УДК 530.1(075.8)

О движении жидкости с отрицательным давлением под действием собственного гравитационного поля

М. Б. Вилка Чайча, Ю. П. Рыбаков, Г. Н. Шикин

Кафедра теоретической физики
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

В работе в нерелятивистском подходе рассмотрено движение трёх типов жидкостей с отрицательным давлением (космический вакуум, квинтэссенция, газ Чаплыгина) под действием собственного гравитационного поля. Введение в космологические модели вещества с отрицательным давлением является одним из альтернативных подходов к объяснению существования ускоренного расширения Вселенной. Космический вакуум обладает не только определённой плотностью энергии, но также и давлением. Если плотность вакуума положительна, то его давление отрицательно. Связь между давлением и плотностью, т. е. уравнение состояния, имеет для вакуума вид: $P + \varepsilon = 0$. Это уравнение состояния совместимо с определением вакуума как формы энергии со всюду и всегда постоянной плотностью, независимо от системы отсчёта. Исследование свойств таких жидкостей представляет определённый научный интерес с точки зрения существования у них обычных гидродинамических свойств, в частности, существование волновых движений под действием собственного гравитационного поля. Движение жидкости с постоянным отрицательным давлением рассмотрено в сферических координатах когда учитывается только радиальная компонента скорости $u(r, t)$. При этом установлено, что для идеальной жидкости типа космического вакуума с постоянным отрицательным давлением, движение возможно только в том случае, если есть функция источника, не зависящая от пространственных координат, а скорость движения жидкости является линейной функцией расстояния от начала координат, что напоминает закон Хаббла в космологии. Для идеальной жидкости с уравнением состояния типа квинтэссенции установлено, что движение жидкости под действием собственного гравитационного поля для одномерного движения возможно только в том случае, если её плотность не меньше некоторого критического значения, движение происходит в ограниченной области $0 \leqslant x \leqslant x_{\max}$, а скорость меняется от некоторого критического значения $u_{\text{кр}}$ до $u = 0$. Исследовано также движение среды с уравнением состояния газа Чаплыгина под действием собственного гравитационного поля в одномерном случае и показано, что существует три различных режима течения.

Ключевые слова: идеальная жидкость, баротропный процесс, отрицательное давление, космический вакуум, квинтэссенция.

1. Введение

В настоящее время в космологии исследуются модели, использующие уравнение состояния идеальной жидкости с отрицательным давлением: $P = W\varepsilon$, где P — давление, ε — плотность энергии, а безразмерный параметр W принимает различные отрицательные значения. Введение в космологические модели вещества с отрицательным давлением является одним из альтернативных подходов к объяснению существования ускоренного расширения Вселенной (космический вакуум, тёмная энергия). Представляет определённый научный интерес исследование свойств таких жидкостей с точки зрения существования у них обычных гидродинамических свойств, в частности, существование волновых движений под действием собственного гравитационного поля.

2. Космический вакуум

Одним из основных свойств космического вакуума является постоянство во времени его плотности энергии ε и давления P независимо от ускоренного расширения Вселенной [1]. Рассмотрим в рамках нерелятивистской гидродинамики

Статья поступила в редакцию 20 июня 2013 г.

течение идеальной жидкости, имеющей отрицательное давление P и постоянную положительную плотность энергии ε под действием собственного гравитационного поля. При этом P и ε связаны соотношением

$$P + \varepsilon = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим случай сферически-симметричного движения жидкости, когда существует одна радиальная компонента скорости $u(r,t)$. В этом случае система уравнений гидродинамики имеет вид:

$$u_t + uu_r = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} - \varphi_r, \tag{2}$$

$$\rho_t + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\rho u) = f(r,t), \tag{3}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\big) = 4\pi G\rho, \tag{4}$$

где $f(r,t)$ — функция источника, G — гравитационная постоянная, а $\varphi(r,t)$ — потенциал собственного гравитационного поля.

