Journal of Mathematics, Computations, and Statistics (hal. 124 – 132)
Vol. 4. No. 2, Oktober 2021
http://www.ojs.unm.ac.id/jmathcos

Nilai Total Ketidakteraturan Sisi dan Titik Pada Graf Berlian

Dian Firmayasari S[1,a)], Muhammad Isbar Pratama[2,b)]

[1]*Ilmu Aktuaria, Fakultas Sains, Universitas Muhammadiyah Bulukumba*
[2]*Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Makassar*

[a)] dianfirmayasari@umbulukumba.ac.id
[b)]isbarpratama@unm.ac.id

***Abstrak**. Berdasarkan hasil penelitian sebelumnya terkait dengan konsep pelabelan total tidak teratur pada suatu graf menunjukkan bahwa graf berlian adalah salah satu dari beberapa graf yang belum ditentukan nilai total ketidakteraturan sisi dan titiknya. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai total ketidakteraturan sisi dan titik pada graf berlian (Br_n) untuk $n \geq 4$. Penentuan nilai total ketidakteraturan sisi dan titik pada graf berlian dilakukan dengan menentukan batas bawah terbesar dan batas atas terkecil. Batas bawah dianalisis berdasarkan sifat-sifat graf dan teorema pendukung lainnya, sedangkan batas atas dianalisis dengan mengkontruksi fungsi pelabelan total tidak teratur pada graf berlian. Berdasarkan hasil penelitian ini diperoleh nilai total ketidakteraturan sisi dan titik pada graf berlian, sebagai berikut:*

i. $tes(Br_n) = \left\lceil \frac{5n-3}{3} \right\rceil,\ n \geq 4$

ii. $tvs(Br_n) = \begin{cases} 3,\ n = 5 \\ \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil,\ n\ lainnya \end{cases}$

***Kata Kunci:** Graf berlian, nilai total ketidakteraturan sisi, nilai total ketidakteraturan titik, pelabelan tidak teratur.*

***Abstract.** Previous research results related to the concepts of the total irregular labeling of a graph indicate that the diamond graph was one of some graphs which have not been specified in term of the total edge and vertex irregularity strengths. This research aimed to determine the total edge and vertex irregularity strength of diamond graph (Br_n) for $n \geq 4$. The assessment of the total edge and vertex irregularity strength of diamond graph was conducted by determining the greatest lower bound and the smallest upper bound. The lower bound was analyzed based on the characteristics of the graph and other proponent theorems, while upper bound was analyzed by constructing the function of the irregular total labeling. The research results revealed that the total edge and vertex irregularity strengths of the diamond graph were as follows:*

i. $tes(Br_n) = \left\lceil \frac{5n-3}{3} \right\rceil,\ n \geq 4$

ii. $tvs(Br_n) = \begin{cases} 3,\ n = 5 \\ \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil,\ n\ lainnya \end{cases}$

***Keywords:** Diamond graph, irregular labeling, the total edge irregularity strength, the total vertex irregularity strength*

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika yang banyak mendapat perhatian dari para matematikawan terkait aplikasi konsepnya yang tersebar dalam berbagai bidang. Salah satu konsep teori graf yang dimaksudkan adalah pelabelan graf. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedlàček (1963). Pelabelan graf memiliki objek kajian berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label.

Ditinjau dari unsur graf yang dipetakan, pelabelan graf dibagi menjadi beberapa jenis: *pelabelan titik*, jika titik-titik graf menjadi domain; *pelabelan sisi*, jika sisi-sisi graf menjadi domain; dan *pelabelan total*, jika domainnya adalah gabungan himpunan titik dan himpunan sisi. Berdasarkan bobot unsur graf, pelabelan dapat dibedakan menjadi beberapa jenis, antara lain pelabelan anggun, pelabelan ajaib, pelabelan anti ajaib dan pelabelan tidak teratur (Wallis, 2007).

