

MODELAMIENTO, SIMULACIÓN E IMPLEMENTACIÓN DE UN OSCILADOR POR MEDIO DE LA ECUACIÓN DE DUFFING.

MODELING, SIMULATION AND IMPLEMENTATION OF OSCILLATOR BY MEANS OF THE DUFFING EQUATION.

Harold Vacca González¹ José De Jesús Barajas Sotelo² Jhon Sebastián Delgado Almendrales³

Resumen: El artículo presenta la investigación que condujo a la observación, modelamiento y análisis de un oscilador caótico determinado por la ecuación de Duffing: $\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} - \beta x + \alpha x^3 = f \cos(\omega t)$, obtenida cuando ocurre un movimiento amortiguado y forzado, y la descripción de las soluciones: analítica aproximada, física, y la simulada. En este caso, el sistema se modela matemáticamente por una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no lineal - o su respectiva representación como un sistema de ecuaciones diferenciales-. Se aplica el método de Runge-Kutta para la solución del sistema de ecuaciones; se adopta el método numérico de Descomposición de Adomian (ADM) implementado en MatLab® para la solución aproximada de la ecuación; así como la solución arrojada luego de implementar el circuito asociado. Se confirma la presencia de caos haciendo uso de los exponentes de Lyapunov. Finalmente, se analizan tanto las variables de salida como el diagrama de fase generado, comparándose las soluciones obtenidas por Runge-Kutta, la simulada, y la arrojada por el diseño circuital adoptado.

Palabras clave: modelamiento, ecuaciones diferenciales, caos, exponentes de Lyapunov, ADM, comparación.

¹ MSc. en Matemática Aplicada, Docente Universidad Distrital Francisco José de Caldas; Correo electrónico: hvaccag@udistrital.edu.co

² Estudiante Tecnología en Electrónica, Universidad Distrital Francisco José de Caldas; Correo electrónico: jdbarajass@correo.udistrital.edu.co

³ Estudiante Tecnología en Electrónica, Universidad Distrital Francisco José de Caldas; Correo electrónico: sdelgadoa@correo.udistrital.edu.co

Abstract: The article presents the research that led to the observation, modeling and analysis of a chaotic oscillator determined by the Duffing equation: $\ddot{x} + \varepsilon\dot{x} - \beta x + \alpha x^3 = f \cos(\omega t)$ obtained when a muffled and forced movement occurs and also the description of three solutions: the approximate analytical, physics and simulated.

In this case, the system is mathematically modeled by a differential equation ordinary of second order non linear – or its respective representation as a differential equation system -. The Method of “Runge-Kutta” is applied for the solutions of the equations system, the numerical method of “Adomian decomposition” (ADM) is adopted by its implementation in MatLab® in order to provide the approximated solution to the equation, as well as the solution thrown after the implementation of the associated circuit. The chaos presence is confirmed making use of the Exponents of Lyapunov.

Finally both, the output variables and the phase diagram generated were analyzed. Making the comparison between the obtained solutions by Runge-Kutta, the simulated and the one shown by the circuit design adopted

Key words: modeling, differential equations, chaos, Lyapunov exponents, ADM, comparison.

Introducción.

La teoría del caos se expresa en cierto tipo de sistemas dinámicos. Es decir: sistemas cuyo estado va cambiando con el tiempo con la particularidad de ser muy sensibles a los cambios en las condiciones iniciales del fenómeno. Esto quiere decir que, a mínimas variaciones en tales condiciones, implicará diferencias significativas en el comportamiento a largo plazo, haciendo que sea muy complejo la predicción del futuro de dicho sistema, [1]. Estos comportamientos se pueden encontrar en fenómenos diversos: predicción del tiempo climático; evolución de temperaturas; comportamiento de fluidos; estructura de sistemas sociales; fluctuaciones de la “Bolsa”; comportamiento y anomalías del corazón humano; distribución eléctrica; comportamiento del cerebro; migración de aves e insectos; movimiento de bancos de peces; dinámica poblacional; y diseminación de epidemias. Se han documentado, por otro lado, algunos estudios sobre el comportamiento y funcionamiento de reactores nucleares, los que, debido a la inestabilidad de sus componentes, se pueden describir o responden a modelos de osciladores no lineales, [2].



En términos simples, un sistema dinámico es aquel que sufre alteraciones a lo largo del tiempo, definido generalmente en términos de ecuaciones diferenciales. Pueden denominarse sistemas continuos, pero también se definen a través de ecuaciones en diferencias que caracterizan los sistemas discretos. Desde esta perspectiva, se tienden a estudiar sistemas que vienen modelizados por una ecuación diferencial lineal o no, de orden superior. Básicamente, la diferencia entre lo lineal y lo no lineal radica, además de la estructura funcional de la ecuación, en la respuesta del sistema a la presencia de impulsos o estímulos externos.

Es por lo dicho que, en la práctica, los ingenieros y físicos experimentales -entre otros- han demostrado que un sistema lineal responderá siempre de forma directa o proporcional al estímulo externo que se la haya aplicado; mientras que los sistemas no lineales, más difíciles de analizar, se comportan ante un estímulo externo de manera que no observan ningún tipo de relación lineal con la causa que lo produce; es decir, se ha podido determinar que los sistemas físicos pueden presentar un comportamiento caótico sin necesidad de estar sometidos a algún tipo de variación o excitación. En este sentido, los sistemas dinámicos deterministas no lineales son de gran ayuda para el estudio de los fenómenos naturales, por ello es que desde hace algunas unas décadas, este campo ha cobrado importancia como objeto de investigación porque ha emergido un avance sobresaliente en la matemática computacional.

De otro lado, los sistemas no lineales pueden derivar en comportamientos caóticos. Estos, pueden identificarse como deterministas cuando se conoce de forma clara qué les da origen, pero son impredecibles para períodos largos de tiempo, en gran parte por ello se debe su alta sensibilidad a los cambios en sus condiciones iniciales.

Edward Lorenz (Figura 1), matemático y meteorólogo, fue el primer científico que se propuso estudiar el comportamiento caótico de los sistemas físicos. Su motivación surgió mientras estudiaba un modelo de predicción meteorológica. Pronto se dio cuenta que, en estos sistemas, variaciones en las condiciones iniciales producían grandes cambios en el estado final del sistema. [3]



Figura 1: Edward Lorenz [3].

Lorenz, entonces, dio a conocer el llamado “Efecto Mariposa”, sobre el que explica sus teorías de los sistemas caóticos. Se basa en la divergencia exponencial que los sistemas describen al tener pequeñas variaciones en sus condiciones iniciales, característica fundamental del sistema caótico, es por ello que es prácticamente imposible obtener una predicción del comportamiento de los mismos. [3]

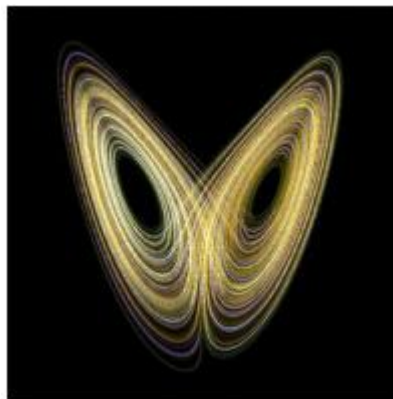


Figura 2: Atractor de Lorenz y el efecto mariposa, [3].

En el anterior sentido, la investigación abordada simula el comportamiento de un sistema dinámico físico correspondiente al Oscilador de Duffing. Tal sistema es no lineal, es decir: queda definido por ecuaciones diferenciales no lineales, por lo que para su solución se requieren métodos específicos. De entre muchos, sobresalen: el método de Euler, y el del punto medio o método de Runge-Kutta.

El Oscilador Caótico de Duffing fue diseñado por el ingeniero eléctrico alemán Georg Duffing (1864-1944) (Figura 3) a principios del siglo XX, con el fin de estudiar el movimiento de pandeo de una viga, [3]; y en la figura (4) se presenta la geometría de un movimiento caótico.



Figura 3. Georg Duffing, [3].

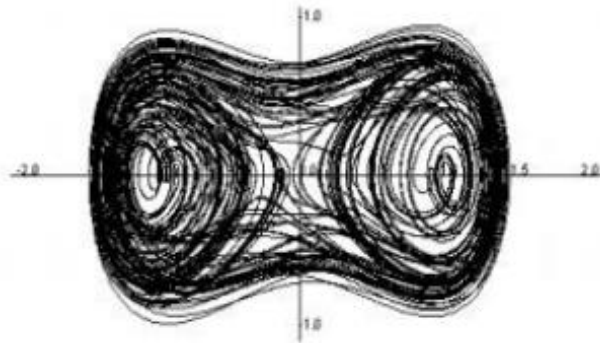


Figura 4: Movimiento caótico, [3].

El documento está estructurado de la siguiente forma: inicialmente se realiza un breve estado de los antecedentes sobre análisis de sistemas caóticos; luego se describe la deducción de la ecuación de Duffing; posteriormente se establece la Sintetización del modelo obtenido; seguidamente se establece el diseño experimental para la simulación en Matlab®; luego se presentan los métodos de solución de la ecuación; se establecen las pruebas para determinación de caos con los máximos exponentes de Lyapunov; se presentan los resultados y discusión de la comparación de las soluciones teóricas, simuladas, y físicas; finalmente se establecen las conclusiones.

1. Antecedentes

Como se indicaba en la introducción, el análisis de los sistemas caóticos ha cobrado importancia en diversas ramas de las ciencias matemáticas, físicas, entre otras. Como consecuencia, se han encontrado trabajos que evidencian la importancia del estudio de osciladores caóticos.

Inicialmente, en [5] se explica cómo obtener una solución aproximada de un oscilador no lineal definido por la ecuación de Duffing, bajo diferentes condiciones iniciales, utilizando el método de transformada diferencial modificada (DTM). En la figura 5 se aprecia la comparación de resultados que arrojaron tanto el método DTM y Runge-Kutta de cuarto orden.

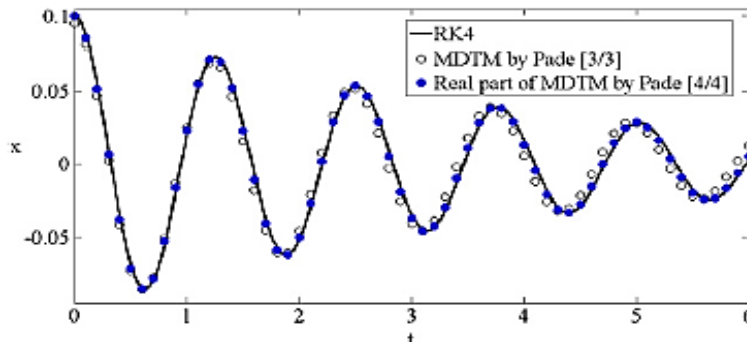


Figura 5. Comparación de resultados entre DTM y el método de Runge-Kutta. [5].

Lo anterior demostró que el DTM es una herramienta poderosa para dar solución a un oscilador no-lineal debido a su alto nivel de precisión en todo su dominio.

Por otro lado, en [6] se plantea el diseño y estudio de un oscilador electrónico no lineal. Este circuito, basado en la ecuación de Duffing, tiene la particularidad de ser accionado por dos fuentes de tensión sinusoidales con diferentes frecuencias.

Las ecuaciones que describen el sistema se observan en (1).

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\lambda y - cx^3 + a \sin(2\pi f_{11}\tau) + b \sin(2\pi f_{22}\tau) \end{cases} \quad (1)$$

Donde λ es el parámetro de amortiguación, c el coeficiente del término no-lineal, a y b son las amplitudes de las excitaciones sinusoidales f_{11} y f_{22} .

En la figura 6 se evidencia el modelo del circuito implementado, utilizando la plataforma Multisim para la representación y simulación del mismo.

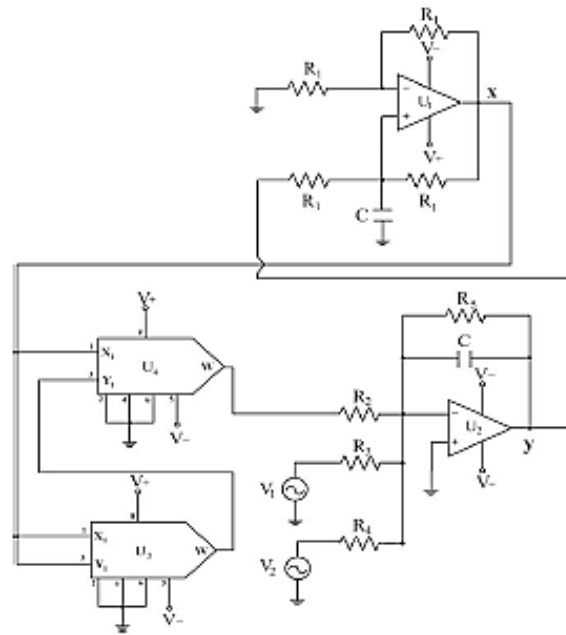


Figura 6. Circuito propuesto que emula el sistema no-lineal. [6].

En las figuras 7 se evidencia el comportamiento del circuito sometido a diferentes condiciones iniciales. Como resultado, se deduce la alta variación a pequeños cambios en tales condiciones, resultando caos. Además, se resalta la importancia del dinamismo del sistema, entrando en juego el parámetro de amortiguación λ y las frecuencias f_{11} y f_{22} de las fuentes.

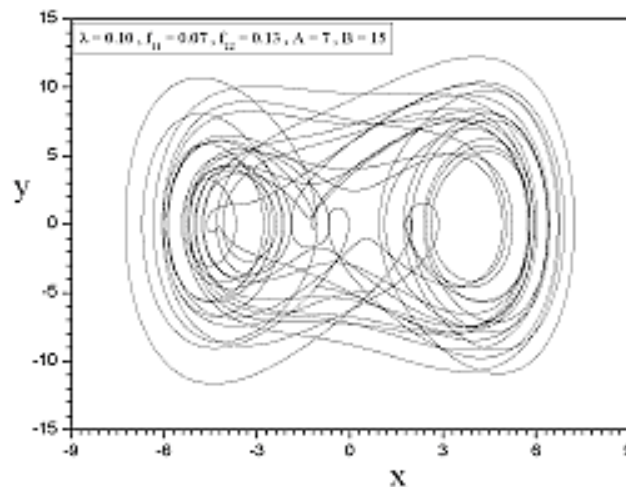


Figura 7. Retrato de fase para $f_{11} = 0.07$, $f_{22} = 0.13$, $A = 7$, $B = 15$ y $\lambda = 0.10$, [6].

Por otra parte, en [7] se plantea un circuito electrónico basado en la ecuación de Duffing que, como consecuencia, contempla un comportamiento dinámico periódico y caótico. El circuito implementado se aprecia en la figura 8.

