нелинейных уравнений следует, видимо, считать автоколебательные решения, представленные в фазовом пространстве предельными циклами.

Дальнейшее развитие представление о структуре решений в нелинейных диссипативных вещественных системах дифференциальных уравнений связано понятием сингулярного предельного цикла — устойчивого изолированного периодического решения, у которого комплексные, но не комплексно сопряжённые показатели Флоке в отличие от регулярного предельного цикла, имеющего в вещественной системе дифференциальных уравнений только комплексно сопряжённые показатели Флоке.

Наиболее просто выглядит структура периодических решений в двумерных неавтономных и в трёхмерных автономных нелинейных диссипативных системах дифференциальных уравнений. Если показатели Флоке периодического решения, представленного в фазовом пространстве предельным циклом, комплексно сопряжённые, то цикл является регулярным, и сложная динамика в этом случае отсутствует. Если же цикл становится сингулярным, то при продолжении этого решения по параметру в системе возникает сложная динамика, обусловленная субгармоническим (в смысле порядка Шарковского) каскадом бифуркаций рождения устойчивых предельных циклов, которые завершаются образованием сингулярных (хаотических) аттракторов в соответствии с рассмотренным выше сценарием.

Более сложная структура решений имеет место в системах с размерностью выше трёх. В таких системах даже в случае регулярного предельного цикла возможна более сложная конфигурация векторного поля и, соответственно, более сложные структуры решений. Так, если среди показателей Флоке регулярного предельного цикла имеется комплексно сопряжённая пара, для которой выполнены условия бифуркации Андронова–Хопфа, то в системе появляется двумерный инвариантный тор как топологическое произведение исходного цикла и цикла, родившегося вследствие отмеченной бифуркации. Дальнейшая эволюция этого тора при продолжении решения по параметру зависит от того, останутся ли оба цикла регулярными или хотя бы один из них станет сингулярным. В первом случае возможен каскад бифуркаций рождения устойчивых многомерных инвариантных торов, а во втором — каскад бифуркаций рождения устойчивых двумерных инвариантных торов, кратность периода которых хотя бы по одной частоте определяется порядком Шарковского. Примеры таких решений приведены выше в системе Брюсселятор и в уравнении Гинзбурга–Ландау для первой и второй краевой задач на отрезке.

Ещё более сложные решения, установленные для нестационарного уравнения Гинзбурга–Ландау в случае второй краевой задачи на отрезке, представлены на рис. 8. Здесь показана последовательность двумерных инвариантных торов представленных топологическим произведением внутреннего цикла удвоенного периода на циклы субгармонического каскада, имеющие кратность периода согласно порядку Шарковского. Последнее свидетельствует о том, что оба цикла, входящие в топологическое произведение двумерного инвариантного тора, являются сингулярными.

Обратим внимание, что спектр показателей Флоке определяет и структуру решений линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [28] и структуру нелинейных диссипативных систем. Однако в случае линейных систем структуры решений непрерывна в силу принципа суперпозиции, согласно которому общее решение системы дифференциальных уравнений представляется линейной комбинацией линейно независимых решений, что в конечном счёте определяет множество всех частных решений в заданной точке пространства параметров.

В случае нелинейных уравнений принцип суперпозиции невозможен. Множество дискретных частных решений в нелинейных системах дифференциальных уравнений реализуется через каскады бифуркаций рождения устойчивых (и неустойчивых) решений при изменении системного параметра. Если в спектре показателей Флоке периодического решения нелинейной системы присутствуют комплексно сопряжённые и вещественные показатели, то при изменении системного параметра множество ограниченных решений представлено только предельными циклами и (в случае многомерных систем) торами различной размерности. В этом случае динамический хаос в системах отсутствует. Появление в спектре вещественной системы дифференциальных уравнений комплексных, но не комплексно сопряжённых показателей Флоке обозначает рождение сингулярного цикла. В этом случае изменение системного параметра обнаруживает каскады бифуркаций последовательного рождения более сложных решений, сходящихся в пределе к хаотическому сингулярному аттрактору.

