

Neutrinos de alta energía y el interior de la tierra

Ismael Romero and Oscar A. Sampayo*

*Instituto de Investigaciones Físicas de Mar del Plata (IFIMAR)
CONICET, UNMDP*

*Departamento de Física,
Universidad Nacional de Mar del Plata
Funes 3350, (7600) Mar del Plata, Argentina*

Recibido 20/12/2011; aprobado 30/05/2012

Los estudios sobre la distribución de masa de la tierra están basados en datos sismológicos, la interpretación de los cuales es dependiente de hipótesis acerca del estado de la materia en el interior de la tierra. Por otro lado la dispersión de neutrinos atmosféricos con los nucleones que forman la materia del planeta puede convertirse en una fuente de información alternativa y completamente independiente de hipótesis geofísicas. En este trabajo investigamos el problema con la aplicación de un observable que ha probado ser débilmente dependiente de incertezas en el flujo inicial y de la sistemática experimental. Se utilizan como vínculos la masa de la Tierra y su momento de inercia. El trabajo está basado en la detección de neutrinos a realizarse por telescopios tipo IceCube.

Palabras Claves: Neutrinos, Interacciones, Densidad.

The study on the Earth mass distribution is based on seismological data and their interpretation is dependent from hypothesis about the matter state inside the planet. On the other hand the scattering of atmospheric neutrinos with the Earth nucleons is an alternative and independent source of information on the studied topic. In this work we investigate the use of an observable weakly dependent of the initial flux uncertainties. We use as constraint the Earth mass and the inertia moment. The work is based on the neutrino detection by telescope like IceCube.

Key Word: Neutrino, Interactions, Density.

I. INTRODUCCION

La radiografía por absorción de neutrinos ha sido considerada como una manera alternativa de obtener información sobre el interior de la tierra de una manera independiente de modelos geofísicos¹⁻⁴. El estudio de la dispersión del flujo de neutrinos de origen cósmico o atmosférico que atraviesa la tierra es otra manera posible con la que podría conocerse la distribución de masa del planeta. El flujo de neutrinos atmosféricos es conocido con varias incertezas y para el de origen cósmico solo se tienen modelos y cotas muy restrictivas recientemente obtenidas por IceCube⁵. Con la intención de minimizar el impacto de estas incertezas utilizamos un observable que es débilmente dependiente de las incertezas del flujo inicial. Este fue utilizado en el pasado para acotar posibles efectos de nueva física en la sección eficaz neutrino-nucleón. Aunque la definición y sus principales propiedades ya fueron presentadas en diferentes trabajos⁶⁻¹⁰ recordaremos los principales puntos de la definición y se estudiará la capacidad del observable para determinar los parámetros de una versión simplificada de la densidad de la tierra con tres parámetros libres. Consideraremos como vínculos la masa de la tierra y su momento de inercia, los cuales son conocidos con precisión y medidos de manera independiente.

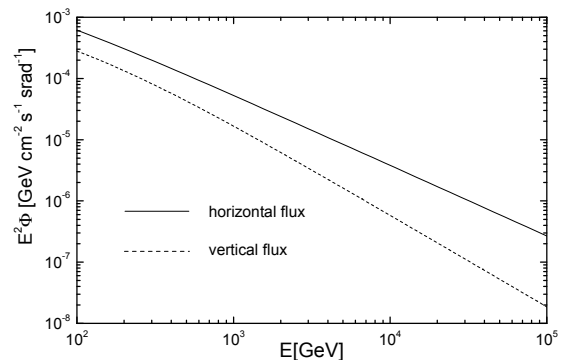


FIG. 1: El flujo atmosférico mostrado para la dirección vertical y horizontal.

El momento de inercia es una propiedad global de la tierra que cualquier modelo de la densidad debe satisfacer y fue utilizado en la década de 1930 por K.E.Bullen en sus estudios de la densidad de la tierra. Su determinación se basa en las medidas del retroceso de los nodos de la órbita de la luna o de satélites artificiales.

Por otro lado la masa de la tierra se obtiene utilizando las medidas, muy precisas, de la gravedad y ha sido determinada en forma independiente.