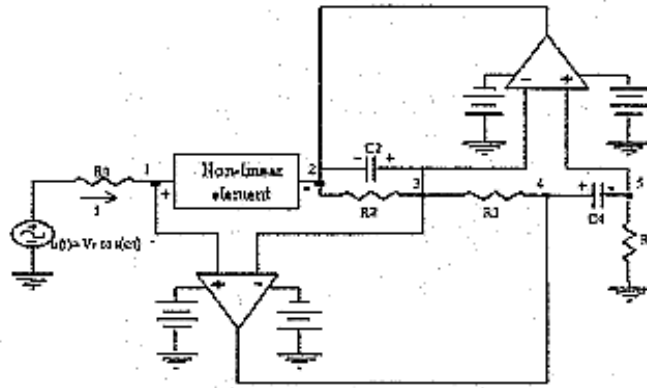


Figura 8. Circuito electrónico que obedece la ecuación de Duffing, [7].

Se propone, para expresar la parte no lineal, un arreglo de diodos para simular la función cúbica de la ecuación. Como se aprecia en la figura 9, resulta del planteamiento mostrado en (2), obteniéndose (3).

$$i(v) = pv + qv^3 \quad (2)$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx_1}{dt} + ax_1 + bx_1^3 = u(t) \quad (3)$$

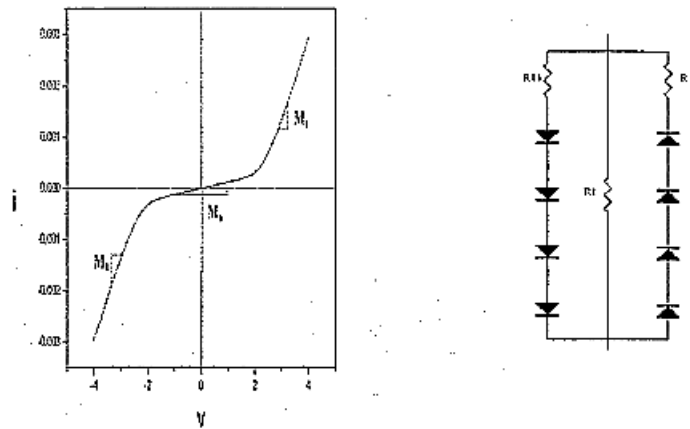


Figura 9. Elemento no lineal y su gráfica I vs V, [6].

Las simulaciones mostrando la salida del sistema se presentan en la figura 10.

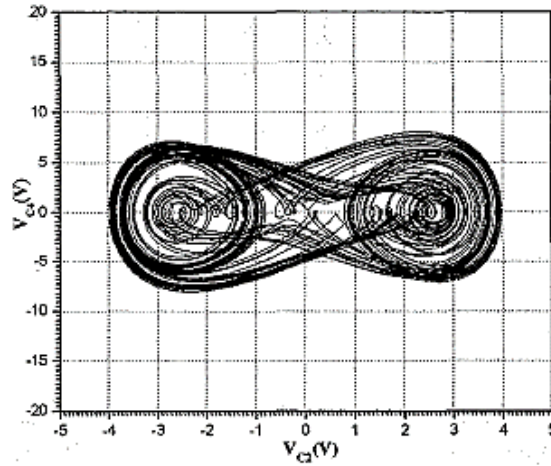


Figura 10. Retrato de fase para $V_0=2$ V (comportamiento caótico), [7].

De otra parte, y teniéndose como trabajo pionero en investigación e implementación de sistemas caóticos conmutados por tramos, se tiene [8]. Allí, se analiza, modela, e implementa un sistema donde aparecen dos estados de conmutación a partir de realizar variaciones a la entrada de un multiplexor; estos estados, dependerán de las siguientes consideraciones (5):

$$\text{Si } y \geq y_{ref} \text{ entonces } D = 0 \quad (4)$$

$$\text{Si } t = nT_s \text{ entonces } D = 1$$

De acuerdo con este trabajo, se analiza el sistema (6) en su punto más caótico e inestable cuando el circuito tiene las siguientes consideraciones (7), condicione iniciales:

$$\frac{R20}{R19} = A_1 = 0.2; \frac{R10}{R9} = A_2 = 0.4 \text{ y } B = 1 \quad (5)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 0.2 \frac{dx}{dt} + 0.4x = 0.4 \quad (6)$$

$$A_1 = 0.2; A_2 = 0.4; B = 1; a) y_{ref} = 0.5 \text{ V } b) y_{ref} = 3.3 \text{ V}; T_s = 0.01 \text{ s} \quad (7)$$

Se comprueba que los valores de A_1 y A_2 generan para la matriz A valores propios complejos; en el análisis se toma un valor de y_{ref} fijo y se varía n en la ecuación (6) (Figura 10 y Figura 11), para observar la respuesta del sistema a un leve cambio en las condiciones iniciales.

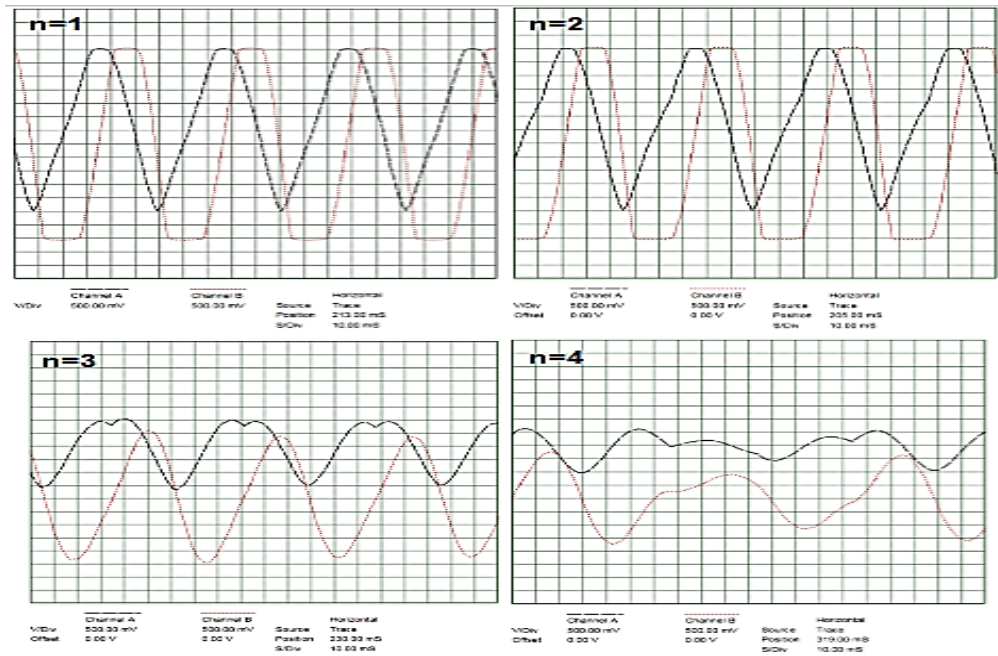


Figura 10. $X(t)$ Channel A y $Y(t)$ Channel B para $n=1, 2, 3$ y 4 $V_{ref} = 0.5 V$, [8].

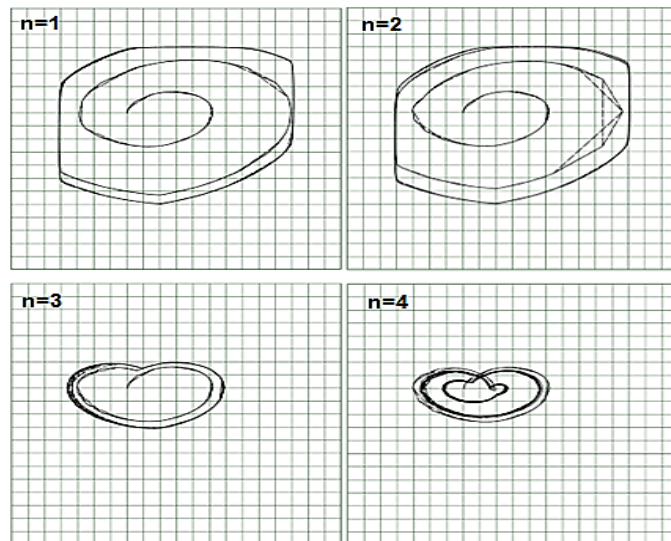


Figura 11. Diagrama de fase para $n=1, 2, 3$ y 4 $V_{ref} = 0.5 V$, [8].

Aumentando el voltaje y_{ref} hasta $3.3 V$, se observa una respuesta aleatoria en las variables de salida, como se observa en Figura (12) y Figura (13); variando $n = 6$ a $n = 7$, el sistema cambia de un estado estacionario y continuo a un estado crítico de caos.

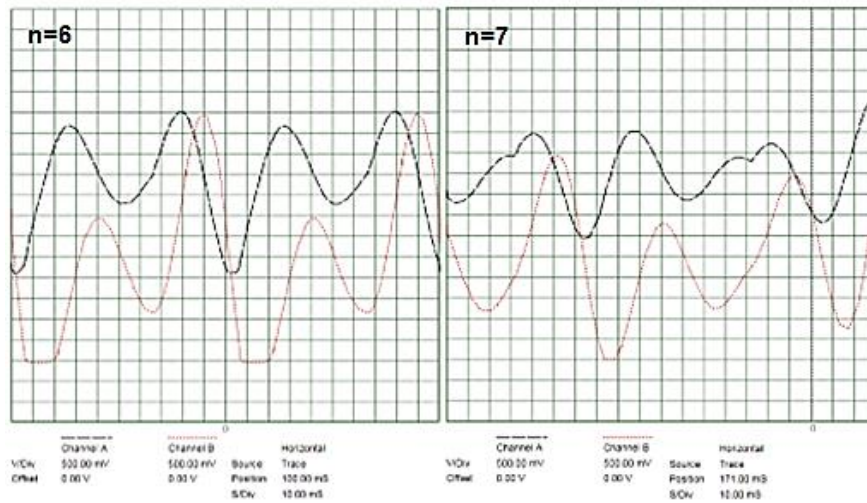


Figura 12. $X(t)$ Channel A y $Y(t)$ Channel B para $n=6$ y $n=7$ $V_{ref} = 3.3 V$, [8].

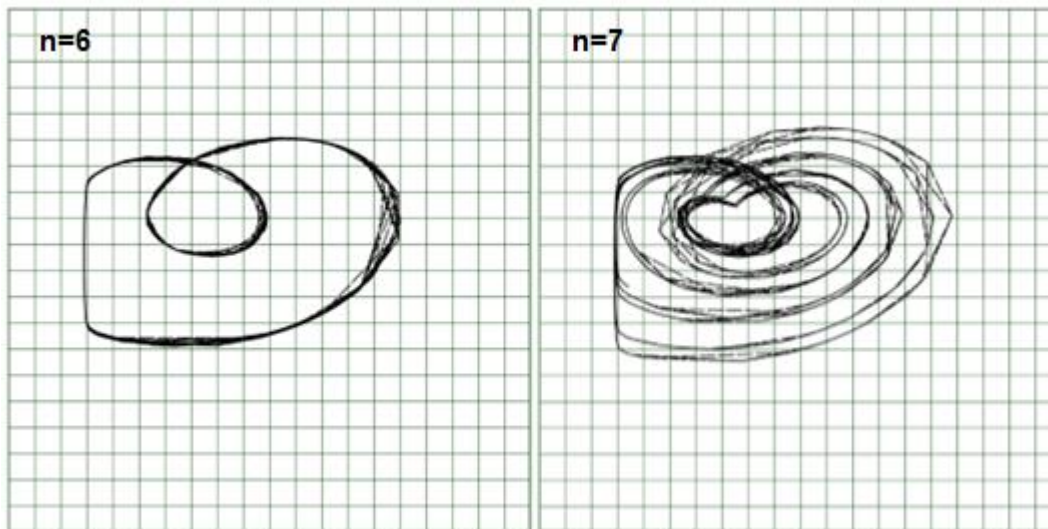


Figura 13. Diagrama de fase para $n=6$ y 7 $V_{ref} = 3.3 V$, [8].

2. Deducción de la ecuación diferencial de Duffing.

Un oscilador es un dispositivo capaz de convertir la energía de corriente continua en corriente alterna a una determinada frecuencia. Tienen numerosas aplicaciones: comunicaciones radioeléctricas, Radio, TV, teléfonos Móviles, radares, generadores de frecuencias de radio y de televisión, osciladores locales en los receptores, generadores de barrido en los tubos de rayos catódicos, entre otros.

Se estudia el caso en el que una vibración forzada ocurre con la aplicación de fuerzas externas a un sistema, y que le imponen una respuesta. Si el sistema es lineal, la vibración estará a la misma frecuencia que la fuerza; pero si es no lineal, la vibración ocurrirá a otras frecuencias, especialmente en los armónicos de la frecuencia forzada. Las vibraciones forzadas pueden ser periódicas o no.

En el anterior sentido, el movimiento periódico se repite a sí mismo en todas sus características después de un determinado intervalo de tiempo, denominado período. El período es entonces el intervalo mínimo de tiempo para el cual la vibración se repite a sí misma. En los movimientos aperiódicos no existen esos intervalos regulares. Si la excitación que actúa sobre el sistema es periódica y continua, la oscilación es un estado estacionario en el que el desplazamiento, la velocidad y la aceleración vibratorios del sistema son cantidades periódicas continuas. La vibración de máquinas es una vibración forzada, y las fuerzas son el resultado de fenómenos como el desbalanceo y la desalineación de partes rotativas y fallas en rodamientos, entre otros.

Se considera el movimiento en la dirección del eje x de un sistema masa-resorte, en un medio de constante de amortiguamiento c y sometido a la acción de una fuerza externa armónicamente variable, [9], figura 14.

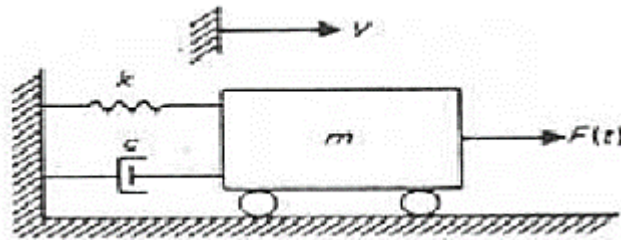


Figura 14: Representación vibración forzada [9].

$$f(t) = A \sin(\omega t) \quad (8)$$

A = Es la amplitud de fuerza (valor máximo de la fuerza externa)

ωt = Es valor de la frecuencia angular, con la que varía en el tiempo esta fuerza, en radianes.

Por la segunda Ley de Newton tenemos que:

$$m a + c v + k x = A \sin(\omega t) \quad (9)$$

ma = fuerza de inercia

cv = fuerza amortiguadora

kx = fuerza elástica del resorte

$A\text{sen}(wt)$ = fuerza externa.

Por lo tanto, la ecuación diferencial queda dada por (10):

$$mx'' + cx' + kx = f\text{sen}(wt) \quad (10)$$

Ahora, tomando como referencia lo obtenido anteriormente, la ecuación de Duffing modela un oscilador no lineal que describe un movimiento de una partícula dentro de un potencial. Una forma práctica y experimental de observar lo que describe la ecuación de Duffing se muestra en la figura (16). En ella se muestra una varilla de acero con un extremo fijo a un soporte y el otro libre para oscilar entre dos imanes colocados simétricamente. El soporte de la varilla se halla sometido a una fuerza armónica, como se observa en la figura del modelo experimental. Este modelo es el más simple posible para describir las vibraciones forzadas de una barra metálica delgada, sujeta al campo magnético no uniforme de dos imanes fijos, como se puede observar en la figura (15), [3].

