

GEOMETRIA DO MOTORISTA DE TÁXI E SUA EMERGÊNCIA NO PLANO DA CIDADE

João Ventura Lopes

ABSTRACT

This paper presents Taxicab Geometry to a generalist audience, frames its historical context within the non-Euclidean geometries, points its practical and educational potential, and introduces the theory of its emergence in the layout of cities. This is a geometry that differs from Euclidean geometry only in the definition of distance (metric) which is illustrated, in the literature, for the movement (taxis eventually) in routes conditioned by orthogonal urban networks. The effects of applying this metric (taxi-metric) are sometimes surprising, and are described, in this paper, through some simple geometric constructions. According to Krause, while Euclidean geometry can be considered a good model for the natural world, *GMT* is a better model for the artificial landscape built by man, namely the planned settlements. At the end of the paper we present some examples of the emergence of taxi-circles in urban reticulated grids idealized in different historical periods. We believe that the conscious or unconscious nature of the use of taxi geometric figures can be discussed based on the empirical notion of distance measured by the time elapsed.

1. INTRODUÇÃO

Neste artigo abordamos a *Geometria do Motorista de Táxi (GMT)*, circunscrita ao plano e às suas noções básicas. O seu nome deriva do original *Taxicab Geometry* e é proposto por Veloso [1] num livro que aborda, na generalidade, o tema em português. Esta é uma geometria não-euclidiana recente se comparada com as geometrias elíptica e hiperbólica. As noções de ponto, linha e ângulo são as mesmas da geometria euclidia-

na, estando a diferença unicamente na definição da distância, o que tem implicações profundas. Respeita ainda todos os postulados e axiomas da geometria euclidiana, menos um: a propriedade *LAL* dos triângulos [1].

A *GMT* é assim designada pelo facto do seu espaço métrico poder modelar táxis viajando numa cidade ideal de quarteirões quadrados (Fig. 1a). A analogia recorrente com o familiar ambiente urbano e o facto de a sua estrutura ser análoga à geometria euclidiana do plano, tornam a *GMT*

uma geometria não-euclidiana bastante acessível. O estudo das suas noções básicas é intuitivo mas de resultados surpreendentes, ilustrando como as geometrias podem variar mantendo uma estrutura formal consistente e uma similaridade com a familiar geometria euclidiana, sem a necessidade da alteração da curvatura do espaço. A literatura referida neste artigo aponta o seu potencial lúdico e didáctico e defende a sua introdução no ensino da matemática a nível do secundário, não só para abordar a geometria não-euclidiana mas a própria geometria euclidiana. Esta geometria é bastante útil numa série de situações reais desde a descrição de jogadas no xadrez, simulações em mapas tipo Autómato Celular, até análises espaciais urbanas e de *Sistemas de Informação Geográfica (SIG)*.

2. UMA PERSPECTIVA HISTÓRICA

É no contexto do advento das geometrias não-euclidiana e da física moderna, que Minkowski (1864-1909), professor do jovem Einstein em Zurique, propõem, no início do séc. XX, uma família inteira de métricas alternativas. De entre elas existe uma chamada métrica-táxi cuja fórmula da distância é hoje utilizada na *GMT* [2].

Esta geometria foi baptizada por Menger em 1952 e o seu nome aparece pela primeira vez no catálogo da exposição *You Will Like Geometry*, por si organizada em Chicago. Menger, que iniciou o estudo sistemático da geometria de distância abstracta, atribuía-lhe, para além de um valor científico-educacional, um outro de cariz filosófico. Nascido em Viena em 1902, pertenceu ao Círculo de Viena, o qual desenvolveu a filosofia do positivismo lógico. Uma das características principais desta era a sua repulsa pela metafísica tradicional. É neste contexto que a nova métrica se torna importante pois a equação $|x|=1$ define um círculo quadrado, (uma

metáfora do absurdo). Menger, como verdadeiro positivista, servia-se dela para ilustrar como os filósofos tradicionais podiam discorrer indefinidamente sobre conceitos sem significado:

“Square circles or round squares have haunted many diverse philosophical writers as the archetype of the impossible and the absurd; they were assigned a place near - or rather below - golden mountains, unicorns and mermaids. [...] In dealing with square circles they [mathematicians], conversely, associate meaning with (and even give a practical interpretation to) the philosopher’s paramount example of Absurdity.”

(Menger, 1979 apud [3]).

O interesse por esta geometria permaneceu adormecido, e até aos anos 1970 uma geometria baseada na métrica-táxi não tinha ainda sido desenvolvida. É com essa intenção que Krause publica *Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry* (1975) onde formula as suas bases, sendo este ainda o livro obrigatório de introdução ao tema. Krause aprofunda a *GMT* com o intuito de levar a noção de geometria não-euclidiana a um público mais vasto, e apontar a sua utilidade no estudo de ambientes urbanos [4].

