УДК 524.83

Спинорная модель перехода Вселенной из замедленного расширения к ускоренному

Н. А. Ковальчуков, $\boxed{\text{Г. Н. Шикин}}$, Л. П. Ющенко

Кафедра теоретической физики и механики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Согласно астрофизическим данным, наша Вселенная в настоящее время расширяется с ускорением. Одно из объяснений такой эволюции состоит в том, что в современную эпоху примерно 70% полной массы Вселенной составляет тёмная энергия (космический вакуум). При моделировании материи Вселенной используется уравнение состояния вида $P = W\varepsilon$, где P — давление, ε — плотность энергии. При таком уравнении состояния тёмной энергии соответствует $W = -1$, что приводит к уравнению состояния идеальной жидкости с отрицательным давлением: $P = -\varepsilon < 0$. Этот случай соответствует космологической постоянной. Переход от замедленного расширения к ускоренному означает, что на каком-то этапе эволюции ускорение $\ddot{a}(t)$ меняет знак с отрицательного на положительный. При этом параметр W изменяется от значений $W > -1$ до значения $W = -1$. Отметим, что случай $-1 < W < -\frac{1}{3}$ соответствует квинтэссенции, а $W < -1$ — фантомной материи.

В работе рассмотрен переход Вселенной из замедленного расширения к ускоренному в предположении, что Вселенная заполнена спинорной материей.

Ключевые слова: спинорная материя, ускорение, тёмная энергия, идеальная жидкость, квинтэссенция, фантомная материя.

1. Постановка задача и решение системы уравнений спинорного и гравитационного полей

Лагранжиан системы гравитационного и спинорного полей выбираем в виде [1]:

$$L = \frac{R}{2\varkappa} + \mathcal{L} = \frac{R}{2\varkappa} + \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^{\alpha}\nabla_{\alpha}\psi - \nabla_{\alpha}\bar{\psi}\gamma^{\alpha}\psi\right) - ms - F(s)\,, \tag{1}$$

где R — скалярная кривизна, $s = \bar{\psi}\psi$ — инвариант спинорного поля, $F(s)$ — произвольная функция s. Из (1) следуют уравнения спинорного поля

$$i\gamma^{\alpha}\nabla_{\alpha}\psi - m\psi - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}\psi = 0\,, \tag{2}$$

$$i\nabla_{\alpha}\bar{\psi}\gamma^{\alpha} + m\bar{\psi} + \bar{\psi}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{3}$$

и уравнения Эйнштейна

$$R^{\alpha}_{\beta} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\beta}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha}_{\beta}\,. \tag{4}$$

Выпишем компоненты тензора энергии-импульса спинорного поля:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{i}{4}\left(\bar{\psi}\gamma_{\alpha}\nabla_{\beta}\psi + \bar{\psi}\gamma_{\beta}\nabla_{\alpha}\psi - \nabla_{\alpha}\bar{\psi}\gamma_{\beta}\psi - \nabla_{\beta}\bar{\psi}\gamma_{\alpha}\psi\right) - g_{\alpha\beta}\mathcal{L}\,,$$
$$\mathcal{L} = s\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} - F, \quad T^{0}_{0} = ms + F(s), \quad T^{1}_{1} = T^{2}_{2} = T^{3}_{3} = -\mathcal{L}\,. \tag{5}$$

Статья поступила в редакцию 25 мая 2015 г.

Используем метрику изотропной пространственно плоской Вселенной

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\big(\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2\big). \tag{6}$$

В метрике (6) уравнения Эйнштейна принимают вид

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} = \varkappa T_0^0\,, \quad \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \varkappa T_1^1 = \varkappa T_2^2 = \varkappa T_3^3\,. \tag{7}$$

Из (7) имеем:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \pm\sqrt{\frac{\varkappa}{3}T_0^0}, \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\varkappa}{6}(T_0^0 - 3T_1^1). \tag{8}$$

Найдём связь между компонентами тензора энергии-импульса спинорного поля и идеальной жидкости с уравнением состояния $P = W\varepsilon$ [2]. Отметим, что случай $W = -1$ соответствует космическому вакууму [3], $-1 < W < 1\frac{1}{3}$ — квинтэссенции, а $W < -1$ — фантомной материи [4]. Тензор энергии-импульса используем в форме:

$$T^{\mu}_{\nu\,\mathrm{pf}} = (P + \varepsilon)u_\nu u^\mu - \delta^\mu_\nu P, \tag{9}$$

где P — давление, ε — плотность энергии.

