

La Enseñanza de las Matemáticas en la E.U. de Informática

A. García López, A. Lías Quintero, A. Martínez Sánchez, R. Miñano Rubio.
Dpto. Matemática Aplicada (E.U.I.)
U. politécnica de Madrid.

Resumen

El Departamento de Matemática Aplicada (E. U. Informática) de la Universidad Politécnica de Madrid tiene a su cargo la docencia de todas las asignaturas de matemáticas de las titulaciones de I.T.I. de Sistemas y de I.T.I. de gestión, implantadas en el curso 1992-93.

Asignaturas troncales: Álgebra, Análisis matemático y métodos numéricos, Matemática discreta y estadística.

Asignaturas optativas y/o de libre elección: Laboratorio de matemáticas, Lógica, Métodos de cálculo científico, Geometría computacional, Investigación operativa (Sistemas), investigación operativa (gestión), geometría computacional avanzada y Tratamiento estadístico de datos con ordenador.

Un denominador común en todas las asignaturas es la realización de prácticas con ordenador. En las clases prácticas el papel de los estudiantes es más activo y pensamos que éste es un factor positivo para el aprendizaje.

Otro aspecto contemplado en todas las asignaturas es el de facilitar al alumno un material de trabajo adecuado, con la posibilidad de contar desde el principio de curso con información suficiente sobre los contenidos, bibliografía, metodología y normas de evaluación, así como con los enunciados de problemas y prácticas que se irán abordando a lo largo del curso. También se les facilita información sobre exámenes de cursos anteriores.

En la ponencia se comentan algunos detalles sobre la planificación de las asignaturas troncales.

1. Álgebra

Esta asignatura está ubicada en el primer cuatrimestre del primer curso y tiene 4.5 créditos. Este número de créditos tan pequeño ha hecho que desde que se implantó el actual plan de estudios se hayan impartido varios programas con el fin de encontrar una materia que permita presentar unos contenidos coherentes y mostrar algunas aplicaciones en la disciplina de Informática.

En los primeros años, el programa se centraba en espacios vectoriales de dimensión finita (\mathbb{R}^n , polinomios, matrices, etc.) y aplicaciones lineales sobre ellos. Junto a este programa se impartía un

plan de prácticas basado en el concepto de coordenadas y el isomorfismo de un espacio vectorial de dimensión con \mathbb{R}^n . Las horas dedicadas a clases prácticas, en grupos reducidos, con ordenador y el programa Derive, eran aproximadamente 15 y las 30 restantes eran clases teóricas. Esta experiencia resultó poco gratificante, ya que la teoría que se mostraba era escasa, en las prácticas no se podían proponer problemas irreales y para los alumnos resultaba demasiado árido.

A partir del año 95 se optó por dar a la asignatura un enfoque más próximo a la geometría. En concreto, en estos momentos el objetivo es aportar los fundamentos matemáticos relativos al Álgebra lineal y la geometría analítica orientados a la construcción y descripción de movimientos en 2D y 3D. Este enfoque se aleja un poco del álgebra formal, pero parece de interés general para cualquier informático y resulta de gran utilidad para los alumnos que van a especializarse en Informática gráfica, automatización y robótica. Los textos básicos que se recomiendan son [8,11].

El desglose en horas teóricas y prácticas se ha modificado con el doble fin de poder presentar una teoría completa respecto a movimientos y realizar con ordenador sólo los problemas en que su uso es realmente útil (en 2D y 3D los sistemas que aparecen se pueden resolver fácilmente sin ordenador). Se dedican 39 horas a la teoría y 6 horas a las clases prácticas. En las primeras se trabaja de la manera tradicional y en las segundas se corrigen, comentan y evalúan problemas que los alumnos han realizado en grupos y han entregado con anterioridad a la clase. Esta forma de trabajar requiere un gran esfuerzo por parte de los profesores, ya que la corrección de cerca de doscientos trabajos, 6 veces a lo largo de un cuatrimestre, es muy costosa. A cambio, los alumnos se acostumbran a trabajar con asiduidad y en este último curso se ha visto que tanto éstos como los profesores han valorado muy positivamente la experiencia.