Konsep pelabelan tidak teratur pada suatu graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand *et al* (1988), pada suatu paper berjudul "*Irregular Network*". Pelabelan tidak teratur (*irregular labeling*) pada graf G didefinisikan sebagai suatu pemetaan yang memetakan himpunan sisi dari G ke himpunan bilangan bulat positif, sedemikian sehingga setiap dua titik yang berbeda di G mempunyai bobot yang berbeda.

Termotivasi oleh hal tersebut, Bača *et al* (2007), melalui paper berjudul "*On irregular total labeling*" memperkenalkan jenis pelabelan tidak teratur lainnya yang didasarkan pada pelabelan total, yaitu pelabelan total tidak teratur sisi (*edge irregular total k-labeling*) dan pelabelan total tidak teratur titik (*vertex irregular total s-labeling*). Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf. Pemetaan $g: V \cup E \rightarrow \{1,2,3, \dots k\}$ disebut *pelabelan-k total tidak teratur sisi pada G* (*edge irregular total k-labelling*), jika setiap dua sisi yang berbeda di G mempunyai bobot yang berbeda. Bobot sisi $e \in E$ adalah jumlah label sisi e dan label kedua titik ujung e. Nilai total ketidakteraturan sisi (*total edge irregularity strength*) dari G, dinotasikan dengan $tes(G)$, didefinisikan sebagai bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan-k total tidak teratur sisi.

Selain memperkenalkan pelabelan total tidak teratur sisi, Bača *et al* (2007), juga memperkenalkan pelabelan total tidak teratur titik yang didefinisikan sebagai berikut. Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf, pemetaan $h: V \cup E \rightarrow \{1,2,3, \dots s\}$ disebut pelabelan-s total tidak teratur titik (*vertex irregular total s-labeling*) pada G, jika setiap dua titik yang berbeda di V mempunyai bobot yang berbeda. Bobot titik $u \in V$ adalah jumlah label u dan semua label sisi yang terkait dengan u. Nilai total ketidakteraturan titik (*total vertex irregularity strength*) dari G, dinotasikan dengan $tvs(G)$, didefinisikan sebagai bilangan bulat positif terkecil s sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan-s total tidak teratur titik.

Berdasarkan survey hasil penelitian beberapa peneliti terdahulu, beberapa jenis graf telah berhasil ditentukan nilai total ketidakteraturan sisinya, diantaranya graf lintasan, graf lingkaran, graf roda, graf kipas dan graf prisma (Ba*č*a *et al*., 2007), beberapa graf hasil gabungan, graf hasil kali, dan graf hasil korona (Nurdin, 2010), graf tangga (Wulandari dkk., 2014). Sama halnya dengan nilai total ketidakteraturan sisi, penentuan nilai total ketidakteraturan titik dari semua graf belum dapat dilakukan secara lengkap. Sampai saat ini hanya beberapa kelas graf yang sudah diketahui nilai total ketidakteraturan titiknya, diantaranya graf bipartit lengkap (Wijaya dkk., 2005), graf roda, graf kipas, graf matahari, dan graf kincir (Wijaya & Slamin, 2008), gabungan graf olive (Nurdin dkk., 2008). Tidak hanya itu, Nurdin dkk (2009), telah memberikan nilai total ketidakteraturan titik dari gabungan graf lintasan.

Namun demikian, beberapa jenis graf belum diketahui nilai total ketidakteraturan sisi dan nilai total ketidakteraturan titiknya. Salah satu diantaranya adalah graf berlian. Graf berlian adalah graf terhubung berorde $2n$ yang dikonstruksi dari graf tangga segitiga TL_n berorde $2n-1$ dengan menambahkan satu titik x dan n sisi. Graf berlian dinotasikan dengan Br_n, dengan $n \geq 4$ (Shulhany & Salman, 2015). Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai total ketidakteraturan sisi dan nilai total ketidakteraturan titik pada graf berlian.