II. EL OBSERVABLE $\eta(E)$

Un telescopio de neutrinos como IceCube es capaz de probar cuestiones fundamentales sobre las interacciones de neutrinos detectando neutrinos de alta energía que atraviesan la tierra y se dispersan con los nucleones que la forman. De esta manera también puede ser utilizado para obtener información, de una manera independiente, sobre la distribución de masa del planeta detectando el flujo de neutrinos que llegan al detector desde diferentes ángulos. Si suponemos que la interacción de los neutrinos es la predicha por el modelo estándar, todavía tenemos las incertezas en el flujo inicial y para disminuir el impacto de estas hemos definido, en un trabajo previo⁶, el observable ($\alpha(E)$) el que fue usado para acotar la sección eficaz neutrino-nucleón. En este trabajo presentamos nuevamente su definición y principales propiedades y estudiamos la posibilidad de utilizarlo para obtener información sobre la distribución de masa de la Tierra.

Los observables $\alpha(E)$ y $\eta(E)$ (directamente relacionados) trabajan comparando los flujos que llegan al detector desde diferentes direcciones de tal manera que se cancelan los factores en el flujo inicial que son independientes del ángulo. Por definición $\alpha(E)$ es el ángulo que divide la Tierra en dos sectores angulares desde los que llegan la misma cantidad de eventos. Cuando los neutrinos atraviesan el planeta en su viaje al detector encuentran diferentes densidades de materia y entonces diferente número de nucleones para interactuar. Así el número de neutrinos que finalmente es detectado depende de las direcciones, indicadas por el ángulo θ medido con respecto a la dirección del nadir. Si solo consideramos neutrinos viajando hacia arriba, de una dada energía E , es decir, los que llegan con direcciones θ tal que $0 < \theta < \Delta$ (con $\Delta < \pi/2$), siempre existirá un ángulo $\alpha(E)$ tal que el número de eventos para $0 < \theta < \alpha_\Delta(E)$ iguala al de $\alpha_\Delta(E) < \theta < \Delta$. En la definición original se uso $\Delta = \pi/2$ pero como buscamos aumentar la sensibilidad a la interface nucleo-manto dejamos libre el ángulo Δ y lo ajustamos junto con los otros parámetros.

En el modo tradicional de observación se seleccionan los eventos de muon yendo hacia arriba lo cual permite eliminar el fondo de muones atmosféricos que son detenidos por la tierra. Simulaciones realizadas por AMANDA indican que la dirección de los muones puede determinarse con una precisión por debajo del grado y su energía medida mejor que el 30% en el logaritmo de la energía. La gran ventaja de este modo es la resolución angular lo cual es fundamental para la definición del observable. Por otro lado si, como fue discutido en diferentes trabajos^{11,12}, tomamos como volumen de detección el volumen instrumentado, entonces IceCube tendrá suficiente resolución para medir la energía del muon y la de la lluvia hadrónica permitiendo la medida de la energía del neutrino. En lo siguiente tomaremos la incertezas en la energía del ν_μ como $\Delta \log_{10} E = 0.5$.

Para definir $\alpha_\Delta(E)$ consideramos el esperado número de eventos (tracks de muones generados por las interac-

ciones de corrientes cargadas de $\nu_\mu N$) en IceCube, en el intervalo de energía ΔE y en el intervalo angular $\Delta\theta$, que puede estimarse como

$$\mathcal{N} = n_T T \int_{\Delta\theta} \int_{\Delta E} d\Omega dE_\nu \sigma^{CC}(E) \Phi(E, \theta), \quad (1)$$

donde n_T es el número de nucleones (blancos) en el volumen de detección efectivo, T es el tiempo de toma de datos, y $\sigma^{CC}(E)$ es la sección eficaz neutrino-nucleón de corrientes cargadas. Consideramos el volumen de detección como el volumen instrumentado para IceCube, el cual es aproximadamente 1 km^3 y corresponde a $n_T \simeq 6 \times 10^{38}$. El flujo que llega al detector $\Phi(E, \theta)$ en eq.(1) se obtiene de la ecuación:

$$\Phi(E, \theta) = \Phi_0(E, \theta) e^{-\sigma_{eff}(E, \theta) \tau(\theta)} \quad (2)$$

donde $\sigma_{eff}(E, \theta)$ puede encontrarse en diferentes trabajos¹³ y, $\Phi_0(E, \theta)$ es el flujo atmosférico inicial, que tiene una dependencia angular conocida y es dominante para energías $E < 10^5 \text{ GeV}$ donde tenemos un apreciable número de eventos. Las cotas de IceCube para el flujo cósmico isotrópico implican que este es significativamente mas bajo que el atmosférico para las energías consideradas y produce un efecto despreciable sobre los resultados.

Así $\alpha_\Delta(E)$ es esencialmente la igualdad entre dos números de eventos, entonces, a buena aproximación, para cada bin de energía todos los factores anteriores se cancelan excepto el flujo integrado a cada lado. De esta manera $\alpha(E)$ puede definirse por la ecuación

$$\int_0^{\alpha_\Delta(E)} d\theta \sin \theta \Phi_0(E, \theta) e^{-\sigma_{eff}(E, \theta) \tau(\theta)} = \int_{\alpha_\Delta(E)}^\Delta d\theta \sin \theta \Phi_0(E, \theta) e^{-\sigma_{eff}(E, \theta) \tau(\theta)}, \quad (3)$$

la que se resuelve numericamente para obtener $\alpha_\Delta(E)$.

Si no tenemos en cuenta la regeneración por interacciones neutras, que aparecen en σ_{eff} , entonces los factores globales solo dependientes de la energía se cancelan exactamente en eq.(3). Este tipo de factores podrían originarse en la intensidad del flujo primario de rayos cósmicos, el cual inicia el flujo de neutrinos atmosféricos por impacto con los nucleones de la atmósfera. Por otro lado, como ya fue mostrado¹⁴, para flujos con un rápido decrecimiento con la energía, como el flujo atmosférico, la regeneración da un muy pequeño efecto. Al mismo tiempo el observable $\alpha_\Delta(E)$ es fuertemente dependiente de la sección eficaz neutrino nucleon y de la densidad del planeta a través de $\tau(\theta)$:

$$\tau(\theta) = N_A \int_0^{2R \cos \theta} \rho(z) dz \quad (4)$$

donde N_A es el número de Avogadro y $\rho(z)$ es la densidad de la tierra.

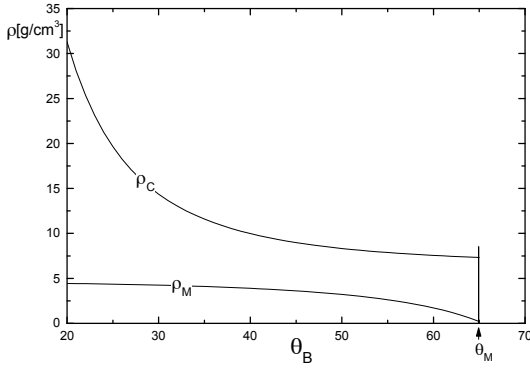


FIG. 2: Las densidades del núcleo y del manto compatibles con las medidas de la masa y el momento de inercia de la tierra como una función del ángulo que subtiende la transición núcleo-manto.

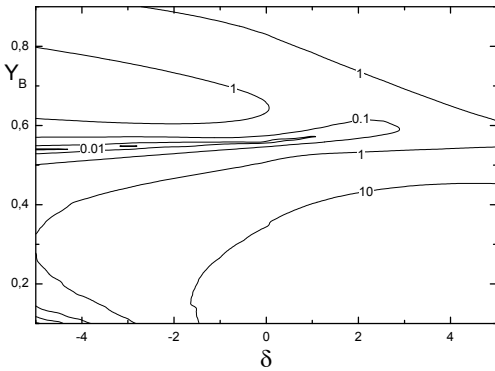


FIG. 3: Curvas de nivel para la función χ^2 en el plano definido por Y_B y δ .

