



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Máster

Estadística: una propuesta didáctica en 1º
ESO Matemáticas
Statistic: a didactic proposal in 1º ESO
Mathematics

Autor/es

Silvia Gracia Subira

Director/es

Nuria Begué Pedrosa

Facultad de Educación

Año 2022

Contenido

A.	Sobre la definición del objeto matemático a enseñar	3
1.	Nombra el objeto matemático a enseñar	3
2.	Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático	3
3.	¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?	6
B.	Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático	8
1.	¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?	8
2.	¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?	12
3.	¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?	19
C.	Sobre los conocimientos previos del alumno	19
1.	¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?	19
2.	La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?	22
3.	¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?	23
D.	Sobre las razones de ser del objeto matemático	34
1.	¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?	34
2.	¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?	34
3.	Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.	35
4.	Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.	36
E.	Sobre el campo de problemas	37
1.	Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.	37
2.	¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?	54
3.	Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.	54
F.	Sobre las técnicas	55
1.	Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula.	55
2.	¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?	58
3.	Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?	59
4.	Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.	59
G.	Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas)	60
1.	¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?	60

2.	¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?	62
3.	Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.	62
4.	Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.	63
H.	Sobre la secuencia didáctica y su cronograma	64
1.	Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores.	64
2.	Establece una duración temporal aproximada.	64
I.	Sobre la evaluación	65
1.	Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.	66
2.	¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?	69
3.	¿Qué respuestas esperas en cada uno de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?	69
5.	¿Qué criterios de calificación vas a emplear?	74
J.	Sobre la bibliografía y páginas web	75
1.	Indica los libros, artículos y páginas web revisadas para la realización de este trabajo	75

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

1. Nombra el objeto matemático a enseñar

El objeto matemático que se va a tratar en este trabajo es estadística de 1º de ESO de matemáticas. La estadística es una de las ramas de las matemáticas dedicada al estudio de los datos, lo cual conlleva su recogida, análisis e interpretación. El objeto matemático, al nivel que se trabaja en 1º de la ESO, hace referencia al área de la estadística descriptiva, dejando para cursos superiores la estadística inferencial. La estadística descriptiva, tal y como indica su nombre, consiste en el estudio y análisis a través de la descripción de los datos. Para ello, se emplean medidas y parámetros que caracterizan el conjunto a estudiar.

2. Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático

Según la orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, el curso en el que está diseñada esta unidad didáctica es 1º de ESO y está aplicada en la asignatura de matemáticas (Boletín Oficial de Aragón [BOA], 2016).

La estadística, como objeto matemático, aparece en el currículo dentro del quinto bloque junto con otro objeto matemático con el que está relacionado, la probabilidad. En este caso, como se van a trabajar de forma independiente, se presentan únicamente los contenidos del currículo que hacen referencia a la estadística.

En primer lugar, se presentan los contenidos recogidos por la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa [LOMCE], según la Orden ECD/489/2016 (BOA, 26-05-2016).

BLOQUE 5: Estadística y probabilidad

Contenidos:

- *Población e individuo. Muestra. Variables estadísticas.*
- *Variables cualitativas y cuantitativas.*
- *Frecuencias absolutas y relativas.*
- *Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia.*
- *Diagramas de barras, y de sectores. Polígonos de frecuencias.*
- *Medidas de tendencia central.*

Por otro lado, resulta interesante ver cómo evoluciona el objeto matemático de la estadística dentro del currículo en cursos posteriores. En concreto, en 2º de la ESO se introduce un único contenido nuevo que se corresponde con las medidas de dispersión junto con los contenidos ya presentados en el curso anterior. Si se contempla un análisis

de los contenidos de 3ºESO, observamos que el aumento en el número de contenidos nuevos es considerablemente significativo con respecto al curso anterior, donde se incluyen aspectos asociados al trabajo estadístico como: “Fases y tareas de un estudio estadístico”, el cual no aparece de manera explícita en los cursos anteriores. Otros contenidos que se incluyen para este curso son: métodos de selección de una muestra estadística, representatividad de una muestra, frecuencias acumuladas, agrupación de datos en intervalos, diagramas de caja y bigotes e interpretación de la media y la desviación típica.

De la revisión del marco curricular, resulta llamativo que en el tercer curso se incluya de manera explícita, aunque concisa, un apunte de la metodología que se sigue al realizar un estudio estadístico. Por tanto, el trabajo estadístico realizado durante los otros cursos puede verse reducido al trabajo de la técnica y la caracterización de elementos como la muestra o la población de contextos previamente presentados a los alumnos. Otro aspecto para destacar es que a pesar de que en el segundo curso se presentan los parámetros de dispersión y centrales, la interpretación conjunta de la desviación típica y la media quedaría reservada al tercer curso. Esta decisión argumenta esa visión de que el trabajo de la estadística se corresponde con el cálculo de valores numéricos sin exigir una reflexión del sentido y la información que dicho valor te proporciona para el estudio estadístico.

Por otro lado, es importante analizar los criterios de evaluación de 1º de la ESO presentes en el currículo y que se emplearán para definir, en el apartado siguiente, los campos de problemas, técnicas y tecnologías a estudiar. Hay que destacar que únicamente se recogen los relacionados directamente con la estadística. Analizando los siguientes criterios se observa como estos aportan matices diferentes y nuevos sobre los contenidos recogidos en el currículo. Por ejemplo, se pone en valor la importancia de la formulación de preguntas a lo largo de todo el estudio estadístico. También, se refleja la importancia del uso e inclusión de las TIC dentro del proceso de aprendizaje.

Criterios de evaluación (1º ESO):

Crit.MA.5.1. Formular preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas adecuadas, organizando los datos en tablas y construyendo gráficas, calculando los parámetros relevantes y obteniendo conclusiones razonables a partir de los resultados obtenidos (CMCT).

Crit.MA.5.2. Utilizar herramientas tecnológicas para organizar datos, generar gráficas estadísticas, calcular parámetros relevantes y comunicar los resultados obtenidos que respondan a las preguntas formuladas previamente sobre la situación estudiada (CMCT-CD).

Por último, para terminar con el análisis del currículo de Aragón, se establece una comparación entre el currículo de la LOMCE y el último publicado en la nueva Ley Orgánica de Modificación de la Ley Orgánica Educativa [LOMLOE] (BOA, 18-08-2022). Para nuestro trabajo, resulta de interés presentar lo que este nuevo currículo describe en relación con el objeto matemático del presente trabajo. En primer lugar, una de las novedades del currículo es la organización de los contenidos matemáticos en sentidos. En nuestro caso, se corresponde con el sentido estocástico que se define como aquel que, entre otras cosas, recoge el análisis y la interpretación de datos, la elaboración de conjeturas, toma de decisiones y la valoración crítica a partir de la información estadística (BOA, 18-08-2022, p.28560-28561).

Dentro de los contenidos relacionados con estadística en el curso de 1º de la ESO, se encuentran los siguientes:

E.1. Organización y análisis de datos:

- *Estrategias de recogida y organización de datos de situaciones de la vida cotidiana que involucran una sola variable. Diferencia entre variable y valores individuales.*
- *Análisis e interpretación de tablas y gráficos estadísticos de variables cualitativas, cuantitativas discretas y cuantitativas continuas en contextos reales.*
- *Gráficos estadísticos: representación mediante diferentes tecnologías (calculadora, hoja de cálculo, aplicaciones...) y elección del más adecuado.*
- *Medidas de localización: interpretación y cálculo con apoyo tecnológico en situaciones reales.*
- *Comparación de dos conjuntos de datos atendiendo a las medidas de localización y dispersión.*

E.3. Inferencia:

- *Formulación de preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población.*

- *Datos relevantes para dar respuesta a cuestiones planteadas en investigaciones estadísticas: presentación de la información procedente de una muestra mediante herramientas digitales.*
- *Estrategias de deducción de conclusiones a partir de una muestra con el fin de emitir juicios y tomar decisiones adecuadas.*

Al comparar ambos currículos se observa una evolución hacia poner en alza la importancia de trabajar en contextos reales de la vida cotidiana de los alumnos. Además, se pone en valor el pensamiento crítico, junto con la reflexión a partir de los datos. Es en este hilo en el que se basa esta propuesta didáctica.

3. ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

En base al análisis realizado de los documentos curriculares y teniendo en cuenta el camino que abre esta nueva ley, se ha realizado la siguiente propuesta donde se busca, a través del trabajo y la reflexión de los alumnos, fomentar habilidades como el pensamiento crítico, la formulación de preguntas, la interpretación de los datos. Todas estas habilidades son importantes para los alumnos, no solo para su formación académica, sino para su formación como personas integradas en la denominada sociedad de la información.

A continuación, previo a realizar cualquier tipo de análisis, es importante definir los campos de problemas, técnicas y tecnologías en los que se va a poner el foco a lo largo de la siguiente propuesta.

Para ello, se diferencian varios **campos de problemas**:

- C.P.1. Diferenciar la población y la muestra y clasificar la variable estadística.
- C.P.2. Extraer las frecuencias absolutas de los valores representados en un diagrama de barras.
- C.P.3. Construir el diagrama de barras y de sectores dado la tabla de valores.
- C.P.4. Elección del parámetro de centralización adecuado como representante del conjunto de datos.
- C.P.5. Representar e interpretar en un diagrama de barras las medidas de centralización.

Respecto a las **técnicas** se trabajan las siguientes:

T.1 Construcción de una encuesta en base a una pregunta estadística por responder.

T.1.1. Identificar la población.

T.1.2. Identificar la muestra.

T.1.3. Caracterizar la variable estadística y su tipo: cuantitativa discreta o cualitativa.

T.2. Extraer las frecuencias absolutas a partir del diagrama de barras.

T.3. Construir gráficos estadísticos dada una tabla de frecuencias.

T.3.1. Construir un diagrama de barras.

T.3.2. Construir un diagrama de sectores.

T.4. Calcular las medidas de centralización.

T.4.1. Calcular la moda.

T.4.2. Calcular la media.

T.4.3. Calcular la mediana.

T.5. Marcar el valor numérico de los parámetros de centralización en el diagrama de barras para caracterizar el mejor representante.

T.6. Resolución de ejercicios o problemas contextualizados desde el uso de las TIC apoyado en el manejo de hojas de cálculo.

Por último, en lo que respecta a las **tecnologías**:

TG.1. Definición de la población.

TG.2. Definición de la muestra.

TG.3. Definición de variable estadística y diferenciación entre cualitativa y cuantitativa.

TG.4. Definición de frecuencias absoluta y relativa.

TG.5. Definición de diagrama de barras y diagrama de sectores.

TG.6. Definición de la moda.

TG.7. Definición de la media.

TG.8. Definición de la mediana.

TG.9. Elección razonada del parámetro de centralización como mejor representante.

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

Por un lado, dentro del propio currículo se hace mención a la necesidad de aportar un enfoque práctico a las matemáticas. “*En la actualidad los ciudadanos se enfrentan a multitud de tareas que entrañan conceptos de carácter cuantitativo, geométrico, probabilístico, etc. La información recogida en los medios de comunicación se expresa habitualmente en forma de tablas, fórmulas, diagramas o gráficos que requieren de conocimientos matemáticos para su correcta comprensión.*” (BOA, 26-05-2016). Aquí se ve reflejada implícitamente la importancia de la estadística dentro de la vida de los estudiantes, ya que les aportará las herramientas necesarias para comprender datos y gráficas, de los cuales, hoy en día vivimos rodeados (Marco-Buzunáriz, Muñoz-Escolano & Oller-Marcén, 2016).

De hecho, el currículo asocia este bloque de contenidos con la competencia social y cívica resaltando la conexión que existe entre este contenido y la capacidad de que el alumnado desarrolle una actitud crítica frente a la información presente en su vida cotidiana (Batanero, Arteaga y Gea, 2012).

Otro enfoque que permitiría abordar la pregunta planteada es a través del análisis de los libros de texto, puesto que son la herramienta principal a través de la cual llega la información a los alumnos (Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y Gea, 2016). Con la finalidad de realizar este análisis, se han considerado tres libros de texto correspondientes a tres editoriales diferentes. En particular, el estudio de la pregunta formulada se corresponde con la primera o primeras páginas en las que se presenta al alumnado la unidad didáctica que se va a trabajar. A continuación, se presenta cada uno de los libros de texto analizados en este trabajo junto con la revisión de esas primeras páginas.

Los libros que se van a analizar son:

- Libro 1: Matemáticas 1º ESO de Santillana (Santillana, 2010)
- Libro 2: Matemáticas 1º ESO de Anaya (Colera y Gaztelu, 2007)
- Libro 3: Matemáticas 1º ESO de Marfil (Botella et al., 2007)

Libro 1. Matemáticas 1º ESO de Santillana (Santillana, 2010)

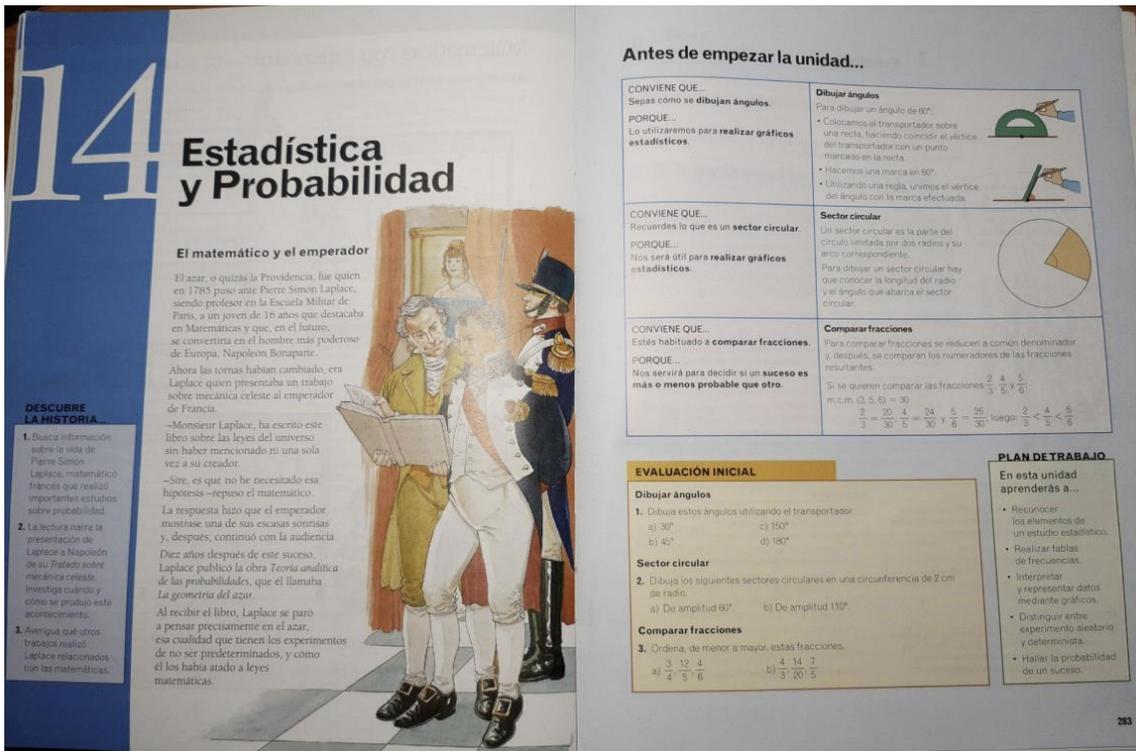


Figura 1: Portada de introducción del tema en el libro Santillana (Santillana, 2010)

Desde la revisión de la Figura 1, se identifica que el tema de probabilidad y estadística se organiza dentro de la misma unidad didáctica. Por otro lado, se ha considerado para la introducción una referencia a la historia. En particular, se presenta al matemático Laplace haciendo una breve presentación de su contribución en la caracterización de la teoría analítica de las probabilidades. Por otro lado, se identifica un cambio abrupto con la siguiente página donde el objetivo es presentar aquellos aspectos que deberían recordar antes de comenzar la unidad didáctica. Desde el análisis de las tareas propuestas, se observa que el foco está centrado en la aplicación de ciertas técnicas como la comparación de fracciones o el dibujo de ángulos. Finalmente, en el recuadro “Plan de trabajo” se le presenta al alumnado los contenidos que va a aprender.

Libro 2. Matemáticas 1º ESO de Anaya (Colera y Gaztelu, 2007)

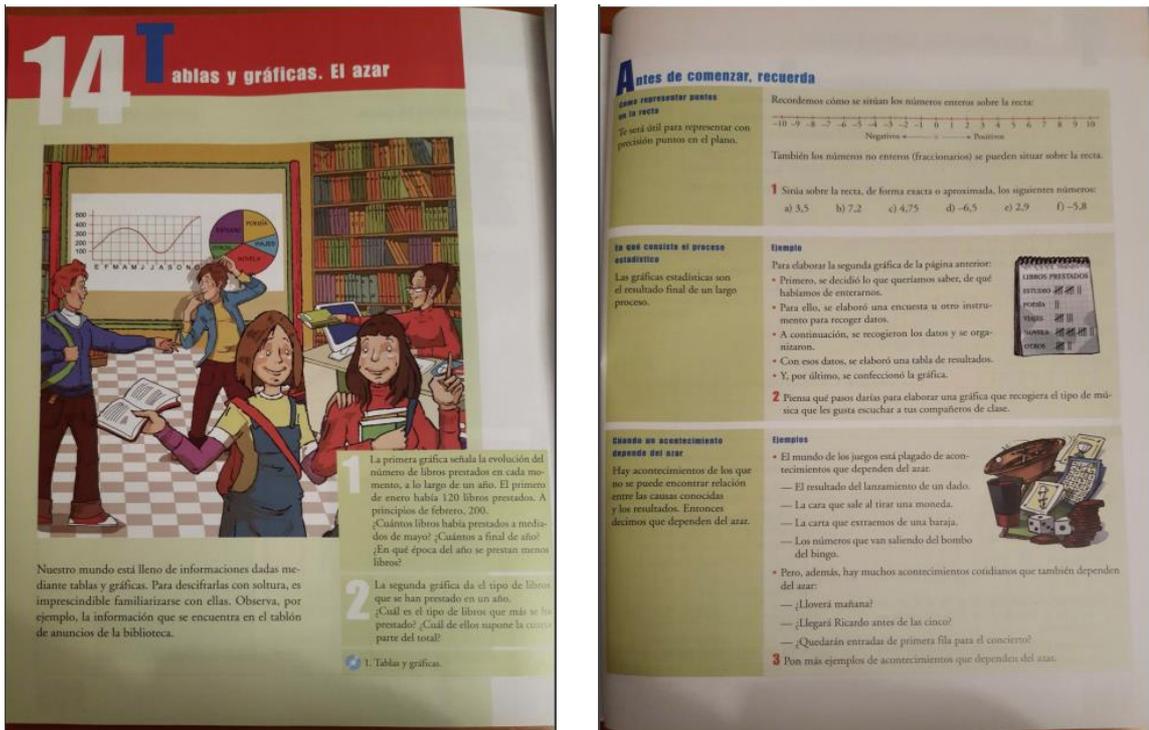


Figura 2: Portadas de introducción del tema en el libro Anaya (Colera y Gaztelu, 2007)

Tras analizar el contenido de la Figura 2, se observa como al igual que en el libro anterior y el currículo, la estadística y la probabilidad se unifican en una misma unidad didáctica. Enlazando las imágenes con el título de la unidad, en la primera página presentan un conjunto de gráficos sencillos, donde parece que invitan al alumnado a reflexionar e interpretar los gráficos. Sin embargo, en la segunda página, se observa un cambio repentino de finalidad. Así como a la izquierda parece que se busca fomentar el interés y la curiosidad de los alumnos, el lado derecho adquiere un carácter más funcional y técnico, donde se apuesta por trabajar aspectos como la representación de puntos en una recta, útil a la hora de construir gráficos, el procedimiento para realizar un estudio estadístico y una pequeña introducción del azar y los sucesos aleatorios

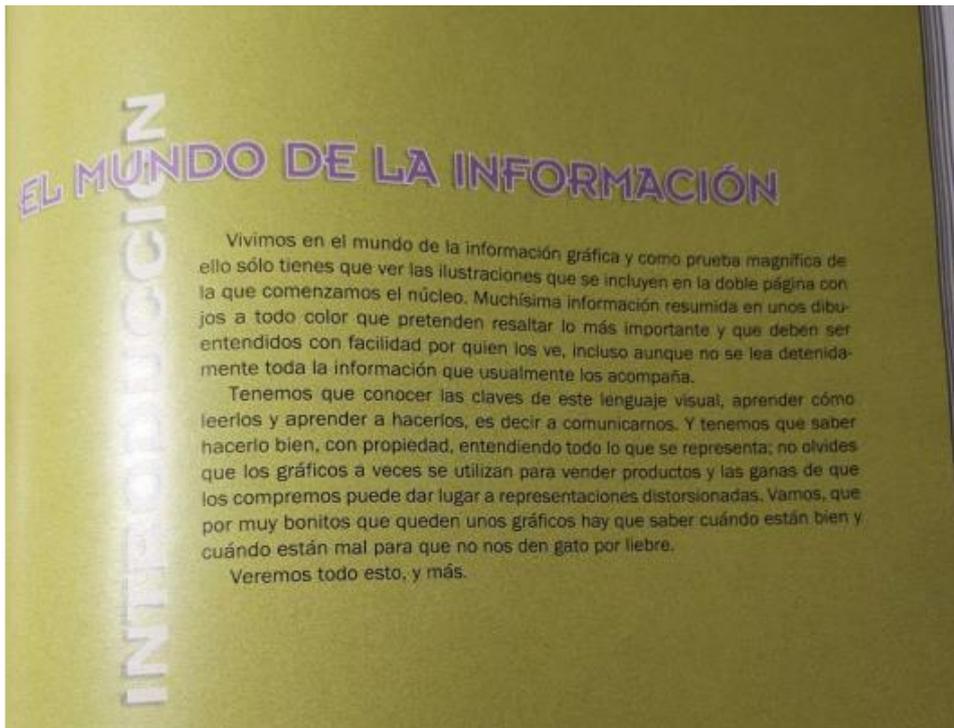


Figura 3: Portadas de introducción del tema del libro Marfil (Botella et al., 2007)

En la Figura 3 se presenta un libro, el cual es completamente diferente a los dos anteriores en lo que refiere a formato. En la propia portada de la unidad se nombran conceptos como la sobrecarga de información, la importancia de saber leer, entender y

analizar los gráficos y, sobre todo, se resalta la importancia del pensamiento crítico necesario en toda persona que vive dentro de una sociedad. Por otro lado, en las siguientes dos páginas se presenta una imagen diferente a los anteriores. Se emplean dibujos para introducir al alumnado el contexto de las gráficas y representaciones. Se presentan multitud de tipos de gráficos de una manera natural e integrada dentro del resto del contenido de las páginas.