METODE PENELITIAN

Rancangan Penelitian

Secara umum penelitian ini merupakan kajian teoritis tentang pelabelan total tidak teratur pada graf. Penelitian ini dilakukan dengan terlebih dahulu mendefinisikan himpunan titik dan himpunan sisi, kemudian mengkontruksi suatu pelabelan total pada graf G yakni dengan melabeli semua sisi dan titik pada graf G dengan angka $1,2,3,\ldots t$, dalam pelabelan tersebut memungkinkan adanya sisi atau titik yang mempunyai label sama. Selanjutnya, menghitung bobot setiap sisi untuk menunjukkan bahwa bobot setiap sisi berbeda. Hal yang sama dilakukan untuk setiap titik untuk menunjukkan bahwa bobot setiap titik berbeda. Selanjutnya, menunjukkan bahwa label t merupakan label terbesar yang digunakan.

Analisis Data

Penentuan nilai total ketidakteraturan sisi dan titik pada graf berlian dilakukan dengan menentukan batas bawah terbesar dan batas atas terkecil. Batas bawah dianalisis berdasarkan sifat-sifat graf dan teorema pendukung lainnya, sedangkan batas atas dianalisis dengan mengkontruksi fungsi pelabelan total tidak teratur pada graf berlian.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil Penelitian

Nilai total ketidakteraturan sisi dan nilai total ketidakteraturan titik pada graf berlian yang diperoleh dari hasil penelitian, dituliskan dalam bentuk teorema.

Teorema 1:

Misalkan Br_n adalah suatu graf berlian dengan $n \geq 4$, maka

$$tes\ (Br_n) = \left\lceil \frac{5n-3}{3} \right\rceil.$$

Ilustrasi nilai total ketidakteraturan sisi pada graf Br_6 dengan $tes\ (Br_6) = 9$, graf Br_7 dengan $tes\ (Br_7) = 11$ dan graf Br_8 dengan $tes\ (Br_8) = 13$.

Teorema 2:

Misalkan Br_n adalah suatu graf berlian dengan $n \geq 4$, maka

$$tvs\ (Br_n) = \begin{cases} 3, & n = 5 \\ \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil, & n\ lainnya \end{cases}$$

Ilustrasi nilai total ketidakteraturan titik pada graf Br_{12} dengan $tvs\ (Br_{12}) = 5$, graf Br_{13} dengan $tvs\ (Br_{13}) = 5$ dan graf Br_{14} dengan $tvs\ (Br_{14}) = 5$.

PEMBAHASAN

Penelitian ini menunjukkan bahwa nilai total ketidakteraturan sisi dan nilai total ketidakteraturan titik pada graf berlian tidak seimbang (sama). Untuk lebih jelasnya, akan ditunjukkan pada pembahasan berikut.

Graf berlian Br_n mempunyai $2n$ titik dan $5n - 5$ sisi. Hal ini ditunjukkan berdasarkan definisi dari himpunan titik dan himpunan sisi dari graf berlian sebagai berikut.

Himpunan titik

$$V(Br_n) = \{x\} \cup \{v_i | i = 1,2, \dots, n\} \cup \{u_i | i = 1,2, \dots, n-1\},$$

dan himpunan sisi

$$E(Br_n) = \{xv_i | i = 1,2, \dots, n\} \cup \{v_i v_{i+1} | i = 1,2, \dots, n-1\} \cup$$

$\{u_i u_{i+1} | i = 1,2, \dots, n-2\} \cup \{u_i v_i | i = 1,2, \dots, n-1\} \cup \{u_i v_{i+1} | i = 1,2, \dots, n-1\}$.

Untuk membuktikan hasil penelitian pada teorema 1, pertama-tama dengan menentukan batas bawah terbesar dari nilai total ketidakteraturan sisi pada graf berlian dengan menggunakan teorema pendukung, yaitu $tes(G) \geq \lceil (|E| + 2)/3 \rceil$, dimana $|E|$ adalah banyaknya sisi di G (Bača *et al.*, 2007), sehingga diperoleh $tes\ (Br_n) \geq \left\lceil \frac{5n-3}{3} \right\rceil$. Selanjutnya, akan ditentukan batas atas terkecil dari nilai total ketidakteraturan sisi pada graf berlian dengan mengkontruksi suatu pelabelan total λ pada graf berlian sebagai berikut.

