

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

**CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DE LAJES LISAS:
ESTADO LIMITE ÚLTIMO À PUNÇÃO**

GUSTAVO RIBEIRO DA SILVA

PORTO ALEGRE
2022

GUSTAVO RIBEIRO DA SILVA

**CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DE LAJES LISAS:
ESTADO LIMITE ÚLTIMO À PUNÇÃO**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia.

PORTO ALEGRE
2022

CIP - Catalogação na Publicação

Silva, Gustavo Ribeiro da
CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DE LAJES LISAS: ESTADO
LIMITE ÚLTIMO À PUNÇÃO / Gustavo Ribeiro da Silva. --
2022.
234 f.
Orientador: Américo Campos Filho.

Coorientador: Mauro de Vasconcellos Real.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal do Rio
Grande do Sul, Escola de Engenharia, Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil, Porto Alegre,
BR-RS, 2022.

1. normas de projeto. 2. incerteza de modelo. 3.
confiabilidade estrutural. 4. dimensionamento de lajes
lisas. 5. punção. I. Campos Filho, Américo, orient.
II. Real, Mauro de Vasconcellos, coorient. III.
Título.

GUSTAVO RIBEIRO DA SILVA

**CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DE LAJES LISAS:
ESTADO LIMITE ÚLTIMO À PUNÇÃO**

Esta tese de doutorado foi julgada adequada para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA, Área de Concentração ESTRUTURAS, e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 01 de julho de 2022

Prof. Américo Campos Filho
Dr. pela Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo
orientador

Prof. Mauro de Vasconcellos Real
Dr. pela Universidade Federal do Rio Grande
do Sul
coorientador

Prof. Lucas Festugato
Coordenador do PPGEC/UFRGS

BANCA EXAMINADORA

Prof. André Teófilo Beck (EESC-USP)
Ph.D. pela The University of Newcastle Australia

Prof. Marcelo Maia Rocha (UFRGS)
Dr. Tech. pela Universität Innsbruck

Prof. Ruy Carlos Ramos de Menezes (UFRGS)
Dr. Tech. pela Universität Innsbruck

Dedico este trabalho aos meus pais, Zélio e Iria (*in memoriam*), a minha família e aos meus amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus orientadores Prof. Américo Campos Filho e Prof. Mauro de Vasconcellos Real, pela compreensão, pela paciência, pelos conhecimentos transmitidos e pela orientação ao longo deste trabalho.

Agradeço a toda minha família, principalmente aos meus pais Zélio e Iria (in memoriam) e aos meus irmãos Rozimari e Roselir, pela constante motivação, orientação, amor e apoio durante todos os momentos da minha vida.

Agradeço a todos meus amigos, que foram e são fundamentais para minha formação e que compartilham a vida comigo.

Agradeço também minha namorada Beatriz, pela paciência, apoio, amor e companheirismo durante o desenvolvimento dessa tese.

Agradeço as famílias Mosená, Frosá, Colônesa e Spinelli por todo suporte que me deram nos últimos anos.

Agradeço ao PPGEC e a Escola de Engenharia da UFRGS, por fornecer estrutura e os recursos necessários para minha formação.

Agradeço à CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo suporte financeiro que permitiu a realização deste trabalho.

RESUMO

SILVA, G. R. **Confiabilidade estrutural de lajes lisas: Estado Limite Último à punção.** 2022. Tese de doutorado (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Esta tese de doutorado avaliou a confiabilidade do projeto no Estado Limite Último à punção de lajes lisas dimensionadas conforme as prescrições das normas de projeto ABNT NBR 6118 (2014), EUROCODE 2 (2004), MC 2010 (2012) e ACI 318 (2019). Para determinação da confiabilidade, modelos de previsão de resistência e sollicitação foram apresentados e desenvolvidos no trabalho. Para o modelo de resistência, cinco modelos foram estudados, sendo eles: os modelos de previsão adotados pela ABNT NBR 6118 (2014), EUROCODE 2 (2004), MC 2010 (2012) e ACI 318 (2019); o modelo da Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (TFCC); o modelo em elementos finitos MEF R1; e o MEF R2. Em relação a sollicitação, foi desenvolvido um modelo de elementos finitos, denominado MEF S1. A validação dos modelos e a análise da incerteza associado a cada um deles, foi realizada a partir da elaboração de um banco de dados contendo o resultado da carga de ruptura de 65 lajes lisas. Esse conjunto é resultado do estudo de 17 pesquisas experimentais relacionadas a diferentes autores. A confiabilidade do dimensionamento à punção foi determinada empregando o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM). Para essa análise, foi desenvolvido um algoritmo em linguagem de programação Python. Esse algoritmo permite o acoplamento com o *software* ANSYS APDL para avaliação da função de estado limite implícita utilizada neste trabalho. As lajes avaliadas foram divididas em dois grupos, denominados G1 e G2. No grupo G1, 1728 ligações laje-pilar foram avaliadas utilizando, na função de estado limite, o modelo de resistência da ABNT NBR 6118 (2014) e de sollicitação MEF S1. Para o grupo G2, oito ligações foram estudadas utilizando, na função de estado limite, o modelo MEF R2 e MEF S1 para determinação da resistência e sollicitação, respectivamente. A avaliação da confiabilidade do dimensionamento foi realizada a partir da comparação entre o índice de confiabilidade β com o índice de confiabilidade β_{alvo} . Nesta pesquisa, o β_{alvo} adotado foi de 3,8 para o período de referência de 50 anos. A partir do emprego da metodologia apresentada, os índices de confiabilidade médios obtidos para o conjunto de lajes analisadas foram iguais a: $\beta_{médio} = 2,97$, para ABNT NBR 6118 (2014); $\beta_{médio} = 3,16$, para o EC 2 (2004); $\beta_{médio} = 3,74$, para MC 2010 (2012); e $\beta_{médio} = 2,68$, para ACI 318 (2019). Com a análise dos resultados chegou-se as seguintes conclusões: o índice de confiabilidade alvo é atendido de forma satisfatória somente para o dimensionamento realizado conforme as prescrições do MC 2010 (2012); uma calibração dos coeficientes de ponderação das ações da norma brasileira deve ser realizado com a finalidade de uniformizar o comportamento de β em relação as ações variáveis; a confiabilidade apresentada pelo ACI 318 (2019), para lajes lisas com taxa de armadura de flexão iguais a 0,5%, é crítica em relação as recomendações de normas e outros autores, sendo necessário estudos mais específico para avaliação da confiabilidade dessa norma.

Palavras-chave: *normas de projeto, incerteza de modelo, confiabilidade estrutural, dimensionamento de lajes lisas, punção.*

ABSTRACT

SILVA, G. R. **Confiabilidade estrutural de lajes lisas: Estado Limite Último à punção.** 202. Tese de doutorado (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

This doctoral thesis evaluated the reliability of flat slabs under punching shear. Flat slabs were designed according to the codes of ABNT NBR 6118 (2014), EUROCODE 2 (2004), MC 2010 (2012), and ACI 318 (2019). Resistance models of strength and stress were presented and developed in this paper. Five resistance models were studied: the models by ABNT NBR 6118 (2014), EUROCODE 2 (2004), MC 2010 (2012), and ACI 318 (2019); the Critical Shear Crack Theory (CSCT) model; the finite element model MEF R1; and the MEF R2. The load model was developed using a finite element model called MEF S1. The model validation and the analysis of the error model were conducted from the elaboration of a database containing the result of the punching failure of 65 flat slabs. This result was based on 17 experimental studies related to different authors. The reliability of the punching shear design was determined by the First Order Reliability Method (FORM). For this analysis, a development in Python programming language was developed. This feature allows the evaluation with the ANSYS APDL software of the implicit limit state function used in this work. Two groups were determined to study reliability, G1, and G2. In group G1, 1728 slab-column connections were evaluated. The resistance model used in the limit state function was ABNT NBR 6118 (2014), and MEF S1 was the load model. For the G2 group, eight slab-column connections were evaluated. The MEF R2 and MEF S1 models were used in the limitation function to determine the resistance and load. The reliability of the design codes was performed by comparing the reliability index with the target reliability index. In this research, the $\beta_{target} = 3,8$ was adopted for the reference period of 50 years. From the use of the presented methodologies, the average reliability index provided for the set of methods were: 2.97 for ABNT NBR 6118(2014); 3.16, for EC 2 (2004); 3.74, for MC 2010 (2012); and 2.68, for ACI 318 (2019). The conclusions of this work were: the target reliability index was satisfactorily met with the designed code MC 2010 (2012); the design code of Brazilian needs calibration of partial safety factors, mainly in the behavior of β concerning variable actions; the reliability index indicates by ACI 318 (2019), with flat slabs with flexural reinforcement equal to 0.5%, is critical concerning the recommendation of design codes and other authors, and more specific studies are needed to evaluate this design code reliability.

Key-words: *design codes. resistance model error, structural reliability, flat slabs design, punching shear.*

LISTA DE SIGLAS

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas

ACI – *American Concrete Institute*

ANSYS – *Analysis Systems Incorporated*

APDL – *ANSYS Parametric Design language*

BISO – *Bilinear Isotropic Hardening*

C.V. – Coeficiente de variação

DP – Drucker-Prager

EC - EUROCODE

FDA – Função Distribuição Acumulada

FDP – Função Densidade de Probabilidade

fib – *Fédération Internationale du Béton*

FORM – *First Order Reliability Method* (Método de confiabilidade de primeira ordem)

FOSM – *First Order Second Moment* (Método de primeira ordem e segundo momento)

HLRF – Hasofer, Lind, Rackwitz e Fiessler

HSD – *hardening, softening, dilatation*

SORM – *Second Order Reliability Method* (Método de confiabilidade de segunda ordem)

MC – *Model Code*

MEF – Método dos Elementos Finitos

MLG – Modelo Linear Generalizado

PDS – *Probabilistic Design System*

PEA – Processo Elástico Aproximado

PPGEC - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

TFCC – Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento

UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul

UPF – *User Programmable Features*

LISTA DE SÍMBOLOS

LETRAS ROMANAS MAIÚSCULAS

A_s	: área da seção transversal das armaduras de flexão tracionadas
A_{sw}	: área da armadura de punção em um contorno completo paralelo a C'
C	: superfície crítica do pilar
C'	: superfície crítica afastada de $2d$ do pilar
C''	: superfície crítica analisada quando há armadura de cisalhamento
$C1'$: dimensão do pilar paralela à excentricidade da força
$C2'$: dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da força
D	: diâmetro do pilar
E_c	: módulo de elasticidade do concreto
E_s	: módulo de elasticidade do aço
E_t	: módulo de endurecimento
$E[X]$: valor esperado
F_a	: vetor de carga aplicada
F_i^{nr}	: vetor correspondente às cargas internas de elementos
F_{Sd}	: força ou a reação concentrada de cálculo
G_F	: energia de fratura do concreto
K	: coeficiente que fornece a parcela de M_{Sd} transmitida ao pilar por cisalhamento, que depende da relação $C1/C2$
K_i^T	: matriz de rigidez tangente
M_{Sd}	: momento de cálculo transmitido da laje para o pilar
P_f	: probabilidade de falha
R_{pilar}	: reação do pilar na região estudada da laje obtida por análise linear via simulação
R	: resistência máxima do sistema

S	: solicitação devido às ações do carregamento
$Var[X]$: variância
V	: força aplicada
V_{exp}	: carga de ruptura obtida por ensaio experimental
V_{calc}	: carga de ruptura obtida pelos modelos de previsão
V_{Ed}	: força solicitante à punção de cálculo
V_{flex}	: força correspondente a capacidade de flexão da laje
V_h	: coeficiente de variação da altura da laje
V_{fc}	: coeficiente de variação da resistência à compressão do concreto
V_{fy}	: coeficiente de variação da resistência ao escoamento do aço
V_q	: coeficiente de variação da carga variável
V_{Rd}	: força resistente à punção de cálculo
$V_{Rd,c}$: força resistente do concreto à punção
$V_{Rd,s}$: força resistente da armadura de punção
V_u	: força de cisalhamento na seção
V_n	: força resistente nominal ao cisalhamento conforme Equação (2.35)
W_p	: módulo de resistência plástica do perímetro crítico em questão.

LETRAS ROMANAS MINÚSCULAS

b_0	: perímetro da seção crítica localizado a $d/2$ da face do pilar
d	: altura útil da laje
d_{g0}	: diâmetro de referência do agregado admitido como 16 mm

d_g	: diâmetro máximo do agregado usado no concreto da laje
dl	: comprimento infinitesimal no perímetro crítico u
d_v	: distância do centroide da armadura de flexão à área de apoio
e	: distância de dl ao eixo que passa pelo centro do pilar e sobre o qual atua o momento fletor M_{Sd}
f_c	: resistência à compressão do concreto
f_{cd}	: resistência à compressão de cálculo do concreto
f_{ck}	: resistência característica à compressão do concreto, em MPa
f_{ct}	: resistência do concreto à tração
f_{ctm}	: resistência média do concreto à tração
f_{rupt}	: carga de ruptura da laje obtida por análise não linear via simulação
f_{yk}	: resistência característica ao escoamento da armadura
f_y	: tensão de escoamento do aço
f_{ywd}	: resistência de cálculo da armadura de punção
g_k	: valor característico das ações permanentes
h	: altura da laje
k	: deformação plástica efetiva
k_{cm}	: deformação plástica referente a tensão máxima
k_{cr}	: deformação plástica última em compressão
k_{tr}	: deformação plástica referente a tensão mínima;
k, λ_s :	: fator relacionado ao efeito escala
q_k	: valor característico das ações variáveis
r_s	: distância entre o eixo do pilar e a linha de momentos nulos;
s_r	: espaçamento radial entre linhas de armadura de punção
u^*	: perímetro crítico reduzido

u_0 : perímetro do pilar
 u_1 : perímetro de controle básico

LETRAS GREGAS

α : ângulo de inclinação entre o eixo da armadura de punção e o plano da laje
 α_c : fator de fragilidade do concreto
 α_e : parâmetro que depende do tipo de agregado utilizado
 α_s : constante que depende da posição do pilar, sendo igual a 40 para pilares internos, 30 para pilares de borda e 20 para pilares de canto
 β : índice de confiabilidade
 β_0 : razão entre a maior dimensão do pilar e a maior largura perpendicular a esta
 δ : razão entre ação variável e ação permanente
 μ_{fy} : valor esperado da resistência ao escoamento do aço
 μ_h : valor esperado da altura da laje
 μ_g : valor esperado do carregamento permanente
 μ_M : valor esperado da margem de segurança
 μ_q : valor esperado do carregamento variável
 μ_R : valor esperado da função de variável aleatória da resistência
 μ_S : valor esperado da função de variável aleatória da solicitação
 λ : fator de modificação que leva em consideração a redução das propriedades mecânicas de concretos leves
 ρ : taxa média de armadura de flexão tracionada
 ρ_{cct} : coeficiente de correlação entre a resistência à compressão do concreto e a resistência à tração do concreto
 ρ_{ce} : coeficiente de correlação entre a resistência à compressão do concreto e o módulo de elasticidade do concreto

ρ_{cte}	: coeficiente de correlação entre a resistência à tração do concreto e o módulo de elasticidade
ψ	: rotação da laje
σ_0	: tensão de escoamento inicial
σ_1	: tensão principal de tração
σ_{cp}	: tensão inicial no concreto ao nível do baricentro da armadura de protensão, devida à protensão simultânea de n cabos
σ_M	: desvio padrão da margem de segurança
σ_R	: desvio padrão da resistência
σ_S	: desvio padrão da sollicitação
τ_{sd}	: tensão de cisalhamento solitante de cálculo
Ω_c	: função de plastificação em compressão
Ω_{ci}	: tensão relativa no início da plastificação
Ω_{cr}	: tensão relativa residual para $k \geq k_{tr}$
Ω_t	: função de plastificação em tração;
Ω_{tr}	: tensão relativa residual para $k \geq k_{tr}$.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Laje lisa utilizada no edifício da sede da OBB Ferrovias Federais Austríacas em Viena. (a) Dresó (2019); (b) Newwise (2019)	23
Figura 2.1 - Ruptura por punção em laje lisa sem armadura de cisalhamento (GUANDALINI, 2005)	28
Figura 2.2 – Regiões de ruptura em lajes lisas com armadura de cisalhamento: (a) falha dentro da área com armadura de cisalhamento; (b) ruptura por esmagamento da biela comprimida próximo à face do pilar; (c) falha fora da área com armadura de cisalhamento (EINPAUL, 2016)	29
Figura 2.3 - Biela teórica desenvolvida através da fissura crítica de cisalhamento (Adaptado de Muttoni, 2008)	30
Figura 2.4 - Correlação entre a abertura da fissura crítica de cisalhamento, espessura da laje e a rotação ψ (Adaptado de MUTTONI, 2008)	31
Figura 2.5 – Resistência à punção em função da largura nominal da fissura (Adaptado de MUTTONI, 2008).....	32
Figura 2.6 – Cálculo da ruptura por punção segundo a TFCC (Adaptado de Muttoni et al.,2013)	33
Figura 2.7 – Perímetro crítico em pilares internos (SILVA ,2017).....	35
Figura 2.8 – Perímetro crítico em pilares de borda (SILVA, 2017).....	35
Figura 2.9 – Perímetro crítico em pilares de canto (SILVA, 2017)	35
Figura 2.10-Perímetro crítico junto à abertura na laje (SILVA, 2017)	36
Figura 2.11 – Perímetro de controle u_0 e u_1 (DÍAZ, 2018)	42
Figura 2.12 – Determinação da força solicitante à punção de cálculo (MUTTONI, 2013)	44
Figura 2.13 – Perímetros básicos de controle (adaptado de MC 2010, 2012).....	45
Figura 2.14 – Exatidão dos níveis de aproximação em função do tempo dedicado para análise (Adaptado de MC 2010, 2012)	46
Figura 2.15 – Perímetro de controle b_0 adotado pelo ACI 318 (2019) (SANTOS, 2018 adaptado de ACI 318(2014))	48
Figura 2.16 – Definição da largura $blaje$ segundo ACI 318 (2019).....	50
Figura 3.1 – Espaço de duas variáveis aleatórias (r, s) mostrando o domínio de falha para o problema R-S (Adaptado de Melchers e Beck (2018)).....	54
Figura 3.2 – Probabilidade de falha em função da margem de segurança (PALIGA, 2008) ...	55

Figura 3.3 – Conceito de função de estado limite, domínios de falha e sobrevivência.....	59
Figura 3.4 – Transformações das variáveis $X1$ e $X2$ em variáveis normais padrão e interpretação geométrica de β (Adaptado de MELCHERS; BECK, 2018)	61
Figura 4.1 - Elemento SOLID186 (adaptado de ANSYS (2021a)).....	65
Figura 4.2 - Elemento REINF264 utilizado com SOLID186 (adaptado de ANSYS (2021a))	65
Figura 4.3 – Seções transversais da superfície de ruptura, (a) planos meridianos e (b) planos desviadores (Lazzari (2016), adaptado de Chen e Han (1988)).....	66
Figura 4.4 - Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido (Adaptado de <i>fib</i> 2010, 2012)	67
Figura 4.5 - Curva tensão-deformação para o concreto tracionado (LAZZARI, 2016).....	68
Figura 4.6 – Relação tensão-fissuração para concreto tracionado (Adaptado de <i>fib</i> (2012))...	69
Figura 4.7 – Curva tensão-deformação para o concreto tracionado (<i>fib</i> (2012))	69
Figura 4.8 - Modelo elastoplástico perfeito (LAZZARI,2016).....	70
Figura 4.9 – Método Newton-Raphson (Quevedo (2017) adaptado de ANSYS (2013))	71
Figura 4.10 - Método Newton-Raphson com etapas intermediárias (Quevedo (2017) adaptado de ANSYS (2013)).....	72
Figura 4.11 – Geometria e condições de contorno utilizados na laje SB1	75
Figura 4.12 – Curva carga-deslocamento da laje SB1 variando ϵR do modelo MEF R1	75
Figura 4.13 - Curva carga-deslocamento da laje SB1 variando n_{sub} do modelo MEF R1	76
Figura 4.14 - Curva carga-deslocamento da laje SB1 variando a malha do modelo MEF R1 .	76
Figura 4.15 - Curva carga-deslocamento da laje SB1 obtida pelo MEF R1 calibrado.....	77
Figura 4.16 – Modelo de Drucker-Prager com duas superfícies (a) Plano meridiano; (b) Espaço tridimensional de tensões principais ((a) elaborada pelo autor; (b) Ansys (2021b))	78
Figura 4.17 – Composição da superfície de DP-DP e DP-Rankine (ANSYS,2021b).....	78
Figura 4.18 – Lei de endurecimento para o concreto comprimido do modelo HSD6 (adaptado de ANSYS (2021b)).....	80
Figura 4.19 - Leis de amolecimento para o concreto fissurado do modelo HSD6 (adaptado de ANSYS (2021a)).....	81
Figura 4.20 - Curva carga-deslocamento da laje SB1 variando k_{tr} do modelo MEF R2.....	82
Figura 4.21 - Curva carga-deslocamento da laje SB1 variando ϵR do modelo MEF R2.....	83

Figura 4.22 - Curva carga-deslocamento da laje SB1 variando n_{sub} do modelo MEF R2.....	83
Figura 4.23 - Curva carga-deslocamento da laje SB1 variando a malha do modelo MEF R2.	84
Figura 4.24 - Curva carga-deslocamento da laje SB1 obtida pelo MEF R2 calibrado.....	84
Figura 4.25 – Geometria e região analisada da laje lisa padrão	85
Figura 5.1 – Relação entre V_{exp} e V_{calc} para o modelo da ABNT NBR 6118 (2014).....	91
Figura 5.2 - Análise de correlação da variável E_m, R de acordo com modelo da ABNT NBR 6118 (2014).....	92
Figura 5.3 -Gráfico dos resíduos do MLG para o modelo da ABNT NBR 6118 (2014)	93
Figura 5.4 – Gráfico qq-norm dos resíduos do modelo da ABNT NBR 6118 (2014) com envoltória com grau de confiança de 95%	93
Figura 5.5 - (a) distribuição acumulada de probabilidade e (b) histograma e função de densidade de probabilidade para variável incerteza do modelo de resistência segundo a ABNT NBR 6118 (2014).....	94
Figura 5.6 - Relação entre V_{exp} e V_{calc} para o modelo do EC 2 (2004)	96
Figura 5.7 – Relação entre E_m, R e d para os modelos da ABNT NBR 6118 (2014) e EC 2 (2004).....	96
Figura 5.8 - Análise de correlação da variável E_m, R de acordo com modelo do EC 2 (2004)	97
Figura 5.9 – Gráfico dos resíduos do MLG para o modelo do EC 2 (2004)	98
Figura 5.10 - Gráfico qq-norm dos resíduos do modelo EC 2 (2004) com envoltória com grau de confiança de 95%	98
Figura 5.11 - (a) distribuição acumulada de probabilidade e (b) histograma e função de densidade de probabilidade para variável incerteza do modelo de resistência segundo o EC 2 (2004).....	99
Figura 5.12 - Relação entre V_{exp} e V_{calc} para o modelo da ACI 318 (2019).....	101
Figura 5.13 – Análise de correlação da variável E_m, R de acordo com modelo do ACI 318 (2019).....	102
Figura 5.14 - Gráfico dos resíduos do MLG para o modelo da ACI 318 (2019)	103
Figura 5.15 - Gráfico qq-norm dos resíduos do modelo da ACI 318 (2019) com envoltória com grau de confiança de 95%	103
Figura 5.16 - (a) distribuição acumulada de probabilidade e (b) histograma e função de densidade de probabilidade para variável incerteza do modelo de resistência segundo a ACI 318 (2019).....	104
Figura 5.17 - Relação entre V_{exp} e V_{calc} para o modelo da TFCC	105

Figura 5.18 – Análise de correlação da variável Em,R de acordo com modelo da TFCC	106
Figura 5.19 - Gráfico dos resíduos do MLG para o modelo da TFCC.....	107
Figura 5.20 - Gráfico qq-norm dos resíduos do modelo da TFCC com envoltória com grau de confiança de 95%	107
Figura 5.21 - (a) distribuição acumulada de probabilidade e (b) histograma e função de densidade de probabilidade para variável incerteza do modelo de resistência segundo a TFCC	108
Figura 5.22 - Relação entre V_{exp} e V_{calc} para o modelo do MC 2010 (2012).....	109
Figura 5.23 – Análise de correlação da variável Em,R de acordo com modelo do MC 2010 (2012).....	110
Figura 5.24 - Gráfico dos resíduos do MLG para o modelo do MC 2010 (2012).....	111
Figura 5.25 - Gráfico qq-norm dos resíduos do modelo da MC 2010 (2012) com envoltória com grau de confiança de 95%	111
Figura 5.26 - (a) distribuição acumulada de probabilidade e (b) histograma e função de densidade de probabilidade para variável incerteza do modelo de resistência segundo o MC 2010 (2012).....	112
Figura 5.27 - Relação entre V_{exp} e V_{calc} para o modelo MEF R1	113
Figura 5.28 – Análise de correlação da variável Em,R de acordo com modelo MEF R1	114
Figura 5.29 - Gráfico dos resíduos do MLG para o modelo MEF R1.....	115
Figura 5.30 - Gráfico qq-norm dos resíduos do modelo MEF R1 com envoltória com grau de confiança de 95%	115
Figura 5.31 - (a) distribuição acumulada de probabilidade e (b) histograma e função de densidade de probabilidade para variável incerteza do modelo de resistência segundo o modelo MEF R1.....	115
Figura 5.32 - Relação entre V_{exp} e V_{calc} para o modelo da MEF R2	117
Figura 5.33 – Análise de correlação da variável Em,R de acordo com modelo MEF R2.....	118
Figura 5.34 - Gráfico dos resíduos do MLG para o modelo MEF R2.....	119
Figura 5.35 - Gráfico qq-norm dos resíduos do modelo MEF R2 com envoltória com grau de confiança de 95%	119
Figura 5.36 - (a) distribuição acumulada de probabilidade e (b) histograma e função de densidade de probabilidade para variável incerteza do modelo de resistência segundo o modelo MEF R2.....	119
Figura 6.1 – Região da ligação laje-pilar interno analisada.	122

Figura 6.2 – Modelo estrutural do grupo G1	129
Figura 6.3 – Combinação das ações e coeficientes de ponderação utilizados para o dimensionamento à punção.....	130
Figura 6.4 – Modelo estrutural do grupo G2.....	131
Figura 6.5 – Deformada da edificação do grupo G2 modelada no SCIA Engineer	133
Figura 6.6 – (a) Malha de elementos finitos de 25x 25 cm e (b) malha refinada na região de ligação laje-pilar	134
Figura 6.7 – Diagrama de momento fletor no alinhamento C com (a) malha uniforme e (b) com malha refinada na região de ligação laje-pilar	134
Figura 6.8 – Diagrama de momento fletor (kN.m/m) obtido no alinhamento C utilizando o recurso faixa de média	135
Figura 6.9 – Disposição da armadura de flexão negativa na região de análise	135
Figura 6.10 – Perspectiva da edificação do grupo G2 e deformada do segundo pavimento modelado no <i>software</i> TQS	136
Figura 6.11 – Momento fletor nas barras da grelha do segundo pavimento do grupo G2	137
Figura 6.12 – Diagrama do esforço normal no pilar P13	138
Figura 6.13 – Sub-perímetros da ligação laje-pilar P13	139
Figura 6.14 – Índices de confiabilidade obtidos com o uso das duas metodologias para determinação da incerteza do modelo de resistência	140
Figura 6.15 – Faixa de variação dos índices de confiabilidade β obtidos na análise da ABNT NBR 6118 (2014).....	142
Figura 6.16 – Análise de correlação entre β e as variáveis de estudo para a avaliação da confiabilidade da ABNT NBR 6118 (2014).....	142
Figura 6.17 – Faixa de variação dos índices de confiabilidade β obtidos na análise da EC 2 (2004).....	143
Figura 6.18 – Análise de correlação entre β e as variáveis de estudo para a avaliação da confiabilidade do EC 2 (2004).....	144
Figura 6.19 – Faixa de variação dos índices de confiabilidade β obtidos na análise do ACI 318 (2019).....	144
Figura 6.20 – Análise de correlação entre β e as variáveis de estudo para a avaliação da confiabilidade do ACI 318 (2019)	145
Figura 6.21 - Análise do índice de confiabilidade β , sem a consideração da armadura mínima, para avaliação do ACI 318 (2019).....	146

Figura 6.22 – Faixa de variação dos índices de confiabilidade β obtidos na análise da MC 2010 (2012).....	147
Figura 6.23 – Análise de correlação entre β e as variáveis de estudo, para a avaliação da confiabilidade da MC 2010 (2012).....	147
Figura 6.24 – Faixa de variação dos índices de confiabilidade em relação a δ	148
Figura 6.25 - Faixa de variação dos índices de confiabilidade em relação a ρ para avaliação do ACI 318 (2019).....	149
Figura 6.26 - Faixa de variação dos índices de confiabilidade β obtidos na análise utilizando coeficientes de ponderação conforme Santiago (2019)	150
Figura 6.27 - Análise de correlação entre β e as variáveis de estudo para a avaliação da confiabilidade da ABNT NBR 6118 (2014) utilizando coeficientes de ponderação dados por Santiago (2019).....	150
Figura 6.28 - Faixa de variação dos índices de confiabilidade β obtidos na análise utilizando coeficiente de variação da ações variáveis igual a 0,25.....	151
Figura 6.29 – Análise de correlação entre β e as variáveis de estudo para a avaliação da confiabilidade do ACI 318 (2019) utilizando coeficiente de variação da ação variável igual a 0,25	152

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1- Valores de K.....	37
Tabela 3.1 – Índice de confiabilidade alvo para ELU segundo o JCSS (2001) para um período de referência de um ano.	57
Tabela 3.2 - Índice de confiabilidade alvo para ELU segundo o JCSS (2001) para um período de referência de 50 anos.....	57
Tabela 3.3 – Índice de confiabilidade alvo para o ELU recomendado pelo Código Modelo <i>fib</i> 2010 (2012).....	58
Tabela 4.1 – Propriedades mecânicas da laje SB1	74
Tabela 4.2 – Parâmetros adotados para calibração do modelo MEF R2.....	82
Tabela 5.1 Descrição dos autores e quantidade de lajes avaliadas no banco de dados do trabalho	87
Tabela 5.2 - Média e C.V. da razão entre a carga de ruptura experimental e a calculada pelo modelo da ABNT NBR 6118 (2014).....	90
Tabela 5.3 - Média e C.V. da razão entre a carga de ruptura experimental e a calculada pelo modelo do EC 2 (2004).....	95
Tabela 5.4 - Média e C.V. da razão entre a carga de ruptura experimental e a calculada pelo modelo da ACI 318 (2019)	100
Tabela 5.5 – Média e C.V. da razão entre a carga de ruptura experimental e a calculada pelo modelo da TFCC.....	105
Tabela 5.6 - Média e C.V. da razão entre a carga de ruptura experimental e a calculada pelo modelo do MC 2010 (2012).....	109
Tabela 5.7 - Média e C.V. da razão entre a carga de ruptura experimental e a determinada pelo modelo MEF R1.....	113
Tabela 5.8 - Média e C.V. da razão entre a carga de ruptura experimental e a calculada pelo modelo MEF R2.....	117
Tabela 6.1 – Parâmetros estatísticos para diferentes classes de resistência do concreto.....	124
Tabela 6.2 – Parâmetros de E_m, R dos MLG	128
Tabela 6.3 – Parâmetros estatísticos do E_m, R	128
Tabela 6.4 – Armaduras negativas de flexão determinadas a partir do modelo elaborado no <i>software</i> SCIA Engineer	136

Tabela 6.5 - Armaduras negativas de flexão determinadas a partir do modelo elaborado no <i>software</i> TQS	137
Tabela 6.6 – Verificação da resistência à punção da ligação laje-pilar P13 conforme as prescrições da ABNT NBR 6118 (2014).....	138
Tabela 6.7 - Verificação da resistência à punção da ligação laje-pilar P13 conforme as prescrições da ABNT NBR 6118 (2014) com auxílio do <i>software</i> TQS.....	139
Tabela 6.8 – Índices de confiabilidade β determinados para o grupo G2.....	153

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	23
1.1 OBJETIVOS DA PESQUISA.....	25
1.1.1 Objetivo principal	25
1.1.2 Objetivos secundários	25
1.2 DELIMITAÇÃO DA PESQUISA	26
1.3 DELINEAMENTO DA PESQUISA	26
2 PUNÇÃO EM LAJES LISAS	28
2.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS	28
2.2 FENÔMENO DA PUNÇÃO EM LAJES LISAS	28
2.3 MÉTODO DA SUPERFÍCIE DE CONTROLE PARA DETERMINAÇÃO DA RESISTÊNCIA À PUNÇÃO	29
2.4 TEORIA DA FISSURA CRÍTICA DE CISALHAMENTO (TFCC) PARA DETERMINAÇÃO DA RESISTÊNCIA À PUNÇÃO	30
2.5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA DETERMINAÇÃO DA RESISTÊNCIA À PUNÇÃO	33
2.6 PRESCRIÇÕES DA NBR 6118:2014 PARA O DIMENSIONAMENTO À PUNÇÃO.....	34
2.6.1 Superfícies críticas.....	34
2.6.2 Definição da tensão solicitante nas superfícies críticas C e C'	36
2.6.3 Definição da tensão resistente nas superfícies críticas C, C' e C''	39
2.7 PRESCRIÇÕES DO EUROCODE 2 (2004)	41
2.8 PRESCRIÇÕES DO CÓDIGO MODELO <i>fib</i> 2010 (2012) PARA O DIMENSIONAMENTO À PUNÇÃO	43
2.9 PRESCRIÇÕES DO ACI 318 (2019).....	48
3 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL.....	51

3.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS.....	52
3.1.1 Variável aleatória	52
3.1.2 Problema fundamental da confiabilidade.....	53
3.1.3 Índice de confiabilidade de Cornell (1969)	55
3.1.4 Índice de confiabilidade alvo.....	56
3.1.5 Função de estado limite	58
3.2 MÉTODOS DE TRANSFORMAÇÃO	60
3.2.1 Método de primeira ordem e segundo momento - FOSM	60
3.2.2 Método de Confiabilidade de Primeira Ordem – FORM	62
4 ANÁLISE NUMÉRICA DA RESISTÊNCIA E DA SOLICITAÇÃO À PUNÇÃO DE LAJES LISAS	64
4.1 MODELO NUMÉRICO R1 PARA PREVISÃO DA RESISTÊNCIA À PUNÇÃO.....	64
4.1.1 Elementos finitos adotados	64
4.1.1.1 SOLID186	64
4.1.1.2 REINF264	65
4.1.2 Modelos constitutivo do concreto	66
4.1.2.1 Modelo para o concreto comprimido	66
4.1.2.2 Modelo para o concreto tracionado	67
4.1.3 Modelo constitutivo do aço	70
4.1.4 Técnicas para solução de problemas não lineares	70
4.1.5 Validação do modelo numéricos R1	73
4.1.5.1 Parâmetros de convergência.....	75
4.1.5.2 Estudo de malha	76
4.2 MODELO NUMÉRICO R2 PARA PREVISÃO DA RESISTÊNCIA À PUNÇÃO.....	77
4.2.1 Modelos constitutivo do concreto	77
4.2.1.1 Modelo para o concreto comprimido	79
4.2.1.2 Modelo para o concreto tracionado	80
4.2.2 Validação do modelo numérico R2.....	81

4.2.2.1	Parâmetros do concreto	81
4.2.2.2	Parâmetros de convergência.....	82
4.2.2.3	Estudo de malha	83
4.3	MODELO NUMÉRICO MEF S1 PARA PREVISÃO DA SOLICITAÇÃO NA LIGAÇÃO LAJE-PILAR.....	85
5	AVALIAÇÃO ESTATÍSTICA DAS INCERTEZAS ASSOCIADAS AOS MODELOS DE RESISTÊNCIA À PUNÇÃO.....	86
5.1	PESQUISAS REALIZADAS NO CAMPO EXPERIMENTAL	86
5.2	DESCRIÇÃO DAS INCERTEZAS ASSOCIADAS AOS MODELOS.....	87
5.2.1	Incerteza associada ao modelo de previsão da resistência segundo a ABNT NBR 6118 (2014).....	89
5.2.2	Incerteza associada ao modelo de previsão da resistência segundo o EUROCODE 2 (2004)	94
5.2.3	Incerteza associada ao modelo de previsão da resistência segundo o ACI 318 (2019)	99
5.2.4	Incerteza associada ao modelo de previsão da resistência segundo a TFCC	104
5.2.5	Incerteza associada ao modelo de previsão da resistência segundo o Código Modelo <i>fib</i> 2010 (2012).....	108
5.2.6	Incerteza associada ao modelo de previsão da resistência segundo o modelo numérico R1	112
5.2.7	Incerteza associada ao modelo de previsão da resistência segundo o modelo numérico R2	116
6	CONFIABILIDADE DO DIMENSIONAMENTO À PUNÇÃO DE LAJES LISAS	120
6.1	FERRAMENTA DE ANÁLISE DE PROBABILIDADE	120
6.2	CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DAS LAJES ESTUDADAS	121
6.3	FUNÇÃO ESTADO LIMITE.....	122
6.4	CARACTERIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS ENVOLVIDAS NA ANÁLISE.....	123

6.4.1 Resistência à compressão do concreto.....	124
6.4.2 Módulo de elasticidade inicial do concreto	124
6.4.3 Resistência à tração do concreto.....	125
6.4.4 Resistência ao escoamento da armadura (f_y)	125
6.4.5 Altura da laje (h)	126
6.4.6 Distância do centro da armadura superior até a borda superior da seção (d').....	126
6.4.7 Carregamento permanente (g).....	126
6.4.8 Carregamento variável (q)	126
6.4.9 Incerteza do modelo da resistência (E_m, R)	127
6.4.10 Incerteza do modelo da solicitação (E_m, S)	128
6.5 DESCRIÇÃO DAS LAJES ANALISADAS	128
6.6 DIMENSIONAMENTO DA ARMADURA DE FLEXÃO DO GRUPO 2	132
6.6.1 Determinação dos esforços pelo Método dos Elementos Finitos (MEF)	133
6.6.2 Determinação dos esforços por discretização do pavimento em barras de grelha	136
6.7 DIMENSIONAMENTO À PUNÇÃO DO GRUPO 2	137
6.8 ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	139
6.8.1 Índice de confiabilidade β com o uso de diferentes E_m, R	140
6.8.2 Índice de confiabilidade β do grupo G1	141
6.8.3 Resultados complementares relacionados ao grupo G1	149
6.8.4 Índice de confiabilidade β do grupo G2	152
7 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS	154
7.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	156
REFERÊNCIAS	158
APÊNDICE A – SCRIPTS ANSYS APDL 2021 R2	166

APÊNDICE B – BANCO DE DADOS DAS LAJES LISAS ESTUDADAS	190
APÊNDICE C – RESULTADO DAS CARGAS DE RUPTURA POR DIFERENTES MÉTODOS DE ANÁLISE	193
APÊNDICE D – ÍNDICE DE CONFIABILIDADE β DO GRUPO G1....	196
APÊNDICE E – ÍNDICE DE CONFIABILIDADE β_{MLG} E β_{KS}	208
APÊNDICE F – CÓDIGO UTILIZADO PARA DETERMINAÇÃO DOS ÍNDICES DE CONFIABILIDADE β	220

1 INTRODUÇÃO

Lajes lisas de concreto armado são lajes que se apoiam diretamente sobre os pilares. Esse tipo de laje é comumente utilizado em edifícios residenciais e comerciais, conforme ilustra a Figura 1.1. Além de oferecer grande flexibilidade arquitetônica, esses elementos permitem uma construção mais rápida devido a simplicidade da execução das formas. Apesar disso, as lajes lisas apresentam algumas desvantagens em relação as lajes apoiadas em vigas, como maiores deslocamentos verticais para um mesmo vão, aumento na espessura da laje e diminuição da estabilidade global da estrutura.

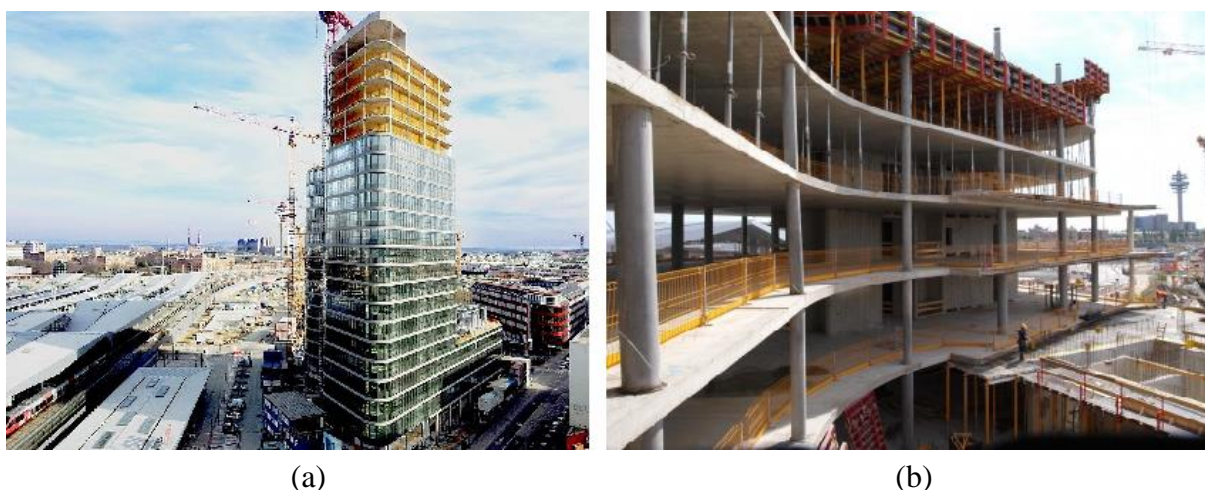


Figura 1.1 – Laje lisa utilizada no edifício da sede da OBB Ferrovias Federais Austríacas em Viena. (a) Dresó (2019); (b) Newwise (2019)

Pelo fato das lajes lisas se apoiarem diretamente sobre os pilares ocorre uma elevada concentração de tensões cisalhantes nas regiões de ligação entre a laje e os pilares. A principal consequência dessas tensões de cisalhamento elevadas é a ruptura caracterizada pela ausência de escoamento da armadura, gerando uma ruptura frágil. Essas tensões de cisalhamento elevadas caracterizam o fenômeno da punção, sendo um estado limite último por cisalhamento no entorno das forças concentradas (ARAÚJO, 2014).

A capacidade resistente da laje nas proximidades com o pilar é governada tanto pela resistência à flexão quanto pela resistência à punção. A falha por flexão ocorre após grandes deformações, que fornecem ao usuário um aviso prévio da ruptura da laje. Porém, as deformações que ocorrem na região de ligação laje pilar são pequenas antes da ocorrência da ruptura da laje,

especialmente quando não há armadura de combate à punção. Esse fato faz com que punção seja um modo de falha inseguro (EINPAUL, 2016).

O dimensionamento à punção de lajes lisas é feito a partir de formulações empíricas desenvolvidas com base em ensaios experimentais. Esses ensaios, em grande parte dos estudos, são realizados considerando uma parte isolada da laje limitada pela região de momento fletor nulo em uma análise elástica-linear, conforme mostra Figura 1.2.

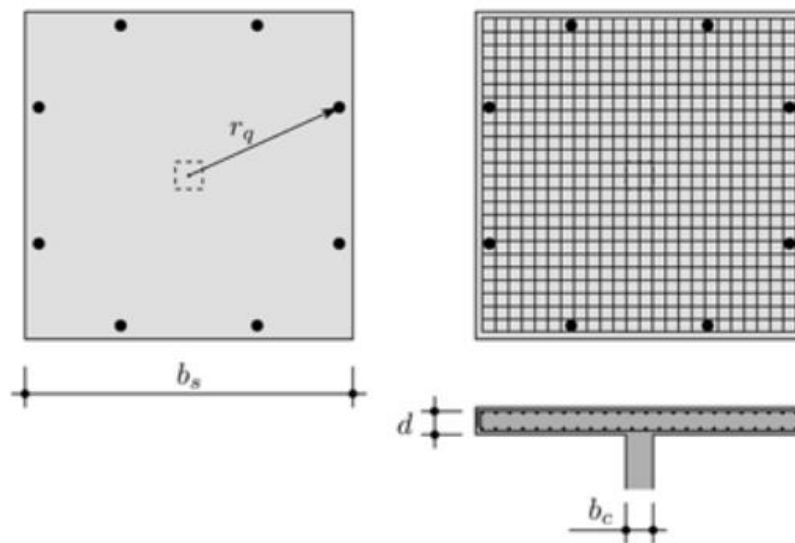


Figura 1.2 – Geometria de um modelo de ensaio definida pela região de momento nulo (MUTTONI, 2008)

A maioria das Normas e Códigos de projeto baseiam suas verificações em uma seção crítica, com a resistência ao cisalhamento das lajes definidas como uma função da resistência à compressão do concreto. Outras teorias, como a de Kinnunen e Nylander (1960) baseiam suas verificações relacionando a rotação da laje com sua resistência à punção, porém, devido a sua complexa análise, essa teoria nunca foi incluída de forma direta nas Normas e Códigos de dimensionamento (MUTTONI, 2008).

A teoria mais recente para determinar a resistência à punção é a Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (TFCC), desenvolvida por Muttoni (2008). Essa teoria tem como base as observações feitas por Kinnunen e Nylander (1960) e se fundamenta na ideia que a resistência à punção diminui com o aumento da rotação da laje.

Segundo Muttoni (2013), a TFCC pode ser considerada uma evolução em relação as abordagens empíricas de dimensionamento, pois, por ser baseado em um modelo físico, pode ser explicada,

entendida e justificada por princípios físicos. Essa teoria faz parte das formulações de dimensionamento apresentadas pelo Código Modelo *fib* 2010 (2012).

Ao mesmo tempo que se observam diversas formulações para o dimensionamento de lajes lisas, se percebe também uma lacuna no conhecimento sobre a confiabilidade que esses métodos alcançam. Dessa forma, um melhor entendimento da confiabilidade obtida por cada método é de fundamental importância para um dimensionamento seguro e preciso desses elementos. Com a ciência da confiabilidade de cada método, as prescrições normativas podem sofrer alterações com o intuito de tornar o dimensionamento mais econômico e ao mesmo tempo com uma probabilidade de falha aceitável.

Diante disso, esse trabalho apresenta um estudo sobre a confiabilidade do dimensionamento à punção de lajes lisas, mais especificamente da ligação laje-pilar interno, sem efeito de momento, utilizando as prescrições da ABNT NBR 6118 (2014), EUROCODE 2 (2004), ACI 318 (2019) e Código Modelo *fib* 2010 (2012).

1.1 OBJETIVOS DA PESQUISA

Os objetivos da pesquisa são classificados em principal e secundários, os quais seguem apresentados a seguir.

1.1.1 Objetivo principal

Este trabalho tem como objetivo principal determinar a confiabilidade do dimensionamento de lajes lisas segundo a ABNT NBR 6118 (2014), EUROCODE 2 (2004), ACI 318 (2019) e o Código Modelo *fib* 2010 (2012).

1.1.2 Objetivos secundários

Entre os objetivos secundários desta pesquisa, podem-se listar os seguintes itens:

- a) desenvolver dois modelos numéricos para previsão da resistência à punção;
- b) avaliar a acurácia de diferentes métodos de determinação da resistência à punção;
- c) elaborar uma programação na linguagem Python para avaliação da confiabilidade utilizando o método FORM com acoplamento direto com o *software* ANSYS APDL.

1.2 DELIMITAÇÃO DA PESQUISA

A seguir é apresentado as delimitações dessa pesquisa, sendo elas:

- a) a confiabilidade do dimensionamento à punção é realizada considerando a região de ligação laje-pilar interno, sem efeito de momento;
- b) serão consideradas somente lajes lisas sem armadura de punção.

1.3 DELINEAMENTO DA PESQUISA

Com objetivo de mostrar de forma clara a pesquisa realizada, este trabalho foi organizado em sete capítulos. Sendo apresentado no **capítulo 1** a importância do tema e os objetivos da pesquisa.

No **capítulo 2** é realizado uma revisão bibliográfica que irá nortear o desenvolvimento desta pesquisa. Neste capítulo são apresentados os principais tópicos sobre punção, determinação da resistência à punção e dimensionamento de lajes lisas. Além disso, as prescrições das normas e dos códigos de dimensionamento são discutidas nesse capítulo.

No **capítulo 3** são apresentados conceitos fundamentais para avaliação da confiabilidade estrutural que serão utilizados ao longo de todo trabalho. Esse capítulo é voltado para apresentação dos conceitos fundamentais e dos principais métodos de confiabilidade.

O **capítulo 4** é dedicado ao estudo de modelos numéricos para determinação da resistência à punção. Nesse capítulo foram desenvolvidos dois modelos de elementos finitos para previsão da resistência. Além disso, dois modelos de solicitação são elaborados e discutidos.

Com a intenção de se criar um banco de dados para avaliação das incertezas dos modelos, o **capítulo 5** apresenta um estudo sobre a determinação da resistência à punção utilizando o método da superfície de controle, a teoria da fissura crítica de cisalhamento e o método dos elementos finitos. Os valores obtidos pelos diferentes métodos são comparados com valores de ensaios experimentais de 17 autores e ao final do capítulo é realizada uma análise estatística dos resultados.

O **capítulo 6** apresenta as metodologias adotadas para avaliação da confiabilidade estrutural desta tese. Tendo como base os capítulos anteriores, esse capítulo apresenta um estudo de

confiabilidade de 1736 lajes lisas. Neste capítulo é feita a descrição das lajes, a caracterização das variáveis aleatórias, a definição da função estado limite, a determinação do índice de confiabilidade e a análise dos resultados. Por fim, no **capítulo 7** são apresentadas as considerações finais e as sugestões para trabalhos futuros.

2 PUNÇÃO EM LAJES LISAS

2.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Neste capítulo são apresentados os conceitos relacionados à punção, métodos para determinação da resistência à punção, métodos de dimensionamento de lajes lisas, prescrições normativas da ABNT NBR 6118 (2014), ACI 318 (2019), EUROCODE 2 (2004) e do Código Modelo *fib* 2010 (2012).

2.2 FENÔMENO DA PUNÇÃO EM LAJES LISAS

Em lajes que se apoiam em vigas, as tensões máximas de cisalhamento resultante de carregamentos uniformes são concentradas nas seções médias das bordas. Essas tensões são relativamente bem distribuídas e dificilmente provocam um estado limite último na estrutura. Porém, nas lajes que se apoiam diretamente sobre os pilares, a reação do pilar em uma pequena área da laje provoca elevadas tensões de cisalhamento o que pode causar ruptura por punção.

A ruptura por punção tem formato tronco-cônico e se desenvolve com a propagação de fissuras inclinadas ao longo da espessura da laje, com uma inclinação entre 25° e 40°, conforme ilustra a Figura 2.1 (GUANDALINI, 2005).

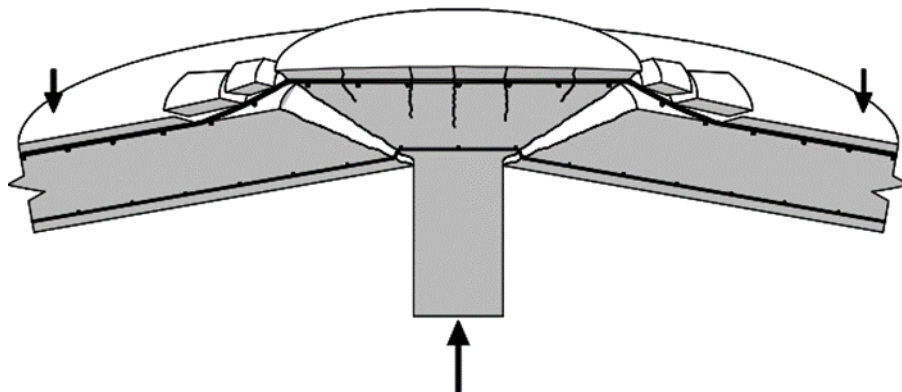


Figura 2.1 - Ruptura por punção em laje lisa sem armadura de cisalhamento (GUANDALINI, 2005)

Para as lajes com armadura de cisalhamento a superfície de ruptura pode ocorrer em três posições distintas. A primeira posição é na região entre o pilar e a primeira camada de armadura de cisalhamento, com ruptura somente do concreto adjacente ao pilar; a segunda acontece na

região com armadura de cisalhamento, com ruptura do concreto e da armadura; a terceira situação ocorre na região situada além da armadura de cisalhamento, com ruptura do concreto (CORDOVIL, 1997). A Figura 2.2 mostra as regiões de ruptura em lajes com armadura de cisalhamento.



Figura 2.2 – Regiões de ruptura em lajes lisas com armadura de cisalhamento: (a) falha dentro da área com armadura de cisalhamento; (b) ruptura por esmagamento da biela comprimida próximo à face do pilar; (c) falha fora da área com armadura de cisalhamento (EINPAUL, 2016)

A resistência da ligação depende de diversos parâmetros. Dentre os principais pode-se citar: a resistência à tração do concreto; taxa de armadura de flexão tracionada; dimensão, formato e posição do pilar; espessura da laje; efeito de escala (*size effect*); uso de armadura de cisalhamento; furos e descontinuidades. Devido à complexidade do fenômeno da punção, a maioria das formulações para avaliar a resistência da ligação é feita baseada em equações empíricas ou em formulações simplificadas, sendo o Método da Superfície de Controle e a Teoria da Fissura Crítica de Cisalhamento (TFCC) as principais formulações utilizadas atualmente.

2.3 MÉTODO DA SUPERFÍCIE DE CONTROLE PARA DETERMINAÇÃO DA RESISTÊNCIA À PUNÇÃO

O método se baseia na determinação de uma tensão uniforme solicitante de punção em uma superfície de controle específica, perpendicular ao plano médio da laje, e localizada a uma determinada distância da face do pilar ou da área carregada. Essa tensão é comparada com um parâmetro de resistência do concreto para a mesma superfície. Quando a tensão solicitante na superfície de controle for maior que o parâmetro de resistência do concreto, faz-se necessário o uso de armadura de punção; caso contrário, a peça de concreto dimensionada é adequada para resistir aos esforços solicitantes (SILVA, 2017).

A carga de ruptura das lajes pode ser prevista por meio do cálculo da tensão nominal de cisalhamento atuando em uma dada superfície de controle e comparando-se esta tensão com a

resistência do concreto ao cisalhamento. As normas que utilizam esse método se diferenciam pela determinação da superfície de controle e a tensão de cisalhamento limite considerada (TRAUTWEIN, 2006).

O método da superfície de controle não representa o fenômeno físico do problema da punção; porém, é uma forma simples, prática e com boa precisão para determinação da resistência à punção. Esse método é utilizado por diversas normas, com destaque para a NBR 6118:2014, EUROCODE 2:2004 e a ACI 318-19.

2.4 TEORIA DA FISSURA CRÍTICA DE CISALHAMENTO (TFCC) PARA DETERMINAÇÃO DA RESISTÊNCIA À PUNÇÃO

A TFCC foi proposta por Muttoni (2008) e apresenta uma explicação mecânica do fenômeno da punção. Segundo Muttoni e Schwartz (1991), a resistência ao cisalhamento diminui a partir do surgimento de uma fissura crítica de cisalhamento que se propaga ao longo da laje por meio de uma biela comprimida que transmite a força cortante para o pilar (Figura 2.3).

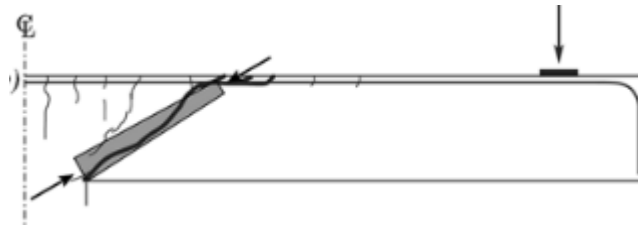


Figura 2.3 - Biela teórica desenvolvida através da fissura crítica de cisalhamento (Adaptado de Muttoni, 2008)

Conforme Muttoni e Schwartz (1991), a abertura da fissura crítica de cisalhamento reduz a resistência da biela de concreto comprimida, sendo a mesma proporcional ao produto $\psi \times d$ (Figura 2.4). Com base nessas observações, Muttoni e Schwartz (1991) propuseram um critério de falha semi-empírico, que pode ser observado na Equação (2.1)

$$\frac{V_R}{b_0 d^3 \sqrt{f_c}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\psi d}{4 \text{ mm}}\right)^2} \quad (2.1)$$

Onde:

d é a altura útil em relação a armadura de flexão da laje;

b_0 é o perímetro da seção crítica localizado a $d/2$ da face do pilar;

f_c é a resistência à compressão do concreto;

ψ é a rotação da laje;

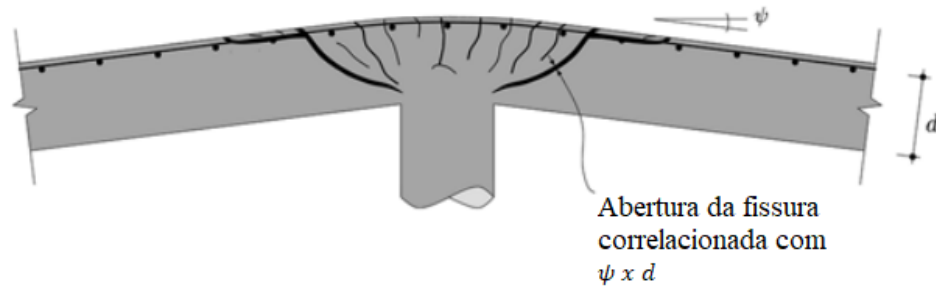


Figura 2.4 - Correlação entre a abertura da fissura crítica de cisalhamento, espessura da laje e a rotação ψ (Adaptado de MUTTONI, 2008)

Além da resistência à punção reduzir com o aumento da rotação da laje, a transferência do cisalhamento depende da rugosidade da fissura, que é função do tamanho máximo do agregado. A capacidade de transmissão das forças cisalhantes pode ser levada em consideração a partir da razão entre largura nominal da fissura crítica ψd e soma do diâmetro máximo do agregado com um diâmetro de referência (WAKRAVEN, 1981). Fundamentado nesses conceitos, Muttoni (2003) propôs uma nova formulação para avaliação da resistência à punção. Essa resistência pode ser estimada conforme mostra Equação (2.2).

$$\frac{V_R}{b_0 d \sqrt{f_c}} = \left(\frac{3/4}{1 + \frac{15\psi d}{d_{g0} + d_g}} \right) \quad (2.2)$$

Onde:

d_{g0} é o diâmetro de referência do agregado admitido como 16 mm;

d_g é o diâmetro máximo do agregado usado no concreto da laje.

Observando a curva obtida pela Equação 2.2 (Figura 2.5) fica evidente a redução de resistência com o aumento da largura nominal da fissura ψd , mostrando que há uma diminuição de resistência tanto com o aumento da rotação da laje quanto com o aumento da espessura da

mesma. Esse comportamento evidencia a influência do efeito de escala nas lajes lisas. Além disso, é possível observar a influência do agregado no comportamento da resistência da laje, visto que a transferência das forças de cisalhamento depende da rugosidade da superfície após o desenvolvimento da fissura e do engrenamento dos agregados, que é função do tipo e da granulometria do mesmo.

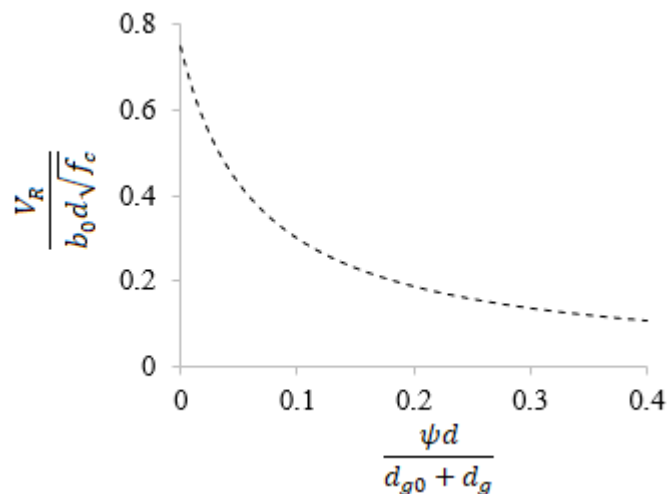


Figura 2.5 – Resistência à punção em função da largura nominal da fissura (Adaptado de MUTTONI, 2008)

Para determinação da resistência última à punção, a relação entre a carga aplicada V e a rotação da laje ψ deve ser conhecida. Na maioria dos casos a relação entre carga-rotação pode ser obtida através de uma análise não linear do comportamento à flexão da laje. Porém, expressões simplificadas podem ser usadas com boa precisão, conforme apresentado na Equação (2.3) (MUTTONI, 2008).

$$\psi = 1,5 \left(\frac{r_s f_y}{d E_s} \right) \left(\frac{V}{V_{flex}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.3)$$

Onde:

V é a força aplicada;

V_{flex} é a força correspondente a capacidade de flexão da laje;

r_s é a distância entre o eixo do pilar e a linha de momentos nulos;

f_y é a tensão de escoamento da armadura de flexão tracionada;

E_s é o módulo de elasticidade da armadura de flexão tracionada.

Por fim, utilizando as Equações 2.2 e 2.3 pode-se determinar a resistência última à punção da laje. Plotando a Equação 2.3, que expressa o comportamento carga-rotação da laje de forma teórica, e a Equação 2.2, que expressa a redução da resistência da laje em função do aumento da rotação, observa-se que o ponto de interseção dessas curvas representa a resistência última à punção da ligação laje-pilar, conforme pode ser observado na Figura 2.6.

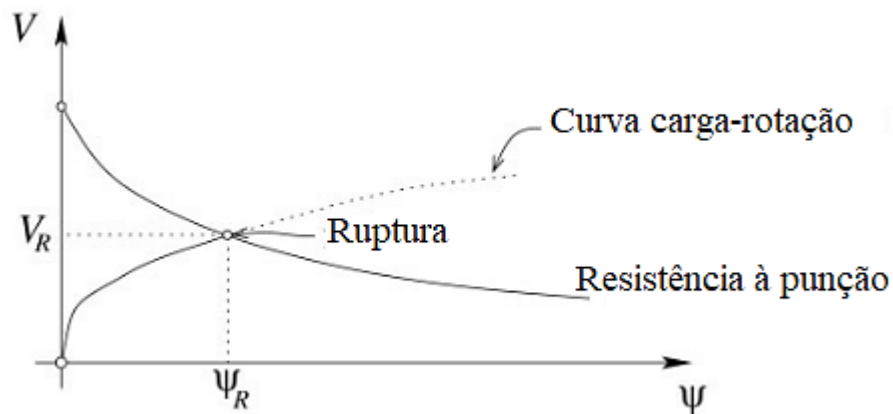


Figura 2.6 – Cálculo da ruptura por punção segundo a TFCC (Adaptado de Muttoni et al.,2013)

2.5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA DETERMINAÇÃO DA RESISTÊNCIA À PUNÇÃO

O comportamento de algumas estruturas muitas vezes é tão complexo que não possui solução analítica, como no caso do fenômeno da punção. Problemas dessa natureza podem ser resolvidos por métodos de aproximação. O Método dos Elementos Finitos nada mais é que um procedimento numérico para determinação de respostas aproximadas de sistemas contínuos. Apesar das diversas vantagens que o método apresenta, a questão que pode limitar o seu uso é o tempo de processamento necessário para se obter uma determinada solução. Porém, com o uso de processadores cada vez mais rápidos o tempo de processamento é cada vez menor.

Dessa forma, o desenvolvimento desse método em estruturas de concreto armado já é bem difundido e apresenta modelos que simulam o comportamento real da estrutura com boa precisão. Dentre os modelos utilizados para determinação da resistência à punção pode-se citar os utilizados nos trabalhos de Martinelli (2003), Mahmoud (2015), Genikomsou e Polak (2015), Lazzari (2016) e Benincá (2019). Para esse trabalho foi utilizado dois modelos; o modelo

desenvolvido por Lazzari (2016) e modificado pelo autor, conforme descrição detalhada no item 4.1; e o modelo desenvolvido por Benincá (2019) com modificações dos parâmetros relacionados ao comportamento do concreto.

2.6 PRESCRIÇÕES DA NBR 6118:2014 PARA O DIMENSIONAMENTO À PUNÇÃO

A NBR 6118:2014 utiliza como modelo de cálculo a verificação da tensão de cisalhamento em duas ou mais superfícies críticas definidas no entorno das forças concentradas. Na primeira superfície crítica, denominada de contorno C, do pilar ou da carga concentrada, verifica-se indiretamente a tensão de compressão diagonal do concreto, através da tensão de cisalhamento. Na segunda superfície crítica, denominada de contorno C', afastada $2d$ do pilar ou carga concentrada, verifica-se a capacidade da ligação à punção, associada à resistência à tração diagonal. Essa verificação também é feita através de uma tensão de cisalhamento, no contorno C'. Pode-se fazer necessária a verificação de uma terceira superfície crítica, denominada de contorno C''. Essa verificação só será necessária em caso da existência de armadura transversal para reforço da ligação.

2.6.1 Superfícies críticas

A Norma apresenta diferentes superfícies críticas que levam em consideração a posição dos pilares. A superfície crítica C' é determinada a partir de um polígono convexo circunscrito ao contorno da região carregada, afastado a uma distância de $2d$ e sendo construído de forma a minimizar o seu perímetro.

Para pilares internos as superfícies críticas C e C' são mostradas na Figura 2.7. Já para os pilares de borda e de extremidade, as superfícies são mostradas nas Figura 2.8 e Figura 2.9, respectivamente.

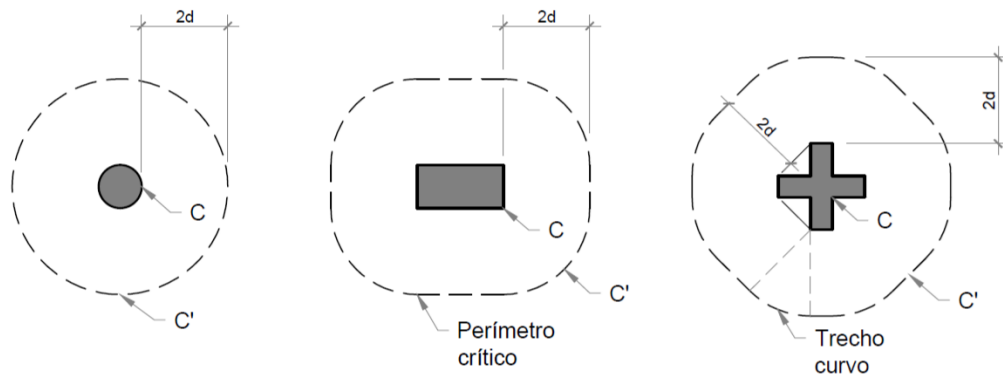


Figura 2.7 – Perímetro crítico em pilares internos (SILVA, 2017)

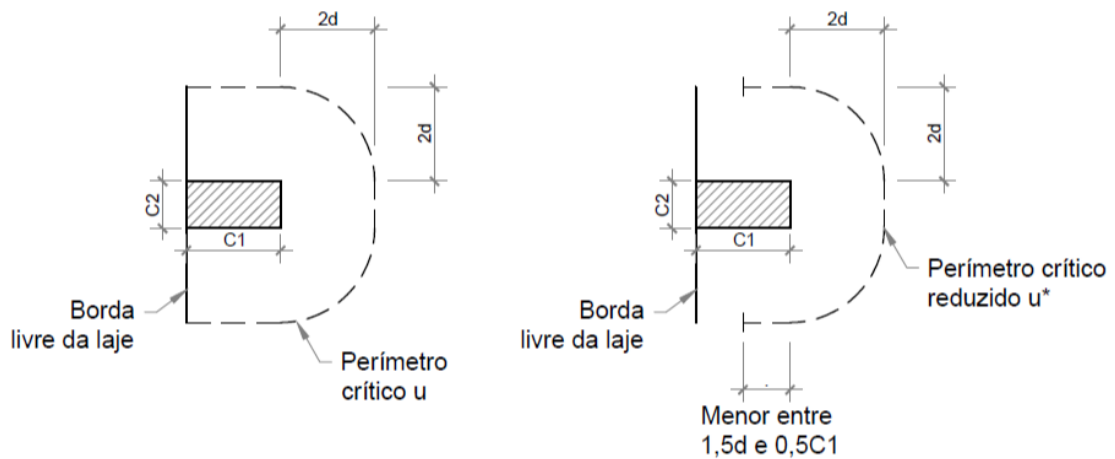


Figura 2.8 – Perímetro crítico em pilares de borda (SILVA, 2017)

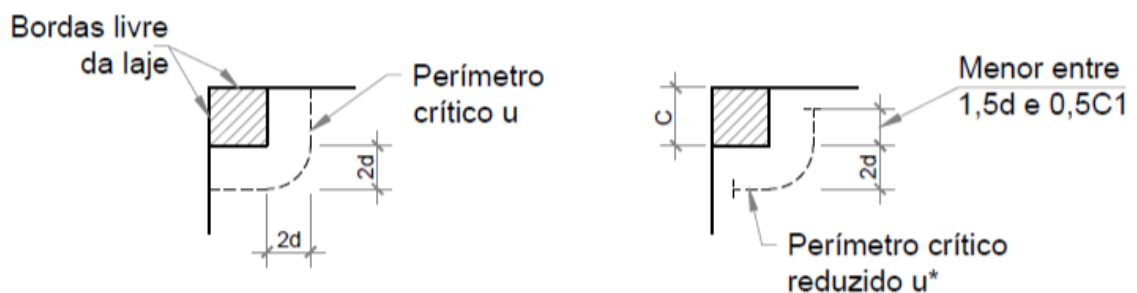


Figura 2.9 – Perímetro crítico em pilares de canto (SILVA, 2017)

A ABNT NBR 6118 (2014) também apresenta casos especiais de definição do contorno crítico, como quando a laje apresentar abertura situada a menos de $8d$ do contorno C . Neste caso, não se pode considerar o trecho do contorno crítico C' entre as duas retas que passam pelo centro

de gravidade da área de aplicação da força e que tangenciam o contorno da abertura, conforme mostra a Figura 2.10.

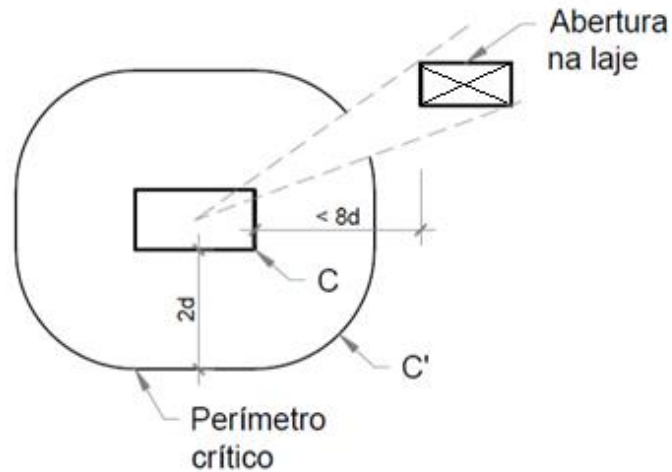


Figura 2.10-Perímetro crítico junto à abertura na laje (SILVA, 2017)

2.6.2 Definição da tensão solicitante nas superfícies críticas C e C'

Para pilares internos com carregamento simétrico a tensão de cisalhamento é dada por:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u \cdot d} \quad (2.4)$$

$$d = \frac{dx + dy}{2} \quad (2.5)$$

Onde:

d - é a altura útil da laje ao longo do contorno crítico C';

dx, dy - são as alturas úteis nas duas direções ortogonais;

u - é o perímetro do contorno crítico C';

$u \cdot d$ - é a área da superfície crítica;

F_{sd} - é a força ou a reação concentrada de cálculo.

Para pilares internos, com efeito de momento, a tensão de cisalhamento, que leva em consideração a assimetria do carregamento, é dada por:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u \cdot d} + \frac{K \cdot M_{sd}}{W_p \cdot d} \quad (2.6)$$

Onde:

M_{sd} – momento de cálculo transmitido da laje para o pilar;

K - é o coeficiente que fornece a parcela de M_{sd} transmitida ao pilar por cisalhamento, que depende da relação C1/C2;

W_p - é o módulo de resistência plástica do perímetro crítico em questão.

O coeficiente K é dado na Tabela 2.1, em função da relação entre as dimensões da seção do pilar.

Tabela 2.1- Valores de K

C1/C2	0,5	1,0	2,0	3,0
K	0,45	0,60	0,70	0,80

Fonte: ABNT NBR 6118 (2014)

Ao utilizar a Tabela 2.1 deve-se observar o seguinte:

- C_1 é a dimensão do pilar paralela à excentricidade da força;
- C_2 é a dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da força;
- para pilares circulares internos, deve ser adotado o valor $K = 0,6$.