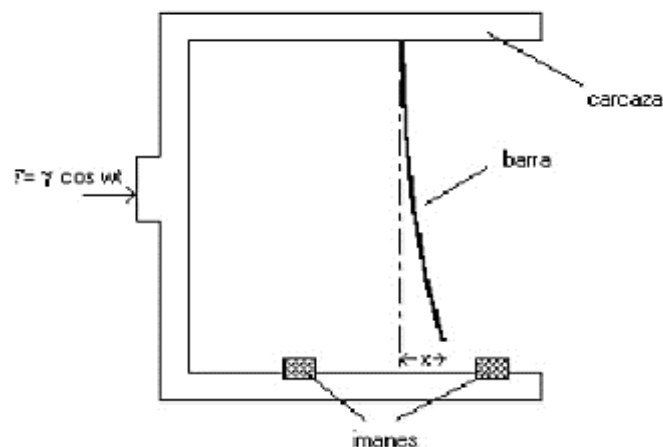


Figura 15: Representación del Oscilador de Duffing Mecánico, [3].

La ecuación que describe dicho movimiento está dada por (11) teniendo en cuenta que $A > 0$, $B > 0$.

$$V(X) = -A \frac{X^2}{2} + B \frac{X^4}{4} \quad (11)$$

Se llama potencial de doble pozo porque tiene dos mínimos simétricamente situados respecto a una barrera de potencial que está centrada en el origen $x = 0$.

Tomando $A = B = 1$, se ve representado en (12)

$$V(X) = -\frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{4} \quad (12)$$

Se tendrán puntos de corte en $x = \pm 1$ y $V = -1/4$; que representa la profundidad de los dos pozos, este potencial se muestra en la figura (16).

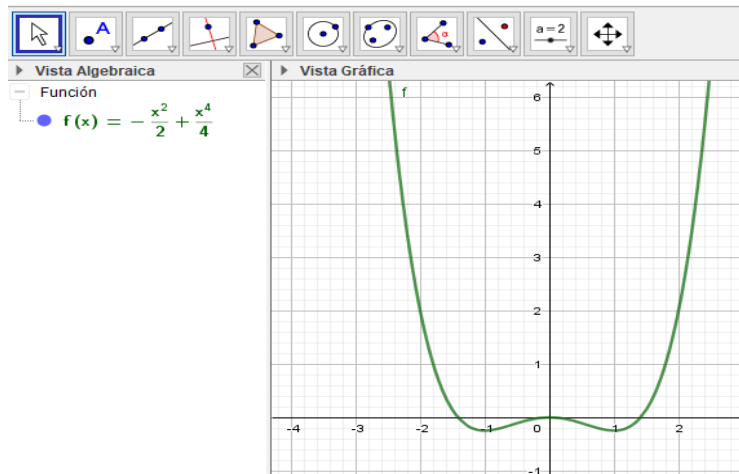


Figura 16: Ecuación de movimiento (potencial de doble pozo). Elaboración propia (software Geogebra).

Al factorizar la ecuación (12) se obtiene la ecuación (13):

$$V(x) = -\frac{1}{4}x^2(2 - x^2) \quad (13)$$

En vista de que existe un problema de equilibrio o de estabilidad, debido a la fuerza magnética ejercida por los imanes y representada en la figura (16) y (15), esta desestabilidad de equilibrio que a la vez sugiere un modelo simple en el que se sustituye la fuerza magnética sufrida por la derivada cambiada de signo.

Se puede representar matemáticamente teniendo en cuenta que se despreciará el rozamiento y la fuerza externa, quedando expresada en (14):

$$x'' = -V'(x) = (x - x^3) \quad (14)$$



El soporte de la varilla se halla sometido a una fuerza armónica $F = A \cos(w t)$, como se observa en la figura (15). Para llegar a la ecuación de Duffing, se debe añadir la fuerza de rozamiento del aire, que es proporcional a la velocidad ($\varepsilon dx/dt$) y la fuerza externa, (15):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - x + x^3 = \mu(t) \quad (15)$$

Teniendo en cuenta que $\mu(t) = A \cos(wt)$, la ecuación resultante es (16)

$$\ddot{x} + \dot{x} - x + x^3 = A \cos(wt) \quad (16)$$

Los siguientes coeficientes: ε , ω , A , α y β estos respectivamente son: disipación, frecuencia, amplitud de forzamiento externo y los dos últimos determinan el tipo de pozo potencial. Finalmente queda: (17).

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} - \beta x + \alpha x^3 = A \cos(wt) \quad (17)$$

3. Sintetización

Teniendo como base principal la ecuación general de Duffing (17); se implementa en Simulink de Matlab®, que ofrece la posibilidad de generar la ecuación en diferentes condiciones. A continuación, se realiza el procedimiento para la lectura de este sistema.

Teniendo como base la ecuación (17), se realiza el siguiente despeje:

$$x'' = -\varepsilon x' + \beta x - \alpha x^3 - A \cos(wt) \quad (18)$$

Esta forma facilita la interpretación en el entorno de Simulink. Se ajustaron los parámetros para obtener un comportamiento caótico donde $\varepsilon=1799.3$, $\beta=-2.5705 \times 10^8$, $\alpha=1.3841 \times 10^8$ y $\mu(t)$ es una función sinusoidal cuya amplitud es de 15.8184×10^8 . Y siguiendo esta analogía se obtiene el siguiente esquema, figura (17).

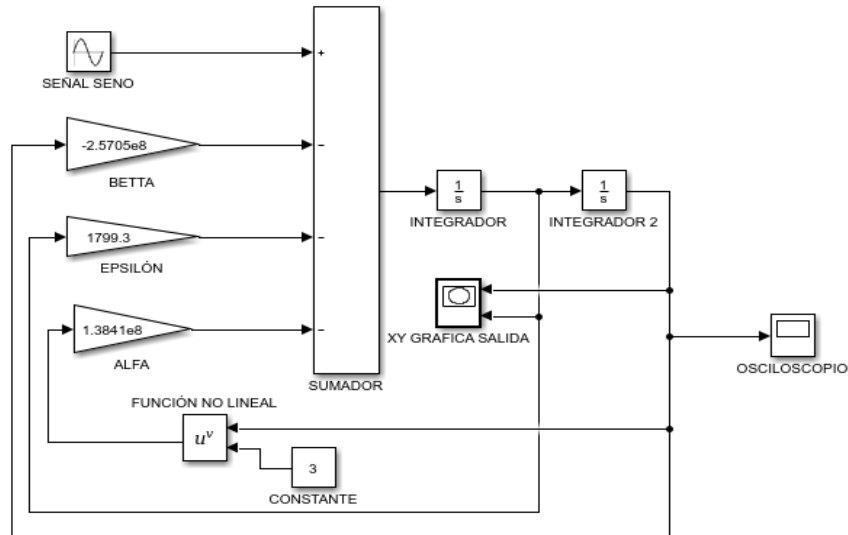


Figura 17 Esquema Simulink Ecuación de Duffing. Elaboración Propia

El sumador interpretará todas las señales de entrada para evidenciar a la salida el comportamiento del sistema dependiendo de los parámetros establecidos.

Los dos integradores hacen parte de $\ddot{x} = -\dot{x}$ de la ecuación, figura 17.

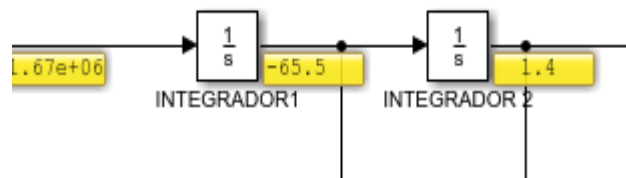


Figura 18: Integradores de Simulink. Elaboración Propia.

En la figura 18 se aprecian los dos integradores, en la entrada del INTEGRADOR 1 se hace alusión a la segunda derivada $\frac{d^2x}{dt^2}$, que luego de integrarse da $\frac{dx}{dt}$, cuyo valor será la entrada del INTEGRADOR 2, para finalmente a la salida de este integrador tener la función $f(x) = x$.

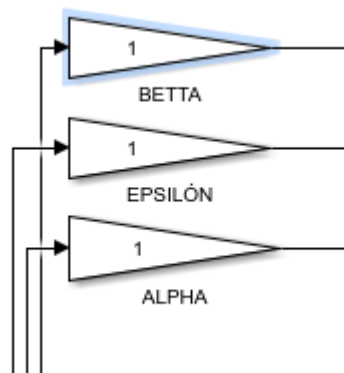


Figura 19: coeficiente ecuación de Duffing entorno Simulink. Elaboración Propia.

Las ganancias, representadas en la figura 19, son los valores de los coeficientes de la ecuación, éstos servirán para variar los valores del sistema y observar el carácter caótico.

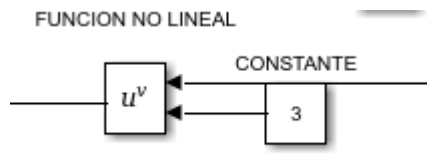


Figura 20: Función no lineal de la ecuación de Duffing. Elaboración Propia.

En la figura 20 se observa la interpretación no lineal cuya función es x^3 , la constante será su exponente, y la entrada será la función $f(x) = x$, que sale del INTEGRADOR 2, y finalmente su salida será x^3 , esta función al igual que las demás irán directamente al sumador. Por último, se indica la función sinusoidal, cuyo propósito será darle la amplitud al sistema y encargarse que éste oscile constantemente.

Por otra parte, se utilizará la plataforma Multisim, debido a su fácil manejo y similitud con la realidad para realizar la simulación.

El sumador: un operacional encargado de sumar todas las señales generadas por el sistema, figura 21:

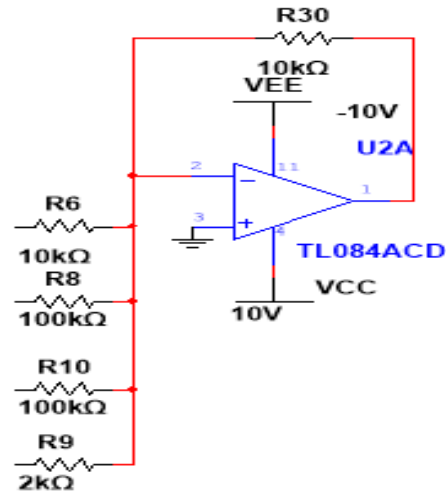


Figura 21: sumador con operacional entorno Multisim. Elaboración Propia.

La figura 22, muestra la configuración de los operacionales en modo integrador. Los valores de los componentes, fueron calculados con anterioridad, basado en el comportamiento y las condiciones en las que el circuito iba a operar.

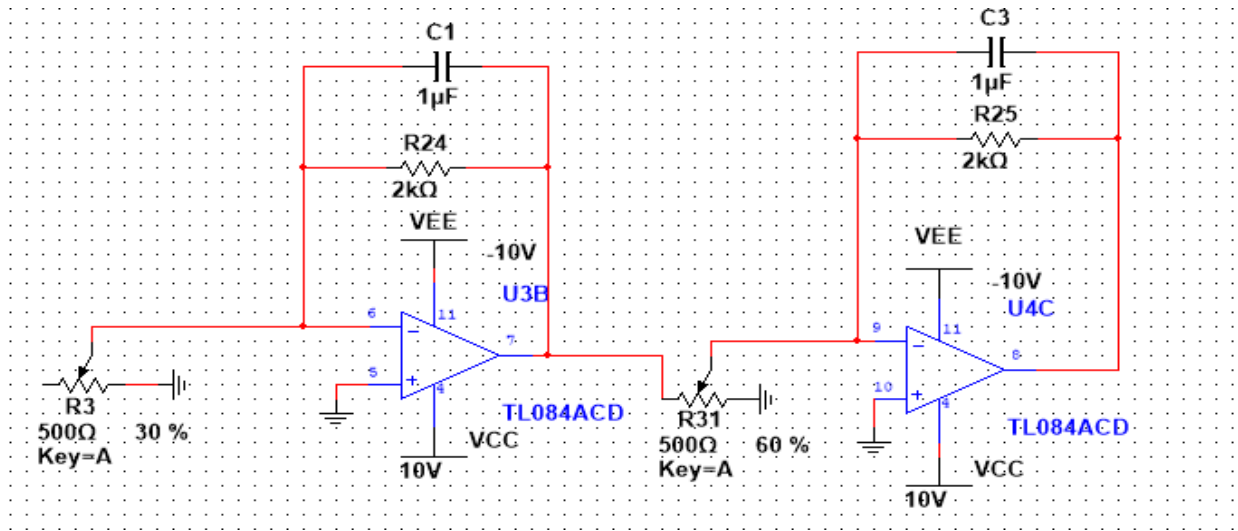


Figura 22: integradores con operacionales en entorno Multisim. Elaboración Propia.

La figura 23 indica la interpretación no lineal de la ecuación, o sea la función x^3 , mediante este arreglo de diodos debido a su comportamiento con los cambios de voltaje.

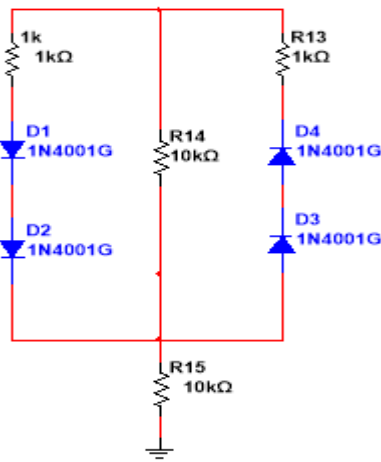


Figura 23: arreglo de diodos interpretación función no lineal. Elaboración Propia.

Por último, la representación total del esquema circuital se observa en la figura (24).