El programa que se imparte es el siguiente:

- Tema 0. Preliminares de Álgebra Matricial. Rango y determinante de una matriz. Sistemas de ecuaciones lineales. Métodos de Gauss y Gauss-Jordan y aplicaciones.
- Tema 1. Espacio Vectorial Real. Definición axiomática de espacio vectorial real. Bases, coordenadas y cambio de base. Subespacios vectoriales. Ecuaciones paramétricas e implícitas. Subespacios suplementarios.
- Tema 2. Espacio Vectorial Euclídeo. Definición axiomática de producto escalar. Normas y ángulos. Ortogonalidad. Orientación de bases. Subespacios ortogonales. Complemento ortogonal. Proyecciones ortogonales.
- Tema 3. Aplicaciones Lineales y Transformaciones Ortogonales. Aplicaciones lineales. Expresión matricial, imagen y rango de una aplicación lineal y de una transformación ortogonal. Construcción y descripción de transformaciones ortogonales en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .
- Tema 4. Espacio Afín Euclídeo. Definición axiomática de espacio afín. Sistemas de referencia. Subespacios afines. Ecuaciones paramétricas e implícitas. Paralelismo. Espacio afín Euclídeo. Perpendicularidad en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .
- Tema 5. Movimientos en los Espacios \mathbb{R}^2 Y \mathbb{R}^3 . Aplicación afín. Expresión matricial de una aplicación afín. Movimientos en un espacio afín. Expresión matricial, construcción y descripción de movimientos en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .

Y el programa de prácticas es el siguiente:

1. Introducción. Estudio de rangos, inversas de matrices y sistemas de ecuaciones lineales. Resolución con Derive.
2. Subespacios vectoriales. Ecuaciones implícitas y paramétricas en distintas bases. Subespacios suplementarios.

3. Subespacios ortogonales. Bases de distinta orientación en planos y en el espacio. Proyecciones ortogonales.
4. Construcción de aplicaciones lineales a partir de distintas condiciones. Construcción y descripción de transformaciones ortogonales. Imágenes de subespacios.
5. Subespacios afines. Ecuaciones implícitas y paramétricas en distintos referenciales. Paralelismo y perpendicularidad.
6. Construcción de movimientos en el plano que transformen una figura concreta en otra.

La evaluación se realiza teniendo en cuenta los resultados de un examen escrito, que consta de un test y dos o tres problemas, y los de las calificaciones de las prácticas entregadas y su defensa oral, que se realiza durante las clases prácticas. La ponderación es 90% y 10% respectivamente.

2. Análisis Matemático y Métodos Numéricos

Se trata de una asignatura troncal de primer curso que se imparte en el segundo cuatrimestre. Tiene asignados 6 créditos (4.5 teóricos y 1.5 prácticos). Las clases prácticas se imparten en un laboratorio con 20 PC's, en grupos de 40 alumnos, usando el sistema Derive.

A la hora de diseñar el programa de la asignatura nos planteamos una selección de tópicos del Análisis matemático y algunos métodos numéricos que considerábamos imprescindibles en la formación de un informático. Se consideraron como objetivos prioritarios el estudio de problemas modelizados por sucesiones o series numéricas, el análisis de Órdenes de magnitud o los métodos de evaluación aproximada de funciones. Decidimos dar por conocidas herramientas como el cálculo de límites, derivadas y primitivas elementales, así como ciertos conceptos y resultados básicos del cálculo diferencial en una variable.

El problema de los alumnos con un bajo nivel de formación matemática previa (sobre todo los que provienen de la formación Profesional) se intenta resolver con la asignatura de libre elección Laboratorio de matemáticas, en la que se trabaja con estos conceptos con una gran participación por parte de los estudiantes.

El programa de la asignatura no ha sufrido cambios importantes en los cinco años que se viene impartiendo. En un principio se incluía un tema de cálculo en varias variables, que nunca hubo tiempo de dar, y hasta hace un curso había dos temas sobre integración: Integral de Riemann (incluyendo métodos de cuadratura numérica) e integración impropia. Actualmente el segundo tema se ha reducido al cálculo de integrales sobre intervalos no acotados y se ha fundido con el tema anterior. El programa actual es el siguiente:

- Tema 1. Sucesiones de Números Reales y Ecuaciones en Diferencias.
- Tema 2. Resolución Numérica de Ecuaciones.
- Tema 3. Series Numéricas.
- Tema 4. Teorema de Taylor. Series de Potencias.
- Tema 5. Interpolación.
- Tema 6. Cálculo Integral.