Os valores de W_p são calculados pelas expressões a seguir:

a) para pilar retangular:

$$W_p = \frac{C_1^2}{2} + C_1 C_2 + 4C_2 d + 16d^2 + 2\pi d C_1 \quad (2.7)$$

b) para pilar circular:

$$W_p = (D + 4d)^2 \quad (2.8)$$

Onde:

D é o diâmetro do pilar;

Pode-se calcular o W_p desprezando a curvatura dos cantos do perímetro crítico, através da expressão:

$$W_p = \int_0^u |e| dl \quad (2.9)$$

Onde:

dl - é o comprimento infinitesimal no perímetro crítico u ;

e - é a distância de dl ao eixo que passa pelo centro do pilar e sobre o qual atua o momento fletor M_{sd} .

Já para pilares de borda a tensão de cisalhamento é dividida em:

a) sem momento no plano paralelo a borda livre:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u \cdot d} + \frac{K1 \cdot M_{sd1}}{W_{p1} \cdot d} \quad (2.10)$$

sendo:

$$M_{sd1} = (M_{sd} - M_{sd^*}) \geq 0 \quad (2.11)$$

onde:

F_{sd} - é a reação de apoio;

u^* - é o perímetro crítico reduzido;

M_{Sd} - é o momento de cálculo no plano perpendicular à borda livre;

M_{Sd^*} - é o momento de cálculo resultante da excentricidade do perímetro crítico reduzido u^* em relação ao centro do pilar;

W_{p1} - é o módulo de resistência plástica perpendicular à borda livre, calculado para o perímetro u ;

O coeficiente K1 assume os valores estabelecidos para K na Tabela 2.1, com C1 e C2 de acordo com a Figura 2.8.

b) com momento no plano paralelo à borda livre:

$$\tau_{Sd} = \frac{F_{Sd}}{u^* \cdot d} + \frac{K1 \cdot M_{Sd1}}{W_{p1} \cdot d} + \frac{K2 \cdot M_{Sd2}}{W_{p2} \cdot d} \quad (2.12)$$

onde:

M_{Sd2} - é o momento de cálculo no plano paralelo à borda livre;

W_{p2} - é o módulo de resistência plástica na direção paralela à borda livre, calculado pelo perímetro u ;

O coeficiente K2 assume os valores estabelecidos para K na Tabela 2.1, substituindo-se C1/C2 por C2/2C1 (sendo C1 e C2 estabelecidos na Figura 2.8).

Para os pilares de canto, adota-se o mesmo procedimento disposto para o pilar de borda, quando não age momento no plano paralelo à borda, fazendo-se a verificação, separadamente, para cada uma das bordas livres. O valor de K deve ser calculado em função da proporção C1/C2, sendo C1 e C2, respectivamente, os lados do pilar perpendicular e paralelo à borda livre adotada.

2.6.3 Definição da tensão resistente nas superfícies críticas C, C' e C''

A resistência à compressão diagonal do concreto na superfície crítica C, em lajes submetidas a punção, com ou sem armadura, é dada por:

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd2} = 0,27 \alpha_c f_{cd} \quad (2.13)$$

onde:

α_c - é o fator de fragilidade do concreto;

f_{cd} - é a resistência à compressão de cálculo do concreto.

Quando os vãos que chegam a um pilar interno não diferirem mais de 50 %, e caso não exista aberturas junto ao pilar, o valor de τ_{Rd2} pode ser ampliado em 20 % por efeito de estado múltiplo de tensões.

A tensão resistente na superfície crítica C' é calculada levando em consideração a presença ou não de armadura de punção. Para elementos estruturais ou trechos sem armadura de punção a resistência é determinado pela Equação (2.14):

$$\tau_{Sd} \leq \tau_{Rd1} = 0,13 \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) (100\rho f_{ck})^{\frac{1}{3}} + 0,10\sigma_{cp} \quad (2.14)$$

sendo:

$$\rho = \sqrt{\rho_x \rho_y} \quad (2.15)$$

$$d = (d_x + d_y)/2 \quad (2.16)$$

onde:

d - é a altura útil média da laje ao longo do contorno crítico C, em centímetros;

ρ - é a taxa geométrica de armadura de flexão aderente;

σ_{cp} - é a tensão inicial no concreto ao nível do baricentro da armadura de protensão, devida à protensão simultânea de n cabos. Quando não há proteção $\sigma_{cp} = 0$;

f_{ck} - é a resistência característica à compressão do concreto, em MPa;

ρ_x e ρ_y - são as taxas de armadura nas duas direções ortogonais, assim calculadas:

- na largura igual à dimensão ou área carregada do pilar, acrescida de $3d$ para cada um dos lados;
- no caso de proximidade da borda, prevalece a distância até a borda, quando menor que $3d$.

Em trechos com armadura de punção a tensão resistente na superfície crítica C' em elementos estruturais é determinado pela Equação (2.25)

$$\tau_{sd} \leq \tau_{Rd3} = 0,10 \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) (100\rho f_{ck})^{\frac{1}{3}} + 0,10\sigma_{cp} + 1,5 \frac{d}{s_r} \frac{A_{sw} f_{ywd} \text{sen } \alpha}{u d} \quad (2.17)$$

onde:

s_r é o espaçamento radial entre linhas de armadura de punção, sempre com $a \leq 0,75d$;

A_{sw} é a área da armadura de punção em um contorno completo paralelo a C';

α é o ângulo de inclinação entre o eixo da armadura de punção e o plano da laje;

u é o valor numérico do perímetro crítico;

f_{ywd} é a resistência de cálculo da armadura de punção, não maior que 300 MPa para conectores, ou 250 MPa para estribos (CA-50 ou CA-60). Para lajes com espessura maior que 15cm, pode assumir os seguintes valores:

$$f_{ywd} = 250 + \frac{185}{20} (h - 15) \text{ MPa, para } 15 \leq h \leq 35 \text{ cm}; \quad (2.18)$$

$$f_{ywd} = 435 \text{ MPa, para } h > 35 \text{ cm}$$

2.7 PRESCRIÇÕES DO EUROCODE 2 (2004)

As prescrições do EUROCODE 2 (2004) são baseadas no CEB-FIP Model Code 90 o que torna as expressões semelhantes a da NBR 6118 (ABNT, 2014). Dessa forma, a norma recomenda que a resistência à punção deve ser verificada em dois perímetros de controle. Um junto a face do pilar (u_0) e outro afastado de $2d$ da área carregada (u_1), conforme mostrado na Figura 2.11.

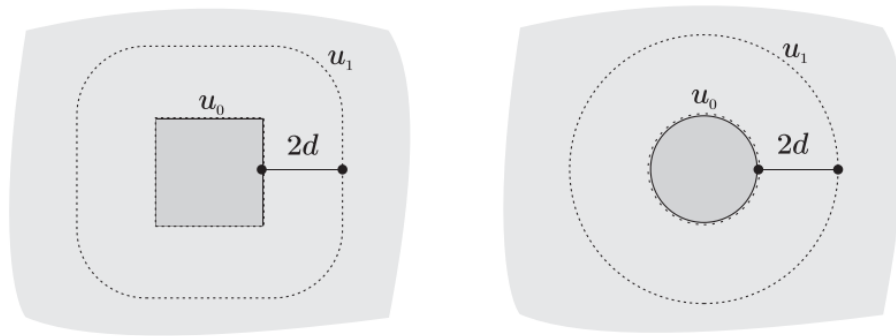


Figura 2.11 – Perímetro de controle u_0 e u_1 (DÍAZ, 2018)

Para o dimensionamento das lajes, o EC2 (2004) estabelece que a máxima tensão de cisalhamento solicitante não deve exceder a tensão máxima resistente, conforme Equação (2.19).

$$v_{Ed} \leq v_{Rd} \quad (2.19)$$

A tensão de cisalhamento solicitante de cálculo é dada por:

$$v_{Ed} = \beta \cdot \frac{V_{Ed}}{u_i \cdot d} \quad (2.20)$$

sendo:

β : coeficiente utilizado para consideração da excentricidade da carga e localização do pilar;

V_{Ed} : força ou reação concentrada de cálculo.

Para o perímetro de controle u_0 a tensão resistente à punção deve ter um valor máximo igual a:

$$v_{Rd,max} = 0,30f_{cd} \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) \quad (2.21)$$

No perímetro de controle u_1 a tensão resistente à punção é determinada conforme Equação (2.22).

$$v_{Rd,c} = \text{máx} \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{0,18}{\gamma_c} \right) k (100\rho f_{ck})^{\frac{1}{3}} \\ \left(\frac{0,0525}{\gamma_c} \right) k^{\frac{3}{2}} f_{ck}^{\frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad (2.22)$$

sendo:

γ_c : coeficiente de minoração da resistência do concreto, igual a 1,5;

k : fator relacionado ao efeito escala, sendo $k = 1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \leq 2,0$ com d em cm.

ρ : taxa de armadura longitudinal, limitada a 2%

2.8 PRESCRIÇÕES DO CÓDIGO MODELO *fib* 2010 (2012) PARA O DIMENSIONAMENTO À PUNÇÃO

O dimensionamento à punção de lajes lisas de acordo com o Código Modelo *fib* 2010 (2012) é feito a partir da comparação da força resistente à punção de cálculo (V_{Rd}) com a força solicitante à punção de cálculo (V_{Ed}) e tem como base teórica a TFCC proposta Muttoni (2008). A condição de segurança é atendida quando:

$$V_{Rd} \geq V_{Ed} \quad (2.23)$$

A força solicitante à punção de cálculo leva em consideração os coeficientes de ponderação dados pelo Código Modelo *fib* 2010 (2012) e pode ser determinada a partir de uma análise da área de influência dos pilares, para uma primeira avaliação de projeto, e por meio da análise linear-elástica das reações dos pilares na laje, para uma verificação mais precisa. O valor da reação dos pilares pode ser reduzido considerando a carga distribuída na laje na região definida por $0,5d_v$ a partir da face do pilar, conforme mostra a Figura 2.12. A Equação (2.24) apresenta a formulação para determinação dessa solicitação.

$$V_{Ed} = \gamma V_{Ek} \quad (2.24)$$

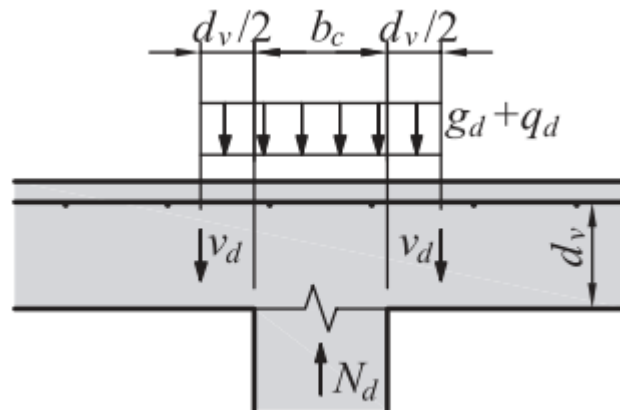


Figura 2.12 – Determinação da força solicitante à punção de cálculo (MUTTONI, 2013)

A força cortante resistente à punção é calculada pela contribuição da resistência do concreto e à resistência da armadura de punção, conforme apresentado na equação abaixo:

$$V_{Rd} = V_{Rd,c} + V_{Rd,s} \quad (2.25)$$

onde:

$V_{Rd,c}$: força resistente do concreto à punção;

$V_{Rd,s}$: força resistente da armadura de punção.

A força resistente do concreto à punção é determinada pela Equação (2.26) :

$$V_{Rd,c} = k_{\psi} \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} b_0 d_v \quad (2.26)$$

sendo:

b_0 é o perímetro de controle definido por $0,5d_v$, conforme Figura 2.13;

d_v é a distância do centroide da armadura de flexão à área de apoio.

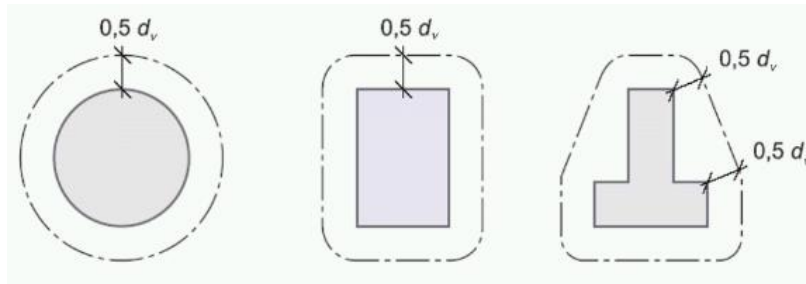


Figura 2.13 – Perímetros básicos de controle (adaptado de MC 2010, 2012)

O parâmetro k_ψ depende da rotação da laje e pode ser determinado a partir da Equação (2.27):

$$k_\psi = \frac{1}{1,5 + 0,9k_{dg}\psi d} \leq 0,6 \quad (2.27)$$

onde:

$$k_{dg} = \frac{32}{16 + d_g} \geq 0,75 \quad (2.28)$$

sendo:

d_g o diâmetro máximo do agregado graúdo.

A força resistente da armadura de punção pode ser calculada pela Equação (2.29):

$$V_{Rd,s} = \sum A_{sw} k_e \sigma_{swd} \quad (2.29)$$

onde:

$$\sigma_{swd} = \frac{E_s \psi}{6} \left(1 + \frac{f_{bd}}{f_{ywd}} \cdot \frac{d}{\phi_w} \right) \leq f_{ywd} \quad (2.30)$$

sendo:

ϕ_w o diâmetro da armadura de combate à punção;

f_{ywd} a tensão de escoamento da armadura de punção;

f_{bd} a tensão de aderência entre as barras de aço e o concreto;

d o valor médio da altura efetiva na direção x e y.

A máxima resistência à punção é limitada pela biela de concreto comprimida na área da força concentrada, sendo o valor determinado pela equação abaixo:

$$V_{Rd,max} = k_{sys} k_{\psi} \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} b_0 d_v \leq \frac{\sqrt{f_{ck}}}{\gamma_c} b_0 d_v \quad (2.31)$$

onde:

k_{sys} é um coeficiente que leva em consideração a eficiência da armadura de punção em controlar as fissuras de tração. O valor de k_{sys} pode ser adotado igual a dois, caso não se tenha dados para sua determinação.

O Código Modelo *fib* 2010 (2012) utiliza níveis de aproximação para avaliação dos parâmetros de dimensionamento. Esses níveis de aproximação são utilizados para que a estrutura seja analisada com uma determinada precisão e para que se tenha um tempo de análise coerente com os processos de dimensionamento utilizados atualmente na prática, uma vez que é de conhecimento comum que toda análise estrutural é uma aproximação da realidade do comportamento da estrutura. Os níveis de aproximação são uma metodologia para se dimensionar a estrutura de forma prática e precisa, sendo que, sempre que necessário, pode-se refinar o modelo de dimensionamento por meio de uma estimativa melhor conforme os níveis de aproximação. A Figura 2.14 mostra um gráfico onde são ilustrados a precisão e o tempo de análise mínimo para cada nível de aproximação.

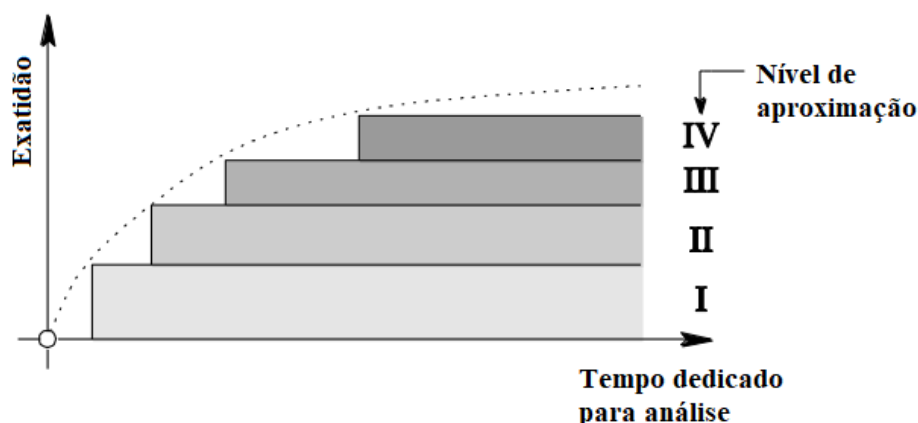


Figura 2.14 – Exatidão dos níveis de aproximação em função do tempo dedicado para análise (Adaptado de MC 2010, 2012)

Para o nível I de aproximação a rotação da laje pode ser estimada a partir da expressão abaixo, sendo uma aproximação normalmente utilizada para uma primeira avaliação de projeto.

$$\psi = 1,5 \cdot \frac{r_s f_{yd}}{d E_s} \quad (2.32)$$

onde:

r_s é a posição em relação ao eixo do pilar onde o momento fletor é igual a zero.

O nível II de aproximação apresenta uma formulação mais precisa para determinação da rotação da laje, onde se leva em consideração o momento atuante e o momento resistente da laje, conforme mostra a Equação (2.33).

$$\psi = 1,5 \cdot \frac{r_s f_{yd}}{d E_s} \cdot \left(\frac{m_{Ed}}{m_{Rd}} \right)^{1,5} \quad (2.33)$$

onde:

m_{Ed} é a média do momento para o cálculo da armadura de flexão na faixa de suporte;

m_{Rd} é a média do momento de cálculo da armadura de flexão da faixa de suporte.

O nível III de aproximação segue a mesma formulação apresentada no nível II, porém o coeficiente 1,5 da Equação (2.33) pode ser substituído por 1,2 se a determinação dos parâmetros de cálculo for feita conforme itens a seguir:

- a) r_s é calculado usando um modelo elástico linear;
- b) m_{Ed} é calculado usando um modelo elástico linear e é definido como o valor médio do momento de flexão de cálculo na região b_s ;
- c) b_s pode ser determinado como no nível II de aproximação adotando r_{sx} e r_{sy} como sendo o valor máximo na direção analisada. Para pilares de extremidade e de canto o valor máximo de r_s pode ser considerado maior ou igual a $0,67b_{sr}$.

A determinação da rotação da laje para o nível IV é feita com base em uma análise não linear da estrutura, levando em consideração todos os efeitos relevantes para determinação precisa do valor da rotação. Os principais efeitos que devem ser levados em consideração nessa análise são: efeitos de fissuração; efeito de enrijecimento à tração (*tension stiffening*), engrenamento dos agregados e o efeito de pino da armadura (*dowell effect*).

2.9 PRESCRIÇÕES DO ACI 318 (2019)

Conforme o ACI 318 (2019) a verificação da resistência à punção em lajes lisas de concreto armado sem armaduras de cisalhamento é feita com base em uma única superfície de controle. A verificação das tensões cisalhantes é realizada em um perímetro de controle afastado a uma distância igual a $d/2$ das faces do pilar, conforme pode ser observado na Figura 2.15. O atendimento da norma é feito com base na verificação da Equação (2.34).

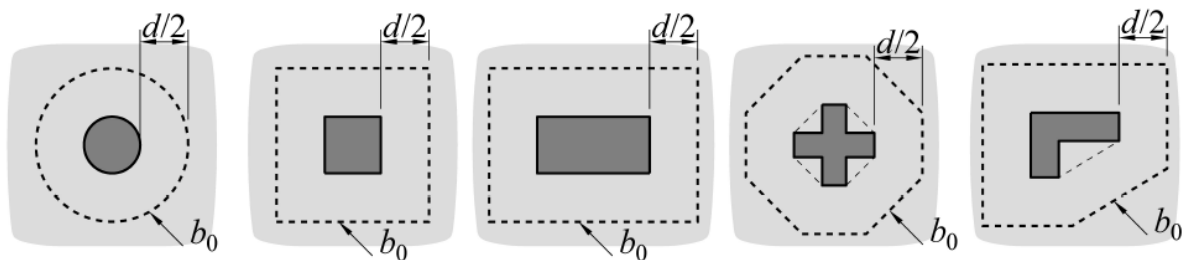


Figura 2.15 – Perímetro de controle b_0 adotado pelo ACI 318 (2019) (SANTOS, 2018 adaptado de ACI 318(2014))

$$\phi \cdot V_n \geq V_u \quad (2.34)$$

sendo:

V_u : força de cisalhamento na seção;

V_n : força resistente nominal ao cisalhamento conforme Equação (2.35);

ϕ : coeficiente de minoração da resistência, igual a 0,75 para esforços de cisalhamento.

$$V_n = V_c + V_s \quad (2.35)$$

onde:

V_c : é a força resistente nominal do concreto;

V_s : é a força resistente da armadura de punção.

A força resistente nominal do concreto, em lajes lisas sem armadura de punção, é determinada pela Equação (2.36).

$$V_c = \min \begin{cases} 0,33\lambda_s\lambda\sqrt{f'_c}b_0d \\ 0,17\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)\lambda_s\lambda\sqrt{f'_c}b_0d \\ 0,083\left(2 + \frac{\alpha_s d}{b_0}\right)\lambda_s\lambda\sqrt{f'_c}b_0d \end{cases} \quad (2.36)$$

sendo:

f'_c : valor característico da resistência à compressão do concreto em MPa, limitada ao máximo de 70 MPa;

λ : fator de modificação que leva em consideração a redução das propriedades mecânicas de concretos leves em comparação à concretos normais de mesmo f'_c .
Para concreto de densidade normal, $\lambda = 1$;

λ_s : fator de modificação do efeito escala conforme Equação (2.37);

β_0 : razão entre a maior dimensão do pilar e a maior largura perpendicular a esta;

α_s : constante que depende da posição do pilar, sendo igual a 40 para pilares internos, 30 para pilares de borda e 20 para pilares de canto;

b_0 : perímetro de controle afastado a uma distância de $d/2$ da face do pilar.

$$\lambda_s = \sqrt{\frac{2}{1 + 0,004 \cdot d}} \leq 1, \text{ com } d \text{ em mm} \quad (2.37)$$

Além das verificações apresentadas, deve-se determinar a armadura de flexão mínima disposta na região de ligação laje-pilar quando a verificação da Equação (2.38) não é atendida. Essa armadura é calculada empregando a Equação (2.39) sendo disposta na largura b_{laje} ilustrada na Figura 2.16

$$V_u > \phi \frac{0,33}{2} \lambda_s \lambda \sqrt{f'_c} b_0 d \quad (2.38)$$

$$A_{s,min} = \frac{5 \cdot V_u \cdot b_{laje}}{\phi \cdot d \cdot \alpha_s \cdot f_y} \quad (2.39)$$

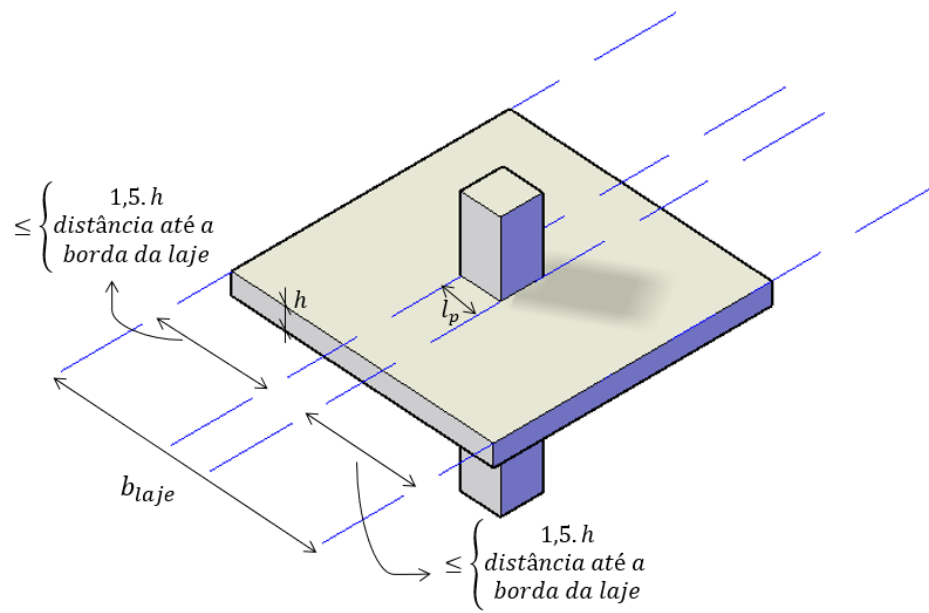


Figura 2.16 – Definição da largura b_{laje} segundo ACI 318 (2019)

3 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

A elaboração de qualquer projeto estrutural é feita a partir da comparação das solicitações impostas ao sistema com a resistência obtida pelo mesmo. A avaliação das solicitações e das resistências na maioria dos projetos é feita a partir de valores determinísticos. Porém, a realidade física apresenta, tanto para resistência, quanto para solicitação, valores aleatórios associados aos parâmetros de projeto. Dessa forma, é impossível afirmar que um projeto é cem por cento seguro, pois não há nenhuma certeza nos valores utilizados para sua elaboração. Com isso, é necessário se avaliar a probabilidade de falha associada a estrutura, ou seja, a probabilidade da solicitação ser maior que a resistência do sistema, e assim, assumir que uma estrutura segura é aquela onde se admite a probabilidade de ocorrência de falha.

As incertezas presentes em projetos de engenharia podem ser classificadas em intrínseca, epistêmica e erro humano. Segundo Beck (2019), as incertezas epistêmicas são relacionadas com o conhecimento sobre o comportamento das variáveis, dos processos envolvidos e do problema em questão, sendo que existe a possibilidade teórica da eliminação desse tipo de incerteza por meio do melhor conhecimento do comportamento estrutural. Porém, as incertezas classificadas como intrínsecas não podem ser eliminadas, pois correspondem a uma aleatoriedade irreduzível, onde não se pode prever o comportamento do sistema, mas sim a probabilidade de determinado comportamento. Por fim, as incertezas relacionadas ao erro humano, não admite a separação entre intrínseco ou epistêmico, pois os erros humanos são inevitáveis (intrínsecos), porém podem ser reduzidos por meio de qualificação e treinamento (epistêmico) (BECK, 2019).

Contudo, a análise dessas incertezas e a avaliação das probabilidades relacionadas ao comportamento dos projetos de engenharia, pode ser realizada a partir da Teoria da Confiabilidade Estrutural, cuja variáveis de projeto são tratadas como variáveis aleatórias e não mais determinísticas. Por isso, a Teoria da Confiabilidade tem forte embasamento na teoria de probabilidade e estatística. Assim, utilizando essa teoria é possível avaliar a segurança da estrutura e os métodos utilizados para o seu dimensionamento.

3.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

3.1.1 Variável aleatória

Uma variável aleatória é uma função que associa um número real x a cada resultado possível de um fenômeno aleatório, ou seja, atribui um valor numérico para cada elemento de um determinado espaço amostral (ANG e TANG, 2007). Ao contrário de uma variável determinística, que é representada por um único valor, uma variável aleatória pode assumir um valor para cada evento possível. A probabilidade de ocorrência desse evento é um número que depende de x , obtida pela função distribuição de probabilidade acumulada (FDA), conforme expressão (3.1).

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (3.1)$$

Na expressão (3.1) a variável aleatória genérica é designada por uma letra maiúscula, enquanto a realização dessa variável será designada por uma letra minúscula.

Uma variável aleatória X é dita contínua quando a $F_X(x)$ é uma função contínua em x e discreta quando a função é descontínua. Sendo a variável aleatória X contínua, a probabilidade da variável aleatória X estar contida no intervalo $x \leq X \leq x + dx$, é definida pela expressão (3.2), onde a função $f_X(x)$ é denominada função de densidade de probabilidade (FDP) da variável X .

$$P(x \leq X \leq x + dx) = f_X(x)dx \quad (3.2)$$

A função distribuição acumulada (FDA) de uma variável aleatória contínua é dada pela expressão (3.3).

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(x)dx \quad (3.3)$$

Por consequência da expressão (3.3), a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória X é igual à derivada da função de distribuição acumulada de probabilidade em relação à x , conforme mostra a expressão (3.4).

$$f_X(x) = \frac{d F_X(x)}{dx} \quad (3.4)$$

O momento de primeira ordem de uma variável aleatória, que representa a medida de tendência central, também denominado média ou valor esperado, é dada pela expressão (3.5).

$$E[X] = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (3.5)$$

A medida de dispersão de uma variável aleatória, que é o cálculo do momento de segunda ordem em relação ao eixo central, é denominada de variância e é dada pela expressão (3.6).

$$Var[X] = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \quad (3.6)$$

A grande maioria das funções de distribuição de probabilidade tem seus parâmetros determinados pelo primeiro e segundo momento da variável aleatória.

3.1.2 Problema fundamental da confiabilidade

A confiabilidade estrutural está relacionada com a probabilidade de um sistema não falhar ao longo da vida útil, quando submetido as condições estipuladas no seu projeto. Dessa forma, deve-se conhecer as funções de variáveis aleatórias que representam a resistência e a sollicitação do sistema, para se determinar a sua probabilidade de falha.

Supondo que as funções de distribuição de probabilidade da resistência (R) e da sollicitação (S) sejam conhecidas, a probabilidade de falha P_f do sistema é dada pela expressão (3.7).

$$P_f = P(R < S) \quad (3.7)$$

A Equação (3.7) pode ser representada pela função de densidade conjunta de probabilidade:

$$P_f = \int_{D_f} f_{RS}(r, s) dr ds \quad (3.8)$$

sendo:

D_f o domínio de falha.

Conforme mostrado na Figura 3.1, o domínio de falha D_f é limitado pela equação $r = s$. Considerando a resistência e a sollicitação como variáveis aleatórias estatisticamente independentes, a Equação (3.8) pode ser escrita conforme a seguinte expressão:

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^s f_R(r) f_S(s) dr ds \quad (3.9)$$

Visto que:

$$F_R(s) = \int_{-\infty}^s f_R(r) dr \quad (3.10)$$

A Equação (3.9) pode assumir a seguinte forma, conhecida como integral de convolução:

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(s) F_R(s) ds \quad (3.11)$$

onde:

$f_S(s)$ é a função marginal de densidade de probabilidade da solitação;

$F_R(s)$ é função marginal de distribuição cumulativa de probabilidade que representa a probabilidade de $R \leq s$.

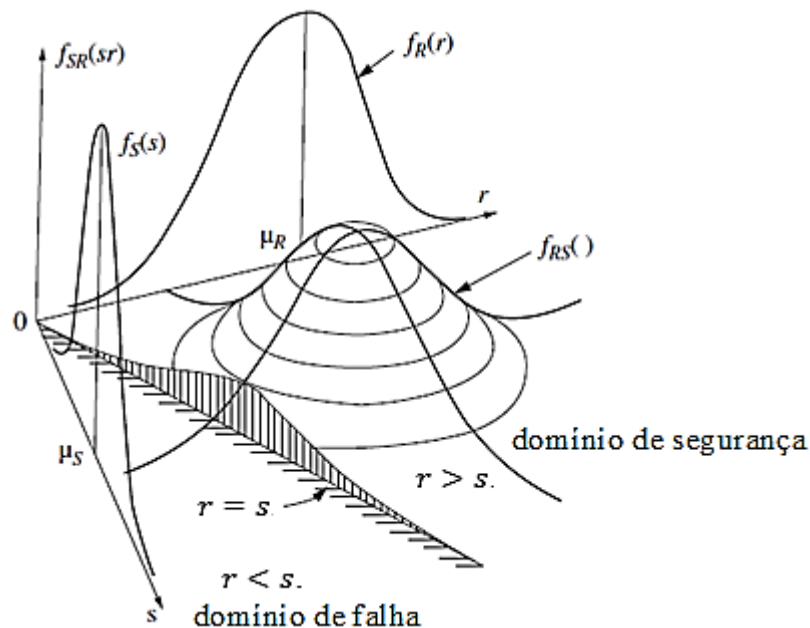


Figura 3.1 – Espaço de duas variáveis aleatórias (r, s) mostrando o domínio de falha para o problema R-S (Adaptado de Melchers e Beck (2018))

3.1.3 Índice de confiabilidade de Cornell (1969)

O problema fundamental de confiabilidade muitas vezes é determinado a partir da variável margem de segurança M , definido como:

$$M = R - S \quad (3.12)$$

Sendo R e S variáveis aleatórias, M também será uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f_M(m)$. Dessa forma, a probabilidade de falha é dada pela área sob a curva $f_M(m)$ para valores de M inferiores a zero, conforme mostra a Figura 3.2.

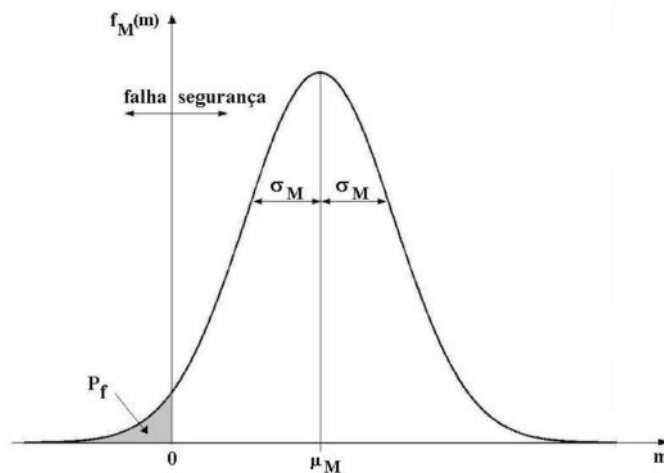


Figura 3.2 – Probabilidade de falha em função da margem de segurança (PALIGA, 2008)

Caso R e S sejam estatisticamente independentes e apresentem distribuição normal de probabilidade, a margem de segurança M também será uma variável aleatória normal, com média e desvio padrão dado pelas Equações (3.13) e (3.14), respectivamente.

$$\mu_M = \mu_R - \mu_S \quad (3.13)$$

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (3.14)$$

Dessa forma, a variável M pode ser transformada em uma variável normal padrão e a probabilidade de falha pode ser obtida pela Equação (3.15).

$$P_f = \Phi\left(-\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right) \quad (3.15)$$

onde:

Φ é a função de distribuição acumulada da variável normal padrão.

Por meio da Equação (3.15) pode ser observado que a confiabilidade é função da razão $\frac{\mu_M}{\sigma_M}$, conhecida na literatura como índice de confiabilidade de Cornell (1969) e representada pela letra grega β , assim:

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (3.16)$$

Utilizando a Equação (3.15) e (3.16), a probabilidade de falha pode ser formulada em termos do índice de confiabilidade β :

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (3.17)$$

3.1.4 Índice de confiabilidade alvo

Qualquer estudo de avaliação de confiabilidade necessita da determinação de um índice de confiabilidade alvo a ser atingido pelas estruturas. A partir desse índice, pode-se considerar a probabilidade de falha aceitável ou não. Desse modo, diversas fontes como o JCSS (2001) e o Código Modelo *fib* 2010 (2012) apresentam recomendações para adoção do índice de confiabilidade alvo.

O Código Modelo Probabilístico desenvolvido pelo JCSS (2011) apresenta o índice de confiabilidade alvo com base no custo relativo da medida de segurança e a consequência de falha para um período de retorno de um ano, conforme apresentado na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Índice de confiabilidade alvo para ELU segundo o JCSS (2001) para um período de referência de um ano.

Custo relativo da medida de segurança	Consequência de falha		
	Mínimas	Moderadas	Elevadas
Alto	3,1	3,3	3,7
Normal	3,7	4,2	4,4
Pequeno	4,2	4,4	4,7

Fonte: Adaptado de JCSS (2001)

A consequência de falha é avaliada pelo risco de morte ou pelo modo de ruína da estrutura. A consequência mínima é aquela em que o risco de morte é pequeno, como silos, estruturas agrícolas e redes elétricas. A moderada possui risco de morte que não pode ser negligenciado, como edifícios residenciais e comerciais. Por fim, as consequências elevadas são aqueles em que o risco de morte é elevado, como edifícios hospitalares, pontes e teatros (JCSS, 2001).

O custo relativo da medida de segurança é relacionado com o impacto econômico que tal medida pode trazer no custo final da construção. Assim, o custo alto pode interferir na viabilidade da construção. O custo normal é aquele em que o aumento do custo não interfere na viabilidade da construção. Já o custo pequeno é aquele onde a medida de segurança costuma não acarretar aumentos dos custos da edificação (SANTIAGO, 2019).

Para avaliação do índice de confiabilidade alvo requerido para vida útil da edificação, média de 50 anos para estruturas convencionais, os dados mostrados na Tabela 3.1 foram adaptados para corresponderem a um período de referência de 50 anos. Esses valores foram calculados assumindo-se a independência entre as probabilidades de falha anuais e são mostrados na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 - Índice de confiabilidade alvo para ELU segundo o JCSS (2001) para um período de referência de 50 anos.

Custo relativo da medida de	Consequência de falha		
	Mínimas	Moderadas	Elevadas
Alto	1,7	2,0	2,6
Normal	2,6	3,2	3,5
Pequeno	3,2	3,5	3,8

Fonte: Adaptado de JCSS (2001)

Outra recomendação para o índice de confiabilidade alvo é dado no Código Modelo *fib* 2010 (2012) e tem como base os valores dispostos na ISO 2394 (1998). Esses valores são estipulados a partir da consideração de um custo relativo da medida de segurança pequeno e um período de referência de 50 anos, conforme apresentado na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Índice de confiabilidade alvo para o ELU recomendado pelo Código Modelo *fib* 2010 (2012)

Consequência de falha		
Mínimas	Moderadas	Elevadas
3,1	3,8	4,3

Fonte: Adaptado de *fib* (2012)

Segundo Vrouwenvelder (2002), os índices de confiabilidade recomendados pelo Código Modelo Probabilístico (JCSS, 2001) são aplicados a sistemas estruturais e geralmente apresentam valores menores que os utilizados para avaliação de elementos, como no caso dos valores recomendados pelo Código Modelo *fib* 2010 (2012). Como consequência do exposto acima, adotou-se para este estudo um índice de confiabilidade alvo igual a $\beta_{alvo} = 3,8$, referente a um período de referência de 50 anos, conforme recomendações do Código Modelo *fib* 2010 (2012).

3.1.5 Função de estado limite

O problema fundamental apresentado na Equação (3.7) e (3.11) pode ser inadequado para determinação da probabilidade de falha de sistemas de engenharia, pois nem sempre é possível se reduzir a confiabilidade estrutural por uma simples formulação de $(R - S)$. Além disso, em alguns casos, as funções R e S são estatisticamente dependentes, o que inviabiliza o uso da Equação (3.11). Dessa forma, para representar um modo de falha de uma estrutura, levando em consideração todas as variáveis aleatórias envolvidas, pode-se utilizar as funções de estado limite. Assim, a equação de estado limite pode representada por (HALDAR; MAHADEVAN,2000):

$$g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0 \quad (3.18)$$

Sendo:

$g(\mathbf{X})$ é a função de estado limite;

\mathbf{X} é o vetor das variáveis aleatórias básicas do problema.

A função de estado limite estabelece a contorno entre os domínios de falha e não falha da estrutura, conforme ilustra a Figura 3.3. Assim, o domínio de falha D_f é composto por todos os pontos do espaço amostral de \mathbf{X} que levam a falha da estrutura e o domínio de sobrevivência D_s é o conjunto complementar ao domínio de falha (BECK, 2019).

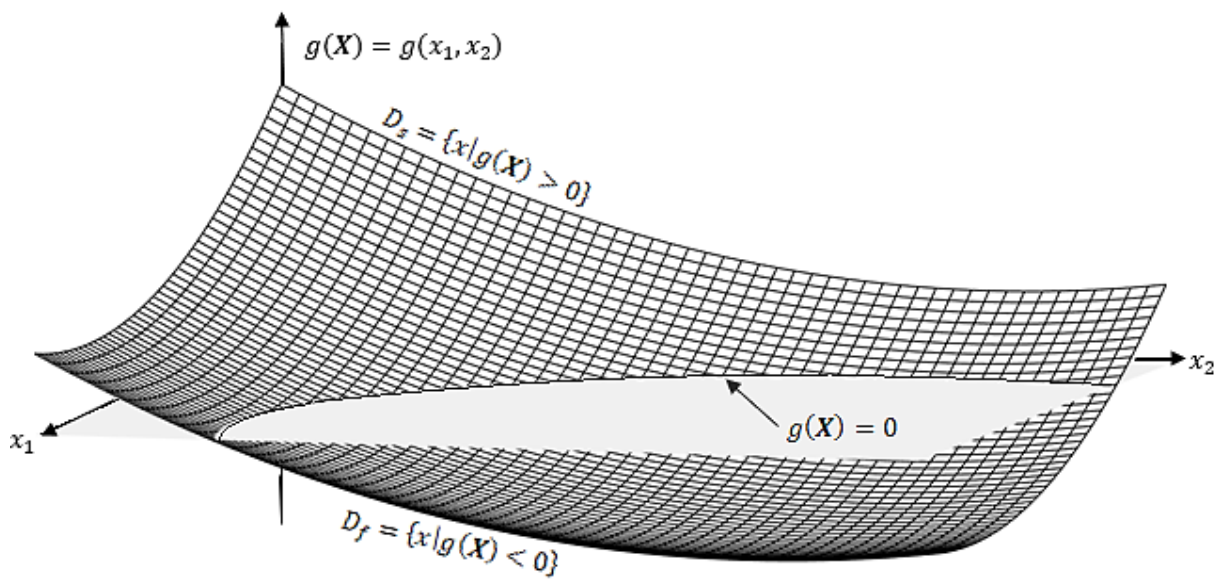


Figura 3.3 – Conceito de função de estado limite, domínios de falha e sobrevivência.

A probabilidade de falha de forma generalizada é obtida por:

$$P_f = P[g(\mathbf{X}) \leq 0] = \int \dots \int_{D_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.19)$$

Onde:

$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ é a função conjunta de densidade de probabilidade de um vetor de variáveis aleatórias básicas de dimensão n .

Apesar da Equação (3.19) representar o problema da confiabilidade de forma generalizada, a solução da integral múltipla é muitas vezes inviável. Além disso, conforme Haldar e Mahadevan (2000), é praticamente impossível a obtenção da distribuição conjunta de todas as

variáveis do problema. Assim, busca-se a partir de diferentes métodos de confiabilidade, aproximações de $f_X(\mathbf{x})$ e do domínio de falha D_S para avaliação da probabilidade.

3.2 MÉTODOS DE TRANSFORMAÇÃO

Segundo Beck (2019), os métodos de confiabilidade estrutural chamados de métodos de transformação possuem essa denominação por transformarem o vetor de variáveis aleatória com distribuição conjunta de probabilidade qualquer, em um vetor de variáveis aleatórias com distribuição normal padrão. Esses métodos têm como base a transformação de Hasofer e Lind (1974) aplicada a todas as variáveis do problema. Dessa maneira, o conjunto de variáveis aleatórias formam o chamado espaço de projeto, onde as variáveis possuem dimensões físicas, e o conjunto transformado forma espaço normal padrão, onde as variáveis são adimensionais (BECK, 2019).

3.2.1 Método de primeira ordem e segundo momento - FOSM

Para funções lineares de variáveis aleatórias com distribuição normal, a função de estado limite $g(\mathbf{X}) = 0$ apresenta comportamento linear. Porém, para a maioria dos problemas de confiabilidade a função de estado limite é não linear. Nesses casos, uma abordagem adequada é linearizar a função de estado limite a partir de uma expansão em série de Taylor sobre algum ponto \mathbf{x}^* (MELCHERS; BECK, 2018). No caso do método FOSM essa linearização é feita por meio de uma expansão em série de Taylor truncada no termo de primeira ordem (BECK, 2019).

A interpretação geométrica do índice de confiabilidade β pode ser obtida trabalhando-se com um espaço reduzido não correlacionado. Para isso, deve-se reescrever a função estado limite em função das variáveis normais padrão, utilizando a transformação de Hasofer e Lind (1974), conforme Equação (3.20)

$$X'_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.20)$$

A partir dessa transformação o índice de confiabilidade β corresponde à menor distância entre a função de estado limite e a origem do espaço normal padrão X' , assim, β é a reta determinada pela distância entre a origem e o ponto de projeto x'^* (HALDAR E MAHADEVAN ,2000). A Figura 3.4 ilustra o mencionado acima.

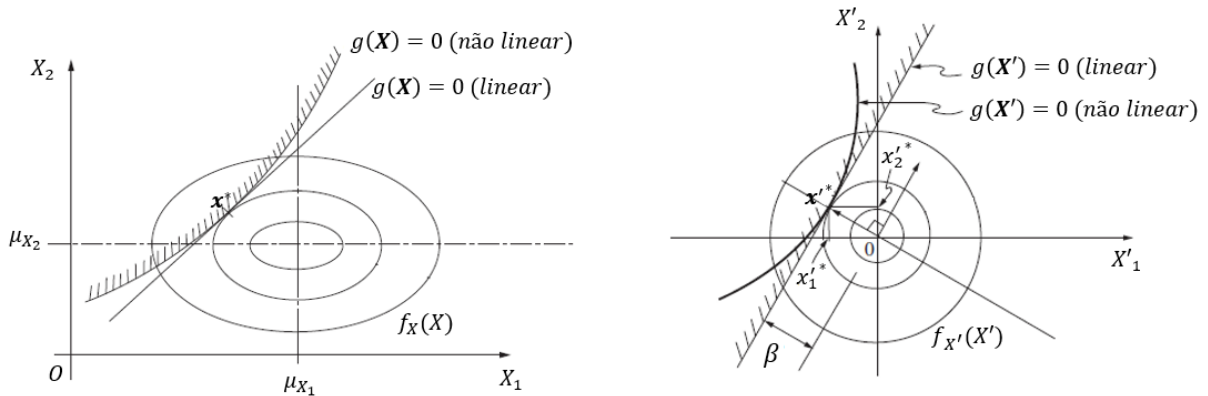


Figura 3.4 – Transformações das variáveis X_1 e X_2 em variáveis normais padrão e interpretação geométrica de β (Adaptado de MELCHERS; BECK, 2018)

A partir da consideração que o ponto de projeto corresponde ao ponto sobre a função de estado limite mais próximo à origem, a avaliação do índice de confiabilidade recai em um problema de otimização com restrição. Assim, o problema consiste em determinar \mathbf{x}'^* que minimiza a distância $d = \sqrt{\mathbf{x}'^t \mathbf{x}'}$ sujeito a restrição $g(\mathbf{X}') = 0$. Utilizando os multiplicadores de Lagrange para se obter um problema de otimização sem restrição tem-se:

$$\Lambda(\mathbf{x}', \lambda) = \sqrt{\mathbf{x}'^T \mathbf{x}'} + \lambda \cdot g(\mathbf{x}') \quad (3.21)$$

Derivando a Equação (3.21) em relação a \mathbf{x}' e λ , e igualando todos os termos a zero obtém-se:

$$\frac{\partial \Lambda(\mathbf{x}', \lambda)}{\partial \mathbf{x}'} = \frac{\mathbf{x}'}{\sqrt{\mathbf{x}'^T \mathbf{x}'}} + \lambda \cdot \nabla g(\mathbf{x}') = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \Lambda(\mathbf{x}', \lambda)}{\partial \lambda} = g(\mathbf{x}') = 0 \quad (3.23)$$

A Equação (3.23) é automaticamente satisfeita se \mathbf{x}' está sobre a superfície de falha. A Equação (3.22) conduz as coordenadas do ponto estacionário \mathbf{x}'^{est}

$$\mathbf{x}'^{est} = -\lambda \sqrt{\mathbf{x}'^T \mathbf{x}'} \nabla g(\mathbf{x}') \quad (3.24)$$

Considerando que o ponto de estacionaridade seja um ponto de mínimo, chega-se a:

$$\lambda = \|\nabla g(\mathbf{x}')\|^{-1} \quad (3.25)$$

Substituindo a Equação (3.25) em (3.24) obtém-se:

$$d_{min} = -\frac{\nabla g(\mathbf{x}')^T}{\|\nabla g(\mathbf{x}')\|} \mathbf{x}'^* = -\alpha^T \mathbf{x}'^* \quad (3.26)$$

Onde:

\mathbf{x}'^* representa o ponto de projeto;

α cossenos diretores do ponto de projeto.

Dessa forma, ao satisfazer a Equação (3.23), a Equação (3.26) corresponderá à menor distância da origem do espaço reduzido ao ponto de projeto. Logo, o índice de confiabilidade, que deve ser determinado no ponto de projeto, é obtido por:

$$\beta = -\frac{\nabla g(\mathbf{x}')^T}{\|\nabla g(\mathbf{x}')\|} \mathbf{x}'^* = -\alpha^T \mathbf{x}'^* \quad (3.27)$$

Para a maioria dos problemas de confiabilidade o valor do ponto de projeto não é conhecido inicialmente. Logo, é necessário determinar esse ponto de forma iterativa antes de se utilizar a Equação (3.27). Assim, qualquer algoritmo de otimização pode ser utilizado para se determinar o ponto de projeto. Segundo Beck (2019), o algoritmo mais utilizado é o de Hasofer, Lind, Rackwitz e Fiessler (HLRF), sendo o mesmo implementado neste trabalho para avaliação da confiabilidade pelo método FORM.

3.2.2 Método de Confiabilidade de Primeira Ordem – FORM

Na análise do método FOSM visto anteriormente, as variáveis aleatórias eram normais e não correlacionadas. No método FORM (*First Order Reliability Method*) se mantém a aproximação de primeira ordem da função estado limite, contudo a limitação da utilização do segundo momento é retirada. Dessa forma, no FORM é possível se empregar variáveis aleatórias não normais e correlacionadas.

O método FORM consiste na construção de uma função conjunta de distribuição de probabilidade $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ e na transformação dessa em uma distribuição normal padrão multivariada $f_{\mathbf{X}'}(\mathbf{x}')$ (BECK, 2019). O mapeamento das variáveis aleatórias do espaço de projeto para o espaço normal padrão pode ser realizado a partir da transformação de Rosenblatt, transformação composta utilizando o modelo de Nataf e pela transformação direta reversível. Neste trabalho

adotou-se a transformação composta utilizando o modelo de Nataf. A descrição do modelo pode ser encontrada em Beck (2019).

4 ANÁLISE NUMÉRICA DA RESISTÊNCIA E DA SOLICITAÇÃO À PUNÇÃO DE LAJES LISAS

Para avaliação da resistência e da solicitação à punção foram implementados e estudados quatro modelos numéricos, dois para previsão da resistência e dois para previsão da solicitação. As principais características e análises de cada modelo serão discutidas nos itens a seguir.

4.1 MODELO NUMÉRICO R1 PARA PREVISÃO DA RESISTÊNCIA À PUNÇÃO

O primeiro modelo para previsão da resistência à punção é denominado MEF R1 e tem como base a modelagem utilizada por Lazzari (2016) em sua tese de doutorado. Esse modelo de Elementos Finitos foi implementado com auxílio do *software* ANSYS MECHANICAL APDL (ANSYS, 2021c) e customizado por meio de programação em Fortran utilizando o sistema UPF (*User Programmable Features*) por meio da rotina *usermat*. Nos próximos itens serão apresentadas as características dos elementos finitos adotados, os modelos constitutivos dos materiais e a validação do modelo.

4.1.1 Elementos finitos adotados

Para a escolha dos elementos finitos, levaram-se em consideração aspectos relacionados ao tipo de análise, tempo de processamento computacional, número de graus de liberdade e a possibilidade do uso de armaduras incorporadas. Esses aspectos são necessários para melhorar a eficiência da programação do modelo numérico e ter maior liberdade na utilização da malha de elementos finitos, necessitando assim, um esforço computacional menos oneroso. Em vista disso, adotaram-se os elementos SOLID186 e REINF264.

4.1.1.1 SOLID186

Esse elemento foi adotado para modelar o concreto das lajes, sendo um elemento quadrático tridimensional com três graus de liberdade por nó (translação segundo os eixos X, Y e Z). O SOLID186 é composto por 20 nós distribuídos conforme a Figura 3.1. Esse elemento pode apresentar, além da configuração hexaédrica, configurações piramidal, prismática ou tetraédrica, conforme mostrado na Figura 3.1. Isto permite que a malha se adapte à geometria

do modelo. Como o estudo de lajes apresenta um modelo geométrico simples, utilizou-se a configuração com base hexaédrica do elemento.

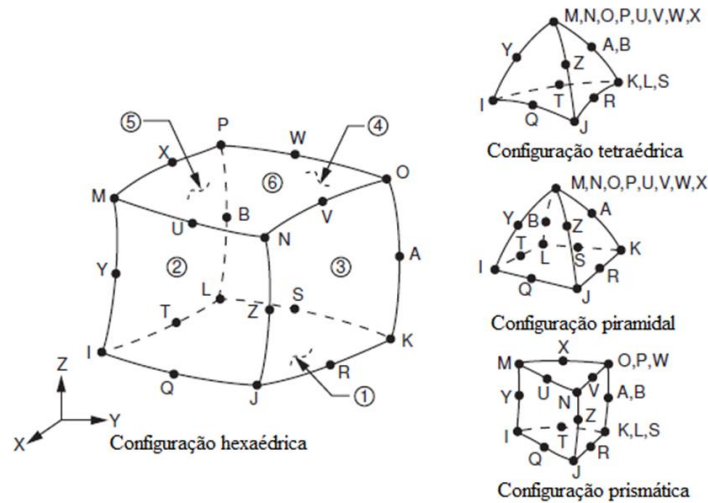


Figura 4.1 - Elemento SOLID186 (adaptado de ANSYS (2021a))

4.1.1.2 REINF264

Esse elemento é utilizado para modelagem da armadura das lajes, de forma incorporada e apresentando apenas rigidez uniaxial. O elemento REINF264 é utilizado junto com elementos de barra, de placa, de casca ou elementos sólidos para fornecer reforço extra a esses elementos. Este é adequado para simulação de fibras de reforço com direções arbitrárias. As coordenadas nodais, graus de liberdade e conectividade do elemento são a mesmas que a do elemento base. O elemento permite modelos com plasticidade, fluência, tensão inicial, grandes deflexões e grande capacidade de deformação (LAZZARI, 2016). A Figura 3.2 mostra a geometria do elemento quando utilizado juntamente com o elemento SOLID186.

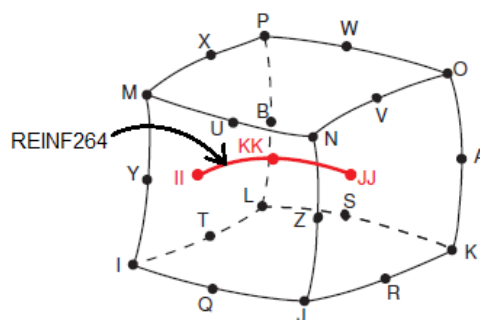


Figura 4.2 - Elemento REINF264 utilizado com SOLID186 (adaptado de ANSYS (2021a))

4.1.2 Modelos constitutivo do concreto

O modelo R1, do presente trabalho, utiliza o modelo constitutivo implementados por Lazzari (2016) com modificação dos critérios para o comportamento do concreto tracionado. Essa modificação buscou reduzir as instabilidades numéricas na determinação da carga de ruptura por punção.

4.1.2.1 Modelo para o concreto comprimido

O modelo elastoplástico implementado por Lazzari (2016) é formado por um critério de ruptura, um critério de plastificação e por uma regra de endurecimento. O critério de ruptura adotado é o de Ottosen (1977), o qual é adotado pelo Código Modelo *fib* 2010 (2012). Essa superfície de ruptura é representada por suas seções transversais nos planos desviadores, conforme Figura 4.3.

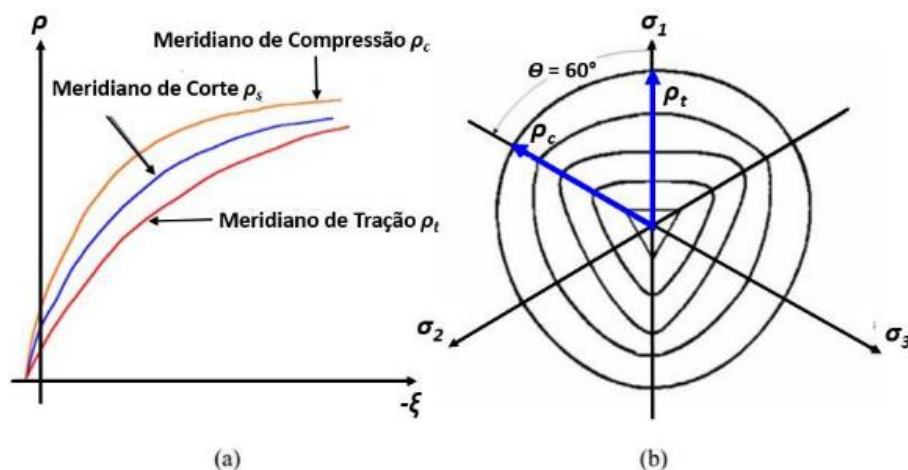


Figura 4.3 – Seções transversais da superfície de ruptura, (a) planos meridianos e (b) planos desviadores (Lazzari (2016), adaptado de Chen e Han (1988))

Para o critério de plastificação, considerou-se que o concreto comprimido tenha endurecimento isotrópico e que as superfícies de plastificação tenham a mesma forma da superfície de ruptura. A movimentação da superfície de plastificação durante a deformação plástica é definida por uma regra de endurecimento, que é determinada pela relação tensão-deformação plástica efetiva, sendo possível extrapolar os resultados de um ensaio uniaxial para uma situação multiaxial. Foi utilizado o diagrama tensão-deformação proposto pelo Código Modelo *fib* 2010 (2012) como relação tensão efetiva x deformação efetiva para a regra de endurecimento, conforme mostra a Figura 4.4.

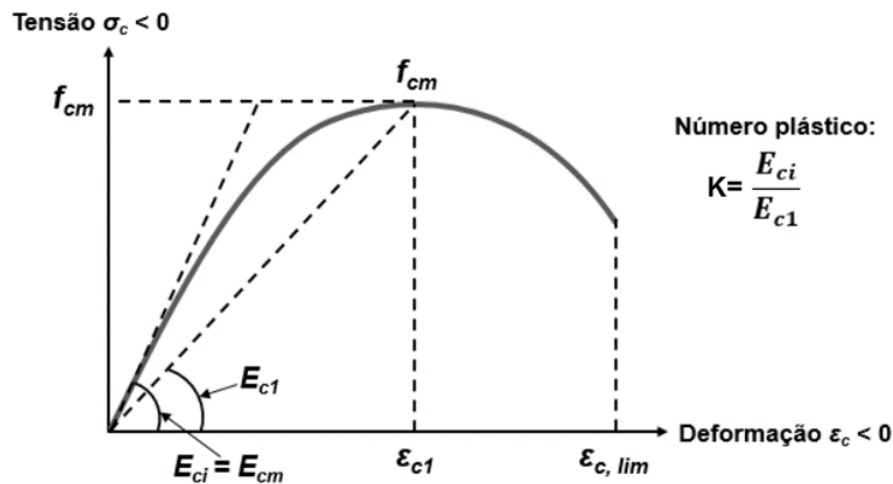


Figura 4.4 - Diagrama tensão-deformação para o concreto comprimido (Adaptado de *fib* 2010, 2012)

4.1.2.2 Modelo para o concreto tracionado

O concreto tracionado é modelado como sendo um material elástico com amolecimento. Antes de fissurar, o concreto comporta-se como um material elástico linear, e após a fissuração, utiliza-se o modelo de fissuras distribuídas.

O modelo de fissuras distribuídas avalia o dano da fissuração modificando as propriedades do material e atualizando a relação tensão-deformação. É adotado o critério proposto pelo boletim nº 156 do CEB (1983) para definir se ocorreu fissuração do concreto em um ponto de integração que atingiu a superfície de ruptura. De acordo com esse critério, tem-se que:

Se $\sigma_1 \geq \frac{f_{tm}}{2}$, o ponto de integração fissurou;

Se $\sigma_1 < \frac{f_{tm}}{2}$, o ponto de integração esmagou.

onde:

σ_1 é a tensão principal de tração;

f_{tm} é a resistência média à tração do concreto.

Para a consideração da contribuição do concreto entre fissuras (*tension stiffening*), Lazzari (2016) adotou a metodologia proposta por Hinton (1988), que considera a degradação da aderência. Esta ocasiona perda na resistência à tração pós-fissuração, através da introdução de um ramo descendente na curva tensão-deformação, conforme mostrado na Figura 4.5.

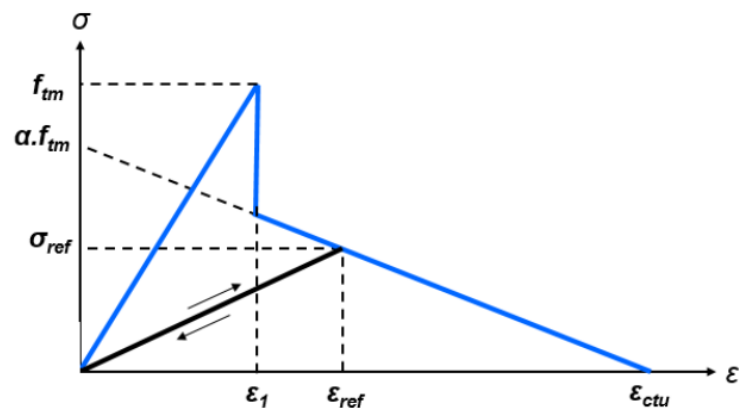


Figura 4.5 - Curva tensão-deformação para o concreto tracionado (LAZZARI, 2016)

Porém, percebeu-se ao utilizar o modelo que, para avaliação da resistência à punção em lajes lisas, os resultados eram dependentes da malha adotada. Dessa forma, para minimizar os efeitos da dependência da malha, implementou-se, no modelo para o concreto tracionado, o comprimento característico na parte do efeito de amolecimento (*strain-softening*) do modelo constitutivo. Dessa forma, a relação tensão-deformação para o concreto tracionado depende do comprimento característico, que no cálculo por elementos finitos é determinado por $l_c = \sqrt[3]{V}$, onde V é o volume do elemento de concreto representado pelo ponto de integração (MARTINELLI, 2003).

O efeito de amolecimento é definido a partir de uma relação tensão-fissuração. Essa relação é adotada conforme apresentado no Código Modelo *fib* 2010 (2012) e mostrada na Figura 4.6. Sendo a energia de fratura, que representa a energia necessária para propagar uma fissura de tração de área unitária, calculada conforme a Equação (4.1).

$$G_F = 73. (f_{cm})^{0,18} \quad (4.1)$$

onde:

G_F é a energia de fratura [N.m/m²];

f_{cm} é a resistência média à compressão do concreto em MPa.

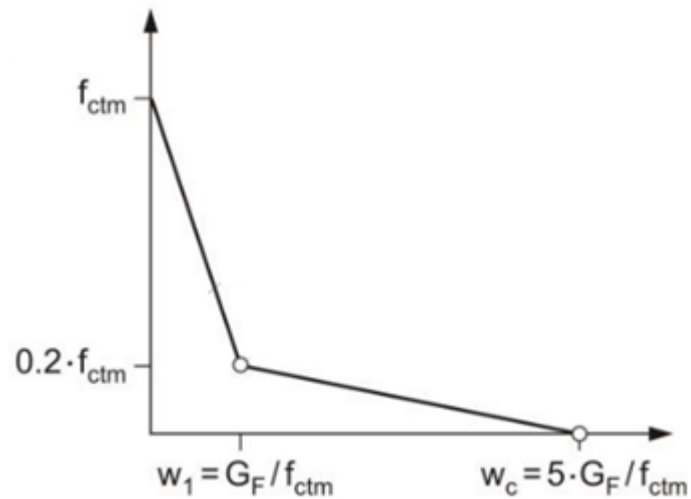


Figura 4.6 – Relação tensão-fissuração para concreto tracionado (Adaptado de *fib* (2012))

A partir dessa relação a tensão-deformação é definida dividindo a largura da fissura w_1 e w_c pelo comprimento característico l_c definido anteriormente. Assim, a curva tensão-deformação para o concreto em tração pode ser representada pela Figura 4.7.

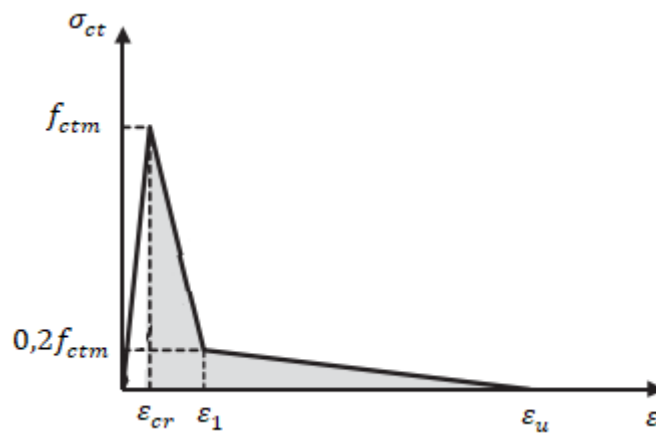


Figura 4.7 – Curva tensão-deformação para o concreto tracionado (*fib*(2012))

A determinação de ϵ_1 e ϵ_u é dada por:

$$\epsilon_1 = \epsilon_{cr} + w_1/l_c \quad (4.2)$$

$$\epsilon_u = \epsilon_{cr} + w_c/l_c \quad (4.3)$$

4.1.3 Modelo constitutivo do aço

Para a representação do comportamento do aço foi adotado o modelo elastoplástico perfeito, conforme Figura 4.8. O material pode ser representado pelo modelo interno do ANSYS (2021b), denominado BISO (*Bilinear Isotropic Hardening*), sendo utilizados dois parâmetros de entrada, a tensão de escoamento inicial (f_y) e o módulo de endurecimento (E_t). Para representar o comportamento elastoplástico perfeito, E_t foi definido como sendo 1% do módulo de elasticidade do aço.

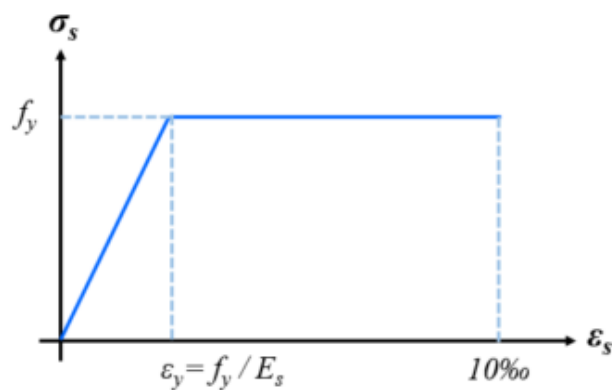


Figura 4.8 - Modelo elastoplástico perfeito (LAZZARI,2016)

4.1.4 Técnicas para solução de problemas não lineares

Na análise de elementos finitos, um método numérico sempre é necessário para a solução dos sistemas de equações. A formulação dessa análise é baseada na Equação (4.4).

$$[K]\{u\} = \{F_a\} \quad (4.4)$$

sendo:

$[K]$: matriz de rigidez global;

$\{u\}$: vetor incógnita contendo os deslocamentos nodais;

$\{F_a\}$: vetor de carga aplicada

O sistema de equações pode se tornar não linear quando a matriz de rigidez global $[K]$ é função dos seus graus de liberdade incógnitos ou quando não houver uma linearidade envolvendo o material. Para análises não lineares o equilíbrio pode ser alcançado por meio da aplicação de pequenos incrementos de força ou deslocamentos. Um dos métodos mais usuais para resolução desse tipo de problema é o método de Newton-Raphson, que tem como característica o cálculo

da matriz de rigidez em cada interação por meio da mudança de inclinação de cada uma das retas para atingir a convergência, conforme pode ser observado na Figura 4.9. Esse método utiliza as seguintes equações de recorrência (ANSYS, 2021b).

$$\{\Delta u\}_i = [K_i^T]^{-1}(\{F^a\} - \{F^{nr}\}_i) \quad (4.5)$$

$$\{u\}_{i+1} = \{u\}_i + \{\Delta u\}_i \quad (4.6)$$

sendo:

$\{\Delta u\}_i$: vetor de incremento de deslocamento nodais na interação atual i ;

$\{F^a\}$: vetor de forças externas aplicadas;

$\{F^{nr}\}_i$: vetor de forças internas na interação atual i ;

$(\{F^a\} - \{F^{nr}\}_i) = \{R\}_i$: vetor resíduo para a interação atual i ;

$[K_i^T]$: matriz de rigidez tangente para interação atual i ;

$\{u\}_i$: vetor incógnita dos nós para a interação atual i ;

$\{u\}_{i+1}$: vetor contendo o valor das incógnitas dos nós para a próxima interação $i + 1$.

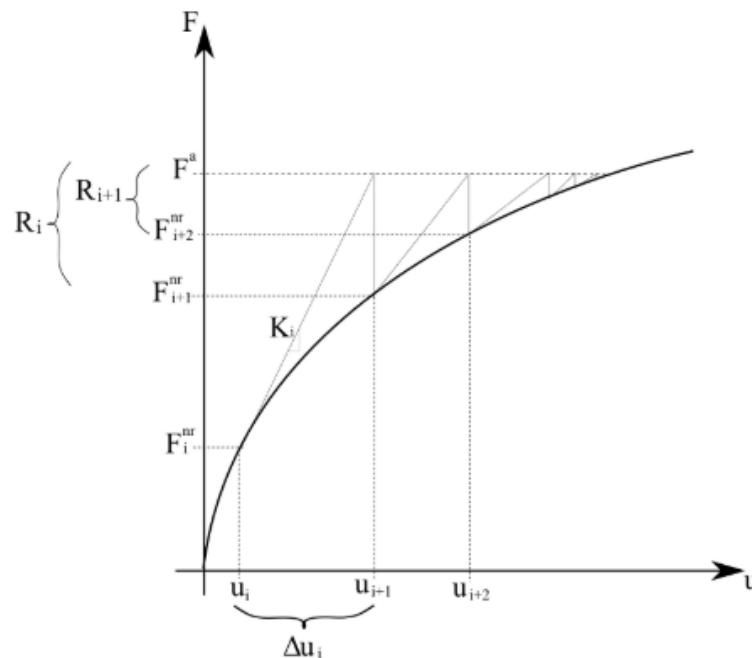


Figura 4.9 – Método Newton-Raphson (Quevedo (2017) adaptado de ANSYS (2013))

Nos casos em que a análise incluir plasticidade, o processo é realizado através de uma análise incremental onde o vetor de cargas final é aplicado em incrementos. Dessa forma, adiciona-se mais um índice referente a esse passo nas Equações (4.7) e (4.8). A Figura 4.10 mostra o processo considerando um problema unidimensional.

$$\{\Delta u\}_{n,i} = [K_{n,i}^T]^{-1}(\{F^a\}_n - \{F^{nr}\}_{n,i}) \quad (4.7)$$

$$\{u\}_{n,i+1} = \{u\}_{n,i} + \{\Delta u\}_{n,i} \quad (4.8)$$

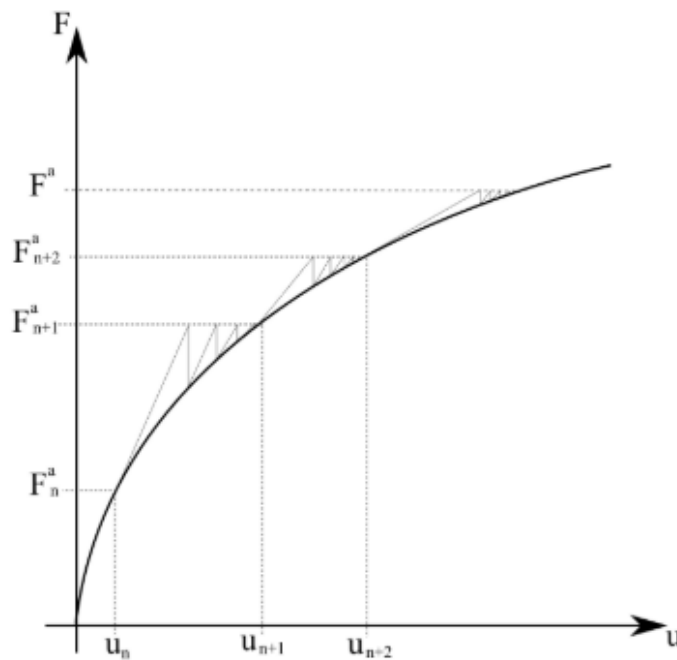


Figura 4.10 - Método Newton-Raphson com etapas intermediárias (Quevedo (2017) adaptado de ANSYS (2013))

Para cada incremento de carga as iterações de equilíbrio continuam até que a convergência seja atingida. Durante as interações de equilíbrio a convergência é verificada por meio do vetor de carga desbalanceado e o vetor de incremento dos deslocamentos nodais, conforme Equações(4.9) e (4.10), respectivamente.

$$\|\{R_i\}\| < \varepsilon_R R_{REF} \quad (4.9)$$

$$\|\{\Delta u_i\}\| < \varepsilon_u u_{REF} \quad (4.10)$$

sendo:

$\|\{R_i\}\|$: norma do resíduo da iteração de equilíbrio i ;

$\|\{\Delta u_i\}\|$: norma do vetor de incremento de deslocamentos da iteração de equilíbrio i ;

ε_R : tolerância para o resíduo que por padrão é 0,5%;

R_{REF} : valor de referência para o resíduo, que por padrão é o maior entre $\|\{F_n^a\}\|$ ou 0,01;

ε_u : tolerância para deslocamentos, que por padrão é assumido como 5%;

u_{REF} : valor de referência para deslocamentos, que por padrão é $\|\{u_i\}\|$.