Из (9) следует:

$$T_{\mathrm{pf}}{}_0^0 = \varepsilon, \quad T_{\mathrm{pf}}{}_1^1 = T_{\mathrm{pf}}{}_2^2 = T_{\mathrm{pf}}{}_3^3 = -P. \tag{10}$$

Из (5) следует, что аналогом давления для спинорного поля является $\mathcal{L} = P$. Из равенства

$$\frac{P}{\varepsilon} = \frac{\mathcal{L}}{T_0^0} = \frac{s\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} - F(s)}{ms + F(s)} = W \tag{11}$$

получаем уравнение для определения $F(s)$:

$$s\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} - (W+1)F - Wms = 0. \tag{12}$$

Из (12) находим $F(s)$:

$$F(s) = \lambda s^{W+1} - ms, \quad \lambda = \mathrm{const}. \tag{13}$$

Поскольку для спинорного поля $T_0^0 = ms + F(s)$, то $T_{\mathrm{pf}}{}_0^0 = \varepsilon = \lambda s^{W+1}$, $P = W\varepsilon = W\lambda s^{W+1}$.

Из условия $T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$ находим связь ε и P.

При $\nu = 0$ имеем:

$$T^{\alpha}_{0,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{-g}T_0^\alpha\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x^0}T^{\gamma\delta}. \tag{14}$$

С учётом (10) из (14) имеем:

$$\dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + P) = \dot{\varepsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1+W)\varepsilon = 0. \tag{15}$$

Из (15) находим

$$\varepsilon = \varepsilon_0 a^{-3(1+W)}, \quad P = W\varepsilon = W\varepsilon_0 a^{-3(1+W)}. \tag{16}$$

Найдём решения уравнений спинорного поля. Из (2) в метрике (6) имеем:

$$i\bar{\gamma}^{\alpha}\left(\partial_t + \frac{3}{2}\frac{\dot{a}}{a}\right)v - mv - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}v = 0, \tag{17}$$

где $\bar{\gamma}^{\alpha}$ — матрицы Дирака в плоском пространстве-времени. С учётом того, что

$$v = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \end{pmatrix},$$

из (17) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{v}_r + \dfrac{3}{2}\dfrac{\dot{a}}{a}v_r + i(m+F')v_r = 0, \quad r = 1,2, \\ \dot{v}_r + \dfrac{3}{2}\dfrac{\dot{a}}{a}v_r - i(m+F')v_r = 0, \quad r = 3,4. \end{cases} \tag{18}$$

Из (18) следует уравнение для $s = \bar{\psi}\psi = \overset{*}{v}_1 v_1 + \overset{*}{v}_2 v_2 - \overset{*}{v}_3 v_3 - \overset{*}{v}_4 v_4$ и его решение:

$$\dot{s} + 3\frac{\dot{a}}{a}s = 0, \quad s = \frac{s_0}{a^3}, \quad s_0 = \mathrm{const}. \tag{19}$$

Система уравнений (18) имеет решение

$$\begin{cases} v_{1,2} = \dfrac{c_{1,2}}{a^{3/2}} e^{-i\left(mt + \int F'(s)\mathrm{d}t\right)}, \quad c_{1,2} = \mathrm{const}, \\ v_{3,4} = \dfrac{c_{3,4}}{a^{3/2}} e^{i\left(mt + \int F'(s)\mathrm{d}t\right)}, \quad c_{3,4} = \mathrm{const}. \end{cases} \tag{20}$$

При этом $s_0 = c_1^2 + c_2^2 - c_3^2 - c_4^2$.