В заключение обратим внимание на следующее обстоятельство. В бифуркации Тьюринга при потере устойчивости термодинамической ветви и в бифуркации удвоения периода предельного цикла при потере устойчивости периодического решения ровно одно собственное значение пересекает мнимую ось слева направо. В первом случае это собственное значение матрицы линеаризации на стационарном решении, во втором — собственное значение матрицы Флоке, определяющих устойчивость периодических решений. И в том и в другом случае рождаются новые устойчивые структуры — либо стационарная диссипативная структура, либо новое устойчивое периодическое или квазипериодическое (в случае инвариантных торов) решение.

6. Приложения

6.1. Проблема турбулентности

Л. Д. Ландау, видимо, первый попытался объяснить явление турбулентности, исходя из динамической теории нелинейных систем [29]. Он предложил механизм, называемый сейчас сценарием Ландау, согласно которому решение, соответствующее турбулентному течению, образуется через каскад бифуркаций Андронова–Хопфа, порождающий многомерные инвариантные торы. Против этого механизма решительно возразил Рюэль [30], предложивший свою гипотезу для объяснения турбулентности, в основе которой разрушение трёхмерных торов, образовавшихся после потери устойчивости двумерных торов, сколь угодно малым возмущением. Нами численно исследованы процессы перехода к турбулентному режиму для двух задач: течение вязкой несжимаемой жидкости за уступом и конвекция Рэлея–Бенара [31, 32]. Приведём только окончательные результаты исследований.

Для анализа решений использовался метод построения фазовых портретов и сечений Пуанкаре в трёхмерном подпространстве скоростей бесконечномерного фазового пространства при различных значениях чисел Рэлея и Прандтля. В задаче о движении жидкости за уступом было установлено, что после потери устойчивости в фазовом пространстве скоростей V_x, V_y, V_z термодинамической ветви, соответствующей ламинарному течению, наблюдается рождение предельного цикла в результате бифуркации Андронова–Хопфа. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса цикл теряет устойчивость, и образуется двумерный устойчивый инвариантный тор (рис. 13а), вид которого с ростом числа Рейнольдса сильно усложняется (рис. 13б), а затем рождается трёхмерный тор (рис. 13в).

Это свидетельствует о том, что в данной задаче отсутствует сингулярный предельный цикл, и механизм турбулентности обусловлен, скорее всего, сценарием Ландау.

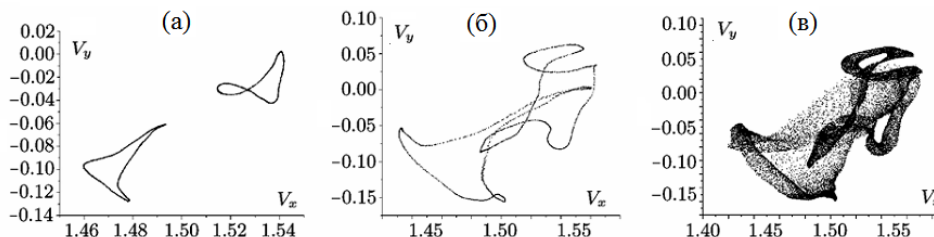


Рис. 13. Проекция сечения Пуанкаре $V_z = 0$ на плоскость (V_x, V_y) устойчивых двумерных и трёхмерного торов при различных значениях числа Рейнольдса

Иным образом развивается неустойчивость в задаче конвекции Рэлея–Бенара. Здесь также ламинарному течению соответствует неподвижная устойчивая точка в каждом трёхмерном подпространстве с координатами u, v, w . При увеличении значений числа Прандтля решение задачи в фазовом пространстве становится периодическим во времени. При дальнейшем увеличении числа Прандтля цикл теряет устойчивость, порождая двумерный инвариантный тор, проекция сечения Пуанкаре которого на плоскость (v, w) показана на рис. 14а. Дальнейшее увеличение значений числа Прандтля ведёт к рождению устойчивого двумерного тора удвоенного периода (рис. 14б).