O fim do processo de interação ocorre quando o procedimento iterativo atinge o equilíbrio com os critérios de convergência adotados, quando é alcançado o número máximo de iterações ou no caso de não convergência. O controle dos critérios de convergência no software ANSYS é determinado por meio do comando CNVTOL. O critério de convergência por padrão do *software* ANSYS é de 0,5% do valor das forças externas e de 5% para os deslocamentos. Caso o passo de carga não verifique o critério de convergência, em função de o Ansys não conseguir encontrar o equilíbrio entre forças internas e externas atuantes, é admitido a ocorrência da ruptura da laje. No presente trabalho o vetor resíduo adotado é dado pela norma euclidiana, conforme Equação (4.11).

$$\|R\|_2 = \left(\sum_i^n R_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.11)$$

Esse critério de ruptura, por não convergência da solução numérica, pode apresentar algumas dificuldades na obtenção dos resultados. Em alguns casos, pode-se ter dificuldade de convergência, fazendo com que o modelo apresente ruptura muito antes do esperado. Nesses casos, pode-se aumentar o número de *substeps* e iterações e realizar alterações nos critérios de convergência adotados. Em relação a esse último procedimento, deve-se analisar criteriosamente os resultados obtidos, pois a precisão e a sensibilidade do modelo podem ser prejudicadas.

4.1.5 Validação do modelo numéricos R1

O modelo MEF R1, assim como o modelo MEF R2, foi validado com base em um conjunto de 65 lajes lisas sem armadura de cisalhamento. Porém, para calibração e análise dos parâmetros

da modelagem numérica foi adotado a laje SB1 de Adetifa e Polak (2005). Essa laje também foi modelada numericamente por Genikomsou e Polak (2015) com obtenção de bons resultados numéricos. O *script* elaborado para validação do modelo é apresentado no Apêndice A.1.

Adetifa e Polak (2005) desenvolveram um programa experimental de modelos em grande escala para estudar o comportamento de lajes lisas com reforço à punção utilizando *shear bolts*. No estudo seis lajes de 1800 x 1800 x 120 mm foram ensaiadas. Essas lajes eram simplesmente apoiadas nas bordas em uma posição afastada de 150 mm das arestas. A aplicação do carregamento foi realizada a partir de pilares quadrados de 150 x 150 mm localizados no centro das lajes. As armaduras de flexão utilizadas em todas as lajes foram barras de 11,3 mm de diâmetro espaçadas em 100 e 90 mm em cada direção na face inferior e barras de 11,3 mm espaçadas em 200 mm em cada direção na face superior. O cobrimento do concreto adotado nos ensaios foi de 20 mm. A laje SB1, que foi analisada neste trabalho, não possui armadura de combate à punção, e serviu como modelo de controle da pesquisa de Adetifa e Polak (2005). As propriedades mecânicas dos materiais podem ser observadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Propriedades mecânicas da laje SB1

Resistência à compressão do concreto (MPa)	Resistência à tração do concreto (MPa)	Tensão de escoamento da armadura (MPa)
44	2.2	455

Para análise numérica, devido a simetria do modelo, foi possível modelar apenas um quarto da laje, tendo, como consequência, um ganho significativo na velocidade de processamento do modelo. A Figura 4.11 apresenta a geometria e as condições de contorno da laje SB1.

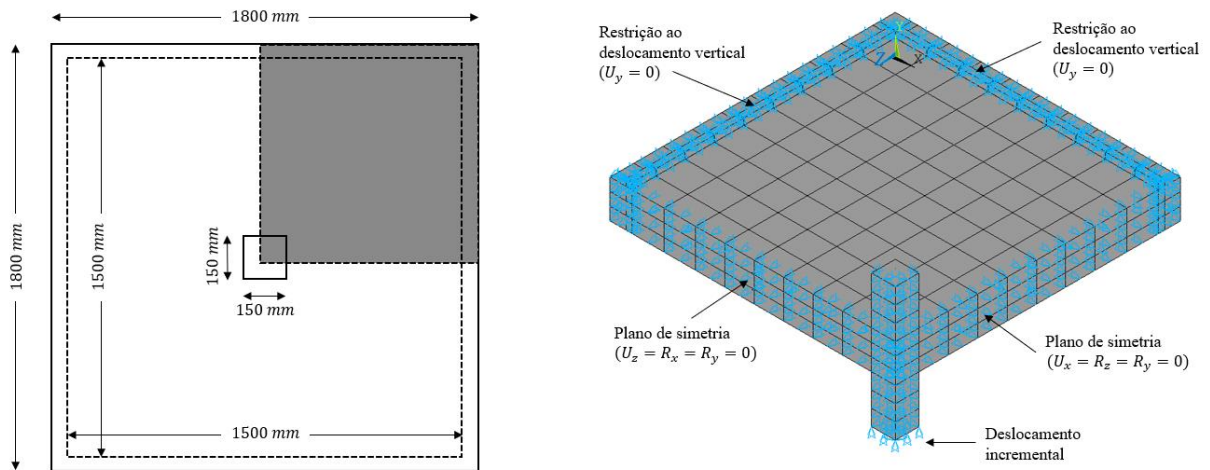


Figura 4.11 – Geometria e condições de contorno utilizadas na laje SB1

4.1.5.1 Parâmetros de convergência

Para estudar o comportamento do modelo em relação ao parâmetro de convergência foram adotados os valores da tolerância dos resíduos iguais a 0,5%, 1% e 5% para o critério de força. Para o critério de deslocamento manteve-se o valor padrão do 5% em todas as análises. A Figura 4.12 mostra o comportamento das curvas de cargas versus deslocamentos de cada parâmetro adotado.

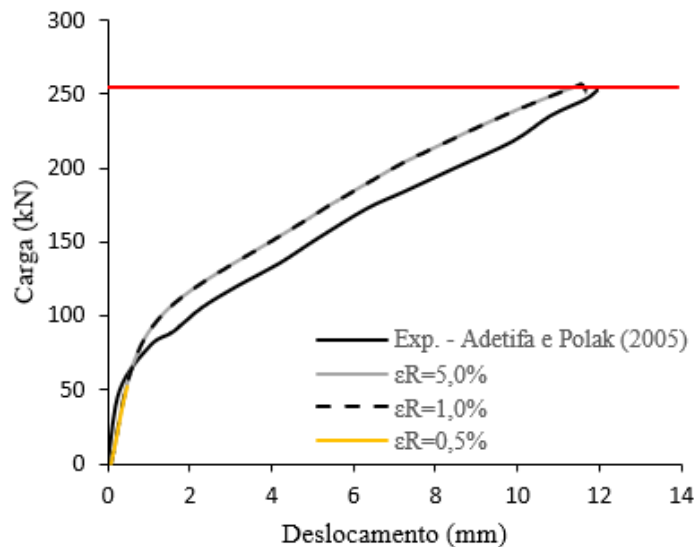


Figura 4.12 – Curva carga-deslocamento da laje SB1 variando ϵ_R do modelo MEF R1

Além disso, para entender melhor a influência do número de *substeps* foi utilizado o *nsub* igual a 1000, 2500 e 5000 para uma tolerância de resíduo igual a 1%. A Figura 4.13 apresenta o comportamento obtido com essas modificações.

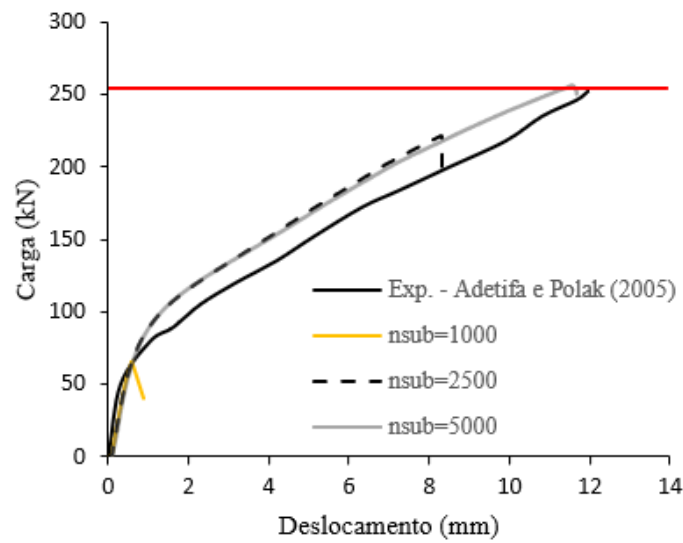


Figura 4.13 - Curva carga-deslocamento da laje SB1 variando n_{sub} do modelo MEF R1

4.1.5.2 Estudo de malha

Para o estudo de malha foram adotadas três configurações diferentes, sempre buscando manter o tamanho dos elementos dentro da malha o mais uniforme possível. As malhas adotadas possuem as seguintes características em relação às dimensões largura x comprimento x altura dos elementos finitos: malha de 12x12x12, 12x12x6 e 6x6x6 cm. A Figura 4.14 apresenta o comportamento das curvas de carga versus deslocamentos das malhas analisadas.

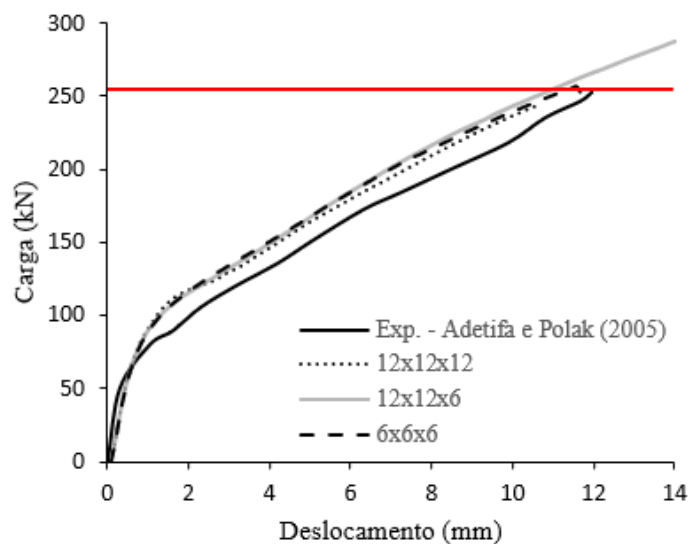


Figura 4.14 - Curva carga-deslocamento da laje SB1 variando a malha do modelo MEF R1

A Figura 4.15 apresenta a curva carga-deslocamento obtida de forma experimental por Adetifa e Polak (2005), numérica por Genikomsou e Polak (2015) e numérica deste trabalho.

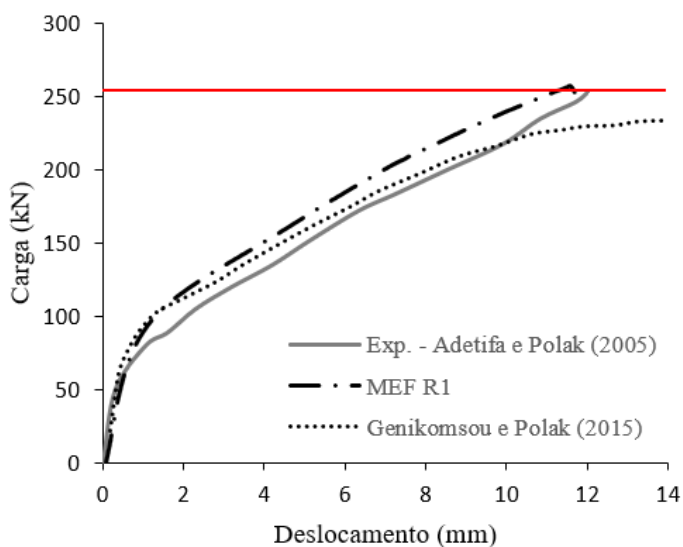


Figura 4.15 - Curva carga-deslocamento da laje SB1 obtida pelo MEF R1 calibrado

4.2 MODELO NUMÉRICO R2 PARA PREVISÃO DA RESISTÊNCIA À PUNÇÃO

O modelo numérico MEF R2 se diferencia do MEF R1 apenas no que diz respeito ao modelo constitutivo do concreto. Ao contrário do MEF R1, que possui a implementação do modelo constitutivo do concreto a partir das sub-rotinas na *usermat*, esse modelo faz uso de rotinas internas do ANSYS.

4.2.1 Modelos constitutivo do concreto

O modelo constitutivo do concreto utilizado no MEF R2 faz parte da biblioteca interna do *software* ANSYS (2021c), e é denominado *Drucker-Prager Concrete*. Esse modelo apresenta uma superfície de ruptura para o comportamento em tração e em tração-compressão e uma superfície de plastificação para o comportamento em compressão. A superfície de Rankine ou a superfície de Drucker-Prager (DP) pode ser utilizada para o comportamento em tração e em tração-compressão; já para a superfície de plastificação no comportamento em compressão, pode ser utilizado uma superfície de Drucker-Prager modificada em relação a utilizada em tração.

No espaço tridimensional de tensões principais, a superfície de plastificação proposta por Drucker e Prager (1952) apresenta o formato de um cone circular. Dessa forma, as intersecções com planos desviadores formam círculos e as intersecções com os planos meridianos formam retas inclinadas. A superfície de Drucker-Prager é bastante representativa na região de altas tensões de compressão. Porém, para o comportamento à tração e a tração-compressão a superfície é pouco representativa. Dessa forma, o modelo *DP- Concrete* apresenta uma segunda superfície para a modelagem do comportamento sob tração e tração-compressão, podendo ser uma superfície de Drucker-Prager com retas meridianas de maior inclinação, conforme ilustrado na Figura 4.16 ou uma superfície de Rankine (BENINCÁ, 2019).

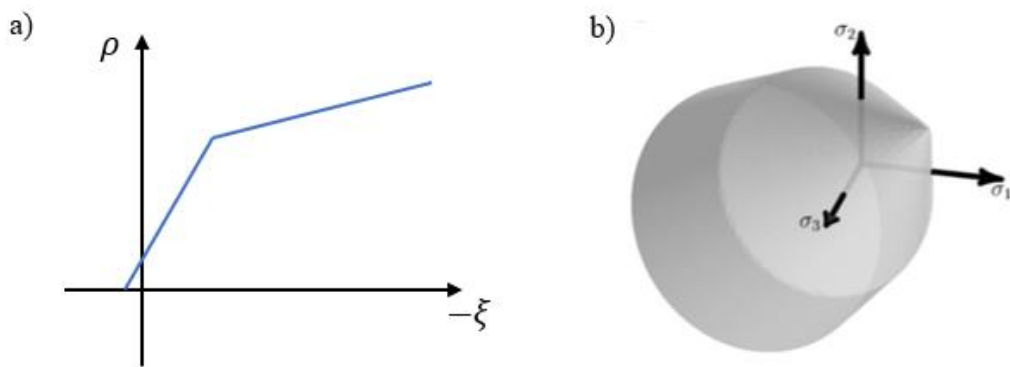


Figura 4.16 – Modelo de Drucker-Prager com duas superfícies (a) Plano meridiano; (b) Espaço tridimensional de tensões principais ((a) elaborada pelo autor; (b) Ansys (2021b))

A composição das duas superfícies, DP-DP e da superfície de DP-Rankine no plano das tensões principais $\sigma_1\sigma_2$ é ilustrada na Figura 4.17.

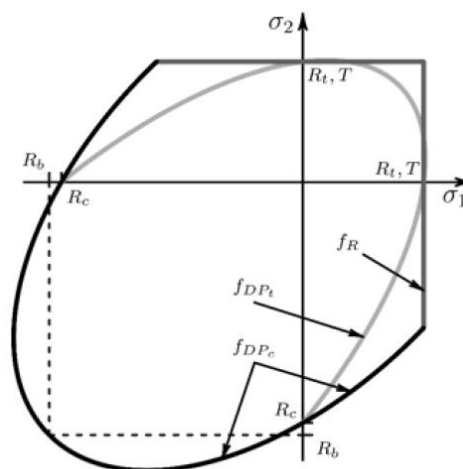


Figura 4.17 – Composição da superfície de DP-DP e DP-Rankine (ANSYS,2021b)

4.2.1.1 Modelo para o concreto comprimido

No modelo *DP-concrete* admite-se o material como elástico linear até que seja atingida a superfície inicial de plastificação. A partir desse ponto, a lei de endurecimento, que determina como a superfície de plastificação se movimenta, começa a valer. As leis de endurecimento dependem do modelo HSD (*hardening, softening, dilatation*) utilizado. O *software* ANSYS disponibiliza quatro modelos HSD, sendo eles: *exponential, steel reinforcement, fracture energy e linear* (ANSYS, 2021b).

Após alguns testes com os modelos citados acima, chegou-se à conclusão de que o melhor modelo para esse estudo foi o HSD6, que representa o modelo linear. Esse modelo, apesar de ser o mais simples, apresentou excelentes resultados nas lajes estudadas no presente trabalho. A função que descreve esse comportamento é dada pela equação (4.12) e a Figura 4.18 apresenta o comportamento dessa lei de endurecimento.

$$\Omega_c = \begin{cases} \Omega_{ci} + (1 - \Omega_{ci}) \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{k}{k_{cm}} - \frac{k^2}{k_{cm}^2}} & \text{for } 0 < k \leq k_{cm} \\ 1 - \frac{1 - \Omega_{cr}}{k_{cr} - k_{cm}} \cdot (k - k_{cm}) & \text{for } k_{cm} < k < k_{cr} \\ \Omega_{cr} & \text{for } k \geq k_{cr} \end{cases} \quad (4.12)$$

sendo:

Ω_c = função de plastificação em compressão;

k = deformação plástica efetiva;

k_{cm} = deformação plástica referente a tensão máxima;

k_{cr} = deformação plástica última em compressão;

Ω_{ci} = tensão relativa no início da plastificação;

Ω_{cr} = tensão relativa residual para $k \geq k_{tr}$

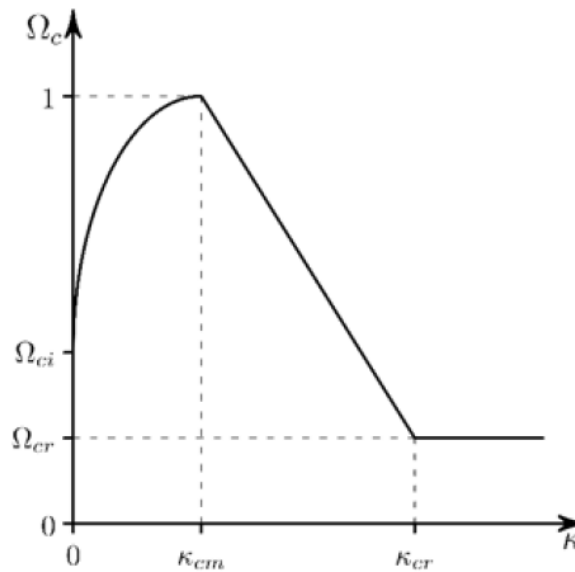


Figura 4.18 – Lei de endurecimento para o concreto comprimido do modelo HSD6 (adaptado de ANSYS (2021b))

4.2.1.2 Modelo para o concreto tracionado

O comportamento do concreto tracionado é admitido como elástico linear até que seja atingida a superfície de ruptura adotada (Drucker- Prager ou Rankine). A partir dessa condição, é considerado um modelo de contribuição do concreto entre fissuras. A simulação do *tension stiffening* é realizada por meio da lei de amolecimento em tração. Após o estado de tensões de um ponto atingir a superfície de ruptura, esta superfície passa a se movimentar de acordo com a lei adotada, que depende do modelo HSD, a qual é aplicada à relação tensão efetiva por deformação plástica efetiva. A lei de amolecimento adotada neste trabalho, após o estudo com lajes ensaiadas por diferentes autores, foi a lei linear. Essa lei é representada pelo modelo HSD6 do ANSYS. A Figura 4.19 ilustra o comportamento desse modelo que é determinado pela Equação (4.13).

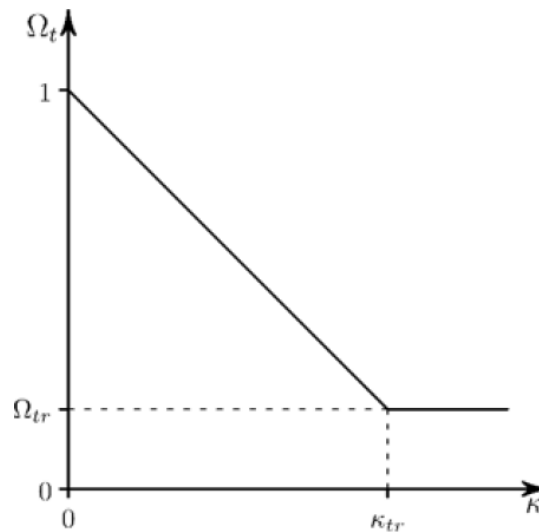


Figura 4.19 - Leis de amolecimento para o concreto fissurado do modelo HSD6 (adaptado de ANSYS (2021a))

$$\Omega_t = \begin{cases} 1 - (1 - \Omega_{tr}) \cdot \frac{\kappa}{\kappa_{tr}} & \text{for } 0 < \kappa \leq \kappa_{tr} \\ \Omega_{tr} & \text{for } \kappa \geq \kappa_{tr} \end{cases} \quad (4.13)$$

sendo:

Ω_t = função de plastificação em tração;

κ_{tr} = deformação plástica referente a tensão mínima;

Ω_{tr} = tensão relativa residual para $\kappa \geq \kappa_{tr}$.

4.2.2 Validação do modelo numérico R2

A validação do modelo numérico MEF R2 foi realizada com base na mesma laje do modelo MEF R1, a laje SB1 Adetifa e Polak (2005). Além dessa laje, outras 64 lajes foram testadas com o uso desse modelo e os resultados são apresentados no item 4.3. O *script* utilizado para validação do modelo é apresentado no Apêndice A.2.

4.2.2.1 Parâmetros do concreto

Os parâmetros relacionados ao concreto que foram utilizados na validação da laje SB1 e posteriormente para modelagem das lajes do banco de dados deste estudo são apresentados na Tabela 4.2. O parâmetro κ_{tr} foi variado a fim de se obter uma calibração do modelo HSD6

adotado. Para isso foram estudados os casos de $k_{tr} = 0,001; 0,002; 0,003$. A Figura 4.20 ilustra o comportamento obtido com a calibração dos parâmetros. A partir dessa análise observa-se que o ajuste mais adequado ocorreu com o uso de $k_{tr}=0,002$.

Tabela 4.2 – Parâmetros adotados para calibração do modelo MEF R2

Domínio	Parâmetro	Valor
Compressão	Tensão relativa no início da plastificação (Ω_{ci})	40%
	Tensão relativa na deformação última (Ω_{cr})	10%
	Deformação plástica na tensão máxima (k_{cm})	$\varepsilon_1 - f_{cm}/E_c$
	Deformação plástica última (k_{cr})	$\varepsilon_u - \Omega_{cr} \cdot f_{cm}/E_c$
Tração	Tensão relativa residual (Ω_{tr})	2%
	Deformação plástica última (k_{tr})	0,002

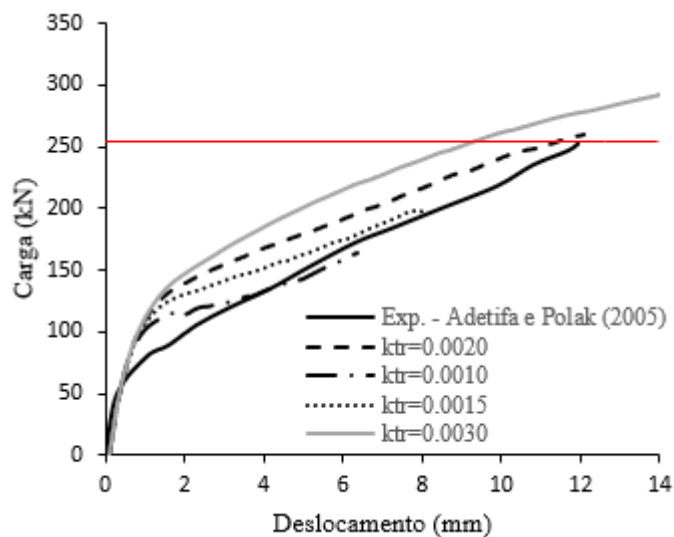


Figura 4.20 - Curva carga-deslocamento da laje SB1 variando k_{tr} do modelo MEF R2

4.2.2.2 Parâmetros de convergência

Os valores da tolerância dos resíduos iguais a 0,5%, 1% e 5% para o critério de força também foram utilizados para avaliar o modelo MEF R2 em relação aos parâmetros de convergência. A Figura 4.21 mostra o comportamento das curvas de cargas versus deslocamentos de cada parâmetro adotado.

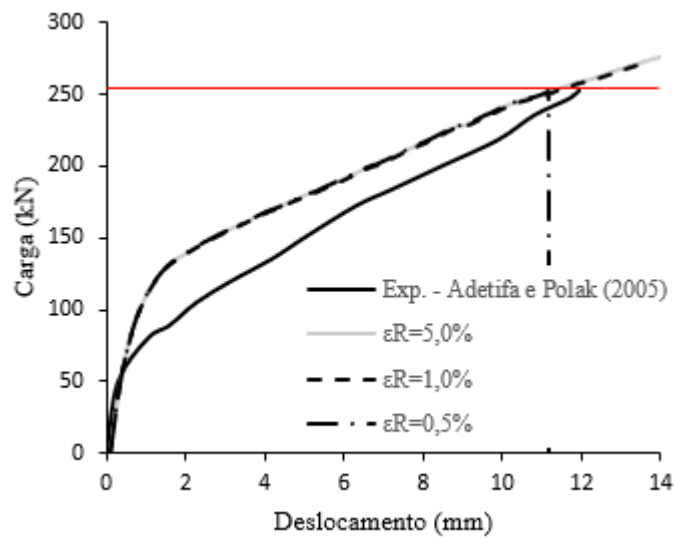


Figura 4.21 - Curva carga-deslocamento da laje SB1 variando ε_R do modelo MEF R2

Em relação ao número de *substeps*, também foi avaliado o comportamento da laje para tolerância dos resíduos igual a 0,5%. Os valores utilizados foram iguais a 1000, 2500, 5000. A Figura 4.22 ilustra o resultado alcançado.

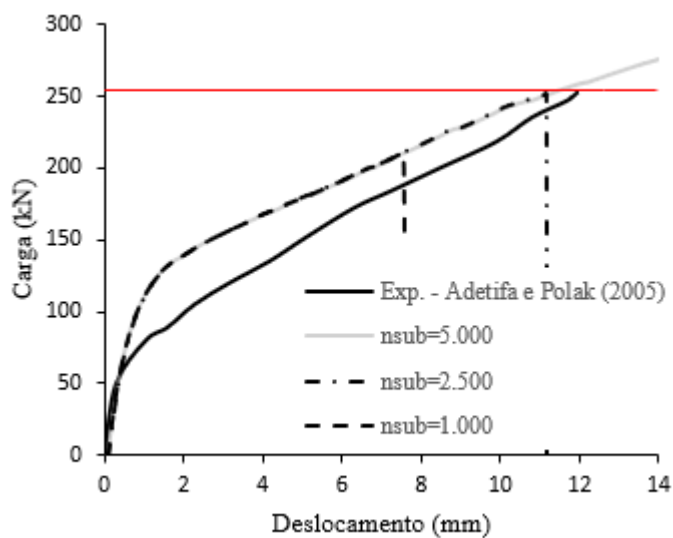


Figura 4.22 - Curva carga-deslocamento da laje SB1 variando n_{sub} do modelo MEF R2

4.2.2.3 Estudo de malha

Além das configurações adotadas para o estudo do modelo R1, foi utilizado também uma malha mais refinada para avaliar o modelo R2. Essa malha é composta por elementos de 3x3x3 cm. A Figura 4.23 apresenta o comportamento das curvas de carga versus deslocamentos das malhas

analisadas. A partir da observação da curva carga-deslocamento, percebe-se que a convergência é dependente da malha utilizada e diminui com o refinamento da malha.

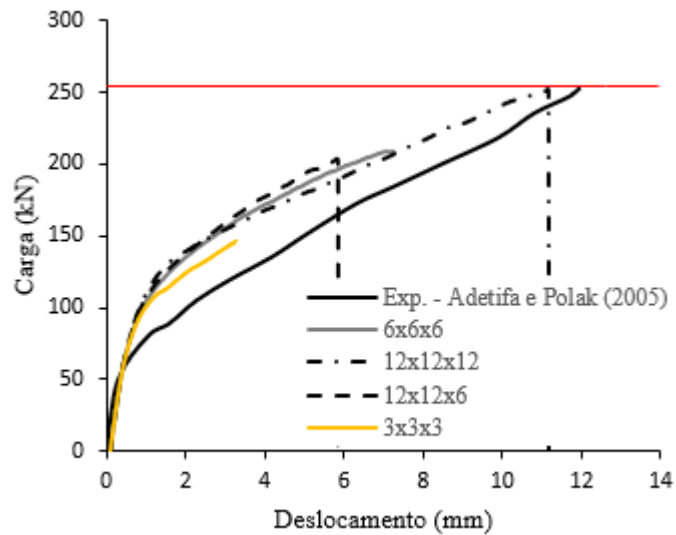


Figura 4.23 - Curva carga-deslocamento da laje SB1 variando a malha do modelo MEF R2

A Figura 4.24 apresenta a curva carga-deslocamento obtida de forma experimental por Adetifa e Polak (2005), numérica por Genikomsou e Polak (2015) e a numérica obtida com o modelo MEF R2.

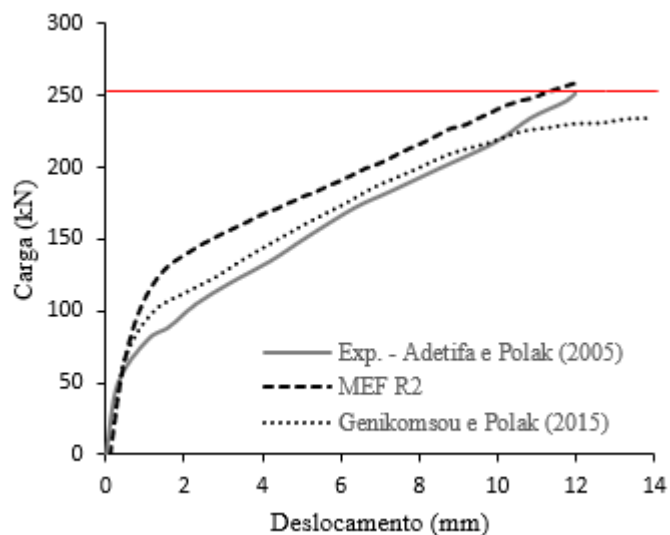


Figura 4.24 - Curva carga-deslocamento da laje SB1 obtida pelo MEF R2 calibrado

4.3 MODELO NUMÉRICO MEF S1 PARA PREVISÃO DA SOLICITAÇÃO NA LIGAÇÃO LAJE-PILAR

A solicitação na ligação laje-pilar é obtida por meio da determinação da força concentrada transmitida da laje ao pilar. Para determinação dessa solicitação, um modelo em elementos finitos, denominado MEF S1, foi desenvolvido no *software* ANSYS APDL. Os elementos BEAM 188 e SHELL 181 foram utilizados para modelagem dos pilares e da laje, respectivamente. Neste modelo, uma análise linear elástica é adotada para determinação da solicitação.

As ações atuantes são consideradas uniformemente distribuídas e agindo na direção perpendicular ao plano da laje. Nesta pesquisa, duas ações são consideradas; ação permanente (g), formada pelo peso próprio da estrutura e elementos construtivos; e ação variável (q), devido ao uso e ocupação da edificação. A partir dessas ações, utilizando o modelo MEF S1, é determinada a força solicitante na região de ligação laje-pilar. O modelo linear-elástico é justificado devido à metodologia utilizada para determinação dos esforços para dimensionamento. A geometria, condições de contorno e a região de ligação-laje pilar estudada são apresentadas na Figura 4.25. O *script* usado para o modelo é mostrado no Apêndice A.3.

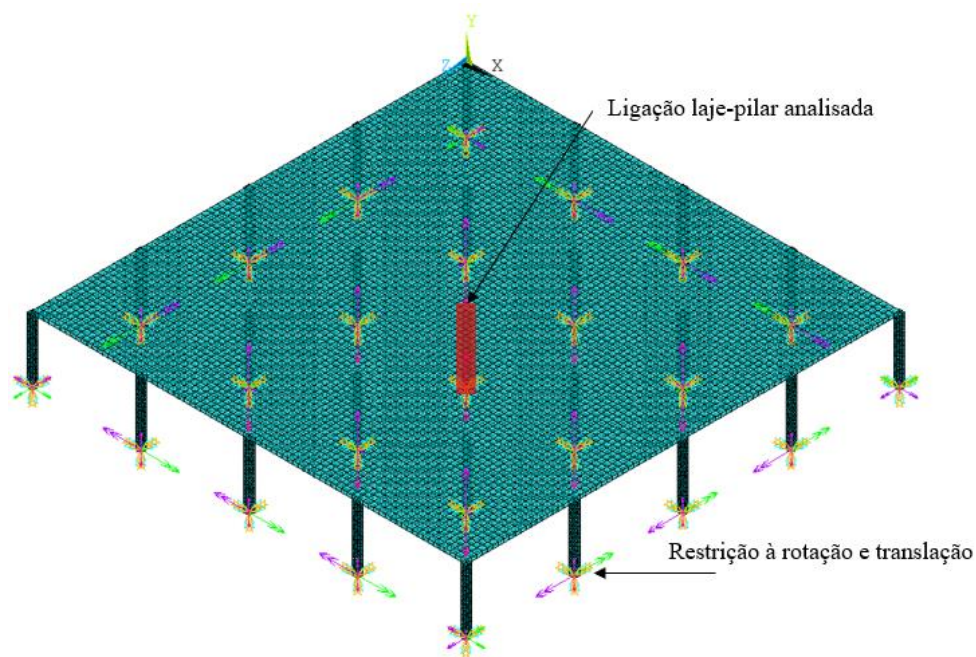


Figura 4.25 – Geometria e região analisada da laje lisa padrão

5 AVALIAÇÃO ESTATÍSTICA DAS INCERTEZAS ASSOCIADAS AOS MODELOS DE RESISTÊNCIA À PUNÇÃO

É apresentada neste capítulo uma comparação dos resultados experimentais das cargas de ruptura de lajes lisas com os valores estimados pelas teorias apresentadas neste texto. Com base no estudo realizado é possível estimar as incertezas associadas aos modelos estudados. Os modelos da ABNT NBR 6118 (2014), EUROCODE 2 (2004), ACI 318 (2019), TFCC, Código Modelo *fib* 2010 (2012), modelo MEF R1 e modelo MEF R2 serão avaliados neste capítulo.

5.1 PESQUISAS REALIZADAS NO CAMPO EXPERIMENTAL

Com o objetivo de comparar os resultados da resistência à punção dos métodos vistos anteriormente com os resultados experimentais, realizou-se uma revisão das principais pesquisas nacionais e internacionais desenvolvidas até o momento. Com os resultados dessa análise, é possível verificar a precisão dos métodos de avaliação da resistência à punção e, também, realizar um estudo sobre a incerteza associado ao modelo numérico adotado.

Por meio do estudo das pesquisas realizadas por diversos autores, elaborou-se um banco de dados de 65 lajes lisas sem armadura de punção, apoiadas em pilares quadrados e com modo de ruptura por punção. A Tabela 5.1 apresenta os pesquisadores estudados, o ano da pesquisa e a quantidade de lajes analisadas neste trabalho.

Tabela 5.1 Descrição dos autores e quantidade de lajes avaliadas no banco de dados do trabalho

Lajes lisas sem armadura de punção		
Pesquisador	Ano da pesquisa	Quantidade de lajes estudadas
Elstner e Hognestad	1956	14
Regan	1986	7
Marzouk e Hussein	1991	12
Tomaszewicz	1993	12
Coelho	1999	1
Gomes e Regan	1999	2
Melgues	2001	1
Musse	2004	1
Teng et al.	2004	1
Adetifa e Polak	2005	1
Guandalini, Burdet e Muttoni	2009	4
Ferreira	2010	1
Sagaseta	2011	1
Lima	2012	1
Clément et al.	2014	2
Marques	2018	1
Liberati	2019	3

Fonte: elaborado pelo autor

O Apêndice B apresenta as cargas de ruptura experimental e os principais dados das 65 lajes estudadas neste trabalho. Além disso, maiores detalhes sobre as lajes analisadas nesta etapa podem ser obtidos diretamente dos trabalhos dos pesquisadores citados.

5.2 DESCRIÇÃO DAS INCERTEZAS ASSOCIADAS AOS MODELOS

A avaliação da resistência de uma estrutura, assim como a quantificação da solicitação a ela imposta é realizado por meio de modelos estruturais que tem por objetivo representar da melhor forma possível o comportamento real da estrutura, sendo impraticável se determinar o comportamento de forma exata. Segundo Beck (2019), esses modelos aproximam de forma mais ou menos abstrata o complexo comportamento das estruturas. Dessa forma, além das variabilidades referentes às resistências dos materiais e aos carregamentos impostos a estrutura, deve-se considerar também a incerteza do modelo adotado.

As incertezas relacionadas aos modelos adotados podem ser representadas por meio das variáveis aleatórias, e seus parâmetros estatísticos podem ser determinados a partir da comparação de ensaios experimentais com valores obtidos pelos modelos adotados (BECK, 2019). Uma forma de se avaliar essas incertezas é a partir da determinação da média e do coeficiente de variação da razão entre os resultados experimentais e dos modelos.

Conforme Macgregor, Mirza e Ellingwood (1983), salienta-se ainda que a razão entre os resultados de ensaios experimentais e os obtidos pelos modelos apresentam variabilidade devido a três principais causas. A primeira causa de variabilidade é associada às incertezas do modelo adotado. A segunda causa é pertinente as incertezas oriundas dos ensaios experimentais, como exatidão dos equipamentos de medição, erros de leitura e dificuldade na definição das falhas. Por fim, a terceira causa tem relação com a diferença entre a resistência de um corpo de prova, utilizado para caracterizar as propriedades dos materiais que serão utilizados no ensaio experimental, e a resistência do material utilizado no ensaio experimental.

Com a finalidade de comparar os resultados dos modelos de resistência com os resultados experimentais a variável aleatória $E_{m,R}$, que representa as incertezas associadas ao modelo de resistência, foi estudada. Neste trabalho, as cargas de ruptura experimentais são admitidas como exatas e, as cargas de ruptura obtidas pelos modelos, previsão da força última. Em nenhum dos modelos foram utilizados os coeficientes de segurança. As amostras da variável aleatória E_R são obtidas a partir da Equação (5.1) e são determinadas com base nos resultados das 65 lajes apresentadas anteriormente.

$$E_{m,R} = \frac{V_{exp}}{V_{calc}} \quad (5.1)$$

sendo:

V_{exp} : carga de ruptura obtida por ensaio experimental;

V_{calc} : carga de ruptura obtida pelos modelos de previsão.

5.2.1 Incerteza associada ao modelo de previsão da resistência segundo a ABNT NBR 6118 (2014)

A resistência à punção conforme a ABNT NBR 6118 (2014) é baseada no método das superfícies de controle, onde a resistência é verificada em duas superfícies críticas. As equações utilizadas para avaliação das incertezas dos modelos de resistência devem ser apresentadas sem os seus coeficientes de ponderação e com valores médios para as variáveis independentes. A primeira verificação é da resistência da biela no perímetro de controle u_0 , conforme Equação (5.2), e a segunda é a verificação da tração na diagonal do perímetro de controle u_1 , conforme Equação (5.3). A resistência à punção é dada pelo menor valor entre as duas verificações apresentadas anteriormente. O Apêndice C apresenta a comparação entre os resultados experimentais e o determinado utilizando essa metodologia. Além disso, a Tabela 5.2 apresenta os resultados de forma sintetizada.

$$V_{calc} = 0,27\alpha_v f_c u_0 d \quad (5.2)$$

onde:

α_c - é o fator de fragilidade do concreto;

f_c - é a resistência média à compressão do concreto;

$u_0 \cdot d$ - é a área da superfície crítica C.

$$V_{calc} = 0,18 \left(1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \right) (100\rho f_c)^{\frac{1}{3}} u_1 d \quad (5.3)$$

onde:

d - é a altura útil média da laje em centímetros;

$u_1 \cdot d$ - é a área da superfície crítica C';

ρ - é a taxa geométrica de armadura de flexão aderente;

f_c - é a resistência média à compressão do concreto em MPa.

Tabela 5.2 - Média e C.V. da razão entre a carga de ruptura experimental e a calculada pelo modelo da ABNT NBR 6118 (2014)

Lajes lisas sem armadura de punção				
Pesquisador	Ano da pesquisa	Quantidade de lajes estudadas	Média (V_{exp}/V_{calc})	C.V (V_{exp}/V_{calc})
Elstner e Hognestad	1956	14	0.94	0.07
Regan	1986	7	0.96	0.06
Marzouk e Hussein	1991	12	1.13	0.09
Tomaszewicz	1993	12	1.05	0.07
Coelho	1999	1	1.15	-
Gomes e Regan	1999	2	0.86	0.03
Melgues	2001	1	0.99	-
Musse	2004	1	1.11	-
Teng et al.	2004	1	0.87	-
Adetifa e Polak	2005	1	0.98	-
Guandalini, Burdet e Muttoni	2009	4	0.99	0.09
Ferreira	2010	1	1.07	-
Sagaseta	2011	1	1.09	-
Lima	2012	1	0.84	-
Clément et al.	2014	2	0.98	0.01
Marques	2018	1	0.84	-
Liberati	2019	3	0.86	0.09
Total		65	1.00	0.11

Fonte: elaborado pelo autor

A Figura 5.1 apresenta a relação entre V_{exp} e V_{calc} obtidos com o modelo da NBR 6118:2014, onde pode-se observar uma excelente aproximação dos resultados experimentais e teóricos. Além disso, uma análise de correlação bivariada foi realizada a fim de verificar a dependência da incerteza do modelo em relação as principais variáveis do modelo de resistência. Para isso, as variáveis adotadas foram a resistência média a compressão do concreto (f_{cm}), a taxa de armadura de flexão (ρ), a tensão de escoamento do aço (f_y), a dimensão do pilar (lp), a altura útil da laje (d) e a relação entre a dimensão do pilar e a altura útil da laje ($\frac{lp}{d}$).

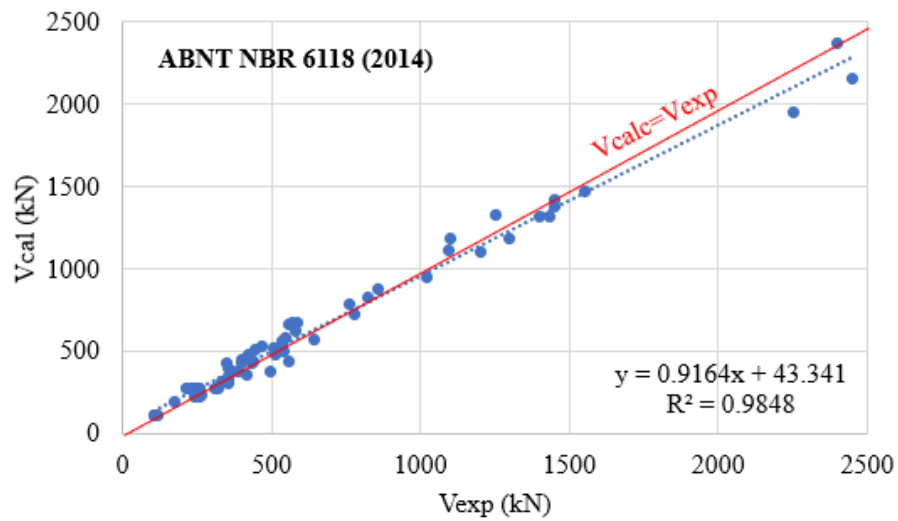


Figura 5.1 – Relação entre V_{exp} e V_{calc} para o modelo da ABNT NBR 6118 (2014)

A avaliação da correlação para todos os modelos é realizada considerando um nível de significância $\alpha = 5\%$, e os resultados das variáveis significativas são diferentes para cada modelo estudado. A partir da observação da Figura 5.2 nota-se que as amostras se apresentam de maneira muito dispersa e com correlações pouco significativas, o mesmo comportamento é observado para algumas variáveis dos outros modelos analisados. Dessa forma, para o presente estudo, empregou-se a metodologia utilizada por Liberati (2019), onde Modelos Lineares Generalizados (MLG) com distribuição Gama e função de ligação logarítmica foram ajustados para descrever a variável $E_{m,R}$.

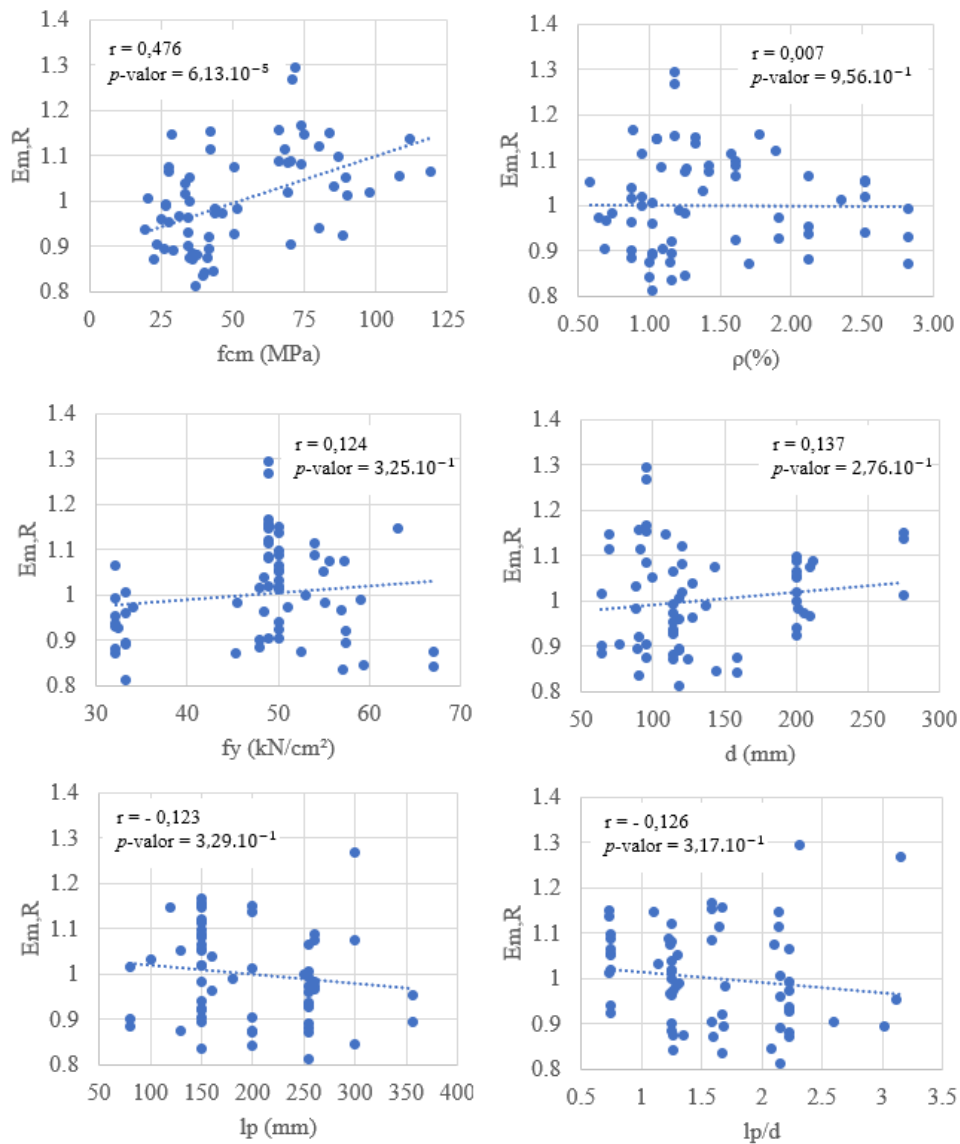


Figura 5.2 - Análise de correlação da variável $E_{m,R}$ de acordo com modelo da ABNT NBR 6118 (2014)

Para o modelo de previsão de resistência da ABNT NBR 6118 (2014) a única variável que possui uma correlação significativa é a variável f_{cm} , com valor de correlação igual a 0,476 e p -valor igual a $6,13 \cdot 10^{-5}$. Assim, o MLG utilizado é dado pela Equação (5.4). O modelo só pode ser usado para f_{cm} entre 19,5 e 119 MPa.

$$E_{m,R}(f_{cm}) = \exp(-0,1086 + 0,0021 \cdot f_{cm}) + \varepsilon \quad (5.4)$$

sendo:

ε : parcela aleatória da incerteza do modelo, dado pelo resíduo do MLG

As Figuras 5.3 e 5.4 apresentam a análise de resíduo do modelo considerado. Nesta análise, a distribuição de probabilidade adotada para os resíduos observados foi a distribuição normal com média igual a zero e desvio padrão igual a 0,0976.

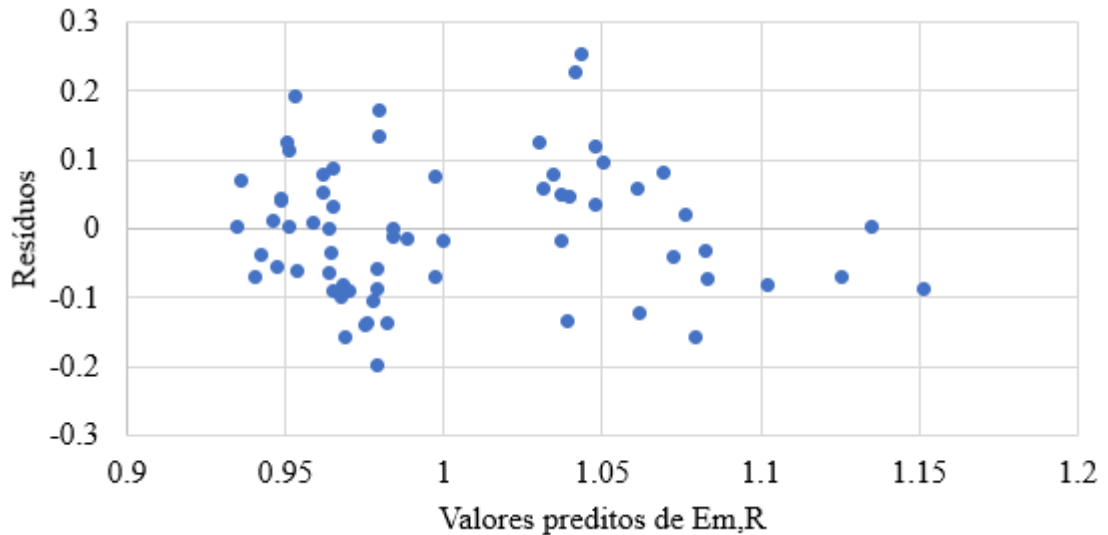


Figura 5.3 -Gráfico dos resíduos do MLG para o modelo da ABNT NBR 6118 (2014)

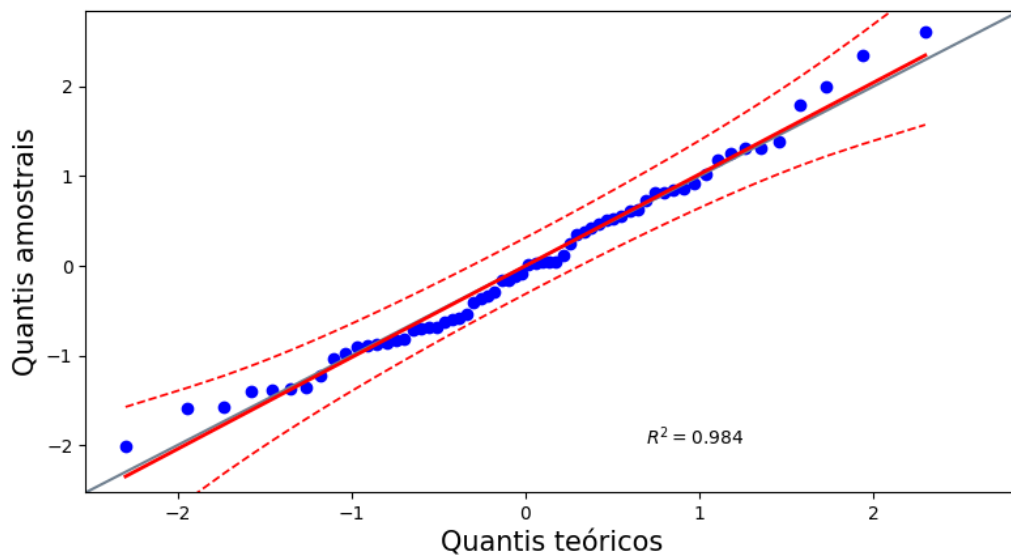


Figura 5.4 – Gráfico qq-norm dos resíduos do modelo da ABNT NBR 6118 (2014) com envoltória com grau de confiança de 95%

Uma análise desconsiderando a correlação também foi realizada. Nesta análise buscou-se a distribuição de probabilidade que melhor se ajustasse aos dados obtidos. Para isso, realizou-se o teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov considerando um nível de significância $\alpha = 5\%$,

sendo o valor k_{crit} igual 0,238 para as análises realizadas. No estudo, a distribuição de probabilidade log-normal, com média igual a 1,00 e desvio padrão igual 0,11, obteve um valor de k igual a 0,068, mostrando-se adequada ao ajuste dos dados obtidos. A Figura 5.5 apresenta o histograma, a FDP e a FDA da análise realizada, onde se observa o ajuste da função log-normal.

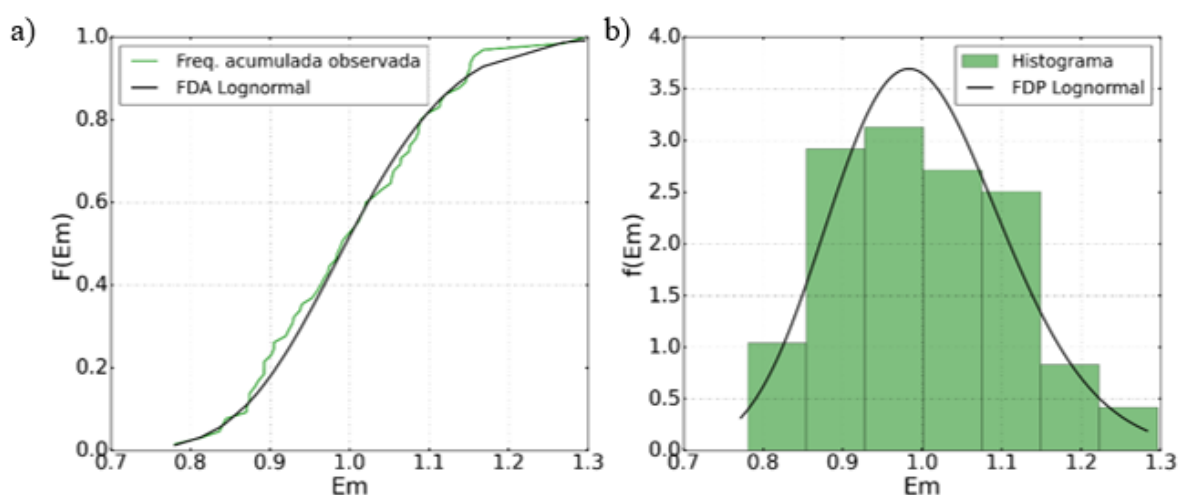


Figura 5.5 - (a) distribuição acumulada de probabilidade e (b) histograma e função de densidade de probabilidade para variável incerteza do modelo de resistência segundo a ABNT NBR 6118 (2014)

5.2.2 Incerteza associada ao modelo de previsão da resistência segundo o EUROCODE 2 (2004)

Os resultados apresentados pelo EC 2 (2004) e pela NBR-6118:2014 foram, de maneira geral, similares. Esse fato é justificado pelo uso do mesmo modelo de cálculo para determinação da resistência à punção. As diferenças são obtidas em razão do EC 2 (2004) limitar a taxa de armadura em 2% e o fator do efeito escala em 2. As Equações (5.2) e (5.3) são utilizadas para avaliar a resistência levando em consideração esses limites prescritos no EC 2 (2004). A Tabela 5.3 apresenta os resultados na análise da incerteza do modelo de forma resumida. A resistência determinada para cada laje é apresentada no Apêndice C.

Tabela 5.3 - Média e C.V. da razão entre a carga de ruptura experimental e a calculada pelo modelo do EC 2 (2004)

Lajes lisas sem armadura de punção				
Pesquisador	Ano da pesquisa	Quantidade de lajes estudadas	Média (V_{exp}/V_{calc})	C.V (V_{exp}/V_{calc})
Elstner e Hognestad	1956	14	1.17	0.11
Regan	1986	7	1.19	0.11
Marzouk e Hussein	1991	12	1.39	0.11
Tomaszewicz	1993	12	1.11	0.08
Coelho	1999	1	1.35	-
Gomes e Regan	1999	2	0.91	0.03
Melgues	2001	1	1.09	-
Musse	2004	1	1.38	-
Teng et al.	2004	1	0.99	-
Adetifa e Polak	2005	1	1.23	-
Guandalini, Burdet e Muttoni	2009	4	1.10	0.12
Ferreira	2010	1	1.17	-
Sagaseta	2011	1	1.09	-
Lima	2012	1	0.92	-
Clément et al.	2014	2	0.98	0.01
Marques	2018	1	1.04	-
Liberati	2019	3	1.08	0.08
Total		65	1.18	0.14

Fonte: elaborado pelo autor

A Figura 5.6 apresenta a relação entre o V_{exp} e V_{calc} obtidos com o modelo do EUROCODE 2 (2004) onde pode-se observar uma boa aproximação dos resultados experimentais e teóricos.

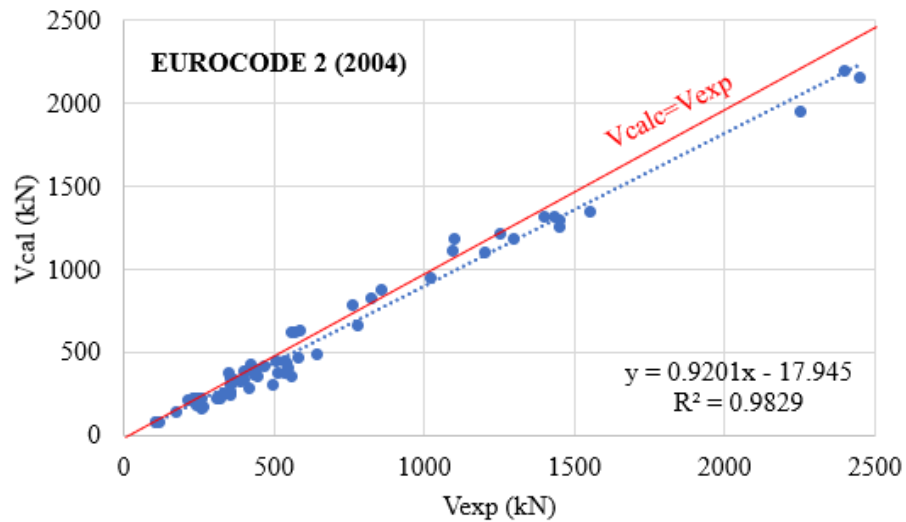


Figura 5.6 - Relação entre V_{exp} e V_{calc} para o modelo do EC 2 (2004)

A influência da limitação do efeito de escala pode ser observada na Figura 5.7 onde, para menores valores de altura útil, a razão entre os resultados experimentais e os determinados pelos modelos das normas aumenta, indicando valores mais conservadores do EC2 (2004) em relação a ABNT NBR 6118 (2014).

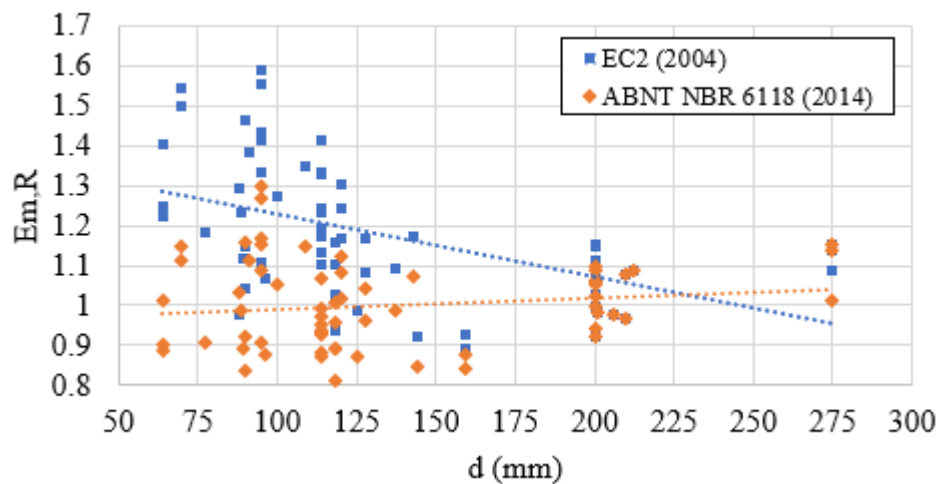


Figura 5.7 – Relação entre $E_{m,R}$ e d para os modelos da ABNT NBR 6118 (2014) e EC 2 (2004)

A análise de correlação bivariada foi realizada com as mesmas variáveis do modelo anterior, sendo os resultados apresentados na Figura 5.8.

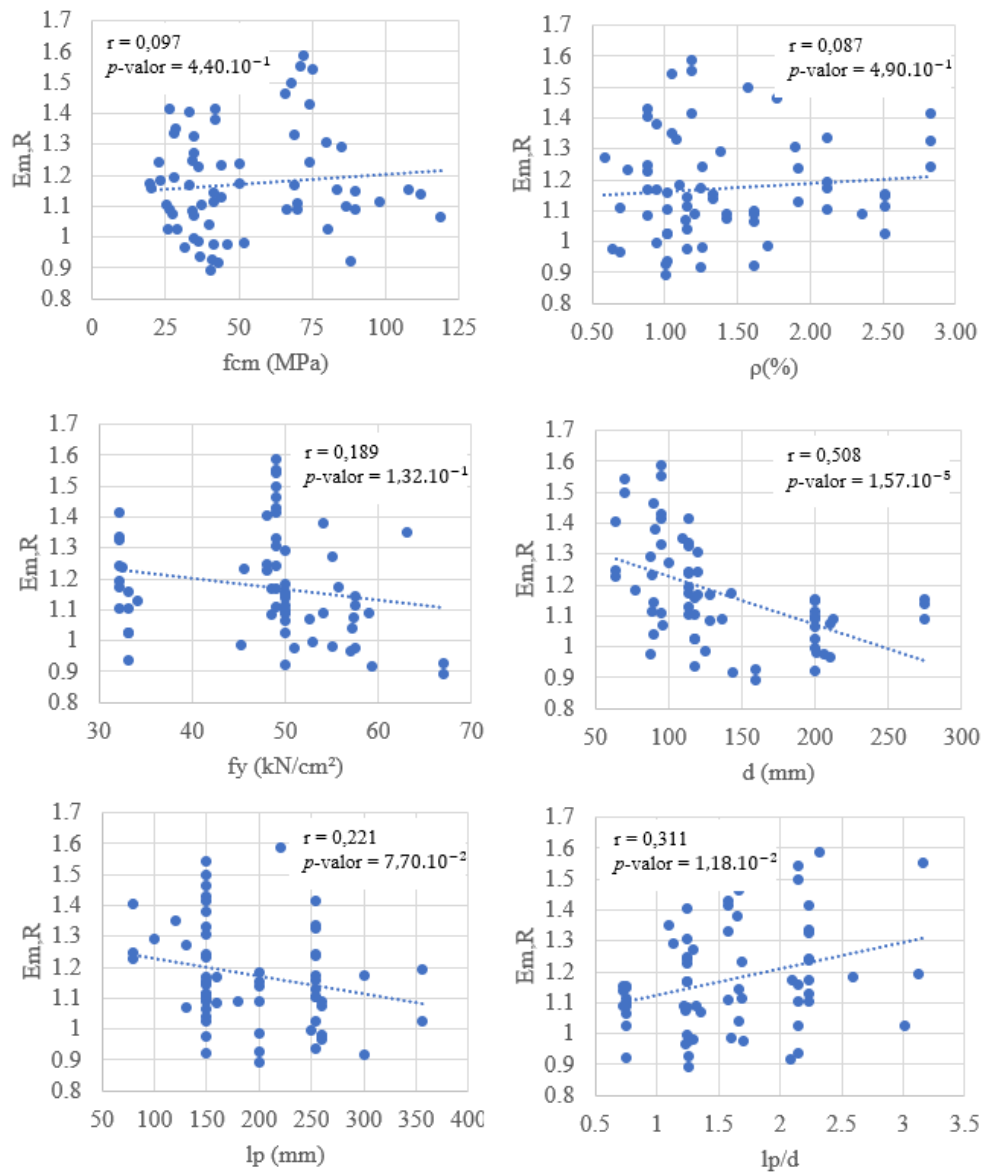


Figura 5.8 - Análise de correlação da variável $E_{m,R}$ de acordo com modelo do EC 2 (2004)

Para o modelo de previsão de resistência da EUROCODE 2 (2004) duas variáveis possuem correlação significativa. A variável d , com valor de correlação igual a 0,508 e p -valor igual a $1,57 \cdot 10^{-5}$ e a variável $\frac{l_p}{d}$, com valor de correlação igual a 0,311 e p -valor igual a $1,18 \cdot 10^{-2}$. Assim, o MLG utilizado é dado pela Equação (5.5), onde os limites da análise são: $64 \leq d \leq 275 \text{ mm}$ e $0,36 \leq \frac{l_p}{d} \leq 1,58$.

$$E_{m,R} \left(d, \frac{l_p}{d} \right) = \exp \left(0,3255 - 0,0013 \cdot d + 0,0045 \cdot \frac{l_p}{d} \right) + \varepsilon \quad (5.5)$$

sendo:

ε : parcela aleatória da incerteza do modelo, dado pelo resíduo do MLG

As Figuras 5.9 e 5.10 apresentam a análise do resíduo do modelo considerado. Nesta análise, a distribuição de probabilidade adotada foi a distribuição normal com média igual a zero e desvio padrão igual a 0,1456.

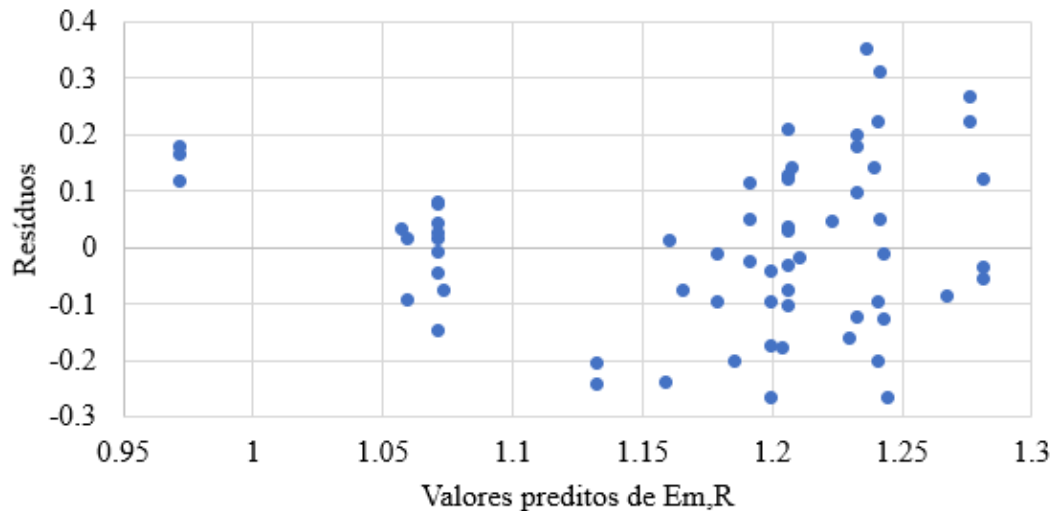


Figura 5.9 – Gráfico dos resíduos do MLG para o modelo do EC 2 (2004)

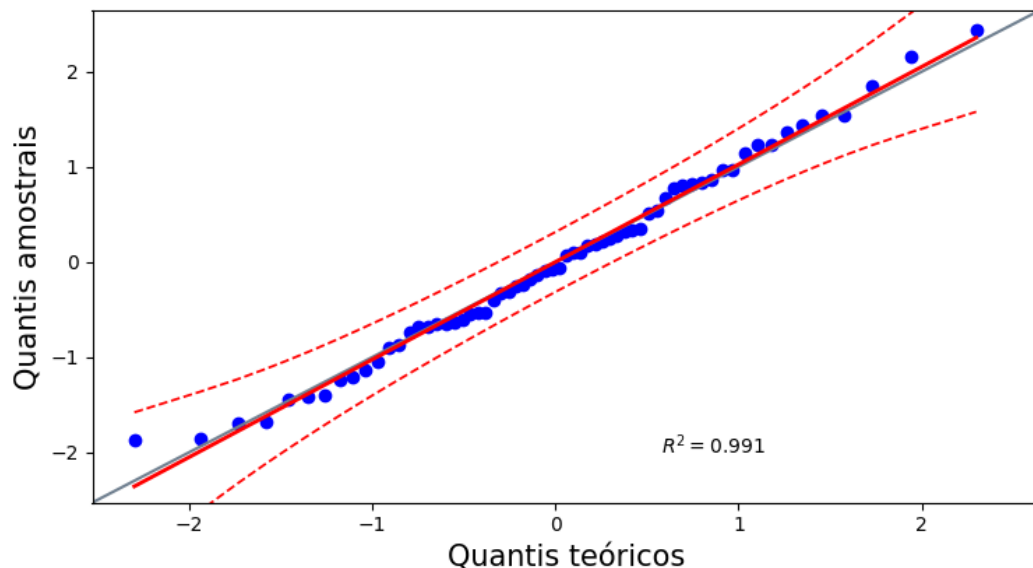


Figura 5.10 - Gráfico qq-norm dos resíduos do modelo EC 2 (2004) com envoltória com grau de confiança de 95%

Assim como no modelo anterior, uma análise desconsiderando a correlação foi desenvolvida usando ajuste de curva por teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov com um nível de

significância $\alpha = 5\%$. A distribuição de probabilidade log-normal, com média igual a 1,17 e desvio padrão igual 0,16 mostrou-se adequada aos dados analisados. A Figura 5.11 apresenta o histograma, a FDP e a FDA dessa análise.

