



DOI 10.22363/2312-8143-2017-18-4-518-527

УДК 513.073

ОРТОГОНАЛЬНАЯ КРИВОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ И ПОСТРЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ТРАПЕЦИЕВИДНО- КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПЛАНАХ

В.Н. Иванов, Т.С. Имомназаров, И.Т. Фархан

Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198

Тонкостенные пространственные конструкции на криволинейных планах все более широко используются при строительстве общественных зданий, торговых центров, спортивных сооружений. Разработка методов формообразования поверхностей на криволинейных планах является одной из современных задач архитектуры и градостроительства. В статье рассматривается ортогональная система координат, образованная в плоскости с произвольной направляющей кривой и системой прямых линий, ортогональных направляющей кривой. Координатная система образует в плоскости криволинейно-трапециевидную область. Задание функции координаты ортогональной плоскости позволяет образовывать разнообразные поверхности на криволинейных планах. Сопрягая различные направляющие кривые в плоскости, можно формировать комбинированные поверхности. В статье приведена система ортогональных координат криволинейно-трапециевидных планов и способы формообразование поверхностей на этих планах. Рассмотрены поверхности с функцией вертикальной координаты общего вида, приведены поверхности на комбинированных планах из сегментов одного типа.

Ключевые слова: плоская кривая, ортогональная криволинейная система координат, криволинейно-трапециевидный план, формообразование поверхностей на криволинейных планах

Введение. В работах [1; 2] на основе подхода аппроксимации сложных поверхностей, предложенного американским ученым Стивеном Кунсом [3], рассмотрены возможности формообразования тонкостенных пространственных конструкций на трапециевидных планах для использования их в современном градостроительстве. Поверхности Кунса образуются суммированием линейчатых поверхностей [4], построенных на опорных кривых противоположных сторон трапециевидного плана. Если опорные кривые трапециевидного плана лежат в вертикальной плоскости, то координатная система трапециевидного плана состоит из системы неортогональных прямых. В работах [5; 6] рассмотрена возможность формообразования поверхностей модифицированных поверхностей Кунса с наклонными опорными кривыми. Координатная система в плане образуется системой не ортогональной кривых. Если опорные кривые трапециевидного плана лежат в горизонтальной плоскости, то поверхность Кунса вырождается в плоскость, образуя в плоскости криволинейную неортогональную систему координат.

Задание функции вертикальной координаты позволяет получить разнообразные формы поверхностей [7]. Во всех рассмотренных работах координатная система криволинейных планов и координатная система поверхности неортогональная. В статье рассматривается ортогональная координатная система криволинейно-трапециевидных планов и способы формообразования поверхностей на этих планах.

Рассмотрим систему координат, образуемую системой прямых ортогональных плоской базовой кривой $r_0(u) = x(u)i + y(u)j$ (рис. 1). Уравнение координатной системы получаем в виде

$$r(u, v) = r_0(u) + ve(u), \tag{1}$$

где $e(u) = -v$, v — нормаль базовой кривой; v — координата образующих прямых по нормали к базовой кривой. Положительное значение координаты прямых принимаем в сторону выпуклости базовой кривой.

Получаемая координатная система состоит из системы эквидистантных кривых — кривых параллельных базовой кривой и системы ортогональных им прямых, т.е. координатная система является ортогональной.

Если базовая кривая — окружность, то получается полярная система координат. Для произвольной базовой кривой координатную систему можно назвать псевдо-полярной системой координат.

Ограничивая значения координат $u_1 \leq u \leq u_2$, $v_1 \leq v \leq v_2$ в общем случае получаем криволинейно-трапециевидную область. Если базовой кривой является замкнутая кривая, например, эллипс, то получаем овално-криволинейную замкнутую область.

Отметим, что при отрицательных значениях прямолинейных координат (координаты в направлении вогнутости базовой кривой) на некотором расстоянии от базовой кривой (зависит от функции базовой кривой) получается взаимно пересекающаяся координатная система, поэтому далее будем в основном рассматривать области с положительными значениями координаты v .

На криволинейных планах с различными базовыми кривыми (рис. 2) координата прямой образующей изменяется в диапазоне $0 \leq v \leq v_k$, где v_k определяет ширину криволинейной полосы. Можно рассматривать планы с диапазоном $v_n \leq v \leq v_k$, с шириной полосы $v_k - v_n$.

