

Resonanzanalyse und Resonanzidentifikation mittels Eigenmoden

M.Sc. Jan Benz, Robert Bosch GmbH, Deutschland
Dr. Jan Hansen, Robert Bosch GmbH, Deutschland
Prof. Dr.-Ing. Stephan Frei, TU Dortmund, Deutschland

1 Motivation

Für die Störaussendung und Störfestigkeit eines elektronischen Systems ist oftmals dessen Resonanzverhalten ausschlaggebend [1]. Es ist bekannt, dass sich Eigenmoden zum Auffinden von Resonanzkreisen eignen [2], [3]. In komplexen Elektroniken (die durch Netzwerke mit zahlreichen funktionalen und parasitären Schaltungselementen beschrieben werden können) ist es jedoch meist sehr aufwändig, den Anteil der verschiedenen Elemente an einer Resonanz zu bestimmen. Die vorgestellte Methodik zeigt, dass sich über eine modale Energie- und Leistungsberechnung der Beitrag dieser Elemente zu Resonanzen und den zugehörigen Gütefaktoren direkt berechnen lässt. In Kombination mit der Stromverteilung der Eigenmoden kann zwischen Elementen unterschieden werden, welche nur den Strom der Resonanz übertragen, und solchen, die ursächlich für die Resonanz sind, bzw. diese bedämpfen. Wird die Energie/Leistung anteilig bzgl. der Gesamtenergie/-leistung angegeben, lässt sich der Einfluss jedes Elements auf die Resonanzfrequenz und den Gütefaktor angeben. Die wesentlich an einer Resonanz beteiligten Elemente lassen sich direkt identifizieren und ermöglichen ein besseres Verständnis und das Entwickeln von Maßnahmen gegen diese Resonanz.

Zunächst wird in Kapitel 2 die Theorie zur Eigenwertzerlegung von elektrischen Netzwerken vorgestellt und begründet, dass das Resonanzverhalten für in der EMV relevante Resonanzen oft durch lediglich eine Eigenmode approximiert werden kann. Darauf aufbauend wird eine modale Energie- und Leistungsberechnung zur Quantifizierung des Beitrags jedes Elements an der Resonanz bzw. deren Gütefaktor in elektrischen Netzwerken hergeleitet. Anschließend wird die Methode an einfachen Schaltungen ausgeführt und deren Nutzen zur Resonanzidentifikation und Analyse demonstriert. Kapitel 4 zeigt abschließend die Anwendung zur Analyse und Optimierung der EMV in komplexen elektronischen Systemen und die Möglichkeit CAD Modelle in diese Methodik einzubinden.

2 Methodik

Ein passives, lineares elektrisches Netzwerk bestehend aus Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten kann oft durch eine Zustandsraumdarstellung der Form

$$\begin{aligned} s\mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (1)$$

beschrieben werden. Die bekannte Darstellung für die erweiterte Knotenpotentialanalyse [4]

$$\left[\begin{array}{c} s \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{L} \end{pmatrix}}_{\mathbf{W}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{G}} & \mathbf{A}_L \\ \mathbf{A}_L^T & -\mathbf{R} \end{pmatrix}}_{\mathbf{V}} \left[\begin{array}{c} \mathbf{V} \\ \mathbf{I} \end{array} \right]_x = \left[\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{I}}_s \\ \mathbf{0} \end{array} \right]_u \quad (2)$$

kann bei einer invertierbaren Matrix \mathbf{W} in die Zustandsraumdarstellung umgeformt werden. Die Systemmatrix \mathbf{A} und die Eingangsmatrix \mathbf{B} werden folgendermaßen berechnet:

$$\mathbf{B} = \mathbf{W}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{L}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = -\mathbf{W}^{-1}\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -\tilde{\mathbf{C}}^{-1}\tilde{\mathbf{G}} & -\tilde{\mathbf{C}}^{-1}\mathbf{A}_L \\ \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}_L^T & -\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Die Knotenleitfähigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{G}}$ enthält alle Widerstände, die parallel zu Induktivitäten oder Kapazitäten in der Schaltung auftreten, sämtliche Kapazitäten sind in der Knotenkapazitätsmatrix

$\tilde{\mathbf{C}}$ repräsentiert. Die seriellen Widerstände und Induktivitäten sind in den Kantenmatrizen \mathbf{R} und \mathbf{L} sowie der reduzierten Inzidenzmatrix \mathbf{A}_L abgebildet. Der Vektor $\tilde{\mathbf{I}}_s$ repräsentiert die Stromquellen. Der Zustandsvektor \mathbf{x} besteht aus den Knotenspannungen \mathbf{V} und den Strömen durch die Induktivitäten und Serienwiderständen \mathbf{I} . Es wird hier angenommen, dass alle Spannungsquellen in äquivalente Stromquellen transformiert werden können. Deshalb besteht der Anregungsvektor \mathbf{u} nur aus den Stromquellen $\tilde{\mathbf{I}}_s$ an den Knoten.

