

## Синтез 3D-динамических систем, имеющих состояния равновесия заданных топологических структур

С. В. Волков

*Кафедра нелинейного анализа и оптимизации  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклуто Маклая, д. 6, Москва, 117198, Россия*

Рассмотрена задача построения автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, трёхмерные фазовые пространства которых имеют изолированные состояния равновесия с заданными локальными топологическими структурами. Для решения этой задачи предложен метод, который основан на использовании специальных векторных полей направлений сравнения. При выборе этих векторных полей учитывается, что локальная структура состояния равновесия полностью характеризуется: а) совокупностью особых фазовых траекторий и поверхностей, которые разбивают окрестность состояния равновесия на элементарные области; б) поведением неособых фазовых траекторий в этих областях. Полученные таким образом векторные поля позволяют при определённых условиях представить свойства локальной топологической структуры состояния равновесия в аналитической форме в виде конечных выражений относительно фазовых координат. Эти выражения используются для составления уравнений, число которых равно размерности фазового пространства и которые являются алгебраическими уравнениями относительно правых частей искомой нормальной системы дифференциальных уравнений. Основной целью работы является описание общего подхода к решению поставленной задачи, поэтому её решение рассмотрено только в одном частном случае, когда все элементарные области состояния равновесия искомой динамической системы являются элементарными областями одного из возможных типов.

Приведённые в работе теоретические результаты иллюстрируются конкретным примером.

Изложенное в данной работе является частичным обобщением ранее опубликованных результатов решения обратных задач теории динамических систем на плоскости.

**Ключевые слова:** динамические системы, системы дифференциальных уравнений, фазовые пространства, состояния равновесия, топологические структуры разбиения на траектории, особые поверхности, векторные поля направлений сравнения.

### 1. Обозначения и постановка задачи

В данной работе выполнены некоторые обобщения метода и результатов построения динамических систем на плоскости [1] на случай динамических систем, фазовые пространства которых являются трёхмерными. Данная работа является также продолжением исследований, представленных в публикациях [2, 3].

Пусть  $Oxyz$  является декартовой системой координат в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , а  $U_R = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$  — окрестность начала координат  $O$ . Через  $K$  обозначим часть проколотой окрестности  $U_R$ , которая ограничена гладкими поверхностями  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), проходящими через начало координат  $O$ , и которая гомеоморфна треугольной пирамиде (или области, ограниченной трёхгранным углом и сферой с центром в вершине этого угла) (рис. 1).

Предположим, что поверхности  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) заданы соответствующими уравнениями

$$\omega_i(x, y, z) = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Для элементов границы области  $K$  далее будут использованы следующие обозначения (рис. 1):

- $S_i = \bar{K} \cap \Gamma_i$  — часть границы, которая целиком принадлежит соответствующей поверхности  $\omega_i(x, y, z) = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ );
- $L_{ij} = S_i \cap S_j$  — линия пересечения соответствующих поверхностей  $S_i$  и  $S_j$  ( $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$ );

- $A_{ij} = L_{ij} \cap U_R$  — точки пересечения соответствующих линий  $L_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ;  $i \neq j$ ) с границей окрестности  $U_R$ .

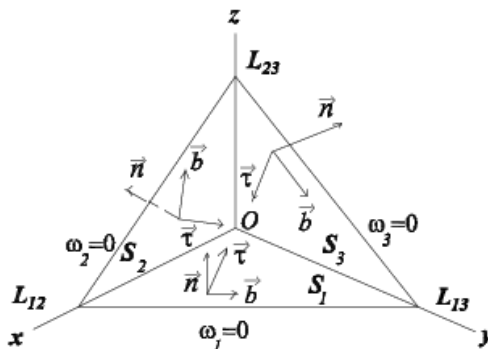


Рис. 1. Элементы области  $K$  и их обозначения

Рассмотрим задачу нахождения правых частей динамической системы, которая описывается тремя обыкновенными дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x} = P(x, y, z), \quad \dot{y} = Q(x, y, z), \quad \dot{z} = R(x, y, z) \quad (2)$$