Ортогональность торцов криволинейных планов с псевдо-полярной системой координат криволинейным координатным линиям, позволяет строить комбинированные криволинейные планы из отрезков однотипных или различных отрезков полос с одинаковой шириной. При этом обеспечивается сопряженность координатных кривых по касательной. Радиусы кривизны в точках сопряжения в общем

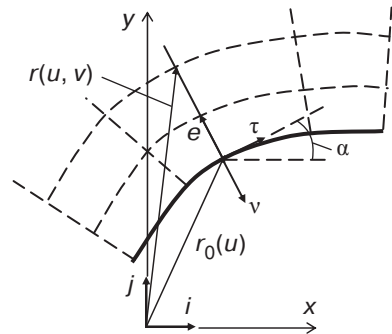


Рис. 1. Псевдо-полярная система координат [Fig. 1. False-polar coordinate system]

случае будут различны. На рисунке 3 приведены примеры комбинированных планов с базовой синусоидой (косинусоидой) из отсеков на одну полуволну синусоиды.

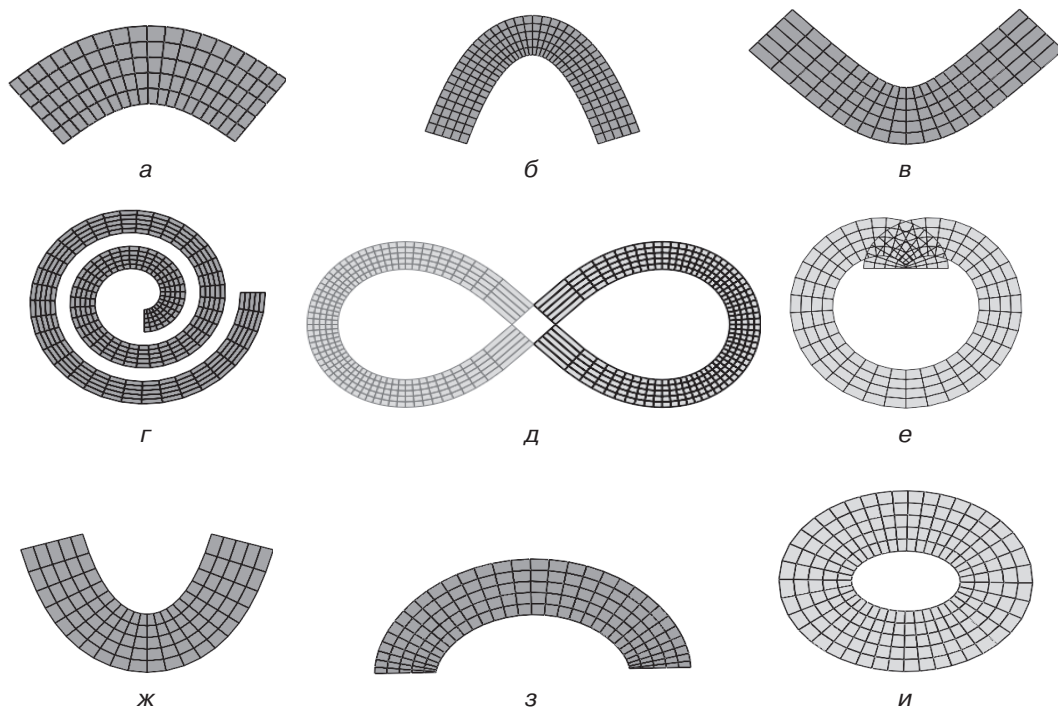


Рис. 2. Криволинейные планы с ортогональной системой координат и различными базовыми кривыми: а — синусоидой (косинусоидой) на одну полуволну; б — параболой; в — гиперболой; г — эвольвентой круга; д — лемнискатой Бернулли; е — кардиоидой; ж — цепной линией; з — циклоидой; и — эллипсом

[Fig. 2. Curvilinear plans with orthogonal coordinate system]

