БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАЩЕМЛЕННОЙ И ШАРНИРНО-НЕПОДВИЖНОЙ БАЛКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОЧЕТАНИЯ НАГРУЗОК

И.А. Монахов[1], Ю.К. Басов[2], М.И. Абу Махади[2]

[1] Московский архитектурно-строительный институт
Волгоградский проспект, д. 32/11, Москва, Россия, 109316
[1] Московская финансово-юридическая академия
ул. Введенского, 1, Москва, Россия, 117342
[2] Российский университет дружбы народов
ул. Орджоникидзе, 3, Москва, Россия, 115419

В статье разработана методика решения задач о больших прогибах балок из идеального жесткопластического материала при действии несимметрично распределенных нагрузок с учетом предварительного растяжения-сжатия. Разработанная методика применена для исследования напряженно-деформированного состояния однопролетных балок, а также для вычисления предельной нагрузки балок. Данная работа является продолжением статьи Монахова И.А., Басова Ю.К. «Аналитическое определение несущей способности балки с одной защемленной и другой шарнирно-неподвижной опорами под действием сочетания нагрузок» (Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2015. № 1).

Ключевые слова: балка, нелинейность, аналитическое определение

Зоны $0 \le x \le x_1$ и $x_3 \le x \le 2$ — жесткие, откуда распределение прогибов в этих зонах равно

$$w = w_1 \frac{x}{x_1},\ w = w_3 \frac{2-x}{2-x_3}, \tag{1}$$

где w_1 и w_3 — прогибы при $x = x_1$ и $x = x_3$.

Скорости прогибов в этих зонах равны

$$w = \left\{\frac{w_1}{x_1}\right\}^{\bullet} x \text{ при } 0 \le x \le x_1,\ w^{\bullet} = \left\{\frac{w_3}{2-x_3}\right\}^{\bullet} (2-x) \text{ при } x_3 \le x \le 2. \tag{2}$$

Из условия слабых разрывов получаем уравнение

$$-\left(\frac{p}{(n \pm n_1)}\right)^{\bullet} (x_1 - x_2) + \frac{p}{(n \pm n_1)}^{\bullet} x_2 - \left(\frac{w_1}{x_1}\right)^{\bullet} - \frac{p}{(n \pm n_1)}^{\bullet} x_1 = 0$$

$$\text{или } \left\{\frac{p}{(n \pm n_1)}(x_2 - x_1)\right\}^{\bullet} = \left(\frac{w_1}{x_1}\right),$$

интегрирование которого с учетом начального условия $w_1 = 0$ при $x = x_1$ дает выражение w_1:

$$w_1 = \frac{px_1}{(n \pm n_1)}(x_2 - x_1). \tag{3}$$

Для $x = x_3$ можно получить выражение w_3

$$w_3 = \frac{p}{(n \pm n_1)}(x_3 - x_2)(2 - x_3). \tag{4}$$

С помощью (3), (4) из (1) следуют два равносильных выражения

$$w_0 = \frac{p}{2(n \pm n_1)}(x_2^2 - x_1^2),$$

$$w_0 = \frac{p}{2(n \pm n_1)}(4x_3 - 4x_2 - x_3^2 - x_2^2). \tag{5}$$

Можно получить выражения для изгибающих моментов в зонах $0 \le x \le l_1$, $l_1 \le x \le x_1$, $x_3 \le x \le l_2$, $l_2 \le x \le 2$ согласно уравнению равновесия:

$$m = (px_1 - pl_1)x \pm a, \ (0 \le x \le l_1)$$

$$m = -\frac{px_2^2}{2} + pxx_1 - \frac{pl_1^2}{2} \pm a, \ (l_1 \le x \le x_1).$$

Из условия пластичности получим:

$m\big|_{x=x_1} = 1 - (n \pm n_1)^2 = \frac{px_1^2}{2} - \frac{pl_1^2}{2} \pm a$, откуда выражение для p:

$$p = \frac{2\left[1 - (n \pm n_1)^2 \mp a\right]}{x_1^2 - l_1^2}; \tag{6}$$

$$m = -\frac{px^2}{2} + pxx_3 + 1 - (n \pm n_1)^2 - \frac{px_3^2}{2}, \ (x_3 \le x \le l_2)$$

$$m = (px_3 - pl^2)x + 1 - (n \pm n_1)^2 + pl^2 - px_3 l_2, \ (l_2 \le x \le 2).$$