и для которой:

- начало координат  $O(0; 0; 0)$  является изолированным состоянием равновесия;
- поверхности  $\omega_i(x, y, z) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) являются интегральными поверхностями;
- все фазовые траектории, которые имеют общие точки с областью  $K$ , не выходят из этой области с возрастанием (убыванием) независимой переменной  $t$  и при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) стремятся к состоянию равновесия  $O$  вдоль одной из кривых  $L_{ij}$ , касаясь одной из поверхностей  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Область  $K$ , которая имеет такое разбиение на траектории, назовём *элементарной областью состояния равновесия  $O$* .

## 2. Метод решения задачи

Для решения поставленной задачи предлагается метод, основанный на использовании вспомогательных векторных полей направлений сравнения, число которых равно размерности рассматриваемого фазового пространства. В данной работе этот метод иллюстрируется на примере элементарной области только одного из возможных типов и только в случае трёх поверхностей  $\Gamma_i$  (1).

### 2.1. Векторные поля направлений сравнения

Построение векторных полей направлений сравнения начнём с рассмотрения однопараметрического семейства поверхностей, элементами которого являются также и поверхности  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), ограничивающие элементарную область  $K$ . Этому требованию удовлетворяет, в частности, семейство поверхностей, определяемое уравнением

$$(1 - \lambda)\omega_1(x, y, z) - \lambda\omega_2(x, y, z)\omega_3(x, y, z) = 0, \quad (3)$$

где  $\lambda$  — параметр. Предположим, что в точках области  $K$  выполняются неравенства  $\omega_1 > 0$ ,  $\omega_2 < 0$  и  $\omega_3 < 0$ . В этом случае значениям  $\lambda \in [0; 1]$  соответствует множество поверхностей, которые проходят через два смежных ребра границы области  $K$  и полностью заполняют эту элементарную область «слоями»  $\lambda = \text{const}$ .

Полагая

$$\Omega_1(x, y, z) \equiv \omega_1, \quad \Omega_2(x, y, z) \equiv \omega_1\omega_2, \quad (4)$$

перепишем уравнение (3) в виде равенства

$$(1 - \lambda)\Omega_1(x, y, z) - \lambda\Omega_2(x, y, z) = 0, \quad (5)$$

которое разрешим относительно  $\lambda$ :

$$\frac{\Omega_1(x, y, z) + \Omega_2(x, y, z)}{\Omega_1(x, y, z)} = \frac{1}{\lambda}$$

или

$$\frac{\Omega_2(x, y, z)}{\Omega_1(x, y, z)} = C, \quad \text{где } C = \frac{1}{\lambda} - 1. \quad (6)$$

Так как

$$\text{grad} \left( \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) = \frac{1}{\Omega_1^2} \cdot [\Omega_1 \cdot \text{grad} \Omega_2 - \Omega_2 \cdot \text{grad} \Omega_1],$$

то вектор

$$\vec{N} = -\Omega_1 \cdot \text{grad} \Omega_2 + \Omega_2 \cdot \text{grad} \Omega_1 \quad (7)$$

является вектором нормали к поверхностям семейства (3). После подстановки (4) в (7) получим

$$\vec{N} = \omega_2\omega_3\vec{n}_1 - \omega_1\omega_3\vec{n}_2 - \omega_1\omega_2\vec{n}_3, \quad (8)$$

где векторы  $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$  определяются равенствами

$$\vec{n}_i = \text{grad} \omega_i \quad \text{или} \quad \vec{n}_i = (\omega_{ix}; \omega_{iy}; \omega_{iz}), \quad i = 1, 2, 3. \quad (9)$$

В (9) через  $\omega_{ix}, \omega_{iy}, \omega_{iz}$  обозначены частные производные функции  $\omega_i$  по переменным  $x, y$  и  $z$  соответственно.