En las clases prácticas, además de utilizar las capacidades gráficas y de cálculo simbólico de Derive para facilitar la comprensión de conceptos teóricos mediante la experimentación, se resuelven con ordenador determinados problemas prácticos tales como:

1. Análisis de Órdenes de magnitud y comportamiento de sucesiones definidas de modo recurrente o explícito. Resolución de problemas que se modelizan en términos de ecuaciones en diferencias.
2. Resolución aproximada de ecuaciones con un error menor que una cota prefijada.
3. Suma aproximada de series numéricas. Análisis del orden de magnitud de la sucesión de las sumas parciales de una serie divergente.
4. Aproximación de funciones mediante polinomios de Taylor y desarrollos en series de potencias.
5. Aproximación mediante interpolación.
6. Cálculo aproximado de integrales mediante métodos numéricos.

En la aplicación de métodos numéricos el ordenador resulta una ayuda muy eficaz, no sólo en la ejecución de éstos, sino también a la hora de verificar las condiciones de convergencia o determinar el número de iteraciones necesarias, ya que permite resolver gráficamente un problema habitualmente complejo como es el de acotar las derivadas de funciones involucradas en las fórmulas de error.

Como referencias bibliográficas cabe citar, además de la guía docente de la asignatura [1], algunos textos como [3, 4, 9] y para prácticas se puede consultar [10].

La asignatura se evalúa mediante dos pruebas:

- a) Una prueba escrita (75%) que consta de un test, un conjunto de cuestiones cortas y uno o dos problemas de desarrollo más amplio.
- b) Un ejercicio con ordenador sobre problemas como los tratados en las prácticas (25%).

Habitualmente los alumnos suelen encontrar más dificultades en los problemas de desarrollo.

3. Matemática Discreta

Esta asignatura tiene carácter troncal. Se imparte en el primer cuatrimestre del primer curso y tiene 7.5 créditos que se desglosan en 6 créditos teóricos y 1.5 prácticos.

Desde sus comienzos el programa de la asignatura ha sufrido pocas modificaciones en cuanto a temario. Básicamente, el conjunto de temas que se han impartido a lo largo de este tiempo son los seis que se enseñan en la actualidad y se han realizado modificaciones puntuales en los contenidos de los mismos. El programa de la asignatura es el siguiente:

- Tema 1. Lógica. Lógica de proposiciones: Lenguaje, Sintaxis y Semántica de la lógica proposicional. Estructuras deductivas: Reglas de inferencia. Método del *tableau*. Lógica de predicados: Lenguaje, Sintaxis y Semántica.
- Tema 2. Relaciones Binarias. Relaciones binarias: Representación y propiedades. Relaciones de orden. Diagramas de Hasse. Relaciones de equivalencia. Conjunto cociente. Congruencias módulo n .
- Tema 3. Aritmética Entera y Modular. Divisibilidad en \mathbb{Z} . Máximo común divisor, Algoritmo de Euclides. Teorema de Bezout. Ecuaciones diofánticas lineales. Aritmética en \mathbb{Z}_n . Ecuaciones modulares.
- Tema 4. Inducción y Recursividad. Inducción en N . Principio fuerte de inducción. Recursividad. Definición recursiva de conjuntos. Funciones recursivas. Recursividad en listas.
- Tema 5. Combinatoria. Cardinalidad. Principios de adición, multiplicación e inclusión-exclusión. Variaciones y permutaciones. Combinaciones. Coeficientes binómicos. Triángulo de Pascal.

- Tema 6. Grafos. Grafo, multigrafo, pseudografo. Familias particulares de grafos. Subgrafos. Grado de un vértice. Teorema de Euler. Representación e isomorfismo de grafos. Recorridos y caminos. Grafos conexos, de Euler y de Hamilton. Árboles. Árbol recubridor. Algoritmo de Kruskal. Grafos con peso. Caminos mínimos. Algoritmo de Dijkstra.

En cuanto a las prácticas sí que se han realizado cambios importantes, intentando buscar un software adecuado a nuestras necesidades. Actualmente se realizan prácticas con ordenador, por parejas, en grupos reducidos. En estas 15 horas de prácticas se resuelven problemas, se enseñan algoritmos y se muestran algunos conceptos teóricos que, gracias a las capacidades gráficas del ordenador y el programa utilizado, son más fáciles de tratar que en las clases teóricas. Dichas prácticas son:

1. *Tableau* para lógica de proposiciones: Primero hay una fase de modelización, y posteriormente se resuelve el problema, que puede ser verificar la satisfactibilidad de conjuntos de fórmulas, la equivalencia de fórmulas o qué deducciones son correctas aplicando un método algorítmico, el *tableau*, basado en la satisfactibilidad de conjuntos.
2. Relaciones binarias: Se estudian diferentes relaciones binarias, se calculan sumas, productos y potencias de relaciones, así como el cierre reflexivo y transitivo de una relación; se analiza cuándo una relación es de orden y se calculan cadenas; caso de que la relación sea de equivalencia se calcula el conjunto cociente. El software que disponemos permite manejar las relaciones mediante el diagrama sagital, lo cual tiene una ventaja sobre otros programas, no sólo se realizan operaciones con relaciones sino que es fácil ver el significado de las mismas.
3. Recursividad: Pensar de manera recursiva es algo difícil para los alumnos, les cuesta deducir la regla de recurrencia y también determinar las condiciones de parada. La sintaxis de *Derive* es muy sencilla y permite que los alumnos se adiestren definiendo funciones recursivas sobre listas de enteros. Tras estos ejercicios se introducen conceptos como coste de una evaluación, y los alumnos tienen que calcular, para algunas funciones recursivas, su árbol de llamadas y el coste de evaluación.
4. Grafos: Se revisan conceptos vistos en clase y se realizan ejercicios cuya resolución es mucho más simple con la ayuda del ordenador (cálculo de secuencias de grados, estudio de grafos bipartitos, grafos isomorfos, grafos eulerianos o semieulerianos y cálculo de caminos mínimos). También se muestra y se realiza el seguimiento de algunos algoritmos empleados para la resolución de los problemas anteriores, ejercicio que consideramos de importancia en sí mismo y que ayuda a la comprensión del concepto.

Los programas que se utilizan son: *Tableaux* para la práctica de lógica, *Derive* en la práctica de recursividad y *Ahmes* (desarrollado por un profesor del departamento) en las prácticas de relaciones y grafos. No se realizan prácticas en los temas de combinatoria y aritmética entera y modular. En cuanto a la bibliografía, los textos básicos son [2] y [3].

La evaluación se realiza mediante un examen que consta de una parte teórica (80%) y una práctica (20%), que consiste en una prueba con ordenador en la que se han de solucionar dos problemas.

4. Estadística

Es una asignatura troncal que se imparte durante el primer cuatrimestre del segundo curso de ambas titulaciones. Su carga lectiva es de 9 créditos, 4.5 teóricos y 4.5 prácticos. ...estos últimos se

imparten como 2 horas semanales de prácticas de laboratorio (3 créditos) y 1 hora semanal de clase de problemas (1.5 créditos) en el aula habitual.

Los contenidos de la asignatura pueden considerarse los propios de un curso general de estadística básica. El carácter diferencial lo aporta el hecho de que la teoría y las prácticas vayan absolutamente entrelazadas; de hecho, algunos de los contenidos del programa se explican exclusivamente en las clases prácticas por ser más apropiadas para ello.

Creemos que actualmente una formación estadística debe incluir el conocimiento y manejo de alguno de los programas estadísticos estándar. Por una parte como complemento de la formación y por otra porque permiten trabajar desde el principio con grandes conjuntos de datos acercando el aprendizaje a las situaciones reales. Además, estos entornos permiten la posibilidad de experimentar y simular fenómenos, lo cual puede ser de gran utilidad para el aprendizaje; estas características metodológicas influyen poderosamente en el enfoque que se le imprime a la asignatura.

El programa propuesto intenta abarcar los contenidos que en su futuro profesional puedan necesitar nuestros estudiantes y que les proporcionen la formación suficiente para poderse enfrentar al estudio de aplicaciones. Por ello se da un enfoque conceptual riguroso, incidiendo en el aprendizaje de la terminología y el método estadístico, pero también se da gran importancia a las aplicaciones, a costa de soslayar demostraciones.

Como temas que tienen un interés específico para los estudios en informática destacamos el de Generación de números aleatorios, Fiabilidad y Control de calidad (aunque estos últimos no se han explicado en todos los cursos por dificultades de tiempo). El programa impartido en el último curso, 96/97, es el siguiente:

- Tema 1. Estadística Descriptiva y Modelos de Regresión.
- Tema 2. Probabilidad.
- Tema 3. Variables Aleatorias.
- Tema 4. Modelos de Distribución Discretos
- Tema 5. Modelos de Distribución Continuos.
- Tema 6. Generación de Números Aleatorios.
- Tema 7. Estimación Puntual.
- Tema 8. Distribuciones en el Muestreo.
- Tema 9. Estimación por Intervalo.
- Tema 10. Contrastes Paramétricos.
- Tema 11. Contrastes No Paramétricos.