De esta forma, tras analizar la forma en la que se presenta en los libros de texto la enseñanza del objeto matemático, se puede observar cómo son pocos los que ponen en valor la importancia del contexto, pues es gracias a este que se obtiene y da sentido a los cálculos matemáticos tan trabajados en los libros. Esta misma idea en la que se recoge de manera íntegra en el propio currículo de la LOMLOE.

2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

Hoy en día los libros de texto se consideran un recurso didáctico y pedagógico fundamental, desarrollando un rol estructural y organizativo en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Díaz-Levicoy et al., 2016).

Los libros de texto tal y como se conocen tienen múltiples funciones: como fuente de información, ejercicios y problemas, material de consulta y apoyo para el profesor, recurso metodológico y objeto de estudio para los alumnos (Marco-Buzunáriz et al., 2016; González y Sierra, 2004). Esto implica que el estudio de estos aporta una visión actual de la enseñanza del objeto matemático, la estadística.

A continuación, en este apartado se van a analizar y comparar tres libros en base a los campos de problemas que tratan, las técnicas que emplean y las tecnologías que enseñan. Remarcar que, aunque generalmente la estadística y probabilidad se encuentran en una misma unidad, la cual se analiza a continuación, se ha decidido poner el foco en la parte específica que hace referencia a la estadística.

Libro 1. Matemáticas 1º ESO de Santillana

Al observar este libro, se ve la tendencia típica que siguen la gran mayoría de los libros donde al principio de la unidad presenta una pequeña introducción del tema a tratar, y luego en cada página se describe el concepto a explicar y se usan los ejercicios para repasar y asentar los conocimientos.

Teniendo esto en cuenta, en lo referente a los **campos de problemas**, en este libro se pueden encontrar trabajados en este orden el CP1, CP2 y CP3. Para el estudio de cada uno de estos campos de problemas el libro dedica un par de páginas, donde presenta las técnicas y tecnologías requeridas. Hay que destacar que el CP3 se trabaja de manera superficial a través de algunos ejercicios vagamente guiados y, que en comparación con el número de ejercicios relacionados con el CP2 resultan insignificantes.

El esquema que sigue el libro a la hora de presentar el contenido siempre es el mismo: primero introduce la **tecnología** en un contexto, generalmente cercano a los alumnos, aunque no deja de ser una situación irreal que termina por ser absurda, y concluye con la **técnica**. De esta forma, el libro consigue la mecanización y repetición de la técnica en busca del dominio de la tecnología.

Algunos ejemplos donde se observa lo previamente mencionado son los siguientes. En la Figura 4 se muestra un ejercicio donde se aplica directamente lo visto en el apartado de teoría, de una forma más razonada para hacer reflexionar al alumno y así, trabajar la tecnología. Sin embargo, en la Figura 5 se muestra cómo se trabajan las técnicas dentro de este libro.

REFLEXIONA

3 Señala en qué caso es más conveniente estudiar la población o una muestra. Razona tu respuesta.

- a) La longitud de los tornillos que fabrica una máquina de manera continua durante un día.
- b) La estatura de los turistas extranjeros que visitan España en un año.
- c) El peso de un grupo de cinco amigos.
- d) La duración de una bombilla hasta que se funde.
- e) El sueldo de los empleados de una empresa.

¿Qué variable se estudia en cada caso?

Figura 4: Ejercicio de aplicación de la teoría de manera razonada (Santillana, 2010)

PRACTICA

11 En una clase de 24 alumnos de 1.º ESO, las calificaciones obtenidas en el último examen de Matemáticas han sido:

4	6	7	3	6	8	5	9	7	5	8	7
5	4	7	8	4	6	5	8	7	3	10	7

Forma una tabla con el recuento de datos, y calcula las frecuencias de los valores que toma su variable.

Figura 5: Ejercicio de aplicación de las técnicas presentadas (Santillana, 2010)

Por último, aunque de forma menos frecuente, aparecen ejercicios donde se pide analizar datos y gráficos y reflexionar sobre estos (Figura 6). Este es uno de los pocos ejemplos que se han encontrado en el libro donde se trabaja el T.2, aunque con un diagrama de sectores.

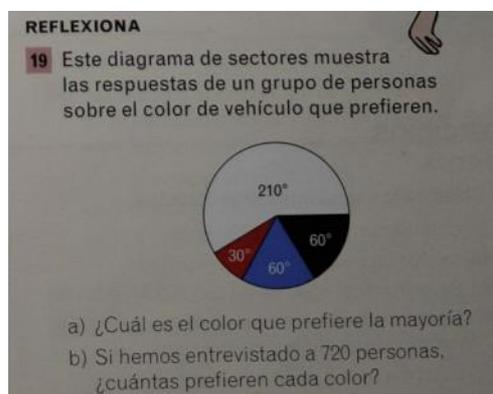


Figura 6: Ejercicio donde se requiere analizar gráficos (Santillana, 2010)

Un apunte interesante por destacar de este libro es que a pesar de introducir las diferentes representaciones gráficas que se pueden realizar con los datos, no presenta ningún parámetro estadístico, como la media, la mediana o la moda (CP4 y CP5). Esto refleja la falsa impresión de que la estadística es únicamente sacar conclusiones a partir de gráficas, cuando realmente un estudio estadístico profundo implica un análisis minucioso de todos estos parámetros.

Libro 2. Matemáticas 1º ESO de Anaya

Este libro, a nivel visual, se presenta de una manera muy similar que el libro de la editorial Santillana, lo cual es muy frecuente entre editoriales. En él, se encuentra una explicación de los conceptos teóricos iniciales, seguida de unos ejercicios que pueden ser para practicar y afianzar contenidos o para reflexionar y ampliar.

Tras esta clasificación, se pasa a analizar más de cerca el tratamiento que hace el libro desde el punto de vista del **campo de problemas**.

En este caso, este libro trabaja los campos de problemas CP3 y CP4. Cabe destacar que referente al CP1 se diferencia entre tipos de variable estadística, sin hacer ninguna referencia a la población y muestra, que son dos conceptos fundamentales dentro de la estadística. Por otro lado, dentro del conjunto de ejercicios propuestos se puede encontrar alguno donde se trabaje el CP2, pero de una manera tan superficial y a tan alto nivel que ni siquiera exigen una reflexión por parte de los alumnos.

De nuevo en el libro se presenta en primer lugar la tecnología y a continuación la técnica. Sin embargo, se aprecia un mayor esfuerzo por acercar los contenidos a los alumnos, poniendo ejemplos cercanos a ellos, planteando preguntas que fácilmente se podrían plantear ellos mismos.

Un ejemplo de ejercicio (Figura 7) donde se aplica la técnica justo tras haber explicado la tecnología, cómo calcular los parámetros de centralización es el siguiente.

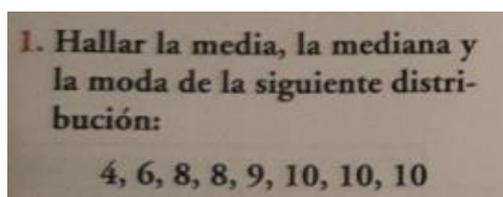


Figura 7: Ejercicio de aplicación de las fórmulas (Colera y Gaztelu, 2007)

En este ejercicio se pide aplicar directamente las fórmulas vistas en teoría (Figura 7). Este caso es el claro ejemplo de los ejercicios donde la técnica está completamente separada de la contextualización necesaria para que el alumno integre bien los conceptos.

En contraposición, se incluyen ejercicios donde trabajar con las diferentes representaciones gráficas (tablas de frecuencias, gráficos de barras, histogramas y gráficos de sectores) (Figura 8) dentro de un contexto que fácilmente se puede extrapolar a la propia aula donde se imparte el contenido.

1 Los deportes preferidos por 40 chicas y chicos entrevistados son:

DEPORTE	FRECUENCIA
Baloncesto	10
Balonvolea	1
Fútbol	20
Tenis	5
Ajedrez	4

Para representar estos datos en un diagrama de sectores, repartimos los 360° del círculo entre 40.
A cada individuo le corresponden 9° .
Halla el ángulo del sector que corresponde a cada deporte y realiza el diagrama completo.

2 Representa en un diagrama de barras la distribución del número de asignaturas suspendidas por los alumnos y las alumnas de un curso:

N.º DE SUSPENDIDAS	FRECUENCIA
0	6
1	12
2	8
3	5
4	3
5	1
6	1

Complétalo con un polígono de frecuencias.

Figura 8: Ejercicios donde se trabaja con las representaciones gráficas (Colera y Gaztelu, 2007)

El hecho de trabajar con problemas cercanos fomenta el interés en los alumnos a la hora de estudiar matemáticas y de participar en clase.

Libro 3. Matemáticas 1º ESO de Marfil

A continuación, se presenta un libro muy diferente a lo que tanto los alumnos como los docentes están acostumbrados. Este se centra únicamente en el uso de gráficas para transmitir los contenidos y las bases de la estadística. Con esto, se busca que los alumnos sean capaces de leer, analizar e interpretar correctamente una gráfica, sin importar el tipo de representación empleada, y puedan extraer conclusiones incluso sin tener un conocimiento extenso del tema tratado. Lo interesante del libro reside en los **campos de problemas** que trabaja y cómo lo hace. Principalmente, se centra en el CP1 y CP3, es decir, presenta ejemplos de situaciones cercanas a la realidad como los presentes a continuación (Figura 9) y los explota para conseguir que emerjan diferentes tipos de gráficas. También, en un menor volumen se trabaja el CP2.

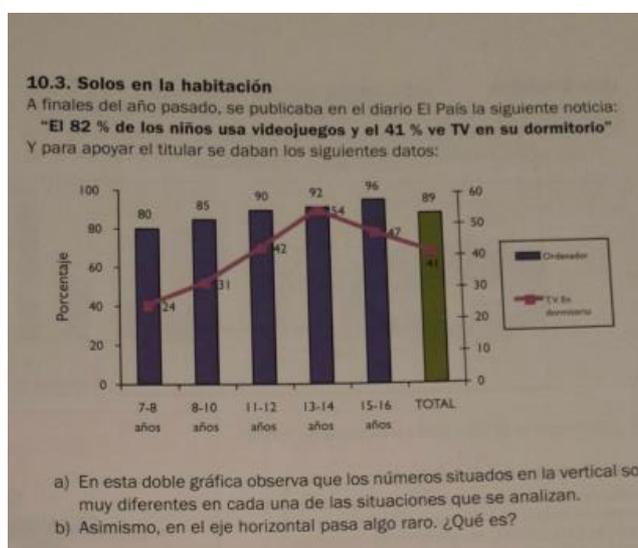


Figura 9: Ejemplo de ejercicio sobre el uso de videojuegos y TV en niños (Botella et al., 2007)

Respecto a las **tecnologías** desarrolladas en el libro cabe destacar principalmente el uso de las gráficas a través de las cuales se explican conceptos como los tipos de variables estadísticas (cuantitativas y cualitativas), la frecuencia absoluta y relativa, etc... Además, hay que destacar que aparte de utilizar las gráficas de barras, de sectores y los histogramas, se emplean pictogramas y cartogramas para representar información.

A modo de reflexión global, se puede ver como los tres libros ponen el foco principal en transmitir a los alumnos estrategias para interpretar gráficas, principalmente de barras y sectores, analizarlas y extraer conclusiones de estas. Resaltar, por último, que

únicamente uno de los libros institucionaliza los parámetros estadísticos presentes dentro del currículo.

A modo de conclusión, se presenta la siguiente tabla resumen donde se sintetiza toda la información previamente comentada organizada en base a los campos de problemas, las técnicas y las tecnologías previamente clasificadas en el apartado A.3.

	Libro 1	Libro 2	Libro 3
CP1	X	X	X
CP2	X	X	X
CP3	X	X	X
CP4		X	
CP5			

Tabla 1: Resumen de los campos de problemas trabajados en cada libro.

En cuanto a los campos de problemas, se observa como los tres libros dejan fuera el último campo de problemas propuesto, la representación e interpretación de las medidas de centralización en un diagrama de barras. Este campo no solo permitiría a los alumnos dar sentido y significado a unos cálculos que habitualmente se suelen quedar en números, sino que, además aportaría un nuevo enfoque a la hora de explicar, sin necesidad de realizar operaciones, tres medidas de centralización básicas que aportan gran cantidad de información. Relacionado con esto, se encuentra el campo de problemas 4, únicamente trabajado por el libro de Anaya.

	Libro 1	Libro 2	Libro 3
T1.1	X		X
T1.2	X		
T1.3	X	X	X
T2	X		X
T3.1	X	X	X
T3.2	X	X	X
T4.1		X	
T4.2		X	

T4.3		X	
T5			
T6			

Tabla 2: Resumen de las técnicas trabajadas en cada libro.

En lo referente a las técnicas trabajadas, estas van acorde a los campos de problemas desarrollados. Además, en este apartado se puede ver cómo los libros se centran en lo estipulado por el currículo, sin aportar contenido extra que pueda favorecer el aprendizaje de los alumnos.

En general, técnicas como la de realizar análisis de gráficos, interpretarlos, extraer conclusiones acerca de los datos y reflexionar más allá son las menos trabajadas. Además, tampoco se plantea la introducción de las TIC dentro de las sesiones, con todas las ventajas que estas aportan.

	Libro 1	Libro 2	Libro 3
TG1	X		X
TG2	X		
TG3	X	X	X
TG4	X	X	X
TG5	X	X	X
TG6		X	
TG7		X	
TG8		X	
TG9			

Tabla 3: Resumen de las tecnologías trabajadas en cada libro.

Por último, las tecnologías, la cuales de nuevo parecen reflejar la tendencia de los libros de texto de ceñirse al contenido plasmado en el currículo, pudiendo llegar a formar así, alumnos capaces de realizar las operaciones de manera correcta, pero que aparentemente no dedicarían ni tiempo ni esfuerzo a reflexionar acerca de los resultados. Además, puede parecer que el alumnado no sea capaz de interpretar los datos sin una hoja de cálculo cerca, y mucho menos, leer un gráfico y valorar si la información dada sobre él es veraz.

3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

Desde la revisión de la literatura presentada en el apartado anterior, se ha justificado la relevancia del libro de texto como protagonista del proceso de enseñanza. Aunque anteriormente se presenta una breve discusión en relación con los tres elementos analizados: campos de problemas, técnicas y tecnologías. De manera general, el análisis realizado refleja carencias que pueden tener un impacto en el aprendizaje del alumno y las habilidades y competencias adquiridas. En concreto, los dos primeros libros presentan tareas enfocadas en el cálculo de parámetros en lugar de desarrollar el pensamiento crítico. Por tanto, no presentan actividades que fomenten o requieran por parte del alumno una reflexión, un debate o incluso la toma de decisiones en base a los datos. Además, tampoco se pone el foco en el contexto y su importancia. En relación con el tercer libro, en este se presta un mayor interés por enfatizar la importancia del contexto de diferentes formas, ya sea a través de imágenes, dibujos o texto, lo cual fomenta el trabajo de la comprensión escrita del alumnado y la interpretación y reflexión. Además, se plantean actividades más abiertas que puedan generar situaciones de debate y reflexión.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

A continuación, se compara en una tabla los contenidos trabajados según el currículo de la LOMCE en el curso de 6º de primaria y 1º de la ESO.

Bloque 5: 6º Primaria	Bloque 5: 1º ESO
Recogida y clasificación de datos cualitativos y cuantitativos.	Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia.
Construcción de tablas de frecuencias absolutas y relativas.	Frecuencias absolutas y relativas.
Iniciación intuitiva a los conceptos de media aritmética, rango, frecuencia y moda.	Medidas de tendencia central.
Realización e interpretación de gráficos sencillos: diagramas de barras, poligonales y sectoriales.	Diagramas de barras, y de sectores. Polígonos de frecuencias.

Análisis crítico de las informaciones que se presentan mediante gráficos estadísticos.	
	Población e individuo. Muestra. Variables estadísticas.
	Variables cualitativas y cuantitativas.

Tabla 4: Comparativa de los contenidos de 6º de primaria y 1º de la ESO (BOA, 26-05-2016, p. 13032)

Comparándolo con el currículo de 1º de la ESO de la LOMCE se observa como la gran mayoría de contenidos trabajados en 6º sientan la base de los contenidos que se trabajarán en 1º de la ESO. Sin embargo, se observa como el mayor cambio y novedad se relaciona con las medidas de tendencia central: media, moda y mediana. También, en 1º de la ESO, se introduce por primera vez el concepto de población, individuo y muestra. Estos contenidos son esenciales en el mundo de la estadística a la hora de plantear un estudio estadístico. Por último, se presenta la diferencia entre variables cualitativas y cuantitativas, la cual no supone una novedad completa, pues en primaria se trabaja desde la intuición.

Hay que destacar también que, aunque los documentos curriculares hacen referencia al análisis crítico de la información estadística asociado con el desarrollo de la competencia social y cívica, resulta interesante ver que el currículo de sexto curso de Educación Primaria lo incluye como contenido.

Por otro lado, resulta interesante ver el camino por el cual avanza la educación. Para ello, se compara el nuevo currículo LOMLOE entre 6º de primaria (BOA, 27-07-2022, p. 26126-26128) y 1º de la ESO (BOA, 11-08-2022, p. 28560-28561).

Bloque 5: 6º Primaria (LOMLOE)	Bloque 5: 1º ESO (LOMLOE)
E.1. Distribución e inferencia	E.1. Organización y análisis de datos:
Conjuntos de datos y gráficos estadísticos de la vida cotidiana: descripción, interpretación y análisis crítico.	Estrategias de recogida y organización de datos de situaciones de la vida cotidiana que involucran una sola variable. Diferencia entre variable y valores individuales.
Estrategias para la realización de un estudio estadístico sencillo: formulación	Análisis e interpretación de tablas y gráficos estadísticos de variables

de preguntas, recogida, registro y organización de datos cualitativos y cuantitativos procedentes de diferentes experimentos (encuestas, mediciones, observaciones...). Tablas de frecuencias absolutas y relativas: interpretación.	cualitativas, cuantitativas discretas y cuantitativas continuas en contextos reales.
Gráficos estadísticos sencillos (diagrama de barras, diagrama de sectores, histograma, etc.): representación de datos mediante recursos tradicionales y tecnológicos y selección del más conveniente.	Gráficos estadísticos: representación mediante diferentes tecnologías (calculadora, hoja de cálculo, aplicaciones...) y elección del más adecuado.
Medidas de centralización (media, mediana y moda): interpretación, cálculo y aplicación.	Medidas de localización: interpretación y cálculo con apoyo tecnológico en situaciones reales.
Dispersión: valoración intuitiva a partir de una representación gráfica y cálculo e interpretación del rango (apreciando su escasa utilidad como medida de dispersión).	Comparación de dos conjuntos de datos atendiendo a las medidas de localización y dispersión.
Calculadora y otros recursos digitales, como la hoja de cálculo, para organizar la información estadística y realizar diferentes visualizaciones de los datos.	
	E.3. Inferencia:
Identificación de un conjunto de datos como muestra de un conjunto más grande y reflexión sobre la población a la que es posible aplicar las conclusiones de investigaciones estadísticas sencillas.	Formulación de preguntas adecuadas para conocer las características de interés de una población.
	Datos relevantes para dar respuesta a cuestiones planteadas en investigaciones estadísticas: presentación de la

	información procedente de una muestra mediante herramientas digitales.
Relación y comparación de dos conjuntos de datos a partir de su representación gráfica: formulación de conjeturas, análisis de la dispersión y obtención de conclusiones.	Estrategias de deducción de conclusiones a partir de una muestra con el fin de emitir juicios y tomar decisiones adecuadas.