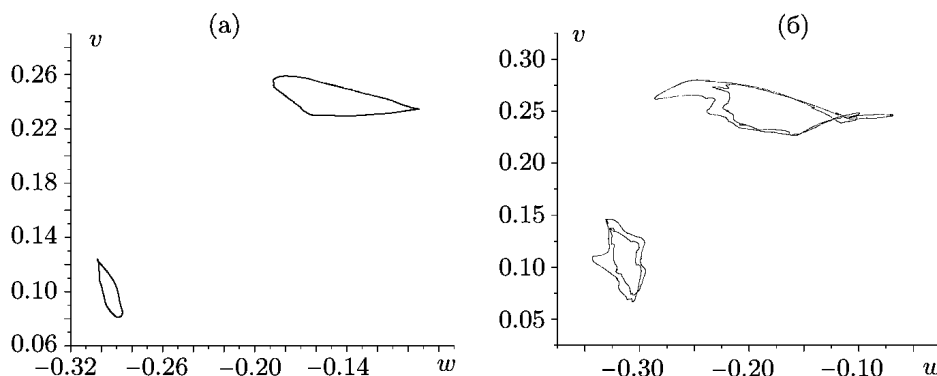


Рис. 14. Сечения Пуанкаре устойчивого двумерного тора (а) и устойчивого двумерного тора, удвоенного по вторичному циклу периода (б)

Данные результаты свидетельствуют о появлении в краевой задаче о конвекции Рэлея–Бенара сингулярного цикла в фазовом пространстве скоростей, и, видимо, следует ожидать развития турбулентности по сценарию образования механизма динамического хаоса.

Ни в одной из рассмотренных задач гипотеза Рюэля–Такенса не подтверждается.

6.2. Плоские бегущие волны в активных средах

К настоящему времени в наименьшей степени исследованы вопросы образования плоских бегущих волн в осциллирующих активных средах, представленных либо сетью связанных между собой колебательных элементов, либо распределённой средой, в которой отдельные физически малые элементы обладают автоколебательными свойствами. Трудности связаны с тем, что при использовании автоволнового приближения, позволяющего свести дифференциальные уравнения

в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно одной независимой переменной $\xi = x \pm c_0 t$, где c_0 — скорость волны, необходимо искать гомоклиническое решение этой системы, соответствующее уединённой бегущей волне в исходных уравнениях при $\xi \rightarrow \pm\infty$, не в стационарной неподвижной точке, а на периодическом решении.

Исходя из понятие структуры решений нелинейной системы дифференциальных уравнений, очевидно, что гомоклиническое решение может иметь место в системе, где рождается сингулярный предельный цикл. Использование этой идеи позволило описать распространение бегущих плоских волн в осциллирующей активной среде, которая моделируется согласно [33, 34] уравнением Гинзбурга–Ландау.

Задача Коши для вещественной системы из двух параболических уравнений

$$\begin{aligned} u_t &= u + u_{xx} - c_1 v_{xx} - (u - c_2 v)(u^2 + v^2), \\ v_t &= v + c_1 u_{xx} + v_{xx} - (c_2 u + v)(u^2 + v^2), \\ &-\infty < x < \infty, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \end{aligned} \quad (13)$$

в автоволновом приближении при условии, что система (13) имеет решение в форме бегущей волны $u(x, t) = \tilde{u}(x - c_0 t) = \tilde{u}(\xi)$, $v(x, t) = \tilde{v}(x - c_0 t) = \tilde{v}(\xi)$, имеет вид четырёх дифференциальных уравнений первого порядка [35]

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_2, \\ \alpha u'_2 &= -u_1 - c_0 u_2 + c_1(u_3 + c_0 u_4) + ((c_1 c_2 + 1)u_1 - (c_2 - c_1)u_3)(u_1^2 + u_3^2), \\ u'_3 &= u_4, \\ \alpha u'_4 &= c_1(u_1 + c_0 u_2) - u_3 - c_0 u_4 + ((c_2 - c_1)u_1 + (c_1 c_2 + 1)u_3)(u_1^2 + u_3^2), \end{aligned} \quad (14)$$

где $u_1 = \tilde{u}(\xi)$, $u_3 = \tilde{v}(\xi)$, $\alpha = 1 + c_1^2$.