Поскольку ${T_{\mathrm{pf}}}_0^0 = \varepsilon = \lambda s^{W+1} = \lambda s_0^{3(W+1)}/a^{3(W+1)} = \varepsilon_0/a^{3(W+1)}$, то из (8) имеем:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\varkappa}{3}\varepsilon} = \sqrt{\frac{\varkappa\varepsilon_0}{3}}a^{-\frac{3(W+1)}{2}}. \tag{21}$$

Уравнение (21) имеет решение:

$$a(t) = \left[\sqrt{\frac{\varkappa\varepsilon_0}{3}} \cdot \frac{3(W+1)}{2}(t+t_0)\right]^{\frac{2}{3(W+1)}}, \quad W \neq -1, \quad t_0 = \mathrm{const}. \tag{22}$$

2. Переход от замедленного расширения Вселенной к ускоренному

Рассмотрим процесс перехода Вселенной из замедленного расширения к ускоренному на основе нелинейного спинорного поля [5]. Масштабный фактор $a(t)$ определяем из (8), где $T_0^0 = F(s)$ в частном случае $m = 0$. При этом из (8) имеем:

$$\int \frac{\mathrm{d}a}{a\sqrt{F(s)}} = \sqrt{\frac{\varkappa}{3}}t. \tag{23}$$

Выберем $F(s)$ в таком виде:

$$F(s) = \lambda s^{2/3}\left\{\frac{1}{s_0^{2/3}} + \left[\left(\frac{1}{s}\right)^{1/3} = c_0\right]^2\right\} = \frac{\lambda}{a^2}\left[1 + (a - a_0)^2\right], \tag{24}$$

где λ — параметр нелинейности, $a_0 = s_0^{1/3}c_0$, $c_0 = \mathrm{const}$.

При подстановке $F(s)$ из (24) в (23) и интегрировании получаем $a(t)$:

$$a(t) = a_0 + \operatorname{sh}\omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{\lambda\varkappa}{3}}. \tag{25}$$

Из (25) следует:

$$\text{при}\;\; t_{\min} = -\sqrt{\frac{3}{\varkappa\lambda}}\ln\left(\sqrt{a_0^2+1} + a_0\right) \quad a(t_{\min}) = 0, \quad a(0) = a_0, \tag{26}$$

$$\text{при}\;\; t \to \infty \quad a(t) \approx \frac{1}{2}e^{\omega t} \to \infty, \quad \dot a(t) = \sqrt{\frac{\varkappa\lambda}{3}}\operatorname{ch}\omega t > 0, \tag{27}$$

$$\text{при}\;\; t_{\min} \leqslant t \leqslant \infty, \quad \ddot a(t) = \frac{\varkappa\lambda}{3}\operatorname{sh}\omega t; \tag{28}$$

$$\text{при}\;\; t = t_{\min} \quad \ddot a(t) = -\frac{\varkappa\lambda}{3}a_0 < 0, \quad \ddot a(0) = 0, \tag{29}$$

$$\text{при}\;\; t > 0 \quad \ddot a(t) > 0. \tag{30}$$

При переходе через $t = 0$ $\ddot a(t)$ изменяет знак.

Рассмотрим, каким значениям $W = P/\varepsilon$ соответствуют состояния $a \ll 1$ и $a(t) \to \infty$. $\varepsilon = F(s)$ имеет вид (24), а $P(s)$ определяется равенством:

$$P(s) = s\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} - F(s) = \frac{2}{3}\lambda\left[s^{2/3}\left(\frac{1}{s_0^{2/3}} + c_0^2\right) - c_0 s^{1/3}\right] - \lambda s^{2/3}\left\{\frac{1}{s_0^{2/3}} + \left[\left(\frac{1}{s}\right)^{1/3} - c_0\right]^2\right\}. \tag{31}$$