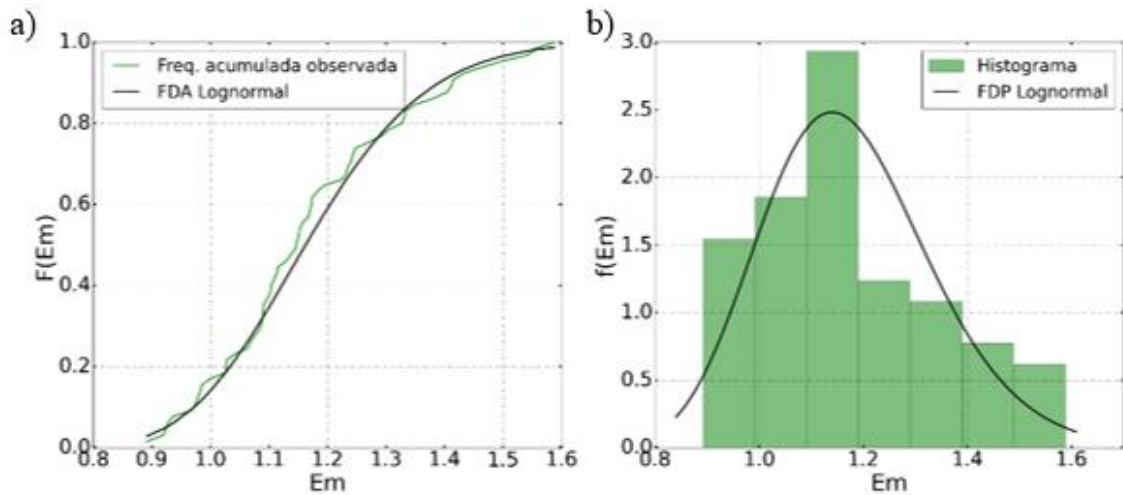


Figura 5.11 - (a) distribuição acumulada de probabilidade e (b) histograma e função de densidade de probabilidade para variável incerteza do modelo de resistência segundo o EC 2 (2004)

5.2.3 Incerteza associada ao modelo de previsão da resistência segundo o ACI 318 (2019)

A determinação da resistência à punção para o modelo de previsão segundo o ACI 318 (2019) é dada pelo valor mais restritivo da Equação (5.6). A Tabela 5.4 mostra os resultados obtidos para cada um dos autores estudados.

$$V_{calc} = \min \left\{ \begin{array}{l} 0,33 \cdot \lambda_s \cdot \lambda \cdot \sqrt{f_{cm}} \cdot b_0 \cdot d \\ 0,17 \left(1 + \frac{2}{\beta} \right) \lambda_s \lambda \sqrt{f_{cm}} \cdot b_0 \cdot d \\ 0,083 \left(2 + \frac{\alpha_s d}{b_0} \right) \lambda_s \lambda \sqrt{f_{cm}} \cdot b_0 \cdot d \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Tabela 5.4 - Média e C.V. da razão entre a carga de ruptura experimental e a calculada pelo modelo da ACI 318 (2019)

Lajes lisas sem armadura de punção				
Pesquisador	Ano da pesquisa	Quantidade de lajes estudadas	Média (V_{exp}/V_{calc})	C.V (V_{exp}/V_{calc})
Elstner e Hognestad	1956	14	1.42	0.19
Regan	1986	7	1.37	0.12
Marzouk e Hussein	1991	12	1.44	0.15
Tomaszewicz	1993	12	1.49	0.08
Coelho	1999	1	1.77	0.00
Gomes e Regan	1999	2	1.18	0.03
Melgues	2001	1	1.48	0.00
Musse	2004	1	1.63	0.00
Teng et al.	2004	1	1.30	0.00
Adetifa e Polak	2005	1	1.35	0.00
Guandalini, Burdet e Muttoni	2009	4	1.31	0.15
Ferreira	2010	1	1.30	0.00
Sagaseta	2011	1	1.32	0.00
Lima	2012	1	1.02	0.00
Clément et al.	2014	2	1.11	0.15
Marques	2018	1	1.28	0.00
Liberati	2019	3	1.32	0.08
Total		65	1.41	0.14

Fonte: elaborado pelo autor

A Figura 5.12 ilustra a relação entre o V_{exp} e V_{calc} obtidos com o modelo da ACI 318(2019). Percebe-se que as resistências calculadas apresentam estimativas adequadas para cargas de ruptura de até aproximadamente 800 kN. Para as lajes de maiores cargas de ruptura a norma apresenta valores conservadores. Analisando o banco de dados estudado, essas lajes são as que possuem altas taxas de armadura longitudinal. Dessa forma, nota-se que existe uma relação entre a taxa de armadura e a incerteza do modelo da ACI 318 (2019). Essa relação fica evidente com o estudo da correlação da incerteza do modelo com a taxa mecânica de armadura, conforme apresentado na Figura 5.13. Essa correlação pode ser explicada pela não consideração da contribuição da armadura de flexão no modelo adotado pelo ACI 318 (2019).

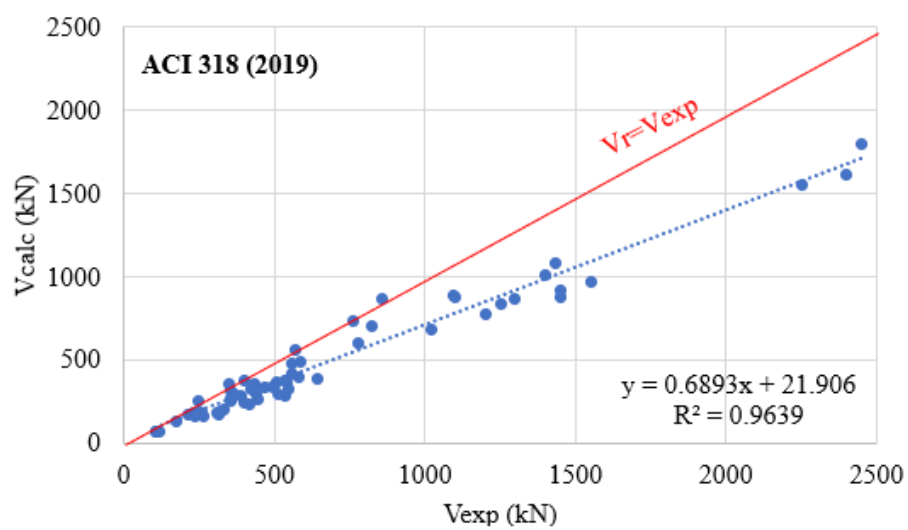


Figura 5.12 - Relação entre V_{exp} e V_{calc} para o modelo da ACI 318 (2019)

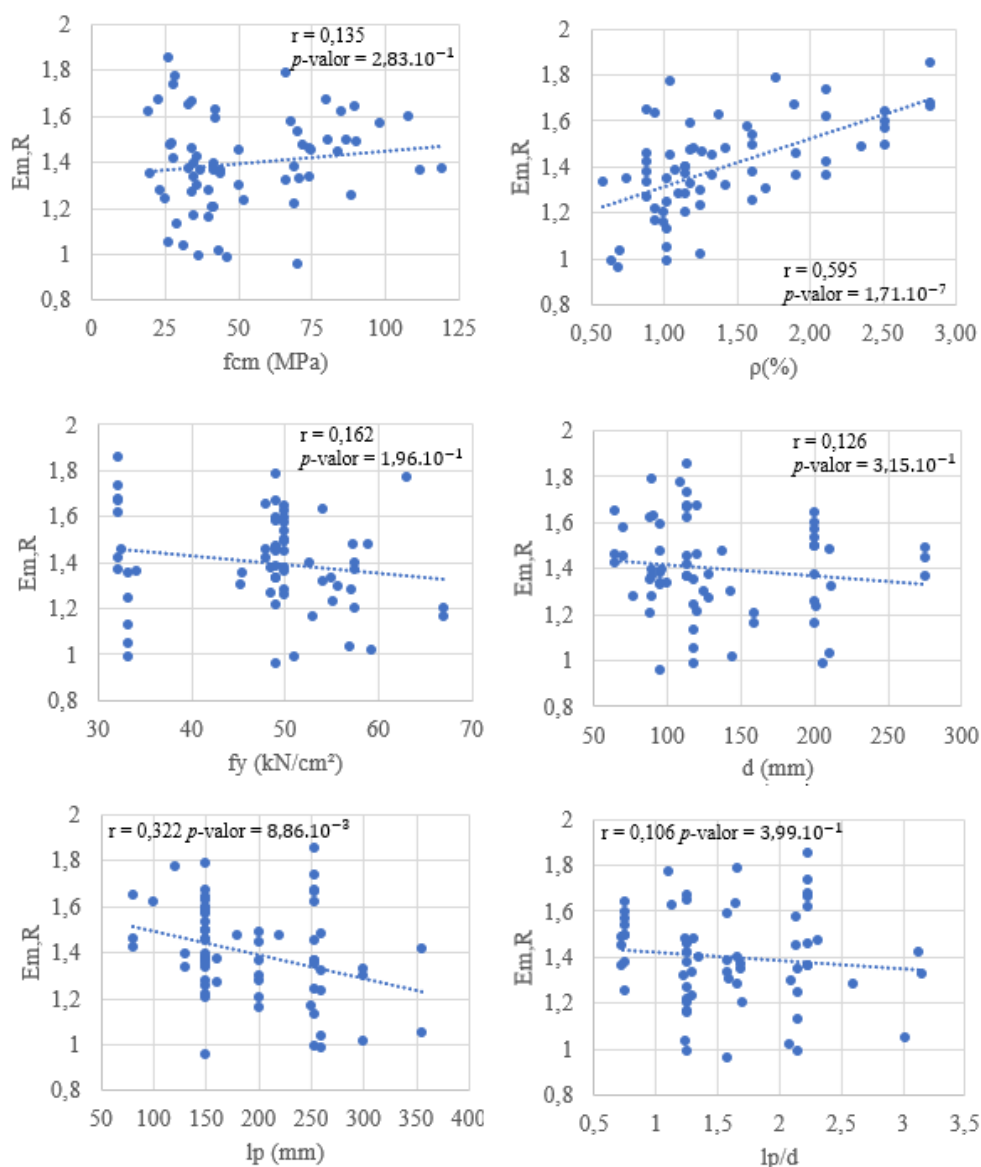


Figura 5.13 – Análise de correlação da variável $E_{m,R}$ de acordo com modelo do ACI 318 (2019)

Para o modelo de previsão de resistência da ACI 318 (2019) duas variáveis possuem correlação significativa. A variável ρ , com valor de correlação igual a 0,595 e p -valor igual a $1,71 \cdot 10^{-7}$ e a variável l_p , com valor de correlação igual a 0,322 e p -valor igual a $8,86 \cdot 10^{-3}$. Assim, o MLG utilizado é dado pela Equação (5.7). Modelo válido para ρ entre 3,7 e 0,7%

$$E_{m,R}(\rho, l_p) = \exp(0,3162 + 0,1444 \cdot \rho - 0,0012 \cdot l_p) + \varepsilon \quad (5.7)$$

sendo:

ε : parcela aleatória da incerteza do modelo, dado pelo resíduo do MLG

As Figuras 5.14 e 5.15 apresentam a análise do resíduo do modelo considerado. Nesta análise, a distribuição de probabilidade adotada foi a distribuição normal com média igual a zero e desvio padrão igual a 0,1394.

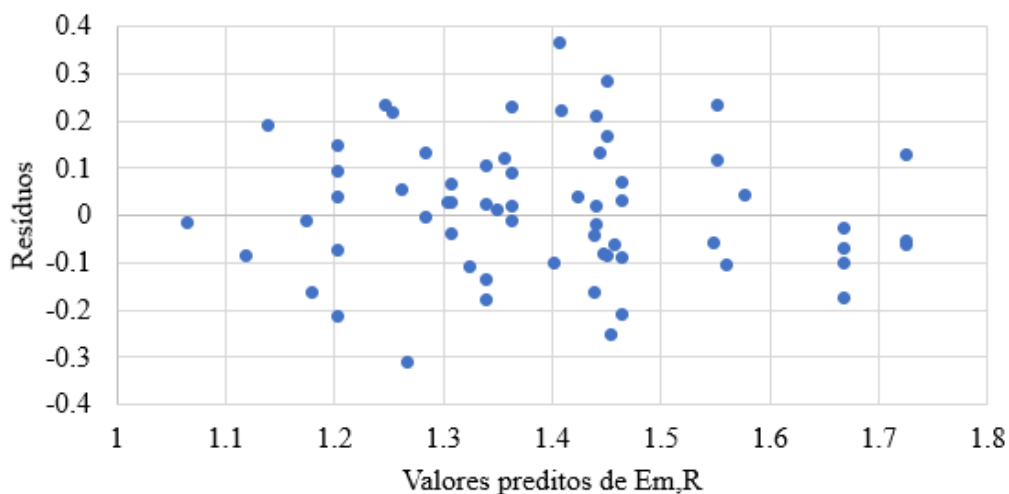


Figura 5.14 - Gráfico dos resíduos do MLG para o modelo da ACI 318 (2019)

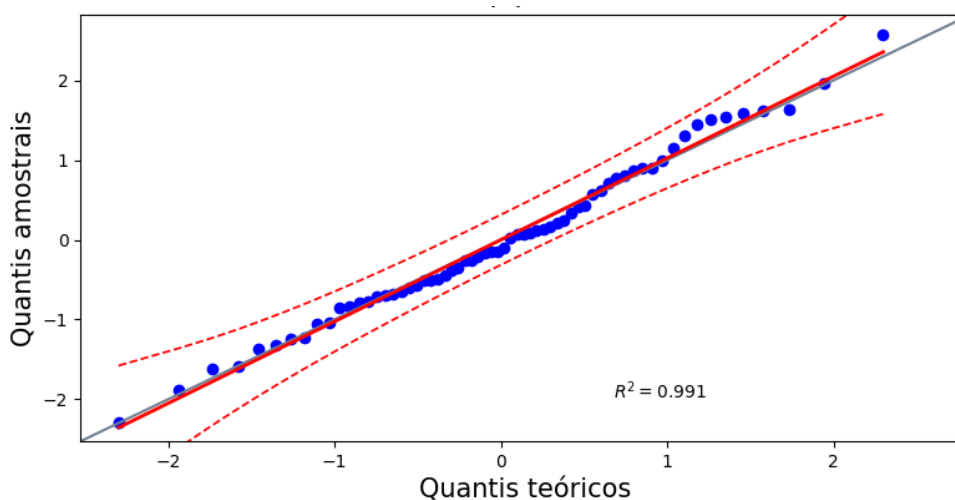


Figura 5.15 - Gráfico qq-norm dos resíduos do modelo da ACI 318 (2019) com envoltória com grau de confiança de 95%

Para análise sem a consideração de correlação, a distribuição de probabilidade adotada foi a log-normal, com média igual a 1,40 e desvio padrão igual a 0,21. A Figura 5.16 apresenta o histograma, a FDP e a FDA obtidos para essa análise.

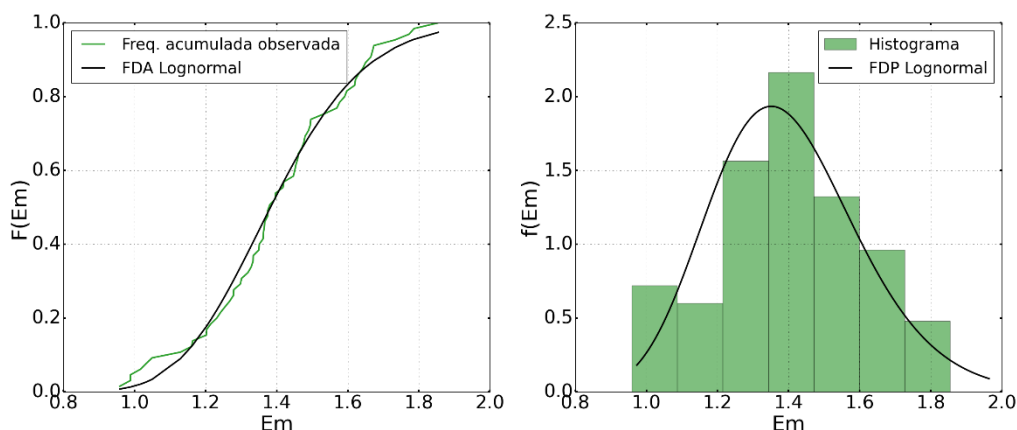


Figura 5.16 - (a) distribuição acumulada de probabilidade e (b) histograma e função de densidade de probabilidade para variável incerteza do modelo de resistência segundo a ACI 318 (2019)

5.2.4 Incerteza associada ao modelo de previsão da resistência segundo a TFCC

Para avaliação das cargas de ruptura segundo a TFCC a resistência à punção foi calculada conforme Equações (2.2), e a determinação da rotação da laje conforme apresentado na Equação (2.3), seguindo as recomendações apresentadas no Capítulo 2. Os resultados das cargas de ruptura calculados segundo essa teoria podem ser observados no Apêndice C. Os parâmetros estatísticos obtidos neste estudo podem ser observados na Tabela 5.5.

A análise da precisão do modelo pode ser observada na Figura 5.17. Além disso, o estudo da correlação apresentado na Figura 5.18, indica uma correlação significativa entre a variável f_{cm} , l_p , e f_y . Dessa forma, o MLG utilizado é dado pela Equação (5.8). O modelo é válido para os seguintes limites das variáveis: f_{cm} entre 19,5 e 119 MPa; l_p entre 40 e 178 mm; f_y entre 321 e 670 MPa

$$E_{m,R}(f_{cm}, l_p, f_y) = \exp(0,0350 + 0,0010 \cdot f_{cm} - 0,0003 \cdot l_p + 0,0002 f_y) + \varepsilon \quad (5.8)$$

sendo:

ε : parcela aleatória da incerteza do modelo, dado pelo resíduo do MLG

Tabela 5.5 – Média e C.V. da razão entre a carga de ruptura experimental e a calculada pelo modelo da TFCC

Lajes lisas sem armadura de punção				
Pesquisador	Ano da pesquisa	Quantidade de lajes estudadas	Média (V_{exp}/V_{calc})	C.V (V_{exp}/V_{calc})
Elstner e Hognestad	1956	14	1.01	0.08
Regan	1986	7	1.16	0.03
Marzouk e Hussein	1991	12	1.26	0.09
Tomaszewicz	1993	12	1.15	0.06
Coelho	1999	1	1.30	0.00
Gomes e Regan	1999	2	1.02	0.03
Melgues	2001	1	1.12	0.00
Musse	2004	1	1.29	0.00
Teng et al.	2004	1	1.04	0.00
Adetifa e Polak	2005	1	1.06	0.00
Guandalini, Burdet e Muttoni	2009	4	1.16	0.08
Ferreira	2010	1	1.17	0.00
Sagaseta	2011	1	1.27	0.00
Lima	2012	1	0.87	0.00
Clément et al.	2014	2	1.11	0.03
Marques	2018	1	0.97	0.00
Liberati	2019	3	1.05	0.08
Total		65	1.13	0.11

Fonte: elaborado pelo autor

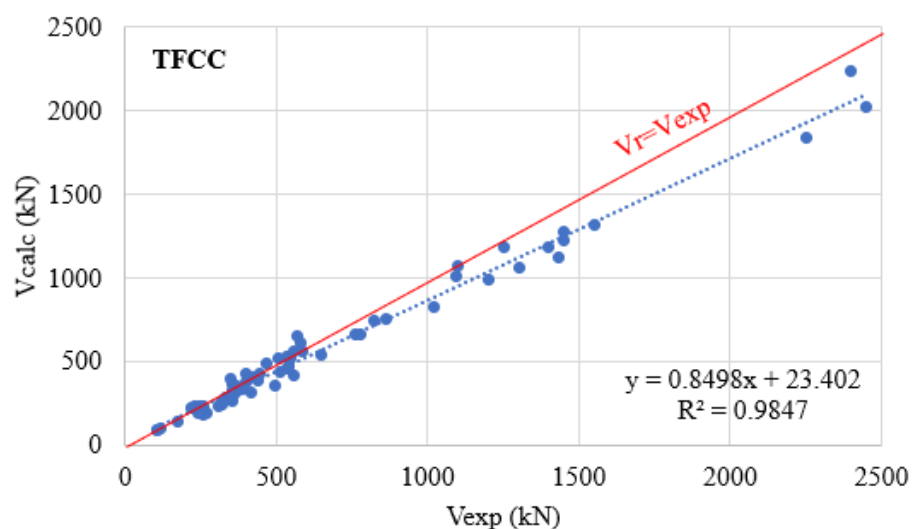


Figura 5.17 - Relação entre V_{exp} e V_{calc} para o modelo da TFCC

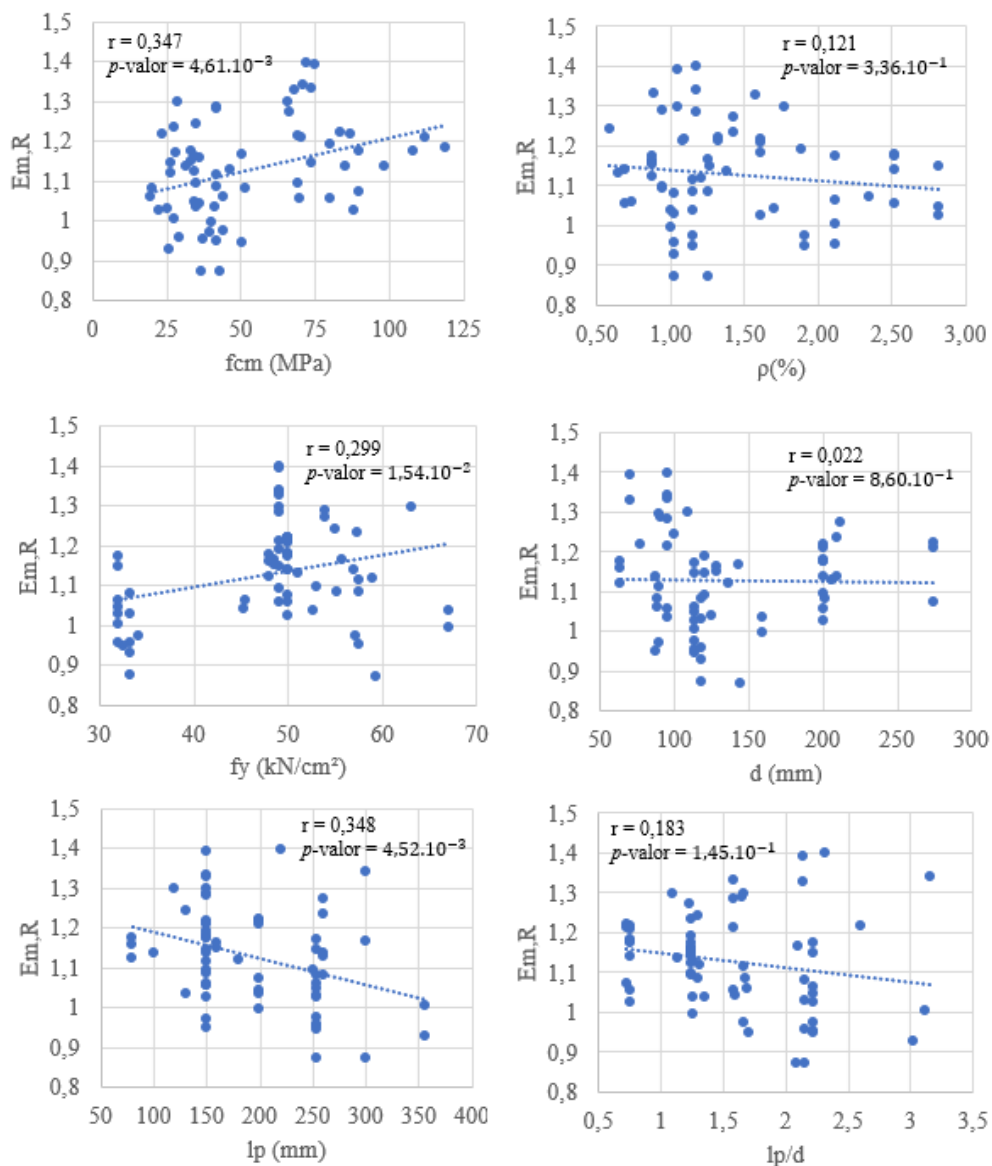


Figura 5.18 – Análise de correlação da variável Em,R de acordo com modelo da TFCC

As Figuras 5.19 e 5.20 apresentam a análise do resíduo do modelo considerado. Nesta análise, a distribuição de probabilidade adotada foi a distribuição normal com média igual a zero e desvio padrão igual a 0,111.

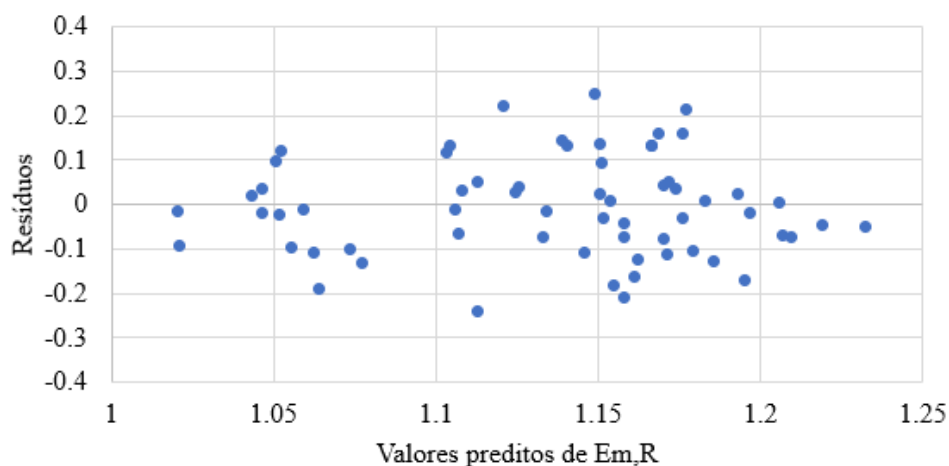


Figura 5.19 - Gráfico dos resíduos do MLG para o modelo da TFCC

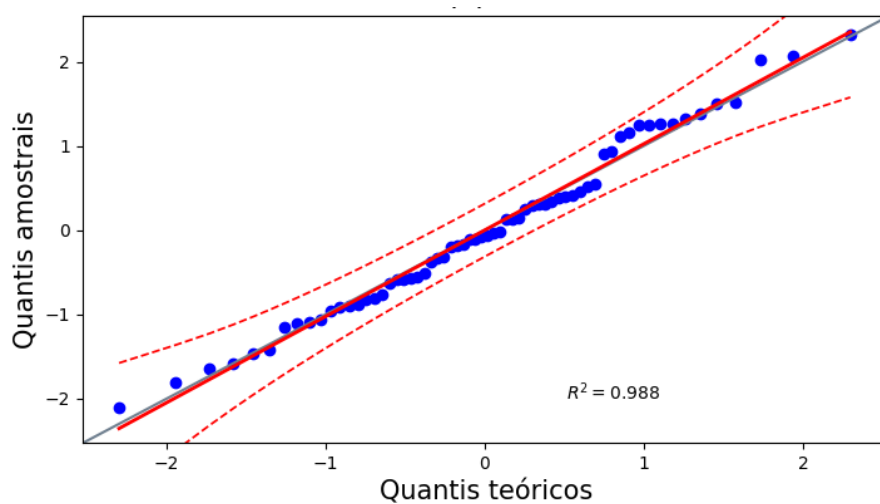


Figura 5.20 - Gráfico qq-norm dos resíduos do modelo da TFCC com envoltória com grau de confiança de 95%

A análise desconsiderando a correlação determinou, a partir do teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov considerando um nível de significância $\alpha = 5\%$, que a distribuição de probabilidade log-normal, com média igual a 1,13 e desvio padrão igual 0,12, mostra-se adequada ao ajuste dos dados, conforme pode ser observado na Figura 5.21.

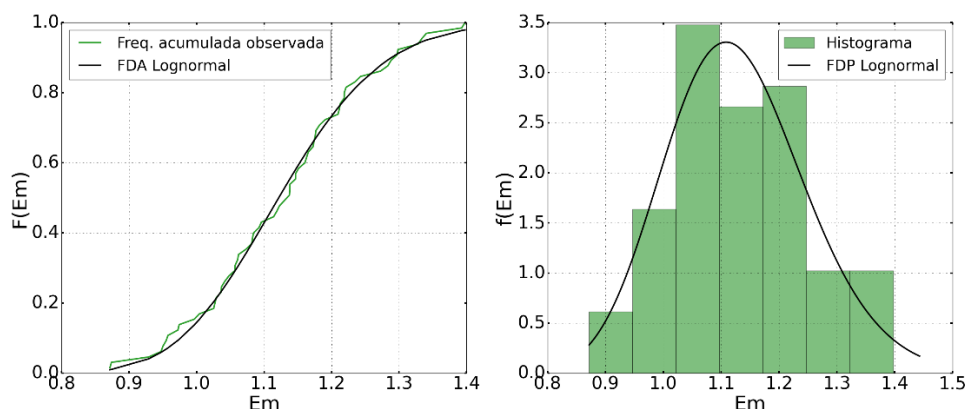


Figura 5.21 - (a) distribuição acumulada de probabilidade e (b) histograma e função de densidade de probabilidade para variável incerteza do modelo de resistência segundo a TFCC

5.2.5 Incerteza associada ao modelo de previsão da resistência segundo o Código Modelo *fib* 2010 (2012)

A resistência à punção foi determinada conforme Equações (5.9) e (2.27). Para a determinação da rotação da laje foi utilizado o nível de aproximação II, conforme Equação (2.33). O Apêndice C apresenta os resultados das cargas de ruptura segundo este modelo de previsão. Os parâmetros estatísticos obtidos neste estudo podem ser observados na Tabela 5.6.

$$V_{calc} = k_{\psi} \sqrt{f_{cm}} b_0 d_v \quad (5.9)$$

O MC 2010 (2012) apresenta um modelo baseado na TFCC de Muttoni (2008), porém com um critério de falha característico, onde a probabilidade de se obter resultados menores que o estimado pela teoria é de 5%. Por essa razão, os resultados obtidos com esse modelo foram conservadores, conforme pode ser observado na Figura 5.22.

Tabela 5.6 - Média e C.V. da razão entre a carga de ruptura experimental e a calculada pelo modelo do MC 2010 (2012)

Lajes lisas sem armadura de punção				
Pesquisador	Ano da pesquisa	Quantidade de lajes estudadas	Média (V_{exp}/V_{calc})	C.V (V_{exp}/V_{calc})
Elstner e Hognestad	1956	14	1.17	0.08
Regan	1986	7	1.32	0.03
Marzouk e Hussein	1991	12	1.44	0.09
Tomaszewicz	1993	12	1.32	0.06
Coelho	1999	1	1.48	0.00
Gomes e Regan	1999	2	1.16	0.03
Melgues	2001	1	1.28	0.00
Musse	2004	1	1.47	0.00
Teng et al.	2004	1	1.19	0.00
Adetifa e Polak	2005	1	1.32	0.00
Guandalini, Burdet e Muttoni	2009	4	1.33	0.08
Ferreira	2010	1	1.34	0.00
Sagaseta	2011	1	1.42	0.00
Lima	2012	1	1.00	0.00
Clément et al.	2014	2	1.27	0.03
Marques	2018	1	1.11	0.00
Liberati	2019	3	1.20	0.08
Total		65	1.30	0.11

Fonte: elaborado pelo autor

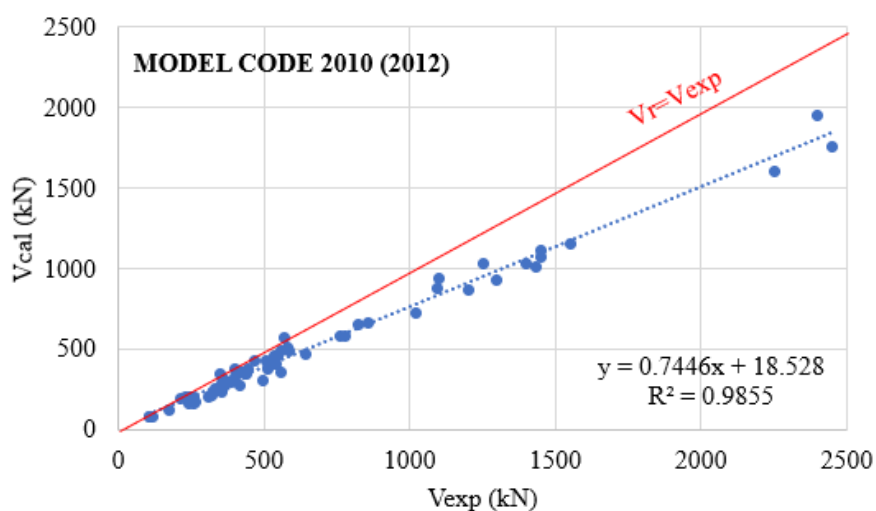


Figura 5.22 - Relação entre V_{exp} e V_{calc} para o modelo do MC 2010 (2012)

Para o modelo de previsão de resistência do MC 2010 (2012) três variáveis possuem correlação significativa. A variável f_{cm} , l_p e f_y . Assim, o MLG utilizado é dado pela Equação(5.10), apresentando os mesmos limites do modelo anterior.

$$E_{m,R}(f_{cm}, l_p, f_y) = \exp(0,1892 + 0,0010f_{cm} - 0,0004.l_p + 0,0002.f_y) + \varepsilon \quad (5.10)$$

sendo:

ε : parcela aleatória da incerteza do modelo, dado pelo resíduo do MLG

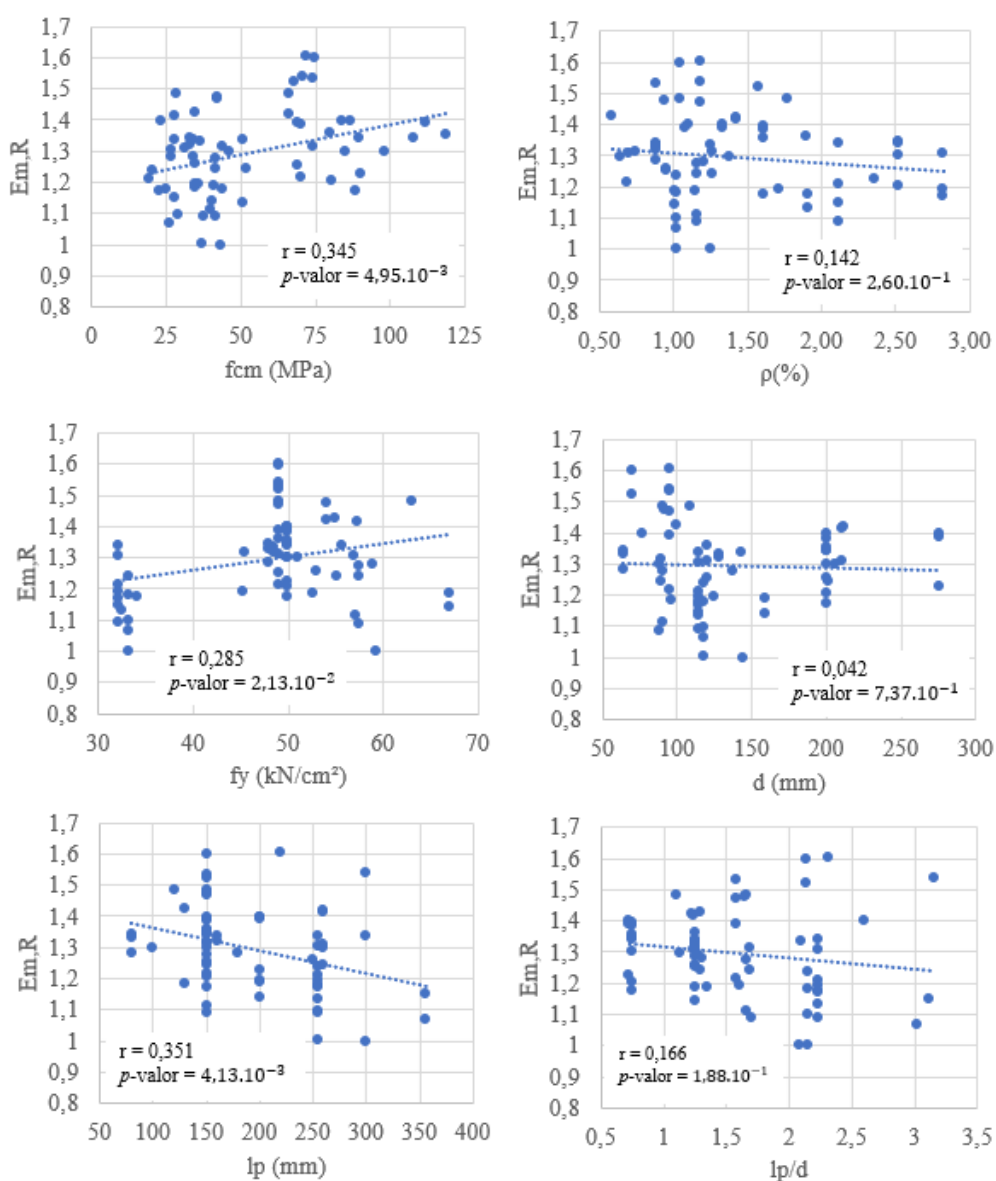


Figura 5.23 – Análise de correlação da variável $E_{m,R}$ de acordo com modelo do MC 2010 (2012)

As Figuras 5.24 e 5.25 apresentam a análise do resíduo do modelo considerado. Nesta análise, a distribuição de probabilidade adotada foi a distribuição normal com média igual a zero e desvio padrão igual a 0,1256.

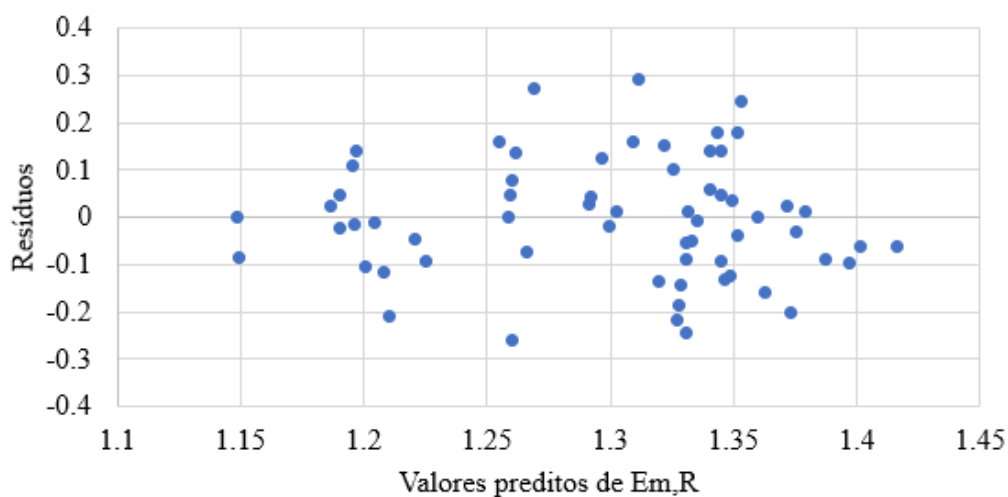


Figura 5.24 - Gráfico dos resíduos do MLG para o modelo do MC 2010 (2012)

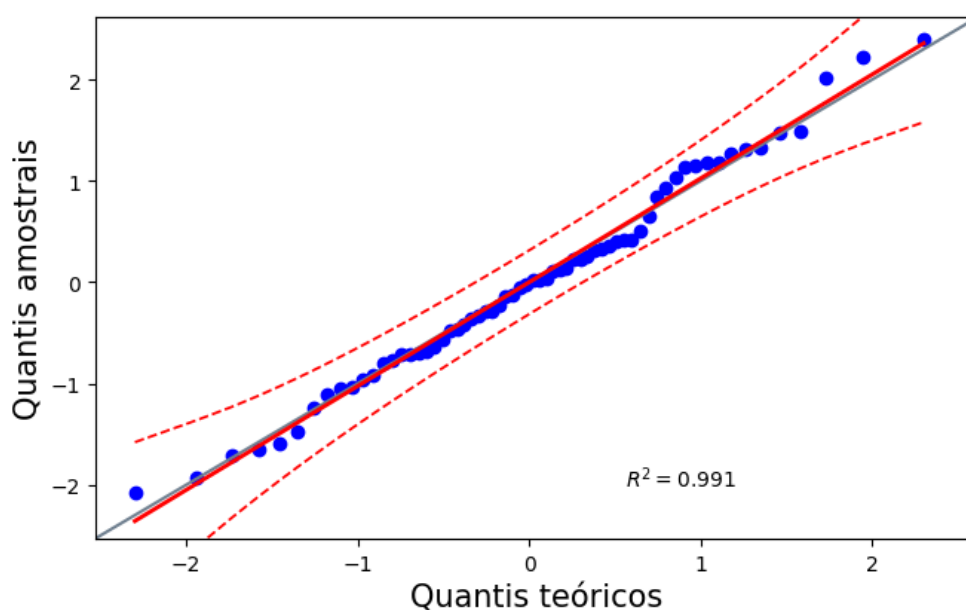


Figura 5.25 - Gráfico qq-norm dos resíduos do modelo da MC 2010 (2012) com envoltória com grau de confiança de 95%

Por fim, foi realizada uma análise sem a consideração de correlação. Nesta análise a distribuição de probabilidade que se ajustou de forma adequada aos dados determinados foi a distribuição log-normal, com média igual a 1,29 e desvio padrão igual a 0,14. A Figura 5.26 ilustra o comportamento observado e o teórico.

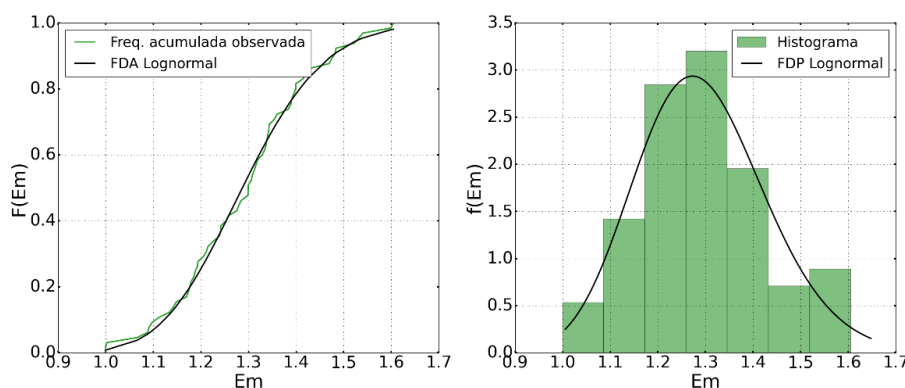


Figura 5.26 - (a) distribuição acumulada de probabilidade e (b) histograma e função de densidade de probabilidade para variável incerteza do modelo de resistência segundo o MC 2010 (2012)

5.2.6 Incerteza associada ao modelo de previsão da resistência segundo o modelo numérico R1

Com o estudo e elaboração do modelo de elementos finitos foi possível avaliar a carga de ruptura das lajes lisas e analisar a acurácia do modelo adotado. Os critérios adotados na modelagem das lajes do banco de dados, seguem as disposições discutidas no Capítulo 4. A Tabela 5.7 mostra os resultados obtidos de forma resumida. As demais informações são apresentadas no Apêndice C.

Observando a Tabela 5.7 e a Figura 5.27, nota-se que o modelo adotado apresenta resultados com média e variância melhores que os valores obtidos pelos métodos do ACI 318 (2019), EC 2 (2004), TFCC e MC 2010 (2012). Porém, devido a problemas de convergência, principalmente na passagem do Estádio I para o Estádio II do concreto, e devido a dependência da malha, o tempo de processamento do modelo é alto e requer uma análise crítica na avaliação dos resultados obtidos.

Em relação a correlação das variáveis analisadas, o modelo apresenta a variável f_{cm} como significativa. Assim, o MLG utilizado é dado pela Equação(5.10). O modelo só deve ser usado para f_{cm} entre 19,5 e 119 MPa.

$$E_{m,R}(f_{cm}) = \exp(-0,0761 + 0,0145 \cdot f_{cm}) + \varepsilon \quad (5.11)$$

sendo:

ε : parcela aleatória da incerteza do modelo, dado pelo resíduo do MLG

Tabela 5.7 - Média e C.V. da razão entre a carga de ruptura experimental e a determinada pelo modelo MEF R1

Lajes lisas sem armadura de punção			
Pesquisador	Quantidade de lajes estudadas	Média (V_{exp}/V_{calc})	C.V (V_{exp}/V_{calc})
Elstner e Hognestad	14	0.98	0.08
Regan	7	1.00	0.10
Marzouk e Hussein	12	1.11	0.13
Tomaszewicz	12	1.01	0.10
Coelho	1	0.92	-
Gomes e Regan	2	0.96	0.02
Melgues	1	1.10	-
Musse	1	0.97	-
Teng et al.	1	0.76	-
Adetifa e Polak	1	1.03	-
Guandalini, Burdet e Muttoni	4	0.98	0.15
Ferreira	1	0.92	-
Sagaseta	1	0.98	-
Lima	1	0.98	-
Clément et al.	2	0.86	-
Marques	1	0.96	-
Liberati	3	0.91	0.05
Total	65	1.00	0.11

Fonte: elaborado pelo autor

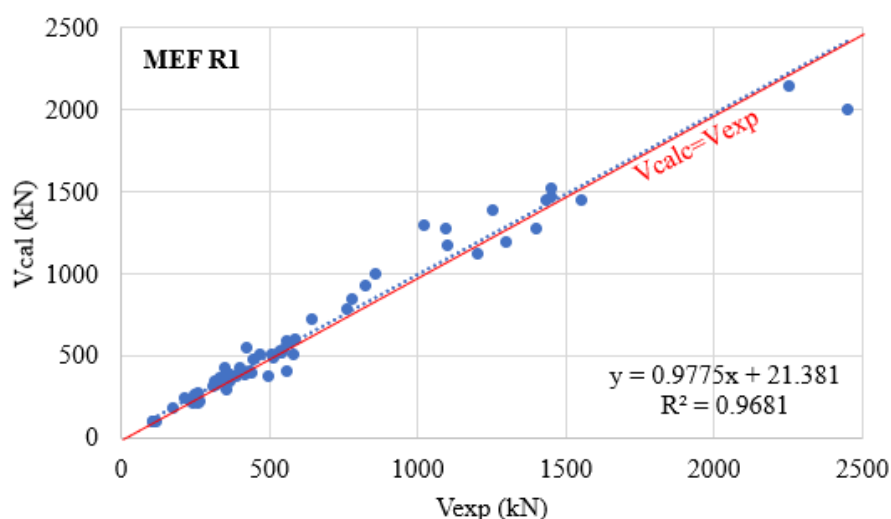


Figura 5.27 - Relação entre V_{exp} e V_{calc} para o modelo MEF R1

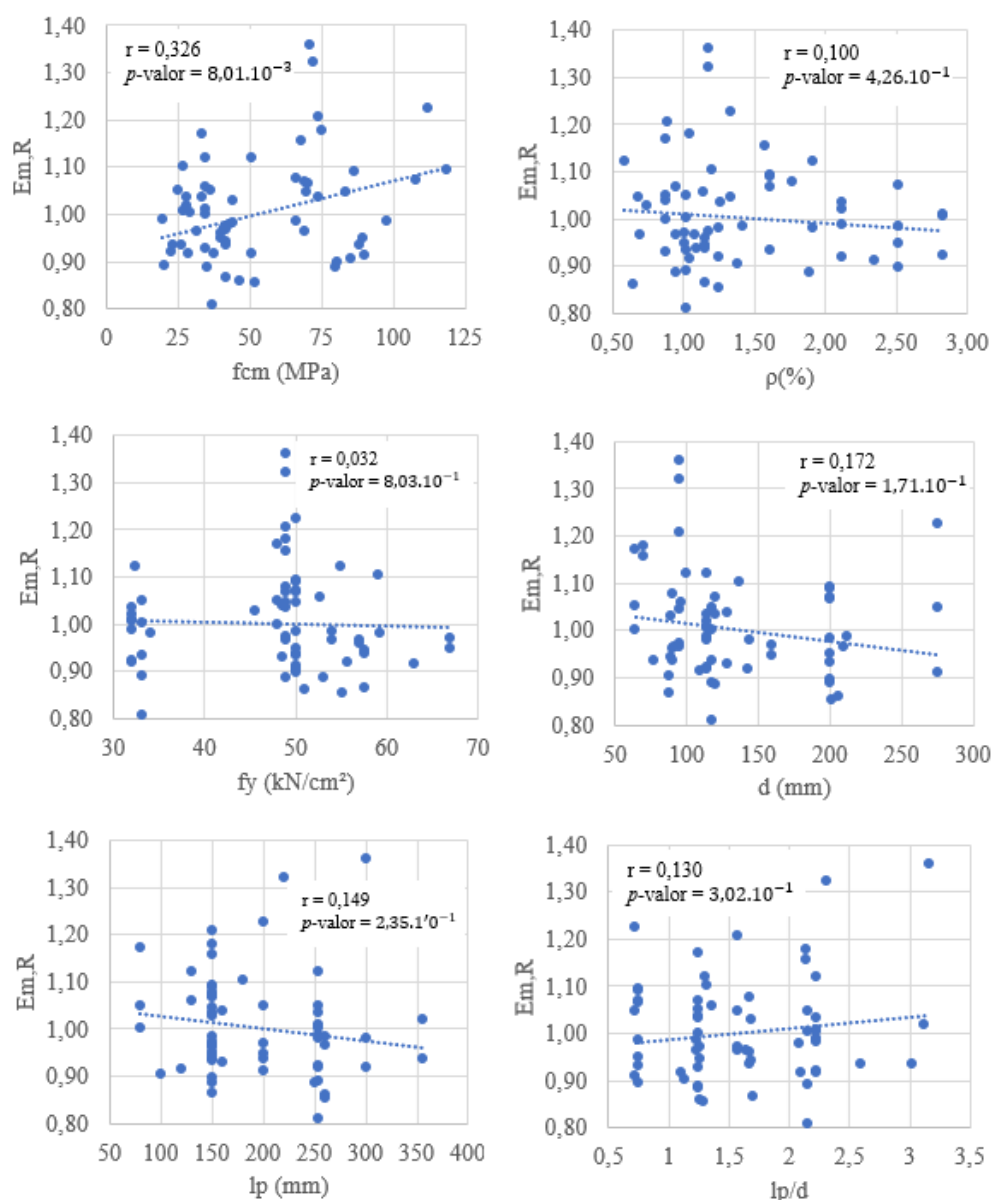


Figura 5.28 – Análise de correlação da variável Em,R de acordo com modelo MEF R1

As Figuras 5.29 e 5.30 apresentam a análise do resíduo do modelo. Nesta análise, a distribuição de probabilidade adotada foi a distribuição normal com média igual a zero e desvio padrão igual a 0,1078.

A análise sem correlação foi desenvolvida para este modelo com as mesmas considerações dos modelos anteriores. O resultado obtido foi uma distribuição de probabilidade log-normal, com média igual a 1,00 e desvio padrão igual 0,11. A Figura 5.31 ilustra o histograma, a FDP e a FDA da análise realizada.

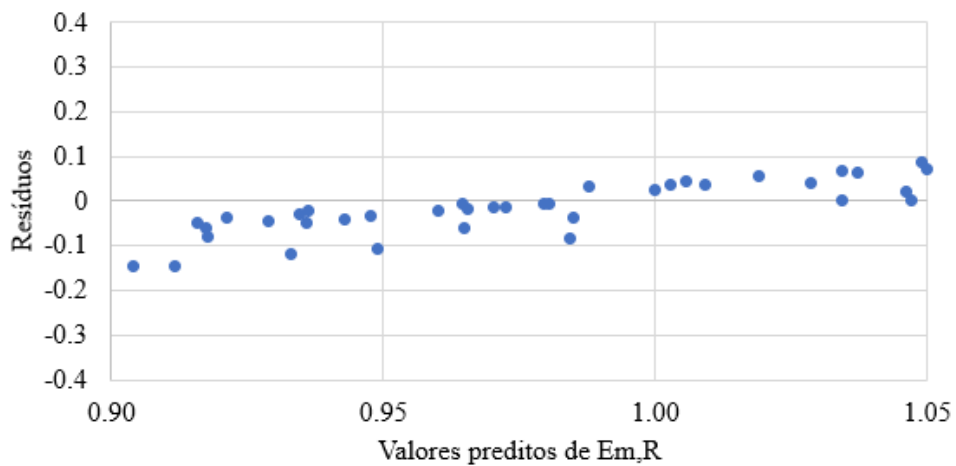


Figura 5.29 - Gráfico dos resíduos do MLG para o modelo MEF R1

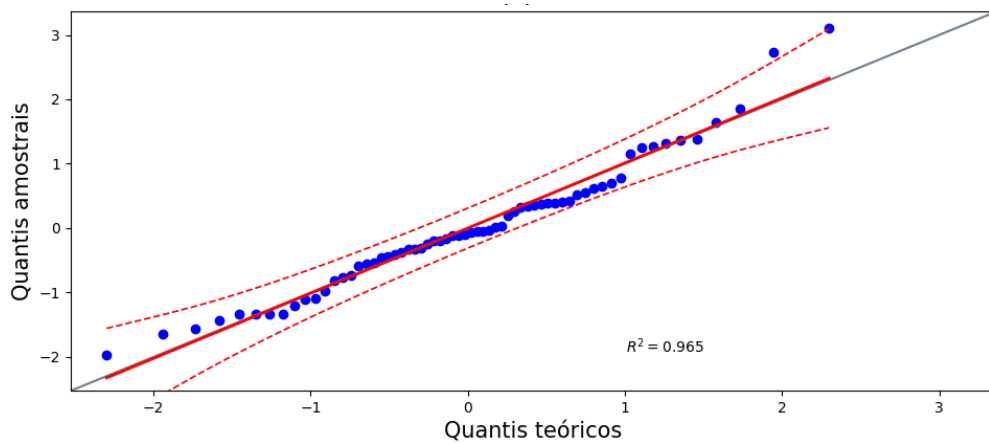


Figura 5.30 - Gráfico qq-norm dos resíduos do modelo MEF R1 com envoltória com grau de confiança de 95%

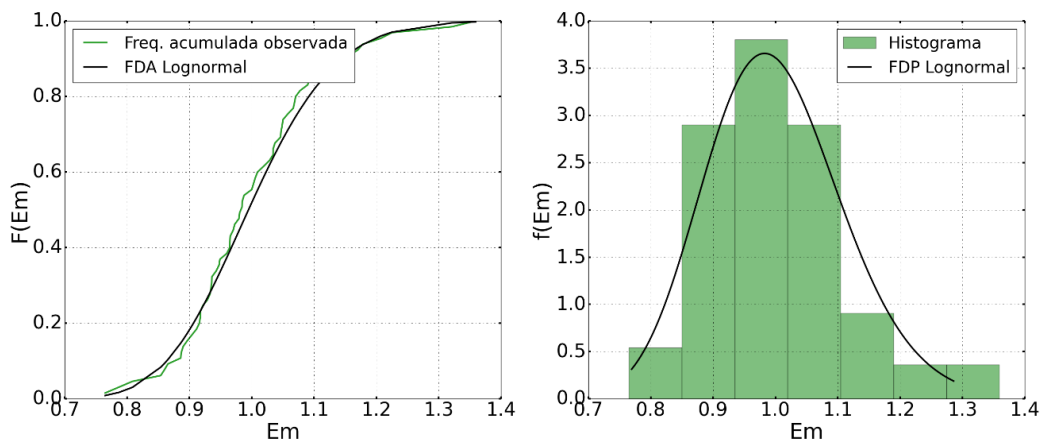


Figura 5.31 - (a) distribuição acumulada de probabilidade e (b) histograma e função de densidade de probabilidade para variável incerteza do modelo de resistência segundo o modelo MEF R1

5.2.7 Incerteza associada ao modelo de previsão da resistência segundo o modelo numérico R2

O modelo numérico MEF R2 apresentou bons resultados em relação a determinação da carga de ruptura das lajes estudadas, conforme mostra os resultados apresentados na Tabela 5.8 e ilustrados na Figura 5.32, sendo o modelo que apresentou o menor coeficiente de variação. Além disso, o modelo se mostrou estável numericamente e com menor dependência da malha quando comparado ao modelo MEF R1.

Em relação a correlação das variáveis analisadas, o modelo apresenta as variáveis ρ e d como significativa, conforme pode ser observado na Figura 5.33. Para esse modelo o MLG utilizado é dado pela Equação (5.12). Apresentando os seguintes limites das variáveis: ρ entre 3,7 e 0,7% e d entre 64 e 275 mm.

$$E_{m,R}(\rho, d) = \exp(0,0658 - 0,0214 \cdot \rho - 0,0003 \cdot d) + \varepsilon \quad (5.12)$$

sendo:

ε : parcela aleatória da incerteza do modelo, dado pelo resíduo do MLG

As Figuras 5.34 e 5.35 apresentam a análise do resíduo do modelo. Nesta análise, a distribuição de probabilidade adotada foi a distribuição normal com média igual a zero e desvio padrão igual a 0,0777.

Por fim a análise sem correlação foi realizada e o resultado obtido foi uma distribuição de probabilidade log-normal, com média igual a 0,99 e desvio padrão igual 0,08. A Figura 5.31 ilustra o histograma, a FDP e a FDA da análise realizada.

Tabela 5.8 - Média e C.V. da razão entre a carga de ruptura experimental e a calculada pelo modelo MEF R2

Lajes lisas sem armadura de punção				
Pesquisador	Ano da pesquisa	Quantidade de lajes estudadas	Média (V_{exp}/V_{calc})	C.V (V_{exp}/V_{calc})
Elstner e Hognestad	1956	14	0.97	0.07
Regan	1986	7	1.03	0.08
Marzouk e Hussein	1991	12	1.01	0.08
Tomaszewicz	1993	12	0.96	0.07
Coelho	1999	1	1.08	0.00
Gomes e Regan	1999	2	0.93	0.03
Melgues	2001	1	1.15	0.00
Musse	2004	1	1.00	0.00
Teng et al.	2004	1	1.12	0.00
Adetifa e Polak	2005	1	0.99	0.00
Guandalini, Burdet e Muttoni	2009	4	1.01	0.13
Ferreira	2010	1	1.05	0.00
Sagaseta	2011	1	0.97	0.00
Lima	2012	1	1.12	0.00
Clément et al.	2014	2	0.97	0.01
Marques	2018	1	1.05	0.00
Liberati	2019	3	0.95	0.09
Total		65	0.99	0.08

Fonte: elaborado pelo autor

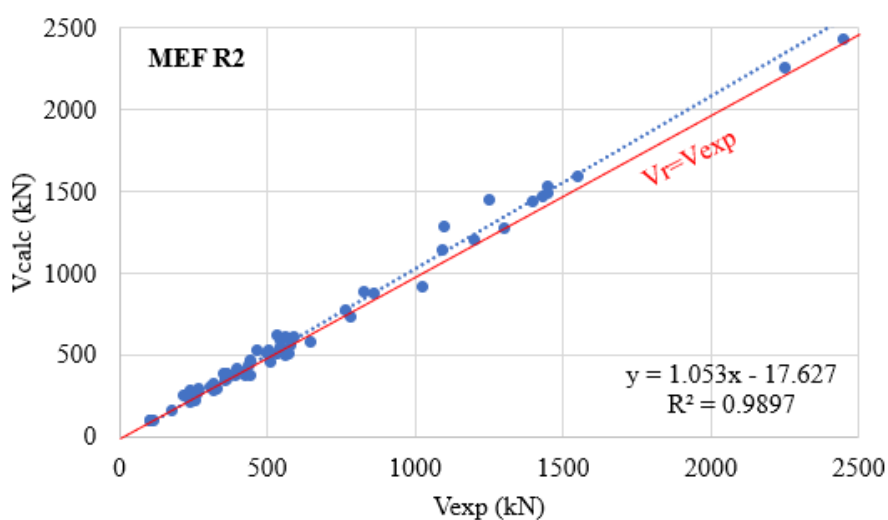


Figura 5.32 - Relação entre V_{exp} e V_{calc} para o modelo da MEF R2

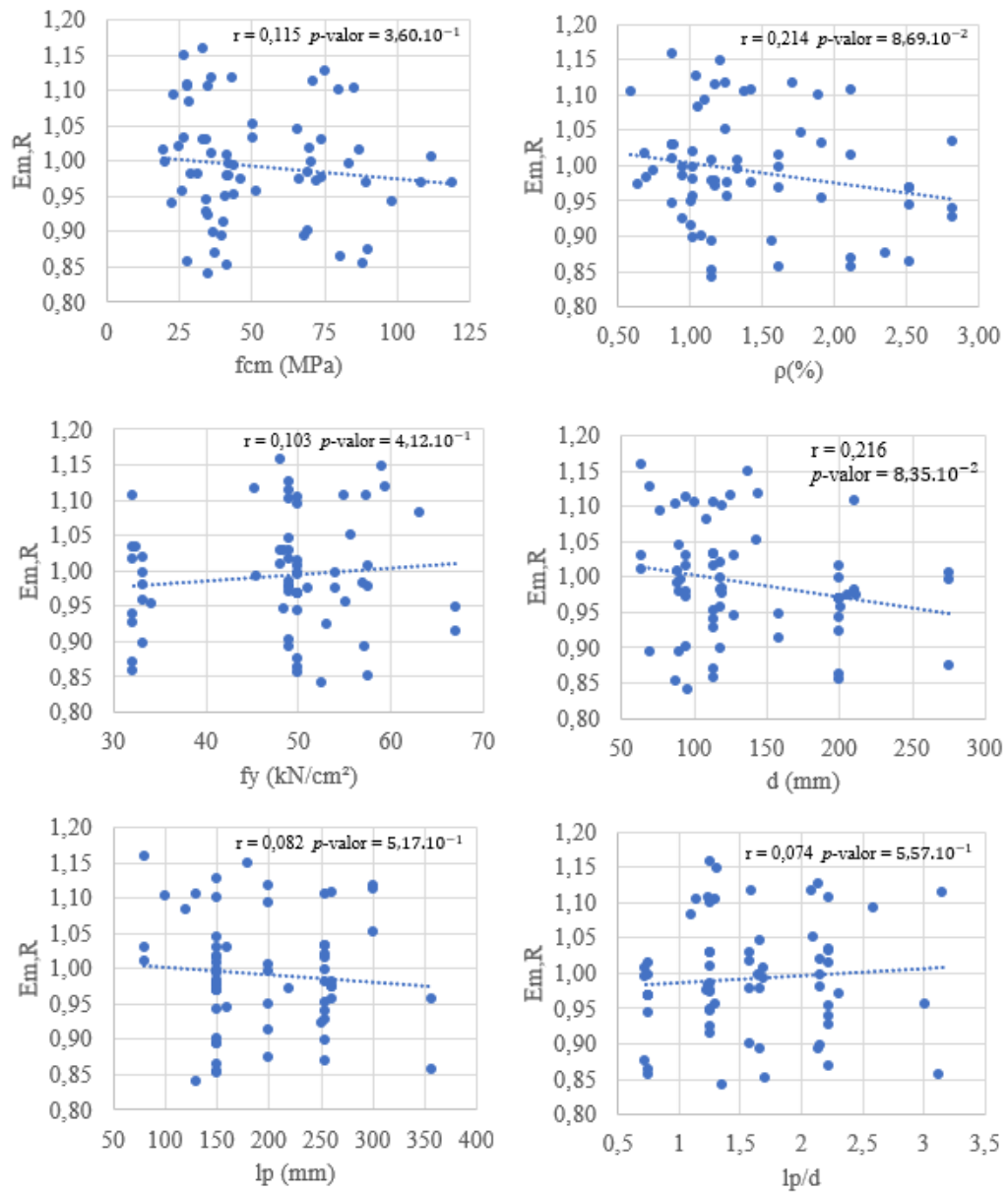


Figura 5.33 – Análise de correlação da variável Em,R de acordo com modelo MEF R2

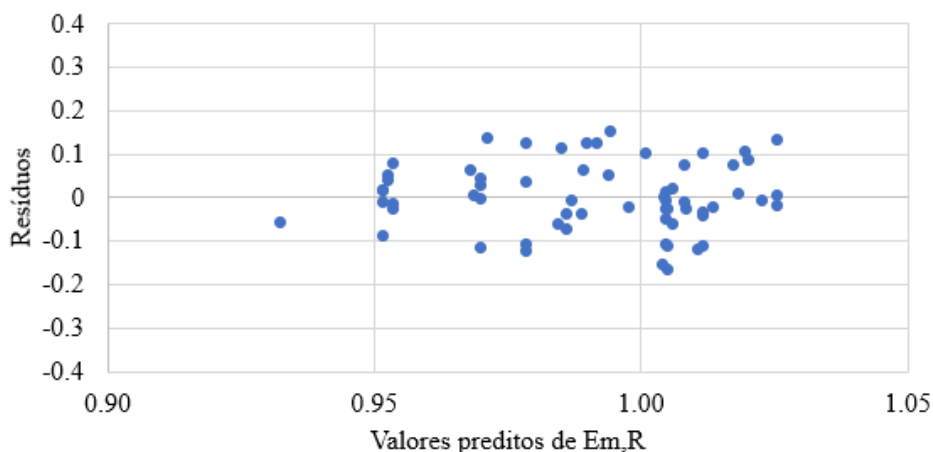


Figura 5.34 - Gráfico dos resíduos do MLG para o modelo MEF R2

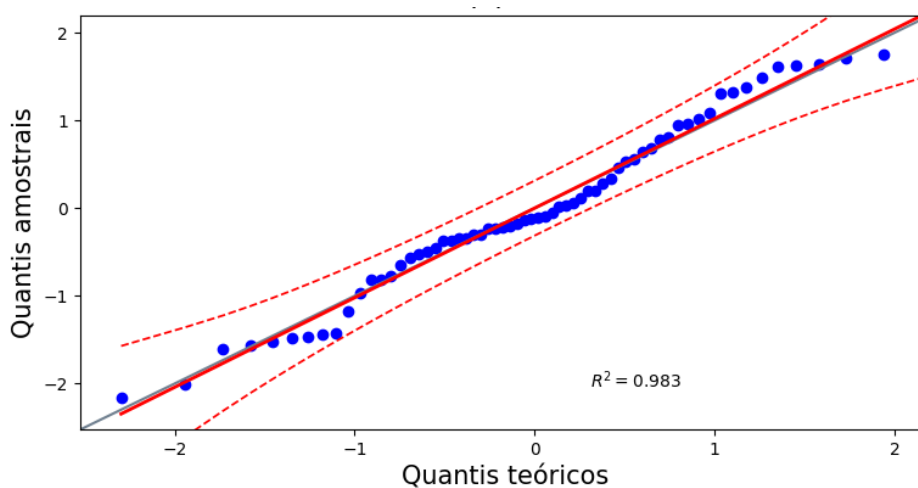


Figura 5.35 - Gráfico qq-norm dos resíduos do modelo MEF R2 com envoltória com grau de confiança de 95%

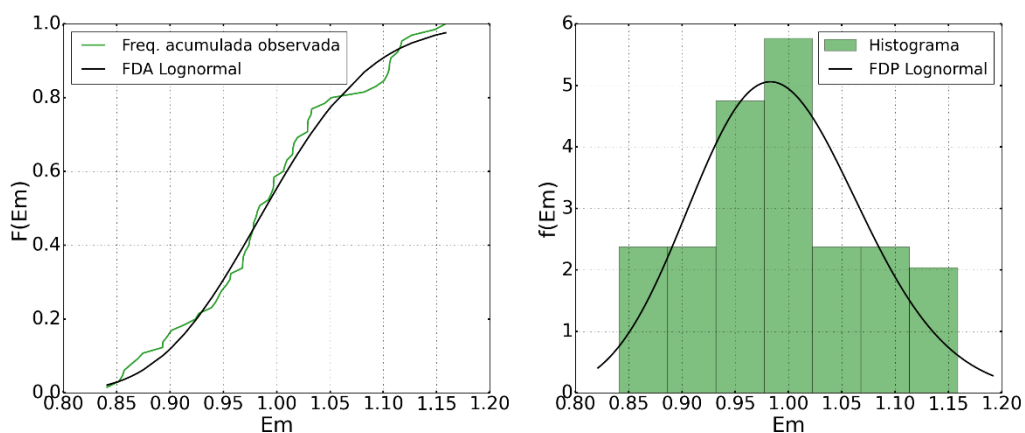


Figura 5.36 - (a) distribuição acumulada de probabilidade e (b) histograma e função de densidade de probabilidade para variável incerteza do modelo de resistência segundo o modelo MEF R2

6 CONFIABILIDADE DO DIMENSIONAMENTO À PUNÇÃO DE LAJES LISAS

Neste trabalho foi elaborado um conjunto de rotinas em Python, juntamente com rotinas do *software* ANSYS, para avaliar a confiabilidade do dimensionamento à punção de lajes lisas. Os próximos itens abordarão os principais aspectos relevantes sobre essa pesquisa.

6.1 FERRAMENTA DE ANÁLISE DE PROBABILIDADE

Para trabalhar com as incertezas das variáveis que alimentam a entrada de dados para a solução de uma determinada simulação no ANSYS, o *software* utiliza uma ferramenta intitulada PDS (*Probabilistic Design System*). A partir dessa ferramenta o usuário define o modelo parametrizado, determina os parâmetros probabilísticos de entrada e realiza as análises de confiabilidade de interesse.

Um modelo parametrizado é criado por meio da programação em APDL. O arquivo de análise é feito em duas etapas: inicialmente elabora-se uma macro contendo os passos de criação da geometria e malha de elementos finitos do modelo, definição dos materiais utilizados, condições de contorno, tipo de análise e parâmetros da solução. Além disso, devem ser definidos os parâmetros de saída, como por exemplo tensões e deslocamentos. Essa macro será utilizada na base de dados do modelo. Na segunda etapa, é definida a base de dados para a análise probabilística, sendo necessário definir os parâmetros que serão variados, assim como suas distribuições de probabilidade e seus momentos principais. É necessário definir também as correlações existentes entre as variáveis. Além disso, são definidas as variáveis de resposta e o método de análise probabilística.

Apesar das vantagens em se utilizar um *software* de elementos finitos bem consolidado, as limitações do módulo PDS do ANSYS, frente as possibilidades de análise probabilísticas, impedem que ele seja usado de forma isolada. Isso justifica o uso de programações paralelas a fim de eliminar essas questões. As três principais limitações observadas pelo autor foram:

- a) impossibilidade do uso direto de determinadas distribuições de probabilidade, como a distribuição Gumbel, necessitando que o usuário gere um arquivo de entrada com os pontos a serem empregados;

- b) impossibilidade do uso dos Métodos de Transformação;
- c) impossibilidade da alteração de dados para contornar erros numéricos nas análises de confiabilidade.

A fim de contornar as limitações impostas, optou-se pelo desenvolvimento de rotinas em Python para avaliação da confiabilidade por meio do método FORM. Nesta metodologia, toda análise de confiabilidade é realizada a partir da programação em linguagem Python, que pode ser acoplada ao *software* ANSYS para determinação dos parâmetros da função de estado limite, como resistência e sollicitação da região de ligação laje-pilar.

6.2 CONFIABILIDADE ESTRUTURAL DAS LAJES ESTUDADAS

A avaliação da confiabilidade da ligação laje-pilar, sem armadura de punção e efeito de momento, foi realizada para uma região de momento negativo delimitada por pontos de inflexão, conforme ilustrado na Figura 6.1.

Ao se adotar esse modelo local, os efeitos devido ao confinamento da laje contínua acabam sendo desprezados, assim como a redistribuição entre os momentos negativos e positivos e o efeito de membrana. Contudo, a justificativa para utilização dessa região é feita a partir das seguintes observações:

- a) os programas experimentais utilizados para validação dos modelos de previsão da resistência são baseados na consideração dessa região;
- b) o custo computacional e a complexidade da análise de todo pavimento podem tornar a análise da confiabilidade impraticável.

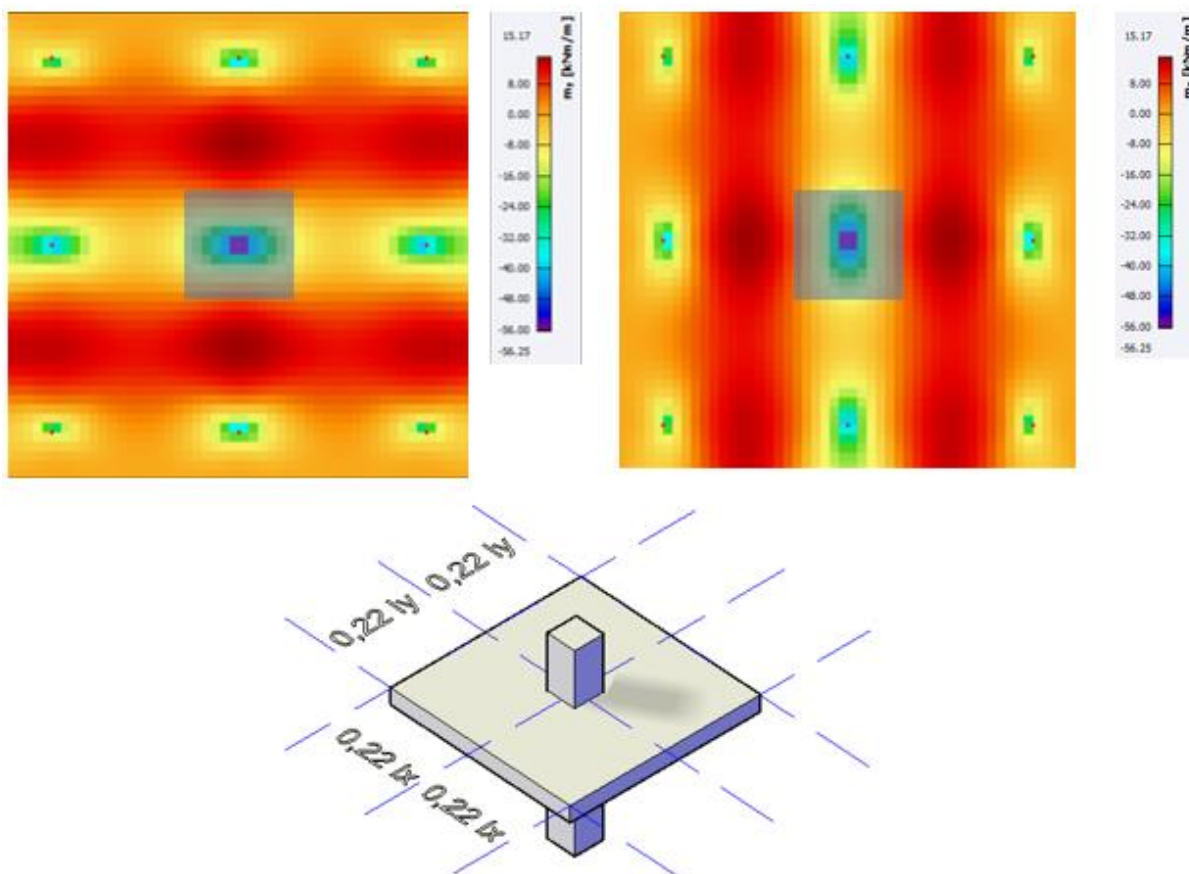


Figura 6.1 – Região da ligação laje-pilar interno analisada.