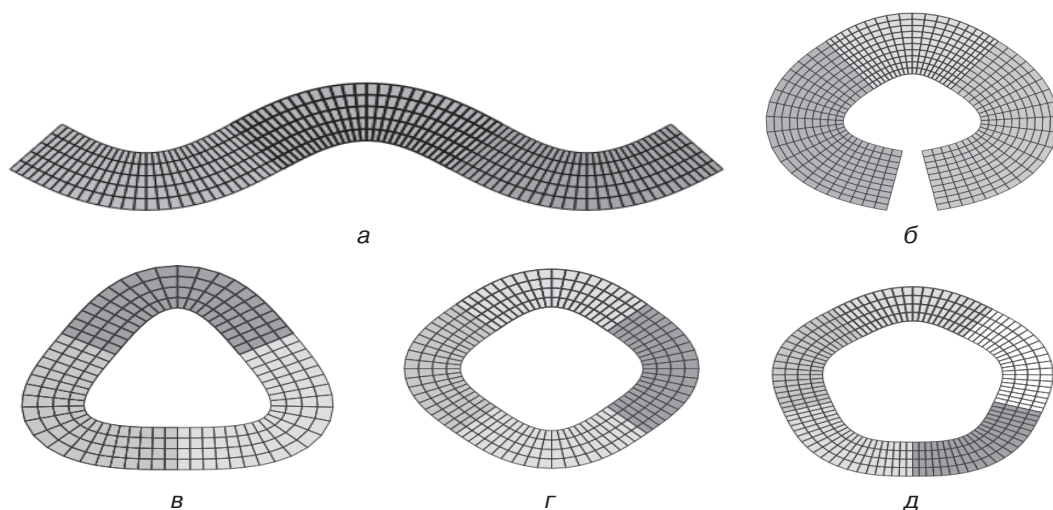


Рис. 3. Комбинированные планы из синусоидальных отсеков: а — комбинация отсеков проведена из отсеков с положительной и отрицательной амплитудой синусоиды; б–д — комбинированный план получен путем поворота начального отсека на угол пересечения торцевых прямых

[Fig. 3. Combined plans from sinusoidal compartments]

Отметим, что криволинейный синусоидальный план не может быть образован с синусоидой на две и больше полуволн, так как на четных полуволнах координатные прямые (для обеспечения непрерывности плана) пойдут в сторону вогнутости синусоиды и получится самопересекающаяся координатная система прямых.

Если угол пересечения торцов криволинейного отсека θ не кратен 2π , то получается незамкнутая криволинейная область комбинированного плана (рис. 3, б). Если угол $\theta = 2\pi/k$ (k — целое число), то из k отсеков получаем замкнутый k -угольный криволинейный план (рис. 3, в—д).

Примеры комбинированных криволинейных планов на основе отсеков однотипных базовых кривых приведены на рисунке 4.

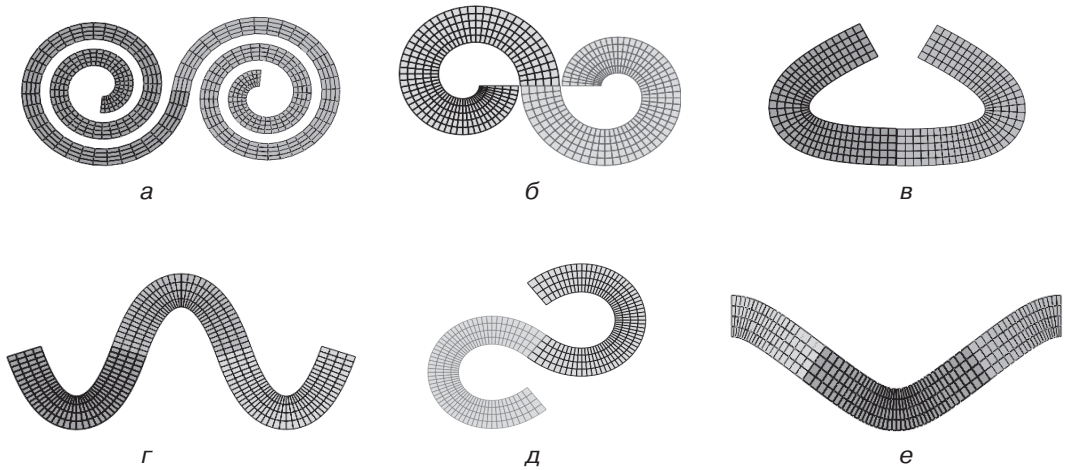


Рис. 4. Комбинированные планы из однотипных отсеков на основе базовых кривых: а, б — эвольвенты круга; в, г — равнобочной параболы; д — лемнискаты Бернулли; е — гиперболы
 [Fig. 4. Combined plans from the same compartment]