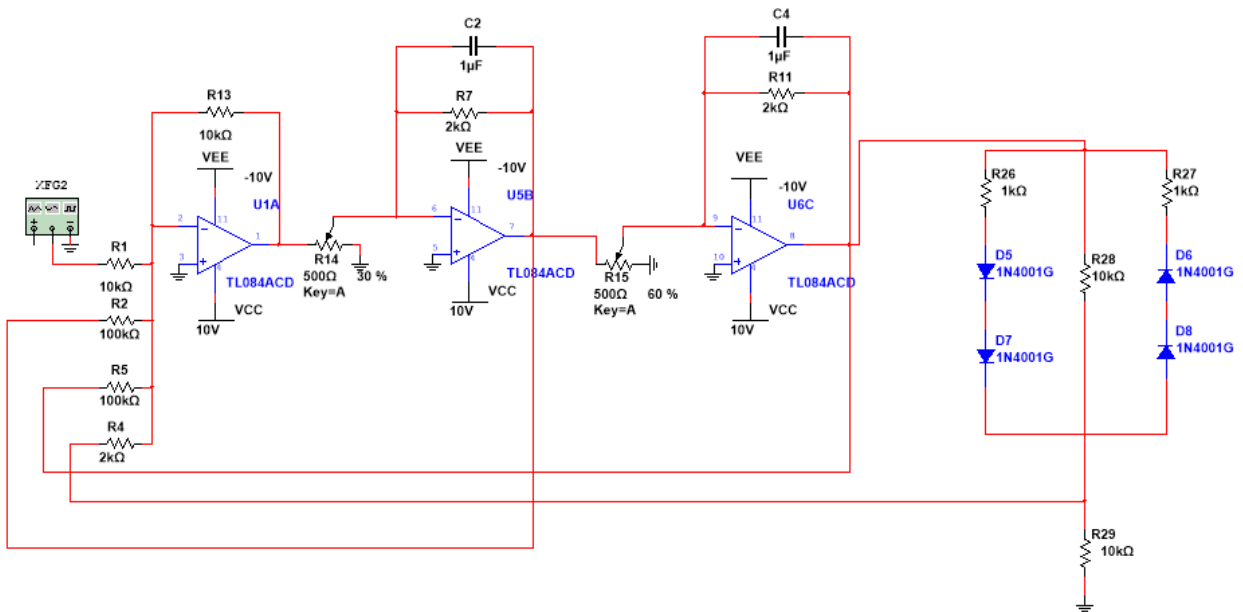


Figura 24: Esquema completo interpretación ecuación de Duffing. Elaboración Propia.

4. Métodos de solución

a. Método Runge-Kutta (RK)

El método de Runge-Kutta es un conjunto de métodos implícitos y explícitos para dar una aproximación a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias; la idea de RK es sustituir el problema de valor inicial de esta manera: sea (19) una ecuación diferencial ordinaria:

$$y' = f(t, y(t)) \quad (19)$$

Con $f: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde Ω es un conjunto abierto con la condición que el valor inicial sea:

$$(t_0, y_0) \in \Omega \quad (20)$$

Runge Kutta en su forma más general se puede expresar así:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad (21)$$

Donde h representa el paso entre los números sucesivos y los coeficientes k_i representan los términos de aproximación, por lo tanto, el método tiene la siguiente forma:

$$y_{i+1} = y_i + h (a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n), \quad (22)$$

donde a_i son constantes y los k_i son:

$$k_1 = f(t_i, y_i) \quad (23)$$

$$k_2 = f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \quad (24)$$

$$k_3 = f(t_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \quad (25)$$

$$k_n = f(t_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h) \quad (26)$$

i. Método de Runge Kutta de orden 4 (RK4)

Se hace uso del método de Runge Kutta de orden 4, lo que equivaldría a utilizar el método de Taylor hasta h^4 . Este es uno de los procedimientos más difundidos y a la vez más exactos para obtener la solución numérica del problema de valor inicial, [10].

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (27)$$

donde:

$$k_1 = f(t_i, y_i) \quad (28)$$

$$k_2 = f(t_i + h/2, y_i + hk_1/2) \quad (29)$$

$$k_3 = f(t_i + h/2, y_i + hk_2/2) \quad (30)$$

$$k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3) \quad (31)$$

Ahora. teniendo la ecuación (17) se elabora un sistema de ecuaciones diferenciales

Y el siguiente cambio de variable (32) se realiza para poder interpretar el sistema de ecuaciones

$$x' = v; \quad (32)$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales quedará de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -\varepsilon + \beta x - \alpha x^3 + A\cos(\omega t) \end{cases} \quad (33)$$

Apoyados por la plataforma de programación Matlab®, se utilizó un algoritmo que realizaba de mejor manera el cálculo debido a sus iteraciones. Para esto, se tuvieron en cuenta los siguientes valores $\varepsilon = 0.1$ $\beta = 0.1$ $\alpha = 2$ $w = 1.06999$, y las condiciones: $x(0)=0$ $x'(0)=0$. Teniendo en cuenta lo anterior, el resultado obtenido se aprecia en la siguiente gráfica, figura 25.

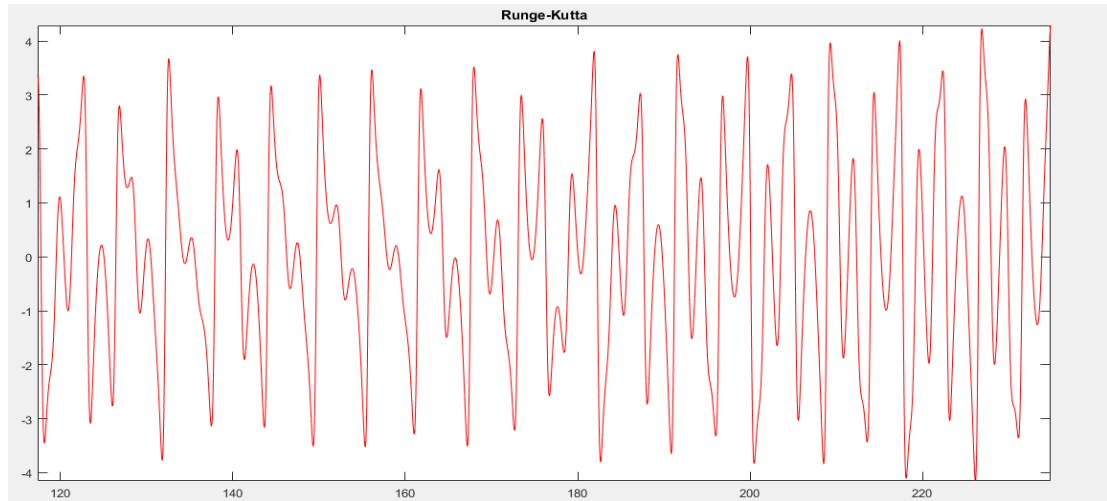


Figura 25: Solución en el tiempo RK4 $\varepsilon = 0.1$ $\beta = 0.1$ $\alpha = 2$ $w = 1.06999$ $x(0)=0$ $x'(0)=0$.

Ecuación de Duffing. Programa elaborado por Housam Binous en National Institute of Applied Sciences and Technology, Tunis, TUNISIA.

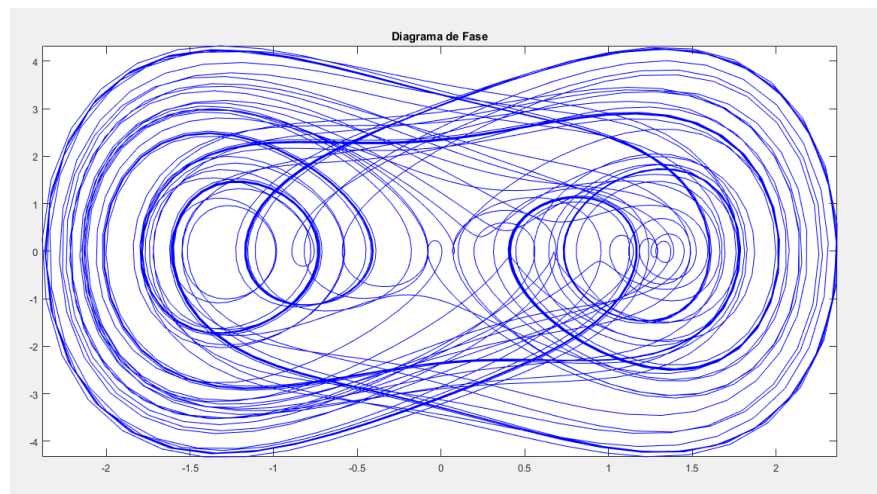


Figura 26: Diagrama de fase solución RK4 Ecuación de Duffing los valores de las constantes son los mismos que en la figura 25. Programa elaborado por Housam Binous en National Institute of Applied Sciences and Technology, Tunis, TUNISIA.

b. Resultado simulación Simulink Matlab

En este apartado, se plasmará el resultado que arroja la simulación matemático-esquemático que ofrece Matlab en su interfaz de Simulink. Éste consiste en la representación de la ecuación diferencial (17).

Para lograr una mejor interpretación se realiza el siguiente despeje (34):

$$x'' = -\epsilon x' - \beta x + \alpha x^3 + A \cos(\omega t) \quad (34)$$

En la figura 27 y 28 se aprecian: el resultado del esquema simulado y su relación con la ecuación diferencial de Duffing; y el diagrama de fase.

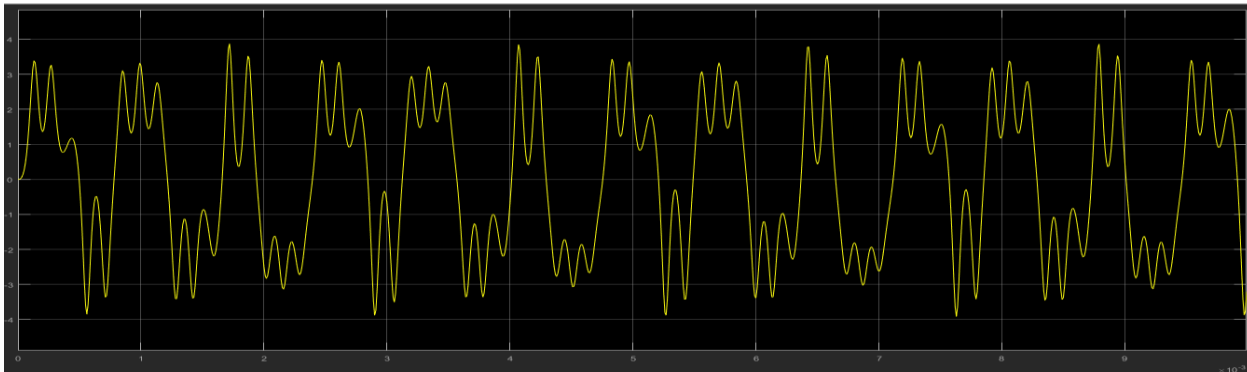


Figura 27: Resultado Ecuación de Duffing Simulink con $\epsilon = 1799.3$ $\beta = 2.5705 \times 10^8$ $\alpha = 1.3841 \times 10^8$.
Elaboración propia.

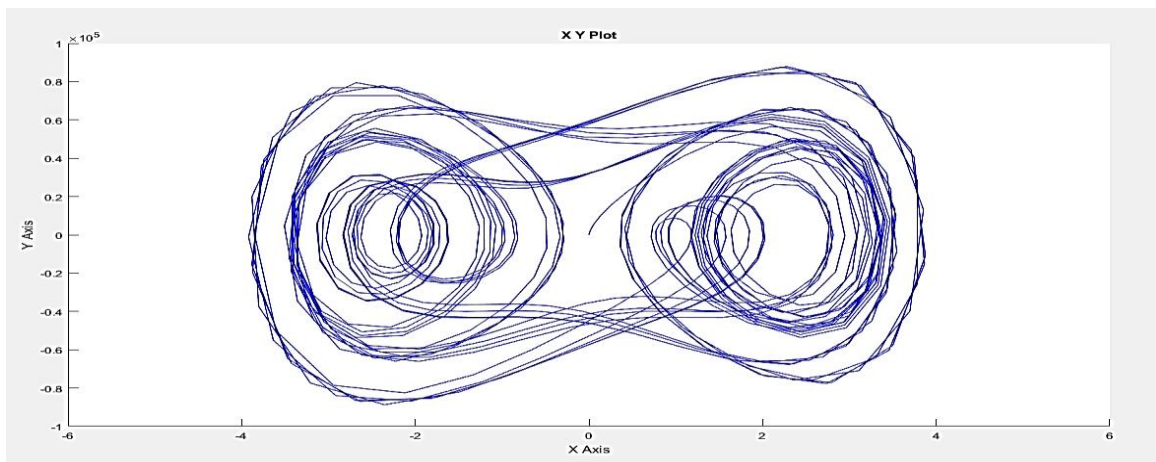


Figura 28: Diagrama de fase Ecuación de Duffing en Simulink. Elaboración Propia.

c. Método de descomposición de Adomian (ADM)

El método de descomposición de Adomian es una herramienta para resolver distintos tipos de problemas, que van desde: ecuaciones lineales y no lineales, algebraicas, diferenciales, integrales, integro diferenciales, en derivadas parciales, entre otras, [11].

El método consiste en separar las funciones, y determinarlas según su clasificación; parte lineal, parte no lineal, y el resto de la ecuación. Como se indica:

$$Fi = g \quad (35)$$

Donde:

Fi = es una función que contiene funciones lineales o no lineales.

g = puede definirse como cualquier función de entrada, también llamada función de excitación.

Por lo tanto, se puede ver la función Fi como

$$Fi = Nu + Lu + Ru \quad (36)$$

Nu = Parte no lineal de la ecuación

Lu = Parte lineal de la ecuación

Ru = Resto de la ecuación

Teniendo en cuenta esta descomposición, y la ecuación (36) la función se define como (37).

$$Nu + Lu + Ru = g \quad (37)$$

En todos los casos que requiera la utilización de este método, Lu representa la parte de linealidad de la ecuación, por lo que se debe escoger el operador diferencial de mayor orden. El primer paso consiste en despejar Lu , para esto se debe aplicar el operador inverso, el cual es L^{-1} . Por otro lado, se debe expresar en forma de sumatoria la parte no lineal de la ecuación, como $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$, donde A_n son los polinomios de Adomian. Ahora se reescribe la ecuación.

$$Lu = -Nu - Ru + g \quad (38)$$

Y aplicando el operador inverso.

$$L^{-1}Lu = -L^{-1}Nu - L^{-1}Ru + L^{-1}g \quad (39)$$

Se sabe que Lu es una función diferencial, dependiendo del orden que éste tenga, el inverso, que es la integral, también dependerá de ese orden. Se contempla también u como la descomposición de la suma $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Aplicando el teorema fundamental del cálculo, se tiene (40).

$$u_n(x) - u(0) = -L^{-1}Nu_n - L^{-1}Ru_n + L^{-1}g \quad (40)$$

Reemplazando $Nu_n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$, en donde

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} N \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \Big|_{\lambda=0} \quad (41)$$

para $n=1,2,3\dots$

Se obtiene, entonces:

$$u_n(x) = -L^{-1}A_n - L^{-1}Ru_n + L^{-1}g \quad (42)$$

Se considera la solución con parte lineal, por ello, se puede reescribir la ecuación de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} u_0(x) &= -L^{-1}A_0 - L^{-1}Ru_0 + L^{-1}g \\ u_1(x) &= -L^{-1}A_1 - L^{-1}Ru_1 + L^{-1}g \\ u_2(x) &= -L^{-1}A_2 - L^{-1}Ru_2 + L^{-1}g \\ u_{n-1}(x) &= -L^{-1}A_{n-1} - L^{-1}Ru_{n-1} + L^{-1}g \end{aligned} \quad (43)$$

i. Aplicación de ADM a la ecuación de Duffing

Adomian no contempló comparar esta ecuación con otras aproximaciones para verificar su eficacia, aunque demuestra que diferentes descomposiciones aumentan o disminuyen la velocidad de convergencia que, en cualquier caso, es uniforme.