Começando timidamente nos anos 1980, só por volta de 1996 é que uma investigação contínua em *GMT* se começou a realizar. Os trabalhos de Thompson e Kaya (hoje o investigador mais prolífico neste campo) em ângulos e trigonometria-táxi lançaram a *GMT* numa forma mais depurada, baseando conceitos fundamentais em noções nativas táxi: a designada *Pure Taxicab Geometry* [5]. Também a sua generalização a outras malhas regulares, a outras dimensões e a superfícies curvas é objecto actual de estudo. Apenas presentemente as observações e os caminhos de investigação apontados por Krause parecem ser perfilhados com determinação.

3. UMA OUTRA NOÇÃO DE DISTÂNCIA

Socorrendo-nos do exemplo fornecido em [4] pretendemos ilustrar que a noção de distância não é uma questão tão trivial como aparenta. Ao analisarmos a Fig.1b (em [4]), que representa uma cidade idealizada, a pergunta: Qual dos dois, o Museu ou a Câmara, está mais próximo dos Correios? pode parecer banal e a sua resposta imediata e inequívoca.

Krause afirma:

“Taxicab geometry is a more useful model of urban geography than is Euclidean geometry. Only a pigeon would benefit from the knowledge that the Euclidean distance from the Post Office to the Museum is $\sqrt{8}$ blocks while the Euclidean distance from the Post Office to the City Hall is $\sqrt{9} = 3$ blocks. [...] For people, taxicab distance is the “real” distance. It is not true, for people, that the Museum is “closer” to the Post Office than the City Hall is. In fact, just the opposite is true.” [4]

O conceito de distância tem efeitos profundos na geometria. Tudo desde ângulos, secções cônicas, áreas e volumes estão dependentes de alguma forma da noção de distância. A alteração da sua formulação euclidiana, pode intuir-se, terá efeitos em catadupa noutros conceitos geométricos.

Como apontado anteriormente esta nova formulação de distância (métrica) foi introduzida no início do séc. XX por Minkowski, entre uma família inteira de métricas. Nesta família a distância euclidiana, é apenas uma das métricas possíveis. A métrica que dá origem à GMT, a métrica-táxi, é aquela em que a distância entre dois pontos é dada pela soma do valor absoluto da diferença das suas coordenadas. Esta métrica é também conhecida por métrica do valor absoluto, distância rectilínea, distância ou norma $L1$, distância de quarteirão, distância ou comprimento Ma-

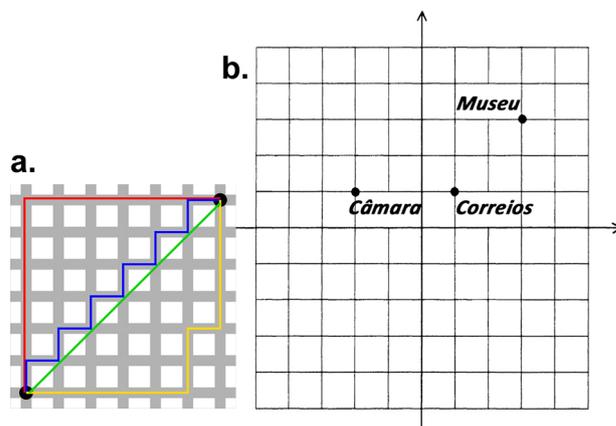


Fig. 1 a - Distância-táxi (d_T) e a verde (diagonal) a distância euclidiana (d_E) (em http://en.wikipedia.org/wiki/Taxicab_geometry)
Fig. 1 b - A cidade ideal da GMT.

nhattan. Estas duas últimas designações remetem-nos directamente para uma analogia urbana e para a GMT [6].

Devemos agora definir analiticamente estas duas distâncias. Se A e B forem dois pontos no plano, que supomos munido de um referencial, e se considerarmos que as suas coordenadas são (a_1, a_2) e (b_1, b_2) respectivamente, a distância euclidiana (d_E) é definida como:

$$d_E(A,B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \quad (1)$$

e a distância-táxi (d_T) como:

$$d_T(A,B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| \quad (2)$$

Devemos salientar que a GMT pode apresentar-se de duas formas: uma discreta e outra contínua. Na sua forma discreta os pontos do plano-táxi estão restringidos a um reticulado de coordenadas inteiras. Na sua forma contínua o domínio dos pontos considerados é a totalidade do plano cartesiano cujas coordenadas se encontram no domínio dos números reais. Pode dizer-se que nesta forma os quarteirões da nossa cidade ideal são reduzidos a um ponto. Apesar de menos realista em termos urbanos é a esta forma contínua que a maioria dos autores designa por GMT, sendo a primeira chamada *Geometria Urbana* [7]. Na sua forma discreta, a distância-táxi mínima entre dois pontos A e B que residam na mesma “rua” é medida como na geometria euclidiana (o que também acontece na contínua), contu-

do quando se encontram em “ruas” diferentes, em vez de utilizarmos o teorema de Pitágoras, conta-se o número de blocos que um táxi teria que percorrer de A a B (ou vice-versa) ao longo de uma rota mínima. Uma primeira surpresa que nos reserva a GMT é o facto de existirem muitos caminhos mínimos entre dois pontos (no caso da sua forma contínua serão infinitos). A quantidade de caminhos mínimos é, no caso discreto, um problema de combinatória, resolúvel pelo triângulo numérico de Pascal. Como ilustrado na Fig. 2 (em [8]), alinhando um dos vértices do rectângulo definido por A e B com o vértice do triângulo de Pascal, essa quantidade é dada pelo número correspondente ao vértice oposto desse rectângulo, 10 no nosso exemplo [8].