De manera análoga podemos definir el observable $\eta(E)$ el cual comparte las propiedades de $\alpha_\Delta(E)$. Consideramos el sector angular dado por $0 < \theta < \Delta$ dividido en dos regiones por el ángulo $\alpha_\Delta(E)$, \mathcal{R}_1 para $0 < \theta < \alpha_\Delta(E)$ y \mathcal{R}_2 para $\alpha_\Delta(E) < \theta < \Delta$. Calculamos entonces la razón $\eta(E)$ entre el número de eventos para cada región,

$$\eta(E) = \frac{N_1}{N_2}, \quad (5)$$

donde N_1 es el número de eventos en la región \mathcal{R}_1 y N_2 el número de eventos en la región \mathcal{R}_2 .

El observable $\eta(E)$ comparte con $\alpha(E)$ su débil dependencia con factores solo dependientes de la energía. Las incertezas angulares en el flujo inicial son consideradas como incertezas teóricas y sumadas en cuadratura con los errores estadísticos como será explicado después en el texto.

Para simular el flujo de neutrinos llegando al detector consideramos la densidad de la tierra dada por el PREM (Preliminary Reference Earth Model)¹⁵. En estas condiciones si en la definición del observable $\alpha_\Delta(E)$ usamos la densidad dada por el PREM (por medio de $\tau(\theta)$), entonces tenemos que el cociente en el número de eventos

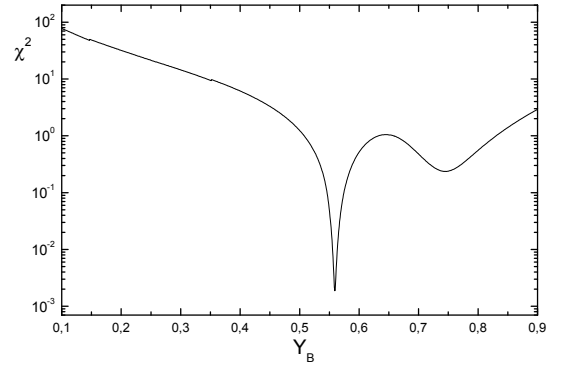


FIG. 4: La función χ^2 como una función del parámetro Y_B para una densidad de dos niveles.

toma el valor uno ($\eta_{PREM}(E) = 1$). Para estimar la capacidad de $\eta(E)$ para estudiar la distribución de masa de la tierra tenemos que considerar los valores $\eta(E)$, junto con sus errores, como si ellos hubieran sido obtenidos de medidas experimentales. Los valores de $\eta(E)$ son dependientes de la densidad elegida y los errores ($\delta\eta$) se obtienen sumando en cuadratura los errores estadísticos y las incertezas teóricas. De acuerdo a la definición (eq.(5)) los errores estadísticos son dados por $\delta\eta_{st}(E_i) = \sqrt{2/N_i}$ para eventos distribuidos de acuerdo a una distribución de Poisson, donde el número de eventos N , como una función de $\alpha_\Delta(E)$, está dado por

$$N = 2\pi n_T T \Delta E \sigma^{CC}(E) \times \int_0^{\alpha_\Delta} d\theta \sin \theta \Phi_0(E, \theta) e^{-\sigma_{eff}(E, \theta) \tau(\theta)}, \quad (6)$$

Se ha considerado el volumen instrumentado tal que, para eventos contenidos, es posible una determinación simultánea de la energía del muon y la energía de la lluvia hadrónica y entonces de la energía del neutrino. Para el tiempo de observación se considero $T = 15$ años que es la vida media esperada del experimento. Además se ha considerado la estadística combinada de dos telescopios de neutrinos trabajando simultáneamente, IceCube y el telescopio de 1KM^3 planeado en el hemisferio norte.

Para evaluar las incertezas teóricas sobre el observable $\eta(E)$ las hemos considerado también sobre $\alpha_\Delta(E)$. Estas vienen de la sección eficaz y del flujo inicial de neutrinos.