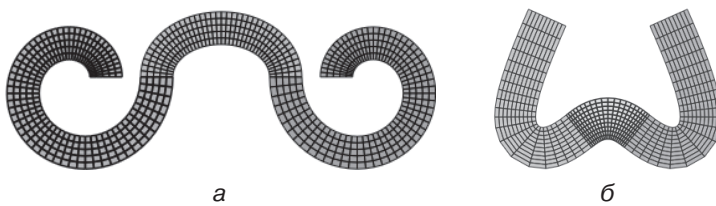


Рис. 5. Комбинированные планы из отсеков разного вида с различными базовыми кривыми: а — две эвольвенты круга и циклоида; б — синусоида и две неравнобочные параболы
 [Fig. 5. Combined plans from compartments of different types]

На рисунке 5 показаны примеры комбинированных планов из отсеков с различными базовыми кривыми.

Приведенные примеры криволинейных планов дают возможность построения разнообразных видов поверхностей. Задаваясь функцией вертикальной координаты $z(u, v)$, получаем уравнение поверхности:

$$\rho(u, v) = r_0(u) + ve(u) + z(u, v)k. \tag{2}$$

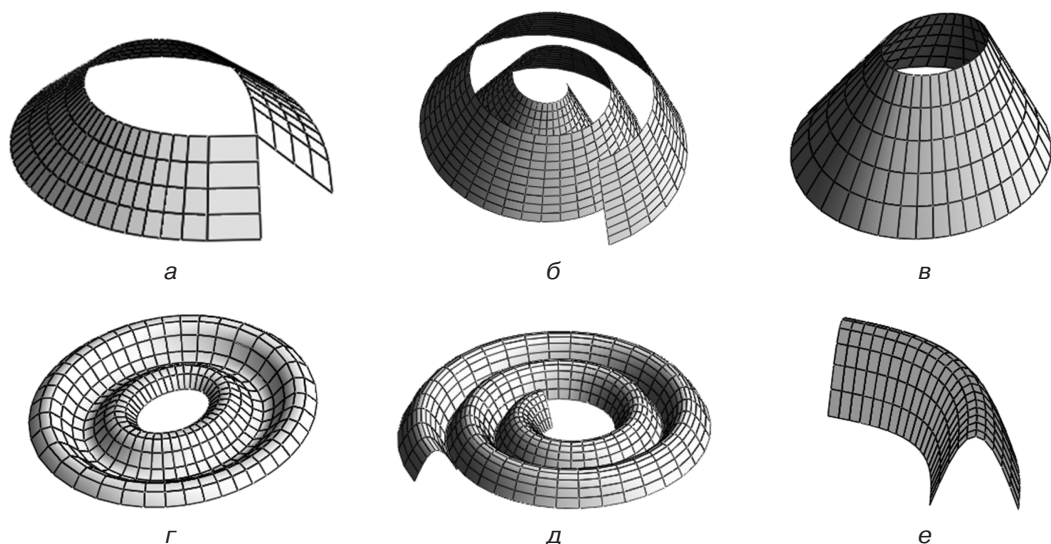


Рис. 6. Резные поверхности Монжа с различными базовыми кривыми: а — лемнискатой Бернулли; б — эвольвентой круга; в — эллипсом; г — эллипсом, образующая — синусоида на три полуволны; д — эвольвентой круга, образующая — синусоида на одну полуволну; е — синусоидой, образующая — парабола

[Fig. 6. Carved Monge surfaces with different base curves]