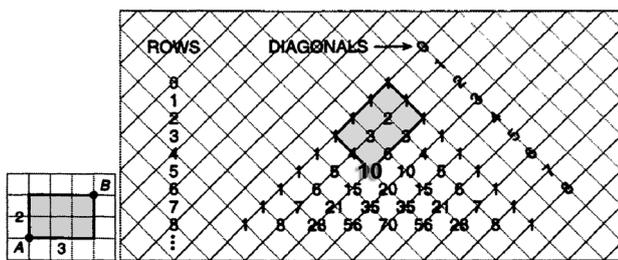


Fig. 2 - Quantidade de caminhos mínimos entre A e B e o Triângulo de Pascal.

4. CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Uma das formas de divisarmos as consequências da alteração de uma métrica sobre um espaço, é observar um conjunto de figuras geométricas familiares. Para as ilustrarmos no plano-táxi temos que recorrer à sua definição analítica, abstraindo-nos da sua *imagem habitual*, tal como o faríamos no estudo de outras geometrias não-euclidianas e na topologia. De seguida ilustramos algumas figuras e construções geométricas descritas em Reynolds [9], Veloso [1] e Iny [10].

4.1. O CÍRCULO

Na geometria analítica o círculo é definido como o conjunto de pontos em R^2 a uma distância

constante de um dado ponto fixo. Assim definimos o círculo-táxi com centro $C = (h, k)$ e raio r como a colecção de pontos P , tal que

$$\{P = (p_1, p_2) \in R^2 : |p_1 - h| + |p_2 - k| = r\} \quad (3)$$

O círculo-táxi é a união de quatro segmentos de recta, de inclinação ± 1 , com vértices em $(h, k \pm r)$ e $(h \pm r, k)$. Se utilizarmos a distância euclidiana temos o familiar círculo “redondo”, já na GMT este apresenta-se-nos como um quadrado rodado a 45° (Fig. 3a, em [9]).

Verifica-se que dado um círculo-táxi de raio r o seu perímetro é $8r$, sendo o valor de $\pi_{\text{Táxi}} = 4$. Outro teorema euclidiano que a GMT viola é o que afirma que dois círculos distintos apenas se podem intersectar no máximo em dois pontos. Dois círculos-táxi podem, além disso, intersectar-se ao longo de um ou dois segmentos de recta (Fig. 3b, em [9]).

Construções geométricas que recorrem à mediatriz (ver também secção seguinte), como a determinação do círculo-táxi que passa por 3 pontos (circuncentro de um triângulo) são possíveis como ilustrado na Fig. 3c (em [1]). Já a determinação do centro de um dado círculo-táxi a partir da intersecção das mediatrizes de duas cordas quaisquer nem sempre é possível [1] (Fig. 3d, direita, em [1]).

4.2. A ELIPSE

A elipse é definida como o conjunto de todos os pontos P em R^2 cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, A e B (focos), é constante. Analiticamente, considerando a distância-táxi (d_T), temos

$$\{P \in R^2 : d_T(P, A) + d_T(P, B) = c\} \quad (4)$$

onde c é uma constante.

Tal como não podemos usar o compasso para desenhar o círculo-táxi não podemos utilizar o “método do jardineiro” para desenhar uma elipse-táxi. Krause [4] sugere um método para desenhar elipses-táxi utilizando a intersecção de círculos-táxi cuja soma dos raios é constan-