Como se explicó arriba, hemos considerado como el flujo inicial el flujo atmosférico, que es dominante a las energías consideradas. El observable $\alpha_\Delta(E)$ es débilmente dependiente de las incertezas isotrópicas y dependientes de la energía, pero es dependiente de las incertezas anisotrópicas en el flujo atmosférico. Estas aparecen por la falta de un preciso conocimiento de las cantidades de entrada, las cuales son el espectro primario y la sección eficaz inclusiva para la producción de piones y kaones por las interacciones hadrónicas en la atmósfera. Si consideramos el espectro primario como isotrópico entonces las correspondientes incertezas no afectan significativamente a $\alpha_\Delta(E)$. Cualquier factor isotrópico y global que incluyamos para modificar el flujo atmosférico inicial no produce grandes efectos sobre $\alpha_\Delta(E)$ debido a

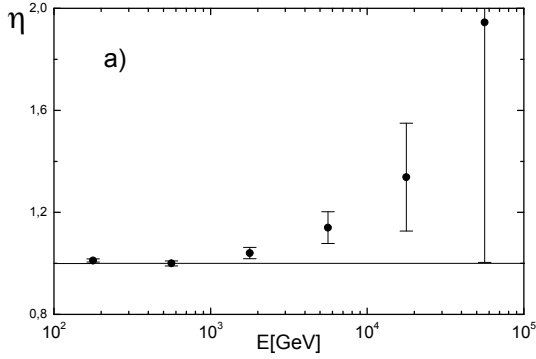


FIG. 5: El observable $\eta(E)$ como una función de la energía. La curva continua representa $\eta_{PREM}(E) = 1$. En el gráfico mostramos el valor *observado* obtenido para $\eta(E)$ para un valor de Y_B que no minimiza χ^2 ($Y_B = 0.32$).

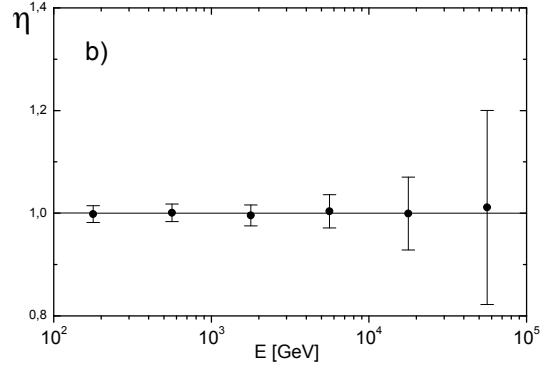


FIG. 6: El observable $\eta(E)$ como una función de la energía. La curva continua representa $\eta_{PREM}(E) = 1$. En el gráfico a) mostramos el valor *observado* obtenido para $\eta(E)$ para un valor de Y_B que minimiza χ^2 ($Y_B = 0.56$).

que está definida comparando el número de eventos desde diferentes direcciones angulares. Entonces la principal fuente de incertezas es la sección eficaz inclusiva para la producción de piones y kaones. Incluimos las incertezas teóricas en la dependencia energía-ángulo en el flujo atmosférico, debido a las incertezas en la razón K/π , como una incerteza angular entre eventos de neutrino horizontales y verticales. Para tomarlas en cuenta y sus efectos sobre $\alpha_\Delta(E)$ multiplicamos el flujo atmosférico inicial por un factor angular imponiendo incertezas opuestas de $\pm 10\%$ al flujo vertical y horizontal respectivamente e interpolando para valores angulares intermedios. De una manera análoga hemos tomado en cuenta las incertezas que vienen de la sección eficaz neutrino-núcleo¹⁶ tal que se maximicen las incertezas sobre $\alpha_\Delta(E)$. Estas se propagaron a $\eta(E)$ y se sumaron en cuadratura con los errores estadísticos ya que los hemos considerados como no-correlacionados.

Para evaluar los errores estadísticos necesitamos conocer el número de eventos esperable, N , para lo cual es necesario considerar un nivel de flujo inicial $\Phi_0(E, \theta)$ que, tal como hemos discutido arriba, fue considerado como el flujo atmosférico¹⁷ y mostrado en Fig.1.