Mithilfe der Diagonalisierung der quadratischen, nicht singulären Systemmatrix

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^{-1} \quad (4)$$

mit der diagonalen Eigenwertmatrix $\mathbf{\Lambda}$ und der Eigenvektormatrix \mathbf{E} können die Zustandsgrößen \mathbf{x} aus (1) zu jedem Wert von s mittels

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{E}(s\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (5)$$

bestimmt werden [5]. Dies wird modale Darstellung genannt. Der Vektor $\mathbf{x}(s)$ kann mit $\mathbf{Y} = \mathbf{E}^{-1}$ und $\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{b}$ nun als Linearkombination

$$\mathbf{x}(s) = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{y}_i^T \mathbf{b}}{s - \lambda_i} \mathbf{e}_i \quad (6)$$

über alle Eigenmoden dargestellt werden. Die komplexen Eigenwerte

$$\lambda_i = -\zeta_i \omega_{0,i} \pm j \omega_{0,i} \sqrt{1 - \zeta_i^2} \quad (7)$$

setzen sich aus dem Dämpfungsfaktor ζ_i und der natürlichen Resonanzfrequenz $\omega_{0,i}$ zusammen [6]. Dabei steht N für die Anzahl an Eigenvektoren in \mathbf{E} bzw. Eigenwerten in $\mathbf{\Lambda}$. Die Eigenvektoren $\mathbf{e}_i \in \mathbf{E}$ enthalten hier die modalen Knotenspannungen \mathbf{V} und die modalen Ströme durch die Induktivitäten und Serienwiderständen \mathbf{I} .

Die für die EMV relevanten Resonanzfrequenzen und zugehörigen Gütefaktoren sind meistens durch lediglich eine Eigenmode bestimmt [7]. Das Verhalten des Systems in der Nähe einer Resonanz mit genügend hohem Gütefaktor kann durch die zur Resonanz assoziierten Eigenmode und einer Konstante c approximiert werden zu

$$\mathbf{x}(\omega) = \sum_{\ell=1}^N \frac{\mathbf{y}_\ell^T \mathbf{b}}{j\omega - \lambda_\ell} \mathbf{e}_\ell \approx c + \frac{\mathbf{y}_i^T \mathbf{b}}{j\omega - \lambda_i} \mathbf{e}_i \quad \forall \omega \text{ in der Nähe der } i\text{-ten Resonanz.} \quad (8)$$

Das Maximum der Amplitude der i -ten komplexen Mode liegt bei

$$\omega_i = \omega_{0,i} \sqrt{1 - \zeta_i^2}. \quad (9)$$

Zur Quantifizierung der resonanzdämpfenden Bauteile wird der Zusammenhang zwischen Gütefaktor/Dämpfungsfaktor und Verlustleistung der Serien- und Parallelwiderstände aufgrund der Zustandsgrößen des zur ausgewählten Eigenmode gehörenden Eigenvektors betrachtet. Unter Berücksichtigung von Symmetrien der Matrizen [8] und dem Ansatz $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren ergibt sich folgender Zusammenhang für den Gütefaktor Q_i

$$Q_i = \frac{1}{2\zeta_i} = \omega_{0,i} \frac{\mathbf{V}_i^T \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{V}}_i}{\mathbf{V}_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{V}}_i + \mathbf{I}_i^T \mathbf{R} \mathbf{I}_i}. \quad (10)$$