De la ecuación (17), e imponiendo como condiciones iniciales: $x'(0) = 0$ y $x(0) = 0$

Haciendo las respectivas separaciones:

Lx será el diferencial de mayor orden.

$$L(x) = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (44)$$

Por lo tanto, se expresa de la siguiente manera en (45).

$$L^{-1}(x) = \int_0^t \int_0^s x(z) dz ds \quad (45)$$

Tomamos ahora la parte no lineal.

$$N(x) = bx^3 \quad (46)$$

Por último, la función de excitación (47) y la parte restante (48).

$$g = F \cos(w * t) \quad (47)$$

$$R(x) = b \frac{dx}{dt} + bx \quad (48)$$

Finalmente queda.

$$N(x) + L(x) + R(x) + g = 0 \quad (49)$$

Realizando el despeje.

$$L(x) = -N(x) - R(x) - g \quad (50)$$

Se aplica el operador inverso.

$$L^{-1}L(x) = -L^{-1}N(x) - L^{-1}R(x) - L^{-1}g \quad (51)$$

Se desarrolla en primera instancia $L^{-1}L(x)$.

$$L^{-1}L(x) = \int_0^t \int_0^s \frac{d^2}{ds^2} x(z) dz ds$$
$$L^{-1}L(x) = \int_0^t \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{d}{ds} x(z) dz ds$$

$$L^{-1}L(x) = \int_0^t \frac{d}{ds} (x(s)ds - x'(0))ds$$

$$L^{-1}L(x) = \int_0^t \frac{d}{ds} x(s)ds - \int_0^t x'(0)ds$$

$$L^{-1}L(x) = \int_0^t \frac{d}{ds} x(s)ds - x'(0) \int_0^t ds$$

$$L^{-1}L(x) = x(t) - x(0) - x'(0)t \quad (52)$$

Luego, teniendo el resultado, despejando:

$$x(t) - x(0) - x'(0)t = -L^{-1}N(x) - L^{-1}R(x) - L^{-1}g$$

$$x(t) = x(0) - x'(0)t - L^{-1}N(x) - L^{-1}R(x) - L^{-1}g \quad (53)$$

Sabiendo que $x'(0) = 0$ y $x(0) = 1$, se obtiene (54)

$$x(t) = 0 - L^{-1}N(x) - L^{-1}R(x) - L^{-1}g \quad (54)$$

En este caso $x(l) = 1$ y la solución general viene dada por la relación recursiva (55)

$$x_{n+1} = -L^{-1}N(x) - L^{-1}R(x) - L^{-1}g \quad (55)$$

La ecuación (55) es la solución general que, dependiendo de la cantidad de $n+1$ que se quieran calcular, será más exacta en la aproximación. Continuando, se obtiene (56) y (57).

$$A_0 = N[x_0] = N[0] = a(0)^3$$

$$A_0 = N[x_0] = 0 \quad (56)$$

$$R(x_0) = R(0) = E(0) - B(0) - -f \cos(wt)$$

$$R(x_0) = -f \cos(wt) \quad (57)$$

Se sustituye t por r para no generar problemas con los límites de integración.

Luego se procede a calcular el primer x_1 , obteniéndose:

$$x_1 = - \int_0^t \int_0^s R_{(x_0)} - \int_0^t \int_0^s A_{(0)} dz ds$$

$$x_1 = - \int_0^t \int_0^s -f \cos(wt) dz ds - \int_0^t \int_0^s 0 dz ds$$

$$x_1 = \frac{Ft^2(A\cos(wt))}{2} \quad (58)$$

Ahora, teniendo el x_1 se puede calcular el polinomio de Adomian A_1 .

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda} [N(x_0 + \lambda x_1)] |_{\lambda = 0}$$

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda} \left[1 - (\lambda) \left(\frac{Ft^2(A\cos(wt))}{2} \right) \right] |_{\lambda = 0} \quad (59)$$

Teniendo en cuenta que $N(x) = ax^3$, resulta.

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda} \left[a \left(1 - (\lambda) \left(\frac{Ft^2(A\cos(wt))}{2} \right) \right)^3 \right] |_{\lambda = 0} \quad (60)$$

Derivando y evaluando en $\lambda = 0$.

$$A_1 = 0 \quad (61).$$

Ahora hallamos $x_{(2)}$ y $x_{(3)}$.

$$x_{(2)} = \frac{-E * F * t^3(A\cos(wt))}{6} + \frac{b * F * t^4(A\cos(wt))}{24} + \frac{Ft^2(A\cos(wt))}{2}$$

$$x_{(3)} = \frac{E * b * F * t^5(A\cos(wt))}{120} + \frac{E * b * F * t^3(A\cos(wt))}{36} + \frac{E^2 * F * t^4(A\cos(wt))}{24}$$

$$+ \frac{E * b * F * t^5(A\cos(wt))}{120} - \frac{b^2 * f * t^6(A\cos(wt))}{720} - \frac{b * F * t^4(A\cos(wt))}{24}$$

$$+ \frac{Ft^2(A\cos(wt))}{2}$$

Por efectos de la cantidad de iteraciones en los polinomios de Adomian, se implementa un software para el cálculo. Es pertinente recalcar que se sus condiciones, serán $\varepsilon = 0.1$ $\beta = 0.1$ $\alpha = 2$ $w = 1.06999$ $x(0)=0$ $x'(0)=0$. El resultado obtenido se puede observar en las figuras 29 a 31.

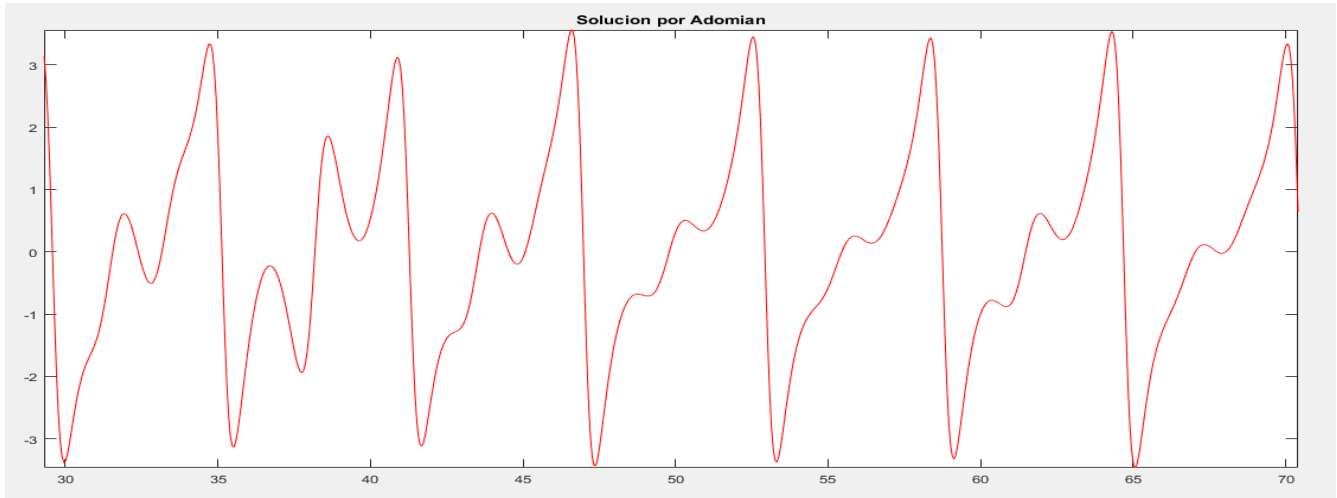


Figura 29: Resultado método de descomposición de Adomian. Elaboración Propia.

- 50 ITERACIONES

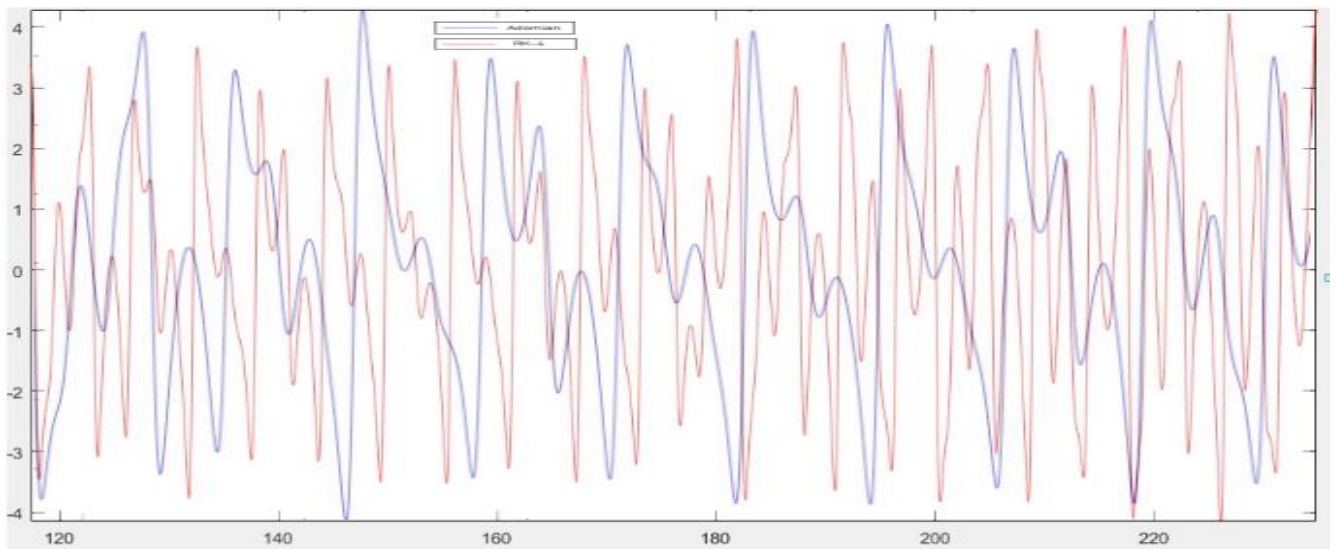
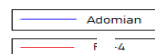


Figura 30: Resultado método de descomposición de Adomian. Elaboración Propia. Con 50 iteraciones.



- 100 ITERACIONES

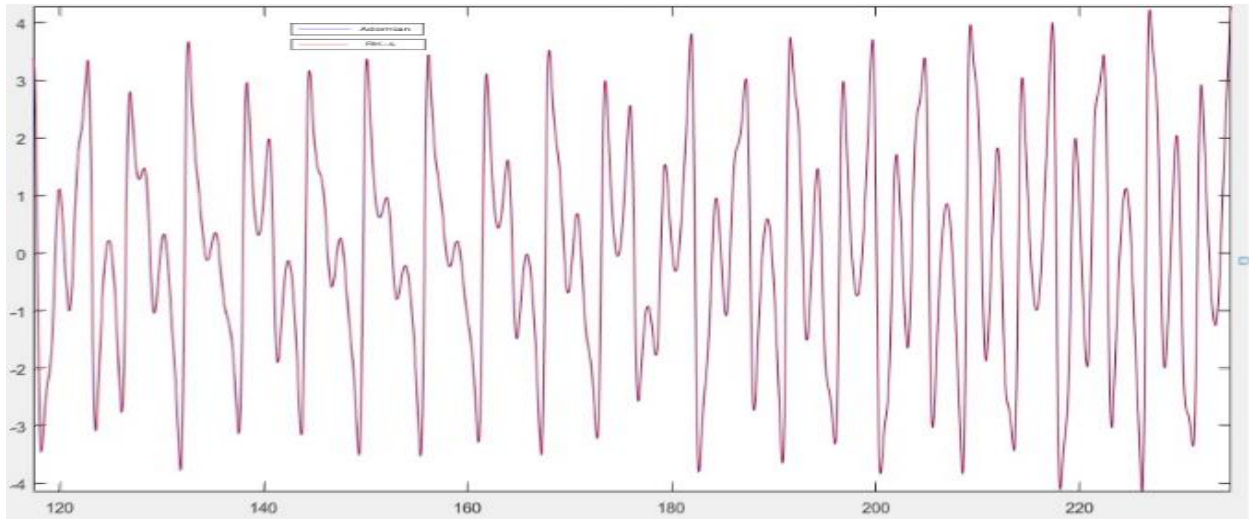


Figura 31: Resultado método de descomposición de Adomian. Elaboración Propia. Con 50 iteraciones.

Tomando un rango de comportamiento uniforme entre las soluciones dadas por el circuito físico, el método de Adomian, y el de Runge-Kutta, se hará una comparación sobre los resultados teniendo en cuenta como solución ideal la arrojada por Runge Kutta.

En la tabla 1 se aprecian los intervalos de 0 a 110, y el error relativo para Adomian (Error Ad.) y el error relativo para el circuito físico (Error CF.)

t	Adomian(x)	Runge-Kutta(x)	Circuito Físico(x)	Error Ad	Error CF
0	3.358	3.350	3.522	0.23%	5.1%
10	3.292	3.287	3.487	0.15%	6.08%
20	3.067	3.052	3.254	0.49%	6.61%
30	2.786	2.762	2.956	0.86%	7.02%
40	2.562	2.540	2.759	1.6%	8.6%
50	1.982	1.950	2.176	0.86%	11.5%
60	1.721	1.695	1.834	1.5%	8.2%
70	1.302	1.265	1.410	2.9%	11.4%
80	0.836	0.804	0.980	3.9%	21.8%
90	-0.427	-0.399	0.254	7.01%	36.3%

100	-1.514	-1.456	-0.938	3.9%	35.5%
110	-2.682	-2.523	-2.189	6.3%	13.2%

Tabla 1: Datos teóricos y experimentales. Fuente: Elaboración propia

5. Exponentes Máximos de Lyapunov

Esta medida de caos fue introducida por el matemático ruso Alexander Mijailovic Lyapunov a principios del siglo XX.

Los exponentes de Lyapunov, como ahora se les conoce, son un conjunto de números que se emplean usualmente para detectar la presencia del caos en sistemas dinámicos, en este caso para determinar la presencia de caos en el oscilador dado por la ecuación de Duffing.

La idea en general es medir qué tan rápido se alejan o difieren las configuraciones globales contiguas con respecto al tiempo. En este sentido, miden la tasa promedio de divergencia o convergencia exponencial de trayectorias cercanas en el espacio de fase. Dado que condiciones iniciales cercanas corresponden a estados iniciales prácticamente idénticos, la divergencia exponencial de las orbitas implica la pérdida de la predictibilidad del sistema, lo que se traduce en caos. Cualquier sistema que contenga al menos un exponente de Lyapunov positivo se define como caótico; precisamente a estos valores positivos se quiere llegar para tener la total certeza de que el circuito es caótico.