**Замечание 1.** Из равенств (4) и (6) следует, что поверхность  $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$  является поверхностью нулевого уровня ( $C = 0$ ) семейства поверхностей (6), а поверхность  $\Gamma_1$  — поверхностью бесконечного уровня ( $C = \infty$ ).

Рассмотрим вектор

$$\vec{n} = \vartheta_1\omega_2\omega_3\vec{n}_1 - \vartheta_2\omega_1\omega_3\vec{n}_2 - \vartheta_3\omega_1\omega_2\vec{n}_3, \quad (10)$$

который получается из вектора  $\vec{N}$  введением положительных постоянных множителей  $\vartheta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) для каждого из слагаемых в векторной сумме (8). При сделанных выше предположениях относительно функций  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и на основании равенства (7) можно утверждать, что при положительных значениях  $\vartheta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) вектор  $\vec{n}$  из (10):

- определяет поле нормальных направлений для некоторого семейства гладких в области  $K$  поверхностей, в число которых входят также и части поверхностей  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ );
- отличен от нуля в точках множества  $\bar{K} \setminus \{L_{12} \cup L_{13} \cup L_{23}\}$ ;
- равен нулю в точках множества  $L_{12} \cup L_{13} \cup L_{23}$ .

В силу этих свойств векторное поле, определяемое вектором  $\vec{n}$  из (10) при любых положительных значениях постоянных  $\vartheta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), можно использовать в качестве одного из трёх векторных полей направлений сравнения для решения поставленной задачи.

Построение второго векторного поля направлений сравнения начнём с предположения, что в точках замыкания  $\bar{K}$  области  $K$  якобиан

$$J = \frac{D(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{D(x, y, z)} \neq 0. \quad (11)$$

Используя векторы нормалей (9) к поверхностям  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и их векторные произведения, определим вектор

$$\vec{\tau} = (\vec{n}_2 \times \vec{n}_3)\omega_1 + (\vec{n}_1 \times \vec{n}_2)\omega_3 + (\vec{n}_3 \times \vec{n}_1)\omega_2. \quad (12)$$

Покажем, что в окрестности состояния равновесия  $O$  вектор  $\vec{\tau}$  имеет вид

$$\vec{\tau} = \zeta \cdot \vec{r} + o(r), \quad (13)$$

где  $\zeta$  — постоянный множитель,  $\vec{r} = (x, y, z)$  — вектор, определяющий радиальные направления относительно состояния равновесия  $O$ ,  $r = |\vec{r}|$  — модуль вектора  $\vec{r}$ ,  $o(r)$  — члены более высокого порядка малости в точке  $O$ , чем  $r$ . Для доказательства равенства (13) выполним следующие разложения функций  $\omega_i(x, y, z)$  и координат векторов  $\vec{n}_i(x, y, z)$  в окрестности точки  $O$ :

$$\begin{aligned} \omega_{iw} &= \omega_{iw0} + o(r), \\ \omega_i &= \omega_{ix0}x + \omega_{iy0}y + \omega_{iz0}z + o(r), \\ \vec{n}_i &= (\omega_{ix0} + o(r); \omega_{iy0} + o(r); \omega_{iz0} + o(r)) \\ (i = 1, 2, 3; \quad w = x, y, z), \end{aligned} \quad (14)$$

где использованы обозначения

$$\omega_{iw0} = \omega_{iw}|_{(x,y,z)=(0,0,0)} \quad (15)$$

для значений частных производных функций  $\omega_i(x, y, z)$  в точке  $O$ . После подстановки выражений (14) в (12) и выполнения простых алгебраических преобразований получим равенство (13), в котором

$$\zeta = \frac{D(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{D(x, y, z)} \Big|_{(x,y,z)=(0,0,0)}. \quad (16)$$

Из вида правой части равенства (12) следует также, что вектор  $\vec{\tau}$ :

- равен нулю в состоянии равновесия  $O$ ;
- отличен от нуля на множестве  $\bar{K} \setminus \{O\}$ , если выполнено условие (11);
- расположен в касательной плоскости к поверхности  $S_i \setminus \{O\}$  в её соответствующей точке ( $i = 1, 2, 3$ );
- направлен вдоль касательной к кривой  $L_{ij} \setminus \{O\}$  в её соответствующей точке ( $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$ ).