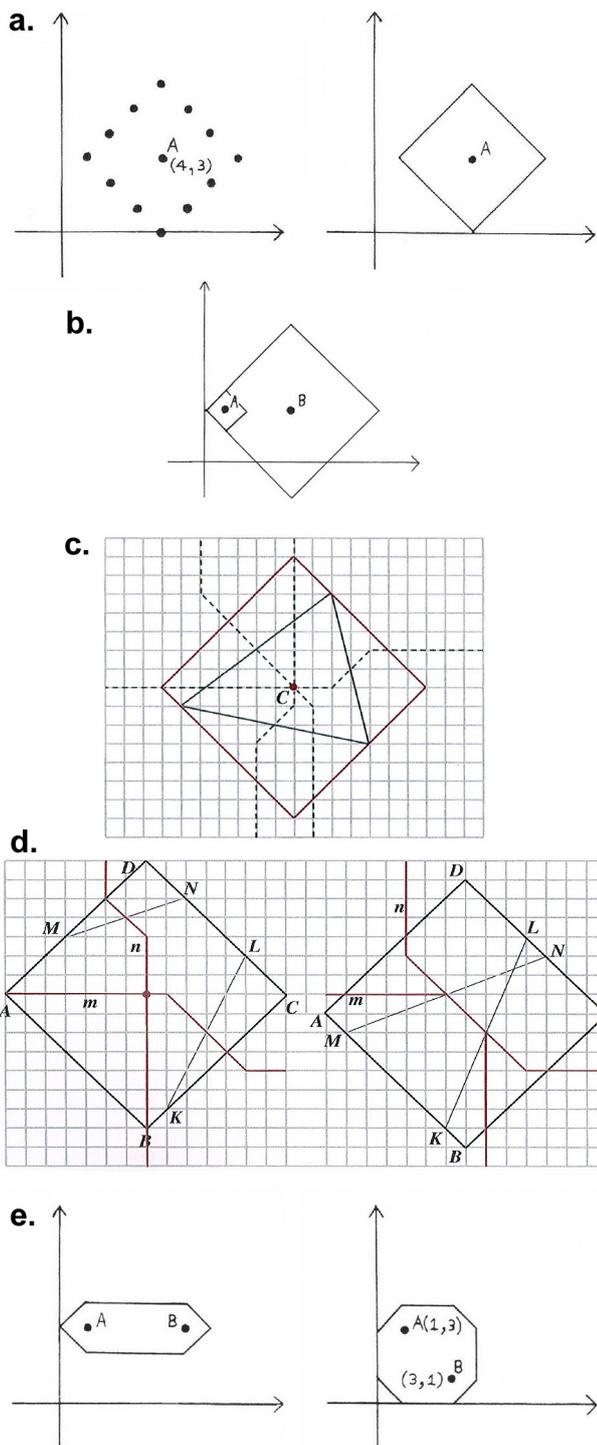


Fig. 3a - Pontos no Círculo-Táxi e Círculo-Táxi.

Fig. 3b - Intersecção de círculos-táxi.

Fig. 3c - Circuncentro de triângulo.

Fig. 3d - Tentativas de determinação do centro de um círculo-táxi a partir das cordas KL e MN.

Fig. 3e - Elipses-Táxi.

te. Este método dá-nos uma definição completa da elipse ao contrário do que acontece no plano euclidiano onde apenas poderíamos determinar pontos. A sua forma é um hexágono ou um octógono dependendo, respectivamente, dos focos se encontrarem alinhados com os eixos das

coordenadas ou não (Fig. 3e, em [9]). Tal como na geometria euclidiana ao aproximarem-se os focos de uma elipse-táxi esta torna-se mais circular e, quando coincidentes, temos um círculo-táxi (o que pode intuir-se fazendo coincidir A e B na Fig. 3e).

4.3. A HIPÉRBOLE E A MEDIATRIZ

A hipérbole pode ser definida de modo similar à elipse mas substituindo “soma” por “diferença”. Assim a hipérbole é o conjunto de todos os pontos P em R² cuja diferença das distâncias a dois pontos dados (focos), A e B, é constante. Assim, se A e B pertencem a R², temos

$$\{P \in R^2 : |d(P,A) - d(P,B)| = c\} \quad (5)$$

onde c é uma constante não negativa.

No caso c=0

$$\{P \in R^2 : |d(P,A) - d(P,B)| = 0\} =$$

$$\{P \in R^2 : d(P,A) = d(P,B)\} \quad (6)$$

o ponto P encontra-se à mesma distância de A e de B definindo-se assim a Mediatriz.

Para desenhar hipérbolés-táxi podemos seguir um método análogo da elipse-táxi, encontrando a intersecção de pares de círculos-táxi, cuja diferença dos raios seja constante. No entanto, como para o caso euclidiano, o valor de c está limitado por 0 e d(A,B) de modo a que os círculos se intersectem.

Enquanto a elipse-táxi depende apenas da forma do rectângulo definido pela posição dos focos A = (a₁, a₂) e B = (b₁, b₂), a hipérbole-táxi depende, para além disso, da relação de magnitude entre a constante c e a diferença do comprimento dos lados desse rectângulo: Se definirmos k = ||a₁-b₁|-|a₂-b₂||, a forma da hipérbole depende do facto do valor de c ser menor, igual ou maior que k (Fig. 4a, em [9]).

Algo inusitado, em termos da geometria euclidiana, acontece quando c=k ou c=d_T(A,B). Qualquer par de círculos com centros A e B, cujos raios difiram k ou d_T(A,B) interceptam-se, não em um

ou dois pontos, mas num segmento de recta. Assim a hipérbole não é somente uma curva mas é também constituída pelas áreas sombreadas na Fig. 4a (em [9]). Também a mediatriz-táxi ($c=0$) se comporta desta forma se $k=0$ (i.e. se a forma rectangular formada por A e B for quadrada) (Fig.4b (em [9])).