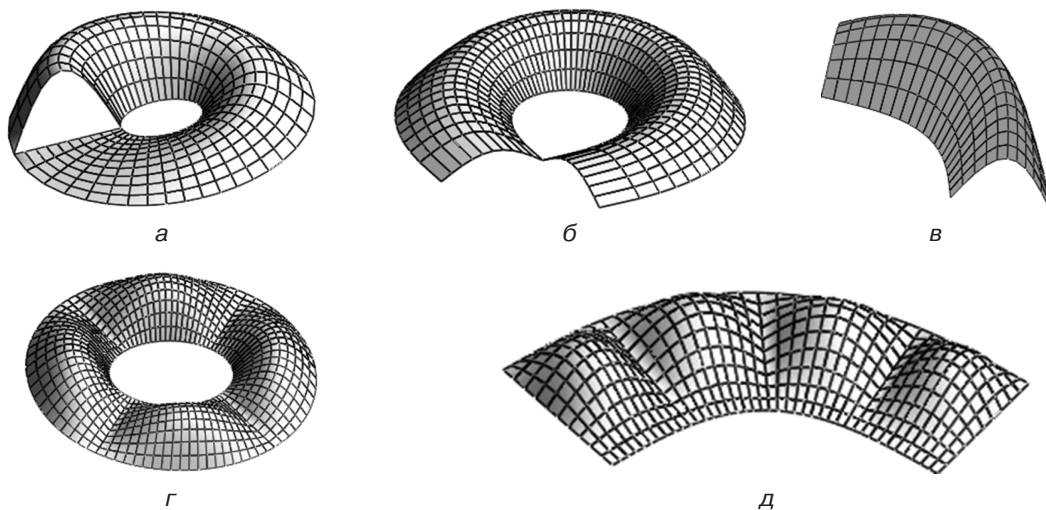


Рис. 7. Поверхности с произвольной функцией образующей базовой кривой: а — эллипсом, образующая — синусоида с линейным изменением амплитуды; б — лемнискатой Бернулли, образующая — синусоида с линейным изменением амплитуды; в — эллипсом, образующая — синусоида с параболическим законом изменением амплитуды; г — эллипсом, образующие синусоиды с изменениями амплитуды вдоль базовой кривой $z(u, v) = a \sin(v) |\sin(ku)|$; для эллипса $k = 1, 0 \leq u \leq 2\pi$; для синусоиды $k = 2, 0 \leq u \leq \pi$

[Fig. 7. Surfaces with an arbitrary function of the generating curve]

Если функция вертикальной координаты будет функцией только параметра v , то получим резную поверхность Монжа [7–9] — образующая кривая не изменяется при движении в нормальной плоскости базовой кривой. Если образующей будет прямая линия $-z = cv$, то получаем поверхность одинакового ската — тор-

совую, развертывающую поверхность. Поверхность одинакового ската относится к классу резных поверхностей Монжа. Поверхностная система координат резных поверхностей Монжа является линиями главных поверхностей. При произвольной функции $z = z(u, v)$ координатная система поверхности будет неортогональной и несопряженной — не являясь системой главных кривизм поверхности.

Формы резных поверхностей Монжа с различными базовыми кривыми представлены на рисунке 6.

На рисунке 7 представлены поверхности с функцией вертикальной координаты общего вида $z = z(u, v)$.

Далее на рисунке 8 приведены поверхности на комбинированных планах из сегментов одного типа (см. рис. 3, 4).