Tabla 5: Comparativa de los contenidos de 6º de primaria (BOA, 27-07-2022, p. 26126-26128) y 1º de la ESO (BOA, 11-08-2022, p. 28560-28561)

Comparando los contenidos de ambos cursos establecidos por el currículo de la LOMLOE frente a los que establece la LOMCE, se observa una clara tendencia hacia fomentar el análisis de los datos, la realización de estudios estadísticos completos, la reflexión sobre los resultados, la formación de opiniones, en resumen, favorece el desarrollo del pensamiento crítico en los alumnos.

A su vez, contrastando los contenidos planificados para trabajar en 6º de primaria con los de 1º de la ESO, se observa como en primero se da una mayor importancia al uso de las TIC como herramienta complementaria para trabajar los datos, así como se hace una mayor diferenciación entre la estadística descriptiva y la inferencia. Es en este segundo campo donde se fomenta principalmente el razonamiento, la obtención de conclusiones, la toma de decisiones basadas en datos y el pensamiento crítico.

2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiriera esos conocimientos previos?

Antes de dar respuesta a este apartado justificamos que no se contemple lo referente a la LOMLOE porque su aplicación en el aula se inicia a partir del curso 2022-2023. No obstante, nos parecía interesante su inclusión en el presente trabajo porque los cambios que producen se sitúan alineados con la investigación en Educación Matemática, por lo que esperamos que, a través de un progreso gradual, se vayan identificando cambios en la manera de abordar los contenidos matemáticos y, en particular, aquellos referentes con el bloque de estadística.

Entonces, si atendemos a los contenidos curriculares del curso anterior, se podría esperar que el alumnado tuviera una base suficiente sobre el manejo de ciertos contenidos y procesos matemáticos, así como que se sintieran familiarizados con las fases en las que se organiza un estudio estadístico.

Sin embargo, este poso estadístico que actúa como base para continuar construyendo los pilares del objeto matemático no siempre es adquirido por los alumnos, o al menos de la manera requerida para continuar trabajando. Muchas veces puede ser por falta de tiempo a la hora de impartir todos los contenidos del currículo o simplemente por la forma de transmitir el conocimiento, poniendo el foco en la funcionalidad técnica y no tanto en la transmisión de la cultura estadística y el pensamiento crítico (Batanero et al., 2012).

3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

Las actividades que se proponen para evaluar el grado de adquisición de los conocimientos previos constituyen la evaluación inicial que se realiza en la primera sesión de la propuesta didáctica. Por un lado, se ha considerado para su diseño el análisis curricular que describe los contenidos de estadística que contempla el documento legislativo para el curso anterior. Por otro lado, la necesidad de que el alumno haya adquirido herramientas para analizar la información estadística presente en su vida cotidiana y, posterior, vida profesional conduce a situar estas actividades dentro de un contexto cercano y próximo a los alumnos, así como evaluar el grado de pensamiento crítico adquirido hasta el momento.

Puesto que estas actividades se han llevado al aula, es importante tener en cuenta el contexto de aula y los alumnos a los que van enfocadas. Debido a la política del colegio, los alumnos para la asignatura de matemáticas se dividen por niveles de aprendizaje. Concretamente en 1º de la ESO la clase en la que se trabajaron las actividades son del grupo A. Es decir, son alumnos que tienen mucho interés por la materia y aún encima tienen una gran facilidad. Además, cabe destacar que entre el grupo de 27 alumnos se encuentran 3 de ellos de altas capacidades. Estos muestran un gran interés y curiosidad por saber más y siempre se plantean situaciones para ir más allá de lo que se explica. Esto desemboca en sesiones muy dinámicas, en las que la comunicación entre los alumnos y el docente es primordial. Como reflejo de esto, tras cada actividad se mostrarán los resultados recogidos y un posterior análisis.

Tarea 1

Esta tarea demanda elegir qué información estadística es mejor, invitando al alumno a reflexionar sobre qué significa ser mejor... El objetivo es analizar de manera cualitativa que adjetivos emergen en la justificación de cada alumno en relación con su valoración personal sobre la idoneidad de un estudio estadístico. Además, se espera que los alumnos reflexionen sobre la información estadística presentada. En este sentido, los dos primeros

enunciados presentan información cuantitativa representada en porcentaje mientras que el tercer enunciado muestra la información de manera cualitativa haciendo uso del lenguaje.

Por tanto, esta primera cuestión está enfocada en identificar la cultura estadística del alumnado, en cuanto que permite valorar el manejo y dominio que los alumnos poseen en relación con los porcentajes. Así como reflejar el pensamiento crítico que se verá plasmado en la justificación de su elección.

Tarea 1.

Se comparan varios titulares extraídos de distintos estudios estadísticos. Únicamente con la información presentada, ¿sabrías decir qué estudio es mejor? Justifica tu respuesta.

- *“Algo más del 80% de los adolescentes del mundo no hace el ejercicio mínimo recomendado”*
- *“El 81% de los niños y jóvenes entre 11 y 17 no hace el ejercicio mínimo recomendado”*
- *“La mayoría de los adolescentes no hace la cantidad de ejercicio diaria necesaria.”*

Tras realizar el análisis de las respuestas recogidas por los alumnos, se presentan las siguientes conclusiones. En la tabla 6 se recoge un resumen de las frases empleadas por los alumnos para justificar su respuesta. En primer lugar, recalcar como la totalidad de los alumnos han escogido como mejor respuesta la segunda, siendo aquella que aporta mayor cantidad de información, mencionando y precisando datos que ayudan al lector a ubicar el estudio dentro de un rango de edad concreto. Sin embargo, existe una variedad de respuestas que reflejan la diversidad de los alumnos dentro de la clase.

Respuestas	Nº de alumnos	%
Porque es más exacta/preciso/específico o proporciona información más completa	20	74,1
Menciona las diferencias entre los titulares (% concretos, edad precisada)	5	18,5

No se puede decir cuál es mejor, porque igual no se tienen los mismos datos, pueden interpretarlos de diferente forma o pueden estar dirigidos a diferentes públicos	1	3,7
No justifica la respuesta	1	3,7

Tabla 6: Resumen de las respuestas de los alumnos a la tarea 1

Entre las justificaciones de por qué escogieron ese titular se encuentra la mayoría de los alumnos que resaltaron únicamente la exactitud y precisión del titular (Figura 10), mientras que algunos añaden cuáles son los aportes de valor que les hicieron decantarse por esta opción (Figura 11).

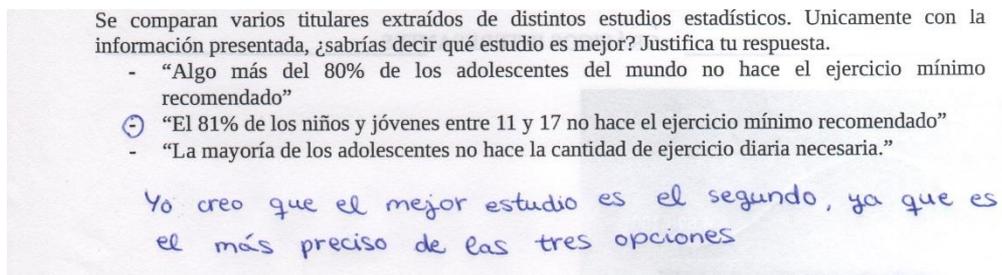


Figura 10: Respuesta: "Porque es más exacta/preciso/específico o proporciona información más completa"

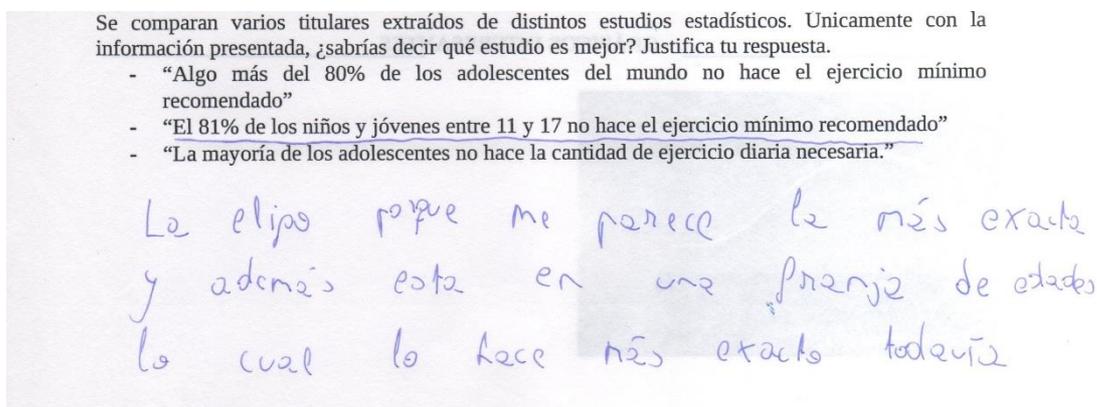


Figura 11: Respuesta: "Menciona las diferencias entre los titulares (% concretos, edad precisada)"

Por último, hay que destacar la respuesta de un alumno, pues plantea una opinión interesante acerca de la interpretación subjetiva de los datos, la cual es común encontrarla sobre todo en medios de comunicación, donde una misma información se puede transmitir de manera complementemente diferente (Figura 12).

Se comparan varios titulares extraídos de distintos estudios estadísticos. Únicamente con la información presentada, ¿sabrías decir qué estudio es mejor? Justifica tu respuesta.

- "Algo más del 80% de los adolescentes del mundo no hace el ejercicio mínimo recomendado"
- "El 81% de los niños y jóvenes entre 11 y 17 no hace el ejercicio mínimo recomendado"
- "La mayoría de los adolescentes no hace la cantidad de ejercicio diaria necesaria."

No se podría saber qué estudio es mejor por distintos motivos:

1- Los datos utilizados para realizar el estudio pueden no ser los mismos exactamente.

2- La interpretación puede llegar a ser distinta de un estudio a otro.

3- En este caso, los tres titulares dicen lo mismo con distintas palabras, aunque el del medio es más específico, y hay que saber a

A continuación, se presenta el siguiente titular

"El 80% de los chicos que estudian 1º de la ESO prefieren jugar al fútbol en los recreos, mientras que solamente el 9% prefiere el baloncesto. El resto, escogen el beisbol como deporte favorito." ¿Sabrías estimar el número de alumnos que se esperaría que jugaran cada uno de los deportes en tu aula?

¿Crees que estos datos se corresponden con la realidad de tu clase?

quién va dirigido el titular.

Figura 12: Respuesta: "No se puede decir cuál es mejor, porque igual no se tienen los mismos datos, pueden interpretarlos de diferente forma o pueden estar dirigidos a diferentes públicos"

Tarea 2

En la siguiente tarea se quiere analizar cómo trabajan los alumnos con los porcentajes, contenido considerado como conocimiento adquirido por el alumnado en cursos anteriores tal y como se deduce tras analizar el currículo de 6º en apartados previos. Puesto que se les pide que estimen el número de alumnos que jugarían a cada deporte en función de los porcentajes proporcionados en el enunciado, se espera poder analizar varias habilidades en los alumnos. En primer lugar, se quiere ver si estos son capaces de entender el significado de la palabra estimar. Es decir, no solo hay que interpretar correctamente los porcentajes proporcionados en el enunciado, sino que hay que dar una respuesta acorde a lo esperado, una estimación, lo cual significa una aproximación basada en datos. De esta forma, se analiza el dominio del lenguaje matemático de los alumnos, a través del cálculo de porcentajes y el grado de comprensión del texto del enunciado.

Por otro lado, la segunda pregunta reta a los alumnos a extrapolar la estadística a la realidad más próxima que existe para ellos, su clase. Realmente se quiere ver si estos son capaces de interpretar y aplicar los porcentajes de manera correcta sobre el número de alumnos que son.

Tarea 2.

“El 80% de los chicos que estudian 1° de la ESO prefieren jugar al fútbol en los recreos, mientras que solamente el 9% prefiere el baloncesto. El resto, escogen el béisbol como deporte favorito.”

¿Sabrías estimar el número de alumnos que se esperaría que jugarán cada uno de los deportes en tu aula?

¿Crees que estos datos se corresponden con la realidad de tu clase?

A continuación, se analizan los siguientes resultados de la tarea, dividiéndolo por preguntas. En la primera se obtienen varios tipos de respuestas. Por un lado, más de la mitad de la clase interpreta el verbo de estimar como aplicar, es decir, calculan en base a los porcentajes proporcionados cuántos alumnos practican cada uno de los tipos de deportes (Figura 13). Por otro lado, el resto de la clase decide responder a la pregunta de manera cualitativa, ya sea aportando el porcentaje como número o fracción (Figura 14), o bien extrapolando los deportes y deduciendo el porcentaje aproximado que se extraería dentro de clase (Figura 15)

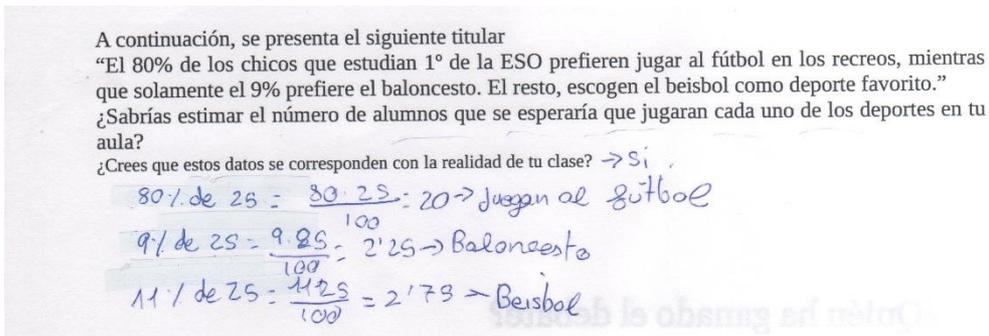


Figura 13: Cálculo de porcentajes como respuesta

$$\frac{80}{100} \text{ de } 27 \text{ alumnos}$$
$$80\% \text{ de } 27 \text{ alumnos}$$

Figura 14: Tratamiento de los porcentajes de manera cualitativa

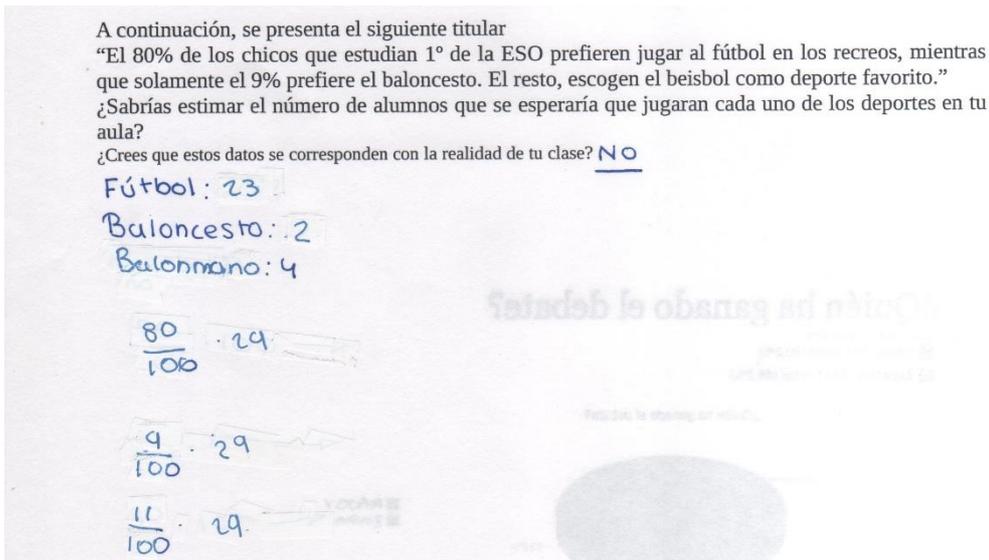


Figura 15: Extrapolar los porcentajes a los deportes de clase

Respuestas	Nº de alumnos	%
Cálculo del % correcto	13	48,1
Cálculo del % correcto, pero mal redondeo	2	7,4
Respuestas de sí o no	3	11,1
Expresan el % en fracción sin calcularlo	6	22,2
Respuestas basadas en la clase sin aplicar los %	3	11,1

Tabla 7: Resumen de respuestas recogidas a los alumnos para la tarea 2

Observando las respuestas de la tabla 7 se ve como prácticamente la mitad de la clase calcula correctamente los porcentajes y los aplica a la muestra correcta, su clase. Otro alto porcentaje de alumnos expresan simplemente el cálculo, sin llegar a resolverlo, pero demostrando que saben y comprenden lo que implica un tanto por ciento del total.

Respecto a la segunda pregunta, las respuestas de los alumnos se quedan más escasas, pues la mayoría contestó diciendo que los porcentajes no correspondían a la clase (Figura 16) o simplemente no justificaron su respuesta (Figura 15). En la tabla 8 se clasifican los diferentes tipos de respuesta:

A continuación, se presenta el siguiente titular
 "El 80% de los chicos que estudian 1º de la ESO prefieren jugar al fútbol en los recreos, mientras que solamente el 9% prefiere el baloncesto. El resto, escogen el beisbol como deporte favorito."
 ¿Sabrías estimar el número de alumnos que se esperaría que jugaran cada uno de los deportes en tu aula?
 ¿Crees que estos datos se corresponden con la realidad de tu clase?

1. 24 fútbol, 2 baloncesto, 3 beisbol
 2. No porque en mi clase solo juegan fútbol y baloncesto, nadie juega beisbol

Figura 16: Respuesta a la segunda parte de la pregunta

Respuestas	Nº de alumnos	%
No corresponde a la clase	9	33,3
NS/NC	8	29,6
No justifica	9	33,3
% aproximados	1	3,7

Tabla 8: Resumen de respuestas de los alumnos a la segunda parte de la tarea 2

Hasta este momento, las dos tareas propuestas son individuales, sin embargo, en esta tercera tarea se busca trabajar el dominio del lenguaje matemático de los alumnos, así como las relaciones que ellos han formado en su mente a lo largo de la enseñanza previa que han recibido. Con esta tarea de nubes de palabras, también se quiere estudiar la cultura científica que poseen los alumnos, los conceptos y objetos matemáticos que conocen.

Tarea 3

Adquirir una adecuada cultura estadística exige analizar de manera crítica la información estadística y comunicar de forma coherente dicha información revisada, por tanto, un aspecto esencial es revisar el lenguaje que el alumnado asocia al trabajo estadístico. Por tanto, la Tarea 3 demanda que el alumno escriba 5 palabras que estén asociadas con la estadística. La riqueza de dicha tarea reside en que el alumnado debe revisar qué palabras asocia con el contenido que se va a trabajar en la presente propuesta didáctica, lo que le permite al docente revisar qué lenguaje le resulta familiar al alumnado. No obstante, la carencia de la tarea se debe a que el alumnado escribe la palabra, pero se desconoce el significado personal del alumno y, por lo tanto, si dicho significado coincide con el significado aceptado por la comunidad de expertos.

interesante seguir investigando en esta misma línea para analizar las relaciones entre los conceptos.

Tarea 4

En esta última tarea se busca analizar el pensamiento crítico de los alumnos. Ver si son capaces de interpretar los gráficos, detectar errores y explicarlos de manera coherente empleando un lenguaje propio de las matemáticas.

Tarea 4
Observa los siguientes ejemplos y comenta si identificas algún tipo de error.

¿Quién ha ganado el debate?
Martes, 28 de Junio de 2011
■ Rajoy: 831 votos (20,2%)
■ Zapatero: 3551 votos (86,2%)

¿Quién ha ganado el debate?

Político	Votos	Porcentaje
Rajoy	831	20,2%
Zapatero	3551	86,2%

rtve.es FUENTE: Min redifusión

5.040.222

4.698.783

Febrero Agosto

Paro registrado 2013

15:33 24h

En esta última tarea se pudieron recoger muy pocas respuestas por parte de los alumnos, pues era ya el final de la clase y no dio tiempo a terminarla. Sin embargo, se puede destacar como todos aquellos que respondieron en relación con el gráfico de la izquierda mencionan que la suma de los porcentajes de votos de ambos políticos es mayor del 100% (Figura 18).

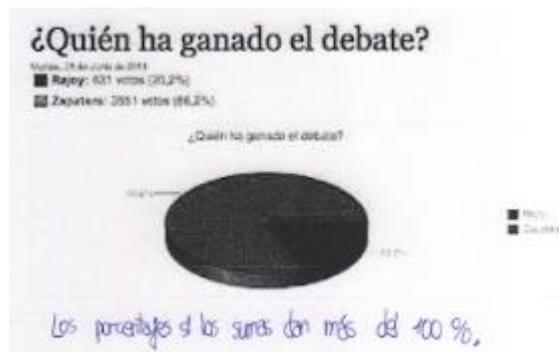


Figura 18: Respuesta a la primera gráfica de la tarea 4

Respecto al segundo gráfico, la única respuesta recogida hace referencia a la escala temporal, que no está completa (Figura 19). El resto de los alumnos no llegaron a responder nada debido a la falta de tiempo.