III. LA DENSIDAD DE LA TIERRA

En la década de 1930 K.E.Bullen reconoce que el valor para el momento de inercia de la tierra esta disponible de observaciones de los movimientos de la luna alrededor la tierra. Este puede obtenerse de la observación del lento retroceso de los nodos de la orbita de la luna o en la actualidad de los satélites artificiales. Por otro lado la masa de la tierra se mide de manera independiente por medio de la aceleración de la gravedad. Usando esta información fue capaz de desarrollar el primer modelo realista de la estructura de la tierra con un núcleo denso y un manto menos denso.

Entonces proponemos una densidad muy simple con dos capas y utilizamos como vínculos la masa de la tierra y su momento de inercia.

Los valores utilizados en este trabajo para el radio de

la tierra, su masa y su momento de inercia son¹⁸:

$$\begin{aligned} R &= 6.371 \times 10^8 \text{ cm}, & M &= 6 \times 10^{27} \text{ g}, \\ I &= 8.025 \times 10^{44} \text{ g cm}^2 \end{aligned} \quad (7)$$

Como ya se mencionó consideramos una densidad con dos capas radialmente simétrica y que tiene como parametros libres la densidad del nucleo (ρ_C), la del manto (ρ_M) y el radio de la transición núcleo manto (r_B)

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_C, & \text{for } 0 \leq r \leq r_B \\ \rho_M, & \text{for } r_B \leq r \leq R \end{cases} \quad (8)$$

Como veremos, los valores posibles de ρ_C , ρ_M y r_B están ligados por la masas de la tierra y el momento de inercia (ver Fig.2). Con esta definición para $\rho(r)$ podemos calcular $\tau(x)$ de la eq.(4):

$$\begin{aligned} \tau(x) &= 2N_A R \\ &\times \begin{cases} \rho_C x, & x_\Delta \leq x \leq x_B \\ \rho_C x + (\rho_C - \rho_M) \sqrt{x^2 - x_B^2}, & x_B \leq x \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

donde $x = \cos \theta$ y $x_B = \cos \theta_B = \sqrt{1 - Y_B^2}$ con $Y_B = \sin \theta_B = r_B/R$. Por otro lado, con la densidad de prueba propuesta tenemos una predicción para la masa y para el momento de inercia

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 [(\rho_C - \rho_M) Y_B^3 + \rho_M] \quad (10)$$

$$I = \frac{8}{15} \pi R^5 [(\rho_C - \rho_M) Y_B^5 + \rho_M] \quad (11)$$

donde la variable Y_B , la densidad del nucleo (ρ_C) y la densidad del manto (ρ_M), junto con el ángulo de abertura, son los parámetros que serán usados en este trabajo. Podemos derivar una expresión para ρ_C y ρ_M como función de la masa de la tierra, el momento de inercia y el radio de la transición núcleo-manto, o el parámetro relacionado Y_B . Invirtiendo las ecuaciones anteriores tenemos

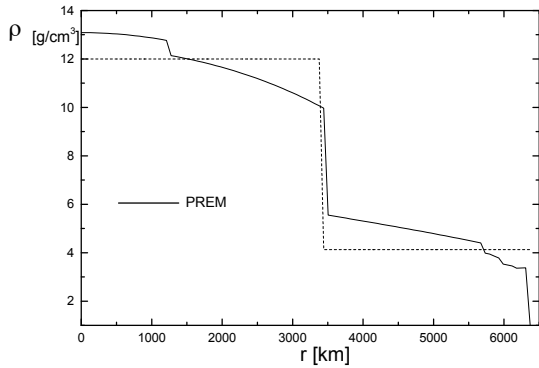


FIG. 7: La densidad propuesta de dos niveles con los parámetros ajustados, superpuesta a la densidad de la tierra dada por el PREM.