Перемножим скалярно векторы  $\vec{n}$  и  $\vec{\tau}$  из (10) и (12). Используя свойства векторного и смешанного произведений векторов, получим

$$\vec{n} \cdot \vec{\tau} = (\vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3)\omega_1\omega_2\omega_3\vec{n}_1 \cdot (\vec{n}_2 \times \vec{n}_3). \quad (17)$$

Из (17) следует, что при выполнении равенства

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 - \vartheta_3 = 0 \quad (18)$$

векторы  $\vec{n}$  и  $\vec{\tau}$  являются взаимно ортогональными во всех точках пространства.

Третье векторное поле направлений сравнения вектором  $\vec{b}$  определим с помощью векторного произведения векторов  $\vec{n}$  и  $\vec{\tau}$  из (10) и (12):

$$\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}. \quad (19)$$

Полученную тройку векторов  $\{\vec{n}, \vec{\tau}, \vec{b}\}$  можно рассматривать как локальный базис в каждой точке фазового пространства. Этот базис является ортогональным, если выполнено условие (18) ортогональности векторов  $\vec{n}$  и  $\vec{\tau}$ . Если к тому же имеет место и неравенство (11), то  $\{\vec{n}, \vec{\tau}, \vec{b}\}$  является невырожденным ортогональным базисом в каждой точке множества  $\bar{K} \setminus \{L_{12} \cup L_{13} \cup L_{23}\}$ .

## 2.2. Формализация топологических свойств разбиения на траектории

Введём обозначения  $F_\tau$ ,  $F_n$  и  $F_b$  для скалярных произведений вектора фазовой скорости  $\vec{v}(P, Q, R)$  динамической системы (2) на построенные выше попарно ортогональные векторы  $\vec{n}, \vec{\tau}, \vec{b}$ :

$$F_\tau = \vec{\tau} \cdot \vec{v}, \quad F_n = \vec{n} \cdot \vec{v}, \quad F_b = \vec{b} \cdot \vec{v}. \quad (20)$$

Отмеченные выше свойства векторов  $\vec{n}$  и  $\vec{\tau}$  позволяют установить соответствие между топологическими свойствами разбиения на траектории областей фазового пространства и знаками функций  $F_\tau$ ,  $F_n$  и  $F_b$  в точках этих областей. Эти функции могут быть использованы для описания и задания свойств фазовых портретов в аналитической форме и для решения поставленной в п.1 задачи о нахождении правых частей системы уравнений (2), соответствующей этим фазовым портретам.

## 2.3. Анализ структуры правых частей динамической системы

Предположим, что составлены функции  $F_\tau$ ,  $F_n$  и  $F_b$ , которые отвечают требуемым свойствам разбиения на траектории фазового пространства искомой динамической системы (2). Представим равенства (20) в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \tau_x P + \tau_y Q + \tau_z R = F_\tau, \\ n_x P + n_y Q + n_z R = F_n, \\ b_x P + b_y Q + b_z R = F_b, \end{cases} \quad (21)$$

линейных относительно искомым функций  $P$ ,  $Q$  и  $R$ . Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \tau_x & \tau_y & \tau_z \\ n_x & n_y & n_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{\tau} \cdot (\vec{n} \times \vec{b}). \quad (22)$$

Выполним подстановку (19) в правую часть равенства (22) и применим формулу для двойного векторного произведения. В результате получим

$$\Delta = \vec{\tau} \cdot (\vec{n} \times \vec{b}) = \vec{\tau} \cdot [\vec{n} \times (\vec{\tau} \times \vec{n})] = |\vec{\tau}|^2 \cdot |\vec{n}|^2. \quad (23)$$