$$\lambda(x) = 1$$

Untuk $i = 1, 2, \dots, n$ didefinisikan

$$\lambda(v_i) = i$$

Untuk $i = 1, 2, \dots, n-1$ didefinisikan

$$\lambda(u_i) = \begin{cases} \frac{5n-3}{3}, & n \equiv 0\ (mod\ 3) \\ \frac{5n-2}{3}, & n \equiv 1\ (mod\ 3) \\ \frac{5n-1}{3}, & n \equiv 2\ (mod\ 3) \end{cases}$$

Untuk $i = 1, 2, \dots, n-2$ didefinisikan

$$\lambda(u_i u_{i+1}) = \begin{cases} \dfrac{5n}{3} - i, & n \equiv 0\ (mod\ 3) \\ \dfrac{5n-2}{3} - i, & n \equiv 1\ (mod\ 3) \\ \dfrac{5n-4}{3} - i, & n \equiv 2\ (mod\ 3) \end{cases}$$

Untuk $i = 1, 2, \dots, n-1$ didefinisikan

$$\lambda(v_i v_{i+1}) = n + 1 - i$$

Untuk $i = 1, 2, \ldots, n-1$ didefinisikan

$$\lambda(u_i v_i) = \begin{cases} \dfrac{n+6}{3}, & n \equiv 0 \ (mod\ 3) \\ \dfrac{n+5}{3}, & n \equiv 1 \ (mod\ 3) \\ \dfrac{n+4}{3}, & n \equiv 2 \ (mod\ 3) \end{cases}$$

Untuk $i = 1, 2, \ldots, n-1$ didefinisikan

$$\lambda(u_i v_{i+1}) = \begin{cases} \dfrac{4n}{3}, & n \equiv 0 \ (mod\ 3) \\ \dfrac{4n-1}{3}, & n \equiv 1 \ (mod\ 3) \\ \dfrac{4n-2}{3}, & n \equiv 2 \ (mod\ 3) \end{cases}$$

Untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ didefinisikan

$$\lambda(xv_i) = 1$$

Dari kontruksi pelabelan total λ menunjukkan bahwa λ merupakan suatu pemetaan dari $V(Br_n) \cup E(Br_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ dengan $k = \left\lceil \frac{5n-3}{3} \right\rceil$ dan label terbesar yang digunakan adalah $\left\lceil \frac{5n-3}{3} \right\rceil$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa λ merupakan suatu pelabelan total tidak teratur sisi pada Br_n. Berdasarkan definisi λ sebelumnya, diperoleh formula bobot-bobot sisi sebagai berikut.

$$wt(xv_1) = 3 < wt(xv_2) = 4 < \cdots < wt(xv_n) = 2 + n < wt(v_1v_2) = 3 + n <$$
$$wt(v_2v_3) = 4 + n < \cdots < wt(v_{n-1}v_n) = 2n + 1 < wt(u_1v_1) = 2n + 2 <$$
$$wt(u_2v_2) = 2n + 3 < \cdots < wt(u_{n-1}v_{n-1}) = 3n < wt(u_1v_2) = 3n + 1 <$$
$$wt(u_2v_3) = 3n + 2 < \cdots < wt(u_{n-1}v_n) = 4n - 1 < wt(u_{n-2}u_{n-1}) = 4n <$$
$$wt(u_{n-3}u_{n-2}) = 4n + 1 < \cdots < wt(u_1u_2) = 5n - 3.$$

Karena itu, bobot semua sisi pada graf berlian Br_n dengan menggunakan pelabelan λ membentuk urutan bilangan bulat dari 3 sampai dengan $5n - 3$. Ini berarti tidak ada dua sisi yang mempunyai bobot sama. Dengan demikian, λ merupakan suatu pelabelan-k total tidak teratur sisi pada graf berlian Br_n, dimana $k = \left\lceil \frac{5n-3}{3} \right\rceil$.