Запишем систему уравнений (2)–(4), полагая $\rho = \frac{\varepsilon}{c^2} = \rho_0 = \text{const} > 0$, $P = P_0 = \text{const} < 0$:

$$u_t + uu_r = -\varphi_r\,, \tag{5}$$

$$\frac{\rho_0}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u) = f(r,t), \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\big) = 4\pi G\rho_0 r^2. \tag{7}$$

Интегрирование уравнения (7) даёт:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{4\pi}{3}G\rho_0 r + \frac{C}{r^2}, \quad C = \text{const}. \tag{8}$$

Считаем, что при всех $0 \leqslant r < \infty$, $|\frac{\partial\varphi}{\partial r}| < \infty$, поэтому $C = 0$.

Подставляем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{4\pi}{3}G\rho_0 r$$

в (5) и получаем уравнение для определения $u(r,t)$:

$$u_t + uu_r = -\frac{4\pi G}{3}\rho_0 r. \tag{9}$$

Решение уравнения (9) ищем в виде

$$u(r,t) = T(t)r. \tag{10}$$

При подстановке (10) в (9) получаем уравнение для $T(t)$:

$$\dot{T} + T^2 = -\frac{4\pi G}{3}\rho_0\,. \tag{11}$$

Уравнение (11) имеет решение

$$T(t) = a\,\mathrm{tg}\,a(t_0 - t), \quad a^2 = \frac{4\pi G}{3}\rho_0\,, \quad t_0 = \text{const}. \tag{12}$$

Окончательно для скорости $u(r,t)$ получаем выражение

$$u(r,t) = ar\,\mathrm{tg}\,a(t_0 - t). \tag{13}$$

Скорость $u(r,t)$ является линейной функцией r и увеличивается с возрастанием r. Это свойство напоминает закон Хаббла: скорость удаления галактик друг от друга есть линейная функция расстояния. Из (13) следует:

$$\begin{cases} u(r,0) = ar\,\mathrm{tg}\,at_0\,, \\ \text{при } t \to t_0 \quad u(r,t) \to 0. \end{cases} \tag{14}$$

При дальнейшем увеличении $t > t_0$ скорость течения меняет направление: $u(r,t) = -ar\,\mathrm{tg}\,a(t - t_0)$. При $t \to \frac{\pi}{2a} + t_0,\ u(r,t) \to -\infty$.

При подстановке $u(r,t)$ из (13) в уравнение непрерывности (6) оно не выполняется, если $f(r,t) \equiv 0$, что означает несовместность уравнений Эйлера и непрерывности. Для того чтобы эти уравнения были совместны, можно сделать предположение, что в пространстве существует источник идеальной жидкости. Его можно найти из (6):

$$f(r,t) = \frac{\rho_0}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2 u\big) = 3\rho_0 T(t) = 3\rho_0 a\,\mathrm{tg}\,a(t_0 - t). \tag{15}$$

Источник идеальной жидкости существует во всём пространстве и не зависит от r.

При $t \to t_0,\ f(t) \to 0$. При дальнейшем возрастании t источник становится отрицательным (поглощение).

3. Квинтэссенция

Рассмотрим движение идеальной жидкости с уравнением состояния $P = W\varepsilon$, где $-1 < W < -1/3$ [2] под действием собственного гравитационного поля в одномерном случае. Используемая система уравнений имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = -\varphi_x\,, \tag{16}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{17}$$

$$\varphi_{xx} = 4\pi G\rho, \tag{18}$$

где u — скорость движения жидкости, φ — потенциал гравитационного поля жидкости, G — гравитационная постоянная, $\rho = \frac{\varepsilon}{c^2}$.