Die gespeicherte modale Energie $\mathbf{V}_i^T \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{V}}_i = \mathbf{I}_i^T \mathbf{L} \mathbf{I}_i$ und die modalen Verluste $P_V = P_G + P_R = \mathbf{V}_i^T \tilde{\mathbf{G}} \tilde{\mathbf{V}}_i + \mathbf{I}_i^T \mathbf{R} \mathbf{I}_i$ der i -ten Eigenmode, setzen sich aus den gespeicherten Energien der einzelnen Kapazitäten und den Verlustleistungen der einzelnen Widerstände gemäß

$$P_V = \sum_{j=1}^{n_G} P_{G_j} + \sum_{j=1}^{n_R} P_{R_j} = \sum_{j=1}^{n_R} R_j |I_{R_j}|^2 + \sum_{j=1}^{n_G} G_j |V_{G_j}|^2 \quad (11)$$

zusammen. Die Größen n_G und n_R geben die Anzahl der Parallel- und Serienwiderstände an, mit den Spannungen $V_{G_j} \in \mathbf{V}$ und den Strömen $I_{R_j} \in \mathbf{I}$.

Die Gleichung (10) stellt eine auf Eigenvektoren basierende Gleichung der Resonanzgüte der Eigenmode dar. Die Ströme und Spannungen bestimmen sich direkt aus den Eigenvektoren. Um die Verlustleistungen P_{G_j} , P_{R_j} der Parallel- und Serienwiderstände vergleichbar zu machen, werden diese bzgl. der modalen Verlustleistungen P_V der Eigenmode normiert

$$p_{G_j} = \frac{P_{G_j}}{P_V} \text{ bzw. } p_{R_j} = \frac{P_{R_j}}{P_V}. \quad (12)$$

Somit kann der Beitrag jedes Bauteils zur Gesamtdämpfung der Resonanz prozentual angegeben werden. Damit lässt sich der Einfluss aller resistiven Bauteile auf die Dämpfung quantifizieren und die für die Resonanzgüte relevanten Bauteile bestimmen.

Im Weiteren soll nun eine Beziehung zwischen der Modenresonanzfrequenz in (9) und den induktiven sowie kapazitiven Bauteilen der Netzwerkschaltung hergestellt werden. Als Grundlage dient die Energiebetrachtung der induktiven sowie kapazitiven Bauteile aufgrund der Zustandsgrößen der zur Eigenmode gehörenden Eigenvektoren. Zunächst lässt sich zeigen, dass

$$\mathbf{V}_i^T \tilde{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{V}}_i = \mathbf{I}_i^T \tilde{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{I}}_i \quad (13)$$

gilt. Für jede Mode ist somit die maximal gespeicherte Energie in den Kapazitäten W_C gleich der maximal gespeicherten Energie in den Induktivitäten W_L . Für die Gesamtenergie W_C der Kapazitäten gilt

$$W_C = \frac{1}{2} \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{V}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_c} C_j |V_{C_j}|^2, \quad (14)$$

sowie für die Gesamtenergie W_L der Induktivitäten

$$W_L = \frac{1}{2} \mathbf{I}^T \tilde{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{I}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_L} L_j |I_{L_j}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_L} \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^{n_L} M_{jk} I_{L_j} I_{L_k} \quad (15)$$

mit den Gegeninduktivitäten M_{jk} .

Die Größen n_L und n_C geben die Anzahl der Kapazitäten und Induktivitäten an, mit den Kapazitätsspannungen $V_{C_j} \in \mathbf{V}$ und den Induktivitätsströmen $I_{L_j} \in \mathbf{I}$.

Zudem ergibt sich unter Berücksichtigung von (10), (13) und $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ für die Eigenmode folgender Zusammenhang für die Resonanzfrequenz

$$\omega_i = \omega_{0,i} \sqrt{1 - \zeta_i^2} = \frac{j 2 \text{Im}(\bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{A}_L \mathbf{I})}{W_C + W_L}. \quad (16)$$

Die Resonanzfrequenz in (9) ist somit umgekehrt proportional zur in den Induktivitäten und Kapazitäten gespeicherten Energie in der i -ten Mode. Die Energie jeder Kapazität W_{C_j} in W_C kann gemäß

$$W_{C_j} = \frac{1}{2} C_j |V_{C_j}|^2 \quad (17)$$

direkt aus den Eigenvektoren bestimmt werden. Um die maximal gespeicherten Energien der Bauteile vergleichbar zu machen, werden diese bzgl. der Gesamtenergie normiert durch

$$w_{C_j} = \frac{W_{C_j}}{W_C + W_L} \quad (18)$$

Für die Berechnung der Energie jeder Induktivität W_{L_j} werden die Energien der Gegeninduktivitäten geeignet auf die beteiligten Eigeninduktivitäten verteilt. Anschließend werden auch diese bzgl. der Gesamtenergie normiert nach

$$w_{L_j} = \frac{W_{L_j}}{W_C + W_L}. \quad (19)$$

Somit kann der relative Beitrag jedes Bauteils zur Resonanzfrequenz der gewählten Eigenmode und damit zur Resonanzfrequenz der Systemgröße prozentual bewertet werden.