Considerando el sistema dinámico (62)

$$\dot{x} = f(x) \quad (62)$$

Donde \dot{x} representa la derivada temporal de x y cuya solución, asumimos, está dada por $f^t(x)$, Asimismo, consideremos dos condiciones iniciales cercanas en el espacio de fase X_0 y $X_0 + \delta X_0$, donde δX_0 es una pequeña perturbación del punto x_0 . Después de un tiempo t , la solución para estas condiciones iniciales particulares, estará dada por $f^t(x_0)$ y $f^t(x_0 + \delta x_0)$, Si usamos la órbita descrita por la solución con condición inicial X_0 como referencia, la separación entre el par de trayectorias $\Delta f^t = f^t(x_0 + \delta x_0) - f^t(x_0)$, será una función del tiempo e indicara, si por ejemplo estas divergen, que el sistema es inestable.

Ahora, considerando la ecuación (63):

$$x_{(n+1)} = r(1 - x_n), x \in (0,1) \quad (63)$$

en donde r es un parámetro (fertilidad) que determina el comportamiento del mapeo.

Lo que es importante mencionar aquí es el comportamiento del mapeo para dos puntos iniciales, x y $x+\epsilon$, que empiezan relativamente cerca el uno del otro; después de N -iteraciones, la distancia entre los puntos es una cantidad que viene dada por la función:

$$|f^N(x + \epsilon) - f^N(x)| = g(x, \epsilon, N) \text{ en donde, obtenemos (64)}$$

$$f(x) = rx(1 - x). \quad (64)$$

La relación exacta que da la distancia entre los puntos es:

$$g(x, \epsilon, N) = e^{N\lambda(x)} \quad (65)$$

Donde $\lambda(x)$, es llamado el exponente de Lyapunov de x , que es una medida de la contracción o alejamiento de los puntos en el espacio fase. Despejando, el exponente de Lyapunov es el siguiente:

$$\lambda(x) = \frac{1}{N} \ln \frac{f^N(x+\epsilon) - f^N(x)}{\epsilon} \quad (66)$$

Pasando al límite: $N \rightarrow \infty$ y $\epsilon \rightarrow 0$

el exponente de Lyapunov se transforma en:

$$\lambda(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \right) \ln \left| \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \right| \quad (67)$$

Este resultado se puede escribir de una manera diferente si se usa la regla de la cadena para derivar $f^2(x)$.

$$\frac{d}{dx} f^2(x) \Big|_{x_0} = f' |f(x_1)| f' x_i \quad (68)$$

con lo cual el exponente de Lyapunov puede expresarse como:

$$\lambda(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \right) \sum_{i=0} \ln |f' x_i| \quad (69)$$



Lo que se puede observar de la Ecuación es que cuando el valor absoluto de la derivada es mayor que 1, entonces el logaritmo es positivo; si los sucesivos puntos divergen, entonces el promedio de los logaritmos del valor absoluto de la derivada es positivo.

En general, un sistema dinámico en un espacio de fase n -dimensional posee un espectro con n exponentes de Lyapunov, uno por cada dirección del espacio de fase. Además, puede demostrarse que si $F(x)$ es suave, el límite existe y es igual al máximo exponente de Lyapunov, [9]. Es importante notar que cualquier separación inicial δx_0 , contiene, en general, alguna componente en la dirección asociada con el máximo exponente de Lyapunov y debido al crecimiento exponencial de este último el efecto de los otros exponentes se verá atenuado hasta desvanecerse con el tiempo.

Para una ecuación diferencial de orden n , indica que existen n exponentes de Lyapunov asociados a esta, además, un exponente negativo implica que el punto de equilibrio seleccionado es estable, o que las señales convergen hacia dicho punto. Un mapeo unidimensional tiene trayectorias caóticas para un valor particular del parámetro si el exponente de Lyapunov es positivo para ese valor del parámetro, esto quiere decir que si un exponente es positivo indica la presencia de caos en el sistema; por lo tanto, un exponente positivo puede mostrar la sensibilidad a las condiciones iniciales.

Usando el código en MATLAB dado en [12] se hallan los máximos exponentes de Lyapunov en la ecuación de Duffing. En la Figura 32 se puede observar el comportamiento de los exponentes de Lyapunov, y en la Tabla 2 se muestran sus valores. Se puede concluir que X presenta un equilibrio debido a que sus exponentes son negativos, y se evidencia la inestabilidad de Y debido a que sus exponentes son positivos.

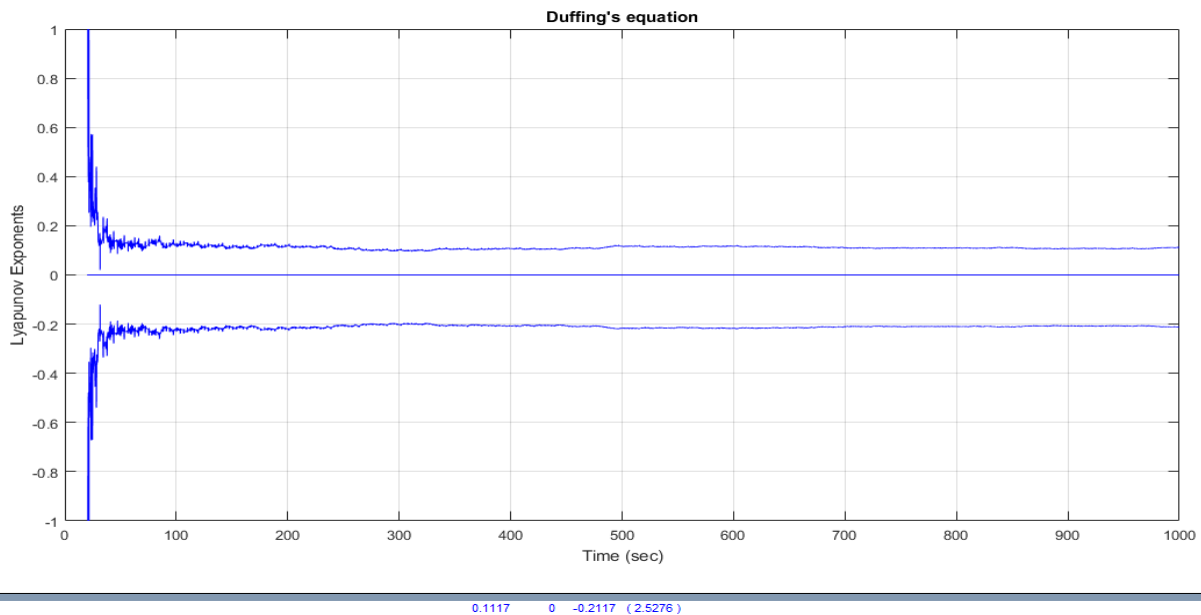


Figura 32: Exponentes de Lyapunov variables de salida. Fuente: [12].

Tiempo(s)	Exponentes de Lyapunov Variable (X)	Exponentes de Lyapunov Variable (Y)
1	0,453957	-0,12037
2	0,34268	-0,14907
3	0,261422	-0,056254
4	0,212582	0,0963
5	0,10935	0,1
6	0,162783	0,057
7	0,283642	0,025
8	0,169253	0,076
9	0,139265	0,173
10	0,19396	0,1

Tabla 2: Exponentes de Lyapunov variables de salida X y Y. Fuente: elaboración propia.

6. Análisis y resultados

En primera instancia, se implementó el circuito postulado en [7], en donde sugieren un modelo de la ecuación de Duffing. En este caso se plantea la simulación para determinar su comportamiento.

Para la simulación del circuito, se contempló usar la herramienta Multisim, Figura 33.

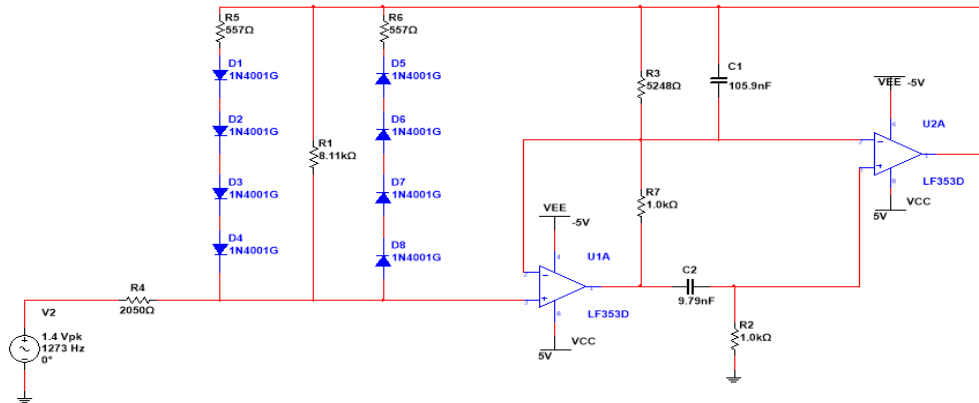


Figura 33: Esquema circuital plateado en [7]. Elaboración Propia.

Teniendo en cuenta los siguientes valores:

$c1=105.3\text{nf}$ $c2=9.79\text{nf}$ $r1=8.11\text{k}$ $r2=1\text{k}$ $r3=5248$ $r4=2050$ $r5=557$ $r6=557$ $r7=1\text{k}$

La respuesta del sistema a su salida, con una $f = 8\text{kHz}$ y con $A = 5\text{V}$ es la siguiente

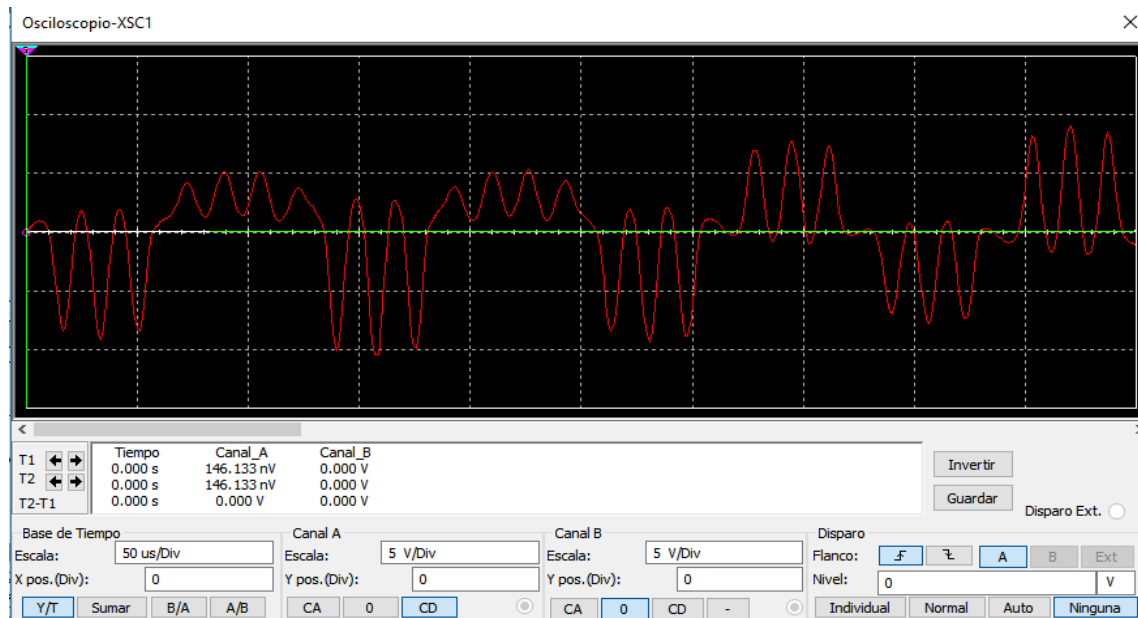


Figura 34: Simulación Multisim Resultado Circuito planteado en [7]. Elaboración Propia.

La comparación entre sus dos salidas y el diagrama de fase. Figura 35 y Figura 36 respectivamente.

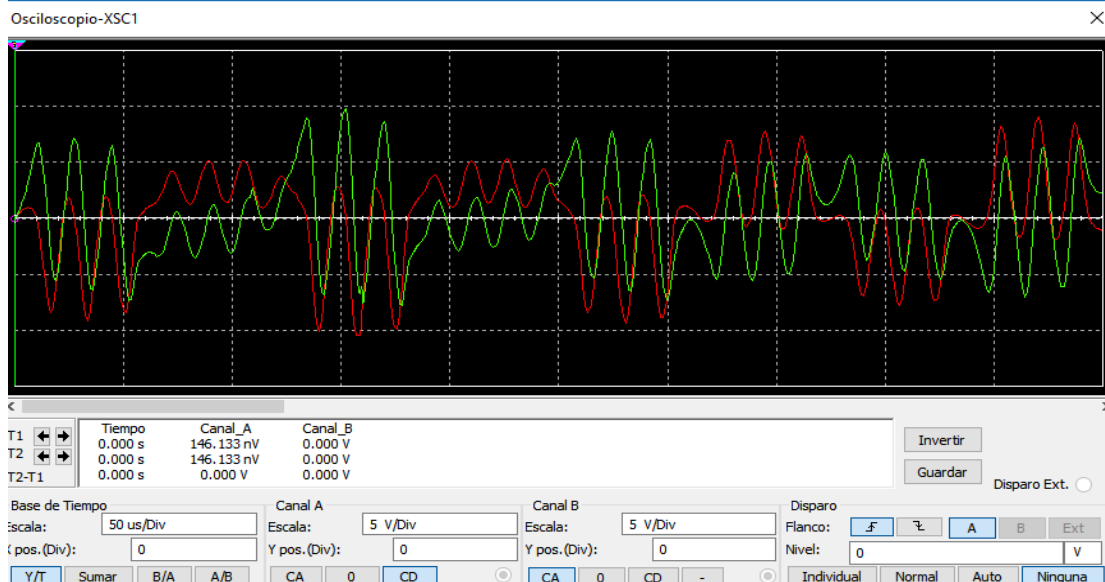


Figura 35: Simulación Multisim Comparación salida X y Y. Elaboración Propia.

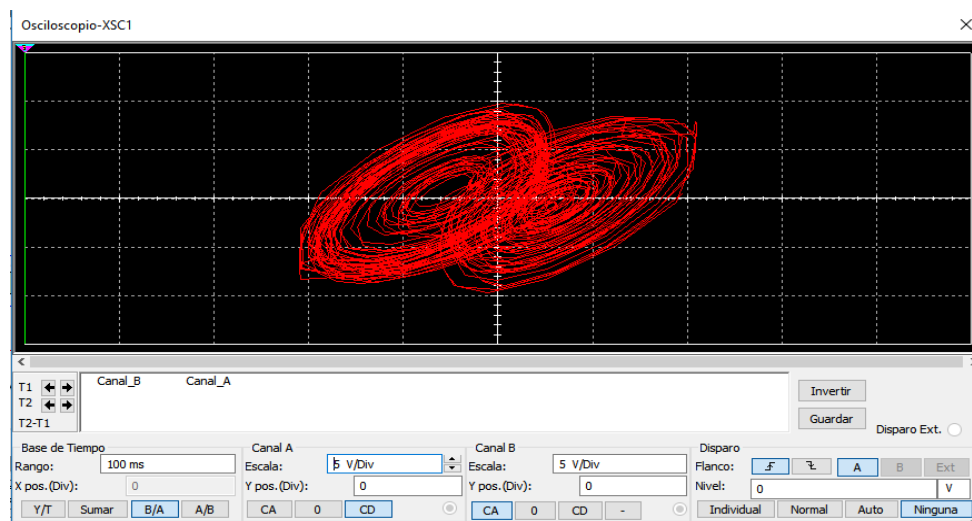


Figura 36: Diagrama de fase. Elaboración propia.