Рассмотрим баротропное движение среды, когда давление $P = P(\rho)$, в предположении, что скорость $u = u(\rho)$. В этом случае уравнения (16), (17) запишутся следующим образом [3]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\left(u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho} + \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\rho}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x}}{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho}} = 0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho} + u\right)\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \tag{20}$$

Из уравнений (19) и (20) следует:

$$\rho\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho}\right)^2=\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\rho}\,. \tag{21}$$

При подстановке $P=-\xi\rho$ в (21) где ξ — размерная постоянная, получаем уравнение

$$\rho\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho}\right)^2=-\frac{\xi}{\rho}+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\rho}\,. \tag{22}$$

Из (22) следует, что если не учитывать собственное гравитационное поле ($\varphi\equiv 0$), то движение жидкости невозможно. Движение возможно при условии

$$-\frac{\xi}{\rho}+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\rho}>0. \tag{23}$$

Рассмотрим стационарный случай — установившееся движение, когда $\frac{\partial u}{\partial t}=0$, $\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$. В этом случае из уравнения непрерывности следует:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0,\quad u=\frac{C_1}{\rho},\quad C_1=\mathrm{const}. \tag{24}$$

Подставляем $u(\rho)$ из (24) в (22) и получаем уравнение для $\varphi(\rho)$:

$$\frac{C_1^2}{\rho^3}=-\frac{\xi}{\rho}+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\rho}\,. \tag{25}$$

Из (25) получаем $\varphi(\rho)$:

$$\varphi(\rho)=\xi\ln\rho-\frac{C_1^2}{2\rho^2}+C_2,\quad C_2=\mathrm{const}. \tag{26}$$

Подставляем $\varphi(\rho)$ из (26) в (18) и получаем уравнение для определения $\rho(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\xi\ln\rho-\frac{C_1^2}{2\rho^2}+C_2\right)=4\pi G\rho. \tag{27}$$

Уравнение (27) можно записать таким образом:

$$\left(\frac{\xi\rho_x}{\rho}+\frac{C_1^2\rho_x}{\rho^3}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\xi\rho_x}{\rho}+\frac{C_1^2\rho_x}{\rho^3}\right)=4\pi G\rho\left(\frac{\xi\rho_x}{\rho}+\frac{C_1^2\rho_x}{\rho^3}\right). \tag{28}$$

Первый интеграл уравнения (28) имеет вид:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\xi\rho_x}{\rho}+\frac{C_1^2\rho_x}{\rho^3}\right)^2=4\pi G\left(\xi\rho-\frac{C_1^2}{\rho}\right)+\frac{C_2}{2},\quad C_2=\mathrm{const}. \tag{29}$$

Решение уравнения (29) представляется квадратурой

$$\int\frac{(\xi\rho^2-C_1^2)\mathrm{d}\rho}{\rho^{5/2}\sqrt{8\pi G(\xi\rho^2-C_1^2)+C_2\rho}}=\pm(x+x_0). \tag{30}$$

Рассмотрим частный случай, когда $C_2 = 0$. В этом случае из (30) получаем:

$$\frac{18(\xi\rho^2 - C_1^2)^{5/2} + 45C_1^2(\xi\rho^2 - C_1^2)^{3/2} + 30C_1^4(\xi\rho^2 - C_1^2)^{1/2}}{15C_1^4(\xi\rho^2)^{5/2}} = \sqrt{8\pi G}\xi^{3/2}x. \quad (31)$$

Из (31) следует

$$\begin{cases} \text{при } \rho^2 = C_1^2/\xi, & x = 0, \\ \text{при } \rho \to \infty, & x \to x_{\max} = \frac{18}{15C_1^4\xi^{3/2}\sqrt{8\pi G}}\,. \end{cases} \quad (32)$$

При этом жидкость распределена в области $0 \leqslant x \leqslant x_{\max}$.

Таким образом, движение жидкости возможно только в том случае, если учитывается собственное гравитационное поле, а плотность жидкости не меньше некоторого критического значения $\rho_{\text{кр}} = \frac{C_1}{\sqrt{\xi}}$. На конечном интервале $0 \leqslant x \leqslant x_{\max}$ плотность меняется от $\rho_{\text{кр}}$ до $\rho = \infty$. При этом скорость движения $u = \frac{C_1}{\rho}$ изменяется от $u_{\max} = \sqrt{\xi}$ до $u = 0$.