1. $a \to 0$, $s \to \infty$, $\frac{P}{\varepsilon} = W = -\frac{1}{3}$. Из (22) следует:
   при $W = -\frac{1}{3}$
   $$a(t) = \sqrt{\frac{\varkappa\varepsilon_0}{3}}t. \tag{32}$$
   Имеем неинфляционную стадию расширения.
2. $a \to \infty$, $s \to 0$, $\frac{P}{\varepsilon} = W = -1$. В этом случае из (13) и (16) следует: $F(s) = \lambda$, $\varepsilon = \varepsilon_0 = \lambda$. При подстановке в (8) $T_0^0 = \varepsilon_0$, получаем уравнение $\frac{\dot a}{a} = \sqrt{\frac{\varkappa\varepsilon_0}{3}}$, имеющее решение
   $$a = a_0\exp\left(\sqrt{\frac{\varkappa\varepsilon_0}{3}}t\right). \tag{33}$$
   Из (25) следует:
   $$\text{при}\;\; t \to \infty \quad a(t) \approx \frac{1}{2}\exp\left(\sqrt{\frac{\varkappa\varepsilon_0}{3}}t\right). \tag{34}$$

Таким образом, нелинейное спинорное поле с нелинейным членом вида (24) описывает переход Вселенной из состояния с $W = -\frac{1}{3}$ в состояние космического вакуума с $W = -1$.

Литература

1. *Чернин А. Д.* Космический Вакуум // УФН. — 2001. — Т. 171, № 11. — С. 1153–1176.
2. *Hao J.-g., Li X.-z.* Phantom with Born–Infeld-type Lagrangian // Phys. Rev. D. — 2003. — Vol. 68. — Pp. 04350–1–45501–5.
3. *Krechet V. G., Fil'chenkov M. L., Shikin G. N.* Equivalence between the Descriptions of Cosmological Models Using a Spinor Field and Perfect Fluid // Gravitation and Cosmology. — 2008. — Vol. 14, No 3. — Pp. 292–294.
4. *Saha B.* Spinor Fields in Bianchy type-I Universe // Физика элементарных частиц и атомного ядра. — 2006. — Т. 37, № 7. — С. 27–90.
5. *Горбунова О. Г.* Идеальная жидкость с неявным уравнением состояния и ускорение Вселенной // Известия ВУЗов. Физика. — 2006. — Т. 49, № 5. — С. 91–92.

UDC 524.83

Spinor Model of the Transition of the Universe from the Slow Expansion to the Accelerating One

N. A. Kovalchukov, G. N. Shikin, L. P. Yuschenko

Department of Theoretical Physics and Mechanics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

According to the astronomical data our Universe is expanding with acceleration in the present stage. One of the possible explanation of such evolution is that in the present epoch about 70% of the total mass of the Universe is represented by dark energy(cosmic vacuum). Under simulating of the matter of the Universe we use the state equation of the form $P = W\varepsilon$, where P is pressure, ε is energy density. Under such state equation $W = -1$ corresponds to dark energy, that leads us to the state equation of the ideal fluid with negative pressure: $P = -\varepsilon < 0$. This case corresponds to the cosmological constant. The transition from the slow expansion to the accelerating one means that at some stage of the evolution acceleration $\ddot{a}(t)$ changes it's sign from minus to plus. In this case the parameter W changes from values $W > -1$ to the value $W = -1$. It is notable that the case $-1 < W < -\frac{1}{3}$ corresponds to the quintessence, and $W < -1$ — to the phantom matter.

In this work we consider the transition of the Universe from the slow expansion to the accelerating one on the assumption that the Universe is filled by spinor matter.

Key words and phrases: spinor matter, acceleration, dark energy, ideal fluid, quintessence, phantom matter.

References

1. A. D. Chernin, Cosmic Vacuum, Physics-Uspekhi 44 (11) (2001) 1099, in Russian.
2. J.-g. Hao, X.-z. Li, Phantom with Born–Infeld-type Lagrangian, Phys. Rev. D 68 (2003) 04350–1–45501–5.
3. V. G. Krechet, M. L. Fil'chenkov, G. N. Shikin, Equivalence between the Descriptions of Cosmological Models Using a Spinor Field and Perfect Fluid, Gravitation and Cosmology 14 (3) (2008) 292–294.
4. B. Saha, Spinor Fields in Bianchy type-I Universe, Physics of Particles and Nuclei 37 (7) (2006) S13–S44.
5. O. G. Gorbunova, Brief Communication: Ideal Liquid with an Implicit Equation of State and Acceleration of the Universe, Russian Physics Journa 49 (5) (2006) 556–558, in Russian.