6.3 FUNÇÃO ESTADO LIMITE

Para avaliação do modo de falha por punção na região de ligação laje-pilar a seguinte equação de estado limite foi utilizada:

$$g(\mathbf{X}) = E_{m,R} \cdot R(\mathbf{R}) - E_{m,S} \cdot S(g, q) \quad (6.1)$$

Sendo:

- \mathbf{X} : vetor das variáveis aleatórias do problema;
- R : modelo de resistência;
- \mathbf{R} : vetor das variáveis aleatórias de resistência;
- S : modelo de sollicitação;
- g : variável aleatória relacionada às ações permanentes;

q : variável aleatória relacionada às ações variáveis;

$E_{m,R}$: variável aleatória relacionada às incertezas do modelo de resistência;

$E_{m,S}$: variável aleatória relacionada às incertezas do modelo de solicitação.

Nas análises de confiabilidade, realizadas neste trabalho, os modelos de resistência R e de solicitação S foram determinados com base no estudo desenvolvido no Capítulo 4 e 5. Dois modelos de resistência foram empregados nesta pesquisa, o modelo de previsão da ABNT NBR 6118 (2014) e o modelo de previsão MEF R2. Em relação ao modelo de solicitação S , foi utilizado o MEF S1, apresentado no item 4.3. Para determinação do índice de confiabilidade, empregou-se o método FORM através do algoritmo HLRF com acoplamento direto com o *software* ANSYS APDL.

6.4 CARACTERIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS ENVOLVIDAS NA ANÁLISE

O dimensionamento de lajes lisas envolve um grande número de variáveis aleatórias, sendo elas relacionadas à resistência e à solicitação. Quanto maior o número de variáveis aleatórias consideradas, mais complexa e onerosa é a análise probabilística, tornando, em alguns casos, o processo impraticável. Assim, com o intuito de limitar o número de variáveis aleatórias neste trabalho, foram utilizadas somente as variáveis aleatórias que apresentam elevada influência na avaliação da resistência e da solicitação de lajes lisas. Essas variáveis foram determinadas a partir do estudo de diversos autores e são descritas na pesquisa de Silva (2017).

Por fim, com objetivo de se obter resultados referentes às lajes dimensionadas no Brasil, procuraram-se obter os dados estatísticos das variáveis aleatórias que melhor representassem a realidade brasileira no que se refere aos materiais e carregamentos envolvidos na análise. Dessa forma, na descrição estatística das variáveis aleatórias utilizaram-se, sempre que possível, dados provenientes de estudos nacionais. Porém, devido à falta de pesquisas nacionais para caracterização de algumas variáveis, também se fez necessário o uso de referências internacionais.

6.4.1 Resistência à compressão do concreto

A resistência à compressão do concreto foi adotada com base na pesquisa de Santiago (2019). Nessa pesquisa foi elaborado um banco de dados com os resultados do ensaio de resistência à compressão axial realizados em mais de 39 mil corpos de provas moldados *in loco* em obras das cinco regiões do Brasil entre 2011 e 2016 (SANTIAGO, 2019). Baseado nesse estudo, adotaram-se, para resistência à compressão do concreto, os parâmetros apresentados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Parâmetros estatísticos para diferentes classes de resistência do concreto

Classe	Distribuição	μ	C.V.
C30	Normal	1,22.fck	0,15
C35		1,19.fck	0,13
C40		1,16.fck	0,11
C45		1,13.fck	0,10
C50		1,11.fck	0,10
C55		1,10.fck	0,09
C60		1,10.fck	0,09

Fonte: SANTIAGO (2019)

6.4.2 Módulo de elasticidade inicial do concreto

O módulo de elasticidade do concreto foi estimado com base na resistência à compressão do concreto pela expressão dada pelo Código Modelo *fib* 2010 (2012). Considerou-se distribuição de probabilidade normal com coeficiente de variação igual ao valor adotado para o coeficiente de variação da resistência à compressão.

$$E_c = 21500. \alpha_e. \left(\frac{f_{cm}}{10}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (6.2)$$

Onde:

α_e é um parâmetro que depende do tipo de agregado utilizado.

6.4.3 Resistência à tração do concreto

A resistência à tração do concreto foi obtida com base na resistência à compressão do concreto pela expressão (6.2), dada pelo Código Modelo *fib* 2010 (2012).

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot (f_{ck})^{\frac{2}{3}} \quad \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

$$f_{ctm} = 2,12 \cdot \ln(1 + 0,1 \cdot (f_{cm})) \quad \text{para } f_{ck} > 50 \text{ MPa}$$
(6.3)

No caso do coeficiente de variação da resistência à tração o valor utilizado deve ser maior que o coeficiente de variação à compressão do concreto. Isso leva em consideração a maior variabilidade da resistência à tração em relação à resistência à compressão. Segundo o CEB (1990), essa maior variabilidade é causada pela maior influência da forma e da textura da superfície dos agregados em relação a resistência à compressão e por ter uma redução de resistência maior devido aos efeitos ambientais. Dessa forma, assumiu-se esta variável com tipo de distribuição normal e com coeficiente de variação igual a $1,2V_{f_c}$. Esses dados têm como base os estudos realizados por Macgregor, Mirza, Ellingwood (1983) e foram adotados nas pesquisas de Real (2000), Paliga (2008) e Silva (2017).

6.4.4 Resistência ao escoamento da armadura (f_y)

De acordo com JCSS (2001), Nowak, Rakoczy, Szeliga (2012) e Santiago (2019), pode-se assumir uma distribuição normal de probabilidade para resistência ao escoamento da armadura. Porém, os autores apresentam valores para média e coeficiente de variação diferentes para essa variável aleatória. Segundo o JCSS (2001) a média e o coeficiente de variação devem ser iguais a $1,12f_{yk}$ e 0,05, respectivamente. Para Nowak, Rakoczy, Szeliga (2012) os valores sugeridos são de $1,13f_{yk}$ e 0,03. Porém, no estudo de Santiago (2019) os valores sugeridos foram de $1,22f_{yk}$ e 0,04.

Observando as informações apresentada acima percebeu-se uma grande diferença entre os parâmetros estatísticos apresentados por Nowak, Rakoczy, Szeliga (2012), cujos dados são referentes aos aços utilizados nos Estados Unidos da América, e os parâmetros apresentados por Santiago (2019), cujo dados são referentes aos aços produzidos pela empresa ArcelorMittal Brasil. Dessa forma, julgou-se mais adequado a utilização dos parâmetros apresentados pelo JCSS (2001), cujas recomendações são utilizadas por normas internacionais.

6.4.5 Altura da laje (h)

A altura da laje é representada por uma distribuição normal de probabilidade, conforme JCSS (2001), sendo a média igual ao valor nominal de projeto e o desvio padrão dado em função do valor nominal da altura em milímetros, conforme mostra a Equação (6.4).

$$\sigma_h = 4 + 0,006h \quad (6.4)$$

6.4.6 Distância do centro da armadura superior até a borda superior da seção (d')

Segundo Stucchi, Santos e Franco (2011), para essa variável pode ser assumir um a distribuição normal de probabilidade com média igual ao valor de d' estipulado no projeto e coeficiente de variação igual a 0,125.

6.4.7 Carregamento permanente (g)

As ações permanentes são aquelas que possuem valores com pequena variabilidade ao longo da vida útil da edificação, sendo essa variabilidade medida a partir de um conjunto de construções análogas (ABNT, 2003). Para representar essa variável adotou-se a distribuição de probabilidade normal, com média mostrada na Equação(6.5) e coeficiente de variação igual a 0,12, conforme disposto em Santiago (2019)

$$\mu_g = 1,06g_k \quad (6.5)$$

6.4.8 Carregamento variável (q)

Segundo a ABNT NBR 8681 (2003), o carregamento variável possui valor obtido por consenso e tem probabilidade de 25 a 35% de ser ultrapassado no sentido desfavorável em um período de 50 anos. Conforme Ellingwood e Galambos (1982), a distribuição de probabilidade para as cargas variáveis deve ser uma distribuição de Valores Extremos do Tipo I (distribuição Gumbel), sendo a média igual ao carregamento nominal e o coeficiente de variação igual a 0,25. Porém, estudo mais recentes como de Stucchi, Santos e Franco (2011), Holicky e Sykora (2011), Silva, Campos Filho e Real, (2018) e Santiago (2019) sugerem o uso de médias e coeficientes de variação diferentes.

Neste trabalho foram empregados os parâmetros apresentados por Santiago (2018). A escolha é justificada devido ao extenso estudo realizado por Santiago (2018), mostrando-se, assim, o mais adequado para o presente trabalho. Portanto, adotou-se uma distribuição Gumbel com média dada pela Equação (6.6) e coeficiente de variação igual a 0,40.

$$\mu_q = 1,0 \cdot q_k \quad (6.6)$$

Apesar desta tese utilizar os parâmetros apresentados acima, sugere-se, para novas pesquisas, o uso dos parâmetros empregados no trabalho de Lopes Costa, Santiago e Beck (2022). Na pesquisa de Lopes Costa, Santiago e Beck (2022) foi realizada uma análise crítica do carregamento variável em edificações, onde chegou-se à média dada pela Equação (6.7) e a um coeficiente de variação igual a 0,24

$$\mu_q = 0,92 \cdot q_k \quad (6.7)$$

Esses valores não foram utilizados nesta tese pois a publicação ocorreu após o desenvolvimento das análises aqui apresentadas. Porém, é evidente a importância de se fazer essa consideração para melhor direcionamento de pesquisas futuras.

6.4.9 Incerteza do modelo da resistência ($E_{m,R}$)

A consideração da variável aleatória $E_{m,R}$ é feita com base no item 5.2. Essa variável pode ser considerada por meio dos MLG ou pela determinação de um modelo de distribuição de probabilidade adequado aos dados analisado.

Em relação aos MLG a aleatoriedade é representada pelo resíduo do modelo. Nesta tese, todos os resíduos apresentaram distribuição normal de probabilidade. A Equação (6.8) e a Tabela 6.2 resumem os resultados obtidos para cada modelos de previsão estudado.

$$E_{m,R} = \exp\left(\beta_0 + \beta_1 \cdot f_{cm} + \beta_2 \cdot \rho + \beta_3 \cdot l_p + \beta_4 \cdot d + \beta_5 \cdot \frac{l_p}{d} + \beta_6 \cdot f_y\right) + \varepsilon \quad (6.8)$$

Tabela 6.2 – Parâmetros de $E_{m,R}$ dos MLG

Modelo	β_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	$\varepsilon \sim N(\mu, \sigma)$	
								μ	σ
ABNT NBR 6118 (2014)	-0.1086	0.0021	-	-	-	-	-	0.0	0.0976
EUROCODE 2 (2004)	0.3255	-	-	-	-0.0013	0.0045	-	0.0	0.1456
ACI 318 (2019)	0.3162	-	0.1444	-0.0012	-	-	-	0.0	0.1394
TFCC	0.0350	0.0010	-	-0.0003	-	-	0.0002	0.0	0.1111
MC 2010 (2012)	0.1892	0.0010	-	-0.0004	-	-	0.0002	0.0	0.1256
MEF R1	-0.0761	0.0145	-	-	-	-	-	0.0	0.1078
MEF R2	0.0658	-	-0.0214	-	-0.0003	-	-	0.0	0.0777

A distribuição de probabilidade da incerteza dos modelos de resistência, sem a consideração da correlação das variáveis, foi determinada empregando o teste de aderência de Kolmogorov-Smirnov, considerando um nível de significância $\alpha = 5\%$. Nessas análises, a distribuição log-normal foi usada para todos os modelos. A Tabela 6.3 apresenta os dados determinados no item 5.2 de forma resumida.

Tabela 6.3 – Parâmetros estatísticos do $E_{m,R}$

Distribuição de probabilidade	Modelos de previsão da resistência													
	MEF R1		MEF R2		TFCC		NBR 6118 (2014)		EC 2 (2004)		ACI 318 (2019)		MC 2010 (2012)	
Log-normal	μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ
	1.00	0.11	0.99	0.08	1.13	0.12	1.00	0.11	1.17	0.16	1.40	0.21	1.29	0.14

6.4.10 Incerteza do modelo da solicitação ($E_{m,S}$)

A incerteza de modelo da solicitação tem relação com o tipo de análise realizada para determinação da força concentrada na ligação laje-pilar. Como o modelo MEF S1 é linear elástico adotaram-se as recomendações de JCSS (2001), onde a variável aleatória que representa as incertezas na determinação da solicitação tem distribuição log-normal de probabilidade, com média igual a $\mu_{ms} = 1$ e C.V. igual a $V_{ms} = 0,1$.

6.5 DESCRIÇÃO DAS LAJES ANALISADAS

O estudo da confiabilidade do dimensionamento à punção de lajes lisas foi realizado a partir da definição de dois grupos de lajes, onde foram determinados os índices de confiabilidade β utilizando o método FORM.

Em relação ao primeiro grupo, denominado G1, foi estudada a região de ligação laje-pilar P05 com o modelo de resistência da ABNT NBR 6118 (2014). A justificativa da escolha desse modelo é feita em razão do menor tempo de processamento, em relação aos modelos MEF R1 e R2, e dos excelentes resultados obtidos no Capítulo 5.

O grupo G1 é formado por lajes quadradas de 1500 x 1500 cm, apoiadas em pilares quadrados com dimensões variadas, conforme ilustra a Figura 6.2. As dimensões dos pilares foram determinadas a partir das prescrições normativas relacionadas à punção. Esse dimensionamento foi desenvolvido de maneira que a verificação da resistência à punção sem armadura de cisalhamento fosse atendida em seu limite, ou seja, $\tau_{Sd} = \tau_{Rd}$. A distância adotada da face da laje até o centro geométrico da primeira camada da armadura longitudinal foi de 2 cm. O grupo G1 apresenta o resultado de confiabilidade de 1728 ligações laje-pilar obtidas a partir da combinação dos seguintes parâmetros:

- a) $f_{ck} = 30, 40$ e 50 MPa;
- b) espessura da laje de 16, 20, 24 e 28 cm;
- c) razão entre ação variável e ação permanente (δ) igual a 0,10; 0,30; 0,50; 0,70; 0,90 e 1,10;
- d) taxa mecânica de armadura de flexão (ρ) igual a 0,50; 0,88; 1,25; 1,63; 2,0 e 2,5%.
- e) Verificação da resistência à punção conforme a ABNT NBR 6118 (2014), ACI 318 (2019), EC 2 (2004) e MC 2010 (2012).

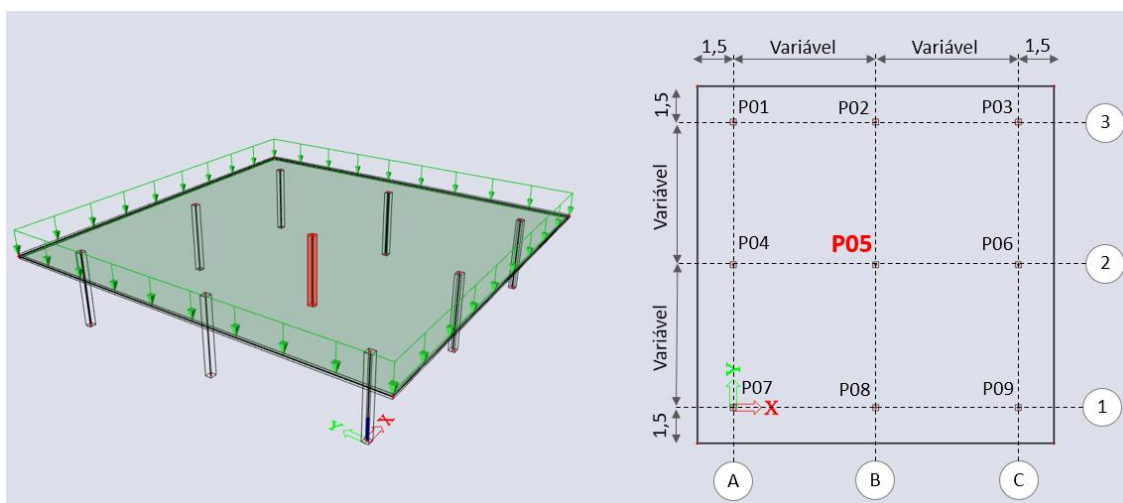


Figura 6.2 – Modelo estrutural do grupo G1

O dimensionamento à punção, desenvolvido com as quatro normativas avaliadas, é realizado seguindo os critérios de combinações de ações e coeficientes de ponderação, referente à norma utilizada. A Figura 6.3 apresenta as combinações e os coeficientes de ponderação empregados.

Norma	Combinação utilizada
ABNT NBR 6118 (2014)	$F_{sd} = 1,4g_k + 1,4q_k$
ACI 318 (2019)	$F_{sd} \geq \begin{cases} 1,4g_k \\ 1,2g_k + 1,6q_k \end{cases}$
EC 2 (2004)	$F_{sd} \geq \begin{cases} 1,15g_k + 1,50q_k \\ 1,35g_k + 1,05q_k \end{cases}$
MC 2010 (2012)	$F_{sd} = 1,15g_k + 1,50q_k$

Figura 6.3 – Combinação das ações e coeficientes de ponderação utilizados para o dimensionamento à punção

O segundo grupo, denominado G2, estudou a confiabilidade da ligação laje-pilar P13, a partir de um modelo estrutural adaptado de Santos (2018), conforme mostra a Figura 6.4. Neste grupo, a avaliação da confiabilidade é realizada com o modelo de resistência MEF R2 e da ABNT NBR 6118 (2014). O modelo estrutural do grupo G2 apresenta as seguintes características:

- a) $f_{ck} = 35$ MPa;
- b) vão de 6,0 m e pé-direito de 3,0 m;
- c) espessura da laje de 20 cm;
- d) ação permanente igual ao peso próprio da estrutura mais revestimento da laje, considerado igual a 1 kN/m^2 ;
- e) ação variável igual a 4,0, 2,5, 1,5, 1,0 kN/m^2 , conforme Figura 6.4;
- f) cobrimento do concreto para as lajes igual a 2,5 cm;
- g) análise e dimensionamento utilizando um modelo de elementos finitos, com auxílio do *software* comercial SCIA Engineer.
- h) análise e dimensionamento utilizando um modelo de pórtico espacial e grelha, com auxílio do *software* comercial TQS;

- i) análise e dimensionamento seguindo as prescrições da ABNT NBR 6118 (2014).

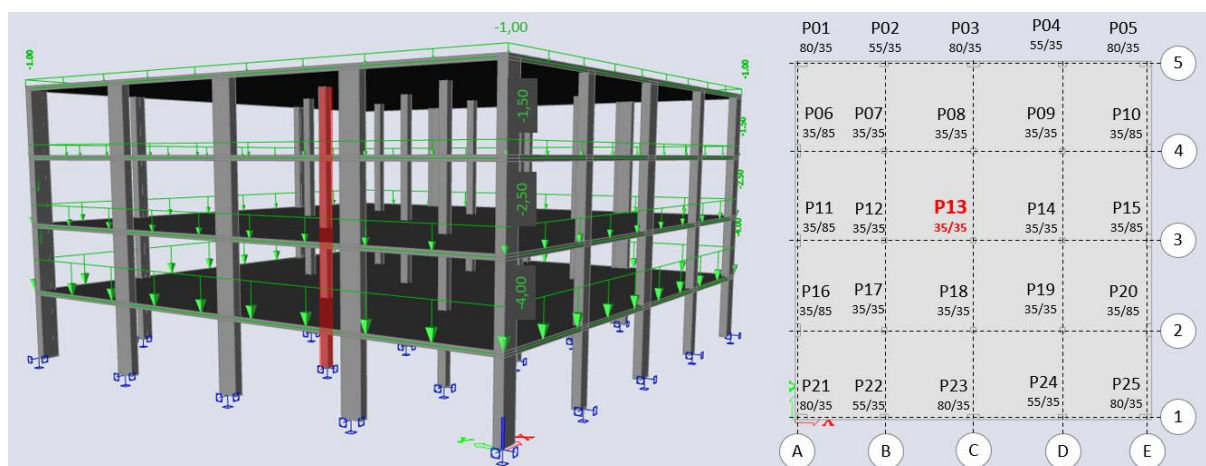


Figura 6.4 – Modelo estrutural do grupo G2

Portanto, nesta tese foram analisadas um total 1744 ligações laje-pilar, divididas em dois grupos. O Quadro 6.1 mostra de forma resumida a divisão das lajes estudadas.

Quadro 6.1 – Descrição das lajes analisadas.

Grupo	Número de ligações analisadas	Armadura de flexão	Descrição do grupo	Modelo de resistência R(R)	Modelo de Solicitação S(g,q)	Verificação da resistência à punção	
G1	432	Estipulada conforme taxa de armadura de flexão adotada.	Dimensões dos pilares variadas a fim de se obter a situação limite para dispensar o uso de armadura de punção	ABNT 6118 (2014)	MEF S1	NBR 6118 (2014)	
	432					ACI 318 (2019)	
	432					EC 2 (2004)	
	432					MC 2010 (2012)	
G2	4	Calculada com auxílio do <i>software</i> SCIA	Pilares com dimensões fixas e armadura de flexão variada	MEF R2	MEF S1	NBR 6118 (2014)	
	4						ABNT 6118 (2014)
	4	Calculada com auxílio do <i>software</i> TQS					MEF R2
	4						ABNT 6118 (2014)

Fonte: Elaborado pelo autor

6.6 DIMENSIONAMENTO DA ARMADURA DE FLEXÃO DO GRUPO 2

A modelagem e análises dos esforços nas lajes deve ser feito por modelos que representem o comportamento da estrutura de maneira mais realística possível. Dessa forma, a utilização de métodos numéricos apresenta uma precisão maior na avaliação dos esforços atuantes em lajes lisas. Em alguns casos, métodos simplificados podem ser utilizados a fim de se avaliar de forma simples e rápida o comportamento da estrutura. As características dos dois grupos avaliados nesta tese permitem o uso de processos aproximados para avaliação dos esforços internos nas lajes. Contudo, procurou-se adotar as metodologias comumente utilizadas em escritórios de cálculo estrutural. Dessa forma, os pavimentos foram discretizados em barras de grelha, quando utilizado o *software* TQS (TQS, 2022), e em elementos finitos, quando utilizado o *software* SCIA *Engineer* (SCIA, 2022).

6.6.1 Determinação dos esforços pelo Método dos Elementos Finitos (MEF)

O cálculo dos esforços pelo MEF, pode ser realizado a partir de uma análise linear com auxílio de um programa de elementos finitos. Neste trabalho utilizou-se o *software* SCIA Engineer. Para o estudo do grupo G2, elaborou-se um modelo elástico-linear, onde os pilares são discretizados por elementos finitos tipo *frame* e as lajes por elementos tipo *shell*. A Figura 6.5 apresenta a deformada da estrutura e as flechas no segundo pavimento da edificação para os valores característicos das ações.

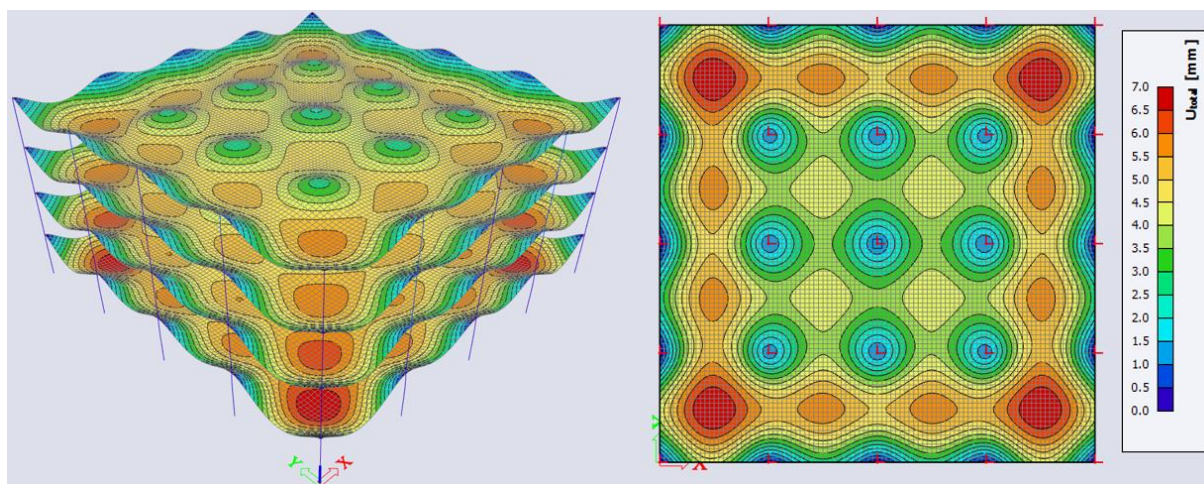


Figura 6.5 – Deformada da edificação do grupo G2 modelada no SCIA Engineer

A qualidade dos resultados obtidos, a partir da utilização do MEF, depende da escolha adequada da malha de elementos finitos utilizada para a discretização do pavimento. Uma malha pouco refinada pode produzir resultados de baixa precisão. Contudo, uma malha muito refinada pode gerar picos de momentos fletores que não correspondem ao comportamento real da estrutura, mas que altera de forma significativa a armadura de flexão e a verificação da punção da laje. Esse comportamento pode ser observado a partir da análise do segundo pavimento da edificação. Na Figura 6.6 são ilustradas as duas malhas utilizadas. A primeira é uma malha uniforme de 25x25 cm formada por 36.864 elementos *shell*. Na segunda malha, foi realizado um refinamento nas regiões de ligação laje-pilar sendo utilizado um total de 71.540 elementos *shell*.

A Figura 6.7 mostra os diagramas de momento fletor ao longo do alinhamento C que passa pelos pilares P03 e P23 e que serão utilizados para o dimensionamento da armadura de flexão e, conseqüentemente, para determinação da resistência à punção. Os momentos fletores

característicos determinados a partir do uso das duas malhas possuem diferenças significativas. Para região de ligação laje-pilar P13 o momento obtido com a utilização da primeira malha foi de 74,4 kNm/m, já para a segunda malha o valor foi de 116,6 kNm/m.

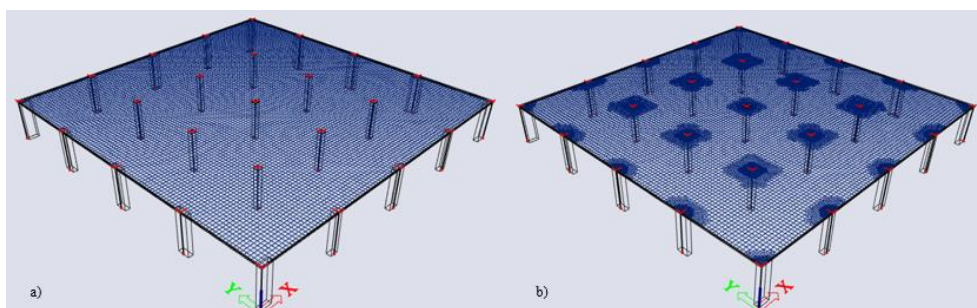


Figura 6.6 – (a) Malha de elementos finitos de 25x 25 cm e (b) malha refinada na região de ligação laje-pilar

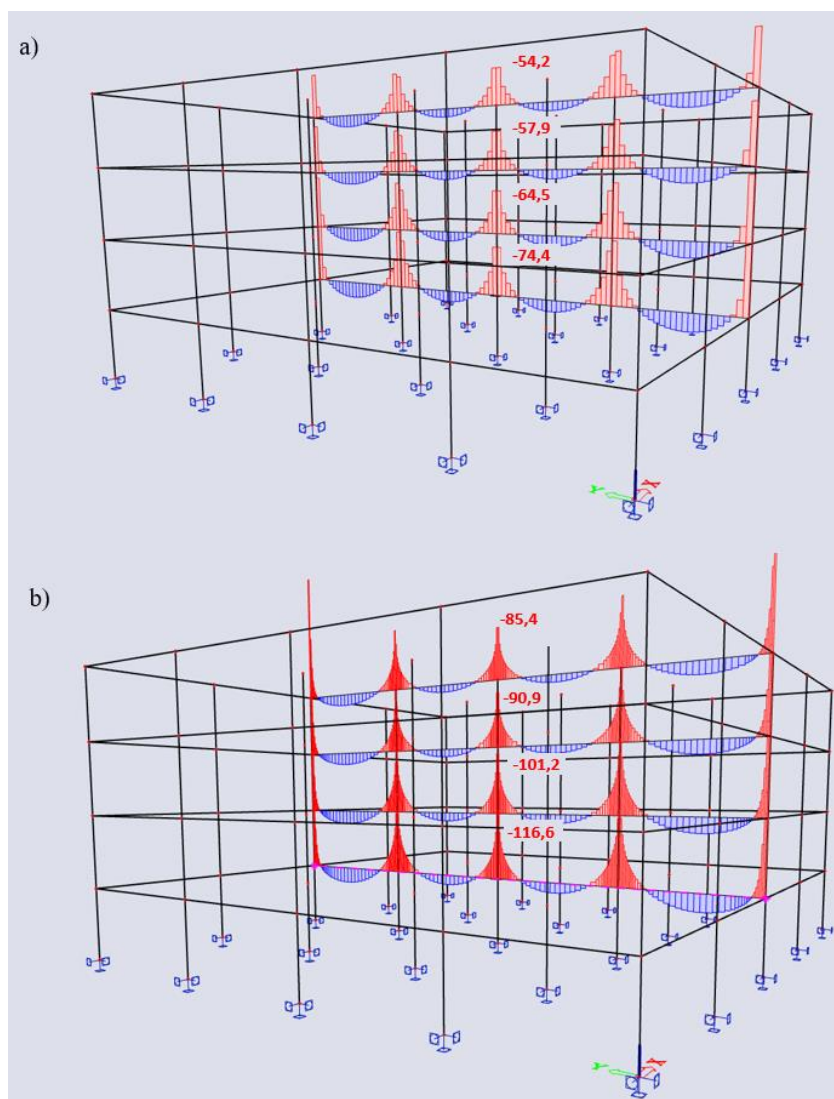


Figura 6.7 – Diagrama de momento fletor no alinhamento C com (a) malha uniforme e (b) com malha refinada na região de ligação laje-pilar

É importante que, quando utilizado malhas mais refinadas, se faça a análise dos resultados de forma criteriosa. Uma estratégia para avaliar os picos elevados de momentos na região de ligação laje-pilar é adotar uma faixa de média nas regiões de pico. A Figura 6.8 ilustra o resultado obtido na segunda malha com uma faixa de média igual à largura do pilar acrescida da espessura da laje. A determinação dos momentos fletores em todos os pavimentos foi realizada utilizando esse recurso.

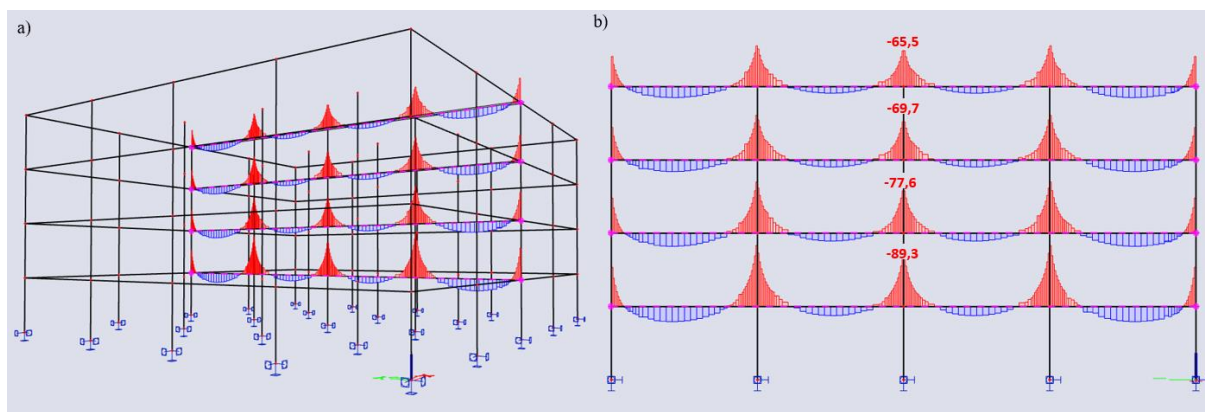


Figura 6.8 – Diagrama de momento fletor (kN.m/m) obtido no alinhamento C utilizando o recurso faixa de média

O dimensionamento da armadura de flexão foi realizado apenas para região de ligação laje-pilar P13, conforme ilustra a Figura 6.9. Devido à simetria da estrutura, apenas um quarto dessa região é modelada no *software* ANSYS APDL para avaliação da confiabilidade. A Tabela 6.4 apresenta o resultado do dimensionamento da armadura de flexão negativa para essa região.

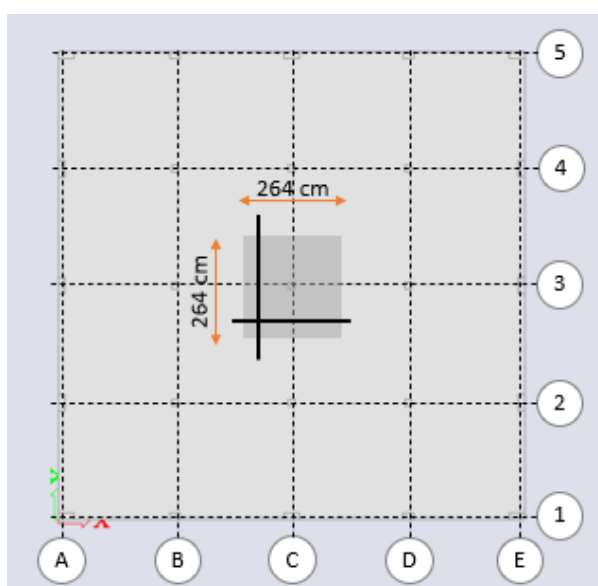


Figura 6.9 – Disposição da armadura de flexão negativa na região de análise

Tabela 6.4 – Armaduras negativas de flexão determinadas a partir do modelo elaborado no *software* SCIA Engineer

Laje	Dimensões da região avaliada						As,x (cm ² /m)	As,y (cm ² /m)	Descrição	
	lx (cm)	ly (cm)	h (cm)	dx (cm)	dy (cm)	d (cm)				
Pav. 2	132	132	20	16.7	15.1	16.1	19.3	22.1	14 φ 16 mm c. 10 cm na direção x	14 φ 16 mm c. 9 cm na direção y
Pav. 3	132	132	20	16.7	15.1	16.1	16.4	18.7	12 φ 16 mm c. 12 cm na direção x	12 φ 16 mm c. 11 cm na direção y
Pav. 4	132	132	20	16.7	15.1	16.1	14.6	16.5	11 φ 16 mm c. 14 cm na direção x	11 φ 16 mm c. 12 cm na direção y
Pav. 5	132	132	20	16.7	15.1	16.1	13.6	15.4	10 φ 16 mm c. 15 cm na direção x	10 φ 16 mm c. 13. cm na direção y

6.6.2 Determinação dos esforços por discretização do pavimento em barras de grelha

A edificação do grupo G2 também foi modelada utilizando o *software* TQS. O programa apresenta dois modelos de cálculo, modelo IV e modelo VI. No modelo IV a edificação é modelada por um pórtico espacial mais um modelo de grelha, que faz a discretização da laje do pavimento. Neste modelo a laje tem comportamento de diafragma rígido e não recebe os esforços do vento. Em relação ao modelo VI, a edificação é modelada considerando o comportamento unificado do pórtico espacial e o modelo de grelha. Dessa forma, a laje receberá também os esforços devido ao vento na edificação. Levando em consideração o uso mais difundido do modelo IV e o objetivo do presente trabalho, adotou-se o modelo IV para analisar e dimensionar as lajes do grupo G2. A Figura 6.10 apresenta a edificação modelada no *software* TQS e o deslocamento determinado no segundo pavimento.

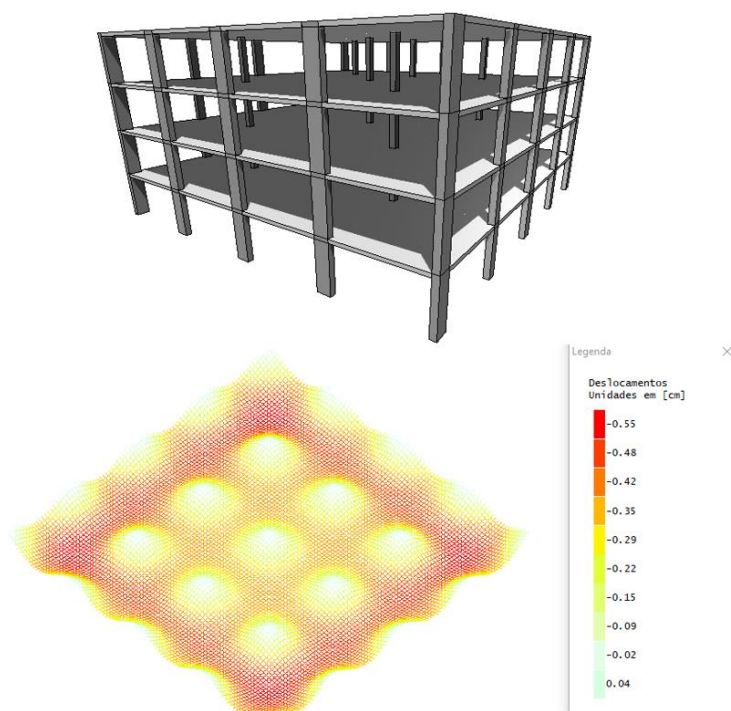


Figura 6.10 – Perspectiva da edificação do grupo G2 e deformada do segundo pavimento modelado no *software* TQS

A malha de grelha utilizada para a análise dos esforços foi de 25x25 cm. A estratégia adotada para evitar picos de momentos, que não representam o comportamento real da ligação, foi plastificar os apoios sobre os pilares. Essa plastificação é realizada a partir da redução da inércia à flexão das barras que tem ligação com o pilar, utilizando um divisor igual a 40. A Figura 6.11 apresenta os momentos fletores característicos atuando nas barras da grelha. As armaduras resultantes na região de estudo são apresentadas na Tabela 6.5.

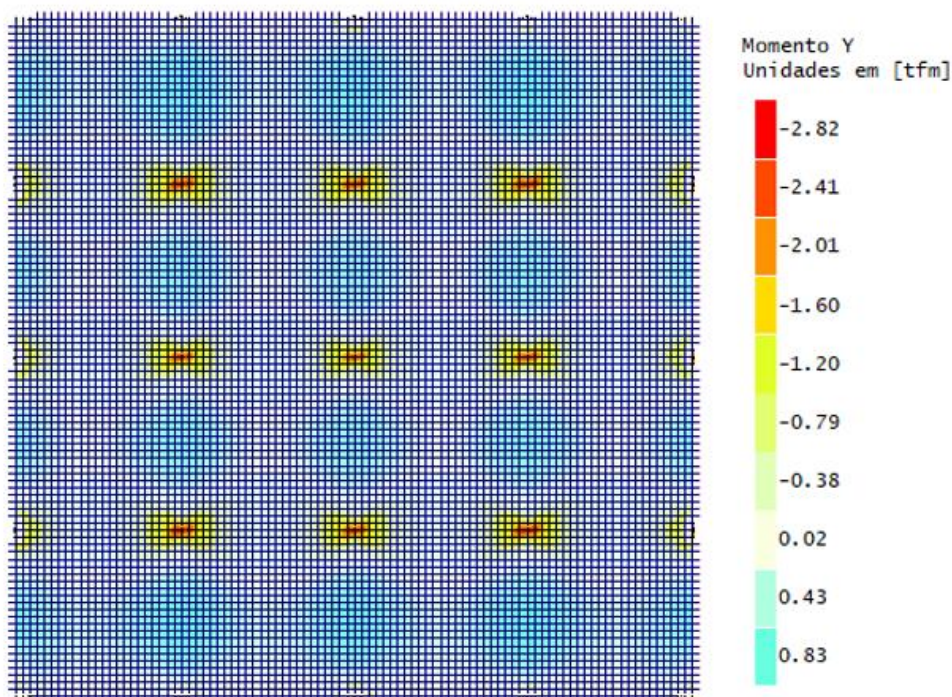


Figura 6.11 – Momento fletor nas barras da grelha do segundo pavimento do grupo G2

Tabela 6.5 - Armaduras negativas de flexão determinadas a partir do modelo elaborado no *software* TQS

Laje	Dimensões da região avaliada							As,x (cm ² /m)	As,y (cm ² /m)	Descrição	
	lx (cm)	ly (cm)	h (cm)	dx (cm)	dy (cm)	d (cm)					
Pav. 2	132	132	20	16.7	15.1	16.1	14.7	15.9	11 φ 16 mm c. 14 cm na direção x	11 φ 16 mm c. 13 cm na direção y	
Pav. 3	132	132	20	16.7	15.1	16.1	12.2	15.1	9 φ 16 mm c. 17 cm na direção x	9 φ 16 mm c. 13 cm na direção y	
Pav. 4	132	132	20	16.7	15.1	16.1	10.6	11.4	8 φ 16 mm c. 19 cm na direção x	8 φ 16 mm c. 18 cm na direção y	
Pav. 5	132	132	20	16.9	15.6	16.1	9.7	10.4	12 φ 12.5 mm c. 13 cm na direção x	12 φ 12.5 mm c. 12 cm na direção y	

6.7 DIMENSIONAMENTO À PUNÇÃO DO GRUPO 2

O dimensionamento à punção foi realizado conforme as prescrições da ABNT NBR 6118 (2014) apresentadas no Capítulo 2. Para verificação utilizando o *software* SCIA, a tensão de cisalhamento nas superfícies críticas foi determinada com o uso da força concentrada obtida

por meio da avaliação do diagrama de esforço normal do pilar. A Figura 6.12 apresenta os esforços característicos considerados e a Tabela 6.6 a verificação da resistência à punção.

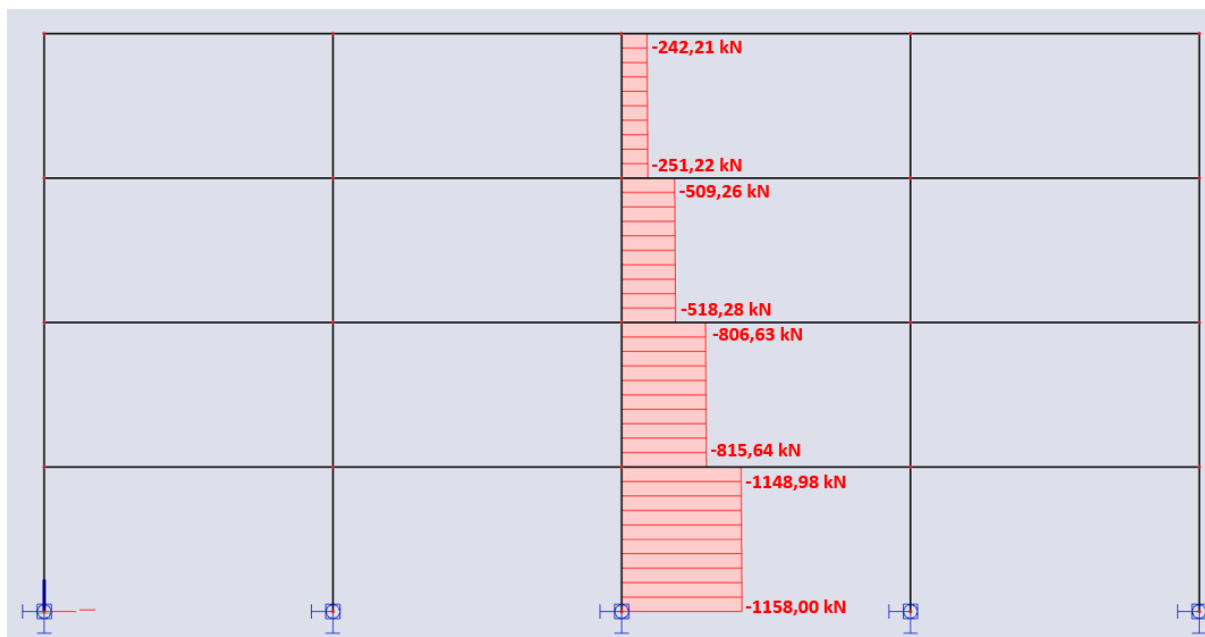


Figura 6.12 – Diagrama do esforço normal no pilar P13

Tabela 6.6 – Verificação da resistência à punção da ligação laje-pilar P13 conforme as prescrições da ABNT NBR 6118 (2014)

Laje	Força concentrada transferida da laje para o pilar (kN)	Fsd (kN)	Dimensões do pilar		Tensão solicitante				Tensão Resistente				Verificação		τ_{Rd}/τ_{sd}
			bx (cm)	by (cm)	Contorno C		Contorno C'		Contorno C		Contorno C'		Contorno C	Contorno C'	
					u (cm)	τ_{sd2} (kN/cm ²)	u (cm)	τ_{sd1} (kN/cm ²)	α_v	τ_{Rd2} (kN/cm ²)	ρ	τ_{Rd1} (kN/cm ²)			
Pav. 2	333.34	466.68	35	35	140	0.1905	366.2	0.0728	0.86	0.5805	0.0097	0.0871	OK	OK	1.20
Pav. 3	288.35	403.69	35	35	140	0.1696	353.6	0.0672	0.86	0.5805	0.0088	0.0850	OK	OK	1.27
Pav. 4	258.04	361.26	35	35	140	0.1518	353.6	0.0601	0.86	0.5805	0.0073	0.0800	OK	OK	1.33
Pav. 5	242.21	339.09	35	35	140	0.1425	353.6	0.0564	0.86	0.5805	0.0073	0.0800	OK	OK	1.42

Em relação a verificação utilizando o *software* TQS, optou-se por utilizar o critério implementado pelo programa. Esse critério consiste em verificar a tensão de cisalhamento a partir dos esforços da grelha em sub-perímetros críticos. Os sub-perímetros são obtidos a partir da divisão dos perímetros estipulados pela ABNT 6118 (2014). A superfície da norma é dividida em no mínimo quatro sub-perímetros. A força concentrada é obtida a partir do somatório dos esforços cortantes nos pontos de intersecção das barras da grelha com o sub-

perímetro. A Figura 6.13 ilustra a verificação de dois sub-perímetros realizada para ligação laje-pilar P13 do segundo pavimento da edificação do grupo G2. Os resultados para os outros sub-perímetros são idênticos devido à simetria do modelo. A verificação da ligação laje-pilar P13 de todos os pavimentos é mostrada na Tabela 6.7.

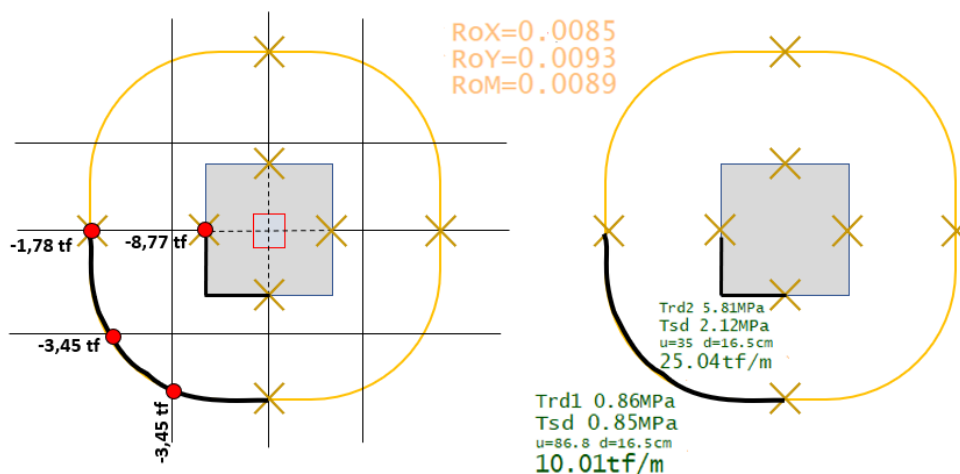


Figura 6.13 – Sub-perímetros da ligação laje-pilar P13

Tabela 6.7 - Verificação da resistência à punção da ligação laje-pilar P13 conforme as prescrições da ABNT NBR 6118 (2014) com auxílio do *software* TQS

Laje	Força característica sub-perímetro 2 (tf/m)	Força característica sub-perímetro 1 (tf/m)	Dimensões do pilar		Tensão solicitante				Tensão Resistente			Verificação			
					Contorno C		Contorno C'		Contorno C		Contorno C'	Contorno C		Contorno C'	τ_{Rd}/τ_{sd}
					bx (cm)	by (cm)	u (cm)	τ_{sd2} (kN/cm ²)	u (cm)	τ_{sd1} (kN/cm ²)	τ_{Rd2} (kN/cm ²)	ρ	τ_{Rd1} (kN/cm ²)	$\tau_{sd2} \leq \tau_{Rd2}$	
Pav. 2	25.04	10.01	35	35	35	0.2120	86.8	0.0860	0.581	0.0090	0.0860	OK	OK	1.00	
Pav. 3	21.29	8.52	35	35	35	0.1810	86.8	0.0720	0.581	0.0079	0.0830	OK	OK	1.15	
Pav. 4	18.73	7.49	35	35	35	0.1590	86.8	0.0640	0.581	0.0064	0.0770	OK	OK	1.20	
Pav. 5	17.34	6.93	35	35	35	0.1470	86.8	0.0590	0.581	0.0059	0.0750	OK	OK	1.27	

6.8 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados para o grupo G1 serão analisados levando em consideração dois aspectos: a uniformidade dos índices de confiabilidade obtidos e o atendimento do índice de confiabilidade alvo adotado nesta tese. O Apêndice D apresenta os resultados das 1728 ligações laje-pilar avaliadas no grupo G1. Em relação ao grupo G2, somente a verificação do índice de confiabilidade alvo será avaliada. Inicialmente, uma avaliação da variável incerteza do modelo de resistência, usada para determinação do índice de confiabilidade β , é apresentada e discutida. Os itens a seguir apresentam os resultados obtidos.

6.8.1 Índice de confiabilidade β com o uso de diferentes $E_{m,R}$

No item 6.4.9 foram apresentados os resultados das duas metodologias empregadas para determinação da variável aleatória $E_{m,R}$. Para avaliação das diferenças obtidas com a utilização de cada uma das metodologias, comparou-se os resultados dos índices de confiabilidade β calculados para as 432 ligações laje-pilar, dimensionadas com o uso da NBR 6118 (ABNT, 2014).

Os índices de confiabilidade determinados com a incerteza do modelo de resistência obtido a partir dos MLG foram denominados β_{MLG} , e para a incerteza obtida por ajuste de curva, por meio do teste de Kolmogorov-Smirnov, β_{KS} . Neste estudo, observou-se que os índices de confiabilidade médios ($\beta_{médio}$) apresentaram valores quase idênticos para análise realizada. Além disso, valores próximos para os coeficientes de variação foram obtidos, sendo iguais a 0,10 e 0,09 para os índices de confiabilidade β_{MLG} e β_{KS} , respectivamente. A Figura 6.14 apresenta os resultados obtidos. O Apêndice E apresenta o resultado obtido para cada uma das análises realizadas.

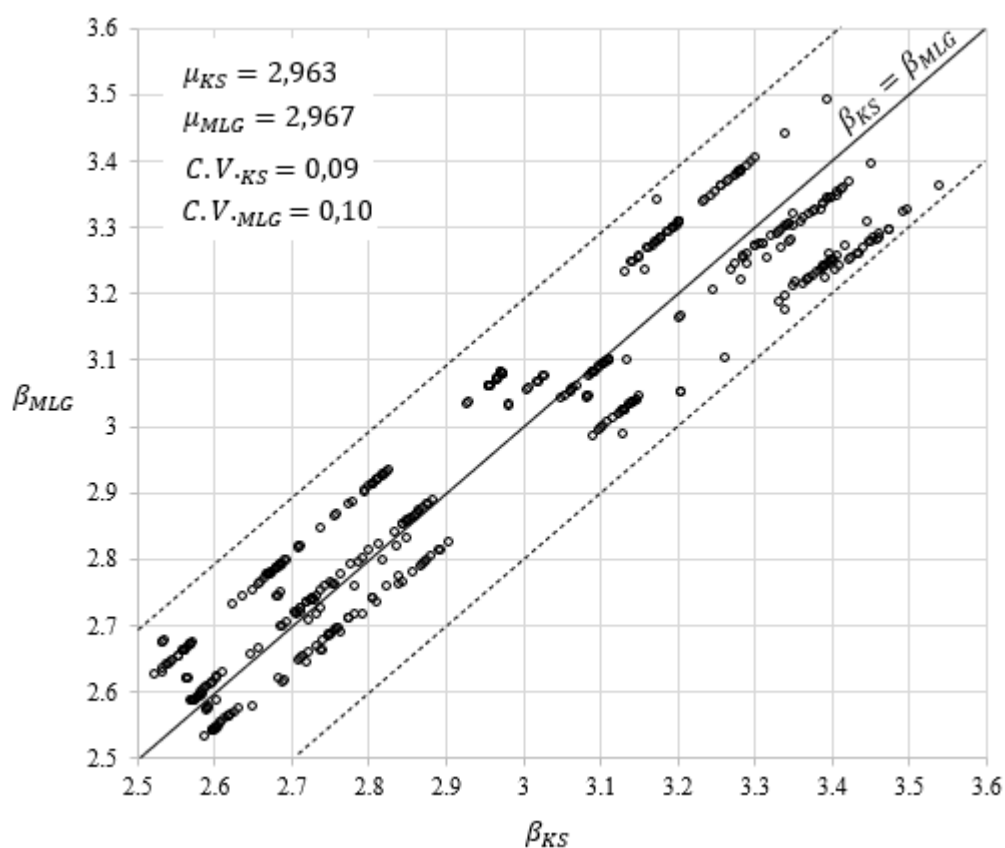


Figura 6.14 – Índices de confiabilidade obtidos com o uso das duas metodologias para determinação da incerteza do modelo de resistência

Por apresentarem resultados muito semelhantes, com médias próximas e um erro relativo máximo de 5,5%, conclui-se que não há diferença significativa entre as duas metodologias utilizadas. Esse fato pode ser justificado pela fraca correlação entre as variáveis utilizadas nos MLG. Dessa forma, adotou-se, para todas as análises de confiabilidade, a incerteza do modelo de resistência obtido com emprego dos MLG, por se considerar um modelo mais refinado, mesmo que as diferenças não sejam significativas.

6.8.2 Índice de confiabilidade β do grupo G1

Conforme exposto no Capítulo 3, o índice de confiabilidade alvo adotado foi de 3,8, referente a um período de referência de 50 anos, seguindo as recomendações do Código Modelo *fib* 2010 (2012). A discussão dos resultados é realizada a partir da análise do comportamento do índice de confiabilidade β em relação aos parâmetros δ , ρ , h e f_{ck} . Na avaliação dos índices de confiabilidade β , as variações são consideradas significativas quando apresentarem valores maiores que 0,7.

A partir do conjunto de 432 ligações laje-pilar dimensionadas pela ABNT NBR 6118 (2014) obteve-se um índice de confiabilidade β médio igual a 2,97. Nessa análise, o índice de confiabilidade oscilou entre o mínimo de 2,52 e o máximo de 3,54 apresentando uma variação igual a 1,02. Esses limites podem ser observados na Figura 6.15, que ilustra a faixa de variação de β em função dos parâmetros estudados. As conclusões obtidas a partir da análise da Figura 6.14 são:

- a) o índice de confiabilidade β possui significativa relação com o parâmetro δ , associado a isso, tem-se que, quanto maior a parcela da ação variável em relação a permanente, menor é o índice de confiabilidade alcançado;
- b) a variação de β é pequena quando fixado o valor de δ , mostrando não ser significativa a influência dos outros parâmetros.

Uma análise de correlação bivariada, com um nível de significância $\alpha = 5\%$, foi conduzida para estudar a relação entre o índice de confiabilidade β e os parâmetros avaliados neste estudo. Essa análise, seguindo os mesmos critérios, foi realizada para avaliação das outras normas.

Em relação a ABNT NBR 6118 (2014), conclui-se que, o índice de confiabilidade β possui forte relação não linear com o parâmetro δ . Além disso, o parâmetro f_{ck} apresenta correlação

significativa. Por outro lado, as variáveis ρ e h não possuem correlação, conforme pode ser observado na Figura 6.16.

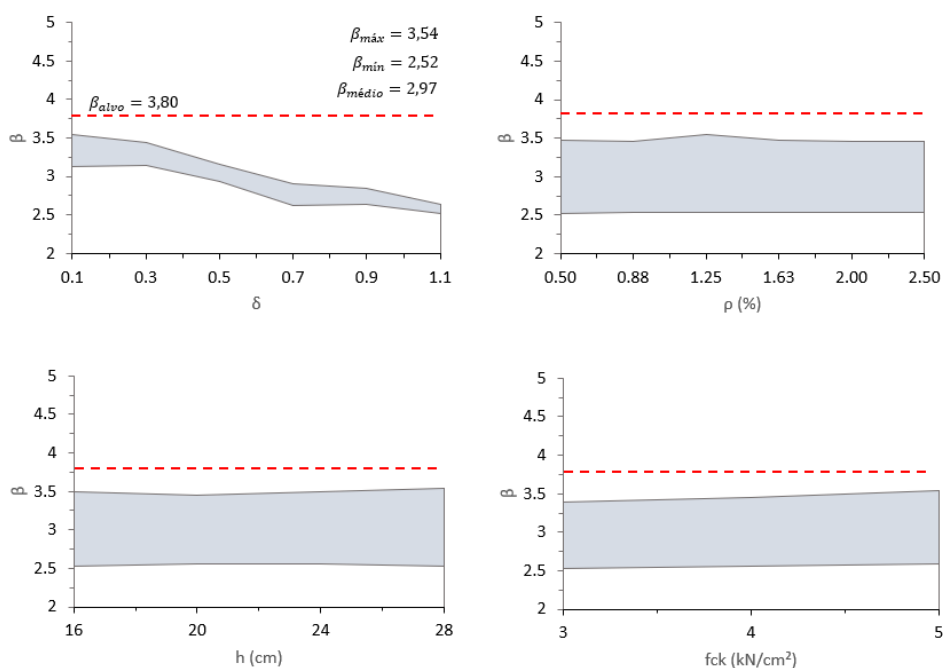


Figura 6.15 – Faixa de variação dos índices de confiabilidade β obtidos na análise da ABNT NBR 6118 (2014)

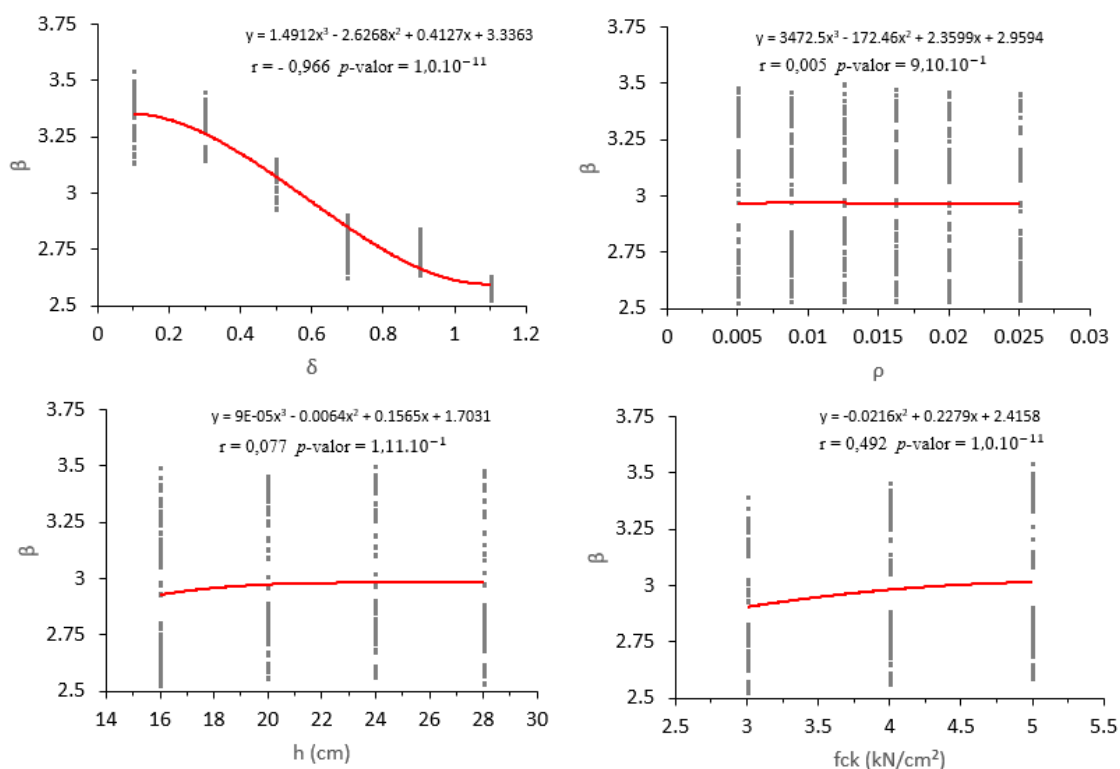


Figura 6.16 – Análise de correlação entre β e as variáveis de estudo para a avaliação da confiabilidade da ABNT NBR 6118 (2014)

Em relação ao EC 2 (2004) o índice de confiabilidade β médio foi igual a 3,16, com variação entre 2,63 e 4,23 apresentando uma diferença máxima de 1,60. Esses limites podem ser observados na Figura 6.17, que ilustra a faixa de variação de β em função dos parâmetros estudados.

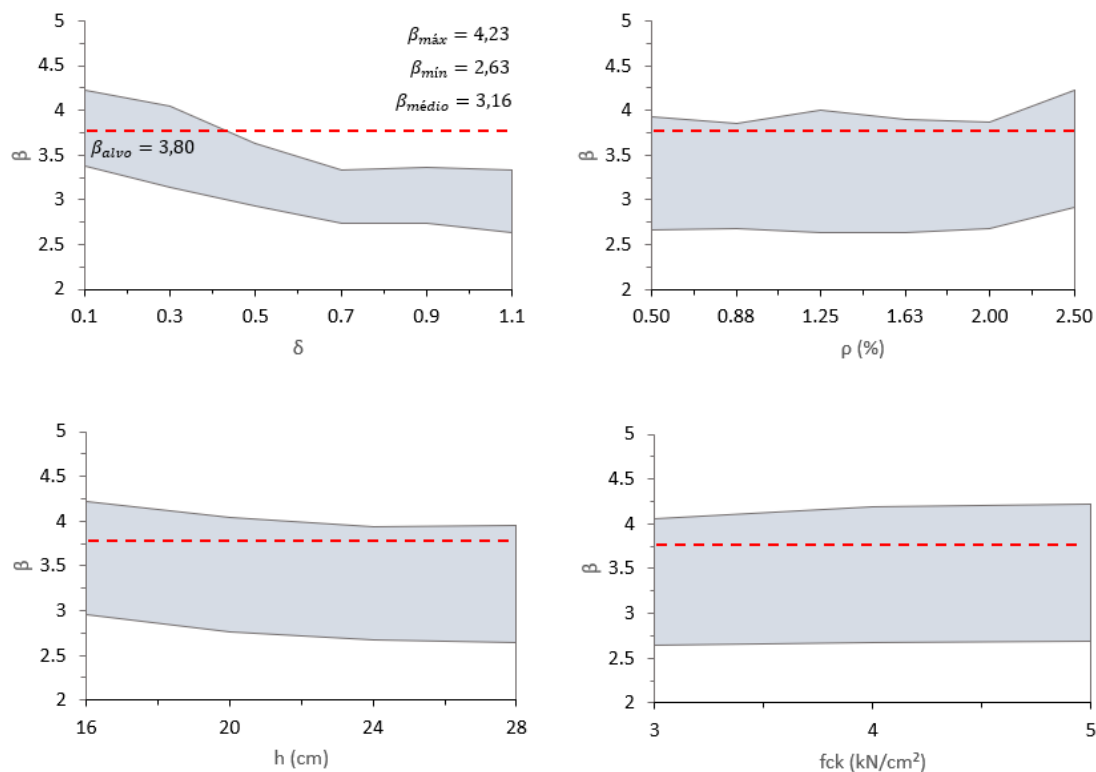


Figura 6.17 – Faixa de variação dos índices de confiabilidade β obtidos na análise da EC 2 (2004)

A análise de correlação bivariada mostrou que, o índice de confiabilidade β possui forte relação não linear com o parâmetro δ e correlação significativa com ρ e h , conforme pode ser observado na Figura 6.18. A correlação entre β e ρ é explicada pela limitação da norma em relação a taxa de armadura, cujo valor máximo é de 2%. Assim, no dimensionamento não é considerado o acréscimo de resistência devido às taxas de armaduras superiores a 2%, tendo como consequência, um aumento no índice de confiabilidade. Esse aumento ocorre devido ao afastamento da função de resistência em relação a solicitação. Para a correlação com a altura da laje, a conclusão é análoga, e está associada ao efeito de escala. Como consequência da limitação de $k = 2$, a confiabilidade do dimensionamento para lajes com $d \leq 200 \text{ mm}$ aumenta.

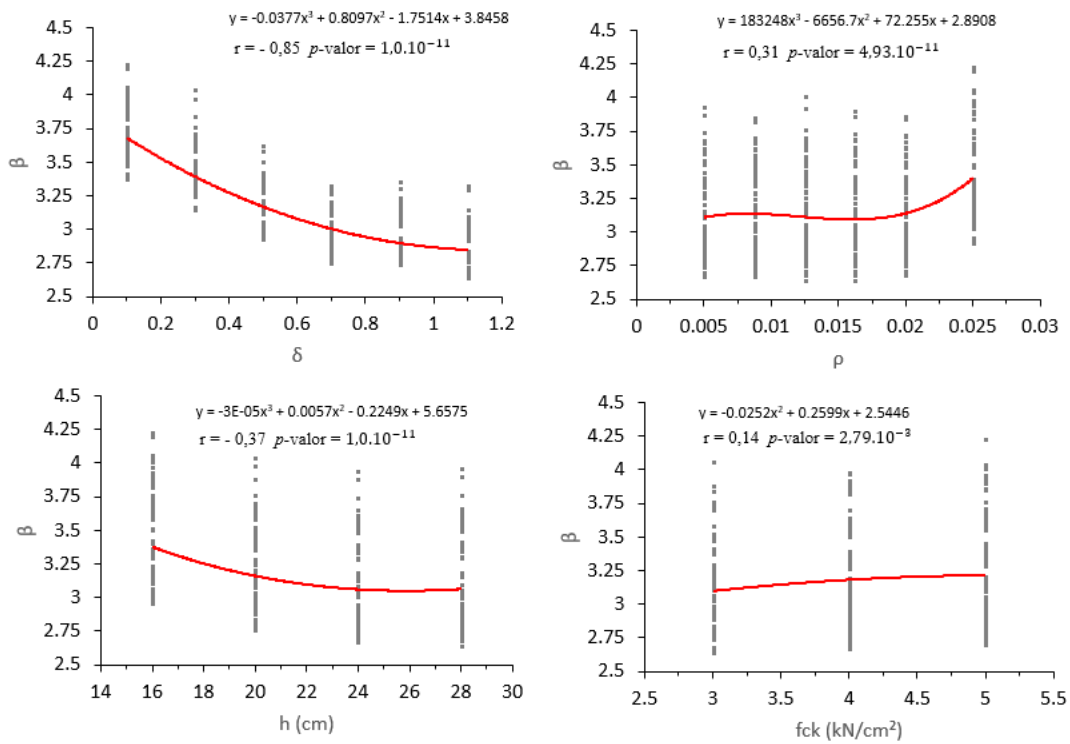


Figura 6.18 – Análise de correlação entre β e as variáveis de estudo para a avaliação da confiabilidade do EC 2 (2004)

Para o ACI 318 (2019) o índice de confiabilidade β médio foi igual a 2,68, com variação entre 1,52 e 4,10 apresentando uma diferença máxima de 2,58. Esses limites podem ser observados na Figura 6.19, que ilustra a faixa de variação de β em função dos parâmetros estudados.

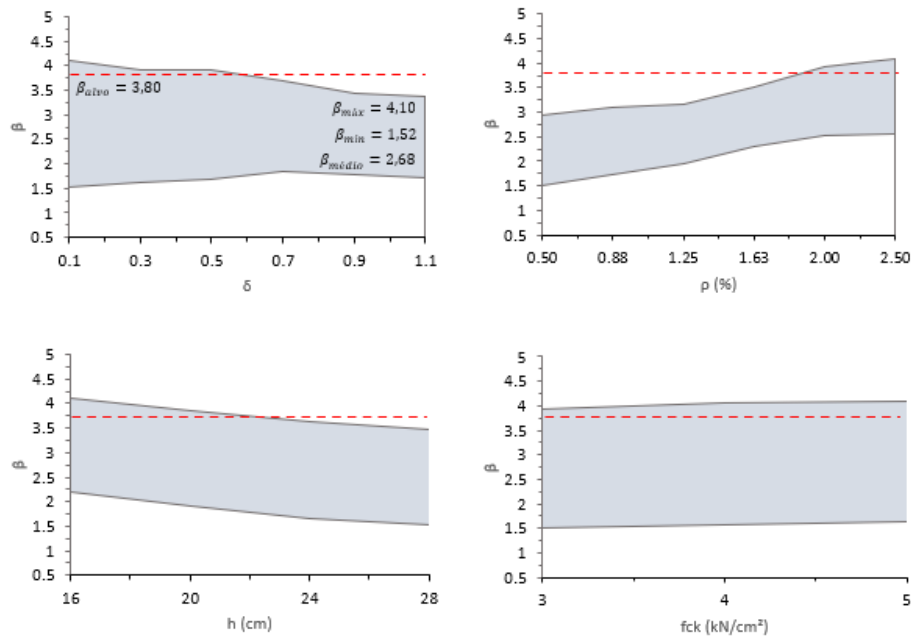


Figura 6.19 – Faixa de variação dos índices de confiabilidade β obtidos na análise do ACI 318 (2019)

A análise de correlação bivariada mostrou que, o índice de confiabilidade β possui forte correlação com o parâmetro ρ e correlação significativa com h e δ , conforme pode ser observado na Figura 6.20.

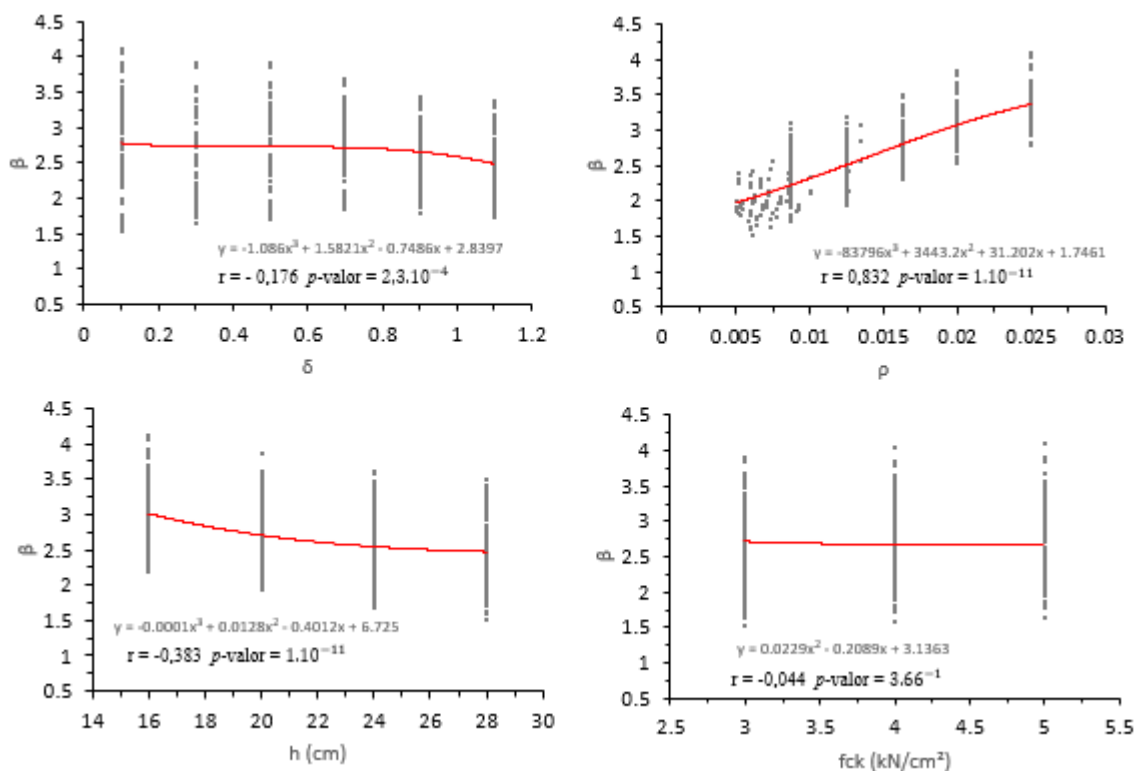


Figura 6.20 – Análise de correlação entre β e as variáveis de estudo para a avaliação da confiabilidade do ACI 318 (2019)

A variável δ apresenta correlação pouco significativa, mostrando um comportamento uniforme nos resultados determinados. Uma explicação para esse comportamento está associada as combinações de ações e coeficientes de ponderação estipulados pela norma. Esse fato evidencia o bom comportamento da calibração do ACI 318 (2019).