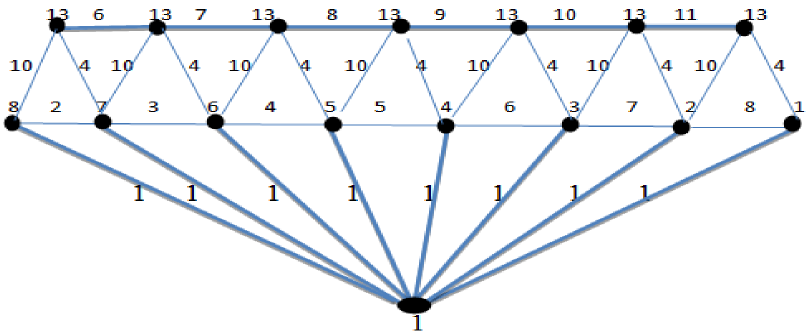
Akibatnya, $tes\ (Br_n) \leq \left\lceil \frac{5n-3}{3} \right\rceil$.

Karena

$tes\ (Br_n) \geq \left\lceil \frac{5n-3}{3} \right\rceil$ dan $tes\ (Br_n) \leq \left\lceil \frac{5n-3}{3} \right\rceil$, maka

$$tes\ (Br_n) = \left\lceil \frac{5n-3}{3} \right\rceil. \qquad \blacksquare$$

Berikut ini contoh dari Pelabelan-13 total tidak teratur sisi pada graf Br_8 dan $tes\ (Br_8) = 13$.



GAMBAR 1. Graf Br_8

Selanjutnya, untuk membuktikan hasil penelitian pada teorema 2, pertama-tama dengan menentukan batas bawah terbesar dari nilai total ketidakteraturan titik pada graf berlian dengan cara memperhatikan derajat titik terkecil dan banyaknya titik yang berderajat sama. Telah diketahui bahwa graf Br_n mempunyai 4 titik berderajat 3, $(n-3)$ titik berderajat 4, $(n-2)$ titik berderajat 5, dan 1 titik berderajat n. Karena derajat terkecil adalah 3, maka bobot terkecil dari titik tidak kurang dari 4. Selanjutnya, titik berderajat 5 mempunyai jumlah terbanyak sehingga bobot terbesar titik berderajat 5 tersebut adalah $2n+2$. Karena bobot terbesar titik berderajat 5 tersebut merupakan penjumlahan dari 6(enam) buah bilangan bulat positif maka label terbesarnya tidak kurang dari $\left\lceil \frac{2n+2}{6} \right\rceil$. Akibatnya, $tvs\ (Br_n) \geq \left\lceil \frac{2n+2}{6} \right\rceil = \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil$.

Selanjutnya, akan ditentukan batas atas terkecil dari nilai total ketidakteraturan titik pada graf berlian dengan mengkontruksi suatu pelabelan total λ pada graf berlian sebagai berikut. Konstruksi suatu pelabelan total λ pada graf berlian Br_n dibagi menjadi 3 (tiga) kasus, salah satunya sebagai berikut.

Untuk $\boldsymbol{n \equiv 2\ (mod\ 3)}$

$$\lambda(x) = 2$$

Untuk titik u_i dengan $i = 1, 2, \dots, n-1$ didefinisikan

$$\lambda(u_i) = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq \dfrac{2n-4}{3} \\ i - \dfrac{2n-4}{3}, & \dfrac{2n-1}{3} \leq i \leq n-2 \\ 2, & i = n-1 \end{cases}$$

Untuk titik v_i dengan $i = 1, 2, \dots, n$ didefinisikan

$$\lambda(v_i) = \begin{cases} 1, & i = 1, n \\ \dfrac{n-2}{3}, & 3 \le i \le \dfrac{n+4}{3} \\ \dfrac{n+1}{3}, & \begin{cases} i = 2 \\ \dfrac{n+7}{3} \le i \le n-1 \end{cases} \end{cases}$$

Untuk sisi $u_i u_{i+1}$ dengan $i = 1, 2, \dots, n-2$ didefinisikan $\lambda(u_i u_{i+1}) = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 2, & i\ lainnya \end{cases}$