$$\begin{aligned}\rho_C &= \bar{\rho} \frac{1 - Y_B^5 - \tilde{I}(1 - Y_B^3)}{Y_B^3(1 - Y_B^2)} \\ \rho_M &= \bar{\rho} \frac{(\tilde{I} - Y_B^2)}{(1 - Y_B^2)}\end{aligned}\quad (12)$$

con $\bar{\rho} = \frac{M}{4/3\pi R^3}$ y $\tilde{I} = I/I_E$ donde I es el momento de inercia de la tierra y $I_E = \frac{2}{5}MR^2$ es el momento de inercia de una esfera uniforme de masa M y radio R . Las curvas correspondientes están dibujadas en Fig.2. Podemos ver que la densidad de prueba de dos capas, compatible con los valores observacionales de la masa y el momento de inercia es válida para $\theta_B \leq \theta_M = \arcsin(\sqrt{\tilde{I}})$ tal que $Y_B^2 \leq \tilde{I}$.

Entonces, podemos usar los datos sobre el flujo de neutrinos llegando al detector para ajustar los parámetros libres los cuales son la densidad del núcleo ρ_C , la densidad del manto ρ_M , el parámetro Y_B y el ángulo de apertura Δ . Por conveniencia ajustamos δ definido como: $\Delta = Y_B + \delta$.

Para realizar el ajuste proponemos la función χ^2 de la manera habitual

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(\eta_{PREM}(E_i) - \eta(E_i, Y_B))^2}{(\delta\eta(E_i))^2}. \quad (13)$$

En $\eta(E_i, Y_B)$ fueron implementados los vínculos para la masa y el momento de inercia a través de la densidad del núcleo y el manto de acuerdo a eq.(12) y en la suma solo consideramos bins de energía para los cuales $N_1, N_2 \geq 5$ (ver definición de N_1 y N_2 en el párrafo arriba de eq.(5)). Los neutrinos se propagan a través de la tierra, tomando su densidad como la dada por el PREM. Estos neutrinos simulan el flujo de neutrinos reales. La hipótesis que hacemos sobre la densidad de la tierra modifica la relación funcional para el ángulo $\alpha_\Delta(E)$. Este es calculado usando la eq.(3) pero con $\tau(\theta)$ (eq.(4)) calculado para la densidad de prueba. Obviamente, si calculamos α_Δ con la densidad dada por el PREM entonces tendríamos $\eta_{PREM}(E) = 1$.

De acuerdo con el procedimiento discutido, $\eta(E)$ y entonces χ^2 , son funciones de Y_B y el ángulo δ . En la Fig.3 mostramos algunas curvas de nivel para estas dos variables. Vemos que para $\delta = 0$ se encuentra la combinación de un profundo mínimo con la curva de nivel 1 (1σ) que restringe apreciablemente el espacio de parámetros. En la figura 4 mostramos χ^2 como función de Y_B para $\delta = 0$ y podemos ver la existencia de un mínimo local profundo para $Y_B \simeq 0.56$. Usando este valor para el parámetro Y_B en la densidad propuesta tenemos una predicción para la densidad de la tierra que compara muy bien con la densidad del PREM (Fig.7).

Con la idea de saber cómo debería verse el observable $\eta(E)$, en las Fig.5 y Fig.6 comparamos la predicción para $\eta(E)$ obtenida con el PREM ($\eta_{PREM}(E) = 1$, línea sólida) con esta para dos diferentes valores del parámetro Y_B . En la Fig.6 usamos el valor de Y_B que minimiza χ^2 y en la Fig.5 usamos un valor diferente ($Y_B = 0.32$). En ambos casos consideramos los errores obtenidos como se ha explicado antes en el texto. Podemos apreciar un apartamiento significativo del valor para el PREM cuando elegimos el valor incorrecto (que no minimiza χ^2) para el parámetro.