Ahora, con respecto a la solución teórica, y teniendo en cuenta las condiciones iniciales $x'(0) = 0$ y $x(0) = 0$ y los coeficientes $\varepsilon = 0.1$ $\beta = 0.1$ $\alpha = 2$ $w = 1.06999$, se obtiene la figura 37 y su respectivo diagrama de fase Figura 38.

En la parte de simulación, en el circuito que se elaboró, tuvo en cuenta los siguientes parámetros $\varepsilon = 0.1$ $\beta = 0.1$ $\alpha = 2$. En la figura 37, se observa el resultado del circuito calculado. Se evidenció que presentaba un comportamiento caótico con valores de $f = 400\text{Hz} - 420\text{hz}$ y una $A = 5\text{V}$.

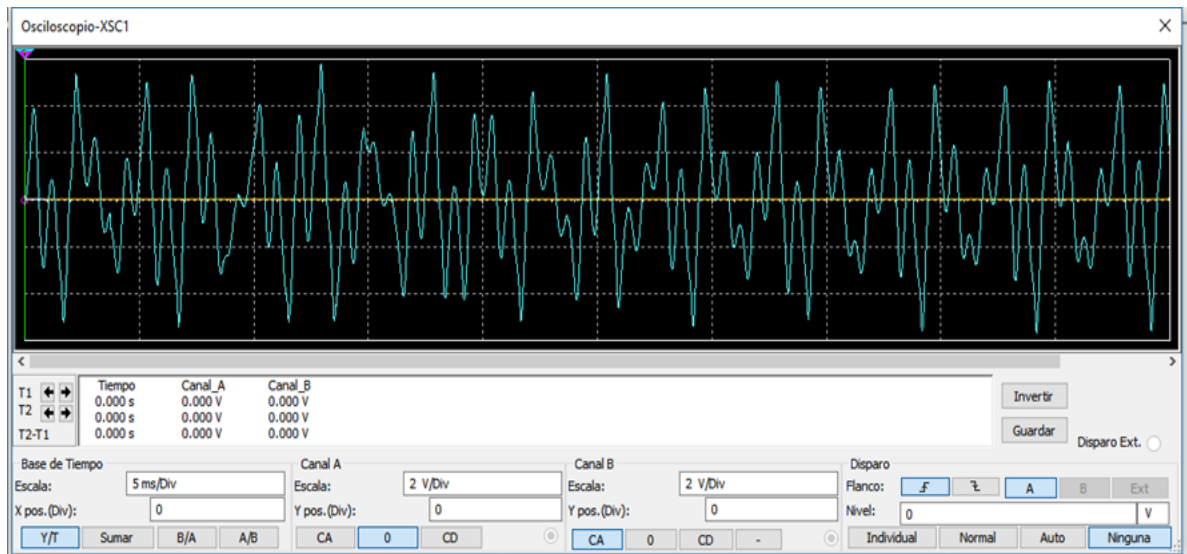


Figura 37: respuesta del circuito elaborado en simulación. Elaboración propia.

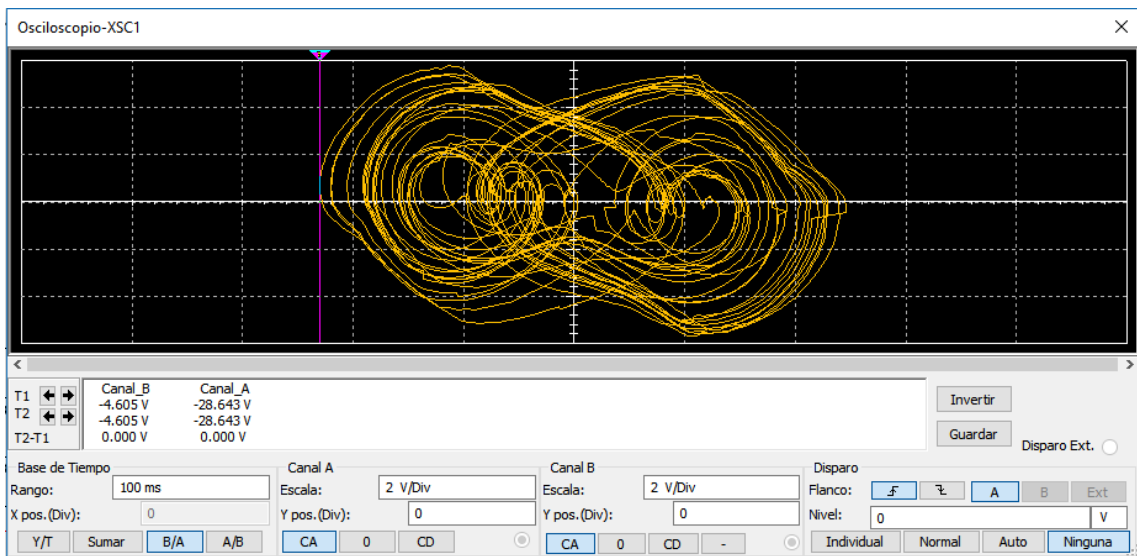


Figura 38: Diagrama de fase circuito elaborado en simulación. Elaboración propia.

El diseño físico, basado en la simulación y los valores tomados para resolver la parte teórica, fueron implementados, como anteriormente también se hizo para la simulación. El circuito se aprecia en la figura 39.

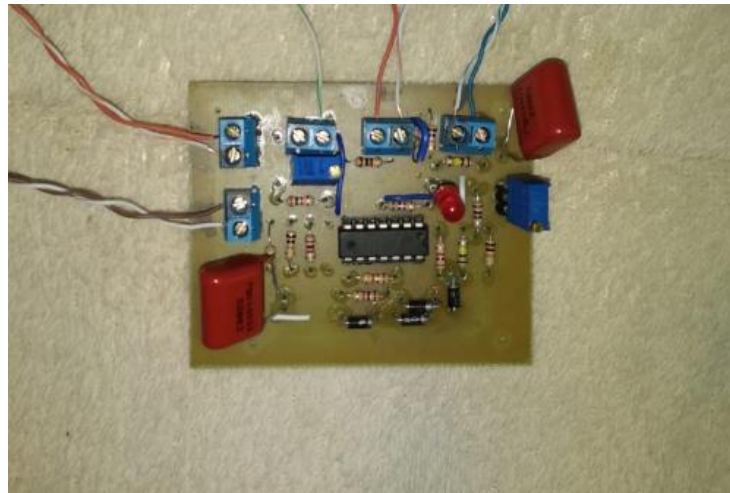


Figura 39: Diseño circuito físico. Fuente: Elaboración propia.

Con ayuda del osciloscopio Rigol DS1000E, se capturaron las señales arrojadas por el circuito, figuras 40 y 41, gracias a que este permite guardar las señales en imágenes, los resultados arrojados fueron los siguientes, teniendo en cuenta que $f = 420\text{Hz}$ y una $A = 5\text{V}$

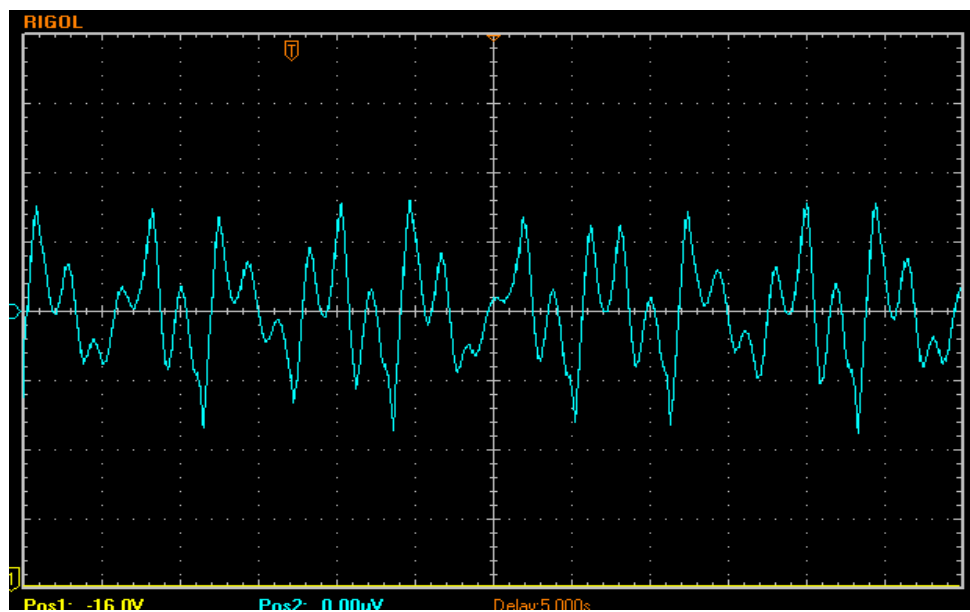


Figura 40: Señal de salida circuito elaborado. Osciloscopio Rigol DS1000E. Fuente: Elaboración propia

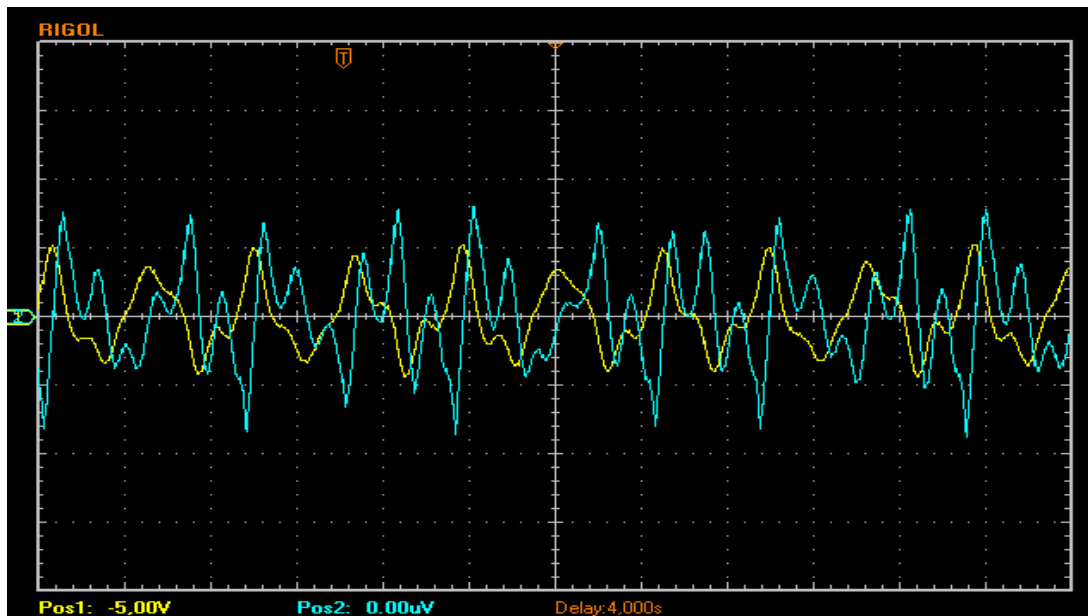


Figura 41: Señales X y Y circuito elaborado. Osciloscopio Rigol DS1000E. Fuente: Elaboración propia

En el diagrama de fase se utilizaron el osciloscopio Rigol DS1000E y un osciloscopio análogo, figuras 42 y 43.



Figura 42: Diagrama de fase circuito elaborado. Osciloscopio Rigol DS1000E. Fuente: Elaboración propia

En este caso el diagrama de fase es graficado por el osciloscopio análogo Diotronic HM400. Con una $f = 420\text{Hz}$ y una $A = 5\text{V}$



Figura 43: Diagrama de fase circuito elaborado. Osciloscopio Diotronic HM400. Fuente: Elaboración propia

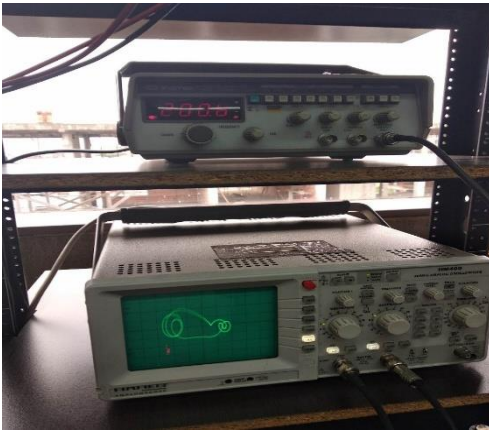
Teniendo los resultados se puede analizar que, en primera instancia, el resultado que nos arrojó la simulación del circuito implementado en [7] tiene un comportamiento totalmente distinto, esto debido a que, en su principio se tuvieron en cuenta otras condiciones y respuestas del circuito, esto demuestra en las diferentes condiciones que la ecuación diferencial de Duffing puede tener una respuesta caótica.

Se puede observar, que la respuesta del sistema en las condiciones propuestas $\varepsilon = 0.1$ $\beta = 0.1$ $\alpha = 2$ $w = 1.0699$ es caótico y no tiene una respuesta periódica, como se evidencian en las figuras 35 y 36, las cuales hacen parte de la solución analítica. Representando estas mismas condiciones en el circuito, se observa que el comportamiento tanto de la respuesta analítica, simulada y física tienden a tener la misma respuesta, tanto en el periodo del tiempo como su diagrama de fase. Es pertinente mencionar, que en diferentes frecuencia y amplitudes el sistema es estable y no presenta ninguna respuesta caótica.

7. EVIDENCIA SIMULADA Y CIRCUITAL

En este apartado se observará el comportamiento del circuito tanto en su simulación como en su respuesta física.

Circuito trabajando con $F=200\text{Hz}$ y una $A=5\text{vp}$.



Fuente: Elaboración propia

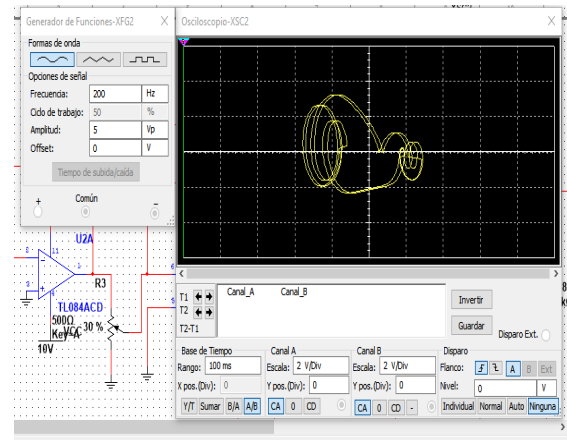


Figura 44: Diagrama de fase a 200Hz Osciloscopio

Figura 45: Diagrama de fase a 200Hz Simulación.

- Circuito trabajando con $F=200\text{Hz}$ y una $A=5\text{vp}$.