Система (14) имеет неподвижную точку, совпадающую с началом координат фазового пространства. Эта точка является аттрактором системы (14) при значениях параметра c_0 , лежащих вдали от значения c_0^* , соответствующего образованию петли сепаратрисы, отвечающей условию $\tilde{u} \rightarrow \tilde{u}_0$, $\tilde{v} \rightarrow \tilde{v}_0$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$, где $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$ — некоторое периодическое решение. При продолжении устойчивого нулевого решения по параметру c_0 наблюдается потеря устойчивости этого решения, и вследствие бифуркации Андронова–Хопфа в системе (14) рождается предельный цикл. Дальнейшее уменьшение разности $\delta = c_0 - c_0^*$ приводит к повторной бифуркации Андронова–Хопфа, в результате которой образуется устойчивый двумерный инвариантный тор, как топологическое произведение двух циклов. Отображение Пуанкаре этого тора при сечении его плоскостью $u_1 = 0$ показано на рис. 15а.

При дальнейшем уменьшении разности δ наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода двумерного инвариантного тора по вторичному (внешнему) циклу (рис. 15б), завершающийся образованием сингулярного (хаотического) аттрактора Фейгенбаума (рис. 15в). При дальнейшем уменьшении величины δ следует субгармонический каскад бифуркаций рождения устойчивых двумерных инвариантных торов, кратность периодов которых по вторичному циклу определяется порядком Шарковского (рис. 15г). За субгармоническим каскадом рождения устойчивых двумерных торов вначале следует субгармонический сингулярный аттрактор (рис. 15д), а затем гомоклинический каскад рождения устойчивых двумерных инвариантных торов в виде топологического произведения первичного предельного цикла на циклы гомоклинического каскада (рис. 15е), завершающегося образованием петли сепаратрисы (рис. 15ж).

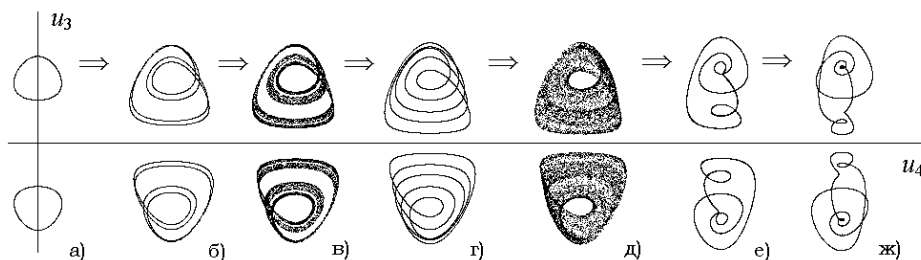


Рис. 15. Эволюция решения системы (14) при изменении параметра c_0 , соответствующая переходу к решению в форме бегущей волны в уравнении (10)

Таким образом, при $\delta = 0$ решение системы (14) представляет собой двумерный инвариантный тор как топологическое произведение первичного предельного цикла, родившегося в результате бифуркации Андронова–Хопфа при потере устойчивости тривиального решения, на петлю сепаратрисы, образовавшейся при завершении гомоклинического каскада бифуркаций. Полученное решение удовлетворяет условию существования периодических решений при $\xi \rightarrow \pm\infty$, так как последние обусловлены колебаниями, соответствующими первичному циклу, который и является особой точкой петли сепаратрисы гомоклинического контура.

Аналогичный механизм образования решений в виде плоских волн имеет место в модели открытых течений Р. Дайслера, примером которых служат течения в каналах [36], и применим для описания плоских волн в активных средах, в уравнении вида ФитцХью Нагумо [37].

7. Выводы

Численные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений, имеющие высокий порядок аппроксимации, являются надёжным инструментом исследования нелинейных динамических систем.

Структура решений диссипативных систем нелинейных дифференциальных уравнений свидетельствует о том, что образование хаотических решений в диссипативных нелинейных системах дифференциальных уравнений осуществляется в результате одних и тех же, указанных выше, бесконечных каскадов бифуркаций рождения устойчивых всё более сложных инвариантных множеств: предельных циклов и торов, а не в результате одномоментного разрушения некоторого регулярного решения.