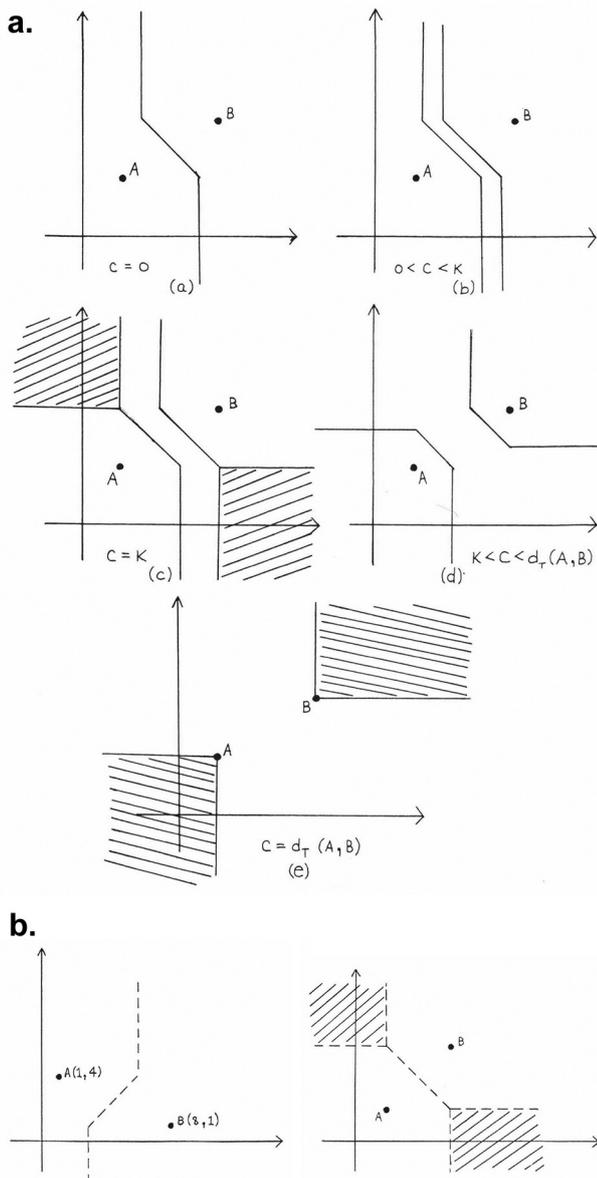


Fig. 4 a - Hipérbolas-Táxi.
Fig. 4 b - Mediatrizes-Táxi.

4.4 A PARÁBOLA

A parábola é definida pelo conjunto de todos os pontos P que são equidistantes a um dado ponto fixo, F (foco), e a uma dada recta fixa, D (directriz). Assim uma parábola é definida em R^2 por

$$\{P \in R_2 : d(P, F) = d(P, D)\} \quad (7)$$

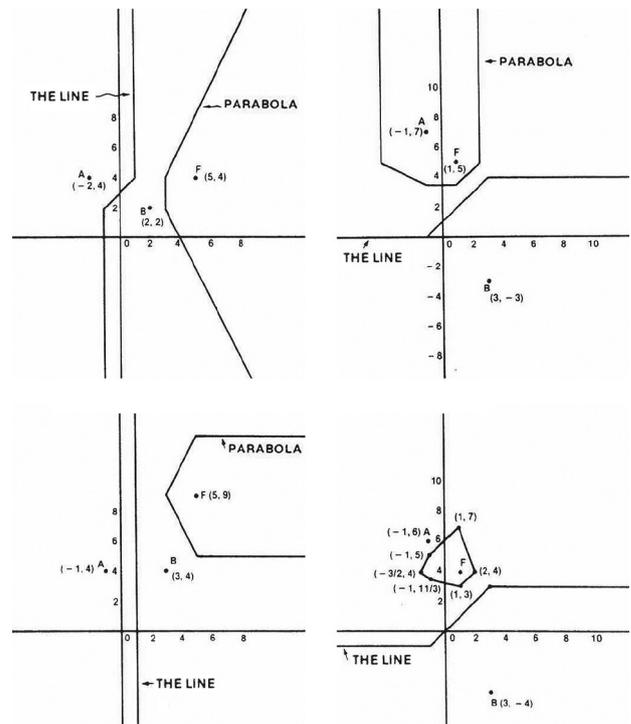


Fig. 5 - Três parábolas-táxi. Em baixo à direita, uma elipse-táxi foco-directriz.

Esta figura apresenta-se como um caso mais difícil de definir e construir na GMT. Vários artigos levantam o problema da definição de recta na GMT. Para Iny [10] esta fica melhor definida como o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois pontos fixos: a Mediatriz. No entanto, como referido, esta normalmente não apresenta apenas uma direcção (é quebrada) e pode nem ser exclusivamente uma linha.

Ilustra-se na Fig. 5 três exemplos de parábolas propostas por Iny [10] em que a recta utilizada é a expressa acima, e em que a distância de um ponto P a uma recta D é definida pelo mínimo de $d(Q, P)$, onde Q é qualquer ponto em D (não faz sentido falar de perpendicularidade na GMT).