Из условия пластичности получим:

$$m\big|_{x=2} = -\left[1 - (n \pm n_1)^2\right] \pm a = -2pl_2 + 2px_3 + 1 - (n \pm n_1)^2 + \frac{pl_3^2}{2} - \frac{px_3^2}{2}.$$

Откуда выражение для p:

$$p = \frac{4\left[1-(n \pm n_1)^2 \mp 2a\right]}{4l_2 + 4x_3 - l_2^2 + x_3^2}. \tag{7}$$

Используя полученные равносильные равенства (6) и (7) для p можно получить выражение для x_2:

$$x_2 = -\frac{x_1^2}{4} + \frac{l_1^2}{2} + l_2 - \frac{l_2^2}{4}, \tag{8}$$

осталось лишь определить значение n в зависимости от p.

Определим значение n из условия максимума p. Это приводит к задаче об условном максимуме функции p, которая приводится к задаче о безусловном максимуме функции ϕ с помощью множителя Лагранжа (рис. 1).

Безусловная функция имеет вид

$$\phi = \frac{2\left[1-(n \pm n_1)^2 \mp \alpha\right]}{\left(x_1^2 - l_1^2\right)} + \lambda \frac{\left[1-(n \pm n_1)^2 \mp \alpha\right]\left(x_2^2 - x_1^2\right)}{\left(x_1^2 - l_1^2\right)(n \pm n_1)} \lambda w_0, \tag{9}$$

где λ — множитель Лагранжа.

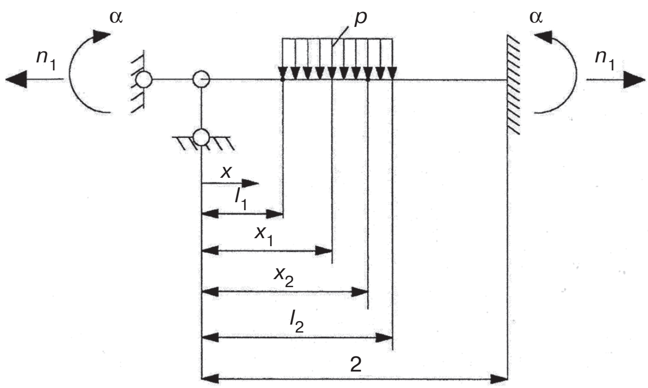

Рис. 1. Расчетная схема

Дифференцируя (9) по x_1 и n и приравнивая результаты к нулю, можно получить:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1} = 2 + \frac{\lambda}{n \pm n_1}\left(x_2^2 - l_1^2\right) = 0, \text{ откуда } \lambda = -\frac{2(n \pm n_1)}{x_2^2 - l_1^2},$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 2\left[-2(n \pm n_1)\right] + \lambda\left(x_2^2 - x_1^2\right)\frac{\left(x_2^2 - x_1^2\right)\left[1 + (n \pm n_1) \mp \alpha\right]}{\left(x_2^2 - l_1^2\right)(n \pm n_1)} = 0,$$

откуда

$$(n \pm n_1)^2 = \frac{(1 \mp \alpha)\left(x_2^2 - x_1^2\right)}{x_2^2 + x_1^2 - 2l_1^2}, \;\; p = \frac{4(1 \mp \alpha)}{\left(x_2^2 + x_1^2 - 2l_1^2\right)^2}. \tag{10}$$