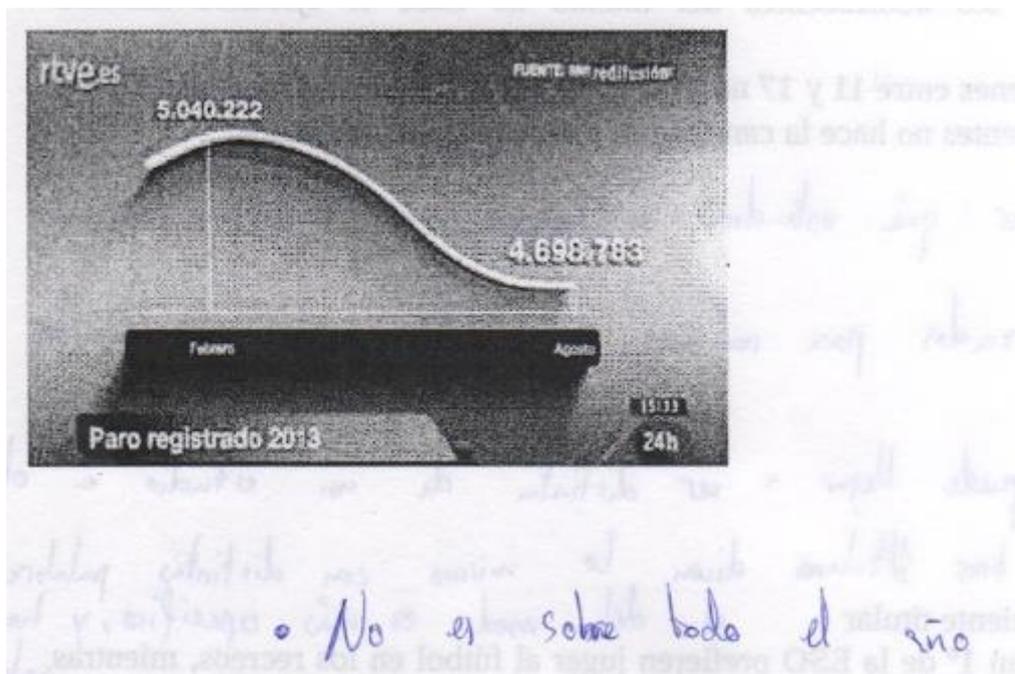


Figura 19: Respuesta a la segunda gráfica de la tarea 4

Una vez se conoce el punto de partida de los alumnos, se puede plantear el diseño de una unidad didáctica que les permita alcanzar todos los conocimientos descritos en el currículo. Tras realizar una revisión completa de este, tanto de 1º de la ESO como de los cursos contiguos, se extrae una idea común: conseguir dotar al alumno de estrategias y herramientas útiles en su vida como ciudadano. Para ello, se pretende que los estudiantes recorran el ciclo completo de llevar a cabo un estudio estadístico completo: toma de datos, análisis de resultados y obtención de conclusiones y predicciones (Batanero et al., 2012).

Muchos son los investigadores e instituciones que coinciden en la relevancia de la estadística dentro de la educación de los alumnos. Tanto es así, que esta se debería empezar a introducir a partir de la Educación Infantil desde la aleatoriedad hasta el ciclo de Bachillerato (Batanero et al., 2012). A lo largo de estos ciclos, se trata de transmitir las ideas Estadísticas fundamentales descritas por Burril y Biehler (2011): datos, gráficos, variación, distribución, asociación y correlación, probabilidad y muestreo e inferencia. La comprensión de todas estas ideas se conoce bajo el nombre de cultura estadística.

De entre estas, se pueden destacar por su relación con 1º de la ESO los datos, pues dentro de la estadística el dato es tan importante como el análisis estadístico. Es por ello, que se hace énfasis en que los alumnos trabajen en la recolección de los datos. Además, los gráficos tienen una relevancia que se resume en dos partes, el papel que juegan en la organización y análisis de datos, y su alta presencia en los medios de comunicación. Por último, el muestreo y la inferencia permiten a los estudiantes extrapolar los resultados de su estudio a una población que permita responder a la pregunta que desencadene el análisis (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013).

Por encima de todo, hay que primar la importancia de conectar la estadística con la vida cotidiana y el uso de contextos reales (Alsina, 2021). De aquí, surgen los conceptos de razonamiento estadístico y cultura estadística, que se describen brevemente a continuación.

El razonamiento estadístico se concibe como aquel que permite tomar decisiones adecuadas o efectuar predicciones a partir de datos en presencia de incertidumbre (Batanero et al., 2013).

La cultura estadística se entiende como todo aquel conocimiento que aporta al ciudadano toda la información necesaria como para participar en la sociedad, haciendo uso de competencias como la capacidad para interpretar y evaluar la información estadística y la capacidad para comunicar y discutir sus opiniones (Batanero et al., 2013).

A la hora de realizar esta toma de decisiones es importante servirse de la ayuda de softwares informáticos que facilitan principalmente el análisis estadístico de los datos. Hoy en día, son numerosos los programas que se pueden utilizar dentro del aula para trabajar a través de las TIC el razonamiento estadístico (Del-Pino, 2013).

Es del uso de las nuevas tecnologías junto con la necesidad de formar a ciudadanos críticos que surge la alfabetización estadística y su relación con la ciencia de datos. La necesidad de emplear datos reales, motivadores y significativos para los alumnos fomenta la evolución hacia la alfabetización de datos. De esta forma, a través de la enseñanza se

consigue formar futuros ciudadanos con un pensamiento crítico que les permite analizar toda la información a la que son expuestos (Rodríguez Muñiz, Muñiz- Rodríguez, Vázquez y Alsina, 2020). Además, otra forma de trabajar el pensamiento crítico es poniendo atención en la relevancia de las preguntas que desencadenen un estudio estadístico. Es necesario que los alumnos sean capaces de plantearse la pregunta correcta y tengan las herramientas suficientes como para responderla (Arnold & Franklin, 2021).

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático

1. ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

La principal razón de ser a tener en cuenta a la hora de introducir la estadística a los alumnos es la relevancia de esta dentro del contexto diario. Es decir, hoy en día todas las noticias que reciben se componen de datos estadísticos que para entenderlos es necesario tener una mínima formación en esta rama de las matemáticas. Al hablar de noticias no se hace referencia únicamente a las que puedan aparecer en el periódico o en la televisión, sino también a todas aquellas estadísticas que se pueden extraer de una página de Internet como Google. Es por ello, que se busca conseguir que los alumnos se forjen un pensamiento crítico en base a una alfabetización estadística proporcionada a través de la educación desde edades tempranas (Rodríguez-Muñiz et al., 2020)

Por último, se recalca la importancia de tener una base sólida de los conceptos básicos de la estadística pues al ser tan común y familiarizado dentro de la sociedad, es algo con lo que es sencillo dirigir la formación de opiniones. Es decir, muchos son los ejemplos donde a través de un gráfico representado de diferente forma el observador extrae conclusiones completamente opuestas. Es por ello, que para evitar este tipo de engaños y malinterpretaciones es necesaria una formación académica completa y cercana que favorezca la familiarización tanto con los datos como con el tipo de representaciones. Así mismo, junto con el desarrollo del pensamiento crítico y de herramientas de análisis los alumnos serán capaces de tomar decisiones de manera consciente e informada.

2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Los principios de la estadística se remontan en el Estado de las antiguas civilizaciones tales como los egipcios, hebreos, chinos, griegos y romanos que empleaban esta rama de las matemáticas con fines tributarios y de enrolamiento militar (Hernández González, 2005)

Sin embargo, el concepto de estadística que se conoce a día de hoy y con el que se trabaja comenzó a surgir como tal a partir del siglo XIX. Fueron los astrónomos los primeros en encontrar problemas a la hora de trabajar con datos, pues se dieron cuenta que podían obtener diferentes valores para un mismo concepto. Este hecho les llevó a desarrollar el concepto de variabilidad debido a errores de medición y observación, el cual trataban de explicar de manera sencilla en sus textos. Para describir esta variabilidad empleaban la distribución normal, la cual les permitía explicarla a partir de la media y la varianza. Más adelante esta distribución se usaría no solo para describir la variabilidad debido a errores de medida, sino también para la variabilidad entre individuos de una población (Kelmansky, 2009).

Con todo esto, se ve como en un origen se entendió la estadística como una herramienta de registro para el conteo de población, ganado, cultivo o ganancias, asociadas a unos sencillos cálculos de medidas como son la media y la desviación. Sin embargo, la estadística es una ciencia que a lo largo de los años ha crecido hasta llegar a abarcar un campo de conocimiento mucho mayor e importante. Este progreso se ha visto incrementado gracias al desarrollo hacia el mundo digital y el surgimiento de la inferencia estadística en la primera mitad del siglo XX.

En conclusión, sí que existe una relación plausible entre la razón de ser original y la actual, basada en el análisis de los datos. Es decir, el principal fin de la estadística consiste en emplear los recursos matemáticos conocidos para, partiendo de unos datos, poder extraer conclusiones, las cuales pueden ser referentes al presente o al futuro (inferencia), en base a una actitud crítica.

3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

Como hemos visto en la revisión histórica del objeto matemático, la Estadística surge en el seno del Estado con el fin de obtener información sobre el conjunto de personas que constituyen una comunidad. Este aspecto pone en relieve dos hechos: la importancia de la obtención del dato como fuente de información y la relevancia que adquiere el contexto para dicho proceso y el posterior análisis de los datos. De ahí, que se identifique el contexto como un factor relevante e importante a la hora de diseñar actividades enfocadas a los alumnos (Batanero y Díaz, 2004). Contextos cercanos y relacionados con la vida cotidiana se tienen en especial consideración en el proceso de elaboración de la situación.

Además, puede ayudar al alumnado a identificar la relevancia que éste adquiere en el análisis estadístico (Nortes Checa, 1998).

Para llevar esta idea a la práctica a continuación se plantea un caso real, una pregunta que puede surgir dentro de cualquier interacción entre compañeros de clase, ¿cuál es tu youtuber favorito?

En base a esta pregunta se desarrollará toda la clase donde, de forma guiada, irá estableciéndose, por sí sola, la razón de ser de la estadística. La pregunta se planteará inicialmente de manera individual, para que cada alumno piense en un youtuber y el motivo por el cual lo ha escogido.

Una vez todos tengan clara su elección, se les juntará en pequeños grupos de 5 y se les preguntará si coinciden todos los del grupo en el mismo youtuber, cuál es el que más ha aparecido, cuáles son los diferentes motivos... También, se les invitará a reflexionar sobre el hecho de hacer diferencias según variables como el género o el tipo de contenido que muestra, la plataforma en la que tiene más seguidores, pues muchos youtubers tienen más redes sociales. Otras preguntas para plantear serían si consideran importante el rango de edad de las personas que responden la pregunta, si el youtuber más repetido dentro del grupo coincide con el más repetido en la clase y con el que tiene más seguidores a nivel mundial.

Todas estas preguntas están orientadas para que emerjan conceptos como la muestra y la población, y la diferencia entre ambas. Además, también surgen ideas como la moda de la distribución, las variables estadísticas y los diferentes tipos de variables.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La metodología a seguir a la hora de llevar al aula este tipo de actividad aquí presente está pensada para enriquecer al máximo el desarrollo de los alumnos. Es por ello, que cuando se forman grupos, se buscan que sean lo más heterogéneos posibles. De esta forma, se trabaja la competencia lingüística de los alumnos, además de trabajar en la organización del discurso. Todo esto se acompaña de un enriquecimiento en el lenguaje matemático, además de favorecer la formación de una opinión crítica sobre diversos temas.

Gracias a las puestas en común entre alumnos, hacen que emerjan de manera natural los diversos campos de problemas propuestos en el apartado A3. A través de la guía y orientación del docente es posible que, mediante la comunicación abierta, libre y diversa,

aparezcan de manera natural los objetos matemáticos que, a posteriori, se trabajaran a través de las técnicas y justificarán en base a las tecnologías (Medina, 2022).

De esta forma, tras el trabajo de los objetos matemáticos de manera orgánica, será el deber del tutor quién institucionalice estos objetos.

E. Sobre el campo de problemas

1. Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

El objetivo de este apartado es presentar diferentes actividades que quepan dentro de los diferentes campos de problemas planteados en el apartado A3.

Debido a que se busca que los alumnos vayan introduciéndose en la estadística poco a poco y que, de forma natural, vayan enfrentándose a cada uno de los campos de problemas, se organizan de la siguiente manera:

CP1: Diferenciar la población y la muestra y clasificar la variable estadística.

Partiendo de la situación planteada como razón de ser del objeto matemático e hilando con el origen de este, el primer campo de problemas que emerge consiste en la identificación y caracterización de un conjunto de individuos representativos para realizar un estudio estadístico.

Además, ya que se busca fomentar el pensamiento crítico, el razonamiento estadístico y la cultura estadística, se propone una actividad donde se trata al alumno como ciudadano que necesita entender, analizar y reflexionar sobre su entorno y principalmente, sobre las noticias presentes en los medios de comunicación. Para ello, es importante familiarizar a los alumnos con información estadística del entorno socio-político. En este caso, se emplean datos reales de un sondeo electoral realizado de manera online por toda España entre los días 22 y 28 de febrero de 2022 por la empresa 40dB publicados en EL PAÍS y la Cadena SER (40dB, 2022).

Para trabajar esta sesión se realizará desde el aula de informática pues, además de trabajar con los datos de manera diferente a como se llevaría el proceso manual, la realización de actividades de manera frecuente en esta aula, permite a los alumnos adquirir nuevas habilidades en el manejo de las TIC. Por otro lado, se busca agilizar el proceso de análisis y estudio de los datos en esta primera actividad, para así dejar más tiempo para el debate, el intercambio de ideas y razonamientos, que enriquezcan el proceso de formación de un pensamiento crítico. Es por ello, que se plantea la actividad

como una sesión en donde varios alumnos pueden trabajar con un mismo ordenador en beneficio de la comunicación.

Actividad 1:

Basándote en los datos proporcionados, y teniendo en cuenta que la población con derecho a voto en España es de 34.915.713 personas censadas (en febrero de 2022), responde a las siguientes preguntas de manera justificada:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y						
1	id	sexo	edad	edad_2	hab	prov	ccaa	nijos	edu	cs	p1	p2	p3	p4_1	p4_2	p4_3	p4_4	p5	p6	p7	hab_2	msa_votat	clasi_n	educacion	ponido					
2	1	Mujer	54	45-54	10.001 - 20.000	Toledo	Castilla - La Mancha	SI con uno/a de 1	Segundo G A2	5	PSOE (Part	PSOE (Part	9	0	no le vot	0	no le vot	0	no le vot	PSOE (Part	1	No lo sé	Más de 10	Alta / Med	Trabajo de Segundo g	0,823459				
3	2	Mujer	25	25-34	100.001 - 500.000	Murcia	Murcia, Región de	SI con uno/a de 9	Tercer Gra A2	7	Más País (P	ACMA (P, 10	le votar	5	5	5	5	PSOE (Part	9	5	Más de 10	Alta / Med	Trabajo	Tercer gra	0,738062					
4	3	Mujer	37	35-44	< 10.000	Barcelona	Cataluña	No convivo con ni	Licenciata B	5	No votaré: Ninguno	5	5	5	5	5	5	No voté	5	5	Menos de	Alta / Med	Trabajo	Tercer gra	0,896147					
5	4	Mujer	47	45-54	20.001 - 50.000	Ciudad Real	Castilla - La Mancha	No convivo con ni	Tercer gra D	0	No lo sé	No lo sé	Ciudadano	No lo sé	No lo sé	0	no le vot	No lo sé	Ciudadano	5	No lo sé	Más de 10	Media	baj	Trabajo	Tercer gra	0,87879			
6	5	Hombre	36	35-44	500.000+	Barcelona	Cataluña	No convivo con ni	Tercer Gra C	0	con tod	No votaré: Ciudadano	5	5	5	5	5	No voté	4	5	Más de 10	Media	Trabajo	Tercer gra	0,720241					
7	6	Hombre	71	65+	< 10.000	Madrid	Madrid, Comunidad de	No convivo con ni	Tercer gra A1	10	con tod	PP (Partid	0	no le vot	7	0	no le vot	5	5	PP (Partid	5	5	5	5	5	Menos de	Alta / Med	Pensionist	Tercer gra	1,501243

Figura 20: Extracto de los datos proporcionados para el CPI

- Si tuvieras que replicar la misma encuesta para conocer qué partido obtendrá más votos en las próximas elecciones, ¿a cuántas personas preguntarías? ¿crees que su opinión podría representar la opinión de todos los españoles?
- Una vez sabes el tanto por ciento de personas que preguntarías del total de la población española, ¿cómo realizarías esa encuesta?
- A la hora de analizar las respuestas de la encuesta, ¿tendrías en cuenta algunas características de la muestra de personas escogidas? ¿Diferenciarías por ciudad? ¿por rango de edad? ¿por clase social? ¿por nivel económico? ¿por género?
- En cuanto tengas tus resultados de la encuesta y las respuestas diferenciadas por tantas variables como consideres, ¿cómo mostrarías la información de manera sintetizada?

Solución de la actividad

Para elegir una muestra que represente de manera fiable una población tan grande como los adultos con derecho a voto en España, se recomienda tomar en torno a un 20% o 30%. Esto significa que habría que encuestar en torno a 8.728.928 personas que sería el 25% del censo. Al tomar este porcentaje como muestra, se puede asegurar que los resultados son representativos de toda la población.

Para realizar una encuesta a este nivel, para la que necesitas un gran número de respuestas anónimas, lo mejor es emplear una plataforma online que te permita distribuirla por toda España y llegar a un amplio rango de la población.

A la hora de analizar los resultados hay que tener en cuenta variables como el rango de edad, la clase social, el nivel económico. En este caso, variables como la ciudad o el género no se consideran tan relevantes como las otras a la hora de elegir partido político. Tanto el rango de edad como el nivel económico se clasifican como variables cuantitativas, mientras que la clase social es una variable cualitativa.

Por ejemplo, para representar la información referente al partido que votarán las personas de entre 18 y 24 años, se emplea la siguiente gráfica de barras:

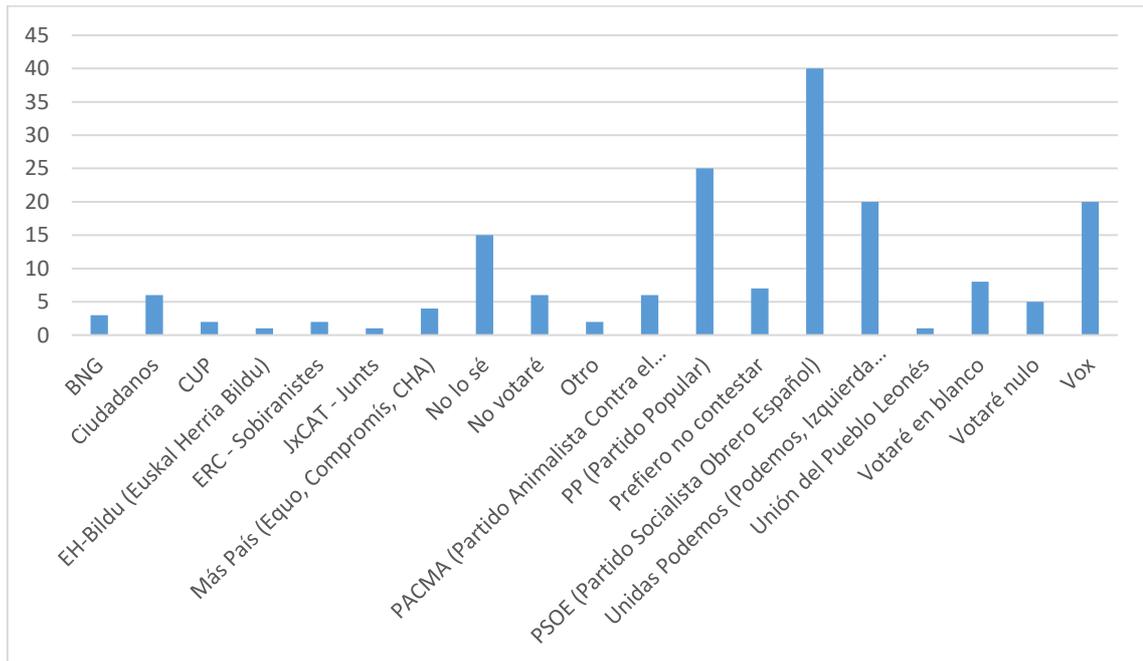


Figura 21: Gráfico con las respuestas de los votantes

De aquí, se puede observar como el partido más votado en este rango de edad será el PSOE, seguido del PP, Unidas Podemos y Vox.

A través de las preguntas se orienta y guía a los alumnos a trabajar los conceptos de muestra, población y su relación. También, se plantea la segmentación de la muestra en función de distintas variables estadísticas. Por último, se pregunta cómo realizar la encuesta y cómo presentar los resultados. Es decir, dentro del procedimiento que hay que llevar a cabo durante un estudio estadística se presentan las primeras etapas: caracterización de la muestra, diseño de la encuesta y forma de distribución y por último, análisis de los resultados a través de la visualización.

CP2: Extraer las frecuencias absolutas de los valores representados en un diagrama de barras.

En esta segunda actividad se busca introducir a los alumnos en el mundo de las frecuencias y los diagramas de barras. Es decir, a través de un gráfico se pretende que sean los propios alumnos los que extraigan toda la información necesaria para formarse sus propias opiniones, haciendo uso de la lógica y los datos. De esta forma, no solo se trabaja el razonamiento estadístico, a través del análisis y estudio de los gráficos y representaciones, sino también la alfabetización estadística de los alumnos, puesto que es importante que los alumnos compartan sus reflexiones con el resto de los compañeros de la clase.