4. Газ Чаплыгина

Рассмотрим движение газа Чаплыгина с уравнением состояния:

$$P = -A/\rho, \quad A = \text{const} > 0, \quad (33)$$

под действием собственного гравитационного поля [4,5]. Используем уравнения (16)–(18) с предположением, что процесс баротропный. При этом $P = P(\rho)$, а также считаем, что $u = u(\rho)$. Рассматриваем стационарный случай — установившееся движение газа, при котором $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, а скорость движения среды и плотность связаны соотношением (24). При подстановке $P = -\frac{A}{\rho}$ и $u = \frac{C_1}{\rho}$ в (21) получаем уравнение

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\rho} = \frac{B}{\rho^3}\,, \quad B = C_1^2 - A \neq 0. \quad (34)$$

Из (34) получаем $\varphi(\rho)$:

$$\varphi(\rho) = -\frac{B}{2\rho^2} + C_2, \quad C_2 = \text{const}. \quad (35)$$

Подставляем $\varphi(\rho)$ из (35) в уравнение (18) и получаем уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{B}{2\rho^2} + C_2\right) = -\frac{B}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\rho^2}\right) = 4\pi G\rho. \quad (36)$$

Уравнение (36) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\rho^2}\right) = -\frac{8\pi G}{B}\rho; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho_x}{\rho^3}\right) = \frac{4\pi G}{B}\rho. \quad (37)$$

Умножаем (37) на $\frac{\rho_x}{\rho^3}$ и получаем уравнение

$$\left(\frac{\rho_x}{\rho^3}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\rho_x}{\rho^3}\right) = \frac{4\pi G}{B}\frac{\rho_x}{\rho^2}\,. \quad (38)$$

Первый интеграл и решение уравнения (38) записываются так:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_x}{\rho^3}\right)^2 = -\frac{4\pi G}{B}\frac{1}{\rho} + \frac{C_3}{2}, \quad C_3 = \mathrm{const}, \tag{39}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^{5/2}\sqrt{C_3\rho - \frac{8\pi G}{B}}} = \pm(x + x_0). \tag{40}$$

Рассмотрим частные случаи выбора постоянных величин в (40).

$$1) \quad C_3 > 0, \quad \frac{8\pi G}{B} = a_0^2 > 0. \tag{41}$$

Из (40) имеем:

$$\frac{2(C_3\rho - a_0^2)^{3/2} + 3a_0^2(C_3\rho - a_0^2)^{1/2}}{(C_3\rho)^{3/2}} = \frac{96(\pi G)^2}{B^2 C_3^{3/2}}x. \tag{42}$$

Из (42) получаем следующие выражения для $\rho(x)$:

$$\begin{cases} \text{при } \rho = \frac{a_0^2}{C_3} = \frac{8\pi G}{C_3 B}, & x = 0; \\ \text{при } \rho \to \infty, & x \to x_{\max} = \frac{B^2 C_3^2}{48(\pi G)^2}. \end{cases} \tag{43}$$

При этом газ распределён в области $0 \leqslant x \leqslant x_{\max}$, а его плотность изменяется от $\rho_{\text{кр}} = \frac{8\pi G}{C_3 B}$ до $\rho = \infty$, когда скорость $u = \frac{C_1}{\rho}$ изменяется от $u_{\max} = \frac{C_1 C_3 B}{8\pi G}$ до $u = 0$.

$$2) \quad C_3 > 0, \quad \frac{8\pi G}{B} = -b^2 < 0. \tag{44}$$

Из (44) находим:

$$\frac{2(C_3\rho + b^2)^{3/2} - 3(C_3\rho + b^2)^{1/2}b^2}{(C_3\rho)^{3/2}} = \frac{96(\pi G)^2}{B^2 C_3^{3/2}}x. \tag{45}$$

Из (45) получаем $\rho(x)$:

$$\begin{cases} \text{при } \rho \to 0, & x \to -\infty; \\ \text{при } \rho \to \infty, & x \to x_{\max} = \frac{B^2 C_3^{3/2}}{48(\pi G)^2}. \end{cases} \tag{46}$$

В этом случае газ распределён в области $-\infty \leqslant x \leqslant x_{\max}$, плотность газа изменяется от $\rho = 0$ до $\rho = \infty$, а скорость изменяется от $u = \infty$ до $u = 0$.