Untuk sisi $u_i v_i$ dengan $i = 1, 2, \dots, n-1$ didefinisikan

$$\lambda(u_i v_i) = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 2, & i = 2, n-1 \\ \left\lceil \dfrac{i}{2} \right\rceil, & 3 \le i \le \dfrac{2n-1}{3} \\ \left\lceil \dfrac{n+1}{3} \right\rceil, & \dfrac{2n+2}{3} \le i \le n-2 \end{cases}$$

Untuk sisi $u_i v_{i+1}$ dengan $i = 1, 2, \dots, n-1$ didefinisikan

$$\lambda(u_i v_{i+1}) = \begin{cases} 1, & i = n-1 \\ \left\lceil \dfrac{i}{2} \right\rceil, & 1 \le i \le \dfrac{2n-1}{3}, i \text{ ganjil} \\ \left\lceil \dfrac{i}{2} \right\rceil + 1, & 2 \le i \le \dfrac{2n-4}{3}, i \text{ genap} \\ \left\lceil \dfrac{n+1}{3} \right\rceil, & \dfrac{2n+2}{3} \le i \le n-2 \end{cases}$$

Untuk sisi $v_i v_{i+1}$ dengan $i = 1, 2, \dots, n-1$ didefinisikan

$$\lambda(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ 2, & i = n-1 \\ \left\lceil \dfrac{n+1}{3} \right\rceil, & 2 \le i \le n-2 \end{cases}$$

Untuk sisi $x v_i$ dengan $i = 1, 2, \dots, n$ didefinisikan

$$\lambda(x v_i) = \begin{cases} \left\lceil \dfrac{n+1}{3} \right\rceil, & i = 2, n-1 \\ 2, & \begin{cases} i = n \\ 1 \le i \le \dfrac{2n-7}{3}, i \text{ ganjil} \end{cases} \\ 3, & 4 \le i \le \dfrac{2n-4}{3}, i \text{ genap} \\ i - \dfrac{2n-7}{3}, & \dfrac{2n-1}{3} \le i \le n-2 \end{cases}$$

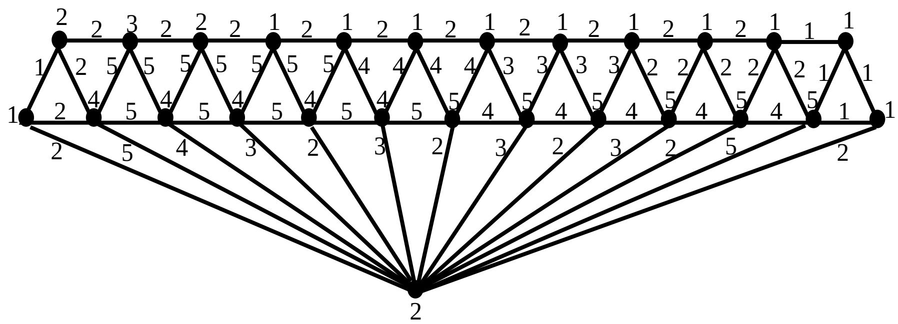
Dari kontruksi pelabelan total λ menunjukkan bahwa λ merupakan suatu pemetaan dari $V(Br_n) \cup E(Br_n) \to \{1, 2, 3, \dots, s\}$ dengan $s = \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil$ dan label terbesar yang digunakan adalah $\left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa λ merupakan suatu pelabelan total tidak teratur titik pada Br_n. Berdasarkan definisi λ sebelumnya, diperoleh formula bobot-bobot sisi untuk $n = 2\ (mod\ 3)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} wt(u_1) = 4 < wt(v_1) = 5 < wt(v_n) = 6 < wt(u_{n-1}) = 7 < wt(u_2) = 8 < wt(u_3) \\ = 9 < \cdots < wt(u_{n-2}) = n + 4 < wt(v_2) = n + 5 < wt(v_3) = n + 6 \\ < \cdots < wt(v_{\frac{n+4}{3}}) = \frac{4n+13}{3} < wt(v_{n-1}) = \frac{4n+16}{3} < wt(v_{\frac{n+7}{3}}) \\ = \frac{4n+19}{3} < wt(v_{\frac{n+10}{3}}) = \frac{4n+22}{3} < \cdots < wt(v_{n-2}) = \frac{6n+6}{3} \\ < wt(x) = \frac{7n+1}{3} + \sum_{i=1}^{\frac{n-5}{3}} (2+i). \end{aligned}$$

