CREACIÓN DE UNA HERRAMIENTA DIDÁCTICA DE APOYO AL ESTUDIO DE SERIES Y CÁLCULO INTEGRAL UTILIZANDO EL *MATHEMATICA*.

Montserrat Galitó[1], Joan Gimbert[2], Héctor Sánchez[3], Magda Valls[2]

Departament de Matemàtica
Escola Universitària Politècnica
Universitat de Lleida
[1]h4373173@alumnes.eup.udl.es
[2]{joangim,magda}@eup.udl.es
[3]r4374538@alumnes.eup.udl.es

RESUMEN: Motivados por la necesidad de facilitar al estudiante la comprensión de los conceptos básicos del Cálculo, hemos diseñado e implementado una herramienta que permita mostrar animadamente tales objetos, empleando para ello el *Mathematica* como programa base. En esta comunicación presentamos la primera parte de nuestro trabajo, dedicado al estudio de las sucesiones y series, tanto numéricas como de funciones, y al cálculo integral.

1.- INTRODUCCIÓN.

Ciertamente las nuevas tecnologías han motivado cambios en la enseñanza de las Matemáticas. Por un lado, en los programas de las asignaturas de Matemáticas, especialmente en las titulaciones de Informática, se constata un mayor peso específico de los contenidos algorítmicos y numéricos. Por otro lado, la existencia de un amplio *software* matemático sugiere dar mayor relevancia a la asimilación de conceptos que a la simple acumulación de técnicas. Ahora bien, a pesar de las múltiples propuestas de integración de las herramientas informáticas en la enseñanza de las Matemáticas, no parece haber aún una respuesta definitiva a cuál debe ser el correcto uso de dichas herramientas con el fin de lograr una mejor comprensión de las matemáticas y de sus aplicaciones.

Nuestra experiencia en la enseñanza de las materias de Análisis Matemático y Cálculo Numérico en las titulaciones de Informática de nuestra universidad, nos plantea dos retos: transmitir mejor las ideas intuitivas que hay detrás de las nociones básicas del Análisis, en las cuales se sustentan los métodos numéricos más elementales, e insistir más en la complementación de los aspectos analíticos y numéricos dando así una visión más realista del Cálculo.

Una manera natural de ilustrar las ideas de aproximación y de límite, comunes en muchos de los procedimentos de Cálculo, es mediante representaciones gráficas animadas acompañadas de una información numérica. Para la realización de dichas animaciones, hemos optado por utilizar el *Mathematica*, programa que integra el cálculo numérico y simbólico con las representaciones gráficas y que además ofrece un lenguaje de programación de alto nivel con el cual se han implementado una amplia librería de aplicaciones.

2.- OBJECTIVOS Y METODOLOGÍA

Nuestro proyecto de diseño y desarrollo de aplicaciones informáticas de soporte a la enseñanza del Cálculo, inicialmente con una sola variable, está estructurado en subproyectos correspondientes a los siguientes bloques temáticos: fundamentos (números reales, límites y continuidad, funciones elementales), cálculo diferencial, cálculo integral, sucesiones y series. Dichos subproyectos, propuestos y coordinados como Trabajos Finales de Carrera en las titulaciones de Ingeniería Técnica en Informática de la *Escola Universitària Politècnica* de la *Universitat de Lleida*, persiguen los siguientes objetivos:

- Determinar qué conceptos y resultados matemáticos admiten una representación gráfica o numérica, y en forma animada, que facilite su comprensión. Analizar las diferentes representaciones y animaciones con el fin de concluir cuál de ellas resulta más adecuada en cada situación.

- Especificar las decisiones globales de diseño de la aplicación: cómo mostrar la información gráfica y numérica, dominio de los parámetros, opciones, etc. Implementar las funciones, en el entorno de *Mathematica*, mediante una programación lo más sencilla, clara y elegante que permita dicho sistema. Documentar exhaustivamente, y de forma autocontenida, el paquete desarrollado indicando sus posibilidades y limitaciones.