Исследование решений в гидродинамических системах показало, что турбулентность нельзя объяснить каким-то одним единственным образом. Механизм появления турбулентности зависит как от вида течения, так и от типа краевой задачи. В задаче течения вязкой несжимаемой жидкости за уступом турбулентность развивается по сценарию Ландау, а в задаче конвекции Рэлея–Бенара турбулентность порождается каскадом бифуркаций удвоения периода двумерных инвариантных торов по одному из циклов входящих в топологическое произведение торов.

Литература

1. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. [Arnol'd V. I. Dopolnitel'nihe glavih teorii obihknovennihkh differencial'niikh uravneniy. — М.: Nauka, 1978.]
2. Пуанкаре А. Избранные труды в трёх томах. Т. II. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел. — М.: Наука, 1972. [Poincar'e A. Selected Works in Three Volumes. Vol. II. New Methods of Celestial Mechanics. Topology. Numbers Theory. — Moscow: Nauka, 1972]

3. *Андронов А. А., Понтрягин Л. С.* Грубые системы // ДАН СССР. — 1937. — Т. 14. — С. 247–251. [*Andronov A. A., Pontryagin L. S.* Grubihe sistemih // DAN SSSR. — 1937. — Т. 14. — С. 247–251.]
4. *Hopf E.* Abzweigung einer Periodischen Losung von einer Stationaren Losung eines Differential Systemen // Berichten der Math. Phys. Klass der Sachlichen Akademie der Wessenschaften zu Leipzig. — 1942. — Vol. 94.
5. *Turing A.* On the Chemical Basic of Morphogenesis // Phil. Trans. Roy. Soc. London. — 1952. — Vol. Ser. A, 237. — Pp. 37–52.
6. Режимы с обострением. Эволюция идеи. Законы коэволюции сложных структур / под ред. И. М. Макаров. Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения. — М.: Наука, 1998. [Makarov I. M. Regimes with Peaking. The Evolution of Ideas. Laws Coevolution of Complex Structures. — Moscow: Nauka, 1988]
7. О классификации решений системы нелинейных диффузионных уравнений в окрестности точки бифуркации. Современные проблемы математики / Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский. — ВИНТИ, 1986. — Т. 28. — С. 207–313. [O klassifikacii resheniy sistemih nelineyjnihkh diffuzionnihkh uravneniy v okrestnosti tochki bifurkacii. Sovremenniye problemih matematiki / T. S. Akhromeeva, S. P. Kurdyumov, G. G. Malineckiy, A. A. Samarskiyj. — VINITI, 1986. — Т. 28. — С. 207–313.]
8. Нестационарные структуры и диффузионный хаос / Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский. — М.: Наука, 1992. [Nestacionarniye strukturih i diffuzionniyh khaos / T. S. Akhromeeva, S. P. Kurdyumov, G. G. Malineckiy, A. A. Samarskiyj. — М.: Nauka, 1992.]
9. *Сидоров С. В.* О структуре решений в нелинейных дифференциальных уравнениях // Третьи Курдюмовские чтения: Синергетика в естественных науках. Материалы Международной междисциплинарной научной конференции. 19–24 марта 2007 г. — Тверь: Тверской гос. ун-т.: 2007. — С. 127–131. [Sidorov S. V. On the Structure of Solutions of Nonlinear Differential Equations // Third Kurdyumovskie reading: Synergetics in the natural sciences. Proceedings of the International Interdisciplinary Conference. 19–24 March 2007. — Tver, 2007]
10. *Сидоров С. В.* О структуре решений в диссипативных системах нелинейных дифференциальных уравнений // Вторая Международная конференция «Системный анализ и информационные технологии». 10–14 сент. 2007 г. — Обнинск: 2007. — С. 280–284. [Sidorov S. V. The Structure of the Solutions in Dissipative Systems of Nonlinear Differential Equations // The Second International Conference «System Analysis and Information Technology». 10–14 Sept. 2007. — Obninsk, 2007]
11. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. — М.: Наука, 1989. [Samarskii A. A., Gulin A. V. Numerical Methods. — Moscow: Nauka, 1989]
12. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. — М.: Наука, 1992. [Bahwalov N. S., Zhidkov N. P., Kobelkov G. M. Numerical Methods. — Moscow: Nauka, 1992]
13. *Федоренко Р. П.* Введение в вычислительную физику. — М.: Изд.-во Моск. физико-техн. ин.-та, 1994. [Fedorenko R. P. Introduction to Computational Physics. — Moscow: MPhTI Press, 1994]
14. *Сидоров С. В.* Об устойчивости численного моделирования периодических решений в нелинейных дифференциальных уравнениях // Динамика неоднородных систем. Труды ИСА РАН. — 2007. — № 11. — С. 78–84. [Sidorov S. V. On the Stability of the Numerical Simulation of Periodic Solutions of Nonlinear Differential Equations // Dynamics of Heterogeneous Systems. Proceedings of ISA RAS. — 2007. — No 11. — P. 78–84]
15. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. [Demidovich B. P. Lectures on the Mathematical Theory of Stability. — Moscow: Nauka, 1967]

16. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958. [Coddington E. A., Levinson N. Theory of Ordinary Differential Equations. — McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC. New York, Toronto, London, 1955]
17. *Lorenz E. N.* Deterministic Nonperiodic Flow // J. Atmos. Sci. — 1963. — Vol. 20. — Pp. 130–144.
18. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. — М.: Меркурий Пресс, 2000. [Bahwalov N. S., Zhidkov N. P., Kobelkov G. M. Numerical Methods. — Moscow: Nauka, 1992]
19. *Mannville P., Pomeau Y.* Intermittency and the Lorenz Model. — Paris: I.D.S.E.T., 1981.
20. *Newhouse S., Ruelle D., Takens F.* Occurrence of Strange Axion A Attractors Near Quasi-Periodic Flows on T^m , $m \geq 3$ // Comm. Math. Phys. — 1979. — Vol. 64, No 1. — Pp. 35–40.
21. *Сидоров С. В.* Универсальность перехода к хаосу в динамических диссипативных системах дифференциальных уравнений // Динамика неоднородных систем. Труды ИСА РАН. — 2006. — № 9. — С. 51–87. [Sidorov S. V. Universality of the Transition to Chaos in Dissipative Dynamical Systems of Differential Equations // Dynamics of heterogeneous systems. Proceedings of ISA RAS. URSS. — Moscow, 2006. — No 9. — P. 51–87]
22. *Шарковский А. Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. мат. журнал. — 1964. — № 1. — С. 61–71. [Sharkovskii A. N. Coexistence of Cycles of a Continuous Transformation of a Direct // Ukr. Math. Journal. — 1964. — No 1. — P. 61–71]
23. *Сидоров С. В.* О механизме перехода к диффузионному хаосу // Первая международная конференция «Системный анализ и информационные технологии» САИТ-2005, 12–16 сентября 2005 г., Переславль-Залесский, Россия, Труды конференции. В 2 т. — Т. 1. — М.: КомКнига, 2005. — С. 124–129. [Sidorov S. V. On the Mechanism of the Transition to the Diffusion Chaos // 1 International Conference «System Analysis and Information Technologies » SAIT-2005, 12–16 September 2005, Pereslavl, Russia, Proceedings. 2 volumes. Vol. 1. ComKniga. — Moscow, 2005]
24. *Сидоров С. В.* Диффузионный хаос в модели брюсселятора // Динамика неоднородных систем. Труды ИСА РАН. — 2006. — № 10. — С. 91–97. [Sidorov S. V. Diffusion Chaos in a Model of the Brusselator // Dynamics of Heterogeneous Systems. Proceedings of ISA RAS. — 2006. — No 10. — P. 91–97]
25. *Сидоров С. В.* Динамика показателей Флоке в каскаде бифуркаций удвоения периода // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, № 8. — С. 1213–1214. [Sidorov S. V. Floquet Dynamics of Indicators in a Cascade of Period-Doubling Bifurcations // Differential Equations. — 2009. — Vol. 45, No 8. — P. 1213–1214]
26. *Магницкий Н. А., Сидоров С. В.* Новые методы хаотической динамики. — М.: УРСС, 2004. [Magnitskii N. A., Sidorov S. V. New Methods of Chaotic Dynamics — Moscow: URSS, 2004]
27. *Magnitskii N. A., Sidorov S. V.* New Methods for Chaotic Dynamics. — Singapore: World Scientific, 2006.
28. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972. [Yakubovich V. A., Starzhinskii V. M. Linear Differential Equations with Periodic Coefficients and Their Applications. — Moscow: Nauka, 1972]
29. *Ландау Л. Д.* К проблеме турбулентности // ДАН СССР. — 1944. — Т. 44, № 8. — С. 339–342. [Landau L. D. On the Problem Turbulence // DAN USSR. — 1944. — V. 44, No 8. — P. 339–342]
30. *Ruelle D., Takens F.* On the Nature Turbulence // Comm. Math. Phys. — 1971. — Vol. 20, No 1. — Pp. 167–192.