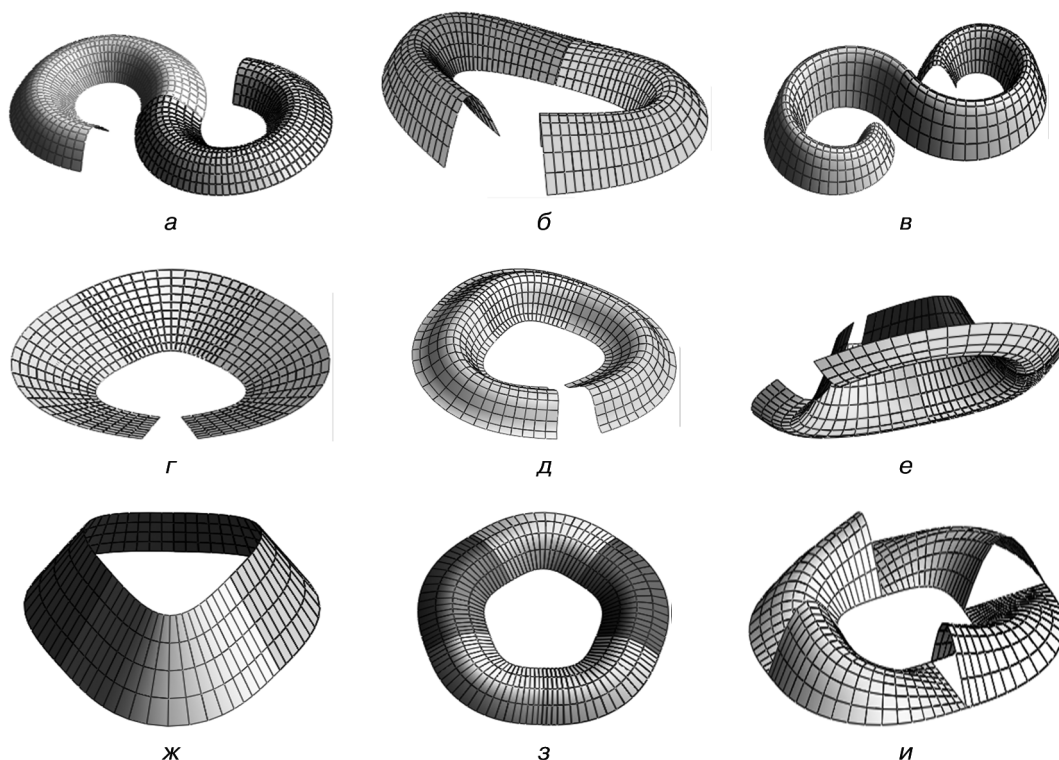


Рис. 8. Поверхности на комбинированных планах с сегментами одного типа с базовыми кривыми: *a* — лемнискатой Бернулли; *б* — равнобочной параболой; *в* — эвольвентой круга. Образующие — синусоиды на одну полуволну: *a* — постоянная амплитуда; *б, в* — линейно изменяющаяся амплитуда; *г–и* — комбинированные планы из отрезков с поворотом образующей синусоиды; *г–е* — незамкнутый комбинированный план; *ж–и* — замкнутые планы с различным количеством сегментов. Образующие: *г, ж* — наклонные прямые; *д* — косинусоида на две полуволны; *е* — наклонная синусоида; *з* — синусоида с постоянной амплитудой; *и* — синусоида с линейно меняющейся амплитудой — отсеки поверхности не сопряжены на границах сегментов плана

[Fig. 8. Surfaces on combined plans with segments of the same type]

На рисунке 9 приведены поверхности на комбинированных планах из сегментов различных видов плана (см. рис. 5): *a* — образующая кривая на всех сегментах плана наклонная синусоида; *б* — образующая на сегментах с базовой эвольвентой

круга — синусоида с линейным изменением амплитуды, на участке с базовой циклоидой синусоида с постоянной амплитудой равной амплитуде синусоиды сопрягаемых сегментов на грани сопряжения; v — на всех участках образующая прямая линия — поверхность одинакового ската; z — синусоида с постоянной амплитудой — резная поверхность Монжа; d — на среднем участке (базовая кривая синусоида) образующая кривая синусоида с постоянной амплитудой, на краевых участках (базовые кривые — неравнобочные параболы) образующие кривые синусоиды с линейно меняющейся амплитудой (начальная амплитуда равна амплитуде синусоиды среднего участка).

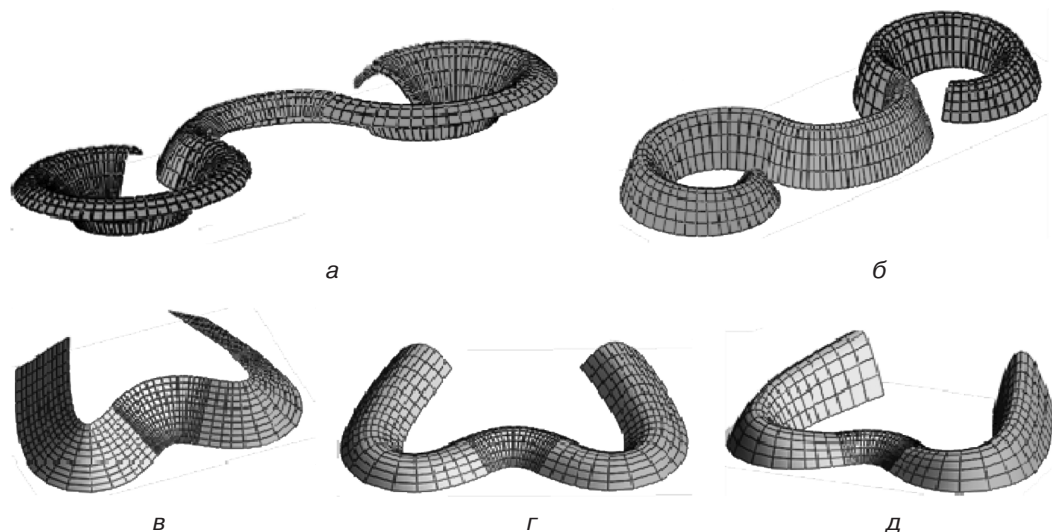


Рис. 9. Поверхности на комбинированных планах с сегментами разного типа (а–д)
[**Fig. 9.** Surfaces on combined plans with segments of different types]