- Diseñar, teniendo en cuenta los diferentes enfoques de la Enseñanza Asistida por Ordenador (EAO), estilos distintos de asistentes: demostrativos, tutoriales, ejercicios y problemas, etc. Proponer actividades que permitan al docente evaluar y contrastar hasta qué punto las herramientas didácticas creadas favorecen o estimulan la comprensión de los conceptos fundamentales del Cálculo.

El uso de este tipo de herramientas nos permite entrar en la dinámica de provocar al estudiante, en el sentido de hacerle tomar parte activa en el proceso de aprendizaje. Por ejemplo, se puede retar al estudiante a intentar predecir el comportamiento de las sucesivas animaciones, o incluso llegar a intuir ciertas propiedades de los objetos estudiados. Sin duda, augurar tales resultados exige al estudiante ser protagonista del proceso de descubrimiento de los diversos objetos y requiere, de su parte, un esfuerzo de análisis, imprescindible para la comprensión de los mismos.

3.- DESCRIPCIÓN DE LA HERRAMIENTA

En esta comunicación presentamos los dos Trabajos Finales de Carrera, desarrollados hasta la fecha, que abarcan el estudio de series y el cálculo integral, respectivamente. Los módulos desarrollados son los siguientes:

a) Sucesiones y series

Sucesiones de números reales. Se han diseñado dos representaciones distintas para mostrar los términos de una sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ de números reales. En la primera de ellas, se representan sucesivamente cada uno de los términos mediante un punto sobre la recta real. Esta animación ilustra las nociones de convergencia y divergencia. La segunda de las representaciones, en la que se muestra la sucesión de puntos $\{(n,a_n)\}_{n\in N}$ en el plano real, puede sugerir la relación entre algunas sucesiones y funciones, viendo las primeras como una cierta "discretización" de las segundas (por ejemplo, la relación entre la sucesión $a_n=1/n$ y la función $f(x)=1/x$).

Series numéricas. La representación escogida pretende mostrar la relación entre los conceptos de sucesión de números reales y el de serie numérica. De este modo, la animación para una serie de términos positivos $\sum_{n\in N} a_n$ consta de tres partes: en la primera se muestran sucesivamente los puntos (n,a_n), en la segunda se visualiza el área acumulada de los diferentes rectángulos que tienen por base la unidad y por altura cada uno de los diferentes valores a_i, para $i \leq n$. De este modo, el valor de tal área corresponde a la n-ésima suma parcial, s_n. En la tercera parte de la representación, se muestran los términos (n,s_n) reforzando así la idea que $\{ s_n \}_{n\in N}$ es una nueva sucesión de números reales construida a partir de $\{a_n\}_{n\in N}$. Tal animación permite plantear al estudiante que intente imaginar cuál puede ser la relación, si hay alguna, entre la convergencia de ambas sucesiones.

Sucesiones de funciones. Muestra de forma animada las gráficas de las funciones reales de variable real que constituyen la sucesión $\{f_n(x)\}_{n\in N}$. De este modo, se puede hacer ver al estudiante que para cada valor fijo x_0, se obtiene una sucesión numérica como las mostradas anteriormente. Incluso, éste puede indicar para qué valores x_0, tales sucesiones numéricas van a ser convergentes. La función implementada, también se puede utilizar para ilustrar la diferencia entre convergencia puntual y convergencia uniforme de una sucesión de funciones definidas en un mismo intervalo.

Series de funciones. De forma parecida al caso de series numéricas, una serie de funciones $\sum_{n\in N} f_n(x)$, se muestra como la sucesión de funciones correspondientes a las sumas parciales, es decir, la sucesión $\{F_n(x)\}_{n\in N}$ donde $F_n(x) = f_1(x)+...+f_n(x)$. Se puede hacer notar al estudiante que las series de potencias o las de Fourier no van a ser más que casos particulares de series funcionales.