Para el diseño de la actividad se muestran diferentes gráficos donde se analiza la popularidad de Netflix en varios países en base a distintas variables. Los datos visualizados son relativamente actuales (Laycock, 2021) y el tema es cercano a los alumnos, con lo que se busca aumentar el interés y la participación en clase.

Actividad 2:

En las siguientes representaciones se muestra la influencia de distintas plataformas digitales en función del género. En base a esto, responde a las siguientes preguntas:

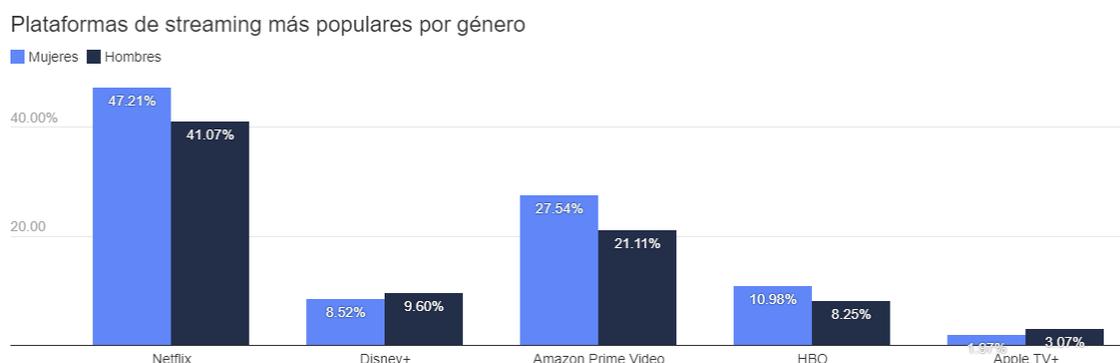


Figura 22: Diagrama de barra de las plataformas más populares en función del género (Laycock, 2021)

Plataformas de transmisión más populares por edad

Plataforma	18-24	25-34	35-44	45-54	55-64	65+
Netflix	44.36%	43.38%	44.10%	48.17%	47.65%	34.26%
Disney+	9.34%	11.42%	11.28%	8.90%	6.71%	0.93%
Amazon Prime Video	21.40%	23.29%	27.18%	26.70%	29.53%	17.59%
HBO	11.28%	5.94%	9.74%	10.99%	11.41%	7.41%
Apple TV+	3.50%	1.83%	4.10%	1.57%	1.34%	0.93%

Figura 23: Tabla de plataformas más populares en función del rango de edad
(Laycock, 2021)

- ¿Cuál es la plataforma preferida por los hombres? ¿y la que menos les gusta? ¿y a las mujeres?
- ¿Cuántos hombres eligen como plataforma preferida Netflix? ¿Y cuantas mujeres HBO?
- Si aplicases los porcentajes extraídos del gráfico de barras a la población de Zaragoza (684.686 habitantes), y asumiendo que hay el mismo número de hombres que de mujeres, ¿serías capaz de responder a las preguntas anteriores?
- A partir del gráfico de barras transforma en tabla los datos que muestra y, cruzándolo con la segunda tabla extrae tus propias conclusiones del estudio.

Solución de la actividad

- Observando la gráfica de barras, la plataforma favorita de los hombres es Netflix con diferencia, al igual que la de las mujeres. La menos apetecible para ambos géneros es Apple TV+.
- Para responder de manera cuantitativa a las preguntas de cuántos hombres eligen Netflix y cuántas mujeres HBO, se necesita el dato del volumen de la población, pues se pide el valor de la frecuencia absoluta, cuando únicamente se puede obtener el valor de las frecuencias relativas.
- Puesto que ahora se conoce el valor de la población a la que hacen referencia los porcentajes del gráfico de barras, se puede obtener a partir de este el valor de la frecuencia absoluta.

	Frec Relativa Mujeres	Frec Absoluta Mujeres	Frec Relativa Hombres	Frec Absoluta Hombres
Netflix	47,21%	161.620	41,07%	140.600
Disney +	8,52%	29.167	9,60%	32.864
Amazon Prime Video	27,54%	94.281	21,11%	72.268
HBO	10,98%	37.598	8,25%	28.243
Apple TV+	1,97%	6.744	3,07%	10.509
Otras	3,78%	12.940	16,9%	57.856

Tabla 9: Frecuencias en función de la plataforma y el género

Puesto que la suma de los porcentajes no suma el 100% se añade una nueva categoría “Otras” para completar el total.

Así, se puede contestar que 140.600 hombres en Zaragoza prefieren Netflix frente al resto de plataformas, al igual que 37.598 mujeres prefieren HBO.

- Por último, y aprovechando la segunda tabla, se puede unificar la información de ambas y extraer conclusiones como que Netflix es la plataforma líder del mercado tanto entre hombres como mujeres para cualquier rango de edad. También hay que destacar como conforme aumenta el rango de edad, las plataformas como Amazon Primer y HBO aumentan en popularidad, principalmente mujeres.

Tras la realización de esta actividad se busca generar un pequeño debate acerca de los datos con los que se trabaja, es decir, se busca fomentar en los alumnos el pensamiento crítico. Al presentar un contexto como el de las plataformas digitales se asegura que los alumnos se sientan lo suficientemente a gusto como para opinar, contrariar a los datos e incluso, puede dar lugar a realizar un estudio estadístico respondiendo a la pregunta de cuál es la plataforma más común dentro de la clase.

Además, con esta actividad se trabajan técnicas como el cambio entre diferentes representaciones de los datos: la forma tabular y la forma gráfica, el uso de los porcentajes y el análisis de los gráficos de barras.

CP3: Construir el diagrama de barras y de sectores dado la tabla de valores.

Al igual que en la actividad anterior se ha trabajado la construcción de la tabla de frecuencias a partir del gráfico de barras, aquí se busca ir en el sentido contrario. A la hora de trabajar la estadística es importante tener una flexibilidad y agilidad mental que permita cambiar de representación en función del destinatario del estudio o del tipo de análisis que se quiera llevar a cabo.

Para el desarrollo de esta actividad se parte de las canastas anotadas en el primer cuarto por el equipo de los Knicks y los Hornets en el partido del día 31/03/2022 donde se refleja el jugador que encesta y los puntos que marca (NBA, 2022).

Actividad 3:

Partiendo del resumen proporcionado por la mesa de un partido de baloncesto, cada uno de los entrenadores de ambos equipos quiere estudiar la evolución del partido en el

primer cuarto para elegir los 5 jugadores que deberían seguir en el segundo cuarto y así poder terminar ganando el partido.

Para ello, los entrenadores disponen de la siguiente tabla donde se presentan los tiros libres (TL), los tiros de dos (T2) y los triples (T3) acertados (X) y fallados (O) de cada uno de los jugadores a lo largo de todo el primer cuarto. Hay jugadores que pertenecen al equipo de los Hornets (H) y al de los Knicks (K).

HORNETS	TL	T2	T3
P.J. Washington		X	
Terry Rozier		X	
Terry Rozier			X
P.J. Washington			O
LaMelo Ball		X	
LaMelo Ball		X	
LaMelo Ball			O
Miles Bridges		X	
Miles Bridges			X
Terry Rozier		O	
Miles Bridges		X	
Miles Bridges		O	
Kelly Oubre		X	
Cody Martin			O
Miles Bridges		X	
Miles Bridges		X	
Kelly Oubre			O
Kelly Oubre		X	
Miles Bridges		O	
Kelly Oubre			X
LaMelo Ball		O	

KNICKS	TL	T2	T3
Mitchell Robinson	O		
Mitchell Robinson	X		
Evan Fournier			O
Julius Randle			X
RJ Barrett		X	
Julius Randle			X
RJ Barrett			O
Mitchell Robinson		X	
Alec Burks			O
RJ Barrett		X	
Alec Burks			O
Evan Fournier			X
Julius Randle		X	
RJ Barrett		X	
Evan Fournier		X	
RJ Barrett		X	
Julius Randle			O
Immanuel Quicley		X	
Julius Randle		O	
Julius Randle		O	
RJ Barrett		X	
Immanuel Quicley		O	
Obi Toppin		X	
RJ Barrett	X		
RJ Barrett	O		

Figura 24: Resumen de las jugadas del primer cuarto

En base a ello, y analizando diferentes estadísticas como por el ejemplo el porcentaje de aciertos (tiros acertados entre tiros totales) en triples, tiros de dos y tiros libres de cada uno de los jugadores, determina qué cinco jugadores deberían seguir jugando el segundo cuarto y cuáles deberían sentarse en el banquillo.

Para ayudarte a formar el equipo ganador, diseña un conjunto de gráficos que te permitan justificar tus decisiones delante de los entrenadores.

Solución de la actividad:

Primero se analizan los puntos por jugador y equipo:

Hornets	Puntos	% del total
Washington	2	7%
Rozier	5	17%
Ball	4	14%
Bridges	11	38%
Oubre	7	24%
Martin	0	0%
	29	

Knicks	Puntos	% del total
Robinson	3	10%
Randle	8	26%
Barrett	11	35%
Fournier	5	16%
Quickly	2	6%
Toppin	2	6%
Burks	0	0%
	31	

Tabla 10: Tablas por puntos en función del jugador

Haciendo diferencia entre el tipo de tiro se obtienen los siguientes porcentajes:

Hornets	TLI	TLC	%TL	T2I	T2C	%T2	T3I	T3C	%T3
P.J. Washington	0	0	0%	1	1	100%	1	0	0%
Terry Rozier	0	0	0%	2	1	50%	1	1	100%
LaMelo Ball	0	0	0%	3	2	67%	1	0	0%
Miles Bridges	0	0	0%	6	4	67%	1	1	100%
Kelly Oubre	0	0	0%	2	2	100%	2	1	50%
Cody Martin	0	0	0%	0	0	0%	1	0	0%

Knicks	TLI	TLC	%TL	T2I	T2C	%T2	T3I	T3C	%T3
Mitchell Robinson	2	1	50%	1	1	100%	0	0	0%
Evan Fournier	0	0	0%	1	1	100%	2	1	50%
Julius Randle	0	0	0%	3	1	33%	3	2	67%
RJ Barrett	2	1	50%	5	5	100%	1	0	0%
Alec Burks	0	0	0%	0	0	0%	2	0	0%
Immanuel Quicley	0	0	0%	2	1	50%	0	0	0%
Obi Toppin	0	0	0%	1	1	100%	0	0	0%

Tabla 11: Tablas de las estadísticas en función del jugador

Los jugadores de los Hornets que más han marcado, y que por tanto deberían formar parte del equipo, son Bridges, la mayoría en tiros de 3, Oubre en tiros de dos y Rozier en triples.

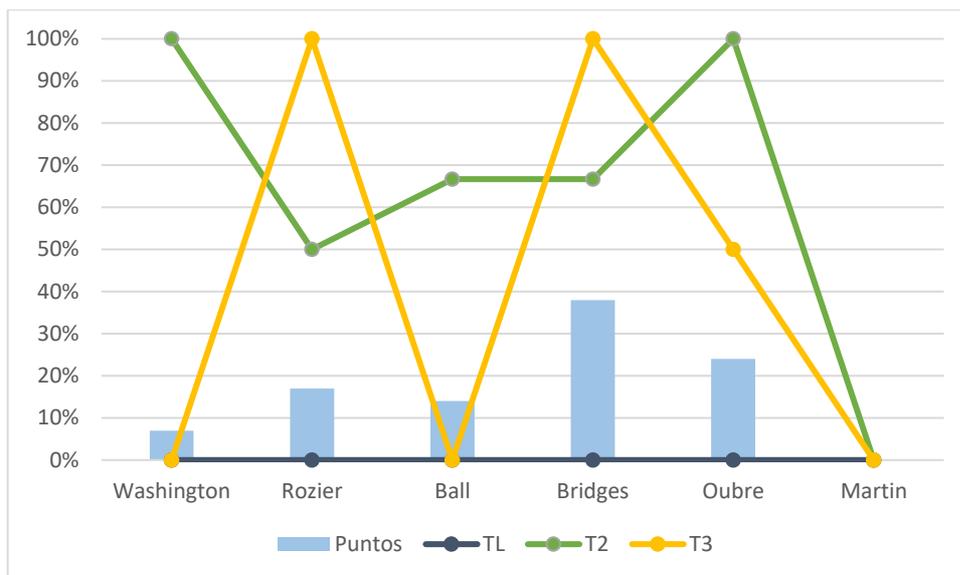


Figura 25: Gráfica del equipo Hornets

En base a este gráfico el mejor equipo posible sería el formado por: Bridges, Oubre, Rozier, Ball y Washington.

Por otro lado, en el equipo de los Knicks los jugadores que más puntos han sumado son Barrett, en tiros de dos, Randle en triples y Fournier en tiros de tres.

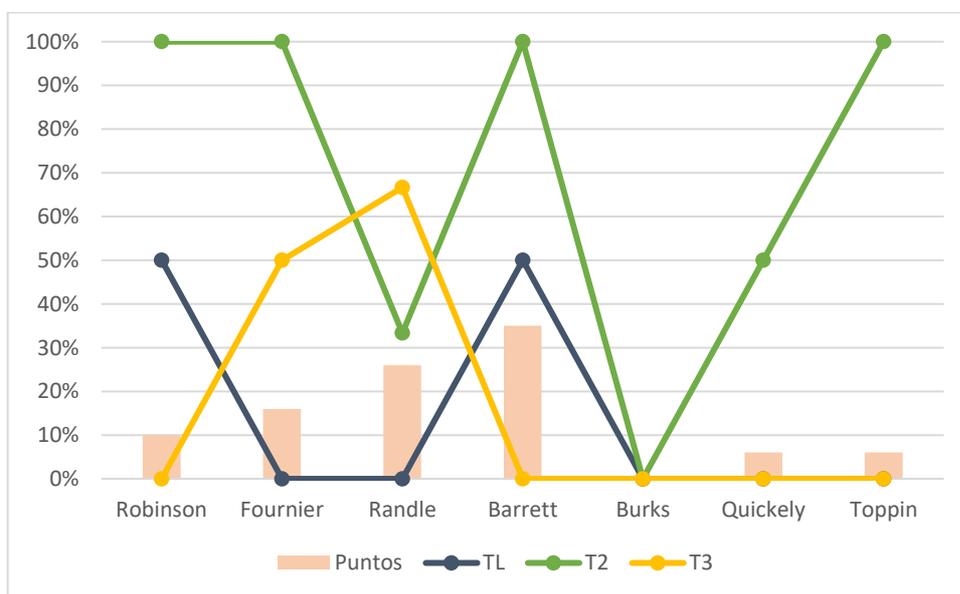


Figura 26: Gráfica del equipo Knicks

Por tanto, el equipo para el segundo cuarto debería ser: Barrett, Randle, Fournier, Robinson y Toppin.

Al tratarse de datos relacionados con el deporte, se busca acercar la actividad a los alumnos y alejarse de los tópicos donde se calcula la tabla de frecuencias con las alturas

de los estudiantes. Además, el contexto de trabajar con datos reales y obtener resultados con un fin como el de ayudar a ganar al equipo, motiva e incentiva al alumno a implicarse en la actividad.

Además, de forma natural, los alumnos tienden a representar los datos empleando diagramas de barras que pueden combinar con las líneas para ver a la vez toda la información que conocen, y así extraer conclusiones.

CP4: Elección del parámetro de centralización adecuado como representante del conjunto de datos.

Se busca trabajar con las medidas de tendencia central, en concreto, con la media, la mediana y la moda. Las dos primeras son las más conocidas y quizás más intuitivas para los alumnos. Sin embargo, la mediana puede resultar menos sencilla para algunos, por lo que se pondrá el foco en esta.

Lo primordial no es que sepan calcularlas a partir de fórmulas, sino que comprendan e interioricen el concepto. Además, se pretende transmitir la importancia de distinguir las diferentes situaciones en las que utilizar una medida u otra.

Por todo esto, se desarrolla la siguiente actividad, donde se moldean tres conjuntos de datos para orientar al alumno, a través de preguntas, a vislumbrar la diferencia entre los tres parámetros de centralización.

Actividad 4:

A continuación, se presentan los salarios de 20 empleados que pertenecen a tres empresas diferentes.

	Empresa A		Empresa B		Empresa C
Prácticas	1.000	Prácticas	150	Prácticas	200
	1.000		150		200
	1.100		200		500
	1.200		200		500
Empleado	1.300	Empleado	500		500
	1.300		500		500
	1.500		500		700
	1.500		500		700
	1.700		500		700
	1.700		500		1.000
	2.500		500	2.500	
	2.500		500	2.500	
	2.500		500	Empleado	2.500
					2.500

	2.500		500		2.500
Director	5.000		500		4.000
	5.000		500		5.000
	7.000		500		7.000
	7.000		500	Director	10.000
	9.000		500		12.000
	12.000		500		15.000
		Director	60.000		

Tabla 12: Salario de los empleados de las empresas A, B y C

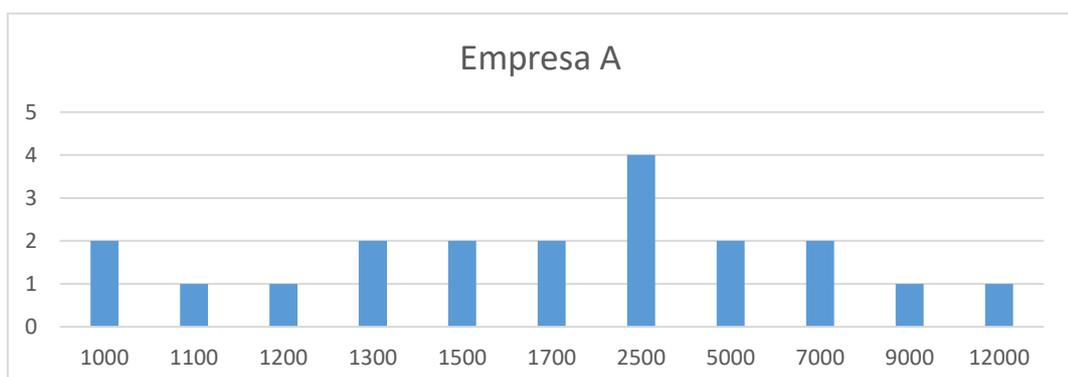
Antes de responder a las siguientes preguntas utiliza los gráficos para calcular el valor de la media, moda y mediana para cada una de las empresas. Para ayudarte a la hora de identificar el valor de la mediana emplea las tablas proporcionadas previamente con los valores ordenados, de esta forma, veras que el valor de la mediana coincide con el centro de la distribución.

Una vez hayas interiorizado los valores proporcionados y consigas identificar las medidas pedidas, responde a las siguientes preguntas:

- ¿Sabrías decir cuál es el sueldo más frecuente dentro de cada empresa?
- En base al valor de la media del salario en cada una de las empresas, ¿dirías que en las tres empresas se cobra de manera similar? ¿Y en base al valor de la mediana?
- Si quisieras echar tu currículum a una de las tres empresas, ¿qué empresa elegirías? Si por el contrario, tuvieras que elegir en base a las características de tu puesto, ¿cuál elegirías si quisieras realizar unas prácticas? ¿Si fueras un empleado? ¿Y si fueras director? Justifica tu respuesta

Solución de la actividad

- Primero se representan ordenados los sueldos presentes en cada una de las gráficas.



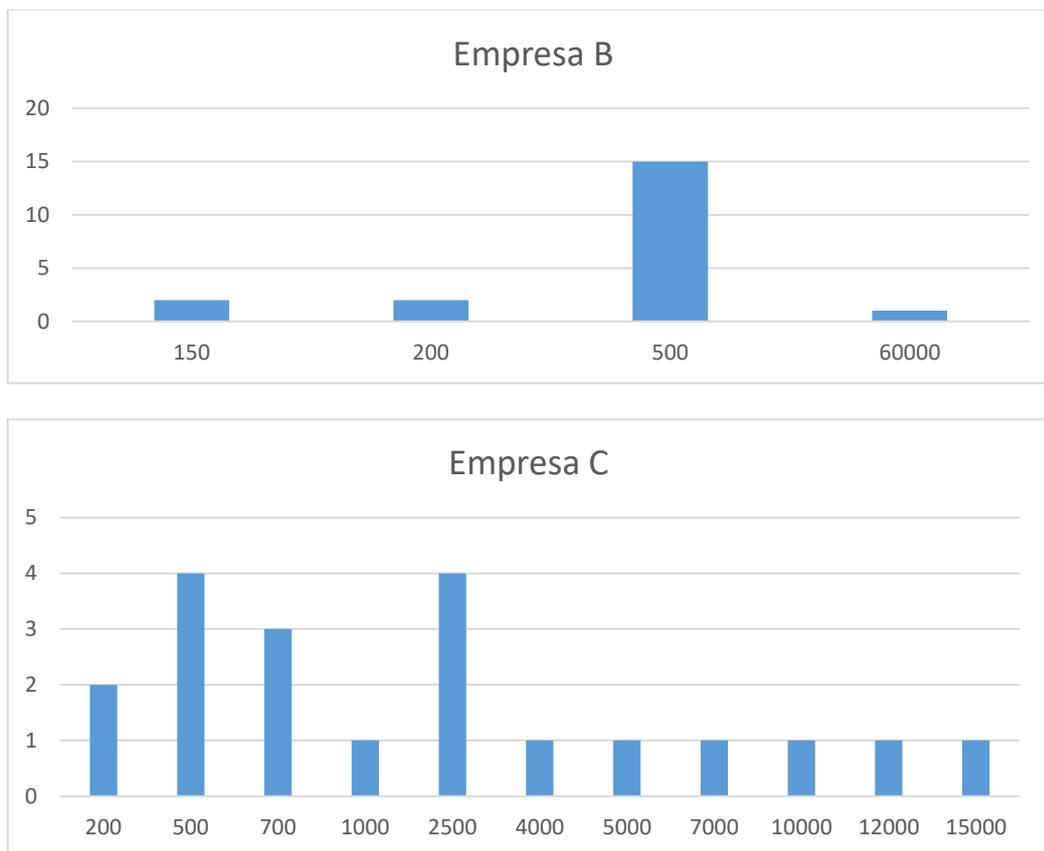


Figura 27: Gráficas de la frecuencia por empresa

El valor de la moda se identifica rápidamente en los tres gráficos, el de la media se puede calcular fácilmente y por último, la mediana se puede trabajar de manera visual empleando la tabla 12 y contando con que su valor se sitúa en la posición central de esta.