Iny [10] propõe um outro método possível de construção de uma elipse: utilizando um foco, uma directriz e o valor da excentricidade (Fig. 5, em [10]). Kaya et al [11] apontam que as duas abordagens às cónicas (dois-focos e foco-directriz) levam, no caso da GMT, a diferentes figuras. Já Laatsch [12], numa abordagem foco-directriz, provou poderem estas ser obtidas pela projec-

ção de secções planas de uma pirâmide quadrada, o análogo GMT do cone circular recto.

5. VARIAÇÕES E APLICAÇÕES DA GMT

Segundo Krause [4], enquanto que a geometria euclidiana pode ser considerada um bom modelo para o mundo natural, a GMT é um modelo melhor para o mundo urbano construído pelo Homem. Apesar da homogeneidade do seu espaço idealizado, a GMT pode fornecer uma base conceptual para o estudo de situações reais. Podemos ilustrar esse facto com um problema proposto em [4]: determinar os limites das áreas de influência de 3 escolas, numa cidade perfeitamente reticulada, de modo a que todos os estudantes frequentem a escola mais próxima. Uma solução GMT foi apresentada por Reinhardt [2] (Fig. 6a, em [2]). Existem no entanto estudos no sentido de tornar o plano-táxi mais próximo da realidade urbana, permitindo análises espaciais mais ricas. A introdução nesse plano de segmentos de recta, *linhas de trânsito em massa (L)* que simulam os sistemas de transporte públicos [4] (Fig. 6b, em [4]), permite diminuir as distâncias percorridas entre dois pontos, entrando e saindo nessa linha nos pontos mais próximos da origem e destino. Neste caso a função distância d_M (de trânsito em massa) entre dois pontos, A e B, tem a seguinte definição formal:

$$d_M(A,B) = \text{menor valor entre } d_r(A,B) \text{ e a soma } d_r(A,L) + d_r(B,L) \quad (8)$$

Um exemplo mais elaborado é ilustrado por Aichholzer et al em [13] onde se determina o diagrama de voronoi, num espaço de métrica-táxi com linhas de trânsito em massa (i.e. com função distância d_M) (Fig. 6c, em [13]).

Miranda et al [6] descrevem uma outra transformação da GMT onde a malha-táxi é a representação de um grafo com pesos nas arestas, caracterizando impedâncias em arruamentos (semáforos, topografia, etc.) (Fig. 7, em [6]).

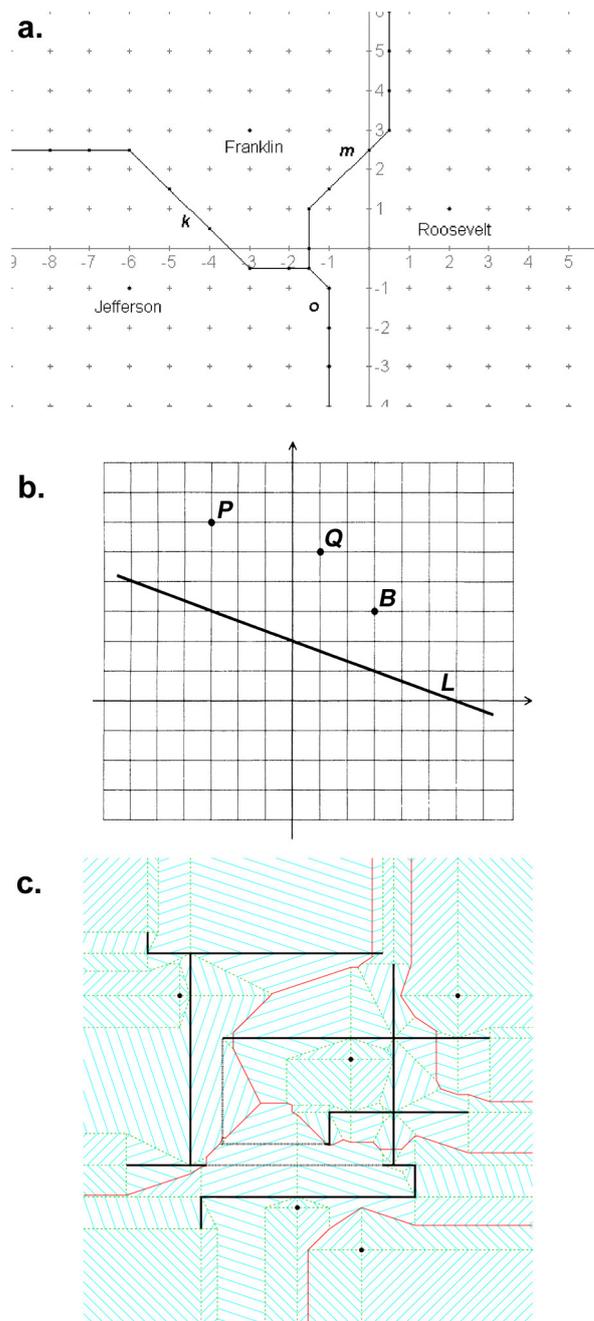


Fig. 6 a - Áreas de influência das 3 escolas (diagrama de voronoi numa métrica-táxi).