$$3) \quad C_3 = -h^2 < 0, \quad \frac{8\pi G}{B} = -b^2. \tag{47}$$

Из (40) имеем:

$$\frac{(b^2 - \rho h^2)^{1/2}(b^2 + 2\rho h^2)}{(\rho h^2)^{3/2}} = \frac{96(\pi G)^2}{B^2 h^3}x. \tag{48}$$

При $\rho = \frac{b^2}{h^2}$, $x = 0$; при $\rho \to 0$, $x \to \infty$. Газ занимает область $0 \leqslant x \leqslant \infty$. При этом скорость изменяется от $u = \frac{C_1 h^2}{b^2}$ до $u = \infty$.

5. Заключение

В данной работе сформулированы условия, при выполнении которых возможно движение идеальной жидкости с отрицательным давлением под действием собственного гравитационного поля.

Литература

1. *Чернин А. Д.* Космический Вакуум // УФН. — 2001. — Т. 171, № 11. — С. 1153–1176. [Chernin A. D. Cosmic Vacuum // UFN. — 2001. — Vol. 171, No 11. — Pp. 1153–1176.]
2. *Zlatev I., Wang L. M., Steinhardt P. J.* Quintessence, Cosmic Coincidence, and the Cosmological Constant // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Vol. 82. — Pp. 896–899.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошных сред. Т. 2. — М.: Наука, 1955. [Sedov L. I. Mechanics of Continuous Media, Vol. 2. — Moscow: Nauka, 1955.]
4. *Kamenshchik A. Y., Moschella U., Pasquier V.* An Alternative to Quintessence // Phys. Rev. Lett. B. — 2001. — Vol. 511. — Pp. 265–268.
5. *Billic N., Tupper G. B., Viollier R. D.* Chaplygin Gas Cosmology-Unification of Dark Matter and Dark Energy // Phys. Rev. Lett. B. — 2002. — Vol. 535. — P. 17.

UDC 530.1(075.8)

On the Movement of a Fluid with a Negative Pressure under the Action of its Own Gravitational Field

M. B. Vilca Chaicha, Yu. P. Rybakov, G. N. Shikin

Department of Theoretical Physics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

We have considered in the nonrelativistic approach the movement of the three types of the fluid with negative pressure (cosmic vacuum, quintessence, Chaplygin gas) under the action of the own gravitational field. Introduction in cosmological models of a substance with negative pressure is one of alternative approaches to the explanation of existence of the accelerated expansion of the Universe. The space vacuum possesses not only a certain density of energy, but also a pressure. If density of space vacuum is positive, its pressure is negative. Connection between pressure and density, i.e. the equation of state, has an appearance for vacuum $P + \varepsilon = 0$. This equation of state is compatible with the definition of vacuum as energy form with everywhere and always constant density, irrespective of frame of reference. Study of properties of such fluids represents certain scientific interest from the point of view of existence of usual hydrodynamic properties, in particular, existence of wave movements under the action of the own gravitational field. The movement of the fluids with constant negative pressure is considered in spherical coordinates when only radial component of velocity $u(r, t)$ is considered. We have established that for fluid type space vacuum with constant negative pressure the movement is possible only if the source function doesn't depend on coordinates. In this case the velocity of the fluid is linear function of the distance from the beginning of coordinates that reminds Hubble's law in cosmology.

For ideal fluid with the equation of state of the type of quintessential we have established that movement of the fluid under the action of the own gravitational field for one-dimensional movement is possible in the case if its density exceeds some critical value, the movement of the fluid takes place in some bounded region $0 \leqslant x \leqslant x_{\max}$ and its velocity changes from some critical value $u_{\rm cr}$ to $u = 0$. We also studied the movement of the medium with the equation of state of the Chaplygin gas under its own gravitational field in one-dimensional case, and show that there are three different flow regimes.

Key words and phrases: ideal fluid, barotropic process, negative pressure, cosmic vacuum, quintessence.