Empresa A	1.000	1.000	1.100	1.200	1.300	1.300
Empresa B	150	150	200	200	500	500
Empresa C	200	200	500	500	500	500

1.500	1.500	1.700	1.700	2.500	2.500	2.500
500	500	500	500	500	500	500
700	700	700	1.000	2.500	2.500	2.500

2.500	5.000	5.000	7.000	7.000	9.000	12.000
500	500	500	500	500	500	60.000
2.500	4.000	5.000	7.000	10.000	12.000	15.000

Figura 28: Representación visual de la mediana

Por último, se resume en el siguiente cuadro el valor de la media, moda y mediana de cada una de las empresas:

	Empresa A	Empresa B	Empresa C
Media	3.415	3.410	3.425
Mediana	2.100	500	1.750
Moda	2.500	500	500 2.500

Tabla 13: Resumen de las medidas calculadas

- Al hablar de sueldo más frecuente, se hace referencia al valor de la moda, es decir, el valor más repetido dentro de la distribución. En la empresa A el sueldo más frecuente es 2.500€, en la empresa B claramente son 500€ y en la empresa C son tanto 500€ como 2.500€.
- En base al valor de la media del salario de las empresas en las tres se cobra de manera similar. Sin embargo, en base al valor de la mediana elegiría la empresa A ya que se cobra un mayor salario.
Esto significa que, por ejemplo, en la empresa A el 50% de los salarios de los empleados se encuentran por debajo de 2.100€.
- Si tuviera que elegir empresa elegiría aquella cuyo salario medio fuera mayor, siendo que en las 3 es similar, me basaría en el valor de la mediana y la moda, escogiendo así, la empresa A. Si quisiera hacer prácticas elegiría la empresa A pues el sueldo base de la persona en prácticas es el máximo sueldo que se puede cobrar en las otras dos. Si fuera un empleado la empresa C por mayores sueldos. Y al ser director la empresa B por la diferencia salarial.

Con esta actividad y las preguntas planteadas se busca no solo que sean capaces de calcular las medidas de tendencia central, sino que aprendan a analizar los resultados y reflexionen sobre estas. Es decir, en este caso se han presentado tres distribuciones con la misma media, distinta mediana y misma moda (en el último caso es doble). Esto lleva a deducir cuánto y cómo se ven afectadas las tres medidas por los valores de la distribución.

CP5: Representar e interpretar en un diagrama de barras las medidas de centralización.

Para trabajar este campo de problemas se retoman los datos de la actividad anterior. En este caso, se busca una mayor reflexión por parte de los alumnos, pues ya han calculado los valores de las medidas de centralización e interpretado su significado dentro del contexto. Sin embargo, aquí se quiere que sean ellos quienes, a través de los gráficos y la visualización, lleguen a las mismas conclusiones.

La moda se define como el valor más repetido dentro de una distribución, por lo que en un diagrama de barras donde se represente la frecuencia en el eje y, se corresponderá con la barra más alta.

La media se entiende como el valor promedio de la distribución. Dentro de un diagrama de barras se entiende como aquel valor que equilibra el diagrama, es decir, que si se tratase de una distribución simétrica correspondería con el pico de esta.

Por último, la mediana es el valor que divide la distribución por el centro, es decir, parte por la mitad la distribución. Para trabajar este concepto de manera visual se emplean las frecuencias acumuladas en tanto por ciento. Cabe resaltar que este concepto se ha trabajado en el campo de problemas anterior empleando otra técnica, la regla métrica. Esto permite ofrecer a los alumnos una variedad de opciones a la hora de trabajar el mismo concepto que facilita la adquisición de conocimientos, así como la comprensión de este, pues habrá alumnos que preferirán la primera técnica frente a la trabajada en esta actividad y viceversa.

Actividad 5:

Empleando los datos de la actividad 4 para las diferentes empresas y en base a las respuestas dadas a esta actividad, completa la siguiente tabla de valores con la frecuencia absoluta, la frecuencia absoluta acumulada y relativa acumulada. A partir de ella, apoyándote en varias representaciones visuales, justifica el valor calculado de la media, moda y mediana. Por último, justifica en cuál de las tres empresas te ha parecido más sencillo identificar los parámetros calculados.

Solución de la actividad

En primer lugar, completamos la siguiente tabla de frecuencias, donde a cada valor le asignamos el número de veces que se repite (frecuencia absoluta).

Empresa A	Frec Relativa	Frec Rel Acum	Frec Rel Acum (%)
1000	2	2	10
1100	1	3	15
1200	1	4	20
1300	2	6	30
1500	2	8	40
1700	2	10	50
2500	4	14	70
5000	2	16	80
7000	2	18	90
9000	1	19	95

12000	1	20	100
	20		

Empresa B	Frec Relativa	Frec Rel Acum	Frec Rel Acum (%)
150	2	2	10
200	2	4	20
500	15	19	95
60000	1	20	100
	20		

Empresa C	Frec Relativa	Frec Rel Acum	Frec Rel Acum (%)
200	2	2	10
500	4	6	30
700	3	9	45
1000	1	10	50
2500	4	14	70
4000	1	15	75
5000	1	16	80
7000	1	17	85
10000	1	18	90
12000	1	19	95
15000	1	20	100
	20		

Tabla 14: Cálculo de las frecuencias calculadas para cada empresa

Representado la frecuencia absoluta frente a los salarios podemos identificar fácilmente el valor de la moda. El sueldo más frecuente en la empresa A son 2.500€ (moda).

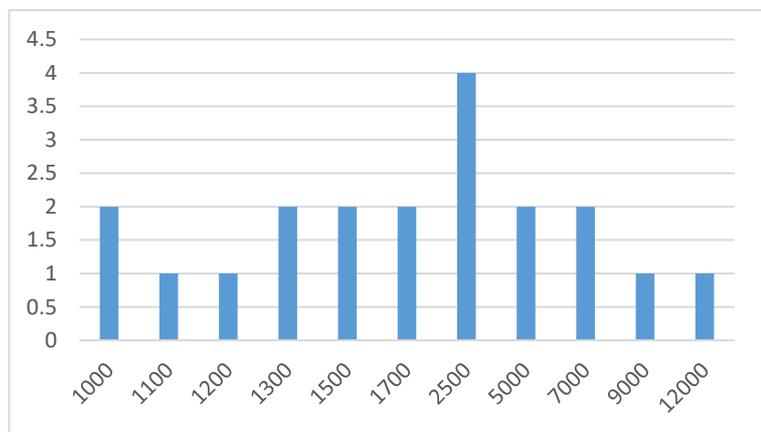


Figura 29: Frecuencia relativa frente a salario, empresa A

Además, de este gráfico también se puede deducir el valor de la media. Tiene que ser aquel valor que represente el promedio de la distribución. Para determinarlo hay que tener

en cuenta, tanto la frecuencia de cada sueldo, como el propio valor del sueldo. Aquí, se puede pensar que la media estaría en torno a 2.500€, sin embargo, estará más desplazado a la derecha para equilibrar los bajos sueldos frente a los altos. Por tanto, la media estará entre 2.500€ y 5.000€.

Comparando con el valor calculado en la actividad 4 se observa que el sueldo medio es 3.415€, por lo que la estimación es bastante próxima.

Por último, para representar la mediana es mejor emplear las frecuencias acumuladas, pues es el valor que separa a cada lado el 50% de los datos.

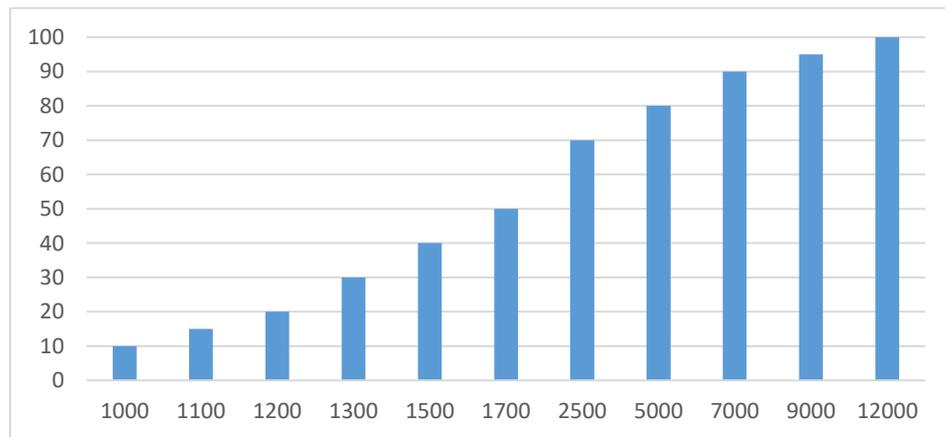


Figura 30: Frecuencia relativa absoluta frente a salario, empresa A

En el gráfico, se ve como la mediana se encuentra entre 1.700€ y 2.500€, ya que justo entre estos valores se encuentra el 50% de la distribución. Comparando con el valor calculado, 2.100€, se observa como el método de representación gráfica es tan válido como el cálculo del valor numérico. De esta forma, el concepto de la mediana se ha trabajado tanto desde la tabla de valores del propio enunciado como desde una representación gráfica y visual empleando su definición.

Repitiendo el mismo procedimiento para las empresas B y C se obtienen los siguientes gráficos:

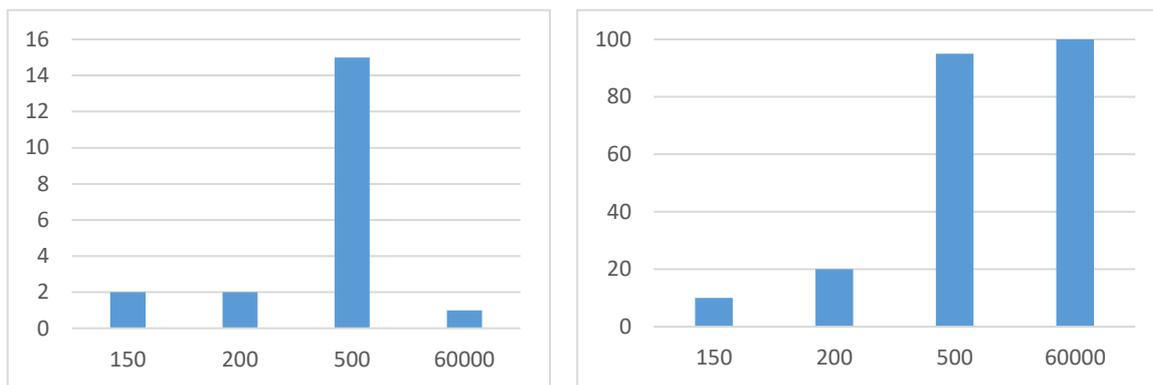


Figura 31: Frecuencia relativa y acumulada frente a salario, empresa B

De estos dos gráficos pertenecientes a la empresa B se deduce que el sueldo más repetido son 500€ y que la media se tiene que situar entre 500€y 6.000€, siendo un valor próximo intermedio. Por último, la mediana claramente es 500€, tal y como se ve en el gráfico de la derecha.

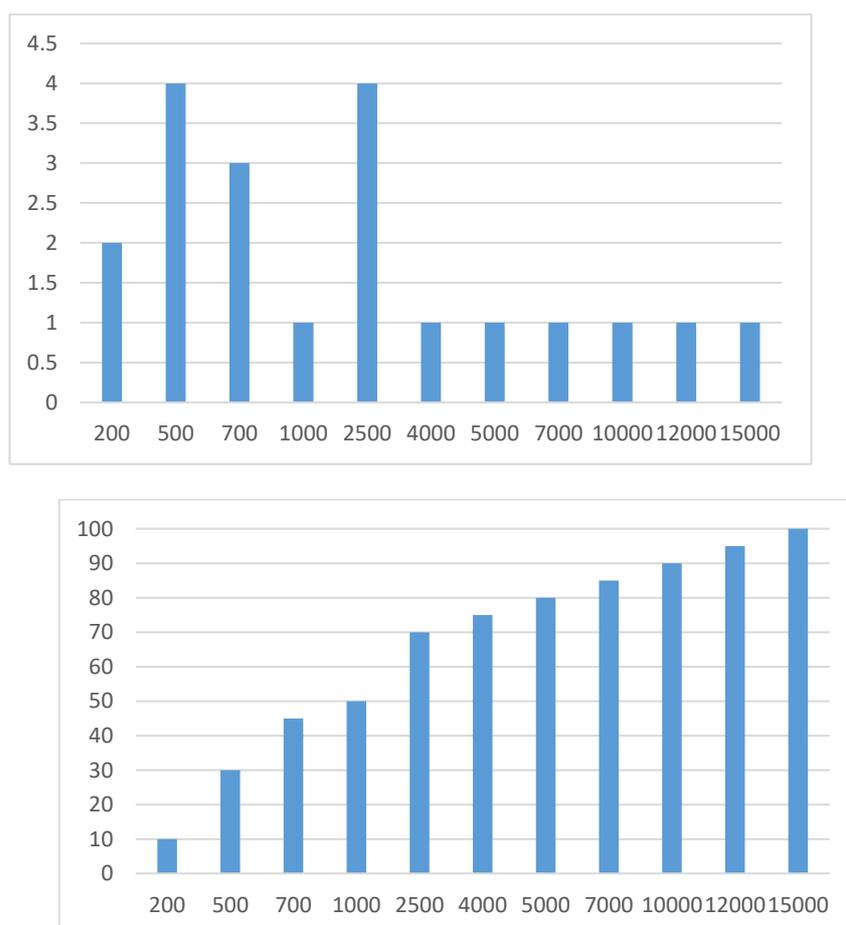


Figura 32: Frecuencia relativa y acumulada frente a salario, empresa C

De estos dos gráficos se deduce que el sueldo más frecuente en la empresa C son o bien 500€ o 2.500€. Por otro lado, el valor de la media se tiene que encontrar entorno a

los 2.500€ o más, ya que se sitúa en el centro de la distribución. Por último, el valor de la mediana se sitúa entre los 1.000€ y 2.500€.

En cuanto a la empresa que más sencillo resulta analizar, la empresa A tiene una distribución mucho más simétrica, es decir, los datos están mejor repartidos en torno al valor de la media, por lo que es más fácil de identificar. Al compararla con las otras empresas se observa cómo identificar la media dentro del gráfico se complica conforme la distribución es menos simétrica, pues el máximo de la distribución deja de coincidir con el valor de la media.

En esta actividad se busca que los alumnos sean capaces de identificar diferencias de manera visual en lo que respecta a las distribuciones trabajadas. Para ello, la correcta realización de los gráficos de las Figuras 30, 32 y 33 es crucial y el hecho de haber ido trabajando el pensamiento crítico con el resto de las actividades, también les facilitará identificar características en cada uno de los conjuntos de datos.

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

En un principio, los problemas están diseñados en base a unas técnicas iniciales previamente desarrolladas que no se prevé que sean necesarias modificarlas. Los problemas están planteados de manera que al irse introduciendo en estos, los objetos matemáticos que nacen de la estadística van surgiendo de manera natural para los alumnos. Esta forma de abordar el contenido de un tema favorece la asimilación de ideas y ayuda a la retención y comprensión de estas.

En caso de requerir alguna modificación vendría promovida por la necesidad de ajustar el nivel a las capacidades de los alumnos, implicando esto una variación en los datos trabajados o incluso extendiendo los debates para generar una mayor reflexión de los alumnos.

3. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

En lo referente a la metodología que se empleará será muy parecida en todos los campos de problemas. Se buscará sobre todo el trabajo cooperativo, para facilitar el aprendizaje, fomentar la interacción entre compañeros y el hecho de compartir ideas y crecer como clase.

Generalmente, se trabajarán en pequeños grupos de 4 o 5 integrantes, aunque también se realizarán actividades en parejas. Además, algunas actividades se plantearán directamente a los alumnos para que trabajen como un ente, es decir, que toda la clase funcione como un solo grupo y puedan trabajar todos juntos.

A modo general, la clase comenzará explicando la actividad a los alumnos, leyendo el enunciado y resolviendo posibles dudas que puedan surgir. A continuación, con la actividad ya explicada, se pedirá a los alumnos que formen grupos y que comiencen a resolver la actividad. Mientras tanto el docente irá observando y escuchando atentamente las dudas, conclusiones y reflexiones que realicen los alumnos, para así, en una última fase poder ponerlas en común delante de todos e ir comentándolas. Esta etapa es fundamental para los alumnos, ya que pueden escuchar las opiniones del resto de compañeros, complementando así sus propias conclusiones. Antes de terminar la sesión, es importante que el docente institucionalice los conceptos trabajados en cada actividad.

F. Sobre las técnicas

1. Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula.

En este apartado se proponen diferentes ejercicios en los que se trabajan las técnicas previamente clasificadas en el apartado A3.

T1: Construcción de una encuesta en base a una pregunta estadística por responder.

Esta técnica incluye tres técnicas, las cuales se van a trabajar de manera simultánea a través de una actividad:

T1.1 Identificar la población.

T1.2 Identificar la muestra.

T1.3 Caracterizar la variable estadística y su tipo: cuantitativa o cualitativa.

Para ello, se lleva al aula una sencilla actividad que consiste en dar respuesta a la una pregunta y ver cómo de representativos son los resultados.

Actividad 6:

Junto con tus compañeros de clase, elabora una encuesta que te permita responder a la siguiente pregunta: ¿cuál es la asignatura preferida de los alumnos de 1º de la ESO?

- Suponiendo que inicialmente no puede preguntar a todos tus compañeros de curso, ¿a cuántos crees que sería necesario preguntar para poder representar a todo el curso? ¿Qué respuesta obtienes?

- Si ahora extiendes la encuesta a todos los compañeros de 1º de la ESO, ¿obienes los mismos resultados analizando los datos con esta muestra que si empleas solo un porcentaje de alumnos?
- Puesto que estas estudiando cuál es la asignatura preferida entre los alumnos, ¿cómo clasificarías esta variable estadística?

T2: Interpretación del diagrama de barras para extraer las frecuencias.

Esta técnica consiste en a partir de los valores representados en un diagrama de barras, saber interpretarlos correctamente y extraer las frecuencias, para así completar una tabla de frecuencias.

Remarcar que esta técnica se pone en práctica de manera completa al trabajar la actividad 2 dentro del CP2, donde se pide a los alumnos, que pasen del gráfico de barras proporcionado a la representación tabular. De esta forma, se trabaja la técnica de una manera natural, pues los alumnos son capaces de realizar esta transformación de forma intrínseca.

T3: Construir gráficos estadísticos dado una tabla de frecuencias.

En este caso, en esta técnica se incluyen dos:

T3.1 Construcción de un diagrama de barras.

T3.2 Construcción de un diagrama de sectores.

Ambas técnicas se trabajan de forma constante en varios de los campos de problemas, concretamente en el CP1, CP3 y CP5. En ninguna de las actividades planteadas se especifica el tipo de representación visual a emplear, por lo que los alumnos pueden usar tanto un diagrama de barras como uno de sectores, como alguna otra representación que conozcan.

Aun así, puesto que la tendencia general es el uso de diagramas de barras, a continuación, se presenta una actividad específicamente diseñada para trabajar los diagramas de sectores.

Actividad 7:

Como conmemoración de los dos años de las últimas olimpiadas, la profesora de matemática decide ver qué porcentaje de medallas de oro gano España en comparación con los cuatro países que más medallas ganaron. Para ello, proporciona a sus alumnos la

siguiente tabla (International Olympic Committee, 2020) y les pide que escojan dos formas distintas de representar los siguientes datos.

País	Nº de medallas
Japón	27
Gran Bretaña	22
EEUU	39
España	3
China	38

Tabla 15: Medallero de los 5 primeros países:

T4: Calcular las medidas de centralización.

Respecto al cálculo de las medidas de centralización, es importante remarcar cuáles se van a calcular:

T4.1 Calcular la media

T4.2 Calcular la moda

T4.3 Calcular la mediana

El cálculo de estas medidas se trabaja en la actividad 4 que se incluye dentro del campo de problemas 4. Aquí se pide explícitamente el cálculo tanto de la media como de la mediana. Además, se pregunta por el salario más frecuente en cada empresa, lo cual hace referencia al cálculo del valor de la moda.