2.1 Stromkreis der Resonanz

Zwar ist es durch die modale Energie- und Leistungsbetrachtung nun möglich, den Einfluss jedes Elements auf die Resonanzfrequenz und den Gütefaktor zu quantifizieren, jedoch ist damit nicht klar, welcher Resonanzkreis sich ausbildet. So können beispielweise manche Elemente nur den Strom der Resonanz tragen und selbst nicht maßgeblich zur Resonanz beitragen. Besonders in komplexen Systemen reicht die vorangegangene Betrachtung nicht aus, um die Stromschleifen zu identifizieren und damit die Resonanz vollständig zu beschreiben.

Bei einem elektrischen Schwingkreis erfolgt ein Ladungsaustausch durch Ströme. Der Ladungsaustausch wird somit über die Ströme entlang der Bauteile beschrieben. Der Resonanzkreis kann somit identifiziert werden, indem die Kanten der Netzwerkschaltung mit den betragsmäßig größten Strömen berücksichtigt werden. Die Ströme der Induktivitäten bzw. Serienwiderstände sind dabei bereits in den Eigenvektoren enthalten. Die fehlenden Ströme der Kapazitäten und Parallelwiderstände können aus den Knotenpotentialen sowie der Kapazitäts- bzw. Widerstandsmatrix errechnet werden.

3 Anwendungsbeispiel: Spannungsregler

Zunächst soll das in Bild 1 dargestellte Netzwerk eines auf einer Platine bestückten Spannungsreglers untersucht werden. Dabei soll das Resonanzverhalten des Reglers inkl. Platine bei einer externen Anregung (bspw. bei einem Störfestigkeitstest) untersucht werden. Hierfür wird angenommen, dass sich das Resonanzverhalten des Systems im Frequenzbereich von 1-1000 MHz ausschließlich durch lineare Bauteile beschreiben lässt.