A correlação com a altura da laje está associada a limitação do fator que leva em consideração o efeito de escala. Para lajes com altura útil menor que 25 cm o acréscimo de resistência não é considerado no dimensionamento, conduzindo a função da resistência a regiões mais afastas em relação a função da sollicitação.

Por fim, a correlação entre β e ρ indica que, para baixas taxas de armadura, a confiabilidade da ligação laje-pilar tem impacto significativo, conduzindo a probabilidades de falhas elevadas, principalmente quando não é considerada a armadura mínima de flexão relacionada à verificação da punção, conforme Equação (2.38) apresentada no Capítulo 2. A Figura 6.21

mostra o comportamento obtido sem essa consideração. Esse comportamento é minimizado com a atendimento da armadura mínima. Contudo, mesmo com essa consideração, as baixas taxas de armadura conduziram os resultados a índices de confiabilidade inadequados à região de ligação laje-pilar.

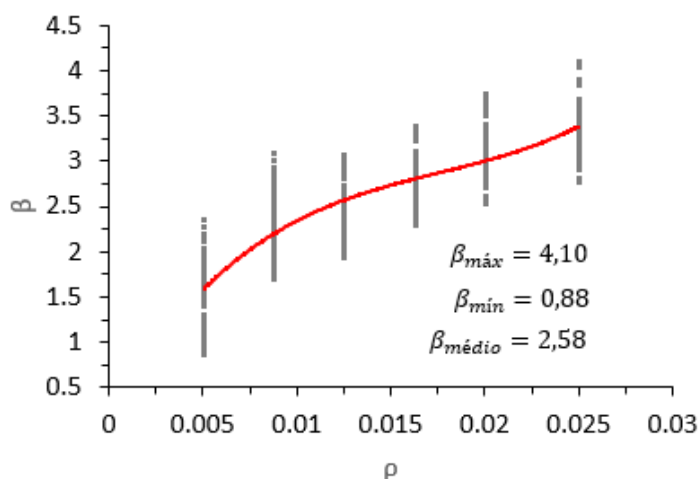


Figura 6.21 - Análise do índice de confiabilidade β , sem a consideração da armadura mínima, para avaliação do ACI 318 (2019)

Na avaliação do MC 2010 (2012) o índice de confiabilidade β médio foi igual a 3,74, sendo o que mais se aproximou do índice de confiabilidade alvo adotado. Em relação a variação do desse índice, o mesmo oscilou entre 5,27 e 2,79, apresentando uma variação igual a 2,48. Esses limites podem ser observados na Figura 6.22, que ilustra a faixa de variação de β em função dos parâmetros estudados.

A análise de correlação bivariada mostrou que o índice de confiabilidade β possui forte relação não linear com o parâmetro δ , evidenciando a necessidade da calibragem dos coeficientes de ponderação a fim de aumentar a uniformidade dos índices de confiabilidade alcançados pela norma. Além disso, o parâmetro ρ apresenta correlação pouco significativa, e as variáveis f_{ck} e h não possuem correlação, conforme pode ser observado na Figura 6.23.

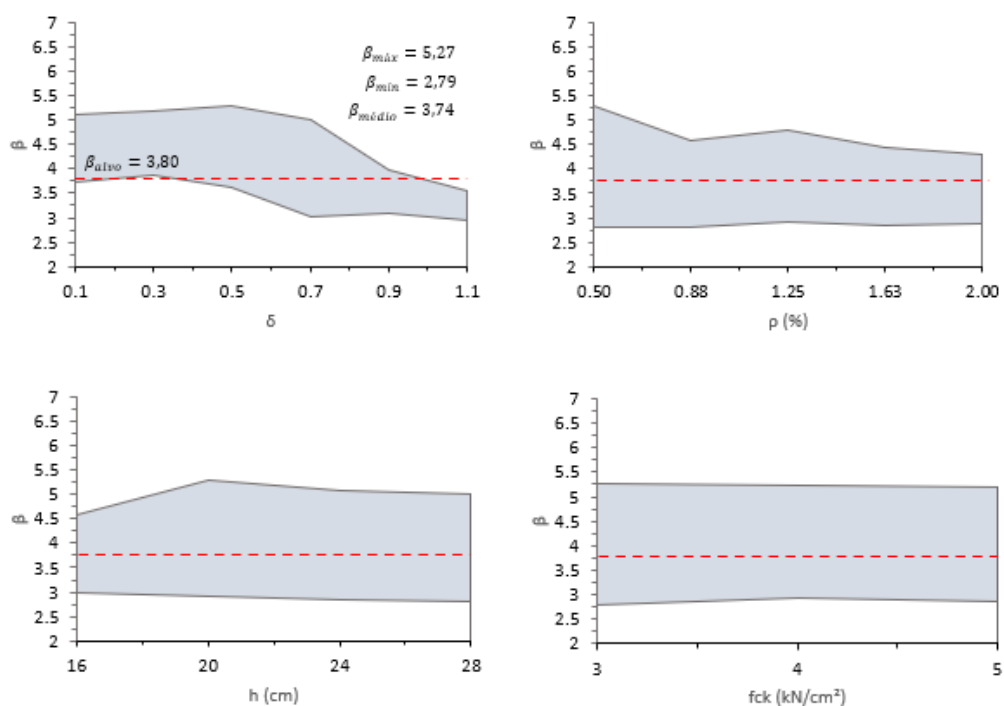


Figura 6.22 – Faixa de variação dos índices de confiabilidade β obtidos na análise da MC 2010 (2012)

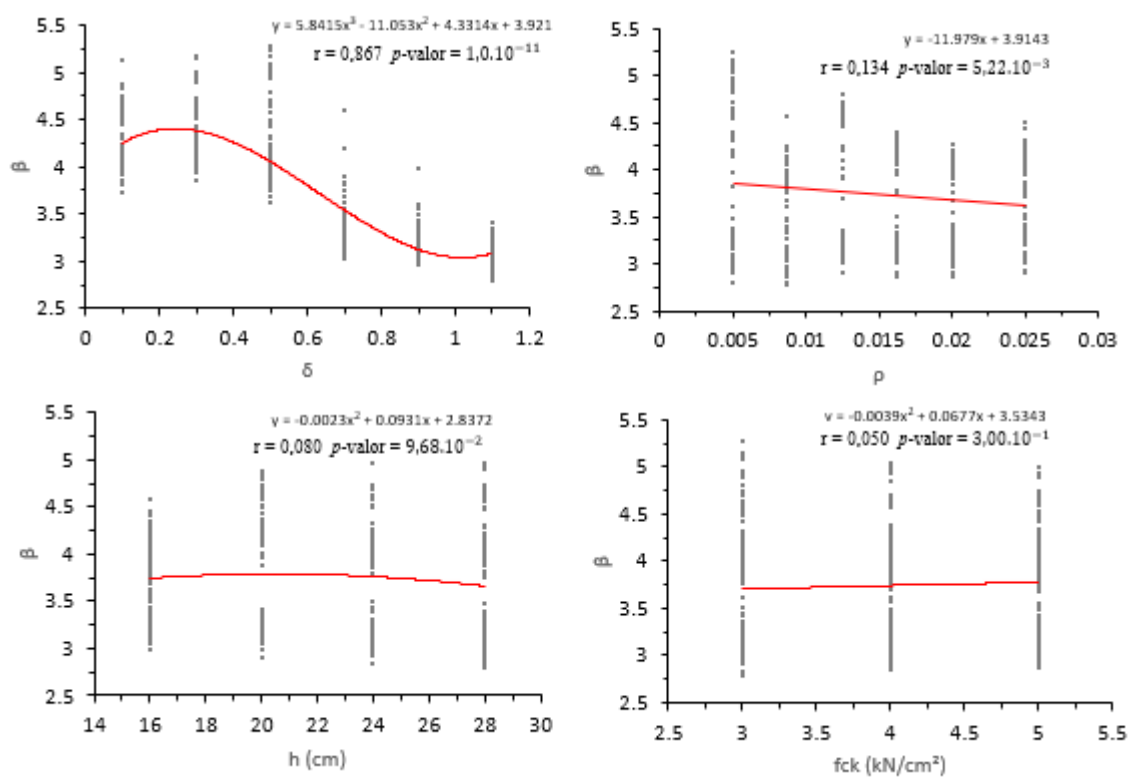


Figura 6.23 – Análise de correlação entre β e as variáveis de estudo, para a avaliação da confiabilidade da MC 2010 (2012)

A variável δ se mostrou com significativa influência no índice de confiabilidade das lajes estudadas. Dessa forma, analisou-se o comportamento das ligações para um intervalo de δ de 0,1 a 0,5. Essa delimitação dos dados foi realizada devido as características do dimensionamento desse tipo de laje, onde o aumento da ação variável conduz a um aumento da espessura da laje e , por consequência, aumento da ação permanente. Como a ação permanente em lajes de concreto armado é, na maioria das situações de projeto, preponderante em relação à variável, a razão entre ação variável e permanente dificilmente será maior do que um. Dessa forma, realizou uma análise com δ variado de 0,1 a 0,5 a fim de observar o comportamento do dimensionamento para as situações mais usuais de projeto. A Figura 6.24 resume os resultados e comportamento nessa situação.

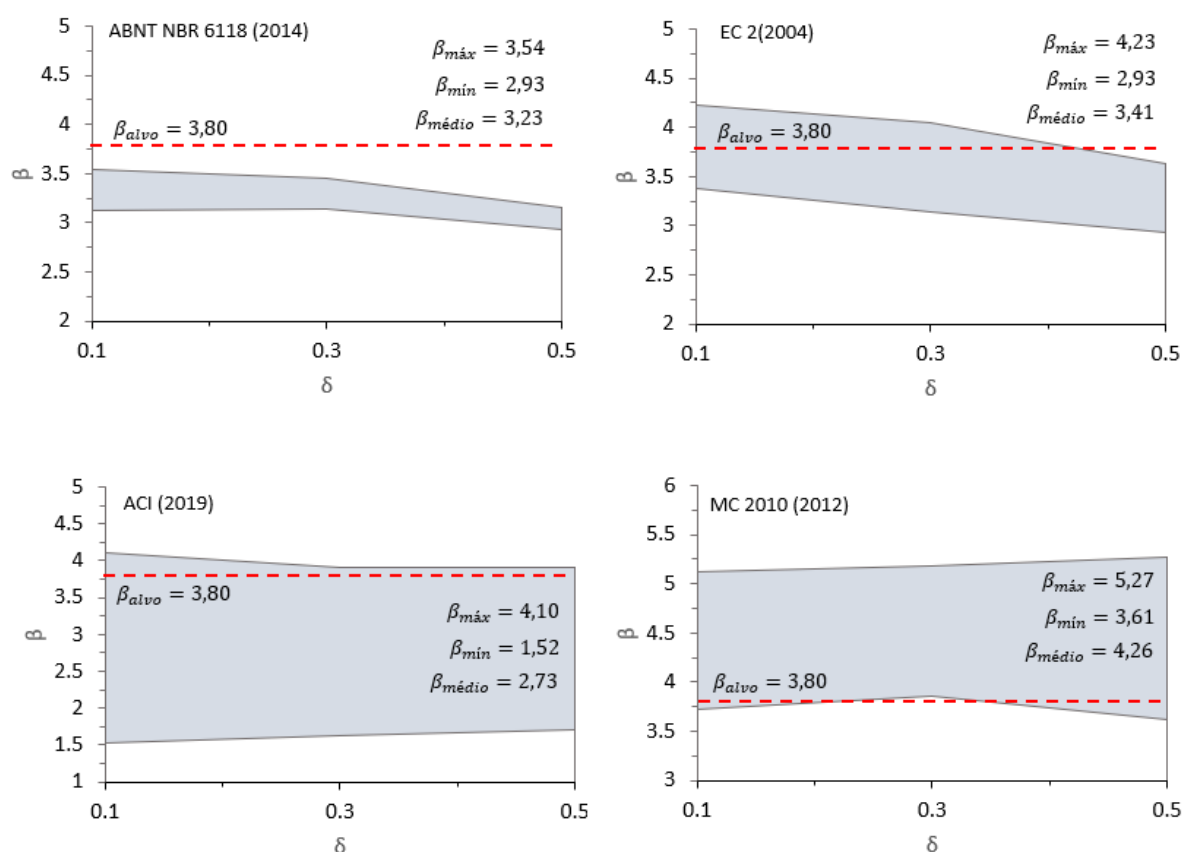


Figura 6.24 – Faixa de variação dos índices de confiabilidade em relação a δ

Analisando a Figura 6.24 conclui-se o que o índice de confiabilidade para a lajes dimensionadas pelas ABNT NBR 6118 (2014), EC 2 (2004) e MC 2010 (2012) apresentam boas margens resultados e média quando comparados com $\beta_{alvo} = 3,8$. Contudo, mesmo com a consideração de valores menores de δ , o índice de confiabilidade associado as lajes dimensionadas pelo ACI

318 (2019) apresentaram valores muito abaixo do índice de confiabilidade alvo. Como mostrado nas análises anteriores e como já observado por Muttoni (2008), esses valores estão associados a $\rho \leq 0,5\%$. Assim, uma análise sem a consideração de $\rho = 0,5\%$ foi realizada. A Figura 6.25 apresenta os resultados obtidos.

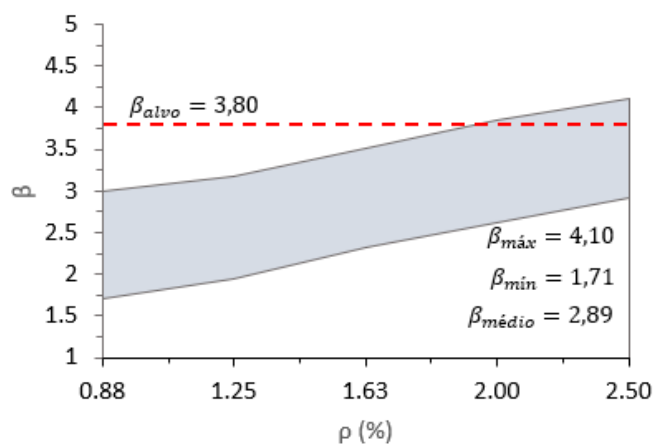


Figura 6.25 - Faixa de variação dos índices de confiabilidade em relação a ρ para avaliação do ACI 318 (2019)

6.8.3 Resultados complementares relacionados ao grupo G1

Com a finalidade de aprofundar a análise dos resultados obtidos para o grupo G1, realizou-se duas análises complementares. A primeira avalia a confiabilidade do dimensionamento, utilizando as prescrições da ABNT NBR 6118 (2014), usando os coeficientes de ponderação, das ações e da resistência, determinados por Santiago (2019) na calibração para o índice de confiabilidade alvo de 3,8. Assim, utilizou-se os valores de $\gamma_c = 1,54$, $\gamma_s = 1,29$, $\gamma_g = 1,43$ e $\gamma_q = 2,01$. As Figuras 6.26 e 6.27 apresentam os resultados e o comportamento da confiabilidade com a utilização desses coeficientes.

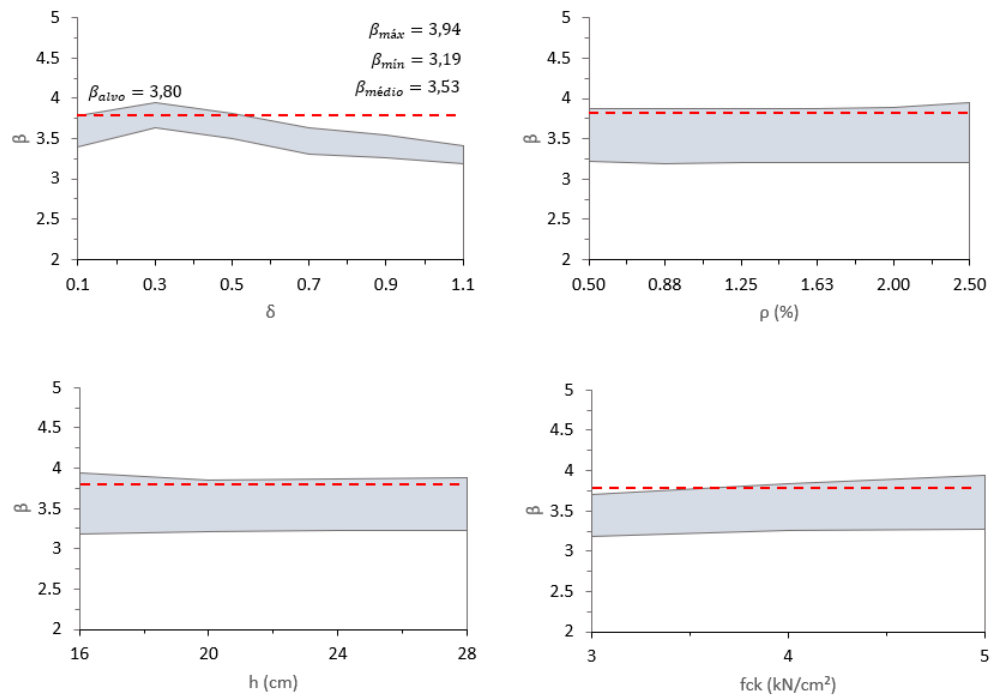


Figura 6.26 - Faixa de variação dos índices de confiabilidade β obtidos na análise utilizando coeficientes de ponderação conforme Santiago (2019)

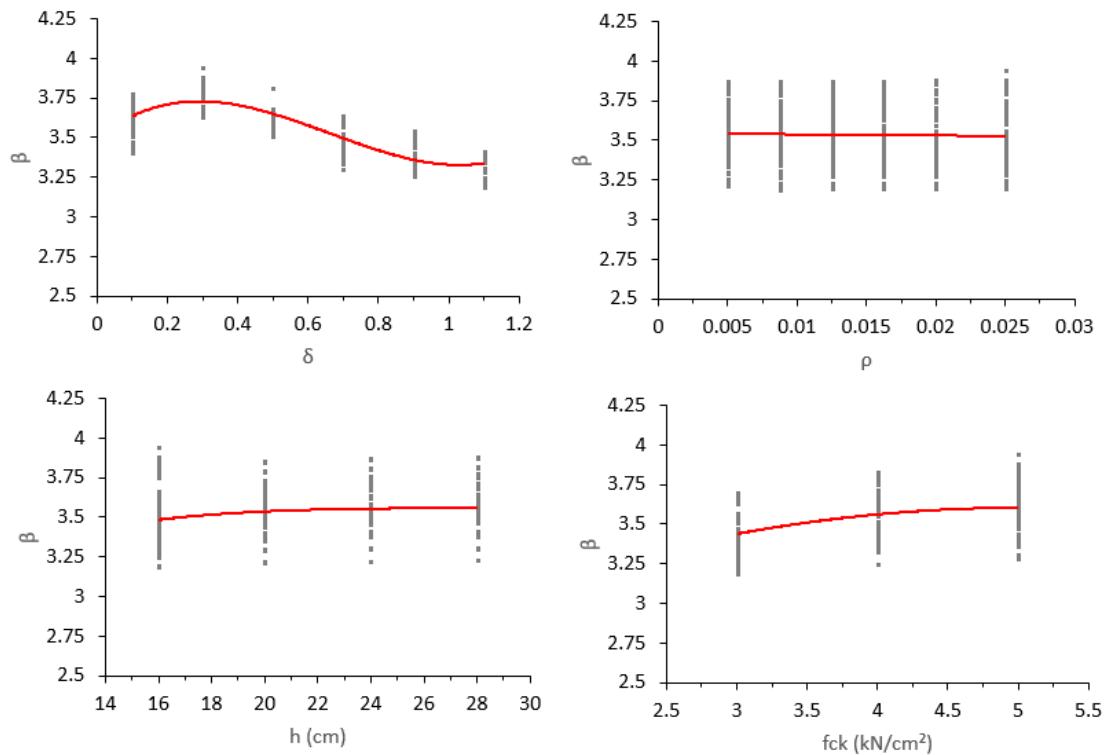


Figura 6.27 - Análise de correlação entre β e as variáveis de estudo para a avaliação da confiabilidade da ABNT NBR 6118 (2014) utilizando coeficientes de ponderação dados por Santiago (2019)

A partir da Figura 6.26 observa-se um $\beta_{médio}$ próximo do β_{alvo} e um comportamento uniforme dos índices de confiabilidade. Embora a calibração realizada por Santiago (2019) não tenha sido especificamente para estrutura de concreto sujeita à punção, o uso desses coeficientes apresentou bom comportamento na análise de confiabilidade desse estudo.

A segunda análise buscou explicar os resultados obtidos para o ACI 318 (2019), visto que essa norma foi calibrada para um índice de confiabilidade alvo igual a 3,00 e no presente estudo mostrou-se inferior a esse valor. Segundo Beck (2019), o coeficiente de variação da ação variável utilizado na calibração da norma, foi igual a 0,25, conforme apresentado em Ellingwood et al (1980). Assim, para maior compressão do comportamento da confiabilidade das ligações laje-pilar dimensionadas utilizando o ACI 318 (2014), empregou-se esse coeficiente de variação na determinação dos índices de confiabilidade. As Figuras 6.28 e 6.29 resumem os resultados obtidos.

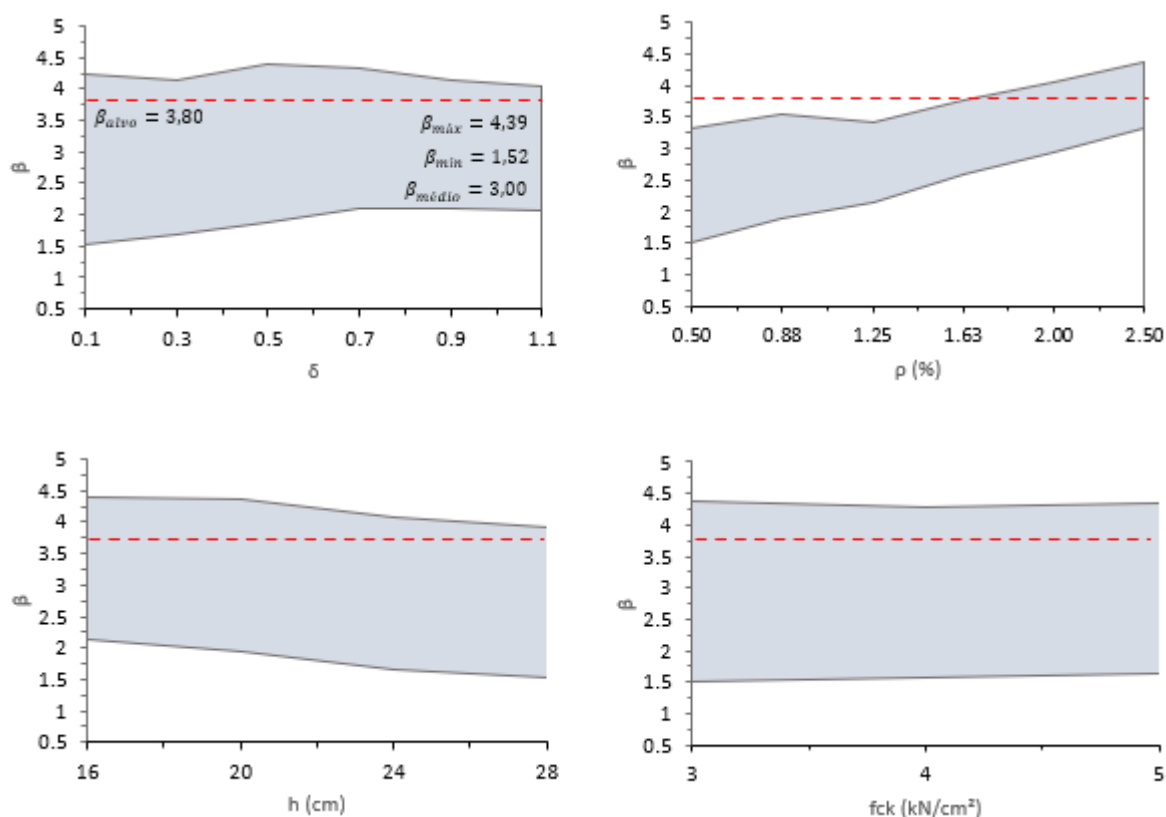


Figura 6.28 - Faixa de variação dos índices de confiabilidade β obtidos na análise utilizando coeficiente de variação da ações variáveis igual a 0,25

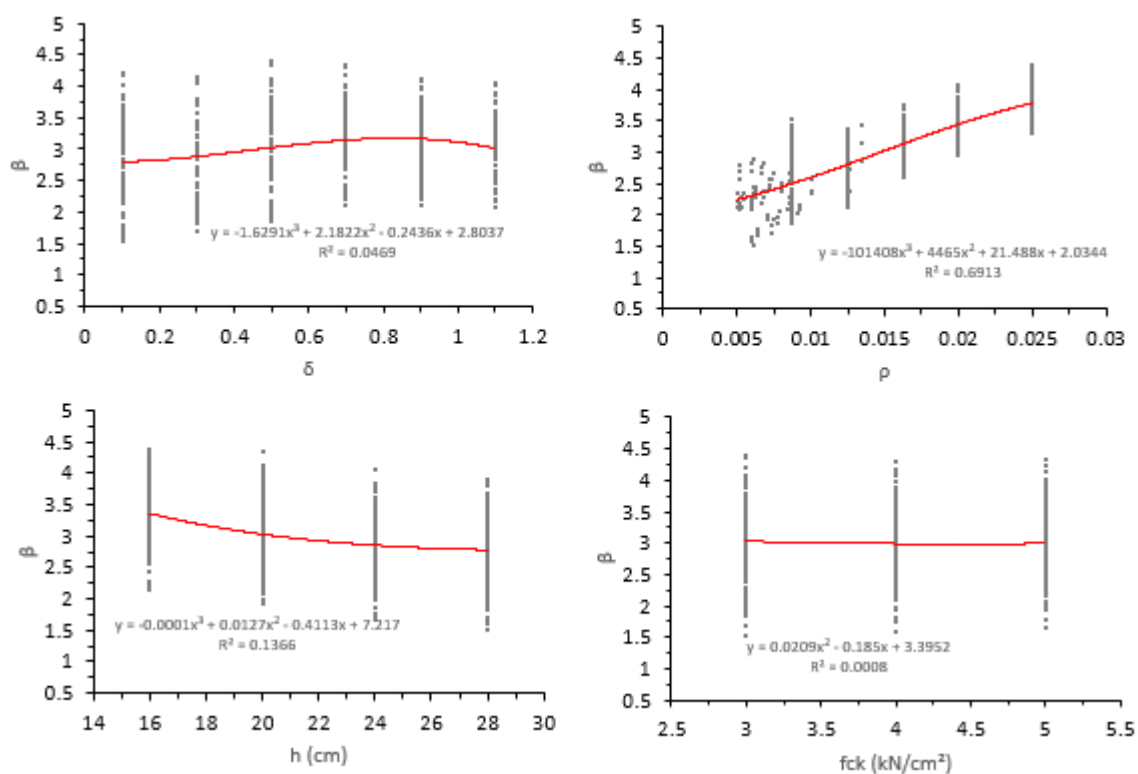


Figura 6.29 – Análise de correlação entre β e as variáveis de estudo para a avaliação da confiabilidade do ACI 318 (2019) utilizando coeficiente de variação da ação variável igual a 0,25

Conclui-se, com os resultados obtidos, que o $\beta_{médio}$ atende de forma integral o $\beta_{alvo} = 3,00$. Porém, mesmo com essa alteração, as ligações laje-pilar com baixas taxas de armadura de flexão e com predominância de ação permanente, obtiveram índices de confiabilidade inadequados quando comparados ao $\beta_{alvo} = 3,00$, mantendo o limite inferior de 1,52.

6.8.4 Índice de confiabilidade β do grupo G2

A avaliação do índice de confiabilidade do grupo G2 é realizada a partir da verificação do atendimento do β_{alvo} estipulado neste trabalho. As ações variáveis adotadas para cada um dos quatro pavimentos da edificação do grupo G2 são variadas e estão relacionadas com valores usuais encontrados na NBR 6120 (ABNT, 2019). Duas variáveis são estudadas em relação a este grupo. A variável δ , que tem valor igual a 0,17; 0,25; 0,42; 0,67 para os pavimentos 2, 3, 4 e 5, respectivamente, e a variável ρ , que é determinada por meio do dimensionamento à flexão da laje com auxílio do *software* TQS e SCIA Engineer. Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 6.8.

Tabela 6.8 – Índices de confiabilidade β determinados para o grupo G2

Ligação laje-pilar P13 (Grupo G2)									
Pav.	δ	Modelo TQS				Modelo SCIA			
		MEF R2		ABNT NBR 6118 (2014)		MEF R2		ABNT NBR 6118 (2014)	
		β	Tempo de processamento	β	Tempo de processamento	β	Tempo de processamento	β	Tempo de processamento
Pav. 2	0.7	2.56	2h40min15s	2.51	2min40s	2.62	2h38min12s	2.71	2min39s
Pav. 3	0.4	3.2	2h33min20s	3.10	2min35s	3.41	2h31min22s	3.29	2min41s
Pav. 4	0.3	3.69	2h35min51s	3.32	2min44s	3.94	2h39min06s	3.87	2min50s
Pav. 5	0.2	3.82	2h42min20s	3.55	2min55s	4.11	2h43min40s	4.15	2min40s

A confiabilidade do grupo G2 mostrou comportamento semelhante aos obtidos na análise mais abrangente realizada no grupo G1. Além disso, a diferença entre os dois modelos de resistência não foi significativa para determinação do índice de confiabilidade. Contudo, o mesmo não se observa em relação ao tempo de processamento, que em média foi setenta vezes maior para o modelo de resistência MEF R2.

É importante destacar que os valores mais elevados para confiabilidade do grupo G2 têm relação direta com a verificação da resistência à punção. Para esse grupo, existe uma margem de segurança adicional devido à resistência de cálculo ser maior que a solicitação de cálculo, conforme pode ser observado nas Tabela 6.6 e Tabela 6.7. De forma análoga, para maiores taxas de armadura de flexão na região de ligação laje-pilar, maiores valores de β foram observados.

7 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

A seguir são apresentadas as principais conclusões relacionadas a pesquisa desenvolvida. Além disso, são apresentadas sugestões para trabalhos futuros, com o objetivo de se avançar na temática dessa tese.

Em relação aos modelos de previsão da resistência, os sete modelos apresentaram boas estimativas da resistência à punção, sendo importante destacar o comportamento dos modelos da NBR 6118 (2014), TFCC, MEF R1 e MEF R2. Esses modelos apresentaram excelentes resultados para avaliação da carga de ruptura.

A escolha entre o modelo MEF R1 e MEF R2 para avaliação da confiabilidade teve como critério a melhor estabilidade numérica do modelo MEF R2. O atendimento desse critério é primordial para análise de confiabilidade utilizando o Método FORM, uma vez que, um valor irreal de ruptura devido a erro numérico, conduz a não convergência do método.

Apesar das estimativas mais precisas dos modelos numéricos, o modelo da ABNT NBR 6118 (2014) se mostrou mais eficiente para realização da análise de confiabilidade de grandes conjuntos de dados. Isso se deve ao tempo de processamento necessário para realização das análises, que nesse estudo se mostrou ser em média 1/70 do tempo de processamento utilizando o modelo MEF R2.

Dois grupos de lajes foram elaborados para o estudo da confiabilidade. O grupo G1 determinou a confiabilidade de 1728 ligações laje-pilar para situações hipotéticas de projeto onde a solicitação era igual a resistência à punção. Neste grupo as dimensões dos pilares foram dimensionadas de forma que esse critério fosse atendido. O grupo G2 avaliou o caso de um dimensionamento real com a determinação da confiabilidade de oito ligações laje-pilar. Além da verificação à punção o dimensionamento à flexão foi realizado para esse grupo. Em relação a este dimensionamento, utilizaram-se duas práticas comuns adotadas em escritórios de cálculo. A primeira foi a determinação dos esforços por uma análise elástica linear em um modelo de elementos finitos, onde foram discutidas as singularidades presentes na região de ligação laje-pilar. A segunda foi a determinação dos esforços utilizando a discretização da laje em barras de grelha e aplicando uma plastificação na ligação laje-pilar para minimizar os picos de momentos fletores.

A confiabilidade de todas as ligações foi determinada empregando o método FORM, com o desenvolvimento de um algoritmo que permitiu o acoplamento de um *software* desenvolvido em linguagem Python ao *software* ANSYS, viabilizando assim, o estudo da confiabilidade do dimensionamento de lajes lisas modeladas por meio do MEF.

A avaliação da confiabilidade foi realizada a partir da comparação com o índice de confiabilidade alvo estipulado em 3,8. Todas as conclusões aqui apresentadas são referentes ao dimensionamento de lajes lisas, sem efeito de momento e sem armadura de punção. O resultado apresentado para cada uma das normas foi discutido no Capítulo 6 e as principais conclusões foram:

- a) as prescrições normativas da ABNT NBR 6118 (2014) para o dimensionamento à punção carecem de uma calibragem dos coeficientes de ponderação, no sentido de aumentar o índice de confiabilidade β , e uniformizá-lo em relação a razões entre ação variável e permanentes (δ) maiores que 0,5. O valor médio obtido para essa avaliação foi de $\beta_{médio} = 2,97$;
- b) o EC 2 (2004) mostrou-se com comportamento semelhantes ao da norma brasileira. Porém, devido aos diferentes coeficientes de ponderação utilizados e a restrições imposta pelo EC 2 (2004) em relação a taxa de armadura de flexão e o efeito de escala, o índice de confiabilidade foi maior que o da ABNT NBR 6118 (2014), alcançando um $\beta_{médio}=3,16$;
- c) Em relação ao ACI 318 (2019), foi a norma que obteve os menores índices de confiabilidade, obtendo um $\beta_{médio} = 2,68$. Concluiu-se que, para taxas de armadura de flexão menores ou iguais a 0,5%, a previsão da resistência de cálculo determinada pelo ACI 318 (2019) conduz a índices de confiabilidade inadequados ao dimensionamento de estruturas. Outro aspecto importante observado em relação a essa norma foi o comportamento uniforme dos índices de confiabilidade com a variação da razão entre ação variável e permanentes (δ), evidenciando a adequada calibragem dos coeficientes de ponderação e das combinações de ações estipuladas;
- d) A maior média obtida para índice de confiabilidade β foi no dimensionamento das lajes seguindo as prescrições do MC 2010 (2012). A média obtida foi de 3,74 e 49,07% dos índices foram iguais ou maiores que o $\beta_{alvo} = 3,8$. Contudo, os

resultados mostram a necessidade de estudos específicos relacionados a calibragem dos coeficientes de ponderação, a fim de uniformizar a confiabilidade em relação a variável δ .

É importante ressaltar que os resultados obtidos relacionados ao dimensionamento com base em normas estrangeiras servem como base para discussão da confiabilidade estrutural com diferentes prescrições normativas. Porém, não devem ser tomados como confiabilidade do dimensionamento realizado nos locais onde essas normas estão em vigor. Esse fato é justificado pelas características das variáveis aleatórias adotadas nesta pesquisa. Tais variáveis refletem o comportamento dos materiais e das ações referentes ao Brasil. Para uma avaliação mais precisa da confiabilidade do dimensionamento das normas estrangeiras e internacionais, deve-se utilizar variáveis aleatórias com características adequadas as regiões de estudo. Por fim, as estimativas de confiabilidade apresentadas nesta pesquisa estão condicionadas as premissas adotadas, sendo os resultados válidos apenas para ligações laje-pilar com características idênticas às aqui considerada.

7.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A seguir são apresentadas sugestões para trabalhos futuros relacionados aos temas abordados nesta tese. Essas sugestões estão relacionadas às principais dificuldades encontradas durante a elaboração da pesquisa, e que podem ser aprimoradas e discutidas com maior profundidade em trabalhos futuros. As principais sugestões são:

- a) estimar a confiabilidade do dimensionamento de lajes lisas usando os parâmetros estatísticos apresentados no trabalho de Lopes Costa, Santiago e Beck (2022);
- b) realizar um estudo do dimensionamento à flexão das lajes lisas, aprofundando a discussão em relação a plastificação da região de ligação laje-pilar e os critérios para determinação do momento fletor a ser utilizado no dimensionamento à flexão;
- b) estudar a confiabilidade da ligação laje-pilar com efeito de momento e com a consideração de aberturas na laje;
- c) avaliar a confiabilidade do dimensionamento com armadura de punção;

- d) realizar uma pesquisa específica do dimensionamento à punção, utilizando as prescrições normativas do ACI 318 (2019), para baixas taxas de armadura de flexão;
- e) estudar o comportamento da resistência à punção em função da esbeltez das lajes lisas;
- f) avaliar a confiabilidade considerando um modelo global e os efeitos da laje contínua;
- g) aprimorar o método de avaliação de confiabilidade utilizado neste trabalho, avaliando a correlação entre sollicitação e resistência;
- h) desenvolver modelos numéricos estáveis e com menores tempo de processamento para utilização em estudos de confiabilidade estrutural;
- i) aprofundar as pesquisas em relação a calibração dos coeficientes de ponderação na NBR 6118;
- j) desenvolver pesquisas relacionadas a determinação do índice de confiabilidade alvo para diferentes tipos de dimensionamento;
- l) desenvolver estudos estatísticos para determinação das VA relacionadas à resistência e sollicitação em estruturas.

REFERÊNCIAS

- ACI Committee 318. **Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary (ACI 318-19)**. American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 2019.
- ADETIFA, B.; POLAK, M. A. Retrofit of slab column interior connections using shear bolts. **ACI Structural Journal**, v. 102, n. 2, p. 268–274, 2005.
- ANG, A. H-S.; TANG, W. H. **Probability concepts in engineering planning and design**. Volume II: Decision, risk, and reliability. New York, John Wiley & Sons, 1984b.
- ANG, A. H-S.; TANG, W. H. **Probability Concepts in Engineering: Emphasis on Applications to Civil and Environmental Engineering**. New York, John Wiley & Sons, 2007.
- ANSYS, Inc. **ANSYS Mechanical APDL Element Reference** (Version 2021 R2), 2021a.
- _____. **Theory reference** (Version 2021 R2), 2021b.
- _____. **ANSYS Mechanical APDL Theory reference**. Release 15.0, 2013.
- ANSYS MECHANICAL APDL. Versão 2021 R2. [S.l.]: Ansys Inc, 2021c.
- ARAÚJO, J. M. **Curso de Concreto Armado**, Vol. 1 – 2 – 3 - 4, Dunas, Rio Grande, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de Estruturas de Concreto. Rio de Janeiro, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8681**: Ações e segurança nas estruturas - Procedimento. Rio de Janeiro, 2003.
- ATAÍDE, C. A. V.; CORRÊA, M. R. S. Estudo comparativo entre o método das tensões admissíveis e o método dos estados limites para a alvenaria estrutural. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, São Carlos, v.8, n. 34, p. 105-134, 2006.
- BARBOSA, W. C. S. **Punção em lajes lisas de concreto armado com pilares de canto reentrante**. 2012. 211 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2012.
- BECK, A.T. **Um método para análise de confiabilidade para elementos finitos**. 1999. 194 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1999.

BECK, A.T. **Confiabilidade e Segurança das Estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2019.

BENINCÁ, M. E. **Simulação numérica de vigas alveolares mistas de aço e concreto: modelo parametrizado de elementos finitos**. 2019. 206 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019.

CEN. **Eurocode 2, Design of Concrete Structures—Part 1-1: General Rules and Rules for Buildings**. Brussels, Belgium.

CLÉMENT, T. et al. Influence of prestressing on the punching strength of post-tensioned slabs. **Engineering Structures**, [s. l.], v. 72, p. 56–69, 2014.

COELHO, A. E. G. **Puncionamento em lajes cogumelo de concreto armado com resistência de 30 MPa e armadura de cisalhamento vertical e inclinada**. 1999. 133 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 1999.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Model code 2010**. Bulletin N° 65, 2012.

CORDOVIL, F. A. B. **Lajes de concreto armado: punção**. 225 p. Ed. da UFSC, Florianópolis, 1997.

CORDOVIL, F. A., B.; FUSCO, P. B. Ensaio de placas de concreto armado – Punção excêntrica. In: XXVII JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL, 1995, Tucumán. p. 141-151

CORNELL, C. A. A Probability-Based Structural Code*. **ACI Journal Proceedings**, v. 66, n. 12, p. 974–985, 1969.

COSTA, V. C. M.; OLIVEIRA, D.C.; GOMES, R. B.; GUIMARÃES, G. N. Punção em lajes cogumelo de concreto armado - retangularidade dos pilares. **Revista Eletrônica de Engenharia Civil**. v.5, p.36-46, 2012.

DAMAS, A. P. **Estudo de Confiabilidade no Projeto de Pilares Esbeltos de Concreto de Alta Resistência**. 2015. 184 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

DÍAZ, R. A. S. **Análise numérica da resistência à punção de lajes lisas protendidas com cabos não aderentes**. 2018. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Campinas, 2018.

DREEES E SOMMER. **Austrian-federal-railways-oebb-headquarters**. Disponível em: <<https://www.dreso.at/en-AT/projects/austrian-federal-railways-oebb-headquarters/>>. Acesso em: 21 de jan. 2019.

EINPAUL, J. **Punching shear of continuous flat slabs**. ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE, 2016.

ELSTNER, R. C.; HOGNESTAD, E. Shearing strength of reinforced concrete slabs. **ACI Structural Journal**, v. 53, n. 1, p. 29-58, 1956.

ELLINGWOOD, B.; GALAMBOS, T. V. Probability-based criteria for structural design. **Structural Safety**, v. 1, n. 1, p. 15–26, 1982.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EUROCODE 2: Design of Concrete Structures – Part 1: General Rules and Rules for Building**. Bruxelas, 2004, 226p.

FERREIRA, M. P. **Punção em lajes lisas de concreto armado com armaduras de cisalhamento e momentos desbalanceados**. 2010. 275 p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2010.

GALAMBOS, T. V.; ELLINGWOOD, B.; MACGREGOR, J. G.; CORNELL, C. A. Probability based load criteria: Assessment of current design practice. **Journal of the Structural Division**, v.108, p.959-977, May.1982.

GENIKOMSOU, A. S.; POLAK, M. A. Finite element analysis of punching shear of concrete slabs using damaged plasticity model in ABAQUS. **Engineering Structures**, v. 98, p. 38–48, 2015.

GOMES, H. M. **Técnicas de Avaliação da Confiabilidade em Estruturas de Concreto Armado**. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GOMES, R. B. **Punching resistance of reinforced concrete flat slabs with shear reinforcement**. 1991. 185 p. PhD Thesis, Polytechnic of Central London, London, 1991.

GOMES, R. B.; REGAN, P. E. Punching Resistance of RC Flat Slabs with Shear Reinforcement. **Journal of structural engineering**, [s. l.], v. 125, n. 6, p. 684–692, 1999.

GUANDALINI, S.; BURDET, O. L.; MUTTONI, A. Punching tests of slabs with low reinforcement ratios. **ACI Structural Journal**, [s. l.], v. 106, n. 1, p. 87–95, 2009.

HALDAR, A.; MAHADEVAN, S. **Probability, Reliability, and Statistical Methods in Engineering Design**. JohnWiley & Sons, New York, 2000.

HALVONIK, J.; FILLO, L. The maximum punching shear resistance of flat slabs. **Procedia engineering**, v.65, p.376–381, 2013. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1877705813015658>>.

HINTON, E. **Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells**. Swansea: Pineridge Press Limited, 550p. 1988.

HOLICKY, M; SYKORA, M. **Conventional probabilistic models for calibration of codes**. Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering (ICASP11), London, 2011.

ISO 2394:1998 – **General principles on reliability of structures**. International Standard, 1998

JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY. **JCSS Probabilistic Model Code**. Lyngby, 2001.

LAZZARI, P. M. **Simulação numérica das etapas construtivas de pontes estaiadas através do método dos elementos finitos**. 2016. 301 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

LIBERATI, E. A. P. **Análise de confiabilidade de lajes lisas de concreto armado submetidas à punção**. 2019. 310 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2019.

LIMA, A. W. **Estudo experimental e analítico de punção em lajes lisas de concreto armado utilizando polímeros reforçados com fibra de carbono (PRFC) como armadura de cisalhamento**. 2012. 166 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, 2012.

LOPES COSTA, L. G.; SANTIAGO, W. C.; BECK, A. Probabilistic models for live loads in buildings: critical review, comparison to Brazilian design standards, and calibration of partial safety factors. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, 2022.

MACGREGOR, J. G.; MIRZA, S. A.; ELLINGWOOD, B. Statistical Analysis of Resistance of Reinforced and Prestressed Concrete Members. **Journal of the American Concrete Institute**, v. 80, n. 3, p. 167–176, 1983.

MAMEDE N. F. S.; RAMOS, A. P.; FARIA, D. M. V. Experimental and parametric 3d nonlinear finite element analysis on punching of flat slabs with orthogonal reinforcement. **Engineering Structures**, v. 48, p. 442–457, 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.09.035>>.

MAHMOUD, A. M. Finite element implementation of punching shear behaviors in shear-reinforced flat slabs. **Ain Shams Engineering Journal**, v. 6, n. 3, p. 735–754, 2015. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.asej.2014.12.015>>

MARQUES, M. G. **Punção em lajes lisas de concreto armado com aberturas adjacentes ao pilar e armadura de cisalhamento**. 2018. 259f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Faculdade de Engenharia Civil e Arquitetura, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2018.

MARTINELLI, M. **Modelagem de situações de punção em lajes de concreto armado através do método dos elementos finitos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

MARZOUK, H.; HUSSEIN, A. Experimental Investigation on the Behavior of High-Strength Concrete Slabs. **ACI Structural Journal**. [s. l.], v. 88, n. 6, p. 701–713, 1991.

MELCHERS, R. E.; BECK, A. T. **Structural reliability analysis and prediction**. Hoboken, NJ:Wiley, 2018.

MELGES, J. L. P. **Análise experimental da punção em lajes de concreto armado e protendido**. 2001. 414 p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

MELGES, J. L. P. **Punção em lajes: exemplos de cálculo e análise teórico-experimental**. 1995. 252 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1995.

MIRZA, S. A. ; HATZINIKOLAS, M., Statistical descriptions of strength of concrete. **Journal of the Structural Division**, ASCE, V. 105, No. ST6, pp.1021-1037, 1979.

MIRZA, S. A.; SKRABEK, B. W. Statistical analysis of slender composite beam-column strength. **Journal of Structural Engineering**, v. 118, n. 5, p. 1312–1332, 1992.

MUNHOZ, F. S. **Análise do comportamento de blocos de concreto armado sobre estacas submetidos à ação de força centrada**. 2004. 160 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Departamento de Engenharia, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

MUSSE, T.H. **Punção em Lajes Cogumelo: Fibras de Aço e Armadura de Cisalhamento**. 2004. 189p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2004.

MUTTONI, A. Punching shear strength of reinforced concrete slabs without transverse reinforcement. **ACI Structural Journal**, v. 105, n. 4, p. 440–450, 2008.

MUTTONI, A. et al. Background to fib Model Code 2010 shear provisions - Part II: Punching shear. **Structural Concrete**, v. 14, n. 3, p. 204–214, 2013.

MUTTONI, A.; SCHWARTZ, J. Behaviour of beams and punching in slabs without shear reinforcement. **IABSE Colloquium**, v. 62, p. 703:708, 1991.

NOGUEIRA, H. A. T. **Avaliação da confiabilidade de pilares curtos em concreto armado projetados segundo a NBR 6118 : 2003**. 2006. 146 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.

NOWAK, A. S.; COLLINS, K. R. **Reliability of Structures**. McGraw-Hill Companies, Inc., 2000.

NOWAK, A. S.; RAKOCZY, A. M.; SZELIGA, E. K. Revised Statistical Resistance Models for R/C Structural Components. **ACI Special Publication**, v. 284, 2012.

OLIVEIRA, D. R. C. **Análise Experimental de Lajes Cogumelo de Concreto de Alta Resistência com Armadura Inclinada de Punção**. 1998. 137p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília. Brasília, 1998.

OTTOSEN, N. S. A failure criterion for concrete. **Jornal of Engineering Mechanics Division**, ASCE, v. 103, n. 4, p. 527-535, 1977.

PALIGA, C. M. **Análise probabilística de vigas de concreto armado recuperadas à flexão, através do Método de Monte Carlo utilizando um modelo de elementos finitos**. 2008. 249 p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10183/13455>>.

PEIKKO GROUP CORPORATION. **Typical flat slab building under construction (ÖBB (Austrian Federal Railways) headquarters in Vienna**. Disponível em: <<https://www.newswise.com/articles/media-article/645891>>. Acesso em: 21 de jan. 2019

PINTO, R. C. A. **Punção assimétrica em lajes**. 1993. 145 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1993.

QUEVEDO, F. P. M. **Comportamento a longo prazo de túneis profundos revestidos com concreto: modelo em elementos finitos**. 2017. 209 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

RABELLO, F. T. **Análise comparativa de normas para a punção em lajes de concreto armado**. 2010. 248 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

REAL, M. V. **Análise probabilística de estruturas de concreto armado, sob estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos**. 2000. 249 p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2000. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10183/119135>>.

REGAN, P. E. Symmetric punching of reinforced concrete slabs. **Magazine of Concrete Research**, v. 38, n. 136, p. 115–128, 1986.

REGAN, P. E. Punching of slabs under highly concentrated loads. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Structures and Buildings**, v.157, p. 165–171, 2004.

REGAN, P. E. **Behavior of reinforced concrete flat slabs**. Report 89, Construction Industry Research and Information Association (CIRIA); London, Feb. 1981, p 89.

REGAN, P. E.; BRAESTRUP, M. W. Punching shear in reinforced concrete: a state of the art report. **CEB Bulletin d'Information**, n.168, jan, 1985.

REGAN, P. E.; SAMADIAN, F. Shear reinforcement against punching in reinforced concrete flat slab. **The Structural Engineer**. v. 79, nº 10, p. 24-31, May, 2001.

SAGASETA, J. et al. Non-axis-symmetrical punching shear around internal columns of RC slabs without transverse reinforcement. **Magazine of Concrete Research**, [s. l.], v. 63, n. 6, p. 441–457, 2011.

SAN MARTINS, D. A. **Confiabilidade de vigas pré-tracionadas de concreto protendido**. 2014. 155 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

SANTIAGO, W. C. **Calibração baseada em confiabilidade dos coeficientes parciais de segurança das principais normas brasileiras de projeto estrutural**. 2019. 181 p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2019.

SANTOS, E. V. Dos. **Punção em lajes lisas: métodos de cálculo, prescrições normativas e exemplos de aplicação**. 2018. p. 225. Dissertação de Mestrado - Universidade de Brasília. Faculdade de Tecnologia, Distrito Federal, 2018.

SCIA ENGINEER. Versão 21.1. [S.l.]: SCIA a Nemetschek Company, 2022.

SILVA, G. R. **Análise da confiabilidade da ligação laje-pilar interno sob punção de acordo com a NBR-6118:2014**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

SILVA, G. R.; FILHO, A. C.; REAL, M. V. Reliability of internal column-slab connection under punching according to NBR 6118: 2014. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 11, n. 5, 2018.

SOUZA, R. M. **Punção em lajes lisas de concreto armado com furos adjacentes ao pilar e transferência de momento**. 2008. 407 p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2008. Disponível em: <<http://repositorio.unb.br/handle/10482/1762>>.

SOUZA, V. C. M.; CUNHA, A. J. P. **Lajes em Concreto Armado e Protendido**. Niterói: EDUFF, 1994.

STUCCHI, F. R.; SANTOS, S. H. C.; FRANCO, R. M. Evaluation of the safety criteria of Brazilian Standard NBR 6118 for slender members based on reliability analyses. **Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering**, p. 2761–2767, 2011.

SZERSZEN, M. M.; NOWAK, A. S. Calibration fo Disgn Code for Buildings (ACI 318): Part 2 – Reliability Analysis and Resistance Factors. **ACI Structural Journal**, v. 100. N. 3. 383-391. 2003.

TENG, S. et al. Punching Shear Strength of Slabs with Openings and Supported on Rectangular Columns. **ACI Structural Journal**. [s. l.], n. 101, 2004.

TOMASZEWICZ, A. High Strength Concrete: SP2 - Plates and Shells Report 2.3. Punching Shear Capacity of Reinforced Concrete Slabs. **SINTEF Report**. Norway, 1993.

TQS. Versão 22. São Paulo: TQS Informática, 2022.

TRAUTWEIN, L. M. **Punção em lajes cogumelo de concreto armado com armadura de cisalhamento tipo “stud” interno e tipo estribo inclinado**. 2001. 165 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2001.

TRAUTWEIN, L. M. **Punção em Lajes Cogumelo de Concreto Armado: Análise Experimental e Numérica**. 2006. 350 p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

VROUWENVELDER, A. C. W. M. Developments towards full probabilistic design codes. **Structural Safety**, v. 24, n. 2–4, p. 417–432, 2002.

WALRAVEN, J. C. Fundamental Analysis of Aggregate Interlock. **Journal of Structural Engineering**, ASCE, V. 107, No. 11, 1981, pp. 2245-2270.

WILLAM, K.J.; WARNKE, E.P. **Constitutive models for the triaxial behavior of concrete**. International Association of Bridge Structures, Proceeding, v. 19, p. 1-30, 1975.

APÊNDICE A – SCRIPTS ANSYS APDL 2021 R2

A.1) Validação do modelo MEF R1 por meio da comparação dos resultados da laje SB1 de Adetifa e Polak (2005)

```

!-----
! Determinação de parâmetros de programação - Entrada de dados
!-----
!-----
! Propriedades geométricas
!-----
!
lx=90          ! Comprimento da laje em x (cm)
lz=90          ! Comprimento da laje em z (cm)
l1=5           ! distância da face externa até o apoio (cm)
l2=2           ! largura do apoio em x
l3=20          ! Distância para ajustar a malha
l4=5           ! Distância da face externa até o apoio em z (cm)
l5=2           ! Largura do apoio em z
l6=20          ! Distância para ajustar a malha
lpx=7.5        ! Largura em x do pilar (cm)
lpz=7.5        ! Largura em z do pilar (cm)
h=12           ! Altura da laje (cm)
h2=2           ! espessura da chapa de apoio
hp=15          ! Altura do pilar em relação a base da laje (cm)
nbs=9          ! Numero de barras superior >1
nbi=5          ! Numero de barras inferior >1
nbp=1          ! Numero de barras no pilar
dbp=2          ! Diâmetro da barra de aço do pilar (cm)
dbs=1.13       ! Diâmetro da barra de aço superior (cm)
dbi=1.13       ! Diâmetro da barra de aço inferior (cm)
d1=2.6         ! Cobrimento do concreto (cm)
de1=6          ! Dimensão aproximada do elemento do apoio (cm)
de2=6          ! Dimensão aproximada do elemento afastado do pilar (cm)
de3=6          ! Dimensão aproximada do elemento próximo do pilar (cm)
de4=6          ! Dimensão aproximada do elemento do pilar (cm)
de5=6          ! Dimensão aproximada do elemento na direção da altura da laje (cm)
de6=6          ! Dimensão aproximada do elemento na direção da altura do pilar (cm)
de7=6          ! Dimensão aproximada do elemento na direção da altura do apoio (cm)
sbb=1          ! Distância da borda da laje até a barra de aço (cm)
dp=1.4         ! Carregamento em deslocamento (cm)
interface=0.01 ! Espaço para geração da interface dos apoios
nsub=400       ! Numero de substeps
mf=4           ! Modelo de fissuracao
!-----
! Propriedades dos materiais
!-----
v=0.2          ! Coef. de Poisson do concreto
vs=0.3         ! Coef. de Poisson do aço
fcm=4.4        ! Resistência a compr. do concr. (kN/cm2)
ft=0.22        ! Resistência a tração do concr. (kN/cm2)
fy=45.5        ! Resistência ao escoamento do aço arm. long. (kN/cm2)
ESI=20000      ! Módulo de elasticidade do aço long.
fabrl=0        ! Arm. long.= CA 50, fabrl=0, se for CA 60, fabrl=1
Eci=3648
!-----
! Determinação de parâmetros de programação - cálculo dos parâmetros da análise
!-----
*dim,destelem,array,13

```

```

destelem(1)=de1,de2,de1,de3,de4,de1,de2,de1,de3,de4,de5,de6,de7
*dim,lvol,array,13
lvol(1)=l1,l2,l3,(lx-l1-l2-l3-lpx),lpx,l4,l5,l6,(lz-l4-l5-l6-lpz),lpz,h,hp,h2
*dim,numelem,array,13
*DO,i,1,13,1      ! Numero de elementos
    numelem(i)=nint(lvol(i)/destelem(i))
    *IF,numelem(i),LT,1,THEN
        numelem(i)=1
    *ENDIF
*ENDDO
*dim,delem,array,13
*DO,i,1,13,1
    delem(i)=lvol(i)/numelem(i)
*ENDDO
*dim,dleng,array,27
j=1
k=6
*DO,i,1,25,1
    dleng(i)=(delem(j)*delem(k)*delem(11))**(1/3)
    *IF,j,LT,6,THEN
        j=j+1
    *ELSE
        j=1
        k=k+1
    *ENDIF
*ENDDO
dleng(26)=(delem(5)*delem(10)*delem(12))**(1/3)
dleng(27)=(delem(5)*delem(10)*delem(12))**(1/3)
!
sbi=(lz-2*sbb)/(nbi-1)      ! Espaçamento entre as barras inf. (cm)
sbs=(lz-2*sbb)/(nbs-1)      ! Espaçamento entre as barras sup. (cm)
*IF,nbp,LE,1,THEN
    sbp=lp
*ELSE
    sbp=lp/(nbp-1)
*ENDIF
! -----
! Definição do elemento
! -----
/PREP7
!
ET,1,SOLID186
!
KEYOPT,1,2,1
KEYOPT,1,3,0
KEYOPT,1,6,0
!
ET,2,200,2
!
ET,3,TARGE170
ET,4,CONTA174
R,1
! -----
! Definição do material
! -----
! -----
! CONCRETO - USER - material 1
! -----
*DO,i,1,27,1
    tb,user,i,2,7      ! Material 1, 2 temperaturas, 7 constantes (prop)
    tbtemp,1.0        ! first temp.
    tbddata,1,Eci,v,fc,ft,dleng(i),mf ! temp 1, constantes
    tbddata,,i

```

```

        tb,state,1,,9
*ENDDO
! -----
! ARMADURA BARRAS LONGITUDINAIS - material 28
! -----
*IF,fabrl,EQ,1,THEN
    FY2=fy*0.85
    EPSLONY2=FY2/ESI
    EPSLONU2=0.01
    ES22=.15*fy/(0.01-fy/ESI)
    FU2 = (EPSLONU2-EPSLONY2)*ES22+FY2
*ELSE
    FY2=fy
    ES22=ESI/100
*ENDIF
! -----
! Modelo Linear Isotrópico
! -----
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,28,,ESI
MPDATA,PRXY,28,,vs
! -----
! Modelo Bilinear
! -----
TB,BISO,28,1,2,
TBTEMP,0
TBDATA,,FY2,ES22,,
! -----
! INTERFACE - material 29
! -----
MP,MU,29,0
! -----
! Definição da geometria
! -----
BLOCK,0,l1,0,h,0,l4,
BLOCK,l1,l1+l2,0,h,0,l4,
BLOCK,l1+l2,l1+l2+l3,0,h,0,l4,
BLOCK,l1+l2+l3,lx-lpx,0,h,0,l4,
BLOCK,lx-lpx,lx,0,h,0,l4,
!
BLOCK,0,l1,0,h,l4,l4+l5,
BLOCK,l1,l1+l2,0,h,l4,l4+l5,
BLOCK,l1+l2,l1+l2+l3,0,h,l4,l4+l5,
BLOCK,l1+l2+l3,lx-lpx,0,h,l4,l4+l5,
BLOCK,lx-lpx,lx,0,h,l4,l4+l5,
!
BLOCK,0,l1,0,h,l4+l5,l4+l5+l6,
BLOCK,l1,l1+l2,0,h,l4+l5,l4+l5+l6,
BLOCK,l1+l2,l1+l2+l3,0,h,l4+l5,l4+l5+l6,
BLOCK,l1+l2+l3,lx-lpx,0,h,l4+l5,l4+l5+l6,
BLOCK,lx-lpx,lx,0,h,l4+l5,l4+l5+l6,
!
BLOCK,0,l1,0,h,l4+l5+l6,lz-lpz,
BLOCK,l1,l1+l2,0,h,l4+l5+l6,lz-lpz,
BLOCK,l1+l2,l1+l2+l3,0,h,l4+l5+l6,lz-lpz,
BLOCK,l1+l2+l3,lx-lpx,0,h,l4+l5+l6,lz-lpz,
BLOCK,lx-lpx,lx,0,h,l4+l5+l6,lz-lpz,
!
BLOCK,0,l1,0,h,lz-lpz,lz,
BLOCK,l1,l1+l2,0,h,lz-lpz,lz,
BLOCK,l1+l2,l1+l2+l3,0,h,lz-lpz,lz,
BLOCK,l1+l2+l3,lx-lpx,0,h,lz-lpz,lz,

```

```

BLOCK,lx-lpx,lx,0,h,lz-lpz,lz,
!
BLOCK,lx-lpx,lx,-hp,0,lz-lpz,lz,
BLOCK,lx-lpx,lx,h,h+hp,lz-lpz,lz,
!
BLOCK,l1+l2,l1+l2+l3,h+interface,h+interface+h2,l4,l4+l5, !V28
BLOCK,l1+l2+l3,lx-lpx,h+interface,h+interface+h2,l4,l4+l5,
BLOCK,lx-lpx,lx,h+interface,h+interface+h2,l4,l4+l5,
!
BLOCK,l1,l1+l2,h+interface,h+interface+h2,l4+l5,l4+l5+l6,
BLOCK,l1,l1+l2,h+interface,h+interface+h2,l4+l5+l6,lz-lpz,
BLOCK,l1,l1+l2,h+interface,h+interface+h2,lz-lpz,lz,
!
! -----
! Definição da malha
! -----
NUMMRG,ALL, , , ,LOW
NUMCMP,NODE ! Renumera os nós
!
ALLSEL
!
LSEL,U,LOC,X,lx,l1
LSEL,U,LOC,X,0
LESIZE,all, , ,numelem(1), , , ,1
!
ALLSEL
!
LSEL,U,LOC,X,lx,l1+l2
LSEL,U,LOC,X,l1,0
LESIZE,all, , ,numelem(2), , , ,1
!
ALLSEL
!
LSEL,U,LOC,X,lx,l1+l2+l3
LSEL,U,LOC,X,l1+l2,0
LESIZE,all, , ,numelem(3), , , ,1
!
ALLSEL
!
LSEL,U,LOC,X,lx,lx-lpx
LSEL,U,LOC,X,l1+l2+l3,0
LESIZE,all, , ,numelem(4), , , ,1
!
ALLSEL
!
LSEL,U,LOC,X,lx
LSEL,U,LOC,X,lx-lpx,0
LESIZE,all, , ,numelem(5), , , ,1
!
ALLSEL
!
LSEL,U,LOC,Z,lz,l4
LSEL,U,LOC,Z,0
LESIZE,all, , ,numelem(6), , , ,1
!
ALLSEL
!
LSEL,U,LOC,Z,lz,l4+l5
LSEL,U,LOC,Z,l4,0
LESIZE,all, , ,numelem(7), , , ,1
!
ALLSEL
!