T5: Identificar los parámetros de centralización en el diagrama de barras para interpretar y caracterizar el mejor representante.

De nuevo, esta técnica se ha trabajado previamente dentro del campo de problemas CP5 en la actividad 5. En esta, se proporciona un conjunto de datos sobre el salario en tres empresas y se pide a los alumnos que, a partir de la construcción de la tabla de frecuencias y el diagrama de barras, interpreten e identifiquen los parámetros de centralización calculados en la actividad 4.

T6: Resolución de ejercicios o problemas contextualizados desde el uso de las TIC apoyado en el manejo de hojas de cálculo.

Hasta ahora únicamente se han desarrollado actividades para realizarlas con lápiz y papel, sin embargo, la integración de las TIC en el aula es cada vez más frecuente.

Es por ello, que para trabajar esta técnica se ha escogido un contexto familiar para ellos, las redes sociales, en concreto, tiktok, y se emplearan las hojas de cálculo de Excel.

Actividad 8:

Se quiere conocer al tiktoker más famoso del mundo. Para ello, se obtiene un listado de los 1000 titktokers con más suscriptores, que más visualizaciones tienen, más vistos, comentados y compartidos. En base a estas variables y con ayuda de la hoja de cálculo para realizar las representaciones gráficas, contesta a las siguientes preguntas:

- En base al número de suscriptores, ¿qué profesión dirías que es la más común?
- Puesto que la mayoría de los que aparecen en el listado son de Estados Unidos, ¿conoces algún video del titktoker con más visualizaciones? ¿Y de los más comentados?
- Dentro de los videos a los que has dado a like, ¿se encuentra alguno del top 10?
- ¿Alguna vez te han enviado o has enviado algún video de los tiktokers más virales?

2. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

En cada actividad propuesta en el apartado anterior se ha especificado la técnica o el conjunto de técnicas que se ejercitan concretamente.

Por otro lado, además se busca fomentar el pensamiento crítico en los alumnos. Para ello, con cada actividad se busca una reflexión, ya sea sobre los resultados, sobre la forma de proceder o sobre la necesidad de emplear una técnica u otra. Por ejemplo, para ejercitar la técnica 5, se emplea la actividad 5 donde se busca el análisis del uso de una u otra medida de tendencia central en función de los datos proporcionados.

Dentro de la asignatura de matemáticas no solo hay que trabajar la competencia matemática, sino que es necesario acercar la asignatura a los alumnos, para ello, se buscan ejemplos reales que usen datos extraídos de encuestas o estadísticas que se puedan adaptar al nivel requerido. Esto aporta a los alumnos una visión de la estadística cercana a ellos,

además de demostrar su utilidad en el día a día. Con ello, se busca fomentar el interés en los alumnos por el objeto matemático.

3. Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Las técnicas presentadas y propuestas para trabajarlas durante el estudio del objeto matemático están adecuadas a los campos de problemas indicados. Por ejemplo, el estudio y clasificación de las variables estadísticas es aplicable a todos los campos de problemas, así como la construcción de gráficos estadísticos.

Estos últimos tienen una gran relevancia dentro de la estadística a la hora de mostrar resultados y extraer conclusiones, ya que la información se visualiza y se comprende mejor dentro de un gráfico bien hecho que en una tabla de frecuencias o lista de datos.

Por último, las técnicas asociadas al cálculo e interpretación de las medidas de tendencia central son de gran utilidad cuando se quiere dar información acerca de un conjunto de datos de manera cuantitativa. Es decir, en las situaciones donde se busca presentar una conclusión que vaya más allá de un comentario basado en tendencias, estas medidas aportan datos numéricos que permiten caracterizar la muestra de manera unívoca.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La metodología seguida se basa en el diálogo y la reflexión guiada por el profesor. Es decir, será el docente quién inicie la reflexión entre los alumnos y la oriente hacia el descubrimiento de las técnicas. Posteriormente, será el mismo quién institucionalice los conceptos con el fin de unificar las técnicas y la forma de trabajar de todos los alumnos.

El hecho de reflexionar en búsqueda de la técnica adecuada genera un pensamiento en los alumnos el cual no se trabaja comúnmente. Sin embargo, el pensar previamente a conocer la solución propicia la mejor absorción de los conceptos sin una necesidad imperiosa de memorizarlos. Además, como consecuencia de esta metodología se asegura un mejor entendimiento, así como una mayor durabilidad de los conocimientos.

Por último, hay que destacar como a la hora de trabajar las técnicas se usarán actividades a resolver de manera grupal, generalmente, aunque también es importante fomentar la reflexión autónoma de los alumnos. Por otro lado, se buscará combinar el trabajo en clase con boli y papel con el uso de las TIC. El hecho de estar en contacto de

herramientas informáticas tiene grandes aportes de valor que, enfocado de manera correcta, permite reforzar conceptos y afianzar las diferentes técnicas.

G. Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas)

1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

En lo referente al trabajo de las tecnologías, razonamientos que sustentan las técnicas, se diseñan diversas preguntas que guían al alumno a dar sentido a los diversos conceptos trabajados a través de las técnicas. Estas preguntas se introducirán en las diferentes tareas propuestas para trabajar las técnicas y campos de problemas. De esta forma, a través de preguntas sencillas, se consigue una reflexión por parte de los alumnos sobre los conceptos teóricos que sustentan las técnicas trabajadas.

TG1, TG2, TG3: Definición de la población, muestra, variable estadística y diferencias entre cualitativa y cuantitativa

Las tecnologías TG.1, TG.2 y TG.3 se trabajan intrínsecamente en la actividad 1. Al realizar preguntas acerca del número de personas que tendrían en cuenta a la hora de realizar la encuesta se está trabajando con la propia definición de la muestra. Así, como a la hora de preguntar si este pequeño conjunto de personas representa a todos los españoles, se establecen los conceptos de muestra y población, junto con su diferencia.

Por último, se hace reflexionar sobre distintas características de la población como la edad, la clase social, etc... para trabajar sobre el concepto de variable estadística y buscar la diferencia entre las variables cualitativas y cuantitativas.

De manera conjunta a la actividad se plantea a los alumnos que traten de dibujar las diferencias entre la población, la muestra y alguna de las variables estadísticas que se mencionan en el enunciado. El resultado de esta actividad esperado sería algo similar a la figura 33.

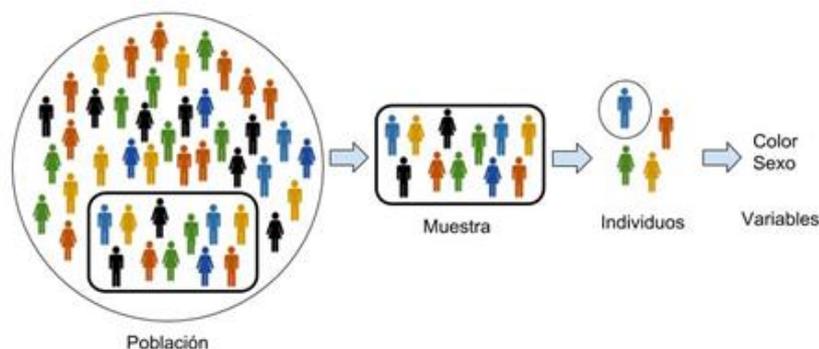


Figura 33: Resultado esperado para trabajar los conceptos: población, muestra, individuo y variables

TG4, TG5: Definición de frecuencias absoluta y relativa y de los diagramas de barras y diagrama de sectores

Por otro lado, el cálculo de la frecuencia absoluta y relativa (TG.4) está íntimamente ligado a la construcción de los diagramas de barras y sectores. Es por ello, que estas tecnologías se trabajan de la mano de las técnicas que sustentan varias actividades: 1, 2, 3, 5 y 7.

De manera complementaria, y para enriquecer el conocimiento de los alumnos sobre la variedad de tipos de gráficos que existen, se les plantea la siguiente actividad, donde se busca que los alumnos reflexionen sobre 4 tipos de gráficos diferentes. Cada de uno es específico para un tipo de variables, por lo que todos pueden ser considerados como el extraño. Así, a través de un juego atractivo de cara a los alumnos, estos trabajan en identificar los tipos de variables estadísticas, y relacionarlos con los diferentes gráficos.

Actividad 9:

En el siguiente dibujo se presentan 4 gráficos diferentes, de los cuales uno de ellos no tiene relación con los tres. Encuentra al extraño y justifica el porqué de tu elección.



Figura 34: WODB sobre los tipos de gráficos (WODB,2020)

TG6, TG7, TG8, TG9: Definición de la moda, la media, la mediana, la frecuencia acumulada y elección razonada del parámetro de centralización como mejor representante.

Finalmente, las tecnologías TG.6, 7, 8 y 9 hacen referencia a los parámetros de centralización, su significado, cuándo usarlos, cómo representarlos y cómo identificarlos gráficamente. Todo esto se integra en las actividades 4 y 5.

Por un lado, en ambas actividades se buscan diferentes técnicas para trabajar los conceptos de media y mediana. En primer lugar, en la actividad 4 se representan los datos para a partir de los gráficos identificar los valores. A la hora de trabajar la mediana en esta actividad se emplean tanto las frecuencias acumuladas como la tabla de frecuencias donde se identifica de manera natural este valor.

Además, en estas actividades, se establece la diferencia entre la media y la mediana, pues los datos proporcionados están diseñados de tal forma que las tres empresas tienen el mismo salario medio, sin embargo, el valor de la mediana y la moda es completamente diferente. De esta forma, los alumnos se dan cuenta que la media no siempre es el mejor indicador, sino que la elección del parámetro que represente los datos depende de la distribución de estos.

2. ¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

A la hora de justificar las técnicas la responsabilidad es compartida entre los alumnos y el profesor. Es decir, es a través de las preguntas del profesor que las técnicas emergen de manera natural del alumno, tras un proceso de razonamiento y reflexión. No es hasta el último momento que el profesor las institucionaliza, unificando conceptos, dando nombre a los procedimientos, concretando casos de uso, etc...

De esta forma, el alumno adquiere importancia y gana responsabilidad en el proceso de aprendizaje que fomenta la implicación y el interés de este en clase.

3. Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

Respecto al proceso de institucionalización se busca que la integración progresiva y consecutiva de los conceptos a través de la realización de las actividades propuestas. Es mediante las preguntas, la reflexión y el debate que los alumnos son capaces de interiorizar las tecnologías que dan sentido a las técnicas trabajadas en los diferentes campos de problemas.

Por todo ello, el peso del proceso queda repartido entre el profesor y los alumnos, ya que cada uno tiene su propio rol, los cuales son complementarios entre sí. Este grado de implicación de los alumnos y la responsabilidad añadida que tienen incrementa el interés por el aprendizaje, así como fomenta la atención en clase y el desarrollo cognitivo necesario para adquirir nuevos contenidos.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La metodología propuesta para la implementación de las tecnologías dentro del aula se basa en la búsqueda de la reflexión por parte del alumno, para fomentar el razonamiento estadístico. Es a través de este que se consigue la comprensión y adquisición de los conceptos propios del objeto matemático, la estadística.

A la hora de realizar las actividades propuestas, la mayoría en grupos de 4 o 5 alumnos, en todas ellas se incluyen preguntas que guían el desarrollo de estas. De esta forma, no solo se ejercitan las técnicas, sino que se trabajan las tecnologías detrás de estas. Además, al trabajar en grupos mixtos y heterogéneos, se propicia la variedad de ideas, se trabaja también la reflexión ya que cada uno tiene que aprender a valorar el resto de las ideas y, entre todos, a partir del diálogo y el debate, construyen un discurso compartido para el aprendizaje.

Por último, tras cada actividad, se llevará a cabo un pequeño debate moderado por el profesor que permita comentar las estrategias seguidas por cada grupo de alumno, destacar los puntos en común, corregir los errores y finalmente, institucionalizar las técnicas.

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

1. Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores.

En la siguiente tabla se presenta el cronograma de la secuencia didáctica, indicando los objetivos de cada sesión y las actividades a trabajar durante cada sesión:

Sesiones	Objetivos didácticos	Actividades didácticas
Sesión 1 50 min	Presentar la estadística y ver el conocimiento previo de los alumnos sobre el objeto.	Tarea 1 - 4 <u>Aula ordinaria</u> Individual.
Sesión 2 50 min	Conceptos de población y muestra. Definición de variable estadística y tipos de variable.	Actividad 1 y 6 (CP1, T1.1, T1.2, T1.3, T6, TG1, TG2, TG3, TG4) <u>Aula de informática</u> Por parejas.
Sesión 3 50 min	Interpretación de los diagramas de barras y de sectores.	Actividad 2, 3, 7 y 9 (CP2, CP3, T2, T3.1, T3.2, TG4, TG5) <u>Aula ordinaria</u> Grupos de 4.
Sesión 4 50 min	Elección de los parámetros de centralización.	Actividad 4 (CP4, T4.1, T4.2, T4.3, TG6, TG7, TG8, TG9) <u>Aula ordinaria</u> Grupos de 4.
Sesión 5 50 min	Interpretación de los parámetros de centralización en los diagramas de barras.	Actividad 5 y 8 (CP5, T5, T6, TG4, TG5, TG6, TG7, TG8, TG9) <u>Aula de informática</u> Por parejas.
Sesión 6 50 min	Reforzar y afianzar los conceptos.	Repaso por parejas

Tabla 16: Secuenciación de las actividades propuestas

2. Establece una duración temporal aproximada.

Todo el contenido se va a impartir a lo largo de seis días más un séptimo para la sesión de evaluación. La duración de cada sesión se estima en unos 50 minutos

aproximadamente. Además, cada clase se organizará de la siguiente forma, se empezará presentando las actividades correspondientes y explicándolas en voz alta con el objetivo de dejar los enunciados claros y despejar así, cualquier tipo de duda. A continuación, se respetará un tiempo de reflexión, de trabajo tanto personal como grupal, donde serán los propios alumnos, quienes en base a lo que conocen y a la intuición que tienen irán trabajando los diferentes campos de problemas. Por último, se terminará haciendo un debate de los resultados obtenidos y las diferentes técnicas aplicadas para llegar a cada uno de estos. Finalmente, se institucionalizarán las tecnologías asociadas a cada técnica para unificar los conceptos dentro del grupo clase.

I. Sobre la evaluación

Típicamente hablar de evaluación correspondía a realizar una prueba escrita que comprendía el 100% de la nota final. Sin embargo, con el objetivo de aportar un mayor peso al trabajo diario de los alumnos, la reflexión, el pensamiento crítico, se propone una evaluación continua en la que se tienen en cuenta diferentes aspectos con sus pesos correspondientes:

- 30% prueba escrita.
- 30% trabajo complementario.
- 25% trabajo en clase.
- 15% presentación del trabajo y autoevaluación.

La prueba escrita consiste en un conjunto de ejercicios diseñados para evaluar el razonamiento estadístico de los alumnos y el pensamiento crítico, junto con el conocimiento del objeto matemático. Esta prueba se realizará de manera individual y tendrá una duración de una hora.

El trabajo complementario se compone de dos gráficos sobre los que hay que realizar una pequeña reflexión. Esta actividad se puede realizar por parejas o de manera individual, a lo largo del periodo de tiempo dedicado a esta unidad didáctica. Además, este trabajo llevará asociado una presentación, para compartir las conclusiones obtenidas con el resto de los compañeros, y una actividad de autoevaluación.

Por último, a la hora de valorar el trabajo en clase se tendrán en cuenta aspectos como el cuaderno de clase, la participación tanto en los grupos formados en cada actividad como en los debates de clase. También, se tendrá en cuenta la actitud y la disposición de los alumnos.

1. Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

Descripción de la prueba escrita

En primer lugar, se diseñan una serie de ejercicios que componen la prueba escrita:

1. (2 pto) Juan quiere saber qué color de pelo tienen sus vecinos, y cuál es el color más popular en su edificio. Para eso diseña una encuesta y pregunta a 12 de los 20 vecinos que hay.
 - ¿Dirías que tiene suficientes respuestas para contestar a sus preguntas iniciales? ¿Crees que podría haber preguntado a menos vecinos o necesita más respuestas?
 - ¿Qué tipos de respuestas espera Juan? En base a las respuestas esperadas, ¿qué parámetros de centralización crees que Juan será capaz de calcular?
 - Sabiendo que Juan vive en España, ¿sabrías decir cuál será el color de pelo más repetido?
2. (3 ptos) En un instituto se ofertan 5 deportes diferentes a los alumnos: baloncesto, fútbol, balonmano, atletismo y karate. Para crear los nuevos grupos del próximo año la dirección ha realizado una encuesta sobre qué deportes prefiere cada uno. Los datos se muestran en la siguiente tabla. ¿Cuántos alumnos practican deporte en total? Representalos de dos formas diferentes.

	Nº de Respuestas
Baloncesto	60
Fútbol	80
Balonmano	12
Atletismo	28
Karate	0

Tabla 17: Resumen respuestas por deporte

Si la dirección sólo pudiera mantener dos equipos dentro del instituto, ¿cuáles tendrían que ser? ¿Por qué?

¿Crees que deberían hacer esta pregunta en base al género o dependerá del equilibrio entre chicos y chicas de la muestra escogida?

3. (3 ptos) En el siguiente gráfico se representa el número de medallas olímpicas de España en los últimos 5 juegos olímpicos.

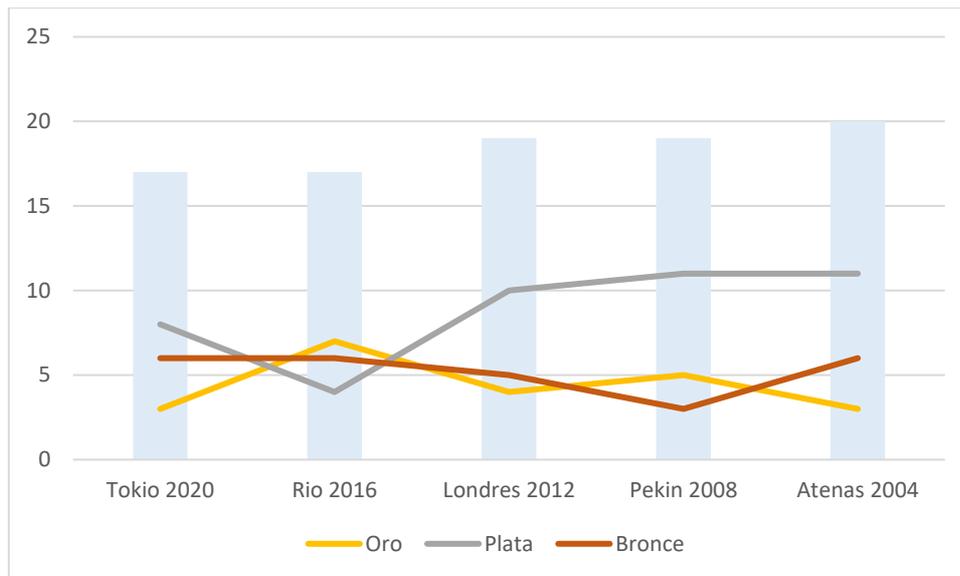


Figura 35: Gráfico del medallero por JJOO

¿Sabrías decir qué año ganó más medallas España? ¿Podrías representar estos datos en una tabla?

En base al número de medallas de oro, plata y bronce, ¿Sabrías decir qué año se ganaron más oros? ¿Y medallas de plata y bronce?

Teniendo en cuenta únicamente estos datos, ¿cuál es el promedio de medallas de cada metal por olimpiada?

4. (2 ptos) En una clase de 25 alumnos se les pregunta la altura a cada uno:

	Altura
1	150
2	150
3	155
4	155
5	162
6	163
7	165
8	160
9	160
10	160
11	171
12	160
13	160
14	155
15	180
16	180
17	165
18	186
19	193

20	193
21	195
22	198
23	198
24	198
25	195

Tabla 18: Alturas de los alumnos en clase (cm)

Se quiere saber cuál es la estatura media de los alumnos en la clase. A la hora de calcularlo, un alumno menciona que la media no sería representativa porque algunos ya han dado el estirón, mientras que otros no, y por eso cree que la mediana reflejaría mucho mejor a la clase. ¿Estás de acuerdo?

Obtén la tabla de frecuencias y representa gráficamente el valor de la mediana.

Descripción del trabajo complementario

A continuación, se presentan las tareas que corresponden con el trabajo complementario entregar a los alumnos para la realización del trabajo complementario. Observa los siguientes ejemplos y comenta si identificas algún tipo de error.