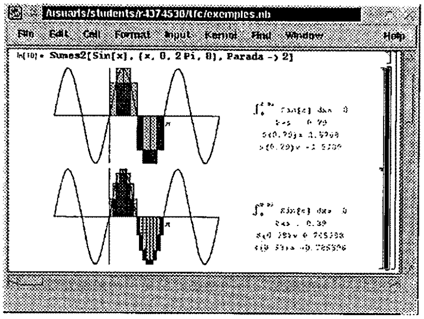
Serie de potencias. La animación de una serie de potencias $\sum_{n\in N} a_n (x-a)^n$ es similar a la de las series de funciones. Se puede proponer al estudiante que halle (intuya) el dominio de convergencia de dichas series o que encuentre sucesiones $\{a_n\}_{n\in N}$ tales que el radio de convergencia de la correspondiente serie de potencias tome determinados valores. Es importante que se den cuenta que para cada valor concreto de x que puedan ir tomando, lo que se obtiene es una serie numérica. Por lo tanto, algunas de las técnicas que van a utilizar para hallar la suma de algunas series de potencias pueden ser también utilizadas para el caso de ciertas series numéricas.

Serie de Taylor. La función implementada permite ver como las gráficas de los sucesivos polinomios interpoladores de Taylor de una función f, o sumas parciales de la serie de Taylor f en un punto a, se aproximan a la gráfica de f en el dominio de convergencia de dicha serie de potencias.

Serie de Fourier. La representación diseñada permite comparar la gráfica de una función periódica con las sucesivas sumas parciales de la correspondiente serie de Fourier, y ver como éstas van aproximándose a la función f en sus puntos de continuidad.

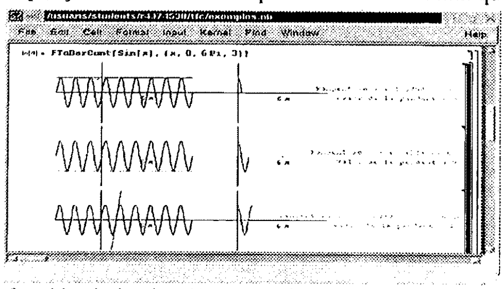
b) Cálculo Integral

Sumas de Riemann. Se pueden mostrar gráficamente las sumas inferiores y superiores de Riemann de una función f en un intervalo $[a,b]$, según se van afinando las particiones de dicho intervalo. El estudiante puede observar, por ejemplo, que si la función f es continua, entonces tales sumas van convergiendo a un mismo valor. A menudo, sin embargo, los estudiantes tienden a confundir tal valor con el del área delimitada por la gráfica de la función f, el eje de abscisas y los extremos del intervalo en que se trabaja. Se les puede proponer que hallen un método que permita calcular tal área utilizando los valores de ciertas integrales definidas.



Métodos elementales de integración numérica. Se muestra gráficamente como el método de los trapecios y el método de Simpson permiten aproximar el valor de la integral definida de una función f en un intervalo $[a,b]$, según se afina la partición que se va tomando de dicho intervalo.

Teorema fundamental del cálculo. En primer lugar, hemos intentado mostrar como se puede construir la primitiva $F(x)$ de una función continua $f(x)$ en $[a,b]$, definida como $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, a partir del cálculo acumulado de integrales definidas en ciertos subintervalos de $[a,b]$. Posteriormente, la idea es hacer notar al estudiante que precisamente $F'(x)=f(x)$, $\forall\ x\in [a,b]$. Para ello se ha implementado una rutina que muestra la construcción de



la gráfica de la función derivada $g'(x)$ a partir del cálculo de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en ciertos puntos.

Integración impropia. La función implementada permite visualizar una integral definida tal que en cada paso uno de los extremos del intervalo tiende a $+\infty$ $(-\infty)$ o bien se va acercando al extremo donde la función presenta una asíntota vertical. También se pueden realizar comparaciones de las integrales impropias de dos funciones, sobre un mismo intervalo, ayudando a intuir los criterios de comparación. A su vez, se puede sugerir al estudiante que estudie la convergencia de una integral del tipo $\int_1^\infty f(x)dx$ y la convergencia de la serie numérica $\sum_{n\geq 1} f(n)$, intentando intuir cierta relación entre ambas.

Es necesario mostrar al estudiante que estas ilustraciones no dejan de ser más que eso: representaciones que pueden ayudar a comprender de forma intuitiva ciertos comportamientos, pero que para el estudio de los mismos es imprescindible hacer un estudio analítico y riguroso. Para ello se pueden mostrar algunos ejemplos, en los que la representación visual pudiera resultar engañosa.