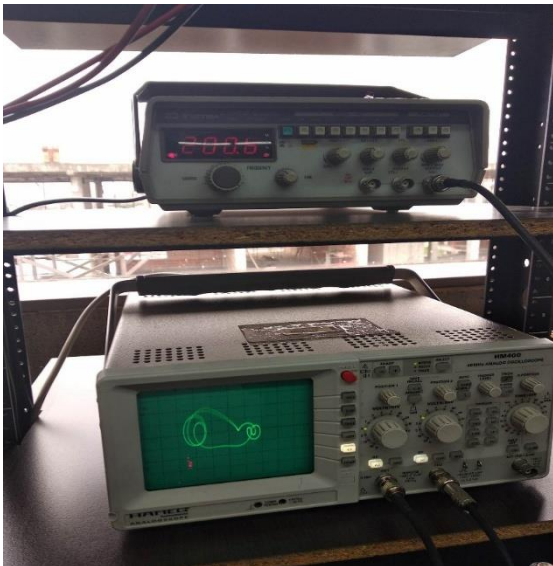


Figura 46: Diagrama de fase a 200Hz Osciloscopio.

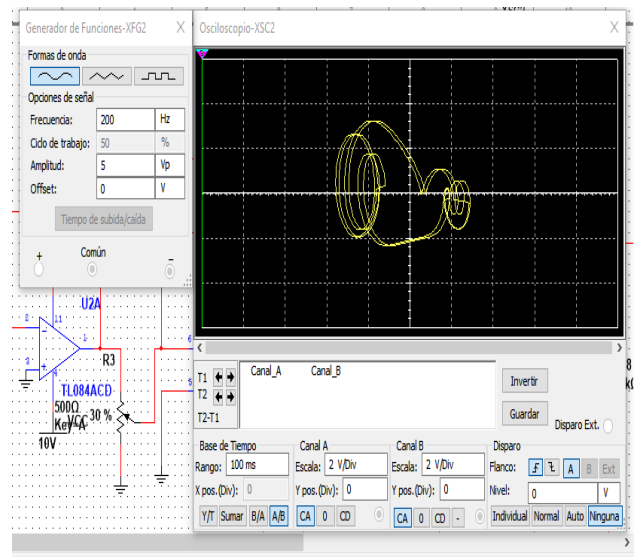


Figura 47: Diagrama de fase a 200Hz Simulación.

- Circuito trabajando con $F=250\text{Hz}$ y una $A=5\text{Vp}$

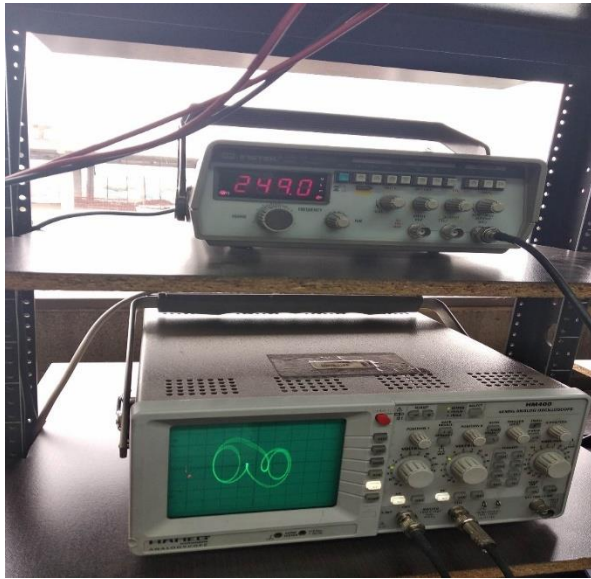


Figura 48: Diagrama de fase a 250Hz Osciloscopio.

Fuente: Elaboración propia

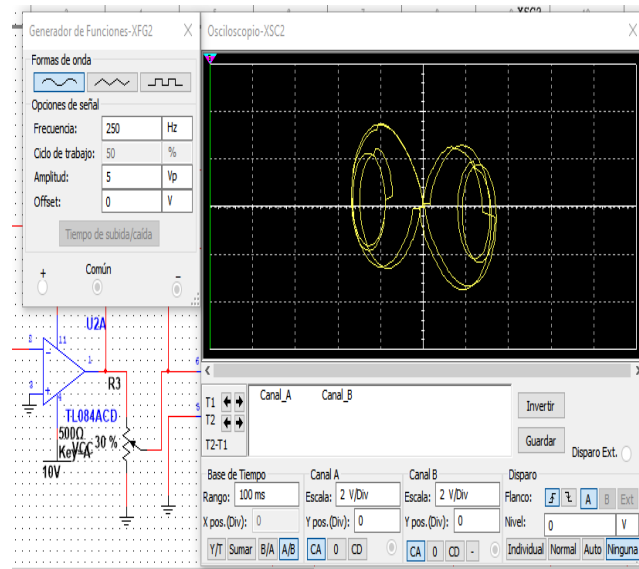


Figura 49: Diagrama de fase a 250Hz Simulación.

Fuente: Elaboración propia

- Circuito trabajando con $F=300\text{Hz}$ y una $A=5\text{Vp}$

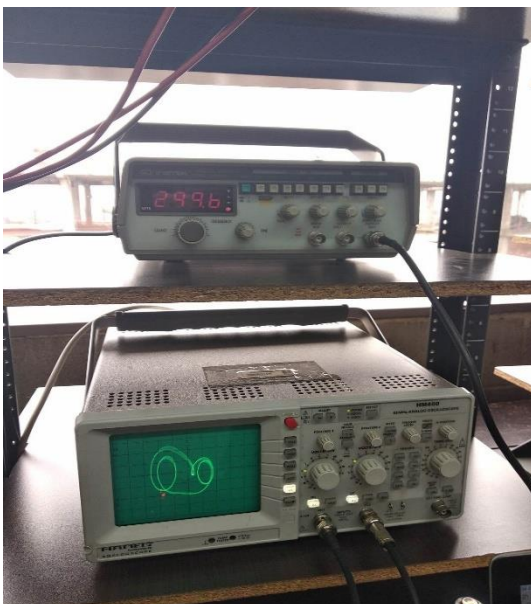


Figura 50: Diagrama de fase a 300Hz.

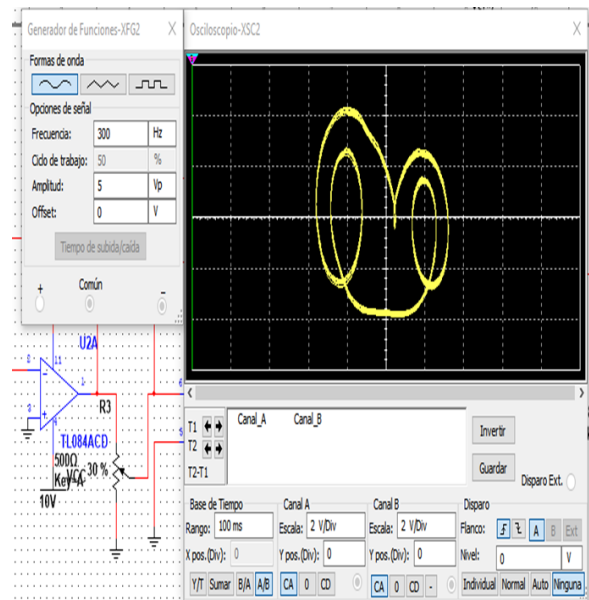


Figura 51: Diagrama de fase a 300Hz Simulación

- Circuito trabajando con $F=350\text{Hz}$ y una $A=5\text{Vp}$



Figura 52: Diagrama de fase a 350Hz Osciloscopio

Fuente: Elaboración propia

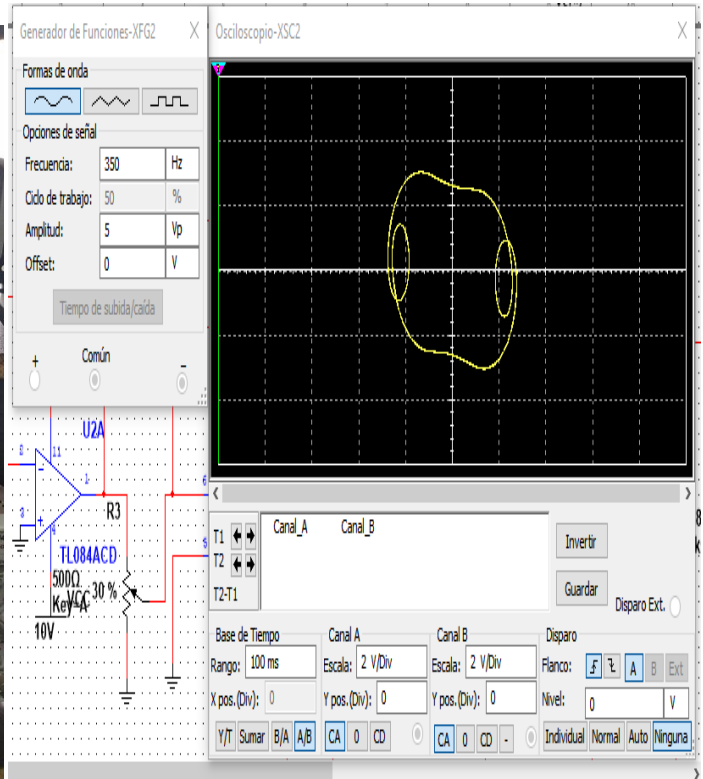


Figura 53: Diagrama de fase a 350Hz Simulación.

Fuente: Elaboración propia

- Circuito trabajando con $F=400\text{Hz}$ y una $A=5\text{Vp}$



Figura 54: Diagrama de fase a 400Hz Osciloscopio.

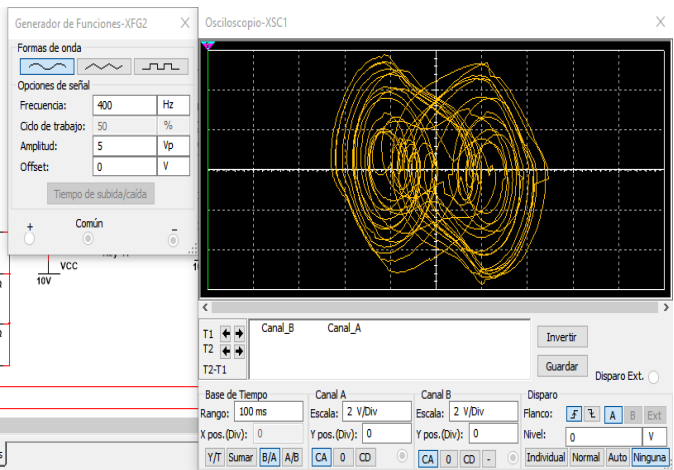


Figura 55: Diagrama de fase a 400Hz Simulación.

8. CONCLUSIONES

Se ha obtenido el circuito representativo de la ecuación diferencial de Duffing. Además, se ha evidenciado el similar comportamiento y respuesta con los valores teóricos y simulados, dando así la respuesta positiva de poder representar electrónicamente el comportamiento de la ecuación.

De acuerdo al criterio de los máximos exponentes de Lyapunov, en las condiciones sugeridas $\varepsilon = 0.1$, $\beta = 0.1$, $\alpha = 2$, $w = 1.06999$ $x(0)=0$ $x'(0)=0$ presenta un comportamiento caótico en su parte teórica. Asimismo, teniendo en cuenta las condiciones sugeridas, en el circuito electrónico se presenta un comportamiento caótico, esto si para los valores de $f = 400$ a 420Hz y con una $A = 5V$.

Se pudo analizar y concluir que la mejor aproximación de cada una de las soluciones que se le dio al sistema, es el método de Runge Kutta, tomando como referencia los resultados del circuito físico (datos experimentales).

Se solucionó la ecuación diferencial de Duffing, por varios métodos de solución. Logrando establecer que el comportamiento y respuesta del sistema, son similares en todos los casos. Recalcando que predomina la solución de Runge-Kutta de cuarto orden.

9. Referencias

- [1] Solé, R. V., y Manrubia, S. C. (2001). Orden y caos en sistemas complejos. Universidad Politécnica de Cataluña, ISBN 9788483014301
- [2] Ebert Brea, P., Titular, P., De, E. de I. E., & Venezuela, la U. C. de. (2014). Análisis de Sistemas Lineales Asistido con Scilab : Un Enfoque desde la Ingeniería Eléctrica ASISTIDO CON Scilab TM. H. Poincaré, L. A. Topología, and Y. E. L. Caos, "Henri poincaré, la topología y el caos," pp. 1960–1962, 1960.
- [3] Elhadeir, A. (2012). Control_Por_La_Fase_del_Oscilador_de_Duf. Madrid, España: Universidad Rey Juan Carlos.



- [4] Jorge Plaza Pulido " SIMULACIÓN MEDIANTE APPLETS DE JAVA: DINÁMICA Y CONTROL DEL OSCILADOR DE DUFFING" universidad rey juancarlos pp.10-11,48-49
- [5] S. Nourazar and A. Mirzabeigy, "Approximate solution for nonlinear Duffing oscillator with damping effect using the modified differential transform method," *Sci. Iran.*, vol. 20, no. 2, pp. 364–368, 2013.
- [6] J. O. Maaita, I. M. Kyprianidis, C. K. Volos, and E. Meletlidou, "The study of a nonlinear duffing-type oscillator driven by two voltage sources," *J. Eng. Sci. Technol. Rev.*, vol. 6, no. 4, pp. 74–80, 2013.
- [7] C. K. Volos, I. M. Kyprianidis, and I. N. Stouboulos, "Experimental Study of a Nonlinear Circuit Described by Duffing's Equation," *Istanbul Kültür Univ.*, vol. 4, pp. 45–54, 2006.
- [8] Conde, T. N. F. (2017). MODELAMIENTO, SIMULACIÓN E IMPLEMENTACIÓN DEL OSCILADOR CAÓTICO CONMUTADO POR TRAMOS. Bogota D.C: Visión Electrónica.
- [9] Mogrovejo, U. C. S. T. de. (n.d.). Vibraciones Forzadas.
- [10] R. Seminario, "Metodos Numéricos Para Ingeniería," *Libro.*
- [11] J. Ambrosio Delgado, "Aproximacion de las nuevas soluciones de las EDP'S de segundo orden por el metodo de descomposicion de Adomian," 2008..
- [12] "From chaos to order-Perspectives and methodologies in controlling chaotic nonlinear dynamical systems," *Znt. J. Bifurcation Chaos*, vol. 3, no. 6, pp. 1363-1409, 1993.
- [13] "Taming chaos-Part 11: Control," *ZEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 40, pp. 700-706, 1993.
- [14]] J. O. Maaita, I. M. Kyprianidis, C. K. Volos, and E. Meletlidou, "The study of a nonlinear duffing-type oscillator driven by two voltage sources," *J. Eng. Sci. Technol. Rev.*, vol. 6, no. 4, pp. 74–80, 2013.

[15] Daniel Rodríguez Ramírez Tema 9. Espacio de Estados ingeniería en control.