Из свойств векторов  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{n}$  и неравенства (11) следует, что определитель

$$\Delta = \begin{cases} \neq 0 & \text{в точках множества } \bar{K} \setminus (L_{12} \cup L_{13} \cup L_{23}); \\ = 0 & \text{в точках множества } L_{12} \cup L_{13} \cup L_{23}. \end{cases}$$

Применяя правило Крамера для решения систем линейных уравнений, найдём искомые функции в виде

$$P = \frac{\Delta_P}{\Delta}, \quad Q = \frac{\Delta_Q}{\Delta}, \quad R = \frac{\Delta_R}{\Delta}, \quad (24)$$

где

$$\Delta_P = \begin{vmatrix} F_\tau & \tau_y & \tau_z \\ F_n & n_y & n_z \\ F_b & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad \Delta_Q = \begin{vmatrix} \tau_x & F_\tau & \tau_z \\ n_x & F_n & n_z \\ b_x & F_b & b_z \end{vmatrix}, \quad \Delta_R = \begin{vmatrix} \tau_x & \tau_y & F_\tau \\ n_x & n_y & F_n \\ b_x & b_y & F_b \end{vmatrix}. \quad (25)$$

Покажем, что при соответствующем выборе функций  $F_\tau$ ,  $F_n$ ,  $F_b$  искомые правые части  $P$ ,  $Q$  и  $R$  из (24) определены и являются непрерывными функциями во всех точках фазового пространства. В связи с этим заметим, что при выполнении равенства (18) векторы  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$  попарно ортогональны и связаны соотношениями вида

$$\vec{\tau} = \mu \cdot (\vec{n} \times \vec{b}), \quad \vec{n} = \nu \cdot (\vec{b} \times \vec{\tau}), \quad (26)$$

где  $\mu$  и  $\nu$  — некоторые скалярные множители. Из ортогональности рассматриваемых векторов и соотношений (19) и (26) следует, что

$$|\vec{b}| = |\vec{\tau}| \cdot |\vec{n}|, \quad |\vec{\tau}| = \mu \cdot |\vec{n}| \cdot |\vec{b}|, \quad |\vec{n}| = \nu \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{\tau}|. \quad (27)$$

Исключая  $|\vec{b}|$  из равенств (27), найдём

$$\mu = \frac{1}{|\vec{n}|^2}, \quad \nu = \frac{1}{|\vec{\tau}|^2}. \quad (28)$$

Заменив в (26) множители  $\mu$  и  $\nu$  их выражениями (28), получим

$$\vec{\tau} = \frac{1}{|\vec{n}|^2} \cdot (\vec{n} \times \vec{b}), \quad \vec{n} = \frac{1}{|\vec{\tau}|^2} \cdot (\vec{b} \times \vec{\tau}). \quad (29)$$

Используя эти соотношения, представим определители из (25) следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_P &= F_\tau |\vec{n}|^2 \tau_x + F_n |\tau|^2 n_x + F_b b_x, \\ \Delta_Q &= F_\tau |\vec{n}|^2 \tau_y + F_n |\tau|^2 n_y + F_b b_y, \\ \Delta_R &= F_\tau |\vec{n}|^2 \tau_z + F_n |\tau|^2 n_z + F_b b_z. \end{aligned} \quad (30)$$