```

```

LSEL,U,LOC,Z,lz,l4+l5+l6
LSEL,U,LOC,Z,l4+l5,0
LESIZE,all,, ,numelem(8), , , ,1
!
ALLSEL
!
LSEL,U,LOC,Z,lz,lz-lpz
LSEL,U,LOC,Z,l4+l5+l6,0
LESIZE,all,, ,numelem(9), , , ,1
!
ALLSEL
!
LSEL,U,LOC,Z,lz
LSEL,U,LOC,Z,lz-lpz,0
LESIZE,all,, ,numelem(10), , , ,1
!
ALLSEL
!
VSEL,U,LOC,Y,h,h+hp
VSEL,U,LOC,Y,-hp,0
ASLV,S
LSLA,S
LSEL,U,LOC,Y,0
LSEL,U,LOC,Y,h
!
LESIZE,all,, ,numelem(11), , , ,1
!
ALLSEL
!
VSEL,S, , ,26
ASLV,S
LSLA,S
LSEL,U,LOC,Y,0
LSEL,U,LOC,Y,-hp
!
LESIZE,all,, ,numelem(12), , , ,1
!
ALLSEL
!
VSEL,S, , ,27
ASLV,S
LSLA,S
LSEL,U,LOC,Y,h
LSEL,U,LOC,Y,h+hp
!
LESIZE,all,, ,numelem(12), , , ,1
!
VSEL,S, , ,28
VSEL,A, , ,29
VSEL,A, , ,30
VSEL,A, , ,31
VSEL,A, , ,32
VSEL,A, , ,33
ASLV,S
LSLA,S
LSEL,U,LOC,Y,h+interface
LSEL,U,LOC,Y,h+h2+interface
LESIZE,all,, ,numelem(13), , , ,1
!
*DO,i,1,27,1
    VSEL,S, , ,i
    TYPE,1
    MAT,i

```

```

        MSHAPE,0,3D
        MSHKEY,1
        VMESH,all
*ENDDO
!
VSEL,S,,28
VSEL,A,,29
VSEL,A,,30
VSEL,A,,31
VSEL,A,,32
VSEL,A,,33
TYPE,1
MAT,28
MSHAPE,0,3D
MSHKEY,1
VMESH,all
!
allsel
!-----
!                               ARMADURA INCORPORADA - REINF264
!-----
!
Ass=3.14159265359*(dbs*dbs)/4
!
sect,1,REINF,DISC
secdata,28,Ass,mesh
!
TYPE,2
MAT,28
SECNUM,1
!
*get,lastkp,kp,0,num,maxd
*get,lastline,line,0,num,maxd
ii=0
*DO,i,1,nbs
    lastline=lastline+2
    NUMSTR,LINE,lastline
    kpix=lastkp+i
    kpfx=kpix+1
    kpiz=kpfx+1
    kpz=kpiz+1
    lastkp=lastkp+3
    K,kpix,sbb,h-d1,sbb+ii*sbs
    K,kpfx,lx,h-d1,sbb+ii*sbs
    K,kpiz,sbb+ii*sbs,h-d1-dbs,sbb
    K,kpiz,sbb+ii*sbs,h-d1-dbs,lz
    L,kpix,kpfx
    L,kpiz,kpiz
    LESIZE,all,,1
    LMESH,lastline,lastline+1
    ii=i
*ENDDO
!
allsel
!
Asi=3.14159265359*(dbi*dbi)/4
!
sect,2,REINF,DISC
secdata,28,Asi,mesh
!
TYPE,2
MAT,28
SECNUM,2

```



```

!
*get,lastkp,kp,0,num,maxd
*get,lastline,line,0,num,maxd
ii=0
*DO,i,1,nbi
    lastline=lastline+2
    NUMSTR,LINE,lastline
    kpix=lastkp+i
    kpx=kpix+1
    kpiz=kpix+1
    kpz=kpiz+1
    lastkp=lastkp+3
    K,kpix,sbb,d1,sbb+ii*sbi
    K,kpix,lx,d1,sbb+ii*sbi
    K,kpiz,sbb+ii*sbi,d1+dbi,sbb
    K,kpiz,sbb+ii*sbi,d1+dbi,lz
    L,kpix,kpx
    L,kpiz,kpz
    LESIZE,all,,1
    LMESH,lastline,lastline+1
    ii=i
*ENDDO
!
allsel
!
Asp=3.14159265359*(dbp*dbp)/4
!
sect,3,REINF,DISC
secdata,28,Asp,mesh
!
TYPE,2
MAT,28
SECNUM,3
!
*get,lastkp,kp,0,num,maxd
*get,lastline,line,0,num,maxd
ii=0
*DO,i,1,nbp
    lastline=lastline+1
    NUMSTR,LINE,lastline
    kpiy=lastkp+i
    kpfy=kpiy+1
    lastkp=lastkp+1
    K,kpiy,lx-lpx+d1,-hp,lz-lpz+d1
    K,kpfy,lx-lpx+d1,h+hp,lz-lpz+d1
    L,kpiy,kpfy
    ii=i
    LESIZE,all,,1
    LMESH,lastline
*ENDDO
!
ALLSEL
EREINF
!-----
! Propriedades gráficas
!-----
ALLSEL
ESEL,S,TYPE,,1
/TRLCY,ELEM,0.7,all
/COLOR,ELEM,DGRA
ALLSEL,ALL
/ESHAPE,1.0
ESEL,S,TYPE,,2

```

```

/COLOR,ELEM,BLUE
ALLSEL,ALL
/REPLOT
!-----
! ELEMENTOS DE CONTATO (INTERFACE)
!-----
VSEL,S,,,8
VSEL,A,,,9
VSEL,A,,,10
VSEL,A,,,12
VSEL,A,,,17
VSEL,A,,,22
ASLV,S,
ASEL,R,LOC,Y,H
!
REAL,1 !Define constante real(identifica par de contato)
TYPE,3 !Elemento TARGE170
MAT,29
ESYS,0
SECNUM,,
!
AMESH,all
!
ALLSEL
REAL,1 !Define constante real(identifica par de contato)
TYPE,4 !Elemento CONTA174
MAT,29
ESYS,0
SECNUM,,
!
VSEL,S,,,28
VSEL,A,,,29
VSEL,A,,,30
VSEL,A,,,31
VSEL,A,,,32
VSEL,A,,,33
ASLV,S,
ASEL,R,LOC,Y,h+interface
!
NSLA,S,1 !Seleciona os nós associados as áreas selecionadas
ESLN,S,0 !Seleciona os elementos associados aos nós selecionados
ESURF !Gera elementos TARGE
!
ALLSEL
!
!-----
! Restricoes nos apoios
!-----
!
NSEL,S,LOC,Y,h+h2+interface
d,all,all,0
!
allsel
!
! Simetria
!
NSEL,S,LOC,Z,lz
d,all,uz,0
allsel
!
NSEL,S,LOC,X,lx
d,all,ux,0
allsel

```

```

!-----
! ANÁLISE NÃO-LINEAR
!
! INCREMENTO DE DESLOCAMENTO
!-----
!-----
!                               CARREGAMENTO
!-----
/SOLU
!
NSEL,S,LOC,Y,-hp
d,all,uy,dp
allsel
!
PSCONTROL,ALL,OFF
antype,0
solcontrol,on
nropt,full,,on
eqslv,spar,,0,
!
autots,on
nsubst,nsub,10000,nsub
ncnv,2,,
neqit,20
CNVTOL,F, ,0.05,2,1
CNVTOL,U, ,0.05,2,1
outres,all,4
!
time,1
eresx,no
!
LSWRITE,1,
!
FINISH
/SOLU
LSSOLVE,1,1,1,
FINISH
!-----
! POST-PROCESS
!-----
/POST26
!-----
! Rotina para se fazer o gráfico carga-deslocamento quando se usa
! incremento de deslocamento
!-----
NUMVAR,200          ! Número máximo de variáveis armazenadas
!
*SET,FATOR1,1.00    ! Fator para multiplicar o deslocamento se necessário
!                  ! (por exemplo: torna positivos os deslocamentos)
*SET,FATOR2,-4.00  ! Fator para multiplicar a carga se necessário
!                  ! (por exemplo: Ptotal = 4xP)
nsel,s,loc,y,-hp
nsel,r,loc,x,lx
nsel,r,loc,z,lz
!
*GET,NCD,NODE,0,NUM,MIN
*SET,NNUY,ncd      ! Número do nó do qual se quer fazer o gráfico carga-
!                  ! deslocamento (ver listagem dos nós com coordenadas)
!
/AXLAB,Y,CARGA P    ! Label Y
/AXLAB,X,FLECHA UY  ! Label X
NSOL,2,NNUY,U,y    ! Especifica o nó cujo deslocamento Uy vai ser plotado.
NSOL,3,1,U,Z       ! Variável muda, serve para armazenar a soma das reações

```

```

!           ! (corresponde ao deslocamento UZ do nó 1).
!
NSEL,S,LOC,Y,h+h2+interface
!
*GET,NUMNOD,NODE,0,COUNT      ! Captura o número de nós de onde estão as
!           ! reações.
*GET,CURNOD,NODE,0,NUM,MIN    ! Captura o menor número do nó nos nós selecionado
!
*DO,I,1,NUMNOD               ! Laço que faz a soma das reações Fy dos nós selecionados antes.
RFORCE,4,CURNOD,F,y
ADD,3,3,4,SOMA
CURNOD=NDNEXT(CURNOD)
*ENDDO
!
PROD,2,2,,,,,FATOR1         ! Ajuste dos deslocamentos pelo fator FATOR1
PROD,3,3,,,,,FATOR2         ! Ajuste das cargas pelo fator FATOR2
!
XVAR,2                       ! Plota os deslocamentos no eixo X
PLVAR,3                       ! Plota a carga total no eixo Y
*GET,npts,VARI,3,NSETS,
nrupt=npts-2
*GET,fr,VARI,3,RSET,nrupt
PARSAV,SCALAR,PARR,TXT,
!
ALLSEL,ALL
FINISH

```

A.2) Validação do modelo MEF R2 por meio da comparação dos resultados da laje SB1 de Adetifa e Polak (2005)

```

!-----
! Determinação de parâmetros de programação - Entrada de dados
!-----
!-----
! Propriedades geométricas
!-----
!
lx=90          ! Comprimento da laje em x (cm)
lz=90          ! Comprimento da laje em z (cm)
l1=15         ! distância da face externa até o apoio (cm)
l2=2          ! largura do apoio em x
l3=20         ! Distância para ajustar a malha
l4=15         ! Distância da face externa até o apoio em z (cm)
l5=2          ! Largura do apoio em z
l6=20         ! Distância para ajustar a malha
lpx=7.5       ! Largura em x do pilar (cm)
lpz=7.5       ! Largura em z do pilar (cm)
h=12          ! Altura da laje (cm)
h2=2          ! espessura da chapa de apoio
hp=15         ! Altura do pilar em relação a base da laje (cm)
nbs=9         ! Numero de barras superior >1
nbi=5         ! Numero de barras inferior >1
nbp=1         ! Numero de barras no pilar
dbp=2         ! Diâmetro da barra de aço do pilar (cm)
dbs=1.13     ! Diâmetro da barra de aço superior (cm)
dbi=1.13     ! Diâmetro da barra de aço inferior (cm)
d1=2.57      ! Cobrimento do concreto (cm)
de1=10       ! Dimensão aproximada do elemento do apoio (cm)
de2=10       ! Dimensão aproximada do elemento afastado do pilar (cm)
de3=10       ! Dimensão aproximada do elemento próximo do pilar (cm)
de4=10       ! Dimensão aproximada do elemento do pilar (cm)
de5=10       ! Dimensão aproximada do elemento na direção da altura da laje (cm)
de6=5        ! Dimensão aproximada do elemento na direção da altura do pilar (cm)
de7=5        ! Dimensão aproximada do elemento na direção da altura do apoio (cm)
sbb=1        ! Distância da borda da laje até a barra de aço (cm)
dpilar=1.4   ! Carregamento em deslocamento (cm)
interface=0.01 ! Espaço para geração da interface dos apoios
nsub=600     ! Numero de substeps
!-----
! Propriedades dos materiais
!-----
v=0.2        ! Coef. de Poisson do concreto
vs=0.3       ! Coef. de Poisson do aço
fcm=4.4      ! Resistência a compr. do concr. (kN/cm2)
ft=0.22      ! Resistência a tração do concr. (kN/cm2)
fy=45.5      ! Resistência ao escoamento do aço arm. long. (kN/cm2)
ESl=20000    ! Módulo de elasticidade do aço long.
fabrl=0      ! Arm. long.= CA 50, fabrl=0, se for CA 60, fabrl=1
Eci=3648
Ec=Eci
!-----
! Determinação de parâmetros de programação - cálculo dos parâmetros da análise
!-----
*dim,destelem,array,13
destelem(1)=de1,de2,de1,de3,de4,de1,de2,de1,de3,de4,de5,de6,de7
*dim,lvol,array,13
lvol(1)=l1,l2,l3,(lx-l1-l2-l3-lpx),lpx,l4,l5,(lz-l4-l5-l6-lpz),lpz,h,hp,h2
*dim,numelem,array,13

```

```

*DO,i,1,13,1          ! Numero de elementos
    numelem(i)=nint(lvol(i)/destelem(i))
    *IF,numelem(i),LT,1,THEN
        numelem(i)=1
    *ENDIF
*ENDDO
!
sbi=(lz-2*sbb)/(nbi-1)    ! Espaçamento entre as barras inf. (cm)
sbs=(lz-2*sbb)/(nbs-1)    ! Espaçamento entre as barras sup. (cm)
*IF,nbp,LE,1,THEN
    sbp=lp*x
*ELSE
    sbp=lp/(nbp-1)
*ENDIF
! -----
! Definição do elemento
! -----
/PREP7
!
ET,1,SOLID186
!
KEYOPT,1,2,1
KEYOPT,1,3,0
KEYOPT,1,6,0
!
ET,2,200,2 !MESH 200 para modelagem das armaduras
!
ET,3,TARGE170
ET,4,CONTA174
R,1
! -----
! Definição do material
! -----
! CONCRETO - DP_DP_HSD6 - material 1
! -----
Rc=fc
Rt=ft
Rb=fc*(1.2-fc/100)
ep1=-0.000009*(fc-0.8)**2+0.0002*(fc-0.8)+0.0017
kcm=ep1-fc/Ec
omegaci=0.4
omegacr=0.1
ktr=0.002
omegatr=0.02
kcr=0.0035-omegacr*fc/Ec
deltat=1
deltac=1
!
MP,EX,1,Ec
MP,NUXY,1,v
!
TB,CONCR,1,,,DP
tbdata,1,Rc,,Rb
!
TB,CONCR,1,,,RCUT
tbdata,1,Rt
!
TB,CONCR,1,,,DILA
tbdata,1,,deltac
!
TB,CONCR,1,,,HSD6
TBDATA,1,kcm,kcr,omegaci,omegacr,ktr,omegatr

```

```

!
! -----
! ARMADURA BARRAS LONGITUDINAIS - material 2
! -----
*IF,fabrl,EQ,1,THEN
    FY2=fy*0.85
    EPSLONY2=FY2/ESI
    EPSLONU2=0.01
    ES22=.15*fy/(0.01-fy/ESI)
    FU2 = (EPSLONU2-EPSLONY2)*ES22+FY2
*ELSE
    FY2=fy
    ES22=ESI/100
*ENDIF
! -----
! Modelo Linear Isotrópico
! -----
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,2,,ESI
MPDATA,PRXY,2,,vs
! -----
! Modelo Bilinear
! -----
TB,BISO,2,1,2,
TBTEMP,0
TBDATA,,FY2,ES22,,
! -----
! INTERFACE - material 3
! -----
MP,MU,3,0
! -----
! Definição da geometria
! -----
BLOCK,0,l1,0,h,0,l4,
BLOCK,l1,l1+l2,0,h,0,l4,
BLOCK,l1+l2,l1+l2+l3,0,h,0,l4,
BLOCK,l1+l2+l3,lx-lpx,0,h,0,l4,
BLOCK,lx-lpx,lx,0,h,0,l4,
!
BLOCK,0,l1,0,h,l4,l4+l5,
BLOCK,l1,l1+l2,0,h,l4,l4+l5,
BLOCK,l1+l2,l1+l2+l3,0,h,l4,l4+l5,
BLOCK,l1+l2+l3,lx-lpx,0,h,l4,l4+l5,
BLOCK,lx-lpx,lx,0,h,l4,l4+l5,
!
BLOCK,0,l1,0,h,l4+l5,l4+l5+l6,
BLOCK,l1,l1+l2,0,h,l4+l5,l4+l5+l6,
BLOCK,l1+l2,l1+l2+l3,0,h,l4+l5,l4+l5+l6,
BLOCK,l1+l2+l3,lx-lpx,0,h,l4+l5,l4+l5+l6,
BLOCK,lx-lpx,lx,0,h,l4+l5,l4+l5+l6,
!
BLOCK,0,l1,0,h,l4+l5+l6,lz-lpz,
BLOCK,l1,l1+l2,0,h,l4+l5+l6,lz-lpz,
BLOCK,l1+l2,l1+l2+l3,0,h,l4+l5+l6,lz-lpz,
BLOCK,l1+l2+l3,lx-lpx,0,h,l4+l5+l6,lz-lpz,
BLOCK,lx-lpx,lx,0,h,l4+l5+l6,lz-lpz,
!
BLOCK,0,l1,0,h,lz-lpz,lz,
BLOCK,l1,l1+l2,0,h,lz-lpz,lz,
BLOCK,l1+l2,l1+l2+l3,0,h,lz-lpz,lz,
BLOCK,l1+l2+l3,lx-lpx,0,h,lz-lpz,lz,
BLOCK,lx-lpx,lx,0,h,lz-lpz,lz,

```

```

!
BLOCK,lx-lpx,lx,-hp,0,lz-lpz,lz,
BLOCK,lx-lpx,lx,h,h+hp,lz-lpz,lz,
!
BLOCK,l1+l2,l1+l2+l3,h+interface,h+interface+h2,l4,l4+l5, !V28
BLOCK,l1+l2+l3,lx-lpx,h+interface,h+interface+h2,l4,l4+l5,
BLOCK,lx-lpx,lx,h+interface,h+interface+h2,l4,l4+l5,
!
BLOCK,l1,l1+l2,h+interface,h+interface+h2,l4+l5,l4+l5+l6,
BLOCK,l1,l1+l2,h+interface,h+interface+h2,l4+l5+l6,lz-lpz,
BLOCK,l1,l1+l2,h+interface,h+interface+h2,lz-lpz,lz,
!
! -----
! Definição da malha
! -----
NUMMRG,ALL, , , ,LOW
NUMCMP,NODE ! Renumerar os nós
!
ALLSEL
!
LSEL,U,LOC,X,lx,l1
LSEL,U,LOC,X,0
LESIZE,all, , , numelem(1), , , ,1
!
ALLSEL
!
LSEL,U,LOC,X,lx,l1+l2
LSEL,U,LOC,X,l1,0
LESIZE,all, , , numelem(2), , , ,1
!
ALLSEL
!
LSEL,U,LOC,X,lx,l1+l2+l3
LSEL,U,LOC,X,l1+l2,0
LESIZE,all, , , numelem(3), , , ,1
!
ALLSEL
!
LSEL,U,LOC,X,lx,lx-lpx
LSEL,U,LOC,X,l1+l2+l3,0
LESIZE,all, , , numelem(4), , , ,1
!
ALLSEL
!
LSEL,U,LOC,X,lx
LSEL,U,LOC,X,lx-lpx,0
LESIZE,all, , , numelem(5), , , ,1
!
ALLSEL
!
LSEL,U,LOC,Z,lz,l4
LSEL,U,LOC,Z,0
LESIZE,all, , , numelem(6), , , ,1
!
ALLSEL
!
LSEL,U,LOC,Z,lz,l4+l5
LSEL,U,LOC,Z,l4,0
LESIZE,all, , , numelem(7), , , ,1
!
ALLSEL
!
LSEL,U,LOC,Z,lz,l4+l5+l6

```



```

LSEL,U,LOC,Z,l4+l5,0
LESIZE,all,, ,numelem(8), , , ,1
!
ALLSEL
!
LSEL,U,LOC,Z,lz,lz-lpz
LSEL,U,LOC,Z,l4+l5+l6,0
LESIZE,all,, ,numelem(9), , , ,1
!
ALLSEL
!
LSEL,U,LOC,Z,lz
LSEL,U,LOC,Z,lz-lpz,0
LESIZE,all,, ,numelem(10), , , ,1
!
ALLSEL
!
VSEL,U,LOC,Y,h,h+hp
VSEL,U,LOC,Y,-hp,0
ASLV,S
LSLA,S
LSEL,U,LOC,Y,0
LSEL,U,LOC,Y,h
!
LESIZE,all,, ,numelem(11), , , ,1
!
ALLSEL
!
VSEL,S, , ,26
ASLV,S
LSLA,S
LSEL,U,LOC,Y,0
LSEL,U,LOC,Y,-hp
!
LESIZE,all,, ,numelem(12), , , ,1
!
ALLSEL
!
VSEL,S, , ,27
ASLV,S
LSLA,S
LSEL,U,LOC,Y,h
LSEL,U,LOC,Y,h+hp
!
LESIZE,all,, ,numelem(12), , , ,1
!
VSEL,S, , ,28
VSEL,A, , ,29
VSEL,A, , ,30
VSEL,A, , ,31
VSEL,A, , ,32
VSEL,A, , ,33
ASLV,S
LSLA,S
LSEL,U,LOC,Y,h+interface
LSEL,U,LOC,Y,h+h2+interface
LESIZE,all,, ,numelem(13), , , ,1
!
*DO,i,1,27,1
    VSEL,S, , ,i
    TYPE,1
    MAT,1
    MSHAPE,0,3D

```

```

      MSHKEY,1
      VMESH,all
*ENDDO
!
VSEL,S,,28
VSEL,A,,29
VSEL,A,,30
VSEL,A,,31
VSEL,A,,32
VSEL,A,,33
TYPE,1
MAT,2
MSHAPE,0,3D
MSHKEY,1
VMESH,all
!
allsel
!-----
!                               ARMADURA INCORPORADA - REINF264
!-----
!
Ass=3.14159265359*(dbs*dbs)/4
!
sect,1,REINF,DISC
secdata,2,Ass,mesh
!
TYPE,2
MAT,2
SECNUM,1
!
*get,lastkp,kp,0,num,maxd
*get,lastline,line,0,num,maxd
ii=0
*DO,i,1,nbs
      lastline=lastline+2
      NUMSTR,LINE,lastline
      kpix=lastkp+i
      kpx=kpix+1
      kpiz=kpix+1
      kpfz=kpix+1
      lastkp=lastkp+3
      K,kpix,sbb,h-d1,sbb+ii*sbs
      K,kpix,lx,h-d1,sbb+ii*sbs
      K,kpiz,sbb+ii*sbs,h-d1-dbs,sbb
      K,kpfz,sbb+ii*sbs,h-d1-dbs,lz
      L,kpix,kpx
      L,kpiz,kpfz
      LESIZE,all,,1
      LMESH,lastline,lastline+1
      ii=i
*ENDDO
!
allsel
!
Asi=3.14159265359*(dbi*dbi)/4
!
sect,2,REINF,DISC
secdata,2,Asi,mesh
!
TYPE,2
MAT,2
SECNUM,2
!

```

```

*get,lastkp,kp,0,num,maxd
*get,lastline,line,0,num,maxd
ii=0
*DO,i,1,nbi
    lastline=lastline+2
    NUMSTR,LINE,lastline
    kpix=lastkp+i
    kpx=kpix+1
    kpiz=kpix+1
    kpfz=kpix+1
    lastkp=lastkp+3
    K,kpix,sbb,d1,sbb+ii*sbi
    K,kpx,lx,d1,sbb+ii*sbi
    K,kpiz,sbb+ii*sbi,d1+dbi,sbb
    K,kpfz,sbb+ii*sbi,d1+dbi,lz
    L,kpix,kpx
    L,kpiz,kpfz
    LESIZE,all,,,1
    LMESH,lastline,lastline+1
    ii=i
*ENDDO
!
allsel
!
Asp=3.14159265359*(dbp*dbp)/4
!
sect,3,REINF,DISC
secdata,2,Asp,mesh
!
TYPE,2
MAT,2
SECNUM,3
!
*get,lastkp,kp,0,num,maxd
*get,lastline,line,0,num,maxd
ii=0
*DO,i,1,nbp
    lastline=lastline+1
    NUMSTR,LINE,lastline
    kpiy=lastkp+i
    kpfy=kpiy+1
    lastkp=lastkp+1
    K,kpiy,lx-lpx+d1,-hp,lz-lpz+d1
    K,kpfy,lx-lpx+d1,h+hp,lz-lpz+d1
    L,kpiy,kpfy
    ii=i
    LESIZE,all,,,1
    LMESH,lastline
*ENDDO
!
ALLSEL
EREINF
!-----
! Propriedades gráficas
!-----
ALLSEL
ESEL,S,TYPE,,1
/TRLCY,ELEM,0.7,all
/COLOR,ELEM,DGRA
ALLSEL,ALL
/ESHAPE,1.0
ESEL,S,TYPE,,2
/COLOR,ELEM,BLUE

```

```

ALLSEL,ALL
/REPLOT
!-----
! ELEMENTOS DE CONTATO (INTERFACE)
!-----
VSEL,S,,8
VSEL,A,,9
VSEL,A,,10
VSEL,A,,12
VSEL,A,,17
VSEL,A,,22
ASLV,S,
ASEL,R,LOC,Y,H
!
REAL,1 !Define constante real(identifica par de contato)
TYPE,3 !Elemento TARGE170
MAT,3
ESYS,0
SECNUM,,
!
AMESH,all
!
ALLSEL
REAL,1 !Define constante real(identifica par de contato)
TYPE,4 !Elemento CONTA174
MAT,3
ESYS,0
SECNUM,,
!
VSEL,S,,28
VSEL,A,,29
VSEL,A,,30
VSEL,A,,31
VSEL,A,,32
VSEL,A,,33
ASLV,S,
ASEL,R,LOC,Y,h+interface
!
NSLA,S,1 !Seleciona os nós associados as áreas selecionadas
ESLN,S,0 !Seleciona os elementos associados aos nós selecionados
ESURF !Gera elementos TARGE
!
ALLSEL
!
!-----
! Restricoes nos apoios
!-----
!
NSEL,S,LOC,Y,h+h2+interface
d,all,all,0
!
allsel
!
! Simetria
!
NSEL,S,LOC,Z,lz
d,all,uz,0
allsel
!
NSEL,S,LOC,X,lx
d,all,ux,0
allsel
!-----

```

```

! ANÁLISE NÃO-LINEAR
!
! INCREMENTO DE DESLOCAMENTO
!-----
!-----
!
!                               CARREGAMENTO
!-----
/SOLU
!
NSEL,S,LOC,Y,-hp
d,all,uy,dpilar
allsel
!
PSCONTROL,ALL,OFF
antype,0
solcontrol,on
nropt,full,,on
eqslv,spar,,0,
!
autots,on
nsubst,nsub,10000,nsub
ncnv,2,,
neqit,20
!CNVTOL,F, ,0.05,2,1
!CNVTOL,U, ,0.05,2,1
outres,all,4
!
time,1
eresx,no
!
LSWRITE,1,
!
FINISH
/SOLU
LSSOLVE,1,1,1,
FINISH
!-----
! POST-PROCESS
!-----
/POST26
!-----
! Rotina para se fazer o gráfico carga-deslocamento quando se usa
! incremento de deslocamento
!-----
NUMVAR,200          ! Número máximo de variáveis armazenadas
!
*SET,FATOR1,1.00    ! Fator para multiplicar o deslocamento se necessário
!                  ! (por exemplo: torna positivos os deslocamentos)
*SET,FATOR2,-4.00  ! Fator para multiplicar a carga se necessário
!                  ! (por exemplo: Ptotal = 4xP)
nset,s,loc,y,-hp
nset,r,loc,x,lx
nset,r,loc,z,lz
!
*GET,NCD,NODE,0,NUM,MIN
*SET,NNUY,ncd      ! Número do nó do qual se quer fazer o gráfico carga-
!                  ! deslocamento (ver listagem dos nós com coordenadas)
!
/AXLAB,Y,CARGA P    ! Label Y
/AXLAB,X,FLECHA UY  ! Label X
NSOL,2,NNUY,U,y     ! Especifica o nó cujo deslocamento Uy vai ser plotado.
NSOL,3,1,U,Z        ! Variável muda, serve para armazenar a soma das reações
!                  ! (corresponde ao deslocamento UZ do nó 1).

```

```

!
NSEL,S,LOC,Y,h+h2+interface
!
*GET,NUMNOD,NODE,0,COUNT      ! Captura o número de nós de onde estão as
!                             ! reações.
*GET,CURNOD,NODE,0,NUM,MIN    ! Captura o menor número do nó nos nós selecionado
!
*DO,I,1,NUMNOD                ! Laço que faz a soma das reações Fy dos nós selecionados antes.
RFORCE,4,CURNOD,F,y
ADD,3,3,4,SOMA
CURNOD=NDNEXT(CURNOD)
*ENDDO
!
PROD,2,2,,,,,FATOR1          ! Ajuste dos deslocamentos pelo fator FATOR1
PROD,3,3,,,,,FATOR2          ! Ajuste das cargas pelo fator FATOR2
!
XVAR,2                        ! Plota os deslocamentos no eixo X
PLVAR,3                        ! Plota a carga total no eixo Y
*GET,npts,VARI,3,NSETS,
nrupt=npts-2
*GET,fr,VARI,3,RSET,nrupt
PARSAV,SCALAR,PARR,TXT,
!
ALLSEL,ALL
FINISH

```

A.3) Exemplo de script para o modelo S1

```

! *****
! Programador: Gustavo Ribeiro da Silva
! Data:
! Nome arquivo:
! unidades: cm, kN
! *****
!
!-----
! Propriedades geométricas
!-----
!
dpx=800          ! Distancia entre pilares
dpz=dpz         ! Distancia entre pilares
lx=4*dpx        ! Comprimento da laje em x (cm)
lz=lx           ! Comprimento da laje em z (cm)
hp=300          ! Altura do pilar
h=16            ! Altura da laje (cm)
lpx=25          ! Largura em x do pilar (cm)
lpz=lpz         ! Largura em z do pilar (cm)
spts=25         ! espacamento da malha
np=50           ! Malha do pilar
locx=1000       ! localizacao do DMF1
npx=(lx)/dpx+1
npz=(lz)/dpz+1
!-----
! Propriedades dos materiais
!-----
!
v=0.2           ! Coef. de Poisson do concreto
fck=3
!-----
! Determinação das variáveis aleatorias
!-----
cg=25*h/100+1
cq=2
!-----
! Determinação de parâmetros de programação - cálculo dos parâmetros da análise
!-----
!
vfc=0.15
fcm=fck/(1-1.645*vfc) ! Resistência média a comp. do concr. (kN/cm2)
Eci=2150*fcm**(1/3)   ! Modulo de elasticidade do concreto (kN/cm2)
ct=(cg+cq)/10000
!* -----
!* Definição do elemento
!* -----
/PREP7
!*
ET,1,SHELL181
!*
ET,2,BEAM188
!* -----
!* Definição do material
!* -----
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,Eci
MPDATA,PRXY,1,,.2
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0

```

```

MPDATA,EX,2,,20000
MPDATA,PRXY,2,,.3
!* -----
!* Definição da seção
!* -----
!
SECTYPE, 1, BEAM, RECT, PILAR, 0
SECOFFSET, CENT
SECADATA,lpz,lpz,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
sect,2,shell,,LAJE
secdata, h,1,0.0,3
secoffset,MID
seccontrol,,,, , , ,
!
!* -----
!* Definição da geometria
!* -----
!
n = 0
n2 = 0
*DO,i,1,npx,1
    n = n + 1
    n3 = 0
    *DO,j,1,npz,1
        n3 = n3 + 1
        n2 = n2 + 1
        K,n2,(n-1)*dpx,0,(n3-1)*dpz,
    *ENDDO
*ENDDO
A,1,npz,npz*npx,npz*npx-(npz-1)
allsel
KGEN,2,ALL, , , , -hp, , , 0
n1=0
*DO,i,1,npz*npx,1
    n1 = n1 + 1
    LSTR,n1,npz*npx+n1
*ENDDO
!-----
!Associando material e seção
!-----
LSEL,U,LOC,Y,0
LATT,1, ,2, , , ,1
!
ASEL,S,LOC,Y,0
AATT,1, ,1,0,2
!-----
! Malha dos elementos
!-----
AESIZE,1,spts,
MSHAPE,0,2D
MSHKEY,1
AMESH,1
!
allsel
LSEL,U,LOC,Y,0
LESIZE,ALL,, , , np
LMESH,ALL
!-----
!propriedades gráficas
!-----
/SHRINK,0
/ESHAPE,1.0
/EFACET,1

```



```

/RATIO,1,1,1
/CFORMAT,32,0
/REPLOT
!-----
! Acoplamento
!-----
NUMMRG,NODE, , , ,LOW
NSEL,S,LOC,Y,-hp/np
ESLN,S
NSLE,S
NSEL,R,LOC,Y,0
CPINTF,all,0.0001,
allsel
!-----
! Restrição nos apoios
!-----
KSEL,S,LOC,Y,-hp
DK,all, , , ,0,ALL, , , , ,
allsel
!-----
! Carregamento
!-----
SFA,ALL,1,PRES,-ct
FINISH
!-----
! Solução
!-----
/SOL
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
!-----
! POST-PROCESS
!-----
/POST26
!-----
! Rotina para se fazer o gráfico carga-deslocamento quando se usa
! incremento de deslocamento
!-----
NUMVAR,200          ! Número máximo de variáveis armazenadas
!
*SET,FATOR1,-1.00    ! Fator para multiplicar o deslocamento se necessário
!                   ! (por exemplo: torna positivos os deslocamentos)
*SET,FATOR2,1.00    ! Fator para multiplicar a carga se necessário
!                   ! (por exemplo: Ptotal = 4xP)
nsel,s,loc,y,0
nsel,r,loc,x,lx/2
nsel,r,loc,z,lz/2
*GET,NCD,NODE,0,NUM,MIN
*SET,NNUY,ncd       ! Número do nó do qual se quer fazer o gráfico carga-
!                   ! deslocamento (ver listagem dos nós com coordenadas)
!
/AXLAB,Y,CARGA P     ! Label Y
/AXLAB,X,FLECHA UY   ! Label X
NSOL,2,NNUY,U,y     ! Especifica o nó cujo deslocamento Uy vai ser plotado.
NSOL,3,1,U,Z        ! Variável muda, serve para armazenar a soma das reações
!                   ! (corresponde ao deslocamento UZ do nó 1).
!
NSEL,S,LOC,Y,-hp     ! Seleciona os nós cuja coordenada y é igual a 0
NSEL,R,LOC,X,lx/2    ! (escolher a coordenada de onde estão as reações).
NSEL,R,LOC,z,lz/2
!
*GET,NUMNOD,NODE,0,COUNT ! Captura o número de nós de onde estão as

```

```
!                               ! reações.
*GET,CURNOD,NODE,0,NUM,MIN      ! Captura o menor número do nó nos nós selecionado
!
*DO,I,1,NUMNOD                 ! Laço que faz a soma das reações Fy dos nós selecionados antes.
RFORCE,4,CURNOD,F,y
ADD,3,3,4,SOMA
CURNOD=NDNEXT(CURNOD)
*ENDDO
!
PROD,2,2,,,,,FATOR1           ! Ajuste dos deslocamentos pelo fator FATOR1
PROD,3,3,,,,,FATOR2           ! Ajuste das cargas pelo fator FATOR2
!
XVAR,2                         ! Plota os deslocamentos no eixo X
PLVAR,3                         ! Plota a carga total no eixo Y
*GET,Ri,VARI,3,EXTREM,VMAX
PARSAV,SCALAR,PARS,TXT,
!
ALLSEL,ALL
FINISH
!
```

APÊNDICE B – BANCO DE DADOS DAS LAJES LISAS ESTUDADAS

Pesquisador	Laje	fc (MPa)	fy (MPa)	Es (MPa)	h (mm)	d (mm)	ρ	rs (mm)	rq (mm)	rc (mm)	Vexp (kN)
Elstner e Hognestad (1956)	A-1b	25.2	332	200000	152	118	0.012	915	890	127	365
	A-1c	29	332	200000	152	118	0.012	915	890	127	356
	A-1d	36.8	332	200000	152	118	0.012	915	890	127	351
	A-1e	20.3	332	200000	152	118	0.012	915	890	127	356
	A-2b	19.5	321	200000	152	114	0.025	915	890	127	400
	A-2c	37.4	321	200000	152	114	0.025	915	890	127	467
	A-7b	27.9	321	200000	152	114	0.025	915	890	127	512
	A-3b	22.6	321	200000	152	114	0.037	915	890	127	445
	A-3c	26.5	321	200000	152	114	0.037	915	890	127	534
	A-3d	34.5	321	200000	152	114	0.037	915	890	127	547
	A-4	26.1	332	200000	152	118	0.012	915	890	178	400
	A-5	27.8	321	200000	152	114	0.025	915	890	178	534
	B-9	43.9	341	200000	152	114	0.02	915	890	127	505
B-14	50.5	325	200000	152	114	0.03	915	890	127	578	
Regan (1986)	I/2	23.4	500	200000	100	77	0.012	1000	915	100	176
	II/1	34.9	530	200000	250	200	0.01	1450	1373	125	825
	II/2	33.3	485	200000	160	128	0.01	1000	900	80	390
	II/3	34.3	485	200000	160	128	0.01	1000	900	80	365
	II/4	33.3	480	200000	80	64	0.01	500	450	40	117
	II/5	34.3	480	200000	80	64	0.01	500	450	40	105
	II/6	36.2	480	200000	80	64	0.01	500	450	40	105
Marzouk e Hussein (1991)	HS2	70	490	200000	120	95	0.007	850	750	75	249
	HS3	69	490	200000	120	95	0.012	850	750	75	356
	HS4	66	490	200000	120	90	0.021	850	750	75	418
	HS7	74	490	200000	120	95	0.009	850	750	75	356
	HS8	69	490	200000	150	120	0.01	850	750	75	436
	HS9	74	490	200000	150	120	0.015	850	750	75	543
	HS10	80	490	200000	150	120	0.021	850	750	75	645
	HS12	75	490	200000	90	70	0.012	850	750	75	258
	HS13	68	490	200000	90	70	0.016	850	750	75	267
	HS14	72	490	200000	120	95	0.012	850	750	110	498
	HS15	71	490	200000	120	95	0.012	850	750	150	560
	NS1	42	490	200000	120	95	0.012	850	750	75	320
Tomaszewicz (1993)	ND65- 2-1	70.2	500	200000	240	200	0.017	1300	1100	75	1200
	ND95- 1-1	83.7	500	200000	320	275	0.015	1500	1250	100	2250
	ND95- 1-3	89.9	500	200000	320	275	0.025	1500	1250	100	2400

Pesquisador	Laje	fc (MPa)	fy (MPa)	Es (MPa)	h (mm)	d (mm)	ρ	rs (mm)	rq (mm)	rc (mm)	Vexp (kN)
	ND95-2-1	88.2	500	200000	240	200	0.017	1300	1100	75	1100
	ND95-2-1D	86.7	500	200000	240	200	0.017	1300	1100	75	1300
	ND95-2-3	89.5	500	200000	240	200	0.026	1300	1100	75	1450
	ND95-2-3D	80.3	500	200000	240	200	0.026	1300	1100	75	1250
	ND95-2-3D+	98	500	200000	240	200	0.026	1300	1100	75	1450
	ND95-3-1	85.1	500	200000	120	88	0.018	750	550	50	330
	ND115-1-1	112	500	200000	320	275	0.015	1500	1250	100	2450
	ND115-2-1	119	500	200000	240	200	0.017	1300	1100	75	1400
	ND115-2-3	108.1	500	200000	240	200	0.026	1300	1100	75	1550
Guandalini, Burdet e Muttoni (2009)	PG-1	27.6	573	200000	250	210	0.015	1500	1500	130	1023
	PG-11	31.5	570	200000	250	210	0.008	1500	1500	130	763
	PG-6	34.7	526	200000	125	96	0.015	752	752	65	238
	PG-7	34.7	550	200000	125	100	0.008	752	752	65	241
Teng et. al. (2004)	OC11	36.01	452.5	200000	150	125	0.018	1100	1100	100	423
Gomes e Regan (1999)	1	40.2	670	200000	200	159	0.015	1500	1425	100	560
	1A	41.1	670	200000	200	159	0.015	1500	1425	100	587
Coelho (1999)	Laje 1	28.7	631	215000	130	109	0.012	900	825	60	316
Melges (2001)	M1	26.6	590	190209	160	137	0.014	1250	1050	90	441
Musse (2004)	L1	42	540	200000	130	91	0.014	900	825	75	309
Adetifa e Polak (2005)	SB1	44	455	200000	120	88.7	0.012	900	750	75	253
Sagaseta (2011)	PT31	66.3	540	200000	250	212	0.0159	1500	1500	130	1433
Marques (2018)	LR	39.8	571	194980	130	90	0.016	900	820	75	232.3
Liberati (2019)	LR_A	41.56	575	178680	130	89	0.016	900	820	75	249.9
	LR_B	41.56	575	178680	130	88	0.017	900	820	75	216.4

Pesquisador	Laje	fc (MPa)	fy (MPa)	Es (MPa)	h (mm)	d (mm)	ρ	rs (mm)	rq (mm)	rc (mm)	Vexp (kN)
	LR_C	41.56	575	178680	130	90	0.016	900	820	75	259.2
Lima (2012)	L0-01	43.2	593.4	209000	180	144.2	0.015	1250	1050	150	571
Ferreira (2010)	LS-05	50.5	557	222000	180	143	0.016	1250	1050	150	779
Clément et al. (2014)	PG19	46.2	510	200000	250	206	0.008	1500	1380	130	860
	PG20	51.7	551	200000	250	201	0.016	1500	1380	130	1094

**APÊNDICE C – RESULTADO DAS CARGAS DE RUPTURA POR
DIFERENTES MÉTODOS DE ANÁLISE**

Ref.	Laje	Vexp (kN)	Vexp/Vcalc					MEF R1	MEF R2
			NBR	EC2	ACI 318	MC2010	TFCC		
Elstner e Hognestad (1956)	A-1b	365	0.96	1.10	1.24	1.18	1.03	1.05	1.02
	A-1c	356	0.89	1.03	1.13	1.10	0.96	1.00	0.98
	A-1d	351	0.81	0.94	0.99	1.00	0.87	0.81	0.90
	A-1e	356	1.01	1.16	1.35	1.24	1.08	0.89	1.00
	A-2b	400	0.94	1.17	1.62	1.21	1.06	0.99	1.02
	A-2c	467	0.88	1.10	1.37	1.09	0.95	0.92	0.87
	A-7b	512	1.06	1.33	1.73	1.34	1.17	1.03	1.11
	A-3b	445	0.87	1.24	1.67	1.17	1.03	0.92	0.94
	A-3c	534	0.99	1.41	1.85	1.31	1.15	1.01	1.03
	A-3d	547	0.93	1.33	1.66	1.19	1.05	1.01	0.93
	A-4	400	0.89	1.03	1.05	1.07	0.93	0.93	0.96
	A-5	534	0.95	1.19	1.42	1.15	1.00	1.02	0.86
	B-9	505	0.97	1.13	1.36	1.18	0.97	0.98	0.95
	B-14	578	0.93	1.24	1.45	1.13	0.95	1.12	1.03
Regan (1986)	I/2	176	0.91	1.18	1.28	1.40	1.22	0.94	1.09
	II/1	825	1.00	1.00	1.16	1.26	1.10	0.89	0.92
	II/2	390	1.04	1.17	1.37	1.32	1.15	1.04	1.03
	II/3	365	0.96	1.08	1.27	1.33	1.16	0.93	0.95
	II/4	117	1.01	1.40	1.65	1.34	1.18	1.17	1.16
	II/5	105	0.90	1.25	1.46	1.28	1.12	1.00	1.03
	II/6	105	0.89	1.23	1.42	1.33	1.16	1.05	1.01
Marzouk e Hussein (1991)	HS2	249	0.91	1.11	0.96	1.22	1.06	1.05	1.02
	HS3	356	1.09	1.33	1.38	1.39	1.21	0.96	0.90
	HS4	418	1.16	1.46	1.79	1.48	1.30	1.08	1.05
	HS7	356	1.17	1.43	1.33	1.53	1.33	1.21	1.03
	HS8	436	1.02	1.17	1.22	1.25	1.09	1.07	0.98
	HS9	543	1.08	1.24	1.46	1.31	1.15	1.03	0.98
	HS10	645	1.12	1.30	1.67	1.36	1.19	0.89	1.10
	HS12	258	1.15	1.54	1.45	1.60	1.39	1.18	1.13
	HS13	267	1.12	1.50	1.58	1.52	1.33	1.16	0.89
	HS14	498	1.30	1.59	1.47	1.60	1.40	1.32	0.97
	HS15	560	1.27	1.55	1.33	1.54	1.34	1.36	1.11
NS1	320	1.15	1.41	1.59	1.47	1.28	0.97	0.98	
Tomaszewicz (1993)	ND65-2-1	1200	1.09	1.09	1.53	1.38	1.21	1.07	1.00
	ND95-1-1	2250	1.15	1.15	1.45	1.40	1.22	1.05	0.99

Ref.	Laje	Vexp (kN)	Vexp/Vcalc					MEF R1	MEF R2
			NBR	EC2	ACI 318	MC2010	TFCC		
	ND95-1-3	2400	1.01	1.09	1.49	1.23	1.07	0.91	0.87
	ND95-2-1	1100	0.92	0.92	1.25	1.17	1.03	0.93	0.86
	ND95-2-1D	1300	1.10	1.10	1.50	1.39	1.22	1.09	1.01
	ND95-2-3	1450	1.05	1.15	1.64	1.34	1.18	0.95	0.97
	ND95-2-3D	1250	0.94	1.03	1.49	1.21	1.06	0.90	0.86
	ND95-2-3D+	1450	1.02	1.11	1.57	1.30	1.14	0.98	0.94
	ND95-3-1	330	1.03	1.29	1.62	1.30	1.14	0.90	1.10
	ND115-1-1	2450	1.14	1.14	1.36	1.39	1.21	1.23	1.01
	ND115-2-1	1400	1.06	1.06	1.38	1.35	1.18	1.09	0.97
	ND115-2-3	1550	1.06	1.15	1.60	1.34	1.17	1.07	0.97
Guandalini, Burdet e Muttoni	PG-1	1023	1.08	1.08	1.48	1.41	1.23	0.79	1.11
	PG-11	763	0.97	0.97	1.03	1.31	1.14	0.96	0.98
	PG-6	238	0.87	1.07	1.40	1.19	1.04	1.06	0.84
	PG-7	241	1.05	1.27	1.33	1.43	1.24	1.12	1.11
Teng et. al. (2004)	OC11	423	0.87	0.99	1.30	1.19	1.04	0.76	1.12
Gomes e Regan (1999)	1	560	0.84	0.89	1.16	1.14	1.00	0.95	0.91
	1A	587	0.87	0.93	1.20	1.19	1.04	0.97	0.95
Coelho (1999)	Laje 1	316	1.15	1.35	1.77	1.48	1.30	0.92	1.08
Melges (2001)	M1	441	0.99	1.09	1.48	1.28	1.12	1.10	1.15
Musse (2004)	L1	309	1.11	1.38	1.63	1.47	1.29	0.97	1.00
Adetifa e Polak (2005)	SB1	253	0.98	1.23	1.35	1.32	1.06	1.03	0.99
Sagaseta (2011)	PT31	1433	1.09	1.09	1.32	1.42	1.27	0.98	0.97
Marques (2018)	LR	232.3	0.84	1.04	1.28	1.11	0.97	0.96	0.89
Liberati (2019)	LR_A	249.9	0.89	1.12	1.37	1.24	1.08	0.94	1.01
	LR_B	216.4	0.78	0.98	1.20	1.09	0.95	0.87	0.85
	LR_C	259.2	0.92	1.15	1.40	1.28	1.11	0.94	0.98
Lima (2012)	L0-01	571	0.84	0.92	1.02	1.00	0.87	0.98	1.12

Ref.	Laje	Vexp (kN)	Vexp/Vcalc					MEF R1	MEF R2
			NBR	EC2	ACI 318	MC2010	TFCC		
Ferreira (2010)	LS-05	779	1.07	1.17	1.30	1.34	1.17	0.92	1.05
Clément et al. (2014)	PG19	860	0.97	0.97	0.99	1.30	1.13	0.86	0.97
	PG20	1094	0.98	0.98	1.23	1.24	1.08	0.85	0.96
		Média	1.00	1.17	1.40	1.29	1.13	1.00	0.99
		CV	0.11	0.14	0.15	0.11	0.11	0.11	0.08

APÊNDICE D – ÍNDICE DE CONFIABILIDADE β DO GRUPO G1

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)			EC 2 (2004)			ACI 318 (2019)				MC 2010 (2012)		
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	ρ (%)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β
16	0.1	0.50	30	52	640	3.18	64	640	3.74	32	0.60	640	2.23	35	540	3.98
16	0.3	0.50	30	70	640	3.16	80	640	3.50	41	0.72	640	2.31	57	540	4.21
16	0.5	0.50	30	88	640	2.97	98	640	3.21	51	0.85	640	2.31	80	540	4.15
16	0.7	0.50	30	33	480	2.71	41	480	3.10	25	0.51	480	2.24	9	380	3.51
16	0.9	0.50	30	43	480	2.64	53	480	3.04	31	0.59	480	2.26	13	380	3.18
16	1.1	0.50	30	52	480	2.52	65	480	2.96	36	0.66	480	2.19	18	380	2.99
16	0.1	0.88	30	36	640	3.13	46	640	3.70	31	0.87	640	2.80	23	540	3.91
16	0.3	0.88	30	52	640	3.15	59	640	3.50	41	0.87	640	2.60	34	540	3.86
16	0.5	0.88	30	66	640	2.97	74	640	3.20	51	0.87	640	2.34	46	540	3.61
16	0.7	0.88	30	20	480	2.62	27	480	3.04	25	0.87	480	2.93	5	380	3.82
16	0.9	0.88	30	30	480	2.68	38	480	3.07	31	0.87	480	2.73	7	380	3.36
16	1.1	0.88	30	37	480	2.53	47	480	2.96	36	0.87	480	2.51	11	380	3.19
16	0.1	1.25	30	52	730	3.24	63	730	3.76	47	1.25	730	2.97	43	630	4.25
16	0.3	1.25	30	69	730	3.14	78	730	3.51	61	1.25	730	2.85	57	630	4.04
16	0.5	1.25	30	86	730	2.98	95	730	3.22	88	1.25	730	3.01	78	630	3.94
16	0.7	1.25	30	44	580	2.76	53	580	3.14	46	1.25	580	2.83	23	480	3.20
16	0.9	1.25	30	55	580	2.65	67	580	3.06	55	1.25	580	2.63	32	480	3.11
16	1.1	1.25	30	66	580	2.54	80	580	2.98	70	1.25	580	2.68	39	480	3.06
16	0.1	1.63	30	43	730	3.16	54	730	3.73	46	1.62	730	3.34	32	630	3.97
16	0.3	1.63	30	59	730	3.15	68	730	3.51	61	1.62	730	3.22	48	630	4.01
16	0.5	1.63	30	75	730	2.98	84	730	3.21	88	1.62	730	3.35	64	630	3.80
16	0.7	1.63	30	37	580	2.74	45	580	3.04	46	1.62	580	3.09	20	480	3.31
16	0.9	1.63	30	48	580	2.66	58	580	3.06	55	1.62	580	2.95	28	480	3.19
16	1.1	1.63	30	57	580	2.54	70	580	2.98	70	1.62	580	2.99	33	480	3.11
16	0.1	2.00	30	37	730	3.14	47	730	3.72	46	2.00	730	3.67	29	630	4.07
16	0.3	2.00	30	53	730	3.16	61	730	3.51	61	2.00	730	3.53	43	630	4.05
16	0.5	2.00	30	67	730	2.93	75	730	3.21	88	2.00	730	3.62	56	630	3.77
16	0.7	2.00	30	32	580	2.71	39	580	3.03	46	2.00	580	3.34	18	480	3.44
16	0.9	2.00	30	42	580	2.67	51	580	3.07	55	2.00	580	3.11	25	480	3.29
16	1.1	2.00	30	50	580	2.54	62	580	2.98	70	2.00	580	3.14	30	480	3.10
16	0.1	0.50	40	44	640	3.29	54	640	3.87	25	0.59	640	2.21	30	540	4.21
16	0.3	0.50	40	60	640	3.27	69	640	3.61	34	0.73	640	2.46	48	540	4.34
16	0.5	0.50	40	76	640	3.05	85	640	3.37	43	0.86	640	2.38	67	540	4.18
16	0.7	0.50	40	26	480	2.73	33	480	3.14	20	0.51	480	2.32	6	380	3.62
16	0.9	0.50	40	36	480	2.71	45	480	3.10	26	0.60	480	2.35	10	380	3.35
16	1.1	0.50	40	44	480	2.57	55	480	3.01	30	0.66	480	2.27	14	380	3.11

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)			EC 2 (2004)			ACI 318 (2019)				MC 2010 (2012)		
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	ρ (%)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β
16	0.1	0.88	40	29	640	3.20	38	640	3.82	26	0.87	640	2.93	18	540	4.11
16	0.3	0.88	40	44	640	3.32	50	640	3.62	34	0.87	640	2.72	28	540	4.01
16	0.5	0.88	40	56	640	3.06	63	640	3.37	43	0.87	640	2.41	38	540	3.69
16	0.7	0.88	40	14	480	2.65	20	480	3.05	20	0.87	480	3.02	3	380	4.20
16	0.9	0.88	40	24	480	2.71	31	480	3.15	26	0.87	480	2.81	4	380	3.61
16	1.1	0.88	40	30	480	2.59	39	480	3.02	30	0.87	480	2.58	7	380	3.36
16	0.1	1.25	40	44	730	3.40	54	730	3.92	39	1.25	730	3.10	33	630	4.24
16	0.3	1.25	40	59	730	3.28	67	730	3.62	49	1.25	730	2.81	47	630	4.12
16	0.5	1.25	40	74	730	3.06	83	730	3.29	66	1.25	730	2.74	64	630	3.92
16	0.7	1.25	40	36	580	2.79	44	580	3.19	38	1.25	580	2.88	18	480	3.28
16	0.9	1.25	40	47	580	2.71	57	580	3.11	46	1.25	580	2.67	26	480	3.29
16	1.1	1.25	40	56	580	2.58	69	580	3.02	53	1.25	580	2.47	32	480	3.10
16	0.1	1.63	40	35	730	3.25	45	730	3.86	38	1.62	730	3.46	26	630	4.09
16	0.3	1.63	40	51	730	3.27	58	730	3.63	49	1.62	730	3.23	39	630	4.11
16	0.5	1.63	40	64	730	3.06	72	730	3.29	66	1.62	730	3.12	52	630	3.79
16	0.7	1.63	40	30	580	2.76	37	580	3.17	38	1.62	580	3.24	15	480	3.42
16	0.9	1.63	40	40	580	2.73	49	580	3.12	46	1.62	580	2.99	22	480	3.25
16	1.1	1.63	40	48	580	2.59	59	580	3.02	53	1.62	580	2.78	27	480	3.16
16	0.1	2.00	40	30	730	3.21	39	730	3.84	38	2.00	730	3.79	23	630	4.20
16	0.3	2.00	40	45	730	3.30	52	730	3.64	49	2.00	730	3.51	35	630	4.15
16	0.5	2.00	40	57	730	3.07	65	730	3.29	66	2.00	730	3.33	45	630	3.77
16	0.7	2.00	40	25	580	2.71	32	580	3.14	38	2.00	580	3.39	14	480	3.57
16	0.9	2.00	40	35	580	2.75	43	580	3.14	46	2.00	580	3.26	20	480	3.35
16	1.1	2.00	40	42	580	2.59	53	580	3.03	53	2.00	580	3.03	24	480	3.25
16	0.1	0.50	50	38	640	3.34	47	640	3.93	21	0.59	640	2.25	26	540	4.35
16	0.3	0.50	50	53	640	3.33	61	640	3.66	30	0.74	640	2.55	42	540	4.42
16	0.5	0.50	50	67	640	3.09	76	640	3.41	37	0.86	640	2.44	58	540	4.19
16	0.7	0.50	50	21	480	2.72	28	480	3.15	16	0.51	480	2.40	4	380	3.84
16	0.9	0.50	50	31	480	2.75	39	480	3.15	22	0.60	480	2.41	7	380	3.49
16	1.1	0.50	50	38	480	2.60	48	480	3.03	26	0.67	480	2.32	11	380	3.21
16	0.1	0.88	50	24	640	3.20	32	640	3.85	22	0.87	640	3.00	15	540	4.23
16	0.3	0.88	50	39	640	3.42	44	640	3.69	30	0.87	640	2.79	24	540	4.08
16	0.5	0.88	50	49	640	3.10	56	640	3.41	37	0.87	640	2.46	33	540	3.76
16	0.7	0.88	50	10	480	2.69	16	480	3.05	16	0.87	480	3.10	1	380	4.59
16	0.9	0.88	50	19	480	2.68	26	480	3.17	22	0.87	480	2.87	1	380	3.99
16	1.1	0.88	50	25	480	2.62	33	480	3.05	26	0.87	480	2.63	3	380	3.41
16	0.1	1.25	50	39	730	3.49	47	730	4.01	34	1.25	730	3.18	21	630	3.72
16	0.3	1.25	50	52	730	3.34	59	730	3.68	43	1.25	730	2.85	42	630	4.28
16	0.5	1.25	50	66	730	3.10	74	730	3.42	53	1.25	730	2.56	55	630	3.90

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)			EC 2 (2004)			ACI 318 (2019)				MC 2010 (2012)		
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	ρ (%)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β
16	0.7	1.25	50	31	580	2.79	38	580	3.21	33	1.25	580	2.91	15	480	3.36
16	0.9	1.25	50	41	580	2.75	50	580	3.15	40	1.25	580	2.70	22	480	3.34
16	1.1	1.25	50	49	580	2.61	61	580	3.05	46	1.25	580	2.49	27	480	3.15
16	0.1	1.63	50	30	730	3.26	38	730	3.90	33	1.62	730	3.50	22	630	4.17
16	0.3	1.63	50	45	730	3.35	51	730	3.69	43	1.62	730	3.28	34	630	4.17
16	0.5	1.63	50	57	730	3.11	64	730	3.33	53	1.62	730	2.94	45	630	3.79
16	0.7	1.63	50	24	580	2.74	31	580	3.17	33	1.62	580	3.27	12	480	3.52
16	0.9	1.63	50	35	580	2.78	43	580	3.17	40	1.62	580	3.03	18	480	3.30
16	1.1	1.63	50	42	580	2.62	52	580	3.05	46	1.62	580	2.80	23	480	3.21
16	0.1	2.00	50	25	730	3.21	33	730	3.86	33	2.00	730	3.85	19	630	4.30
16	0.3	2.00	50	40	730	3.40	45	730	3.71	43	2.00	730	3.57	30	630	4.20
16	0.5	2.00	50	50	730	3.11	57	730	3.33	53	2.00	730	3.24	39	630	3.78
16	0.7	2.00	50	20	580	2.69	26	580	3.13	33	2.00	580	3.42	11	480	3.69
16	0.9	2.00	50	31	580	2.81	38	580	3.19	40	2.00	580	3.29	16	480	3.41
16	1.1	2.00	50	36	580	2.62	46	580	3.06	46	2.00	580	3.05	20	480	3.30
20	0.1	0.50	30	104	800	3.34	110	800	3.53	51	0.70	800	1.92	121	700	5.12
20	0.3	0.50	30	129	800	3.17	133	800	3.25	65	0.84	800	2.01	164	700	5.15
20	0.5	0.50	30	158	800	3.01	159	800	3.04	89	1.00	800	2.33	237	700	5.27
20	0.7	0.50	30	73	600	2.80	77	600	2.91	43	0.62	600	2.00	41	500	3.26
20	0.9	0.50	30	89	600	2.66	95	600	2.83	52	0.71	600	2.00	55	500	3.22
20	1.1	0.50	30	104	600	2.55	114	600	2.76	60	0.79	600	1.97	70	500	3.18
20	0.1	0.88	30	74	800	3.24	80	800	3.48	51	0.87	800	2.26	58	700	3.97
20	0.3	0.88	30	98	800	3.17	101	800	3.25	65	0.87	800	2.06	89	700	4.16
20	0.5	0.88	30	122	800	3.01	123	800	3.03	89	1.00	800	2.33	125	700	4.15
20	0.7	0.88	30	51	600	2.78	54	600	2.89	43	0.87	600	2.44	24	500	3.15
20	0.9	0.88	30	64	600	2.67	70	600	2.83	52	0.87	600	2.25	34	500	3.07
20	1.1	0.88	30	77	600	2.55	85	600	2.76	60	0.87	600	2.08	42	500	2.91
20	0.1	1.25	30	99	920	3.26	107	920	3.50	77	1.25	920	2.51	103	820	4.50
20	0.3	1.25	30	128	920	3.18	131	920	3.26	114	1.25	920	2.85	150	820	4.74
20	0.5	1.25	30	156	920	2.96	158	920	2.98	157	1.34	920	3.06	212	820	4.80
20	0.7	1.25	30	86	720	2.81	90	720	2.92	74	1.25	720	2.45	62	620	3.25
20	0.9	1.25	30	103	720	2.67	111	720	2.84	99	1.25	720	2.58	80	620	3.20
20	1.1	1.25	30	120	720	2.56	131	720	2.77	124	1.25	720	2.64	101	620	3.20
20	0.1	1.63	30	86	920	3.25	94	920	3.49	77	1.62	920	2.91	81	820	4.21
20	0.3	1.63	30	112	920	3.18	115	920	3.26	114	1.62	920	3.23	120	820	4.42
20	0.5	1.63	30	138	920	2.96	140	920	2.98	157	1.62	920	3.31	166	820	4.43
20	0.7	1.63	30	74	720	2.81	78	720	2.92	74	1.62	720	2.79	52	620	3.23
20	0.9	1.63	30	90	720	2.67	97	720	2.84	99	1.62	720	2.90	67	620	3.13
20	1.1	1.63	30	105	720	2.56	115	720	2.76	124	1.62	720	2.95	82	620	3.08

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)			EC 2 (2004)			ACI 318 (2019)				MC 2010 (2012)		
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	ρ (%)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β
20	0.1	2.00	30	77	920	3.24	83	920	3.49	77	2.00	920	3.25	70	820	4.15
20	0.3	2.00	30	101	920	3.18	104	920	3.26	114	2.00	920	3.54	103	820	4.29
20	0.5	2.00	30	125	920	2.96	127	920	2.98	157	2.00	920	3.58	142	820	4.23
20	0.7	2.00	30	66	720	2.80	69	720	2.91	74	2.00	720	2.99	46	620	3.26
20	0.9	2.00	30	80	720	2.67	87	720	2.84	99	2.00	720	3.07	59	620	3.15
20	1.1	2.00	30	95	720	2.56	104	720	2.76	124	2.00	720	3.11	72	620	3.06
20	0.1	0.50	40	86	800	3.38	94	800	3.62	41	0.70	800	1.95	89	700	4.84
20	0.3	0.50	40	112	800	3.31	115	800	3.39	54	0.85	800	2.10	138	700	5.18
20	0.5	0.50	40	138	800	3.09	140	800	3.12	68	1.00	800	2.11	199	700	5.24
20	0.7	0.50	40	61	600	2.85	65	600	2.96	35	0.62	600	2.05	33	500	3.33
20	0.9	0.50	40	76	600	2.71	82	600	2.88	43	0.72	600	2.08	46	500	3.30
20	1.1	0.50	40	90	600	2.60	98	600	2.80	50	0.80	600	2.02	58	500	3.21
20	0.1	0.88	40	62	800	3.36	68	800	3.61	42	0.87	800	2.35	47	700	4.09
20	0.3	0.88	40	84	800	3.31	86	800	3.39	54	0.87	800	2.14	74	700	4.22
20	0.5	0.88	40	105	800	3.09	106	800	3.11	68	1.00	800	2.11	104	700	4.12
20	0.7	0.88	40	41	600	2.82	44	600	2.93	35	0.87	600	2.51	18	500	3.28
20	0.9	0.88	40	54	600	2.73	59	600	2.89	43	0.87	600	2.32	27	500	3.15
20	1.1	0.88	40	65	600	2.60	72	600	2.80	50	0.87	600	2.12	34	500	2.98
20	0.1	1.25	40	85	920	3.39	92	920	3.64	63	1.25	920	2.49	86	820	4.60
20	0.3	1.25	40	111	920	3.32	114	920	3.36	85	1.25	920	2.49	123	820	4.68
20	0.5	1.25	40	137	920	3.09	138	920	3.12	121	1.34	920	2.83	173	820	4.68
20	0.7	1.25	40	73	720	2.87	77	720	2.98	61	1.25	720	2.45	50	620	3.37
20	0.9	1.25	40	89	720	2.72	95	720	2.89	72	1.25	720	2.26	66	620	3.29
20	1.1	1.25	40	104	720	2.57	114	720	2.81	93	1.25	720	2.33	82	620	3.24
20	0.1	1.63	40	73	920	3.37	80	920	3.62	62	1.62	920	2.91	65	820	4.23
20	0.3	1.63	40	97	920	3.29	100	920	3.36	85	1.62	920	2.91	97	820	4.37
20	0.5	1.63	40	121	920	3.09	122	920	3.12	121	1.62	920	3.11	135	820	4.30
20	0.7	1.63	40	62	720	2.86	66	720	2.97	61	1.62	720	2.80	41	620	3.34
20	0.9	1.63	40	77	720	2.72	83	720	2.89	72	1.62	720	2.58	54	620	3.23
20	1.1	1.63	40	91	720	2.57	99	720	2.81	93	1.62	720	2.67	67	620	3.12
20	0.1	2.00	40	65	920	3.37	71	920	3.62	62	2.00	920	3.26	56	820	4.17
20	0.3	2.00	40	87	920	3.29	89	920	3.36	85	2.00	920	3.25	82	820	4.23
20	0.5	2.00	40	109	920	3.09	110	920	3.12	121	2.00	920	3.32	113	820	4.09
20	0.7	2.00	40	55	720	2.85	58	720	2.97	61	2.00	720	3.08	36	620	3.27
20	0.9	2.00	40	68	720	2.73	74	720	2.89	72	2.00	720	2.84	48	620	3.26
20	1.1	2.00	40	81	720	2.60	89	720	2.81	93	2.00	720	2.91	58	620	3.10
20	0.1	0.50	50	76	800	3.44	83	800	3.68	35	0.70	800	1.99	77	700	4.88
20	0.3	0.50	50	100	800	3.36	103	800	3.45	47	0.86	800	2.18	121	700	5.16
20	0.5	0.50	50	125	800	3.13	126	800	3.15	59	1.01	800	2.15	175	700	5.18

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)			EC 2 (2004)			ACI 318 (2019)				MC 2010 (2012)		
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	ρ (%)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β
20	0.7	0.50	50	53	600	2.87	56	600	2.99	29	0.62	600	2.09	27	500	3.39
20	0.9	0.50	50	66	600	2.74	72	600	2.91	37	0.72	600	2.15	40	500	3.37
20	1.1	0.50	50	79	600	2.62	87	600	2.82	43	0.80	600	2.06	51	500	3.25
20	0.1	0.88	50	54	800	3.41	59	800	3.66	36	0.87	800	2.41	40	700	4.15
20	0.3	0.88	50	74	800	3.37	76	800	3.45	47	0.87	800	2.20	64	700	4.26
20	0.5	0.88	50	94	800	3.13	95	800	3.15	59	1.01	800	2.15	90	700	4.09
20	0.7	0.88	50	34	600	2.81	37	600	2.94	29	0.87	600	2.54	14	500	3.42
20	0.9	0.88	50	47	600	2.77	51	600	2.93	37	0.87	600	2.37	22	500	3.21
20	1.1	0.88	50	57	600	2.63	63	600	2.83	43	0.87	600	2.16	29	500	3.05
20	0.1	1.25	50	75	920	3.45	82	920	3.70	54	1.25	920	2.54	76	820	4.66
20	0.3	1.25	50	99	920	3.37	102	920	3.45	68	1.25	920	2.28	106	820	4.63
20	0.5	1.25	50	123	920	3.13	124	920	3.16	97	1.34	920	2.56	150	820	4.59
20	0.7	1.25	50	64	720	2.89	67	720	3.01	52	1.25	720	2.48	42	620	3.38
20	0.9	1.25	50	79	720	2.75	85	720	2.92	63	1.25	720	2.27	57	620	3.30
20	1.1	1.25	50	93	720	2.59	101	720	2.78	72	1.25	720	2.09	71	620	3.22
20	0.1	1.63	50	64	920	3.42	70	920	3.68	54	1.62	920	2.96	55	820	4.24
20	0.3	1.63	50	86	920	3.37	89	920	3.41	68	1.62	920	2.71	83	820	4.33
20	0.5	1.63	50	108	920	3.13	109	920	3.16	97	1.62	920	2.83	115	820	4.21
20	0.7	1.63	50	54	720	2.88	57	720	3.00	52	1.62	720	2.83	34	620	3.35
20	0.9	1.63	50	68	720	2.75	73	720	2.92	63	1.62	720	2.60	46	620	3.26
20	1.1	1.63	50	80	720	2.59	88	720	2.78	72	1.62	720	2.39	57	620	3.11
20	0.1	2.00	50	56	920	3.41	62	920	3.67	54	2.00	920	3.31	47	820	4.18
20	0.3	2.00	50	77	920	3.38	79	920	3.41	68	2.00	920	3.05	70	820	4.21
20	0.5	2.00	50	97	920	3.13	98	920	3.16	97	2.00	920	3.14	96	820	4.01
20	0.7	2.00	50	47	720	2.87	49	720	2.99	52	2.00	720	3.10	30	620	3.39
20	0.9	2.00	50	60	720	2.76	65	720	2.92	63	2.00	720	2.86	41	620	3.29
20	1.1	2.00	50	71	720	2.59	79	720	2.83	72	2.00	720	2.62	49	620	3.10
24	0.1	0.50	30	116	860	3.28	120	860	3.39	55	0.64	860	1.67	121	760	4.63
24	0.3	0.50	30	149	860	3.19	147	860	3.15	71	0.77	860	1.78	184	760	4.96
24	0.5	0.50	30	183	860	3.02	178	860	2.93	88	0.91	860	1.85	265	760	5.08
24	0.7	0.50	30	72	620	2.81	72	620	2.81	41	0.52	620	1.83	34	520	3.09
24	0.9	0.50	30	88	620	2.67	91	620	2.74	50	0.60	620	1.86	49	520	3.05
24	1.1	0.50	30	105	620	2.56	110	620	2.67	59	0.67	620	1.81	62	520	2.94
24	0.1	0.88	30	84	860	3.26	88	860	3.37	55	0.87	860	2.19	65	760	3.86
24	0.3	0.88	30	112	860	3.19	111	860	3.15	71	0.87	860	1.98	99	760	4.01
24	0.5	0.88	30	140	860	3.02	136	860	2.93	88	0.91	860	1.85	140	760	3.99
24	0.7	0.88	30	48	620	2.78	48	620	2.78	41	0.87	620	2.51	20	520	3.16
24	0.9	0.88	30	63	620	2.69	65	620	2.76	50	0.87	620	2.32	29	520	3.00
24	1.1	0.88	30	76	620	2.56	80	620	2.67	59	0.87	620	2.12	37	520	2.83

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)			EC 2 (2004)			ACI 318 (2019)				MC 2010 (2012)		
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	ρ (%)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β
24	0.1	1.25	30	118	1000	3.28	123	1000	3.39	84	1.20	1000	2.29	125	900	4.49
24	0.3	1.25	30	152	1000	3.20	150	1000	3.15	122	1.20	1000	2.53	177	900	4.63
24	0.5	1.25	30	186	1000	2.97	181	1000	2.94	170	1.20	1000	2.75	250	900	4.70
24	0.7	1.25	30	97	770	2.82	97	770	2.83	79	1.25	770	2.35	68	670	3.14
24	0.9	1.25	30	117	770	2.68	120	770	2.75	98	1.25	770	2.27	88	670	3.17
24	1.1	1.25	30	137	770	2.57	143	770	2.68	125	1.25	770	2.34	110	670	3.15
24	0.1	1.63	30	102	1000	3.27	106	1000	3.38	84	1.60	1000	2.70	95	900	4.11
24	0.3	1.63	30	134	1000	3.19	132	1000	3.15	122	1.60	1000	2.92	141	900	4.32
24	0.5	1.63	30	165	1000	2.97	160	1000	2.94	170	1.60	1000	3.05	197	900	4.33
24	0.7	1.63	30	83	770	2.82	84	770	2.82	79	1.62	770	2.69	56	670	3.13
24	0.9	1.63	30	102	770	2.68	105	770	2.75	98	1.62	770	2.59	73	670	3.12
24	1.1	1.63	30	119	770	2.57	125	770	2.68	125	1.62	770	2.68	90	670	3.04
24	0.1	2.00	30	91	1000	3.27	95	1000	3.38	84	2.00	1000	3.04	82	900	4.05
24	0.3	2.00	30	120	1000	3.19	118	1000	3.15	122	2.00	1000	3.23	121	900	4.18
24	0.5	2.00	30	149	1000	2.97	145	1000	2.94	170	2.00	1000	3.33	167	900	4.13
24	0.7	2.00	30	73	770	2.81	73	770	2.82	79	2.00	770	2.97	50	670	3.18
24	0.9	2.00	30	90	770	2.68	93	770	2.75	98	2.00	770	2.85	65	670	3.06
24	1.1	2.00	30	107	770	2.57	112	770	2.68	125	2.00	770	2.92	79	670	3.03
24	0.1	0.50	40	99	860	3.40	103	860	3.51	44	0.64	860	1.73	99	760	4.68
24	0.3	0.50	40	129	860	3.33	128	860	3.28	59	0.78	860	1.89	154	760	5.00
24	0.5	0.50	40	160	860	3.10	155	860	3.01	74	0.91	860	1.90	223	760	5.05
24	0.7	0.50	40	59	620	2.86	59	620	2.86	32	0.52	620	1.90	27	520	3.20
24	0.9	0.50	40	74	620	2.73	77	620	2.79	42	0.61	620	1.96	40	520	3.16
24	1.1	0.50	40	89	620	2.57	94	620	2.67	48	0.67	620	1.88	51	520	3.01
24	0.1	0.88	40	70	860	3.39	73	860	3.50	45	0.87	860	2.31	53	760	4.00
24	0.3	0.88	40	96	860	3.33	94	860	3.28	59	0.87	860	2.07	82	760	4.08
24	0.5	0.88	40	121	860	3.10	117	860	3.01	74	0.91	860	1.90	116	760	3.97
24	0.7	0.88	40	37	620	2.79	37	620	2.79	32	0.87	620	2.58	14	520	3.40
24	0.9	0.88	40	52	620	2.77	54	620	2.83	42	0.87	620	2.40	22	520	3.09
24	1.1	0.88	40	63	620	2.61	67	620	2.72	48	0.87	620	2.18	30	520	2.92
24	0.1	1.25	40	102	1000	3.42	105	1000	3.54	71	1.20	1000	2.38	106	900	4.63
24	0.3	1.25	40	132	1000	3.34	130	1000	3.29	88	1.20	1000	2.13	145	900	4.58
24	0.5	1.25	40	163	1000	3.11	158	1000	3.02	130	1.20	1000	2.41	205	900	4.58
24	0.7	1.25	40	82	770	2.88	82	770	2.88	65	1.25	770	2.40	55	670	3.26
24	0.9	1.25	40	100	770	2.68	103	770	2.74	78	1.25	770	2.17	72	670	3.17
24	1.1	1.25	40	118	770	2.57	124	770	2.68	91	1.25	770	2.05	90	670	3.11
24	0.1	1.63	40	87	1000	3.40	90	1000	3.51	69	1.60	1000	2.79	76	900	4.13
24	0.3	1.63	40	115	1000	3.34	114	1000	3.29	88	1.60	1000	2.56	114	900	4.26
24	0.5	1.63	40	144	1000	3.10	139	1000	3.02	130	1.60	1000	2.81	159	900	4.20

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)			EC 2 (2004)			ACI 318 (2019)				MC 2010 (2012)		
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	ρ (%)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β
24	0.7	1.63	40	69	770	2.87	70	770	2.88	65	1.62	770	2.75	45	670	3.25
24	0.9	1.63	40	86	770	2.68	89	770	2.75	78	1.62	770	2.48	59	670	3.13
24	1.1	1.63	40	102	770	2.57	108	770	2.68	91	1.62	770	2.34	73	670	3.01
24	0.1	2.00	40	76	1000	3.39	80	1000	3.51	69	2.00	1000	3.15	65	900	4.08
24	0.3	2.00	40	103	1000	3.30	101	1000	3.29	88	2.00	1000	2.89	96	900	4.12
24	0.5	2.00	40	129	1000	3.10	125	1000	3.02	130	2.00	1000	3.11	133	900	3.99
24	0.7	2.00	40	60	770	2.86	60	770	2.87	65	2.00	770	3.02	39	670	3.30
24	0.9	2.00	40	76	770	2.69	79	770	2.80	78	2.00	770	2.72	52	670	3.17
24	1.1	2.00	40	91	770	2.57	96	770	2.68	91	2.00	770	2.58	63	670	3.00
24	0.1	0.50	50	87	860	3.46	90	860	3.58	38	0.64	860	1.77	86	760	4.73
24	0.3	0.50	50	115	860	3.38	114	860	3.33	51	0.78	860	1.98	135	760	4.99
24	0.5	0.50	50	144	860	3.14	139	860	3.05	64	0.92	860	1.94	196	760	4.99
24	0.7	0.50	50	50	620	2.87	50	620	2.87	27	0.52	620	1.95	22	520	3.30
24	0.9	0.50	50	65	620	2.76	67	620	2.83	35	0.61	620	2.03	34	520	3.23
24	1.1	0.50	50	78	620	2.59	83	620	2.70	41	0.68	620	1.94	44	520	3.08
24	0.1	0.88	50	60	860	3.44	63	860	3.55	39	0.87	860	2.38	46	760	4.09
24	0.3	0.88	50	85	860	3.39	83	860	3.34	51	0.87	860	2.14	71	760	4.13
24	0.5	0.88	50	108	860	3.14	104	860	3.05	64	0.92	860	1.94	100	760	3.95
24	0.7	0.88	50	29	620	2.77	29	620	2.77	27	0.87	620	2.63	11	520	3.49
24	0.9	0.88	50	45	620	2.82	47	620	2.90	35	0.87	620	2.47	17	520	3.18
24	1.1	0.88	50	54	620	2.60	58	620	2.71	41	0.87	620	2.21	24	520	2.98
24	0.1	1.25	50	90	1000	3.50	93	1000	3.61	61	1.20	1000	2.45	94	900	4.71
24	0.3	1.25	50	118	1000	3.39	116	1000	3.34	77	1.20	1000	2.16	125	900	4.53
24	0.5	1.25	50	146	1000	3.14	142	1000	3.05	102	1.20	1000	2.12	177	900	4.49
24	0.7	1.25	50	71	770	2.90	71	770	2.91	56	1.25	770	2.43	46	670	3.28
24	0.9	1.25	50	88	770	2.71	91	770	2.77	67	1.25	770	2.20	62	670	3.19
24	1.1	1.25	50	105	770	2.60	110	770	2.70	78	1.25	770	2.03	77	670	3.09
24	0.1	1.63	50	76	1000	3.45	79	1000	3.57	60	1.60	1000	2.84	64	900	4.15
24	0.3	1.63	50	102	1000	3.39	101	1000	3.34	77	1.60	1000	2.59	97	900	4.23
24	0.5	1.63	50	128	1000	3.14	124	1000	3.05	102	1.60	1000	2.49	136	900	4.11
24	0.7	1.63	50	59	770	2.89	60	770	2.90	56	1.62	770	2.78	37	670	3.27
24	0.9	1.63	50	75	770	2.71	78	770	2.78	67	1.62	770	2.51	51	670	3.17
24	1.1	1.63	50	90	770	2.60	95	770	2.70	78	1.62	770	2.33	62	670	3.01
24	0.1	2.00	50	66	1000	3.44	69	1000	3.56	60	2.00	1000	3.20	55	900	4.10
24	0.3	2.00	50	91	1000	3.39	89	1000	3.34	77	2.00	1000	2.93	82	900	4.10
24	0.5	2.00	50	115	1000	3.14	111	1000	3.05	102	2.00	1000	2.82	113	900	3.91
24	0.7	2.00	50	51	770	2.88	51	770	2.88	56	2.00	770	3.06	32	670	3.32
24	0.9	2.00	50	66	770	2.72	69	770	2.79	67	2.00	770	2.75	45	670	3.22
24	1.1	2.00	50	80	770	2.60	84	770	2.70	78	2.00	770	2.56	54	670	3.01