Las clases prácticas se realizan con el paquete estadístico *Statgraphics*, cuya sencillez de manejo y capacidades también permiten utilizarlo como una potente herramienta metodológica: los alumnos utilizan el ordenador como apoyo para comprender mejor los conceptos estudiados en el aula y, en algunos casos, para estudiar otros nuevos. En el tema de variables aleatorias se trabaja con el programa *Derive*, que ya es conocido por nuestros estudiantes.

El plan de prácticas del curso 96/97 se expone a continuación:

1. Introducción al *Statgraphics*. Estadística descriptiva.
2. Modelos de regresión simple.
3. Modelos de regresión múltiple.
4. Probabilidad.

5. Variables aleatorias unidimensionales. Funciones de distribución.
6. Ajuste de modelos discretos.
7. Ajuste de modelos continuos.
8. Teorema Central del Límite.
9. Números aleatorios.
10. Obtención y propiedades de los estimadores.
11. Distribución de estimadores.
12. Estimación por intervalo.
13. Contrastes de hipótesis paramétricos. El p-valor de un contraste.
14. Contrastes de hipótesis no paramétricos.

Otro aspecto importante dentro de la formación práctica de nuestros alumnos es la realización de un trabajo que cubre la mayor parte de los contenidos estudiados durante el curso. En este trabajo tienen que analizar un par de variables estadísticas, haciendo el estudio descriptivo, estudiando su correlación, buscando un modelo de distribución que se ajuste a dichos datos, estimando sus parámetros, y luego han de generar una nueva variable que siga dicho modelo y comparar los resultados obtenidos. La experiencia nos dice que este trabajo les es de gran utilidad para asimilar los contenidos vistos a lo largo del curso.

La asignatura se evalúa a partir de las calificaciones obtenidas en un examen (80%) y en el trabajo práctico que se ha comentado anteriormente (20%), con la particularidad de que hay que obtener al menos una nota de 5 sobre 10 en cada una de las pruebas anteriores.

El examen consta de un test sobre cuestiones generales de la asignatura y 4 problemas, siendo uno de ellos relativo al trabajo realizado durante las prácticas de laboratorio (se suele dar una o varias salidas del programa Statgraphics y el alumno debe de saber interpretar los datos que en ellas aparecen para responder a las preguntas propuestas). Para la realización del examen los estudiantes pueden disponer de tablas estadísticas, y de un formulario oficial en el que se recogen algunos resultados y expresiones de diversos estadísticos.

Entre la bibliografía recomendada se encuentra el libro [6], escrito por profesores del Departamento, que incluye todos los temas del curso y algunos más sobre modelos de regresión y análisis de varianza; además, también incorpora los enunciados de las prácticas de laboratorio. Otra bibliografía aconsejada es [5, 7, 12].

Referencias

- [1] Blanco, G y otros: *Análisis Matemático y Métodos numéricos. Guía Docente 1996-97*. Servicio de reprografía de la E.U.I., 1996.
- [2] Blanco, G y otros: *Matemática Discreta*. Servicio de reprografía de la E.U.I., 1996.
- [3] Bartle, R.G., Sherbert, D.: *Introducción al Análisis Matemático de una variable*. Li-musa. México, 1984.
- [4] Burden, R.L., Faires, J.D.: *Análisis numérico*. G. Ed. Interamericano. México, 1989.
- [5] Canavos, G.C.: *Probabilidad y estadística. Aplicaciones y métodos*. McGraw-Hill, 1988.
- [6] Coronado, J.L. y otros: *estadística aplicada con Statgraphics*. Ra-Ma, 1994.
- [7] Degroot, M.H.: *Probabilidad y estadística*. Addison-Wesley, 1988.
- [8] Foulquie, M.T. y otros: *Álgebra y geometría*. E.U.I., 1996.
- [9] García, A. y otros: *Cálculo I. Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable*. Clagsa. Madrid, 1993.

- [10] García, A. (De.): *Prácticas de Matemáticas con Derive*. Clagsa. Madrid, 1994.
- [11] Hernández, E.: *Algebra y geometría*. Addison-Wesley, 1994
- [12] Peña, D.: *estadística. Modelos y métodos*. Vol I. Alianza Universidad, 1992.
- [13] Rosen, K.H.: *Discrete Mathematics and its Applications*. Mcgraw-Hill, 1991.