Fig. 6 b - Distância d_M . Métrica de Trânsito em Massa. Constatamos: $d_M(P,B) = 5$ e $d_M(Q,B) = d_r(Q,B) = 4$, já que neste caso não se utilizam as linhas de trânsito em massa (L).
Fig. 6 c - Diagrama de voronoi de cidade com distância d_M .

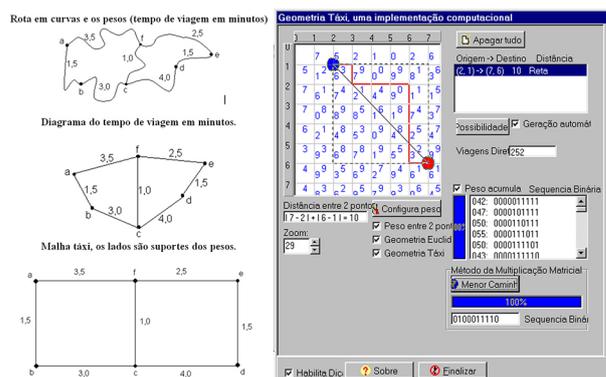


Fig. 7 - Distâncias-Táxi com pesos e uma implementação computacional.

Os autores referem ainda a proposta de Wallen (Wallen, 1995 apud [6]) sugerindo a redefinição da métrica-táxi de:

$$d_T(A,B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| \quad (2)$$

para:

$$d_T(A,B) = c|a_1 - b_1| + d|a_2 - b_2| : c,d > 0 \quad (9)$$

com o objectivo de introduzir variedade e quebrar a sua simetria estrita.

6. CONCLUSÃO

Sendo recente e considerada um instrumento eficaz de divulgação das geometrias não-euclidianas, a GMT aparece frequentemente em publicações de divulgação científica. Como não está completamente consolidada, encontramos algumas formulações parciais ou mesmo contraditórias. Para além das duas formas da GMT (discreta e contínua) serem apresentadas por vezes sem referência ao seu domínio específico, esta aparece-nos como um híbrido de noções puramente GMT (e. g. distância-táxi) com outras vindas da geometria euclidiana (e. g. recta e ângulo).

Apesar de se tratar de um ramo da geometria em desenvolvimento, ao qual falta uma síntese, cremos ter ilustrado a capacidade dos seus conceitos básicos, por si só, alterarem a nossa consciência relativamente à noção de distância, bem como a nossa percepção do movimento no espaço.

Como refere Miranda et al [6], em consonância com Krause [4], esta é uma geometria apropriada para a simulação do movimento em espaços urbanos reticulados e mesmo em edifícios. O desenvolvimento da GMT é do maior interesse para países em que uma grande maioria das cidades são planeadas e apresentam extensivamente malhas regulares ortogonais (aproximadamente 35% no Brasil e 61% nos EUA). A determinação de áreas de influência de mercados, localizações óptimas, distâncias mínimas, são problemas

que os vários profissionais da Análise Espacial ou SIG enfrentam, e para a resolução dos quais recorrem a noções da GMT [6].

Uma questão pertinente levantada por este tema, na sua relação com a cidade, é o de saber até que ponto as noções e formas desta geometria foram aplicadas, consciente ou inconscientemente, ao traçado de cidades reais ou ideais.