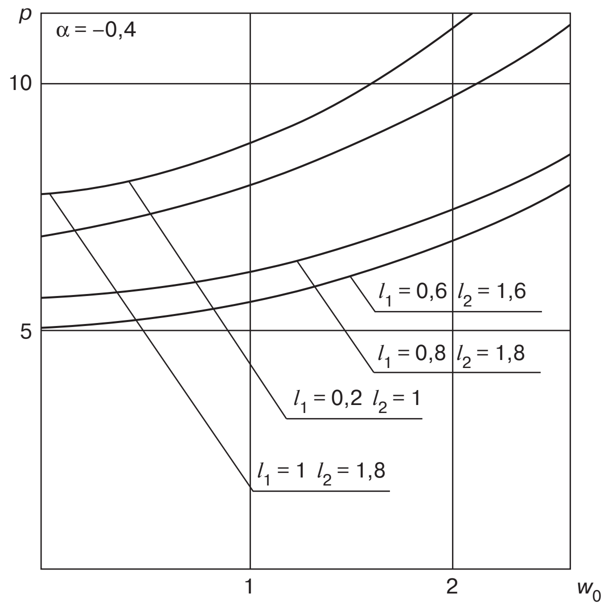

Рис. 2. Зависимость нагрузки p от прогиба w_0 при различных l_1, l_2 и α

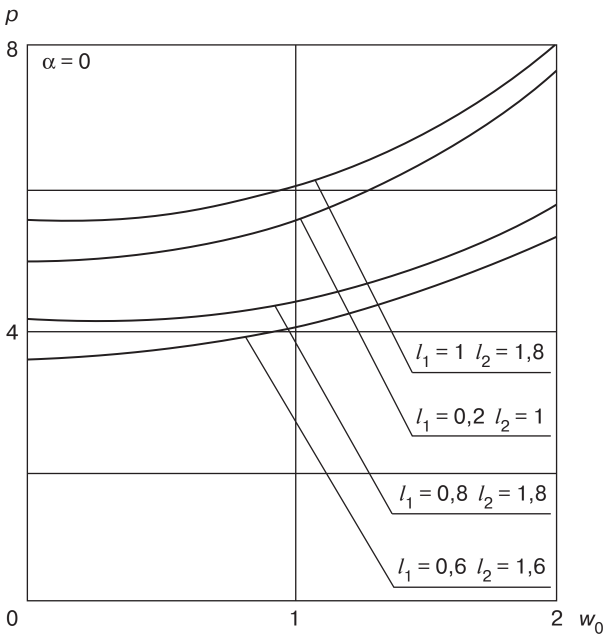

Рис. 3. Зависимость нагрузки p от прогиба w_0 при различных l_1, l_2 и α

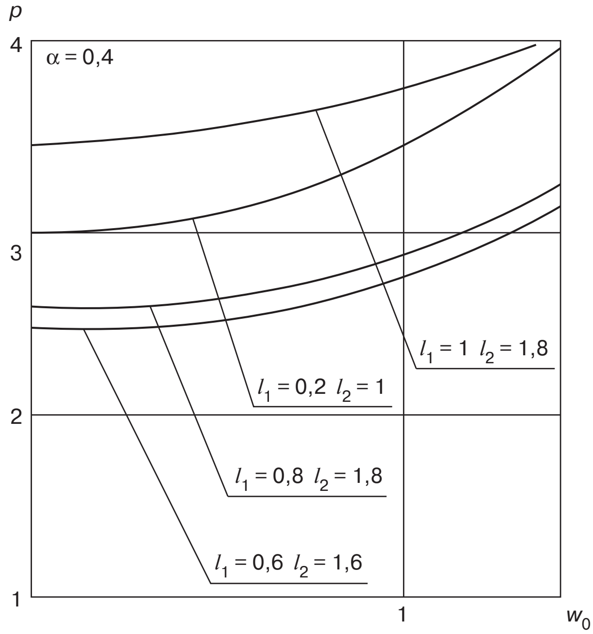

Рис. 4. Зависимость нагрузки p от прогиба w_0 при различных l_1, l_2 и α

Таким образом, получено аналитическое решение задачи о деформировании балки с одной защемленной и с другой шарнирно-неподвижной опорами под действием локальных распределенных нагрузок, краевых моментов и продольной силы с учетом больших прогибов. Зависимости нагрузки р от прогиба w_0 при различных заданных l_1, l_2, и α показаны на рис. 2—4.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Монахов И.А., Басов Ю.К.* Предельная нагрузка для защемленной балки, нагруженной продольной силой, несимметрично распределенной нагрузкой и опорными моментами // Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования. 2014. № 1. С. 136—141.

BIG DEFLECTIONS IDEALLY PLASTIC RESTRAINED AND FIXED BY HINGE BEAM UNDER THE INFLUENCE OF LOAD COMBINATIONS

I.A. Monakhov[1], Yu.K. Basov[2], M.I. Abu Mahadi[2]

[1] Moscow Architecture and Construction Institute
Volgogradsky Prospekt, d. 32/11, Moscow, Russia, 109316
Moscow Finance and Law Academy
Vvedensky str., d. 1, Moscow, Russia, 117342
[2] Peoples' Friendship University of Russia
Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419

In the article the technique of solving the problems of large deflections of the beams from the ideal rigid-plastic material under the influence of asymmetrically distributed loads, with account of pretension or pre compression. The developed method was applied to the study of stress-strain state of single-span beams, as well as for the calculation of the limit load for the beams.

Key words: bar, non-linearity, analytical

REFERENCES

[1] Monahov I.A., Basov Yu.K. Limit load for a clamped beam, loaded longitudinal force asymmetrically distributed load and the supporting moments. Bulletin of Peoples' Friendship University. Series: Engineering Research. 2014. № 1. P. 136—141.