После подстановки (23) и (30) в (24) правые части искомой динамической системы приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} P &= \frac{F_\tau \tau_x}{|\vec{\tau}|^2} + \frac{F_n n_x}{|\vec{n}|^2} + \frac{F_b b_x}{|\vec{\tau}|^2 \cdot |\vec{n}|^2}, \\ Q &= \frac{F_\tau \tau_y}{|\vec{\tau}|^2} + \frac{F_n n_y}{|\vec{n}|^2} + \frac{F_b b_y}{|\vec{\tau}|^2 \cdot |\vec{n}|^2}, \\ R &= \frac{F_\tau \tau_z}{|\vec{\tau}|^2} + \frac{F_n n_z}{|\vec{n}|^2} + \frac{F_b b_z}{|\vec{\tau}|^2 \cdot |\vec{n}|^2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Исследуем правые части равенств (31) в тех точках, в которых обращаются в нуль знаменатели входящих в них дробей. В связи с этим заметим, что координаты векторов  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{n}$  и  $\vec{b}$  являются однородными многочленами соответственно

первого, второго и третьего порядков относительно функций  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ :

$$\begin{aligned}\tau_w &= a_{\tau,w1}\omega_1 + a_{\tau,w2}\omega_2 + a_{\tau,w3}\omega_3, \\ n_w &= a_{n,w1}\omega_2\omega_3 + a_{n,w2}\omega_1\omega_3 + a_{n,w3}\omega_1\omega_2, \\ b_w &= a_{b,w}\omega_1\omega_2\omega_3 \\ (w &= x, y, z).\end{aligned}\tag{32}$$

Из представлений (32) вытекают следующие утверждения.

1. В точках кривой  $L_{ij} \setminus \{O\}$  ( $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$ ):
  - вектор  $\vec{\tau} \neq 0$ ;
  - вектор  $\vec{n} = 0$ , его координаты имеют относительно функций  $\omega_i$  и  $\omega_j$  порядок малости не ниже первого, а квадрат модуля  $|\vec{n}|^2$  имеет второй порядок малости относительно этих функций;
  - вектор  $\vec{b} = 0$ , его координаты имеют относительно функций  $\omega_i$  и  $\omega_j$  порядок малости не ниже второго, а квадрат модуля  $|\vec{b}|^2$  имеет четвёртый порядок малости относительно этих функций;
2. В точке  $O(0; 0; 0)$ :
  - координаты вектора  $\vec{\tau}$  имеют относительно  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  порядок малости не ниже первого, а  $|\vec{\tau}|^2$  имеет второй порядок малости относительно  $r$ ;
  - координаты вектора  $\vec{n}$  имеют относительно  $r$  порядок малости не ниже второго, а  $|\vec{n}|^2$  имеет четвёртый порядок малости относительно  $r$ ;
  - координаты вектора  $\vec{b}$  имеют относительно  $r$  порядок малости не ниже третьего, а  $|\vec{b}|^2$  имеет шестой порядок малости относительно  $r$ .

Утверждения 1 и 2 позволяют сделать вывод о том, что правые части равенств (31) являются непрерывными функциями во всех точках пространства переменных  $x, y, z$  и равны нулю в начале координат  $O(0; 0; 0)$ , если:

- а) функции  $F_\tau$ ,  $F_n$  и  $F_b$  являются в точке  $O(0; 0; 0)$  бесконечно малыми функциями относительно  $r$  порядков не ниже второго, не ниже четвёртого и не ниже шестого соответственно;
- б) функция  $F_\tau$  отлична от нуля в точках кривых  $L_{ij} \setminus \{O\}$  ( $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$ ), а функции  $F_n$  и  $F_b$  являются бесконечно малыми относительно  $\omega_i$  и  $\omega_j$  порядков не ниже второго в точках кривой  $L_{ij} \setminus \{O\}$  ( $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$ ).

Например, если по условию задачи разбиение на траектории области  $K$  таково, что каждое из скалярных произведений  $F_\tau$ ,  $F_n$  и  $F_b$  не имеет нулевых значений в точках области  $K$ , то для решения этой задачи можно взять, в частности,

$$F_\tau = \lambda(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2), \quad F_n = \mu\omega_1\omega_2\omega_3, \quad F_b = \nu(\omega_1^2\omega_2^2 + \omega_1^2\omega_3^2 + \omega_2^2\omega_3^2),\tag{33}$$

где  $\lambda, \mu, \nu$  — постоянные множители или функции, не имеющие нулевых значений. Очевидно, что функции  $F_\tau$ ,  $F_n$  и  $F_b$  из (33) удовлетворяют требованиям а) и б).