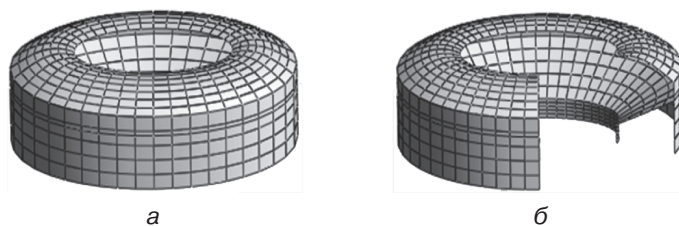


Рис. 10. Пространственная конструкция спортивного комплекса (а, б)
[**Fig. 10.** Spatial construction of a sports complex]

На рисунке 10 приведена пространственная конструкция спортивного сооружения с базовым эллипсом с прямолинейной (трибуны) и синусоидальной (покрытие) образующими и цилиндрическими опорными стенками. На данном примере показана возможность конструирования пространственных сооружений с различными образующими кривыми на одном отрезке криволинейного плана.

Приведенные примеры планов и поверхностей показывают большие возможности формообразования поверхностей на криволинейных планах для создания новых конструктивных форм в архитектуре современного градостроительства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Иванов В.Н.* Архитектурные композиции на основе поверхностей Кунса // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2007. № 4. С. 5—10.
- [2] *Иванов В.Н., Романова В.А.* Конструкционные формы пространственных конструкций. Визуализация поверхностей в системах “MathCad” и “AUTOCad”: монография. М.: Изд-во АСВ, 2016. 412 с.
- [3] *Steven A. Coons.* Surfaces for Computer-Aided Design in Space Form. Massachusetts Institute of Technology Cambridge, MA, USA, 1967.
- [4] *Иванов В.Н.* Линейчатые поверхности на заданных опорных кривых // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2015. № 3. С. 9—16.
- [5] *Иванов В.Н.* Геометрия и формообразование модифицированных поверхностей Кунса // *Вестник Российского университета дружбы народов. Сер.: Инженерные исследования*. 2011. № 2. С. 85—90.
- [6] *Иванов В.Н.* Формообразование поверхностей на заданных криволинейных планах // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2017. № 3. С. 3—8.
- [7] *Monge G.* Memoire sur l'entegrationsde quelques equations aux derives partielles. Mem. Ac. sci. 1787. 309 p.
- [8] *Иванов В.Н., Ризван Мухаммад.* Геометрия резных поверхностей Монжа и конструирование оболочек // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений: Межвузовский сборник научных трудов. Вып. 11.* М.: Изд-во АСВ, 2002. С. 27—36.
- [9] *Bulca B., Arslan K.* “Surfaces Given with the Monge Patch in E4E4”. *Журн. матем. физ., анализ, геом.*, 9:4, p. 435—447. (2013).

© Иванов В.Н., Имомназаров Т.С., Фархан И.Т., 2017

История статьи:

Дата поступления статьи: 14 сентября 2017

Дата принятия статьи к печати: 10 октября 2017

Для цитирования:

Иванов В.Н., Имомназаров Т.С., Фархан И.Т. Ортогональная криволинейная система координат и построение поверхностей на трапециевидно-криволинейных планах // *Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: «Инженерные исследования»*. 2017. Т. 18. № 4. С. 518—527. doi: 10.22363/2312-8143-2017-18-4-518-527

Сведения об авторах:

Иванов Вячеслав Николаевич, доктор технических наук, профессор департамента архитектуры и строительства инженерной академии Российского университета дружбы народов. *Область научных интересов:* геометрия, формообразование поверхностей и методы расчета тонкостенных конструкций сложных форм. *Контактная информация:* E-mail: i.v.ivn@mail.ru

Имомназаров Тимур Соибназарович, аспирант департамента архитектуры и строительства инженерной академии Российского университета дружбы народов. *Область научных интересов:* строительная механика, геометрия, формообразование поверхностей и методы расчета тонкостенных конструкций сложных форм. *Контактная информация:* E-mail: timur-imomnazarov@mail.ru