También cabe señalar que la herramienta diseñada es de carácter puramente ilustrativo, y que en ningún momento se ha pretendido implementar una herramienta general que permita trabajar con los casos más complejos o patológicos. Esto es debido al uso de ciertas funciones de algunos paquetes del *Mathematica* en la construcción de las primitivas, o incluso a las propias limitaciones de este *software*.

4.- ENSEÑANZA ASISTIDA POR ORDENADOR

Nuestro siguiente objetivo consiste en analizar las diferentes posibilidades que puede presentar la enseñanza de las matemáticas asistida por ordenador y, posteriormente, *dar forma* a las primitivas implementadas para elaborar un asistente para el aprendizaje.

Las razones que avalan el uso de ordenadores como un apoyo en el proceso de aprendizaje son múltiples y variadas:

- La inmediatez, potencia de cómputo y las posibilidades de animación que ofrece el *software* matemático existente, facilitan el diseño de una herramienta que permita al estudiante experimentar con las matemáticas, de forma interactiva.

- La motivación del estudiante acostumbra a ser mayor, tanto por el uso del ordenador en sí, como por la facilidades de interacción con el mismo, requiriendo por su parte una actitud más activa y una mayor atención.

- El estudiante puede realizar un trabajo más autónomo permitiendo, a su vez, ajustar el ritmo de aprendizaje al nivel de cada usuario. La herramienta puede estar incluso diseñada de modo que sea auto-correctiva, con lo cual cada estudiante pueda comprobar su nivel de aprendizaje y controlar sus progresos.

- El uso de una herramienta de este tipo puede facilitar al profesor información sobre el proceso de aprendizaje de cada estudiante, adquiriendo especial relevancia en sistemas de evaluación continuada.

Por otro lado, en el momento de diseñar una aplicación informática con finalidades didácticas, es necesario tener en cuenta las limitaciones o inconvenientes que se pueden presentar:

- El uso excesivo de un tal asistente puede llegar a ser aburrido e impersonal. Por otro lado, un uso abusivo e inadecuado del mismo, podría provocar una pérdida de destreza básica y habilidades mentales del estudiante.

- Si los contenidos no están adecuadamente presentados o no se ajustan al nivel del estudiante, éste puede desviar su atención hacia el funcionamiento del *software* o ordenador, en lugar de centrarse en el problema matemático que se le plantee.

- Algunos estudiantes suelen tener una fe ciega en la máquina, con lo que es necesario provocar su espíritu crítico cuestionando ciertos resultados que se puedan obtener.

Todo esto conlleva a que el diseño de los contenidos de una tal herramienta no resulte nada sencillo y deba hacerse cuidadosamente. El enfoque de los diversos problemas a tratar debe realizarse de modo que el estudiante no los pueda resolver con tan solo ejecutar una instrucción, sino que requiera por su parte cierta destreza y análisis de la situación. Ésta es la tarea que pretendemos iniciar en la actualidad, después de la primera fase de implementación de las primitivas básicas y de un primer uso, a nuestro entender satisfactorio, como una herramienta de apoyo a la docencia en el aula.

REFERENCIAS

[AG91] Abellanas M. y García A., Eds. Actas de las Jornadas sobre Enseñanza Experimental de la Matemática en la Universidad. Universidad Politécnica de Madrid, 1991.
[GMM95] García A., Martínez A., Miñano.R; Nuevas tecnologías y enseñanza de las Matemáticas, Síntesis, 1995.
[Guz96] Guzmán M. El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático: elementos básicos del análisis, Pirámide, 1996.
[Hud86] Hudson K. Enseñanza asistida por ordenador. Guia práctica para escribir programas de EAO, Díaz de Santos, 1986.
[Mae91] Maeder R.E. Programming in Mathematica, Addison-Wesley, 1991.
[MB95] Montes A. y Brunat J.M., Eds. Actas de las Jornadas sobre Nuevas Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad. *Universitat Politècnica de Catalunya*, 1995.
[Spi90] Spivak M. Cálculo infinitesimal, Reverté, 1990.
[Wol96] Wolfram S. The Mathematica Book, Wolfram Media, 1996.