### 3. Пример

Найти правые части динамической системы (2), у которой область  $K$ :

- а) ограничена плоскостями

$$\omega_1 \equiv z = 0, \quad \omega_2 \equiv -y = 0, \quad \omega_3 \equiv -x = 0,\tag{34}$$

- б) состоит из внутренних точек первого координатного октанта;
- б) является элементарной областью состояния равновесия  $O(0; 0; 0)$ ;

- в) содержит фазовые траектории, которые при  $t \rightarrow +\infty$  все стремятся к состоянию равновесия  $O$  вдоль ребра  $L_{13}$ , касаясь при этом плоскости  $\omega_3 = 0$  (рис. 2).

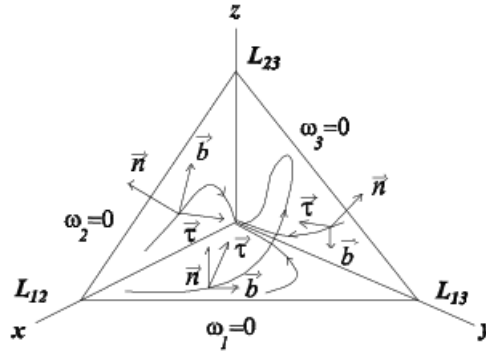


Рис. 2. Схема топологической структуры разбиения на траектории элементарной области  $K$

**Решение.** Предварительно заметим, что наличие отрицательных знаков в уравнениях (34) обусловлено необходимостью придания согласованных направлений векторам  $\vec{n}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) из (9), от которых в свою очередь будет зависеть и направление вектора нормали  $\vec{n}$ , определяемого равенством (10). В результате получим векторы

$$\vec{n}_1 = (0; 0; 1), \quad \vec{n}_2 = (0; -1; 0), \quad \vec{n}_3 = (-1; 0; 0) \quad (35)$$

и соответствующий им в (10) вектор  $\vec{n}$  при  $\vartheta_1 = 2, \vartheta_2 = 1, \vartheta_3 = 1$ , удовлетворяющих условию ортогональности (18):

$$\vec{n} = 2xy\vec{n}_1 + xz\vec{n}_2 + yz\vec{n}_3 \quad \text{или} \quad \vec{n} = (-yz; -xz; 2xy). \quad (36)$$

По формуле (12) после подстановки в неё функций  $\omega_i$  из (34) и векторов  $\vec{n}_i$  из (35) находим вектор

$$\vec{\tau} = (\omega_3; \omega_2; -\omega_1) \quad \text{или} \quad \vec{\tau} = (-x; -y; -z). \quad (37)$$

Третий вектор локального базиса найдём по формуле (19):

$$\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n} = (-2xy^2 - xz^2; x^2y + 2yz^2; x^2z - y^2z). \quad (38)$$

Составим функции  $F_\tau, F_n$  и  $F_b$  из (20), которые соответствуют указанному в условии примера поведению траекторий в первом координатном октанте. Этим требованиям отвечают, в частности, следующие функции:

$$F_\tau = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2, \quad F_n = \omega_1\omega_2\omega_3, \quad F_b = \omega_1^2\omega_2^2 + \omega_1^2\omega_3^2 + \omega_2^2\omega_3^2. \quad (39)$$

После подстановки  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) из (34) в (39) получим

$$F_\tau = x^2 + y^2 + z^2, \quad F_n = xyz, \quad F_b = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2. \quad (40)$$

Используя векторы  $\vec{n}, \vec{\tau}$  и  $\vec{b}$  из (36), (37) и (38), вычислим модули

$$|\vec{n}|^2 = z^2y^2 + x^2z^2 + 4x^2y^2, \quad |\vec{\tau}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$