Исмаил Таха Фархан, аспирант департамента архитектуры и строительства инженерной академии Российского университета дружбы народов. *Область научных интересов:* строительная механика, геометрия, формообразование поверхностей и методы расчета тонкостенных конструкций сложных форм. *Контактная информация:* E-mail: ismael.civilengineer@gmail.com

ORTHOGONAL CURVED COORDINATE SYSTEM AND FORMING THE SURFACES ON TRAPEZIUM-CURVED PLANS

V.N. Ivanov, T.S. Imomnazarov, I.T. Farhan

Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, Russia, 117198

Thin space constructions on curved plans there are used at building of public structures, trade centers. Sport constructions. Working-out the methods of forming of the surfaces on the curved plans that is one of the modern task of the architecture and town building. The orthogonal coordinate system that is formed at the plane with some plane directrix curve and the system of the right lines orthogonal to the directrix curve there is regarded at the stat. The coordinate system forms some trapezium-curved segment. Taking some function of the vertical coordinate there is possible to receive different surfaces at the curved plans. Conjugating different directrix curves, it's possible to receive the combined surfaces. The article presents a system of orthogonal coordinates of curvilinear-trapezoidal planes and methods for forming surfaces on these planes. Surfaces with a function of the vertical coordinate of a general view are considered, and surfaces on combined plans of segments of the same type are shown.

Key words: plane curve, orthogonal curved coordinate system, curved promethium plan, forming of the surfaces on curved plans

REFERENCES

- [1] Ivanov V.N. Architectural compositions on the base of Coons surfaces. — *Structural mechanics of engineering constructions and buildings*. 2007. No. 4. P. 5—10.
- [2] Ivanov V.N., Romanova V.A. Constructive forms of space constructions. Visualization of the surfaces at the systems “MathCad” and “AUTOCad”: monograph. Moscow: Izd-vo ASV, 2016. 412 p.
- [3] Steven A. Coons. *Surfaces for Computer-Aided Design in Space Form*. Massachusetts Institute of Technology Cambridge, MA, USA, 1967.
- [4] Ivanov V.N. Ruled surfaces on the given supporting curves. *Structural mechanics of engineering constructions and buildings*. 2015. No. 3. P. 9—16.
- [5] Ivanov V.N. Geometry and forming of the modified Coons surfaces. *Vestnik of Peoples' Friendship University of Russia. Ser.: Engineering investigations*. 2011. No. 2. P. 85—90.
- [6] Ivanov V.N. The forming of the surfaces on the curved counter planes. *Structural mechanics of engineering constructions and buildings*. 2017. No. 3. P. 3—8.
- [7] Monge G. Memoire sur l'entegrationsde quelques equations aux derives partielles. *Mem. Ac. sci.* 1787. 309 p.
- [8] Ivanov V.N. Geometry of Monge surfaces and construction of the shells. *Structural mechanics of engineering constructions and buildings. Mezhhuzovskie sbornic of science works. Vip. 11.* Moscow: Izd-vo ASV, 2002. P. 27—36.
- [9] Bulca B., Arslan K. (2013) Surfaces Given with the Monge Patch in E^4 . *Jour. Math. phis., Analit., Geom.* 9(4). P. 435—447.

Article history:

Received: 14 September 2017

Accepted: 10 October 2017

For citation:

Ivanov V.N., Imomnazarov T.S., Farhan I.T. (2017) Orthogonal curved coordinate system and forming the surfaces on trapezium-curved plans. *RUDN Journal of Engineering Researches*, 18(4), 518—527. doi: 10.22363/2312-8143-2017-18-4-518-527

Bio Note:

Vyacheslav Nikolaevich Ivanov, doctor of technical science, professor of department of architecture and building of Peoples' friendship university of Russia. *Research interests*: geometry, forming and methods of design of the thin space constructions of complex forms. *Contact information*: E-mail: i.v.ivn@mail.ru

Timur Soibnazarovich Imomnazarov, post — graduated student of department of architecture and building of Peoples' friendship university of Russia. *Research interests*: construction mechanics, geometry, surface shaping and methods for calculating thin-walled structures of complex shapes. *Contact information*: E-mail: timur-imomnazarov@mail.ru

Ismael Taha Farhan, post — graduated student of department of architecture and building of Peoples' friendship university of Russia. *Research interests*: construction mechanics, geometry, surface shaping and methods for calculating thin-walled structures of complex shapes. *Contact information*: E-mail: ismael.civilengineer@gmail.com