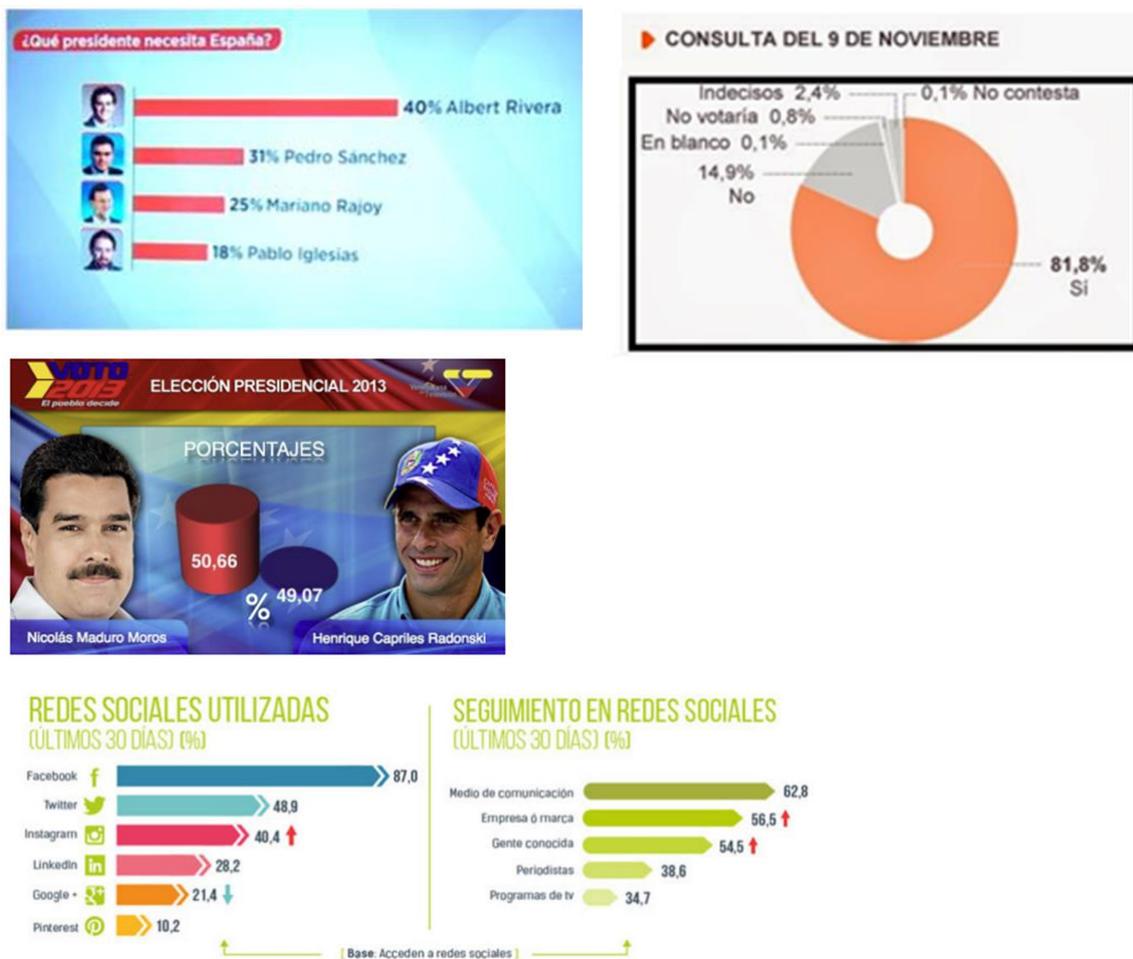


Figura 36: Ejemplos reales con errores estadísticos

2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

Los ejercicios de la prueba de escrita de evaluación están pensados acordes a los campos de problemas propuestos, las técnicas y tecnologías trabajadas.

El ejercicio 1 se centra en la evaluación de las técnicas asociadas al CP1. A partir de unas simples preguntas se puede comprobar si el alumno tiene claro los conceptos de muestra y población.

El ejercicio 2 es exclusivo para trabajar el campo de problemas 3. Se busca analizar si el alumno es capaz de construir diferentes gráficos estadísticos e interpretarlos de manera correcta.

En el ejercicio 3 se busca trabajar el campo de problema 2 principalmente. En este ejercicio se demanda la construcción de una tabla de frecuencias a partir de un diagrama de barras. Además, se pide que calculen la media y moda.

Por último, con el ejercicio 4 se busca trabajar el CP4 y CP5. De esta forma, se comprueba que los alumnos entienden a la perfección cómo calcular los parámetros de centralización, cuál es el más indicado en cada situación y cómo representarlos en un gráfico.

Por otro lado, con los gráficos del trabajo complementario se busca evaluar el pensamiento crítico y el razonamiento estadístico desarrollado por los alumnos.

Toda esta información se resume en la siguiente tabla:

	Campo Problemas	Técnicas	Tecnologías
Ejercicio 1	CP1	T1.1, T1.2, T1.3	TG1, TG2, TG3, TG4
Ejercicio 2	CP3	T1.1, T1.2, T1.3, T3.1, T3.2	TG1, TG2, TG3, TG4, TG5
Ejercicio 3	CP2	T2, T4.1, T4.2	TG4, TG5, TG6, TG7
Ejercicio 4	CP4, CP5	T3.1, T4.2, T4.3, T5	TG4, TG5, TG7, TG8, TG9

Tabla 19: Relación entre los ejercicios propuestos y los CP, T, TG

3. ¿Qué respuestas esperas en cada uno de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

En base a lo trabajado en clase, los alumnos deberían ser capaces de responder correctamente a todos los ejercicios. En el examen el nivel de exigencia es el mismo que se ha tenido a lo largo de las sesiones durante el tema, por lo que ni los ejercicios ni los resultados deberían sorprender a nadie.

A continuación, se presentan los ejercicios de la prueba evaluación resueltos, junto con un ejemplo del trabajo complementario.

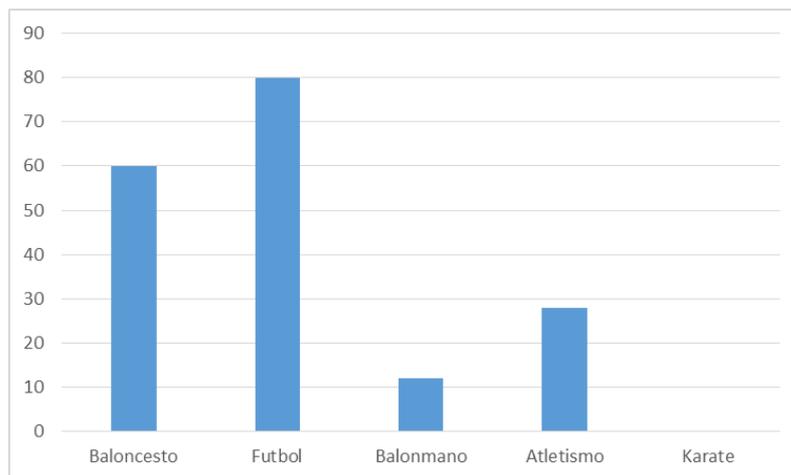
Solución de la prueba escrita

1. La encuesta que ha realizado Juan ha sido a 12 vecinos de los 20 que son en su edificio. Para diseñar un estudio estadístico la selección de la muestra es vital, y representa en torno al 25% de la población. Es decir, en este caso, con seleccionar a 5 vecinos sería suficiente para responder a la pregunta.

Como es una encuesta sobre el color de pelo, los tipos de respuesta son: marrón, rubio, castaño, blanco, rojo... son todo palabras, por lo que está haciendo el estudio de una variable cualitativa. De este tipo de variable, únicamente se puede calcular la moda, que es el valor más repetido.

Puesto que Juan vive en España, y a menos que en su edificio la mayoría de los vecinos sean población anciana, el color de pelo más común es el marrón.

2. Para poder hacer el análisis de los datos, realizamos las siguientes representaciones gráficas:



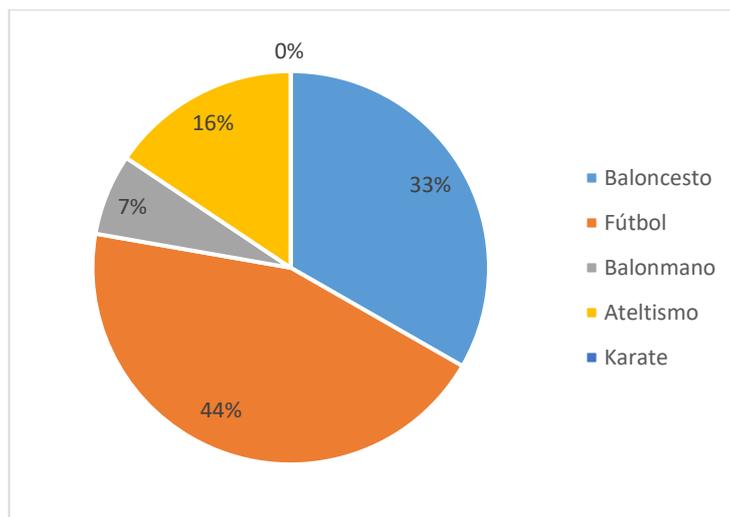


Figura 37: Gráficos de barra y sectores que representan los alumnos por deporte

El número total de alumnos es 180. Si el centro tiene que elegir únicamente dos deportes, escogería el fútbol y el baloncesto puesto que entre los 2 deportes representan un 77% de los alumnos.

Para que una encuesta sea válida la muestra tiene que ser representativa de la población y estar escogida en base a esta. Es decir, si el porcentaje de chicos es mayor al de chicas dentro de la población, en la muestra también deberá serlo.

- Para identificar el año que España ganó más medallas, hay que mirar las barras e identificar la moda, en este caso, es Atenas 2004. A continuación, representamos los datos en una tabla:

	Nº de Medallas	Nº de Oros	Nº de Platas	Nº de Bronces
Tokio 2020	17	3	8	6
Rio 2016	17	7	4	6
Londres 2012	19	4	10	5
Pekín 2008	19	5	11	3
Atenas 2004	20	3	11	6

Tabla 20: Medallas por JJOO

Para saber qué año se ganaron más oros, platas y bronce, basta con mirar el valor de cada una de las líneas en el gráfico.

Oros → Rio 2016

Platas → Pekín y Atenas por igual

Bronces → Tokio, Rio y Atenas

El promedio de medallas de oro son 4 por olimpiada, de plata son 9 y de bronce 5 medallas.

4. Para ver si la opinión del alumno es correcta o no, primero calculamos la media y la mediana de la distribución:

Media = 165 cm

Mediana = 160 cm

Para ver cuál es el parámetro más representativo, se representan los valores gráficamente:

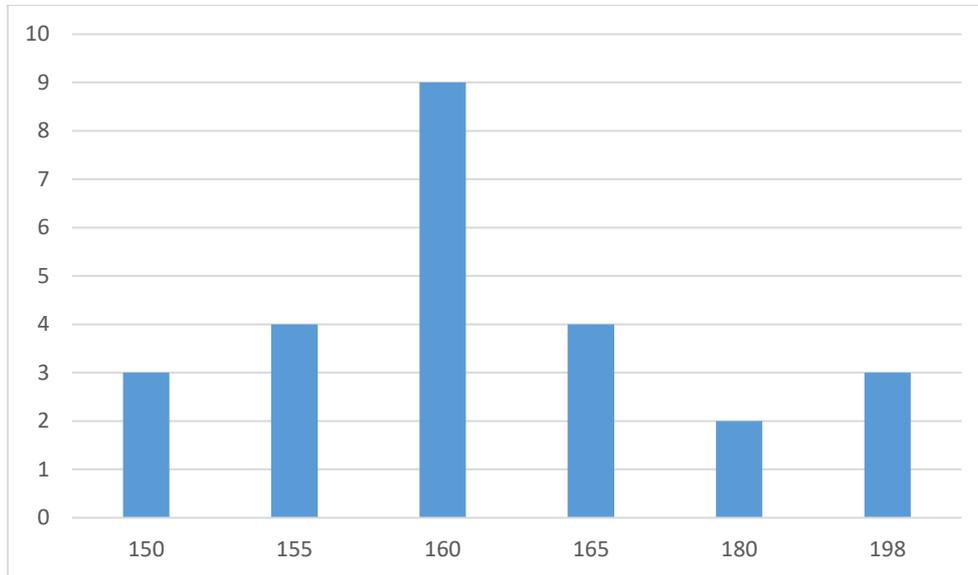


Figura 38: Distribución de alturas

Altura	Frec Absluta	Frec Abs Acum	Frec Rel Acum
150	3	3	12%
155	4	7	28%
160	9	16	64%
165	4	20	80%
180	2	22	88%
198	3	25	100%

Tabla 21: Frecuencias en función de la altura

En base a los valores de la distribución, se pueden clasificar los alumnos de más de 180cm como valores atípicos, pues la gran mayoría de los alumnos se encuentran por debajo de 160cm, tal y como se ve en la siguiente gráfica:

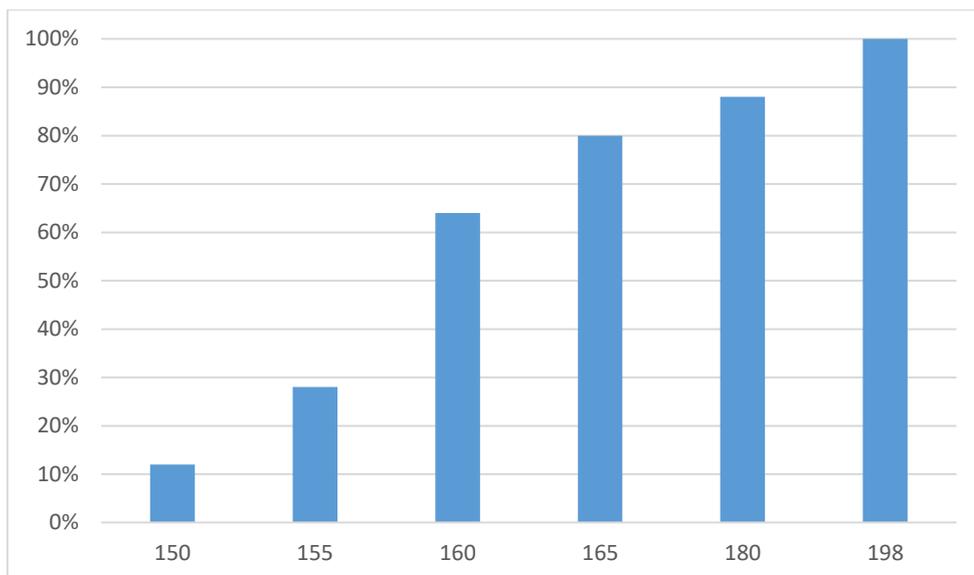


Figura 39: Distribución de alturas para extraer la mediana

Por tanto, sí, estoy de acuerdo con el alumno que dice que la mediana representa mejor a su clase.

Solución del trabajo complementario

A continuación, se resuelve un ejemplo de lo que se pide en el trabajo complementario.

En este ejemplo se va a analizar el primer gráfico.

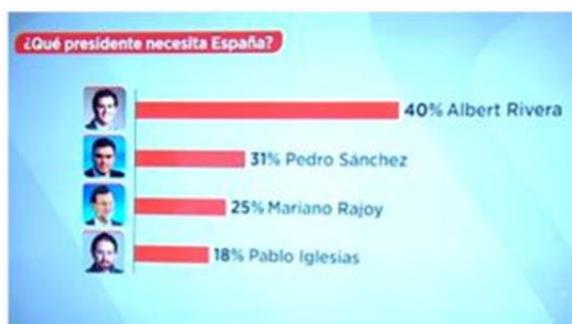


Figura 40: Gráfico periodístico con errores estadísticos

Aquí se muestran los porcentajes de voto de los cuatro partidos más importantes en España en esas elecciones. Al observar el gráfico hay varios factores que llaman la atención.

En primer lugar, los porcentajes. Si los sumamos estos deberían dar 100% o al menos un valor por debajo de 100, ya que existen otros partidos que en el gráfico no se están teniendo en cuenta.

Además, por otro lado, hay que destacar la diferencia que existe entre la primera barra y las otras tres. A pesar de que numéricamente no hay gran variación en los porcentajes,

visualmente aparenta que la primera es considerablemente mayor que el resto, dando la falsa sensación de que el primer candidato ha obtenido un número de votos mucho mayor que el resto.

5. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

A la hora de calificar las pruebas escritas, se empleará el modelo de tercios. La justificación a la hora de elegir el método de calificación se debe a buscar el mínimo grado de subjetividad en la corrección. Según Gairín, Muñoz y Oller (2012) a la hora de calificar un ejercicio es importante definir una jerarquización de las tareas que se llevan a cabo en la resolución de este. Aquí se diferencian entre tareas auxiliares generales, tareas auxiliares específicas y tareas principales.

Las tareas auxiliares generales son aquellas que se apoyan en los conocimientos trabajados a lo largo de la formación matemática. Las tareas auxiliares específicas son aquellas en las que aparecen conceptos concretos de los contenidos a evaluar.

Según define el modelo, los errores en una tarea auxiliar general descontarán como máximo un tercio de la pregunta. Los otros dos tercios se descontarán en función de los errores cometidos en las tareas auxiliares específicas. Por último, un fallo en una tarea principal supondrá la pérdida de todos los puntos del ejercicio.

De esta forma, se disminuye la variabilidad existente entre varias correcciones de un mismo ejercicio, llevada a cabo por varios profesores diferentes (Mengual, Gorgorió i Solá, & Albarracín, 2019).

J. Sobre la bibliografía y páginas web

1. Indica los libros, artículos y páginas web revisadas para la realización de este trabajo

- 40dB. (07 de marzo de 2022). *EL PAÍS*. Obtenido de <https://elpais.com/espana/2022-03-07/consulte-todos-los-datos-internos-de-la-encuesta-de-el-pais-cuestionarios-cruces-y-respuestas-individuales.html>
- Alsina, Á. (29 de Marzo de 2021). Estadística en contexto: desarrollando un enfoque escolar común para promover la alfabetización. *TANGRAM - Revista De Educação Matemática*, 4(1), 71-98.
- Arnold, P., & Franklin, C. (24 de Marzo de 2021). What makes a good statistical question? *Journal of Statistics and Data Science Education*, 29, 122-130. doi:<https://doi.org/10.1080/26939169.2021.1877582>
- Batanero, C., Arteaga, P., y Gea, M. M. (01 de 2012). El currículo de estadística: Reflexiones desde una perspectiva internacional. *UNO*, 59, 9-17.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. y Roa, R. (Julio de 2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*, 83, 7-18. Obtenido de <http://www.sinewton.org/numeros>
- Batanero, C. y Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. Aspectos didácticos de las matemáticas, 125-164.
- Botella, L., Millán L., Pérez, P. y Cantó, J. (2007). Matemáticas 1º ESO. Alcoy: Marfil, S.A.
- Burrill, G., & Biehler, R. (2011). *Fundamental statistics ideas in the school*.
- Checa, A. N. (1998). Estadística y probabilidad: una propuesta didáctica para la enseñanza secundaria. Revista interuniversitaria de formación del profesorado: RIFOP, (32), 59-72.
- Colera, J. y Gaztelu, I. (2007). Matemáticas 1º ESO. Toledo: Anaya, S.A.
- Del-Pino, J. (2013). El uso de Geogebra como herramienta para el aprendizaje de las medidas de dispersión. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística*(2), 243-250.
- Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P., y Gea, M. M. (Agosto de 2016). Gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria: un estudio comparativo entre España y Chile. *Bolema, Rio Claro (SP)*, 30(55), 713-737.
- El País*. (23 de 01 de 2015). Obtenido de https://verne.elpais.com/verne/2015/01/23/articulo/1422014607_223837.html

- Gairín, J., Muñoz, J. y Oller, A. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. *Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM (16a: 202: Baeza)*, 261-174.
- González Astudillo, M. T. y Sierra, M. (2004) *Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX*. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 2004, Vol. 22, n.º 3, pp. 389-408, <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21990>.
- Hernández González, S. (2005). Historia de la estadística.
- International Olympic Committee. (Agosto de 2020). *Tokyo 2020*. Obtenido de <https://olympics.com/en/olympic-games/tokyo-2020>
- Kelmansky, D. D. (2009). *Estadística para todos: Estrategias de pensamiento y herramientas para la solución de problemas*. Buenos Aires: Instituto Nacional de Educación Tecnológica.
- Laycock, R. (28 de julio de 2021). *Finder*. Obtenido de <https://www.finder.com/es/estadisticas-streaming>
- Marco-Buzunáriz, M., Muñoz-Escolano, J., y Oller-Marcén, A. (2016). Investigación sobre libros de texto en los simposios de la SEIEM (1997-2015).
- Medina, M. B. E. (2015). Influencia de la interacción alumno-docente en el proceso enseñanza-aprendizaje. Paakat: Revista de Tecnología y Sociedad, (8).
- Mengual, E., Gorgorió i Solá, M. y Albarracín, L. (2019). Validación de un instrumento para la calificación de exámenes de matemáticas. *PNA*, 13(2), 62-83.
- NBA. (31 de marzo de 2022). Obtenido de https://espndeportes.espn.com/basquetbol/nba/jugadas/_/juegoId/401360959
- ORDEN ECD/489/2016. (26 de mayo de 2016). *Currículo de Matemáticas de 1º de ESO*. Obtenido de Educaragón.
- ORDEN ECD/1112/2022. (27 de julio de 2022). Currículo y la evaluación de la Educación Primaria. Obtenido de Educaragón.
- ORDEN ECD/1172/2022. (18 de agosto de 2022). Currículo y la evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria. Obtenido de Educaragón.
- Rodríguez Muñoz, L., Muñoz- Rodríguez, L., Vásquez, C., y Alsina, A. (Julio de 2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y de datos en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Secundaria. *Números*, 217-238. Obtenido de <http://www.sinewton.org/numeros>
- Santillana. (2010). Matemáticas 1º ESO. Madrid: Santillana Educación, S.L.

WOBD? Math. (14 de octubre de 2020). Obtenido de
<https://twitter.com/wodbmath?lang=en>