En la figura Fig.7 mostramos la densidad dada por el PREM y la densidad de prueba ajustada que proponemos. Podemos apreciar que ambas comparan muy bien y entonces, usando el valor ajustado del parámetro tenemos una predicción para las cantidades que definen la densidad.

$$\begin{aligned}\rho_C &= 12 \pm 1.5 \text{ g/cm}^3, \quad \rho_M = 4.1 \pm 0.1 \text{ g/cm}^3, \\ r_B &= 3440 \pm 290 \text{ km}\end{aligned}\quad (14)$$

Es importante recordar que aunque la sensibilidad es débil, el método que hemos descrito aquí representa una aproximación independiente, diferente del trabajo de otros autores² y complementario a las técnicas geofísicas. Nos gustaría remarcar que la diferencia más importante con otros trabajos es el análisis de los datos, donde usamos como vínculo no sólo la masa de la tierra sino, además, su momento de inercia y, finalmente, el uso de un observable débilmente dependiente de incertezas isotrópicas en el sentido explicado antes en el texto.

IV. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos examinado nuevamente la posibilidad de extraer la densidad de la tierra usando el flujo de neutrino atmosférico que después de atravesar la tierra y dispersarse con los nucleones que la forman llegan a un telescopio de neutrinos como IceCube.

Con la intención de disminuir el impacto de las incertezas en el flujo inicial hemos utilizado un observable que trabaja comparando el flujo que llega al detector desde diferentes direcciones.

Aplicamos el observable para ajustar una densidad de prueba muy simple, con dos capas. Se utiliza como

vínculo la masa de la tierra y el momento de inercia y se ajusta el radio de transición núcleo-manto. El uso de los vínculos mencionados y del observable utilizado hacen nuestro trabajo diferente a otros publicados².

Se encontró que utilizando este tipo de observable es posible obtener información independiente sobre la distribución de masa de la tierra.

AGRADECIMIENTO

Agradecemos la financiación de CONICET:PIP-11220080100587 y de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Subsidio EXA524/10 (15/E472).

* Electronic address: sampayo@mdp.edu.ar

¹ P.Jain et al., *Astropart. Phys.* **12** (1999) 193.

² E.Boriello et al., *Nucl.Phys.(Proc. Suppl.)* **190** (2009) 150-155.

³ M.C.Gonzalez-Garcia, F.Halzen, M.Maltoni and H.K.M. Tanaka, *Phys. Rev. Lett.* **100**, (2008) 061802.

⁴ M.M.Reynoso and O.A.Sampayo, *Astropart. Phys.* **21** (2004) 315.

⁵ IceCube and searches for Astrophysical sources. T.Montaruli for the IceCube Collaboration. [arXiv:1012.0881](https://arxiv.org/abs/1012.0881)

⁶ M. M. Reynoso and O. A. Sampayo, *Phys.Rev.D***76** (2007) 033003.

⁷ M. M. Reynoso and O. A. Sampayo, *Acta Phys.Polon.***B39**,(2008), 599-608.

⁸ I.Romero and O.A.Sampayo, *JHEP***0905**,(2009) 111.

⁹ I.Romero and O.A.Sampayo, *Mod.Phys.Lett.A***24**,(2009), 523-529.

¹⁰ I.Romero and O.A.Sampayo, *Eur. Phys. J.* **C69**, (2010),

235-240. ([doi:10.1140/epjc/s10052-010-1397-0](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-010-1397-0))

¹¹ L.A.Anchordoqui, C.A.Garcia Canal, H.Goldberg, D.Gomez Dumm and F.Halzen, *Phys. Rev. D***74** (2006) 125021.

¹² L.Anchordoqui, M.Glenz and L.Parker, *Phys.Rev.D***75** (2007) 024011.

¹³ P. Jain, S. Kar, D. W. McKay, S. Panda, J. P. Ralston, *Phys. ReV. D* **66** (2002) 065018.

¹⁴ J.Kwiecincki, Alan D. Martin and A.M. Stasto, *Phys. Rev. D***59** (1999), 093002.

¹⁵ A. M. Dziewonski and D. L. Anderson, *Phys. Earth Planet Inter.* **25** (1981) 297.

¹⁶ A.Cooper-Sarkar and S.Sarkar, *JHEP*0801 (2008) 075.

¹⁷ V.Agrawal, T.K.Gaisser, P.Lipari and T.Stanev, *Physical Review D* **53** (1996) 1314.

¹⁸ B. Romanowicz, K. Lambeck, *Physics of the Earth and Planetary Interiors***15**, P1-P4.