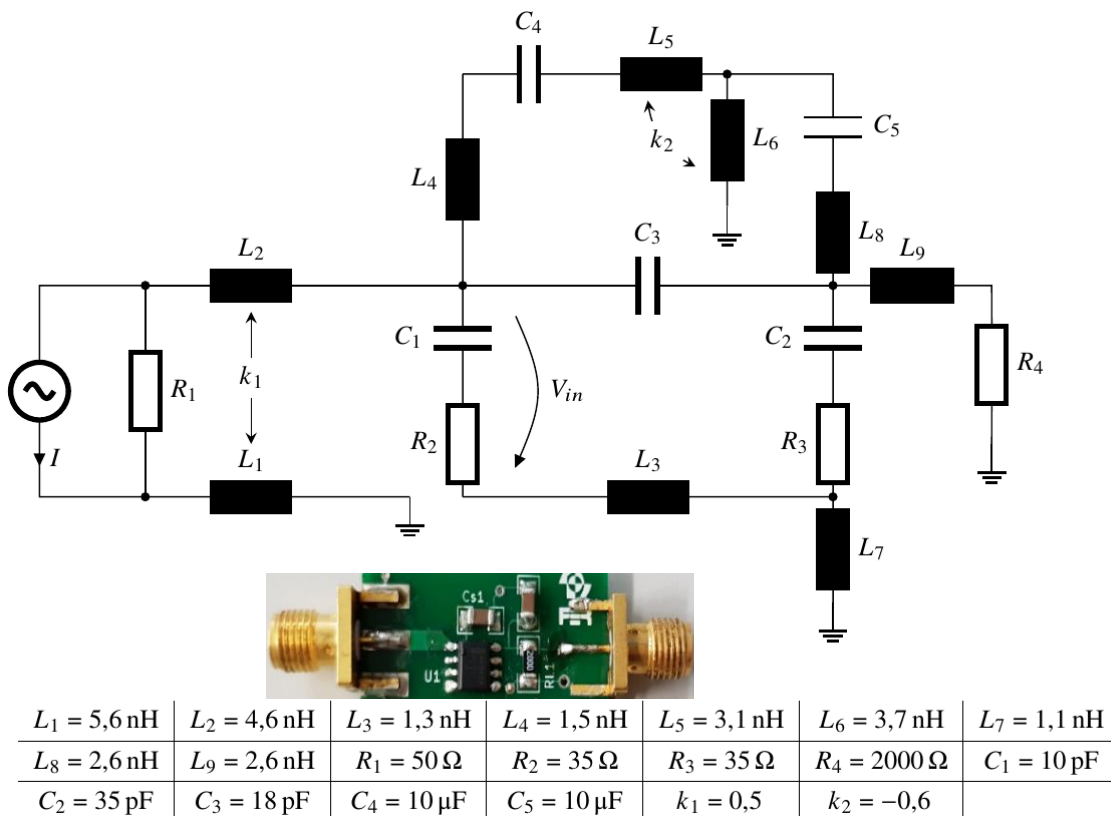


Bild 1: Netzwerkschaltung der untersuchten Leiterplatte inkl. Bestückung

Die Schaltung wurde aus Mess- und Simulationsdaten der dargestellten Platine abgeleitet und mit CAD Simulationen validiert. Die Elemente C_1 , C_2 , und C_3 sowie R_2 und R_3 sind messtechnisch ermittelte passive Elemente des auf der Platine verbauten Spannungsreglers. Die Kapazitäten C_4

und C_5 sowie der Widerstand R_4 sind extern bestückte Elemente. R_1 gibt den Innenwiderstand der externen Quelle I an. Um CAD-Modelle in dieser Methodik mit betrachten zu können, kann eine Parasitenextraktionsmethode (z.B. [9] oder [10]) verwendet werden. Mit deren Hilfe lassen sich die in CAD abgebildeten Komponenten durch parasitäre Widerstände, Kapazitäten und Induktivitäten abbilden. Die parasitären Induktivitäten $L_1 - L_9$ sowie Koppelfaktoren k_1 und k_2 wurden mit der Methode nach [10] bestimmt. Das Modell wurde anhand von Messungen validiert. Bild 2 zeigt in blau den Amplitudengang der differentiellen Spannung V_{in} am Eingang des Reglers zwischen 1 MHz und 1 GHz mit einer Resonanz bei ~ 400 MHz. Diese Resonanz soll im Folgenden mit der beschriebenen modalen Methodik analysiert werden.

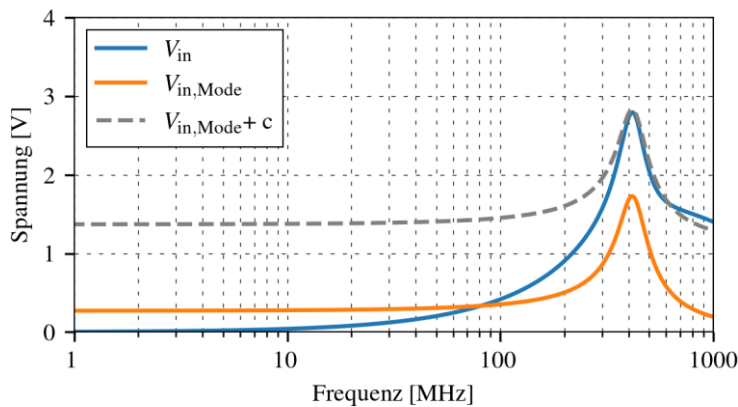
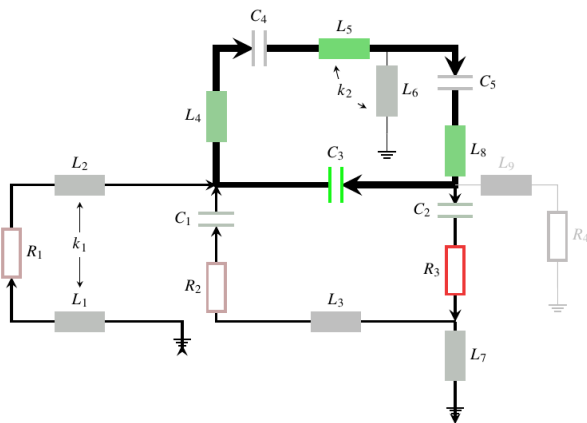


Bild 2: Amplitudengang der Eingangsspannung V_{in} , der Eingangsspannung aufgrund der ausgewählten Mode $V_{in,Mode}$ mit und ohne Offset c .