и определители (25). После подстановки найденных выражений в (24) получим искомые правые части:

$$P = -\frac{x^4z^2 + 6y^4x^2 + 2z^4x^2 + 4y^2x^4 + 10x^2z^2y^2 + 4y^4z^2 + 3z^4y^2}{x^4z^2 + 6x^2z^2y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 + z^4y^2 + 4y^2x^4 + 4y^4x^2} \cdot x,$$

$$Q = -\frac{2y^2x^4 + 4x^2z^2y^2 + 4y^4x^2 + z^4x^2 + y^4z^2}{x^4z^2 + 6x^2z^2y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 + z^4y^2 + 4y^2x^4 + 4y^4x^2} \cdot y,$$

$$R = -\frac{4x^2z^2y^2 + 2y^4z^2 + y^2x^4 + 3y^4x^2 + z^4x^2 + z^4y^2}{x^4z^2 + 6x^2z^2y^2 + y^4z^2 + z^4x^2 + z^4y^2 + 4y^2x^4 + 4y^4x^2} \cdot z.$$

## Литература

1. Волков С. В., Давыдова М. А. Синтез динамических систем, фазовые портреты которых имеют элементарные ячейки данных топологических структур // Вестник РУДН, серия «Математика. Информатика. Физика». — 2012. — № 1. — С. 14–23. [Volkov S. V., Davydova M. A. Synthesis of Dynamical Systems which Phase Portraits have Given Elementary Cells with a Prescribed Topological Structure. Part 1. // Bulletin of PFUR series "Mathematics. Information Sciences. Physics". — 2012. — No 1. — P. 14–23. ]
2. Волков С. В. Построение систем дифференциальных уравнений в трехмерном пространстве по свойствам интегральных кривых // Дифференциальные уравнения. — 1982. — Т. 28, № 4. — С. 569–576. [Volkov S. V. Synthesis of Differential Equations Systems with Preassigned Properties of Integral Curves in Three-Dimensional Space. // Differential Equations.— 1982. — Vol. 28, No 4. — P. 569–576. ]
3. Волков С. В. О построении динамических систем в трехмерном пространстве // Дифференциальные уравнения. — 1991. — Т. 27, № 9. — С. 1633–1635. [S. V. Volkov. On Construction of Dynamical in Tree-Dimensional Space. // Differential Equations.— 1991. — Vol. 27, No 9. — P. 1633–1635. ]

UDC 531.3, 531/534.01

## Synthesis of 3D-dynamical Systems with Critical Points of Given Topological Structures

S. V. Volkov

*Department of nonlinear analysis and optimization  
Peoples' Friendship University of Russia  
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia*

The problem of synthesis of normal autonomous systems of ordinary differential equations which three-dimensional phase spaces have isolated equilibrium points with desired topological structure properties. To solve this problem a method based on the using special vector fields of comparison directions is proposed. While choosing these vector fields it should be taken into account that the local structure of an isolated equilibrium point is completely characterized by: a) a set of singular phase trajectories and surfaces that break up the neighborhood of the equilibrium point into elementary areas, and b) behavior of non-singular phase trajectories in these areas. Thus obtained vector fields allow, under certain conditions, to present the local topological structure properties of equilibrium point in an analytical form as algebraic expressions with respect to phase coordinates. These expressions are used to set up the equations equal in number to the number of dimensions of the phase space and which are the algebraic equations with respect to the right-hand sides of sought differential equations.

The main purpose of the paper is to describe the general approach to the posed problem, so the solution is considered only in one particular case where all the elementary areas of the sought dynamical system equilibrium point are elementary areas of one of the possible types.

Theoretical results of the article are illustrated by a concrete example.

Presented in this paper is a partial generalization of the previously published results for solving inverse problems of the theory of dynamical systems on the plane.

**Key words and phrases:** dynamical system, system of differential equations, phase spaces, equilibrium points, phase space topological structures, critical points, separatrix surfaces, vector fields of comparison directions.