Karena itu, bobot semua titik pada graf berlian Br_n dengan menggunakan pelabelan λ membentuk urutan bilangan bulat dari $4, 5, 6, \ldots, 2n + 2$. Ini berarti tidak ada dua titik yang mempunyai bobot sama. Dengan demikian, λ merupakan suatu pelabelan$-s$ total tidak teratur titik pada Br_n, dimana $s = \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil$. Akibatnya, $tvs\ (Br_n) \leq \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil$.

Karena $tvs\ (Br_n) \geq \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil$ dan $tvs\ (Br_n) \leq \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil$, maka $tvs\ (Br_n) = \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil$. ■

Beikut ini contoh dari Pelabelan-5 total tidak teratur titik pada graf Br_{13} dan $tvs\ (Br_{13}) = 5$.



GAMBAR 2. Graf Br_{13}

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang diperoleh dapat disimpulkan bahwa nilai total ketidakteraturan sisi pada graf berlian Br_n untuk $n \geq 4$ adalah $\lceil (5n-3)/3 \rceil$, nilai total ketidakteraturan titik untuk $n = 5$ adalah 3, dan nilai total ketidakteraturan titik untuk $n \neq 5$ adalah $\lceil (n+1)/3 \rceil$.

Saran

Untuk penelitian dengan konsep pelabelan tidak teratur, disarankan kepada peneliti selanjutnya untuk menentukan nilai total ketidakteraturan sisi dan titik pada graf yang merupakan pengembangan dari graf berlian.

DAFTAR PUSTAKA

Bača M., Jendrol S., Miller M., & Ryan J. (2007). On Irregular Total Labeling. *Discrete Mathematics*, 307: 1378-1388.

Chartrand G., Jacobson M. S., Lehel J., Oellermann O. R., Ruiz S., & Saba F. (1988). Irregular Networks. *Congressus Numerantium*, 64: 197-210.

Nurdin. (2010). Nilai Total Ketakteraturan dari Suatu Graf. *Disertasi Program Studi Doktor Matematika ITB*, Bandung.

Nurdin., Baskoro E. T., Salman A. N. M., & Gaos N. N. (2008). The Total Vertex-Irregular Labeling of the Olive and Its Copies, *Prosiding Konferensi Nasional Matematika*, XIV: 245-251.

Nurdin., Salman A. N. M., Baskoro E. T., & Gaos N. N. (2009). On The Total Vertex-Irregular Strength of *t* Copies of a path, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 71: 227-233. .*

Sedlàček J. (1963). Problem 27 in Theory Graphs and Its Applications, *Proceedings of the Symposiu Smolenice*, 163-167.

Shulhany M. A. & Salman A. N. M. (2015). Bilangan Terhubung Pelangi Graf Berlian, *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UMS*, 916-924.

Wallis W. D. (2001). *Magic Graph*. Boston: Birkhäuser.

Wijaya K. & Slamin. (2008). Total Vertex Irregular Labelings of Wheels, Fans, Suns, and Friendship Graphs, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 56: 103-112.

Wijaya K., Slamin., Surahmat., & Jendrolʹ S. (2005). Total Vertex Irregular Labeling of Complete Bipartite Graphs, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 55: 129-136.

Wulandari S. S., Slamin., Setiawani., & Susi. (2014). Nilai Total Ketakteraturan Sisi Dari Graf Tangga (Stair Graph), *Jurnal Pendidikan Matematika FIKP Universitas Jember ©Kadikma*, Vol. 5, No. 2: 79-90.