31. Евстигнеев Н. М., Магницкий Н. А., Сидоров С. В. О природе турбулентности в задаче движения жидкости за уступом // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, № 1. — С. 69–73. [Evstigneev N. M., Magnitskii N. A., Sidorov S. V. On the Nature of Turbulence in a Problem on the Motion of a Fluid Behind a Ledge // Differential Equations. — 2009. — Vol. 45, No 1. — P. 69–73]
32. Евстигнеев Н. М., Магницкий Н. А., Сидоров С. В. О природе турбулентности в конвекции Рэлея–Бенара // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, № 6. — С. 890–893. [Evstigneev N. M., Magnitskii N. A., Sidorov S. V. On the Nature of Turbulence in Rayleigh–Benard Convection // Differential Equations. — 2009. — Vol. 45, No 6. — P. 890–893]
33. Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Введение в синергетику. — М.: Наука, 1990. [Loskutov A. U., Mihailov A. S. Introduction to Synergetics. — Moscow: Nauka, 1990]
34. Скотт Э. Нелинейная наука: рождение и развитие когерентных структур. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. [Scott A. Nonlinear science: emergence and dynamics of coherent structures. — Oxford: University Press, 2003]
35. Сидоров С. В. О хаотической динамике в решениях вида бегущие волны // Динамика неоднородных систем. Труды ИСА РАН. — 2008. — № 12. — С. 176–184. [Sidorov S. V. On Chaotic Dynamics in the Form of a Traveling Wave Solutions // Dynamics of Heterogeneous Systems. Proceedings of ISA RAS. — 2008. — No 12. — P. 176–184]
36. Deissler R. J. Spatially Growing Waves, Intermittency and Convective Chaos in an Open-Flow System // Physica D. — 1987. — Vol. 25, No 1–3. — Pp. 233–260.
37. Сидоров С. В. Бегущие волны и динамический хаос в активных средах: численное исследование // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44, № 2. — С. 250–254. [Sidorov S. V. Travelling Waves and Dynamic Chaos in Active Media: a Numerical Study // Differential Equations. — 2008. — Vol. 44, No 2. — P. 250–254]

UDC 517.9

Structure of Solutions and Dynamic Chaos in Nonlinear Differential Equations

S. V. Sidorov

*Institute of Gravitation and Cosmology
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia*

The structure of solutions in nonlinear dissipative dynamical systems described by differential equations, including systems with chaotic behavior is considered. It is shown that the structure of the solutions in these systems is provided by either set of limit cycles, or tori, and is determined by the spectrum of Floquet Exponents. Important role in forming of structures play limit cycles having a complex but not complex conjugate Floquet Exponents. Examples of using the concept of the structure of solutions of nonlinear differential equations in the study of the formation of solitary traveling waves and the phenomenon of turbulence are presented.

Key words and phrases: nonlinear dissipative differential equations, dynamic chaos, bifurcation, chaotic attractors.