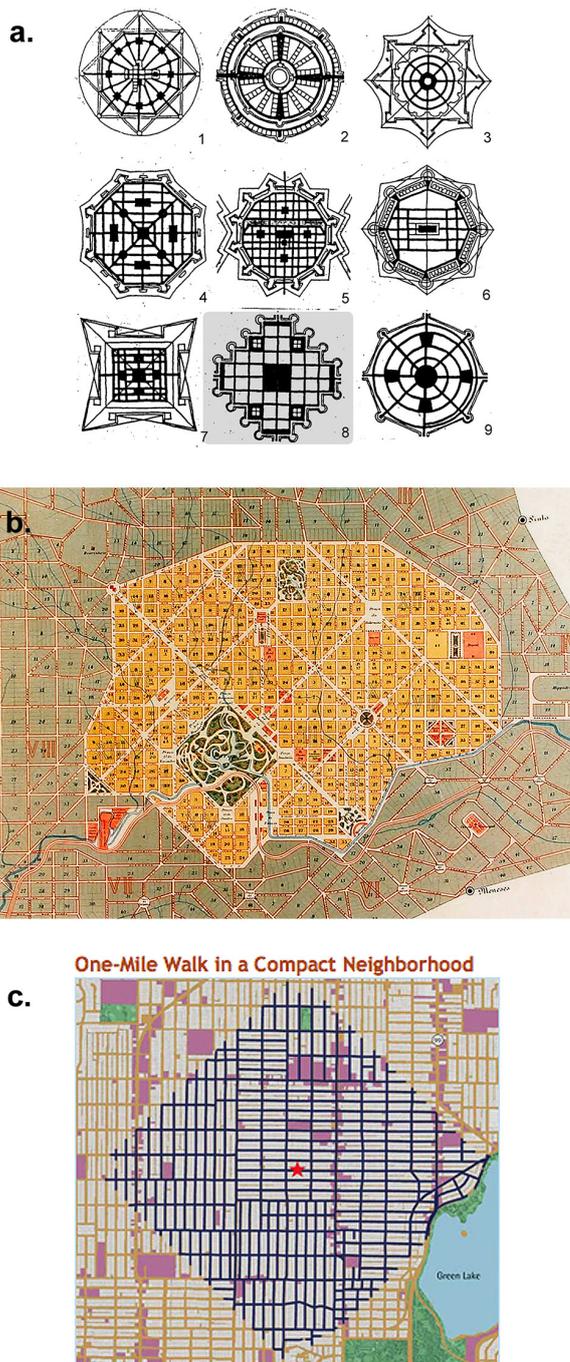


Fig. 8 a - Francesco di Giorgio Martini (1439 – 1502). Planta 8: Cidade-Táxi Ideal (em <http://anthrocivitas.net>)

Fig. 8 b - Belo Horizonte, Brasil.

Uma quadrícula-compacção de Círculos-Táxi. (em http://en.wikipedia.org/wiki/File:Planta_BH.jp)

Fig. 8 c - Distância percorrida a pé em 20 minutos numa malha urbana ortogonal (em <http://www.walkscore.com/>).

Existem imensas cidades de traçados rectangulares regulares, incluindo malhas quadradas, e muitas dessas malhas apresentam diagonais e mesmo diagonais a 45° . Interessou-nos verificar, em particular, até que ponto a figura do círculo-táxi emerge em processos mais ou menos empíricos de planeamento urbano. Uma malha quadrada delimitada por uma circunferência-táxi representa a união entre o pragmático do loteamento urbano e o simbólico da representação da centralidade em termos temporais e não formais (Fig. 8a). O exemplo mais perfeito encontrado foi

o de Belo Horizonte (Brasil), cidade planeada por Aarão Reis e Francisco Bicalho por volta de 1890 (Fig. 8b). Inspirada no traçado de Washington, o seu plano é no entanto bastante mais regular. Suspeita-se que existam bastantes mais exemplos dado o sistema Hipodâmico (i.e. a malha ortogonal de urbanização) ser utilizado no ocidente desde a Antiguidade e a noção empírica de distância avaliada pelo tempo conduz, nelas, a círculos-táxi cuja forma não depende da proporção da malha (Fig. 8c).

João V. Lopes

REFERENCES

- [1] Veloso, E., 2000. *Geometria Temas Actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional (IIE), pp. 327-330.
- [2] Reinhardt, C., 2005. Taxi Cab Geometry: History and Applications. In *The Montana Mathematics Enthusiast*, Vol2, no.1, pp. 38-64.
- [3] Golland, L., 1990. Karl Menger and Taxicab Geometry. In *Mathematics Magazine*, Vol. 63, No. 5, pp. 326-327.
- [4] Krause, E., 1986 (1975). *Taxicab Geometry: An Adventure in Non-Euclidean Geometry*. NY: Courier Dover Publications.
- [5] Information and research about the geometry invented by Minkowski. In *Taxicab Geometry*. Retrieved January 13, 2014, from <http://taxicabgeometry.net/general.html>.
- [6] Miranda, D., Barroso, L., Abreu, J., 2005. *Geometria Táxi: Uma Geometria Não Euclidiana Descomplicada*. III - EEMOP.
- [7] Malkevitch, J., (n.d.). Taxi!. In *American Mathematical Society Feature Column*. Retrieved January 03, 2014, from <http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-taxi>.
- [8] Gardner, M., 1997. *The Last Recreations*. Nova York: Springer-Verlag, pp. 159-175.
- [9] Reynolds, B. E., 1980. Taxicab Geometry. In *The Pi Mu Epsilon Journal*, Vol. 7, No. 2, pp. 77-88.
- [10] Iny, D., 1984. Taxicab geometry: another look at conic sections. In *Pi Mu Epsilon Journal*, 7, pp. 645-647.
- [11] Kaya, R., Akça, Z., Günalti, I., and Özcan, M., 2000. General Equation for Taxicab Conics and Their Classification. In *Mitt. Math. Ges*, Hamburg, 19, pp. 135-148.
- [12] Laatsch, R., 1982. Pyramidal sections in taxicab geometry. In *Math. Magazine*, 55, pp. 205-212.
- [13] Aichholzer, O., Aurenhammer, F., and Palop, B., 2004. Quickest paths, straight skeletons, and city Voronoi diagram. In *Discrete & Computational...* Retrieved January 07, from <http://www.springerlink.com/index/FAYFXOYVXPCRC1N.pdf>.