Das System wird zunächst nach (6) in seine 23 Eigenmoden zerlegt. Nach (8) kann an jeder Resonanz das Verhalten durch lediglich eine Mode approximiert werden, das ist exemplarisch in Bild 2 dargestellt. Für die betrachtete Resonanz ist die Mode mit der natürlichen Resonanzfrequenz von $\omega_{0,Mode} = 421$ MHz und dem Dämpfungsfaktor von $\zeta_i = 0,16$ dominierend. In orange ist V_{in} allein aufgrund dieser Mode dargestellt. Es ist erkennbar, dass die Resonanz bei ~ 400 MHz der

differentiellen Spannung der Resonanz der Mode folgt und im Bereich der Resonanzfrequenz sich nur durch einen Offset unterscheidet. Visualisiert ist der Offset durch die Spannung $V_{in,Mode} + c$. Anschließend wird nur über den Eigenwert und Eigenvektor dieser Moden die beschriebene modale Energie- und Leistungsbetrachtung der einzelnen Bauteile durchgeführt.



L	w_{L_j}	C	w_{C_j}	R	p_{R_j}/p_{G_j}
L ₁	0,4 %	C ₁	2,5 %	R ₁	13,6 %
L ₂	0,3 %	C ₂	3,6 %	R ₂	13,8 %
L ₃	0,2 %	C ₃	44,0 %	R ₃	71,4 %
L ₄	11,0 %	C ₄	<0,1 %	R ₄	1,2 %
L ₅	19,9 %	C ₅	<0,1 %		
L ₆	0,9 %				
L ₇	0,8 %				
L ₈	16,6 %				
L ₉	<0,1 %				

a) Visualisierung der modalen Resonanzanalyse b) Ergebnisse der modalen Resonanzanalyse
Bild 3: Ergebnis der modalen Resonanzanalyse der Resonanz bei ~ 400 MHz

Die Ergebnisse dieser modalen Energie- und Leistungsbetrachtung sind in der Tabelle in Bild 3b) aufgeführt.

In Kombination mit den Strömen sind die Ergebnisse in Bild 3a) visualisiert. Je stärker die grüne Farbsättigung der reaktiven Elemente, desto stärker sind diese Kapazitäten und Induktivitäten an der Resonanz beteiligt. Je stärker die rote Farbsättigung der resistiven Elemente desto stärker dämpfen diese Widerstände die Resonanz. Der Resonanzkreis ist dabei über die Dicke der

Verbindungslinien dargestellt. Somit lässt sich die Resonanz wie folgt beschreiben: Ursache der Resonanz sind die Induktivitäten L_5 , L_8 und L_4 zusammen mit der Kapazität C_3 . Trotz kleiner Ströme ist die Dämpfung der Resonanz maßgeblich durch den Widerstand R_3 bestimmt. Der Resonanzkreis bildet sich dabei über die zwei externen Bauteile C_4 und C_5 aus, die selbst jedoch keinen Einfluss auf Resonanzfrequenz und Gütefaktor haben.

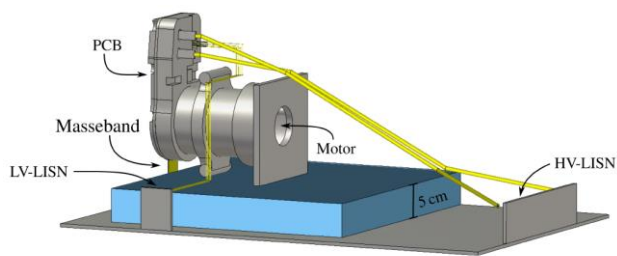
4 Anwendungsbeispiel: Elektrischer Kompressor

Element	Wert	Anteil
C_{GND}	1 nF	49,3 %
L_{GND1}	16,7 nH	14 %
L_{GND2}	1,2 nH	10 %
L_{GND3}	3,5 nH	4,5 %
L_{GND4}	10,4 nH	2,8 %
L_{GND5}	6,4 nH	2,7 %
L_{GND6}	2 nH	2,5 %