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)			EC 2 (2004)			ACI 318 (2019)				MC 2010 (2012)		
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	ρ (%)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β
28	0.1	0.50	30	134	920	3.29	139	920	3.40	61	0.60	920	1.52	140	820	4.57
28	0.3	0.50	30	173	920	3.20	170	920	3.16	79	0.73	920	1.63	213	820	4.89
28	0.5	0.50	30	212	920	3.03	206	920	2.94	98	0.86	920	1.70	308	820	4.94
28	0.7	0.50	30	71	640	2.81	71	640	2.81	40	0.50	640	1.85	31	540	3.02
28	0.9	0.50	30	89	640	2.68	92	640	2.75	50	0.53	640	1.79	45	540	2.97
28	1.1	0.50	30	107	640	2.57	113	640	2.68	59	0.59	640	1.72	57	540	2.82
28	0.1	0.88	30	97	920	3.27	101	920	3.39	61	0.87	920	2.15	75	820	3.82
28	0.3	0.88	30	129	920	3.20	128	920	3.16	79	0.87	920	1.92	114	820	3.94
28	0.5	0.88	30	162	920	3.03	157	920	2.94	98	0.87	920	1.71	162	820	3.92
28	0.7	0.88	30	45	640	2.76	45	640	2.76	40	0.87	640	2.59	17	540	3.16
28	0.9	0.88	30	62	640	2.71	64	640	2.78	50	0.87	640	2.39	26	540	2.96
28	1.1	0.88	30	75	640	2.57	80	640	2.68	59	0.87	640	2.18	35	540	2.80
28	0.1	1.25	30	141	1080	3.30	146	1080	3.41	96	1.20	1080	2.20	156	980	4.55
28	0.3	1.25	30	180	1080	3.20	178	1080	3.16	136	1.20	1080	2.35	214	980	4.62
28	0.5	1.25	30	221	1080	2.98	215	1080	2.95	191	1.20	1080	2.59	303	980	4.64
28	0.7	1.25	30	105	810	2.83	106	810	2.83	84	1.25	810	2.34	71	710	3.05
28	0.9	1.25	30	128	810	2.69	131	810	2.75	99	1.25	810	2.13	93	710	3.06
28	1.1	1.25	30	150	810	2.53	157	810	2.64	125	1.25	810	2.15	116	710	3.02
28	0.1	1.63	30	121	1080	3.28	126	1080	3.40	95	1.60	1080	2.61	114	980	4.07
28	0.3	1.63	30	159	1080	3.20	156	1080	3.16	136	1.60	1080	2.76	169	980	4.29
28	0.5	1.63	30	195	1080	2.97	190	1080	2.94	191	1.60	1080	2.96	237	980	4.31
28	0.7	1.63	30	90	810	2.83	90	810	2.83	84	1.62	810	2.68	59	710	3.06
28	0.9	1.63	30	110	810	2.69	114	810	2.75	99	1.62	810	2.47	77	710	3.02
28	1.1	1.63	30	130	810	2.53	137	810	2.64	125	1.62	810	2.45	95	710	2.93
28	0.1	2.00	30	108	1080	3.28	112	1080	3.39	95	2.00	1080	2.95	98	980	4.00
28	0.3	2.00	30	143	1080	3.20	141	1080	3.16	136	2.00	1080	3.06	145	980	4.14
28	0.5	2.00	30	177	1080	2.97	172	1080	2.94	191	2.00	1080	3.19	200	980	4.11
28	0.7	2.00	30	78	810	2.82	78	810	2.82	84	2.00	810	2.96	52	710	3.12
28	0.9	2.00	30	98	810	2.69	101	810	2.76	99	2.00	810	2.72	68	710	3.07
28	1.1	2.00	30	116	810	2.53	122	810	2.68	125	2.00	810	2.72	84	710	2.94
28	0.1	0.50	40	114	920	3.42	118	920	3.53	49	0.60	920	1.59	114	820	4.61
28	0.3	0.50	40	149	920	3.34	147	920	3.30	66	0.73	920	1.74	178	820	4.93
28	0.5	0.50	40	185	920	3.11	180	920	3.02	82	0.86	920	1.75	259	820	4.98
28	0.7	0.50	40	57	640	2.85	57	640	2.86	31	0.50	640	1.92	23	540	3.18
28	0.9	0.50	40	74	640	2.74	77	640	2.81	41	0.54	640	1.89	36	540	3.07
28	1.1	0.50	40	90	640	2.57	95	640	2.68	48	0.59	640	1.80	47	540	2.92
28	0.1	0.88	40	81	920	3.41	84	920	3.52	50	0.87	920	2.28	62	820	3.98
28	0.3	0.88	40	110	920	3.34	109	920	3.30	65	0.87	920	2.02	94	820	4.01
28	0.5	0.88	40	140	920	3.11	135	920	3.02	82	0.87	920	1.76	133	820	3.90

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)			EC 2 (2004)			ACI 318 (2019)				MC 2010 (2012)		
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	ρ (%)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β
28	0.7	0.88	40	33	640	2.75	33	640	2.76	31	0.87	640	2.67	12	540	3.47
28	0.9	0.88	40	51	640	2.80	53	640	2.87	41	0.87	640	2.49	17	540	3.09
28	1.1	0.88	40	62	640	2.59	66	640	2.69	48	0.87	640	2.23	26	540	2.88
28	0.1	1.25	40	121	1080	3.45	126	1080	3.56	81	1.20	1080	2.31	132	980	4.70
28	0.3	1.25	40	157	1080	3.35	154	1080	3.30	101	1.20	1080	2.03	175	980	4.56
28	0.5	1.25	40	193	1080	3.11	188	1080	3.02	145	1.20	1080	2.24	248	980	4.58
28	0.7	1.25	40	88	810	2.89	88	810	2.89	69	1.25	810	2.37	57	710	3.17
28	0.9	1.25	40	109	810	2.69	112	810	2.75	83	1.25	810	2.17	75	710	3.07
28	1.1	1.25	40	129	810	2.58	135	810	2.68	96	1.25	810	2.00	94	710	2.92
28	0.1	1.63	40	103	1080	3.41	107	1080	3.53	79	1.60	1080	2.70	91	980	4.09
28	0.3	1.63	40	137	1080	3.35	135	1080	3.30	101	1.60	1080	2.46	137	980	4.23
28	0.5	1.63	40	170	1080	3.11	165	1080	3.02	145	1.60	1080	2.61	191	980	4.17
28	0.7	1.63	40	74	810	2.88	74	810	2.88	69	1.62	810	2.75	46	710	3.18
28	0.9	1.63	40	93	810	2.69	96	810	2.75	83	1.62	810	2.48	62	710	3.06
28	1.1	1.63	40	111	810	2.58	117	810	2.68	96	1.62	810	2.30	77	710	2.86
28	0.1	2.00	40	91	1080	3.41	95	1080	3.53	79	2.00	1080	3.06	78	980	4.02
28	0.3	2.00	40	122	1080	3.35	120	1080	3.30	101	2.00	1080	2.80	115	980	4.07
28	0.5	2.00	40	153	1080	3.11	149	1080	3.02	145	2.00	1080	2.95	160	980	3.96
28	0.7	2.00	40	64	810	2.87	64	810	2.87	69	2.00	810	3.02	41	710	3.24
28	0.9	2.00	40	82	810	2.70	85	810	2.76	83	2.00	810	2.72	55	710	3.11
28	1.1	2.00	40	98	810	2.58	104	810	2.68	96	2.00	810	2.53	67	710	2.87
28	0.1	0.50	50	100	920	3.48	104	920	3.60	41	0.60	920	1.63	100	820	4.67
28	0.3	0.50	50	133	920	3.39	131	920	3.35	57	0.74	920	1.84	156	820	4.92
28	0.5	0.50	50	166	920	3.15	161	920	3.00	71	0.87	920	1.80	227	820	4.93
28	0.7	0.50	50	47	640	2.86	47	640	2.86	25	0.50	640	2.00	18	540	3.34
28	0.9	0.50	50	64	640	2.73	66	640	2.80	35	0.54	640	1.96	30	540	3.12
28	1.1	0.50	50	78	640	2.60	83	640	2.70	41	0.60	640	1.87	41	540	3.00
28	0.1	0.88	50	69	920	3.46	73	920	3.58	43	0.87	920	2.37	54	820	4.10
28	0.3	0.88	50	97	920	3.40	95	920	3.35	57	0.87	920	2.09	81	820	4.05
28	0.5	0.88	50	124	920	3.15	120	920	3.06	71	0.87	920	1.81	115	820	3.89
28	0.7	0.88	50	25	640	2.74	25	640	2.74	25	0.87	640	2.75	8	540	3.81
28	0.9	0.88	50	42	640	2.84	45	640	2.91	35	0.87	640	2.51	11	540	3.28
28	1.1	0.88	50	52	640	2.62	56	640	2.72	41	0.87	640	2.29	18	540	2.91
28	0.1	1.25	50	108	1080	3.54	112	1080	3.65	71	1.20	1080	2.39	115	980	4.74
28	0.3	1.25	50	140	1080	3.40	138	1080	3.35	87	1.20	1080	2.06	150	980	4.51
28	0.5	1.25	50	174	1080	3.09	168	1080	3.00	113	1.20	1080	1.95	214	980	4.48
28	0.7	1.25	50	76	810	2.85	76	810	2.86	59	1.25	810	2.40	47	710	3.20
28	0.9	1.25	50	95	810	2.72	98	810	2.78	72	1.25	810	2.20	65	710	3.11
28	1.1	1.25	50	114	810	2.60	120	810	2.71	83	1.25	810	2.02	81	710	2.93

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)			EC 2 (2004)			ACI 318 (2019)				MC 2010 (2012)		
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	ρ (%)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β
28	0.1	1.63	50	90	1080	3.47	94	1080	3.59	68	1.60	1080	2.76	77	980	4.10
28	0.3	1.63	50	121	1080	3.40	119	1080	3.35	87	1.60	1080	2.50	117	980	4.19
28	0.5	1.63	50	152	1080	3.09	148	1080	3.00	113	1.60	1080	2.32	163	980	4.08
28	0.7	1.63	50	63	810	2.84	63	810	2.84	59	1.62	810	2.73	38	710	3.20
28	0.9	1.63	50	81	810	2.72	84	810	2.79	72	1.62	810	2.51	53	710	3.11
28	1.1	1.63	50	97	810	2.60	103	810	2.71	83	1.62	810	2.32	65	710	2.87
28	0.1	2.00	50	78	1080	3.46	82	1080	3.58	68	2.00	1080	3.12	66	980	4.05
28	0.3	2.00	50	108	1080	3.40	106	1080	3.35	87	2.00	1080	2.84	98	980	4.04
28	0.5	2.00	50	137	1080	3.09	132	1080	3.00	113	2.00	1080	2.62	135	980	3.87
28	0.7	2.00	50	53	810	2.82	53	810	2.82	59	2.00	810	3.06	33	710	3.27
28	0.9	2.00	50	71	810	2.73	73	810	2.80	72	2.00	810	2.75	47	710	3.17
28	1.1	2.00	50	86	810	2.61	91	810	2.71	83	2.00	810	2.55	57	710	2.89
16	0.1	2.50	30	34	730	3.28	47	730	4.06	44	2.50	730	3.92	25	630	4.14
16	0.3	2.50	30	46	730	3.17	61	730	3.84	61	2.50	730	3.86	39	630	4.17
16	0.5	2.50	30	59	730	2.93	75	730	3.50	88	2.50	730	3.91	50	630	3.82
16	0.7	2.50	30	26	580	2.67	39	580	3.30	46	2.50	580	3.60	17	480	3.62
16	0.9	2.50	30	37	580	2.70	51	580	3.23	55	2.50	580	3.36	23	480	3.43
16	1.1	2.50	30	44	580	2.55	62	580	3.14	70	2.50	580	3.37	28	480	3.23
16	0.1	2.50	40	25	730	3.14	39	730	4.19	37	2.50	730	4.05	20	630	4.32
16	0.3	2.50	40	40	730	3.35	52	730	3.97	49	2.50	730	3.85	31	630	4.25
16	0.5	2.50	40	50	730	3.07	65	730	3.59	66	2.50	730	3.63	40	630	3.81
16	0.7	2.50	40	20	580	2.66	32	580	3.33	38	2.50	580	3.66	13	480	3.76
16	0.9	2.50	40	31	580	2.78	43	580	3.30	46	2.50	580	3.41	18	480	3.49
16	1.1	2.50	40	36	580	2.60	53	580	3.30	53	2.50	580	3.30	22	480	3.27
16	0.1	2.50	50	20	730	3.13	33	730	4.23	31	2.50	730	4.10	17	630	4.45
16	0.3	2.50	50	35	730	3.45	45	730	4.04	43	2.50	730	3.91	27	630	4.29
16	0.5	2.50	50	44	730	3.12	57	730	3.63	53	2.50	730	3.47	34	630	3.83
16	0.7	2.50	50	16	580	2.65	26	580	3.32	33	2.50	580	3.69	10	480	3.89
16	0.9	2.50	50	26	580	2.81	38	580	3.36	40	2.50	580	3.44	14	480	3.56
16	1.1	2.50	50	31	580	2.63	46	580	3.33	46	2.50	580	3.32	18	480	3.32
20	0.1	2.50	30	71	920	3.39	85	920	3.88	73	2.50	920	3.47	71	820	4.51
20	0.3	2.50	30	90	920	3.18	104	920	3.59	114	2.50	920	3.86	90	820	4.23
20	0.5	2.50	30	112	920	2.96	127	920	3.28	157	2.50	920	3.87	122	820	4.13
20	0.7	2.50	30	57	720	2.80	69	720	3.12	74	2.50	720	3.25	41	620	3.36
20	0.9	2.50	30	71	720	2.67	87	720	3.03	99	2.50	720	3.32	53	620	3.22
20	1.1	2.50	30	84	720	2.56	104	720	3.03	124	2.50	720	3.35	65	620	3.10
20	0.1	2.50	40	56	920	3.35	71	920	3.98	60	2.50	920	3.53	48	820	4.19
20	0.3	2.50	40	77	920	3.29	89	920	3.70	85	2.50	920	3.56	71	820	4.18
20	0.5	2.50	40	97	920	3.09	110	920	3.35	121	2.50	920	3.62	96	820	3.97

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)			EC 2 (2004)			ACI 318 (2019)				MC 2010 (2012)		
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	ρ (%)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β
20	0.7	2.50	40	47	720	2.84	58	720	3.27	61	2.50	720	3.27	32	620	3.36
20	0.9	2.50	40	60	720	2.73	74	720	3.17	72	2.50	720	3.12	43	620	3.34
20	1.1	2.50	40	71	720	2.61	89	720	3.07	93	2.50	720	3.18	51	620	3.15
20	0.1	2.50	50	48	920	3.39	62	920	4.04	52	2.50	920	3.58	41	820	4.20
20	0.3	2.50	50	68	920	3.35	79	920	3.76	69	2.50	920	3.38	60	820	4.17
20	0.5	2.50	50	86	920	3.13	98	920	3.39	97	2.50	920	3.47	81	820	3.89
20	0.7	2.50	50	39	720	2.84	49	720	3.29	52	2.50	720	3.41	26	620	3.37
20	0.9	2.50	50	52	720	2.77	65	720	3.21	63	2.50	720	3.14	36	620	3.38
20	1.1	2.50	50	62	720	2.59	79	720	3.10	72	2.50	720	2.92	43	620	3.15
24	0.1	2.50	30	80	1000	3.28	95	1000	3.74	81	2.50	1000	3.31	75	900	4.15
24	0.3	2.50	30	107	1000	3.20	118	1000	3.48	122	2.50	1000	3.57	105	900	4.13
24	0.5	2.50	30	134	1000	2.97	145	1000	3.18	170	2.50	1000	3.62	144	900	4.03
24	0.7	2.50	30	63	770	2.81	73	770	3.03	79	2.50	770	3.17	45	670	3.28
24	0.9	2.50	30	79	770	2.69	93	770	3.03	98	2.50	770	3.04	59	670	3.14
24	1.1	2.50	30	94	770	2.57	112	770	2.94	125	2.50	770	3.09	71	670	3.08
24	0.1	2.50	40	66	1000	3.38	80	1000	3.88	67	2.50	1000	3.41	56	900	4.10
24	0.3	2.50	40	91	1000	3.31	101	1000	3.60	88	2.50	1000	3.26	83	900	4.08
24	0.5	2.50	40	115	1000	3.10	125	1000	3.34	130	2.50	1000	3.44	113	900	3.87
24	0.7	2.50	40	51	770	2.85	60	770	3.17	65	2.50	770	3.32	35	670	3.30
24	0.9	2.50	40	66	770	2.75	79	770	3.08	78	2.50	770	3.06	47	670	3.27
24	1.1	2.50	40	80	770	2.58	96	770	2.92	91	2.50	770	2.82	56	670	3.06
24	0.1	2.50	50	56	1000	3.43	69	1000	3.94	57	2.50	1000	3.47	47	900	4.12
24	0.3	2.50	50	80	1000	3.40	89	1000	3.65	77	2.50	1000	3.30	70	900	4.06
24	0.5	2.50	50	102	1000	3.14	111	1000	3.38	102	2.50	1000	3.15	95	900	3.79
24	0.7	2.50	50	42	770	2.84	51	770	3.18	56	2.50	770	3.36	28	670	3.43
24	0.9	2.50	50	57	770	2.74	69	770	3.12	67	2.50	770	3.08	40	670	3.31
24	1.1	2.50	50	69	770	2.60	84	770	2.95	78	2.50	770	2.81	47	670	3.07
28	0.1	2.50	30	95	1080	3.30	113	1080	3.76	92	2.50	1080	3.22	89	980	4.10
28	0.3	2.50	30	127	1080	3.20	141	1080	3.49	136	2.50	1080	3.40	126	980	4.08
28	0.5	2.50	30	159	1080	2.97	172	1080	3.19	191	2.50	1080	3.48	173	980	3.99
28	0.7	2.50	30	67	810	2.81	78	810	3.04	84	2.50	810	3.16	47	710	3.23
28	0.9	2.50	30	85	810	2.69	101	810	3.03	99	2.50	810	3.00	62	710	3.08
28	1.1	2.50	30	102	810	2.54	122	810	2.95	125	2.50	810	2.99	75	710	3.00
28	0.1	2.50	40	78	1080	3.40	95	1080	3.89	76	2.50	1080	3.33	67	980	4.03
28	0.3	2.50	40	108	1080	3.35	120	1080	3.61	101	2.50	1080	3.16	99	980	4.01
28	0.5	2.50	40	137	1080	3.11	149	1080	3.35	145	2.50	1080	3.28	135	980	3.83
28	0.7	2.50	40	53	810	2.85	64	810	3.17	69	2.50	810	3.32	36	710	3.36
28	0.9	2.50	40	71	810	2.71	85	810	3.09	83	2.50	810	2.97	49	710	3.22
28	1.1	2.50	40	86	810	2.58	104	810	2.93	96	2.50	810	2.78	59	710	2.93

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)			EC 2 (2004)			ACI 318 (2019)				MC 2010 (2012)		
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	ρ (%)	Dist. entre pilares (cm)	β	lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β
28	0.1	2.50	50	67	1080	3.45	82	1080	3.96	65	2.50	1080	3.39	56	980	4.06
28	0.3	2.50	50	95	1080	3.41	106	1080	3.66	88	2.50	1080	3.20	83	980	3.99
28	0.5	2.50	50	121	1080	3.15	132	1080	3.39	113	2.50	1080	2.92	113	980	3.74
28	0.7	2.50	50	44	810	2.78	53	810	3.18	59	2.50	810	3.36	29	710	3.40
28	0.9	2.50	50	61	810	2.76	73	810	3.05	72	2.50	810	3.01	42	710	3.27
28	1.1	2.50	50	74	810	2.61	91	810	2.95	83	2.50	810	2.80	50	710	2.96

APÊNDICE E – ÍNDICE DE CONFIABILIDADE β_{MLG} E β_{KS}

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)				
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β_{MLG}	β_{KS}	Erro relativo
16	0.1	0.50	30	52	640	3.18	3.34	3.94%
16	0.3	0.50	30	70	640	3.16	3.23	3.92%
16	0.5	0.50	30	88	640	2.97	3.08	5.49%
16	0.7	0.50	30	33	480	2.71	2.82	3.63%
16	0.9	0.50	30	43	480	2.64	2.74	5.49%
16	1.1	0.50	30	52	480	2.52	2.62	5.50%
16	0.1	0.88	30	36	640	3.13	3.23	3.92%
16	0.3	0.88	30	52	640	3.15	3.25	3.92%
16	0.5	0.88	30	66	640	2.97	3.08	3.91%
16	0.7	0.88	30	20	480	2.62	2.73	3.90%
16	0.9	0.88	30	30	480	2.68	2.78	3.90%
16	1.1	0.88	30	37	480	2.53	2.63	3.90%
16	0.1	1.25	30	52	730	3.24	3.34	3.89%
16	0.3	1.25	30	69	730	3.14	3.25	3.89%
16	0.5	1.25	30	86	730	2.98	3.03	3.89%
16	0.7	1.25	30	44	580	2.76	2.86	3.89%
16	0.9	1.25	30	55	580	2.65	2.75	3.89%
16	1.1	1.25	30	66	580	2.54	2.64	3.89%
16	0.1	1.63	30	43	730	3.16	3.27	2.08%
16	0.3	1.63	30	59	730	3.15	3.25	2.08%
16	0.5	1.63	30	75	730	2.98	3.03	2.07%
16	0.7	1.63	30	37	580	2.74	2.84	3.88%
16	0.9	1.63	30	48	580	2.66	2.76	3.88%
16	1.1	1.63	30	57	580	2.54	2.64	3.88%
16	0.1	2.00	30	37	730	3.14	3.24	3.88%
16	0.3	2.00	30	53	730	3.16	3.27	0.59%
16	0.5	2.00	30	67	730	2.93	3.03	3.88%
16	0.7	2.00	30	32	580	2.71	2.82	3.87%
16	0.9	2.00	30	42	580	2.67	2.77	0.42%
16	1.1	2.00	30	50	580	2.54	2.64	0.42%
16	0.1	0.50	40	44	640	3.29	3.24	0.42%
16	0.3	0.50	40	60	640	3.27	3.24	0.42%
16	0.5	0.50	40	76	640	3.05	3.04	0.42%
16	0.7	0.50	40	26	480	2.73	2.74	0.42%
16	0.9	0.50	40	36	480	2.71	2.72	0.42%
16	1.1	0.50	40	44	480	2.57	2.58	0.42%

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)				
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β MLG	β KS	Erro relativo
16	0.1	0.88	40	29	640	3.20	3.16	0.41%
16	0.3	0.88	40	44	640	3.32	3.29	0.59%
16	0.5	0.88	40	56	640	3.06	3.04	0.41%
16	0.7	0.88	40	14	480	2.65	2.65	0.59%
16	0.9	0.88	40	24	480	2.71	2.72	0.58%
16	1.1	0.88	40	30	480	2.59	2.60	-2.25%
16	0.1	1.25	40	44	730	3.40	3.34	-0.73%
16	0.3	1.25	40	59	730	3.28	3.22	-0.72%
16	0.5	1.25	40	74	730	3.06	3.05	0.58%
16	0.7	1.25	40	36	580	2.79	2.80	-0.74%
16	0.9	1.25	40	47	580	2.71	2.72	-0.71%
16	1.1	1.25	40	56	580	2.58	2.60	0.59%
16	0.1	1.63	40	35	730	3.25	3.20	0.58%
16	0.3	1.63	40	51	730	3.27	3.24	-2.25%
16	0.5	1.63	40	64	730	3.06	3.05	0.58%
16	0.7	1.63	40	30	580	2.76	2.76	-2.25%
16	0.9	1.63	40	40	580	2.73	2.74	-2.20%
16	1.1	1.63	40	48	580	2.59	2.60	-2.25%
16	0.1	2.00	40	30	730	3.21	3.16	-2.25%
16	0.3	2.00	40	45	730	3.30	3.27	-2.25%
16	0.5	2.00	40	57	730	3.07	3.05	-2.25%
16	0.7	2.00	40	25	580	2.71	2.72	-0.71%
16	0.9	2.00	40	35	580	2.75	2.76	0.58%
16	1.1	2.00	40	42	580	2.59	2.61	-2.25%
16	0.1	0.50	50	38	640	3.34	3.17	0.58%
16	0.3	0.50	50	53	640	3.33	3.19	-2.25%
16	0.5	0.50	50	67	640	3.09	2.98	-2.25%
16	0.7	0.50	50	21	480	2.72	2.64	-2.19%
16	0.9	0.50	50	31	480	2.75	2.68	0.58%
16	1.1	0.50	50	38	480	2.60	2.54	-2.19%
16	0.1	0.88	50	24	640	3.20	3.05	-2.24%
16	0.3	0.88	50	39	640	3.42	3.27	-2.19%
16	0.5	0.88	50	49	640	3.10	2.99	-2.19%
16	0.7	0.88	50	10	480	2.69	2.62	-2.19%
16	0.9	0.88	50	19	480	2.68	2.62	4.05%
16	1.1	0.88	50	25	480	2.62	2.56	-2.19%
16	0.1	1.25	50	39	730	3.49	3.32	-2.18%
16	0.3	1.25	50	52	730	3.34	3.20	3.88%
16	0.5	1.25	50	66	730	3.10	3.00	0.27%

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)				
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β MLG	β KS	Erro relativo
16	0.7	1.25	50	31	580	2.79	2.72	3.87%
16	0.9	1.25	50	41	580	2.75	2.69	-2.85%
16	1.1	1.25	50	49	580	2.61	2.55	0.27%
16	0.1	1.63	50	30	730	3.26	3.10	3.85%
16	0.3	1.63	50	45	730	3.35	3.22	3.86%
16	0.5	1.63	50	57	730	3.11	3.00	3.85%
16	0.7	1.63	50	24	580	2.74	2.66	3.97%
16	0.9	1.63	50	35	580	2.78	2.72	3.84%
16	1.1	1.63	50	42	580	2.62	2.56	3.84%
16	0.1	2.00	50	25	730	3.21	3.05	3.83%
16	0.3	2.00	50	40	730	3.40	3.26	3.84%
16	0.5	2.00	50	50	730	3.11	3.00	3.84%
16	0.7	2.00	50	20	580	2.69	2.61	3.83%
16	0.9	2.00	50	31	580	2.81	2.74	3.82%
16	1.1	2.00	50	36	580	2.62	2.56	3.83%
20	0.1	0.50	30	104	800	3.34	3.44	3.83%
20	0.3	0.50	30	129	800	3.17	3.28	2.22%
20	0.5	0.50	30	158	800	3.01	3.06	3.83%
20	0.7	0.50	30	73	600	2.80	2.90	3.83%
20	0.9	0.50	30	89	600	2.66	2.76	2.23%
20	1.1	0.50	30	104	600	2.55	2.65	-2.43%
20	0.1	0.88	30	74	800	3.24	3.34	3.82%
20	0.3	0.88	30	98	800	3.17	3.28	3.82%
20	0.5	0.88	30	122	800	3.01	3.05	3.82%
20	0.7	0.88	30	51	600	2.78	2.89	2.24%
20	0.9	0.88	30	64	600	2.67	2.77	0.30%
20	1.1	0.88	30	77	600	2.55	2.65	3.82%
20	0.1	1.25	30	99	920	3.26	3.36	-2.84%
20	0.3	1.25	30	128	920	3.18	3.28	3.82%
20	0.5	1.25	30	156	920	2.96	3.06	0.30%
20	0.7	1.25	30	86	720	2.81	2.92	-2.83%
20	0.9	1.25	30	103	720	2.67	2.77	3.81%
20	1.1	1.25	30	120	720	2.56	2.66	0.30%
20	0.1	1.63	30	86	920	3.25	3.35	3.79%
20	0.3	1.63	30	112	920	3.18	3.28	0.42%
20	0.5	1.63	30	138	920	2.96	3.06	0.29%
20	0.7	1.63	30	74	720	2.81	2.91	0.42%
20	0.9	1.63	30	90	720	2.67	2.77	-2.40%
20	1.1	1.63	30	105	720	2.56	2.66	3.90%

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)				
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β MLG	β KS	Erro relativo
20	0.1	2.00	30	77	920	3.24	3.35	3.78%
20	0.3	2.00	30	101	920	3.18	3.28	0.23%
20	0.5	2.00	30	125	920	2.96	3.06	0.42%
20	0.7	2.00	30	66	720	2.80	2.91	3.90%
20	0.9	2.00	30	80	720	2.67	2.77	0.41%
20	1.1	2.00	30	95	720	2.56	2.66	-2.39%
20	0.1	0.50	40	86	800	3.38	3.32	-2.40%
20	0.3	0.50	40	112	800	3.31	3.27	-2.83%
20	0.5	0.50	40	138	800	3.09	3.08	0.42%
20	0.7	0.50	40	61	600	2.85	2.86	0.42%
20	0.9	0.50	40	76	600	2.71	2.72	-0.59%
20	1.1	0.50	40	90	600	2.60	2.61	-2.39%
20	0.1	0.88	40	62	800	3.36	3.31	0.42%
20	0.3	0.88	40	84	800	3.31	3.27	0.42%
20	0.5	0.88	40	105	800	3.09	3.07	0.41%
20	0.7	0.88	40	41	600	2.82	2.82	0.41%
20	0.9	0.88	40	54	600	2.73	2.74	0.22%
20	1.1	0.88	40	65	600	2.60	2.61	0.41%
20	0.1	1.25	40	85	920	3.39	3.34	-0.58%
20	0.3	1.25	40	111	920	3.32	3.25	-2.39%
20	0.5	1.25	40	137	920	3.09	3.08	3.86%
20	0.7	1.25	40	73	720	2.87	2.87	-2.83%
20	0.9	1.25	40	89	720	2.72	2.73	-0.54%
20	1.1	1.25	40	104	720	2.57	2.62	0.41%
20	0.1	1.63	40	73	920	3.37	3.32	-2.84%
20	0.3	1.63	40	97	920	3.29	3.25	-2.41%
20	0.5	1.63	40	121	920	3.09	3.08	0.41%
20	0.7	1.63	40	62	720	2.86	2.86	-2.41%
20	0.9	1.63	40	77	720	2.72	2.73	-2.41%
20	1.1	1.63	40	91	720	2.57	2.62	-2.41%
20	0.1	2.00	40	65	920	3.37	3.31	-2.40%
20	0.3	2.00	40	87	920	3.29	3.25	0.40%
20	0.5	2.00	40	109	920	3.09	3.08	0.20%
20	0.7	2.00	40	55	720	2.85	2.86	0.20%
20	0.9	2.00	40	68	720	2.73	2.74	-2.38%
20	1.1	2.00	40	81	720	2.60	2.62	3.83%
20	0.1	0.50	50	76	800	3.44	3.26	-2.40%
20	0.3	0.50	50	100	800	3.36	3.21	3.83%
20	0.5	0.50	50	125	800	3.13	3.02	-2.40%

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)				
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β MLG	β KS	Erro relativo
20	0.7	0.50	50	53	600	2.87	2.79	0.40%
20	0.9	0.50	50	66	600	2.74	2.68	-2.83%
20	1.1	0.50	50	79	600	2.62	2.56	-2.40%
20	0.1	0.88	50	54	800	3.41	3.23	-2.39%
20	0.3	0.88	50	74	800	3.37	3.22	3.81%
20	0.5	0.88	50	94	800	3.13	3.02	0.38%
20	0.7	0.88	50	34	600	2.81	2.73	3.80%
20	0.9	0.88	50	47	600	2.77	2.71	-2.39%
20	1.1	0.88	50	57	600	2.63	2.57	-0.88%
20	0.1	1.25	50	75	920	3.45	3.28	0.18%
20	0.3	1.25	50	99	920	3.37	3.22	0.18%
20	0.5	1.25	50	123	920	3.13	3.02	-2.81%
20	0.7	1.25	50	64	720	2.89	2.81	3.77%
20	0.9	1.25	50	79	720	2.75	2.68	3.77%
20	1.1	1.25	50	93	720	2.59	2.53	0.38%
20	0.1	1.63	50	64	920	3.42	3.25	3.76%
20	0.3	1.63	50	86	920	3.37	3.22	-2.39%
20	0.5	1.63	50	108	920	3.13	3.02	-2.38%
20	0.7	1.63	50	54	720	2.88	2.80	3.76%
20	0.9	1.63	50	68	720	2.75	2.69	3.76%
20	1.1	1.63	50	80	720	2.59	2.57	3.75%
20	0.1	2.00	50	56	920	3.41	3.24	3.75%
20	0.3	2.00	50	77	920	3.38	3.23	3.75%
20	0.5	2.00	50	97	920	3.13	3.02	3.75%
20	0.7	2.00	50	47	720	2.87	2.79	-2.81%
20	0.9	2.00	50	60	720	2.76	2.69	3.75%
20	1.1	2.00	50	71	720	2.59	2.57	0.16%
24	0.1	0.50	30	116	860	3.28	3.38	3.74%
24	0.3	0.50	30	149	860	3.19	3.29	-0.80%
24	0.5	0.50	30	183	860	3.02	3.07	3.74%
24	0.7	0.50	30	72	620	2.81	2.91	3.74%
24	0.9	0.50	30	88	620	2.67	2.78	-2.37%
24	1.1	0.50	30	105	620	2.56	2.66	3.73%
24	0.1	0.88	30	84	860	3.26	3.36	3.73%
24	0.3	0.88	30	112	860	3.19	3.29	0.15%
24	0.5	0.88	30	140	860	3.02	3.07	-0.76%
24	0.7	0.88	30	48	620	2.78	2.88	-2.37%
24	0.9	0.88	30	63	620	2.69	2.79	-2.80%
24	1.1	0.88	30	76	620	2.56	2.66	-2.81%

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)				
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β MLG	β KS	Erro relativo
24	0.1	1.25	30	118	1000	3.28	3.38	0.15%
24	0.3	1.25	30	152	1000	3.20	3.30	0.15%
24	0.5	1.25	30	186	1000	2.97	3.07	-0.73%
24	0.7	1.25	30	97	770	2.82	2.93	0.14%
24	0.9	1.25	30	117	770	2.68	2.78	0.14%
24	1.1	1.25	30	137	770	2.57	2.67	0.14%
24	0.1	1.63	30	102	1000	3.27	3.37	0.14%
24	0.3	1.63	30	134	1000	3.19	3.30	-2.80%
24	0.5	1.63	30	165	1000	2.97	3.07	0.14%
24	0.7	1.63	30	83	770	2.82	2.92	0.14%
24	0.9	1.63	30	102	770	2.68	2.78	0.13%
24	1.1	1.63	30	119	770	2.57	2.67	0.13%
24	0.1	2.00	30	91	1000	3.27	3.37	-2.80%
24	0.3	2.00	30	120	1000	3.19	3.30	-2.80%
24	0.5	2.00	30	149	1000	2.97	3.07	0.13%
24	0.7	2.00	30	73	770	2.81	2.92	-2.80%
24	0.9	2.00	30	90	770	2.68	2.78	-2.80%
24	1.1	2.00	30	107	770	2.57	2.67	0.13%
24	0.1	0.50	40	99	860	3.40	3.34	0.13%
24	0.3	0.50	40	129	860	3.33	3.29	-2.79%
24	0.5	0.50	40	160	860	3.10	3.09	0.12%
24	0.7	0.50	40	59	620	2.86	2.86	-2.79%
24	0.9	0.50	40	74	620	2.73	2.74	-2.79%
24	1.1	0.50	40	89	620	2.57	2.62	-2.79%
24	0.1	0.88	40	70	860	3.39	3.33	3.48%
24	0.3	0.88	40	96	860	3.33	3.29	3.48%
24	0.5	0.88	40	121	860	3.10	3.09	3.45%
24	0.7	0.88	40	37	620	2.79	2.79	3.45%
24	0.9	0.88	40	52	620	2.77	2.78	3.45%
24	1.1	0.88	40	63	620	2.61	2.63	3.45%
24	0.1	1.25	40	102	1000	3.42	3.37	3.43%
24	0.3	1.25	40	132	1000	3.34	3.29	3.43%
24	0.5	1.25	40	163	1000	3.11	3.09	3.43%
24	0.7	1.25	40	82	770	2.88	2.88	3.43%
24	0.9	1.25	40	100	770	2.68	2.74	3.59%
24	1.1	1.25	40	118	770	2.57	2.58	3.59%
24	0.1	1.63	40	87	1000	3.40	3.34	3.42%
24	0.3	1.63	40	115	1000	3.34	3.27	3.42%
24	0.5	1.63	40	144	1000	3.10	3.09	3.42%

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)				
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β MLG	β KS	Erro relativo
24	0.7	1.63	40	69	770	2.87	2.88	3.42%
24	0.9	1.63	40	86	770	2.68	2.74	1.58%
24	1.1	1.63	40	102	770	2.57	2.58	1.58%
24	0.1	2.00	40	76	1000	3.39	3.33	1.54%
24	0.3	2.00	40	103	1000	3.30	3.27	1.54%
24	0.5	2.00	40	129	1000	3.10	3.09	1.52%
24	0.7	2.00	40	60	770	2.86	2.87	1.52%
24	0.9	2.00	40	76	770	2.69	2.75	1.50%
24	1.1	2.00	40	91	770	2.57	2.59	1.50%
24	0.1	0.50	50	87	860	3.46	3.28	-0.36%
24	0.3	0.50	50	115	860	3.38	3.23	-0.36%
24	0.5	0.50	50	144	860	3.14	3.03	-0.37%
24	0.7	0.50	50	50	620	2.87	2.79	-0.37%
24	0.9	0.50	50	65	620	2.76	2.70	-0.37%
24	1.1	0.50	50	78	620	2.59	2.57	-0.37%
24	0.1	0.88	50	60	860	3.44	3.26	-1.38%
24	0.3	0.88	50	85	860	3.39	3.24	-1.38%
24	0.5	0.88	50	108	860	3.14	3.03	-1.38%
24	0.7	0.88	50	29	620	2.77	2.69	-0.40%
24	0.9	0.88	50	45	620	2.82	2.76	-0.40%
24	1.1	0.88	50	54	620	2.60	2.59	-3.44%
24	0.1	1.25	50	90	1000	3.50	3.32	-0.40%
24	0.3	1.25	50	118	1000	3.39	3.24	-0.40%
24	0.5	1.25	50	146	1000	3.14	3.04	-0.40%
24	0.7	1.25	50	71	770	2.90	2.82	-0.40%
24	0.9	1.25	50	88	770	2.71	2.65	-3.43%
24	1.1	1.25	50	105	770	2.60	2.54	-0.41%
24	0.1	1.63	50	76	1000	3.45	3.28	-0.41%
24	0.3	1.63	50	102	1000	3.39	3.24	-3.44%
24	0.5	1.63	50	128	1000	3.14	3.04	-0.41%
24	0.7	1.63	50	59	770	2.89	2.81	-0.41%
24	0.9	1.63	50	75	770	2.71	2.65	-0.42%
24	1.1	1.63	50	90	770	2.60	2.54	-0.42%
24	0.1	2.00	50	66	1000	3.44	3.27	-3.43%
24	0.3	2.00	50	91	1000	3.39	3.24	-0.42%
24	0.5	2.00	50	115	1000	3.14	3.04	-0.42%
24	0.7	2.00	50	51	770	2.88	2.80	-3.43%
24	0.9	2.00	50	66	770	2.72	2.71	-0.42%
24	1.1	2.00	50	80	770	2.60	2.54	-0.42%

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)				
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β MLG	β KS	Erro relativo
28	0.1	0.50	30	134	920	3.29	3.39	-0.42%
28	0.3	0.50	30	173	920	3.20	3.30	-0.42%
28	0.5	0.50	30	212	920	3.03	3.07	-3.43%
28	0.7	0.50	30	71	640	2.81	2.92	-3.46%
28	0.9	0.50	30	89	640	2.68	2.78	-3.46%
28	1.1	0.50	30	107	640	2.57	2.67	-4.65%
28	0.1	0.88	30	97	920	3.27	3.38	-3.46%
28	0.3	0.88	30	129	920	3.20	3.30	-3.46%
28	0.5	0.88	30	162	920	3.03	3.07	-3.46%
28	0.7	0.88	30	45	640	2.76	2.87	-3.46%
28	0.9	0.88	30	62	640	2.71	2.81	3.13%
28	1.1	0.88	30	75	640	2.57	2.67	-1.24%
28	0.1	1.25	30	141	1080	3.30	3.40	-3.46%
28	0.3	1.25	30	180	1080	3.20	3.31	-3.47%
28	0.5	1.25	30	221	1080	2.98	3.08	3.32%
28	0.7	1.25	30	105	810	2.83	2.93	3.29%
28	0.9	1.25	30	128	810	2.69	2.79	-3.47%
28	1.1	1.25	30	150	810	2.53	2.63	-3.46%
28	0.1	1.63	30	121	1080	3.28	3.38	-3.47%
28	0.3	1.63	30	159	1080	3.20	3.31	-3.46%
28	0.5	1.63	30	195	1080	2.97	3.08	-3.47%
28	0.7	1.63	30	90	810	2.83	2.93	-3.47%
28	0.9	1.63	30	110	810	2.69	2.79	3.27%
28	1.1	1.63	30	130	810	2.53	2.67	3.27%
28	0.1	2.00	30	108	1080	3.28	3.38	-3.47%
28	0.3	2.00	30	143	1080	3.20	3.31	2.37%
28	0.5	2.00	30	177	1080	2.97	3.08	3.28%
28	0.7	2.00	30	78	810	2.82	2.93	3.25%
28	0.9	2.00	30	98	810	2.69	2.79	3.24%
28	1.1	2.00	30	116	810	2.53	2.67	3.24%
28	0.1	0.50	40	114	920	3.42	3.36	3.24%
28	0.3	0.50	40	149	920	3.34	3.30	5.20%
28	0.5	0.50	40	185	920	3.11	3.10	3.23%
28	0.7	0.50	40	57	640	2.85	2.86	3.23%
28	0.9	0.50	40	74	640	2.74	2.75	3.23%
28	1.1	0.50	40	90	640	2.57	2.58	3.23%
28	0.1	0.88	40	81	920	3.41	3.34	3.21%
28	0.3	0.88	40	110	920	3.34	3.30	3.21%
28	0.5	0.88	40	140	920	3.11	3.10	3.20%

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)				
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β MLG	β KS	Erro relativo
28	0.7	0.88	40	33	640	2.75	2.76	3.20%
28	0.9	0.88	40	51	640	2.80	2.81	3.20%
28	1.1	0.88	40	62	640	2.59	2.60	3.20%
28	0.1	1.25	40	121	1080	3.45	3.39	3.20%
28	0.3	1.25	40	157	1080	3.35	3.30	3.20%
28	0.5	1.25	40	193	1080	3.11	3.10	3.19%
28	0.7	1.25	40	88	810	2.89	2.89	-1.35%
28	0.9	1.25	40	109	810	2.69	2.70	3.19%
28	1.1	1.25	40	129	810	2.58	2.59	3.19%
28	0.1	1.63	40	103	1080	3.41	3.35	3.19%
28	0.3	1.63	40	137	1080	3.35	3.30	-4.87%
28	0.5	1.63	40	170	1080	3.11	3.10	-4.88%
28	0.7	1.63	40	74	810	2.88	2.88	-1.33%
28	0.9	1.63	40	93	810	2.69	2.70	3.14%
28	1.1	1.63	40	111	810	2.58	2.59	3.14%
28	0.1	2.00	40	91	1080	3.41	3.35	3.12%
28	0.3	2.00	40	122	1080	3.35	3.28	-1.39%
28	0.5	2.00	40	153	1080	3.11	3.10	3.11%
28	0.7	2.00	40	64	810	2.87	2.87	3.10%
28	0.9	2.00	40	82	810	2.70	2.70	3.09%
28	1.1	2.00	40	98	810	2.58	2.59	-4.91%
28	0.1	0.50	50	100	920	3.48	3.30	3.08%
28	0.3	0.50	50	133	920	3.39	3.24	3.07%
28	0.5	0.50	50	166	920	3.15	3.04	-1.10%
28	0.7	0.50	50	47	640	2.86	2.78	-0.95%
28	0.9	0.50	50	64	640	2.73	2.72	3.06%
28	1.1	0.50	50	78	640	2.60	2.54	3.06%
28	0.1	0.88	50	69	920	3.46	3.28	3.05%
28	0.3	0.88	50	97	920	3.40	3.25	3.05%
28	0.5	0.88	50	124	920	3.15	3.04	3.05%
28	0.7	0.88	50	25	640	2.74	2.66	3.05%
28	0.9	0.88	50	42	640	2.84	2.77	3.05%
28	1.1	0.88	50	52	640	2.62	2.56	-1.94%
28	0.1	1.25	50	108	1080	3.54	3.36	-1.00%
28	0.3	1.25	50	140	1080	3.40	3.24	-1.00%
28	0.5	1.25	50	174	1080	3.09	3.04	-1.00%
28	0.7	1.25	50	76	810	2.85	2.83	3.03%
28	0.9	1.25	50	95	810	2.72	2.65	-1.48%
28	1.1	1.25	50	114	810	2.60	2.54	3.02%

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)				
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β MLG	β KS	Erro relativo
28	0.1	1.63	50	90	1080	3.47	3.29	3.01%
28	0.3	1.63	50	121	1080	3.40	3.25	-1.03%
28	0.5	1.63	50	152	1080	3.09	3.04	-0.97%
28	0.7	1.63	50	63	810	2.84	2.82	-1.03%
28	0.9	1.63	50	81	810	2.72	2.66	-1.19%
28	1.1	1.63	50	97	810	2.60	2.55	-1.18%
28	0.1	2.00	50	78	1080	3.46	3.29	-2.01%
28	0.3	2.00	50	108	1080	3.40	3.25	-1.14%
28	0.5	2.00	50	137	1080	3.09	3.04	-1.22%
28	0.7	2.00	50	53	810	2.82	2.80	-1.22%
28	0.9	2.00	50	71	810	2.73	2.67	-4.38%
28	1.1	2.00	50	86	810	2.61	2.55	-1.23%
16	0.1	2.50	30	34	730	3.28	3.38	-2.04%
16	0.3	2.50	30	46	730	3.17	3.27	-4.96%
16	0.5	2.50	30	59	730	2.93	3.03	-1.24%
16	0.7	2.50	30	26	580	2.67	2.78	2.94%
16	0.9	2.50	30	37	580	2.70	2.80	-4.38%
16	1.1	2.50	30	44	580	2.55	2.65	-1.24%
16	0.1	2.50	40	25	730	3.14	3.10	-1.25%
16	0.3	2.50	40	40	730	3.35	3.32	-1.25%
16	0.5	2.50	40	50	730	3.07	3.06	-2.06%
16	0.7	2.50	40	20	580	2.66	2.67	-2.06%
16	0.9	2.50	40	31	580	2.78	2.79	-4.16%
16	1.1	2.50	40	36	580	2.60	2.61	-1.00%
16	0.1	2.50	50	20	730	3.13	2.99	-1.58%
16	0.3	2.50	50	35	730	3.45	3.31	-4.09%
16	0.5	2.50	50	44	730	3.12	3.01	-1.63%
16	0.7	2.50	50	16	580	2.65	2.58	-4.47%
16	0.9	2.50	50	26	580	2.81	2.74	-1.61%
16	1.1	2.50	50	31	580	2.63	2.57	-4.45%
20	0.1	2.50	30	71	920	3.39	3.49	-4.47%
20	0.3	2.50	30	90	920	3.18	3.28	-1.62%
20	0.5	2.50	30	112	920	2.96	3.06	-4.46%
20	0.7	2.50	30	57	720	2.80	2.90	-4.46%
20	0.9	2.50	30	71	720	2.67	2.78	-1.66%
20	1.1	2.50	30	84	720	2.56	2.66	-1.65%
20	0.1	2.50	40	56	920	3.35	3.30	-4.49%
20	0.3	2.50	40	77	920	3.29	3.26	-4.50%
20	0.5	2.50	40	97	920	3.09	3.08	-1.82%

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)				
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β MLG	β KS	Erro relativo
20	0.7	2.50	40	47	720	2.84	2.84	-4.49%
20	0.9	2.50	40	60	720	2.73	2.74	-4.49%
20	1.1	2.50	40	71	720	2.61	2.62	-1.65%
20	0.1	2.50	50	48	920	3.39	3.22	-1.67%
20	0.3	2.50	50	68	920	3.35	3.21	-5.03%
20	0.5	2.50	50	86	920	3.13	3.02	-4.49%
20	0.7	2.50	50	39	720	2.84	2.76	-4.51%
20	0.9	2.50	50	52	720	2.77	2.71	2.84%
20	1.1	2.50	50	62	720	2.59	2.58	-1.57%
24	0.1	2.50	30	80	1000	3.28	3.38	-1.68%
24	0.3	2.50	30	107	1000	3.20	3.30	-4.51%
24	0.5	2.50	30	134	1000	2.97	3.07	-4.07%
24	0.7	2.50	30	63	770	2.81	2.91	-4.51%
24	0.9	2.50	30	79	770	2.69	2.79	-1.69%
24	1.1	2.50	30	94	770	2.57	2.67	-1.72%
24	0.1	2.50	40	66	1000	3.38	3.32	-4.51%
24	0.3	2.50	40	91	1000	3.31	3.27	-4.51%
24	0.5	2.50	40	115	1000	3.10	3.09	-4.49%
24	0.7	2.50	40	51	770	2.85	2.85	-5.09%
24	0.9	2.50	40	66	770	2.75	2.76	-1.86%
24	1.1	2.50	40	80	770	2.58	2.59	-1.71%
24	0.1	2.50	50	56	1000	3.43	3.25	-4.51%
24	0.3	2.50	50	80	1000	3.40	3.25	-5.05%
24	0.5	2.50	50	102	1000	3.14	3.04	-1.71%
24	0.7	2.50	50	42	770	2.84	2.77	-1.75%
24	0.9	2.50	50	57	770	2.74	2.73	-4.38%
24	1.1	2.50	50	69	770	2.60	2.54	-5.06%
28	0.1	2.50	30	95	1080	3.30	3.40	-1.71%
28	0.3	2.50	30	127	1080	3.20	3.31	-5.09%
28	0.5	2.50	30	159	1080	2.97	3.08	-5.13%
28	0.7	2.50	30	67	810	2.81	2.92	-5.15%
28	0.9	2.50	30	85	810	2.69	2.80	-5.11%
28	1.1	2.50	30	102	810	2.54	2.67	-4.06%
28	0.1	2.50	40	78	1080	3.40	3.34	-5.01%
28	0.3	2.50	40	108	1080	3.35	3.28	-5.14%
28	0.5	2.50	40	137	1080	3.11	3.10	-1.76%
28	0.7	2.50	40	53	810	2.85	2.85	-4.96%
28	0.9	2.50	40	71	810	2.71	2.71	-5.18%
28	1.1	2.50	40	86	810	2.58	2.59	-5.19%

h (cm)	δ	ρ (%)	fck (MPa)	ABNT NBR 6118 (2014)				
				lp (cm)	Dist. entre pilares (cm)	β MLG	β KS	Erro relativo
28	0.1	2.50	50	67	1080	3.45	3.28	-5.04%
28	0.3	2.50	50	95	1080	3.41	3.26	-5.21%
28	0.5	2.50	50	121	1080	3.15	3.04	-5.21%
28	0.7	2.50	50	44	810	2.78	2.76	-4.94%
28	0.9	2.50	50	61	810	2.76	2.69	-5.03%
28	1.1	2.50	50	74	810	2.61	2.55	-5.08%

APÊNDICE F – CÓDIGO UTILIZADO PARA DETERMINAÇÃO DOS ÍNDICES DE CONFIABILIDADE β

```

""" -----
Programador: Gustavo Ribeiro
Data: 01/06/22
Nome do arquivo: First Order Reliability Method - FORM
-----"""

from sympy import *
import numpy as np
import scipy.stats
import HLRF
import DE
import modulo_geral_AG as mg
# Dados de entrada
fel = 3 # 1:Modelo R2; 2: EC2; 3:Sup. de controle; 4:MC2010; 5:ACI
norn = 2 # 1:NBR; 2:ACI; 3:EC2
n = 10 # número de variáveis aleatórias
thetar = 0. # média do erro do modelo de resistência
thetas = 10. # média do erro do modelo da solicitação
dl = 2. # Cobrimento do concreto (cm)
fyk = 50. # Resistência ao escoamento do aço arm. long. (kN/cm2)
esl = 20000. # Módulo de elasticidade do aço long.
#
ht = 4 # Quantidade de alturas analisadas
hi = 16.
hf = 28.
nh = 0
#
rot = 5 # Quantidade de alturas analisadas
roi = 0.005
rof = 0.020
nro = 0
#
fct = 3
fci = 3. # Resistência carac.a compr. do concr. (kN/cm2)
fcf = 5.
nfc = 0
#
dltt = 6
dlti = 0.1
dltf = 1.1
ndlt = 0
#
cnt = 0
while nh <= (ht-1):
    hl = hi+(hf-hi)/(ht-1)*nh
    nh = nh + 1
    if nfc == fct:
        nfc = 0
    while nfc <= (fct-1):
        fck = fci+(fcf-fci)/(fct-1)*nfc
        nfc = nfc + 1
    if nro == rot:
        nro = 0
    while nro <= (rot - 1):
        ro = roi + (rof - roi) / (rot - 1) * nro
        #ro = roi

```

```

nro = nro + 1
if ndlt == dltt:
    ndlt = 0
while ndlt <= (dltt-1):
    delta = dlti + (dltf - dlti) / (dltt-1) * ndlt
    #delta = dlti
    ndlt = ndlt + 1
    cnt = cnt + 1
'''-----
-----
Determinação de parâmetros de programação - cálculo dos
parâmetros da análise
-----'''
'''-----
Determinação dos coeficientes de variação e médias
-----'''
g = 25*h1/100+1
q = g*delta
v = np.zeros(n)
m = np.zeros(n)
#m[0] = fck / (1 - 1.645 * v[0]) # Resistência média a
comp. do concr. (kN/cm2)
if fck == 3:
    m[0] = 1.22*fck
    v[0] = 0.15
elif fck == 4:
    m[0] = 1.16 * fck
    v[0] = 0.11
elif fck == 5:
    m[0] = 1.11 * fck
    v[0] = 0.10
v[1] = v[0] # Coef. de variação de Eci
v[2] = 1.2 * v[0] # Coef. de variação de ft
v[3] = 0.05 # Coef. de variação de fy
v[4] = 0.4/h1 + 0.006 # Coef. de variação da altura da
laje
v[5] = 0.125 # Coef. de variação do cobrimento do concr.
v[6] = 0.12 # Coef. de variação da carga permanente
v[7] = 0.25 # Coef. de variação da carga variável
v[8] = 0.11 # Coef. de variação da resistência
v[9] = 0.10 # Coef. de variação da solicitação
m[1] = 2150. * m[0] ** (1 / 3) # Modulo de elasticidade do
concreto (kN/cm2)
(kN/cm2)
if fck <= 5: # Resistência média a tração do conc.
    m[2] = 0.03 * (10 * fck) ** (2 / 3) # fkc<=50 MPa
else:
    m[2] = 0.212 * log(1 + 0.1 * (10 * fck + 8)) # fck> 50
MPa
!
m[3] = 1.12*fyk # Resistência média ao escoamento da arm.
long.
m[4] = h1
m[5] = d1
m[6] = 1.06 * g # Carga permanente (kN/m^2)
m[7] = 1.0 * q # Carga acidental (kN/m^2)
m[8] = thetar # EmR
m[9] = thetas # EmS
'''-----
-----
Determinação das variáveis aleatorias
-----'''

```

```

d = np.zeros(n)
for i in range(n):
    d[i] = m[i] * v[i]
if fel == 1:
    d[8] = 0.777 #R2
elif fel == 2:
    d[8] = 1.456 # EC2
elif fel == 3:
    d[8] = 0.976 # NBR
elif fel == 4:
    d[8] = 1.256 #MC 2010
elif fel == 5:
    d[8] = 1.394 # ACI
'''
-----
Ponto inicial de falha
-----'''
X = np.array([float(m[0]), float(m[3]), float(m[4]),
float(m[5]), float(m[6]), float(m[7]), float(m[8]),
float(m[9])])
dsv = np.array([float(d[0]), float(d[3]), float(d[4]),
float(d[5]), float(d[6]), float(d[7]), float(d[8]),
float(d[9])])

#
bro = mg.bpilar(0, 5, X, ro, hl, g, q, fck, norn, fyk)
b = bro[0]
rho = bro[1]
cont = 0
Bf = 5
h = 0.1
hk = np.zeros(len(X))
GX = np.zeros(len(X)+1)
grad = np.zeros(len(X))
X0n = np.zeros(len(X))
cos = np.zeros(len(X))
delta = 10
erro = 0.001
while cont < 30:
    cont = cont + 1
    Bi = Bf
    '''
    -----
    variaveis com distribuição normal equivalente
    -----'''
    a1 = DE.gumbel(m[7], d[7], X[5])
    a2 = DE.lognormal(m[9], d[9], X[7])
    #
    u_n = np.array([float(m[0]), float(m[3]), float(m[4]),
float(m[5]), float(m[6]), a1[0], float(m[8]), a2[0]])
    dsv_n = np.array([float(d[0]), float(d[3]),
float(d[4]), float(d[5]), float(d[6]), a1[1], float(d[8]), a2[1]])
    '''
    -----
    variáveis normalizadas
    -----'''
    for j in range(len(X)):
        X0n[j] = (X[j] - u_n[j]) / dsv_n[j]
    for i in range(len(X)+1):
        Xt = X + hk
        print("Ponto de projeto atual", Xt)
        GX[i] = mg.funcao_el(Xt, fel, rho, b, hl)
        if i < len(X):
            hk = np.zeros(len(X))
            hk[i] = h

```

```

        else:
            hk = np.zeros(len(X))
'''-----'''
Vetor gradiente
'''-----'''
for i2 in range(len(X)):
    grad[i2] = (GX[i2+1]-GX[0])/h*dsv_n[i2]
'''-----'''
Cossenos diretores
'''-----'''
for i3 in range(len(X)):
    cos[i3] = grad[i3] / np.linalg.norm(grad)
'''-----'''
Atualização das variáveis aleatórias
'''-----'''
Xn = HLRF.hlrhf(grad, X0n, GX[0])
#Xn = HLRF.ihlrhf(grad, X0n, GX[0], u_n, dsv_n, fel)
cv = 1 - abs(np.matmul(grad, Xn))/(np.linalg.norm(grad)
* np.linalg.norm(Xn))
Bf = np.linalg.norm(Xn)
pf = scipy.stats.norm.cdf(-Bf)
print("função estado limite", GX[0])
print("índice de confiabilidade", Bf)
print("cv = ", cv)
for i4 in range(len(X)):
    X[i4] = u_n[i4] + Xn[i4] * dsv_n[i4]
if abs(GX[0]) < delta and cv < erro:
    print(cnt)
    print(Bf)
    f = open('confiabilidade.txt', 'a')
    f.write("Combinação," + str(cnt) + "\n")
    f.write("Largura do pilar," + str(b) + "\n")
    f.write("Altura," + str(hl) + "\n")
    f.write("fck," + str(fck) + "\n")
    f.write("g," + str(g) + "\n")
    f.write("ro," + str(rho) + "\n")
    f.write("q," + str(q) + "\n")
    f.write("Índice de confiabilidade," + str(Bf) +
"\n")

    f.write("Ponto de projeto - X=" + str(X) + "\n")
break

```

Módulo “HLRF”

```

def hlrhf(grad, x0n, gx):
    xn = (np.matmul(grad, x0n) - gx) / (np.linalg.norm(grad) ** 2) * grad
    return xn

```

Módulo “modulo_fl”

```

from subprocess import call
import datetime
import os

```

```

def runAPDL(ansyscall, numprocessors, workingdir, scriptFilename):
    """
    runs the APDL script: scriptFilename.inp
    located in the folder: workingdir
    using APDL executable invoked by: ansyscall
    using the number of processors in: numprocessors
    returns the number of Ansys errors encountered in the run
    """
    inputFile = os.path.join(workingdir,
                              scriptFilename + ".inp")
    # make the output file be the input file plus timestamp
    outputFile = os.path.join(workingdir,
                              scriptFilename +

'{:Y%m%d%H%M%S}'.format(datetime.datetime.now()) +
                              ".out")
    # keep the standard ansys jobname
    jobname = "file"
    callString = ("\"{}\" -p ansys -dis -mpi INTELMPI"
                  " -np {} -dir \"{}\" -j \"{}\" -s read"
                  " -b -i \"{}\" -o \"{}\"").format(
        ansyscall,
        numprocessors,
        workingdir,
        jobname,
        inputFile,
        outputFile)
    '''print("invoking ansys with: ", callString)'''
    call(callString, shell=False)

    # check output file for errors
    '''print("checking for errors)'''
    numerrors = "undetermined"
    try:
        searchfile = open(outputFile, "r")
    except:
        '''print("could not open", outputFile)'''
    else:
        for line in searchfile:
            if "NUMBER OF ERROR" in line:
                '''print(line)'''
                numerrors = int(line.split()[-1])
        searchfile.close()
    return (numerrors)

def main():
    ansyscall = "C:\\Program Files\\ANSYS
Inc\\v181\\ansys\\bin\\winx64\\MAPDL.exe"
    numprocessors = 2
    workingdir = "C:\\Ansys"
    scriptFilename = "solicitacao"
    nErr = runAPDL(ansyscall,
                   numprocessors,
                   workingdir,
                   scriptFilename)
    '''print("number of Ansys errors: ", nErr)'''

def main_2():
    ansyscall = "C:\\Program Files\\ANSYS
Inc\\v181\\ansys\\bin\\winx64\\MAPDL.exe"

```

```

numprocessors = 2
workingdir = "C:\\Ansys"
scriptFilename = "resistencia"
nErr = runAPDL(ansyscall,
               numprocessors,
               workingdir,
               scriptFilename)
'''print("number of Ansys errors: ", nErr)'''

def alterar_linha(path,index_linha,nova_linha):
    with open(path,'r') as f:
        texto=f.readlines()
    with open(path,'w') as f:
        for i in texto:
            if texto.index(i)==index_linha:
                f.write(nova_linha+'\n')
            else:
                f.write(i)

Módulo “modulo_geral_AG”

import numpy as np
import modulo_f1

def funcao_el(x, i, ro, bp, hel):
    arquivo = open('reacoes.txt', 'a')
    arquivo_2 = open('carga_de_ruptura.txt', 'a')
    arquivo_4 = open('funcao_EL.txt', 'a')
    # Solicitação
    gk = f"cg={x[4]}"
    qk = f"cq={x[5]}"
    bpp = f"lpx={bp}"
    he = f"h={hel}"
    m15 = modulo_f1.alterar_linha('C:\\Ansys\\solicitacao.inp', 13, he)
    m16 = modulo_f1.alterar_linha('C:\\Ansys\\solicitacao.inp', 28, gk)
    m17 = modulo_f1.alterar_linha('C:\\Ansys\\solicitacao.inp', 29, qk)
    m18 = modulo_f1.alterar_linha('C:\\Ansys\\solicitacao.inp', 17, bpp)
    a = modulo_f1.main()
    arquivo_1 = open('C:\\Ansys\\PARS.txt')
    x1 = arquivo_1.readlines()
    arquivo.write(x1[24])
    Reacao = x1[24]
    S = float(Reacao[16:30])
    if i == 1:
        # Resistência
        alt_1 = f"fc={x[0]}"
        '''alt_2 = f"Eci={Xt[1]}'''
        alt_3 = f"ft={Xt[2]}'''
        alt_4 = f"fy={x[1]}"
        alt_5 = f"h={x[2]}"
        alt_6 = f"d1={x[3]}"
        m10 = modulo_f1.alterar_linha('C:\\Ansys\\resistencia.inp', 43,
alt_1)
        '''m11 = modulo_f1.alterar_linha('C:\\Ansys\\resistencia.inp', 54,
alt_2)
        m12 = modulo_f1.alterar_linha('C:\\Ansys\\resistencia.inp', 55,

```

```

alt_3)'''
    m13 = modulo_f1.alterar_linha('C:\\Ansys\\resistencia.inp', 49,
alt_4)
    m14 = modulo_f1.alterar_linha('C:\\Ansys\\resistencia.inp', 17,
alt_5)
    m15 = modulo_f1.alterar_linha('C:\\Ansys\\resistencia.inp', 26,
alt_6)
    a2 = modulo_f1.main_2()
    arquivo_3 = open('C:\\Ansys\\PARR.txt')
    x3 = arquivo_3.readlines()
    arquivo_2.write(x3[29])
    carga_rupt = x3[29]
    R = float(carga_rupt[16:30])
'''-----
Função Estado Limite
-----'''

    Ems = x[7]/10
    Emr = np.exp(0.0489 - 3.2005 * ro) + x[6]/10
    Rn = Emr * R
    Sn = Ems * S
    print("Resistência = ", Rn)
    print("Solicitação = ", Sn)
    gx = Rn - Sn
    arquivo_4.write(str(gx) + "\n")
elif i == 2:
    bx = bp
    by = bp
    Ems = x[7] / 10
    '''Resistência'''
    qsi = 1 + ((20 / (x[2] - x[3])) ** (1 / 2))
    if qsi>2:
        qsi = 2
    u = 2 * bx + 2 * by
    u1 = u + 2 * 3.14 * 2 * (x[2] - x[3])
    R = 0.018 * qsi * (100 * ro * x[0] * 10) ** (1 / 3) * (x[2] - x[3])
* u1
    Emr = np.exp(0.3275 -0.0013 * (x[2] - x[3]) * 10 + 0.0045*(bx/(x[2]
- x[3]))) + x[6] / 10
    # Emr = x[6]
    print(Emr)
    arquivo_2.write(str(R) + "\n")
'''-----
Função Estado Limite
-----'''

    Rn = Emr * R
    Sn = Ems * S
    print("Resistência = ", Rn)
    print("Solicitação = ", Sn)
    gx = Rn - Sn
    arquivo_4.write(str(gx) + "\n")
elif i == 3:
    bx = bp
    by = bp
    Ems = x[7]/10
    '''Resistência'''
    qsi = 1 + ((20 / (x[2] - x[3])) ** (1 / 2))
    u = 2 * bx + 2 * by
    u1 = u + 2 * 3.14 * 2 * (x[2] - x[3])
    R = 0.018 * qsi * (100 * ro * x[0] * 10) ** (1 / 3) * (x[2] - x[3])

```

```

* u1
Emr = np.exp(-0.1086+0.0021*x[0]*10)+x[6]/10
#Emr = x[6]/10
#print (Emr)
arquivo_2.write(str(R) + "\n")
'''
-----
Função Estado Limite
-----
'''

Rn = Emr * R
Sn = Ems * S
print("Resistência = ", Rn)
print("Solicitação = ", Sn)
gx = Rn - Sn
arquivo_4.write(str(gx) + "\n")
elif i == 4:
    '''Resistência'''
    bx = 439 # mm
    by = 439 # mm
    rs = 1320 # mm
    dg = 19 # mm
    es = 200000 # MPa
    R = goal_seek(0, 0.1, x, ro, bx, by, rs, dg, es)
    arquivo_2.write(str(R) + "\n")
    '''
    -----
    Função Estado Limite
    -----
    '''

    Emr = np.exp(0.1892 + 0.0010 * x[0] * 10-0.0004*bx+0.0002*x[1]) +
x[6] / 10
    Ems = x[7] / 10
    Rn = Emr * R
    Sn = Ems * S
    print("Resistência = ", Rn)
    print("Solicitação = ", Sn)
    gx = Rn - Sn
    arquivo_4.write(str(gx) + "\n")
    elif i == 5:
        bx = bp*10 # mm
        by = bp*10 # mm
        d = (x[2] - x[3])*10
        fc = x[0]*10
        alfs = 40
        betac = 1
        lams = (2/(1+0.004*d))**(1/2)
        bo = 2*(bx+d)+2*(by+d)
        vc1 = 1/6*(1+2/betac)*(fc**(1/2))*bo*d/1000*lams
        vc2 = 1/12*(2+alfs*d/bo)*(fc**(1/2))*bo*d/1000*lams
        vc3 = 1/3*(fc**(1/2))*bo*d/1000*lams
        R = min(vc1, vc2, vc3)
        arquivo_2.write(str(R) + "\n")
        '''
        -----
        Função Estado Limite
        -----
        '''

    Emr = np.exp(0.3162 + 0.1444 * ro - 0.0012 * bx) + x[6] / 10
    Ems = x[7] / 10
    Rn = Emr * R
    Sn = Ems * S
    print("Resistência = ", Rn)
    print("Solicitação = ", Sn)

```



```

    gx = Rn - Sn
    arquivo_4.write(str(gx) + "\n")
return gx

```

```

def bpilar(target, _threshold, x, ro, hl, g, q, fck, i, fyk):
    threshold = _threshold
    lower = 0
    h = 0.01
    aa = np.zeros(1)
    arquivo = open('reacoes_pilar.txt', 'a')
    delta = q/g
    if delta <= 0.5:
        distd = 0.0
    else:
        distd = 0.25*40*hl
    if ro <= 0.01:
        distro = 0.0
    else:
        distro = 0.15*40*hl
    if fck <= 40:
        distfc = 0.0
    else:
        distfc = 0.15*40*hl
    cor = (distro+distfc-distd)/10
    dist = (40*hl+int(cor)*10)
    if hl == 24:
        dist = dist - 100
    if hl == 28:
        dist = dist - 200
    if i == 1:
        #gd = 1.43*g
        #qd = 2.01*q
        gd = 1.4*g
        qd = 1.4*q
    elif i == 2:
        gd = 1.2 * g
        qd = 1.6 * q
        ct = gd + qd
        gd2 = 1.4 * g
        if gd2 > ct:
            gd = gd2
            qd = 0
    elif i == 3:
        f1 = 1.15 * g + 1.5 * q
        f2 = 1.35 * g + 1.05 * q
        if f1 <= f2:
            gd = 1.35 * g
            qd = 1.05 * q
        else:
            gd = 1.15 * g
            qd = 1.50 * q
    elif i == 4:
        gd = 1.35 * g
        qd = 1.5 * q
    gd1 = f"cg={gd}"
    qd1 = f"cq={qd}"
    he = f"h={hl}"
    dp = f"dp={dist}"
    ml5 = modulo_f1.alterar_linha('C:\\Ansys\\solicitacao.inp', 13, he)

```

```

m16 = modulo_f1.alterar_linha('C:\\Ansys\\solicitacao.inp', 28, gd1)
m17 = modulo_f1.alterar_linha('C:\\Ansys\\solicitacao.inp', 29, qd1)
m17 = modulo_f1.alterar_linha('C:\\Ansys\\solicitacao.inp', 14, dp)
a = modulo_f1.main()
arquivo_1 = open('C:\\Ansys\\PARS.txt')
x1 = arquivo_1.readlines()
arquivo.write(x1[24])
Reacao = x1[24]
s = float(Reacao[16:30])
while abs(threshold) >= _threshold:
    solve = lower + h
    aa = b(solve, x, ro, s, fck, i, dist, fyk)
    threshold = target - aa[0]
    lower = solve
print("Largura do pilar", aa[1])
arquivo.write(str(dist))
if i == 2:
    asm = (5*s/(hl-2)*(2*1.5*hl+aa[1]))/(0.75*40*50)
    ac = (2*1.5*hl+aa[1])*(hl-2)
    rom = asm/ac
    if rom > ro:
        ro = rom
    print("ro", ro)
    arquivo.write(str(ro))
return [aa[1], ro]

def b(bp, x, ro, s, fck, i, dist, fyk):
    if i == 1:
        qsi = 1+(20/(x[2]-x[3]))**(1/2)
        u1 = 4*bp+4*np.pi*(x[2]-x[3])
        vrd = 0.13*qsi*(ro*1000*fck)**(1/3)/10*(x[2]-x[3])*u1
        v = s
        bo = u1
        goal = vrd - v
    elif i == 2:
        bx = bp * 10 # mm
        by = bp * 10 # mm
        d = (x[2] - x[3]) * 10
        fc = fck * 10
        alfs = 40
        betac = 1
        lams = (2 / (1 + 0.004 * d)) ** (1 / 2)
        if lams >= 1:
            lams = 1
        bo = 2 * (bx + d) + 2 * (by + d)
        vc1 = 1 / 6 * (1 + 2 / betac) * (fc ** (1 / 2)) * bo * d / 1000 *
lams
        vc2 = 1 / 12 * (2 + alfs * d / bo) * (fc ** (1 / 2)) * bo * d /
1000 * lams
        vc3 = 1 / 3 * (fc ** (1 / 2)) * bo * d / 1000 * lams
        rk = min(vc1, vc2, vc3)
        rd = 0.75*rk
        goal = rd - s
    elif i == 3:
        qsi = 1 + (20 / (x[2] - x[3])) ** (1 / 2)
        if qsi >= 2:
            qsi = 2
        if ro >= 0.02:
            ro = 0.02
        u1 = 4 * bp + 4 * np.pi * (x[2] - x[3])

```

```

vrdr = 0.12 * qsi * (ro * 1000 * fck) ** (1 / 3) / 10 * (x[2] -
x[3]) * u1
ved = vrdr
v = s
goal = ved - v
elif i == 4:
    bx = bp*10 # mm
    by = bp*10 # mm
    rs = 0.22*dist*10 # mm
    d = (x[2] - x[3]) * 10
    dg = 19 # mm
    es = 200000 # MPa
    fyd = fyk*10/1.15
    fcd = fck*10/1.5
    mrd = (ro * d ** 2 * fyd * (1 - 0.5 * ro * fyd / fcd))/1000
    med = s/8
    psi = 1.5*rs/d*fyd/es*(med/mrd)**(3/2)
    kdg = 32 / (16 + dg)
    if kdg <= 0.75:
        kdg = 0.75
    kpsi = 1 / (1.5 + 0.9 * kdg * psi * d)
    if kpsi > 0.6:
        kpsi = 0.6
    b1 = 2 * (bx + by) + 3.14 * d
    b0 = b1 # Considerando Ke=1
    vrdr = (kpsi * (fck * 10) ** (1 / 2) * b0 / 1.5 * d) / 1000
    goal = vrdr - s
return [goal, bp, bo]

```