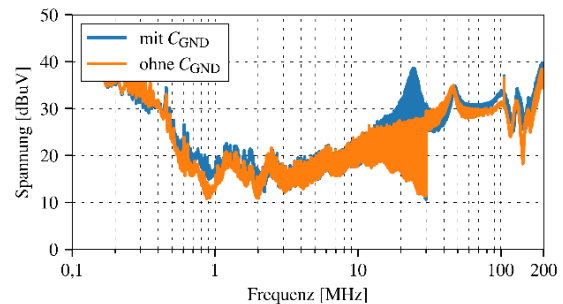
Tabelle 1: Energieverteilung bei 27 MHz

Exemplarisch werden die Resonanzen der leitungsgeführten Emission nun am Beispiel eines elektrischen Kfz-Klimakompressors untersucht. In Bild 4(b) ist die gemessene leitungsgeführte Emission in blau dargestellt. Zur Untersuchung der in der Messung nachgewiesenen 27 MHz Resonanz wird das in Bild 4(a) dargestellte CAD-Modell als Basis für eine 3D-Simulation der leitungsgeführten Emissionen verwendet. Über die beschriebene Methode kann nun ermittelt werden (vgl. Tab. 1), dass die Energie der 27 MHz Resonanz maßgeblich zwischen der Kapazität C_{GND} und den parasitären Induktivitäten verschiedener Masseleitungen schwingt. Eine Kapazitätsänderung von C_{GND} hat somit den größten Einfluss auf die Resonanzfrequenz. Durch Änderung des Massekonzepts kann auf diese Kapazität verzichtet werden. Die Resonanz ist anschließend im betrachteten

Frequenzbereich in der Messung nicht mehr nachweisbar und die Emission des Kompressors gezielt auf Grundlage der Eigenmodenanalyse reduziert.



(a) CAD Modell



(b) Emissionsmessungen

Bild 4: Störaussendung eines elektrischen Kompressors

5 Zusammenfassung

Die im Umfang dieser Arbeit vorgestellte Methode zeigt, wie die Eigenmodenanalyse auf Netzwerkebene genutzt werden kann, um den Einfluss einzelner Elemente auf die Resonanzeigenschaften zu quantifizieren. Durch eine modale Energie- und Leistungsberechnung kann der relative Beitrag jedes Elements zu jeder Resonanz und den zugehörigen Gütefaktoren direkt berechnet werden. Anhand eines einfachen Spannungsreglers wird mit Hilfe dieser modalen Energie- und Leistungsbetrachtung sowie den modalen Strömen eine gezielte automatische Identifikation der an der Resonanz beteiligten Elemente ermöglicht. Das abschließend behandelte, komplexe Netzwerk eines elektrischen Kfz-Klimakompressors zeigt, wie diese Methodik verwendet werden kann, um Resonanzen in komplexen Systemen besser zu verstehen und entsprechende Maßnahmen abzuleiten, um die EMV von elektronischen Komponenten zu verbessern.

Literaturangaben

- [1] Hillenbrand P., Böttcher M., Tenbohlen S., Hansen J.: Frequency domain EMI-simulation and resonance analysis of a DCDC-converter, 2016 International Symposium on Electromagnetic Compatibility, 2016, pp. 176-181
- [2] Benz J., Hansen J., Frei S.: Eigenmode Based Optimization of Sensors, 2020 International Symposium on Electromagnetic Compatibility, 2020, pp. 1-6
- [3] Xu W., Huang Z., Cui Y., Wang H.: Harmonic resonance mode analysis, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 20, No. 2, pp. 1182-1190, 2005
- [4] Vlach J., Jiri V., Singhal K.: Computer Methods for Circuit Analysis and Design, Springer, 1983
- [5] Bai Z., Demmel J., Dongarra J., Ruhe A., van der Vorst H.: Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems: A Practical Guide. SIAM, Philadelphia, 2000
- [6] Lallement G., Inman D.: A Tutorial on Complex Eigenvalues, Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering, 1995, pp. 490-495
- [7] Desoer C.: Modes in Linear Circuits, IRE Transactions on Circuit Theory, pp. 211-223, 1960
- [8] Paul C.R.: Analysis of Multiconductor Transmission Lines, Wiley, 2007
- [9] Bondarenko N. et al.: Development of Simple Physics-Based Circuit Macromodel from PEEC, in IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, Vol. 58, No. 5, pp. 1485-1493, Okt. 2016
- [10] Stysch J., Klaedtke A., De Gersem H.: Broadband Finite-Element Impedance Computation for Parasitic Extraction, arXiv preprint, 2020