

## GEOMETRÍA FRACTAL

Carmen Escribano<sup>1</sup>, M. Asunción Sastre<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>*Depto. Matemática Aplicada, Facultad de Informática, U.P.M.*

*e-mail: [cescribano@fi.upm.es](mailto:cescribano@fi.upm.es)*

*e-mail: [masastre@fi.upm.es](mailto:masastre@fi.upm.es)*

**RESUMEN:** En este artículo se presenta la Geometría Fractal como uno de los contenidos matemáticos de interés para los estudiantes de informática. Se describen el contenido y el desarrollo de Geometría Fractal, asignatura optativa de cuarto curso (cuatrimestral de 6 créditos), impartida este año en la Facultad de Informática de la U.P.M. En el último apartado haremos una valoración de esta experiencia y del interés manifestado por los alumnos.

### 1.- INTRODUCCIÓN.

La Geometría Fractal es un lenguaje utilizado para analizar y describir tanto fenómenos como formas complejas presentes en la naturaleza. Mientras que los elementos del lenguaje tradicional de la Geometría Euclídea son formas básicas visibles, tales como rectas, esferas, círculos,...., los del nuevo lenguaje utilizan algoritmos, que no son observables de forma directa. Estos algoritmos generan formas y estructuras con la ayuda del ordenador y nos proveen de una potente herramienta descriptiva, mediante la cual podemos describir con una reducida cantidad de información la forma de una nube de forma tan fácil y precisa como un arquitecto describe una casa a través del lenguaje de la geometría tradicional.

En 1977 B.B. Mandelbrot publicó el libro "The Fractal Geometry of Nature" describiendo numerosas aplicaciones de este tipo de estructuras para la investigación en ciencias aplicadas, siendo una herramienta fundamental en la modelización de un gran número de fenómenos naturales. El término fractal, procedente del latín "fracmus" (fragmentado, irregular), fue introducido por Mandelbrot para designar estos conjuntos que no tenían ningún nombre concreto y desde entonces se conoce esta rama de las matemáticas como geometría fractal o teoría geométrica de la medida.

El objetivo del curso es la introducción a la Geometría Fractal y sus aplicaciones a la informática, entre las que destacan la compresión fractal de imágenes, simulación y generación de imágenes.

Comenzaremos estudiando los conjuntos fractales clásicos con diferentes algoritmos para generarlos y los conceptos matemáticos básicos para diferenciar su "tamaño". A continuación daremos las herramientas matemáticas necesarias utilizadas en la compresión fractal de imágenes. Acabaremos el curso con diferentes algoritmos de codificación y decodificación fractal de imágenes, comparando con otros métodos más clásicos de compresión de imágenes.

## 2.- CONTENIDOS DEL CURSO.

En este apartado expondremos y comentaremos el contenido de la asignatura.

### a) Fractales Clásicos.

La aparición de conjuntos muy irregulares como el conjunto de Cantor (alrededor de 1890) y de otros que le siguieron (triángulo de Sierpinski, curva de Koch, curva de Peano,...) causaron tal confusión entre los matemáticos de la época que llegaron a denominarse conjuntos patológicos. El origen de la geometría fractal está en el estudio de estos conjuntos, que llamaremos fractales clásicos, y sus propiedades. Estos conjuntos serán el objeto de estudio de este primer tema. También veremos diferentes algoritmos para generar los fractales clásicos y algunas modificaciones de estos.

Para acabar el tema introduciremos, de forma intuitiva y práctica, los conceptos de medida y dimensión de Hausdorff y dimensión Box. Calcularemos estos valores para los conjuntos ya estudiados.

### b) Sistemas de Funciones Iteradas.

La mayor parte de los conceptos matemáticos en que se fundamenta la compresión fractal son básicos y ya han sido vistos por los alumnos en los primeros cursos. En este tema recordamos estos conceptos y explicamos de forma muy intuitiva los que el alumno no conoce, como por ejemplo la distancia de Hausdorff. Se aplican las ideas generales que ya conoce el alumno al espacio de los conjuntos compactos, en particular el teorema del punto fijo a los sistemas de funciones iteradas, y se definen los conjuntos autosemejantes. Una variación interesante de los S.F.I es la denominada S.F.I. recurrentes, en la que se pueden poner a trabajar en paralelo diferentes S.F.I. para construir un nuevo fractal mezcla de los originales.

Con estas sencillas herramientas, gracias a la propiedad de continuidad de los S.F.I. respecto a los parámetros, se pueden construir variaciones, deformaciones y movimientos de los conjuntos fractales estudiados en el primer tema.

Acabaremos el tema con el teorema del Collge, que es la idea en que descansa la compresión fractal.

### c) Compresión fractal de imágenes.

Para empezar el tema veremos cómo guardar la información de las semejanzas que utilizamos para construir el triángulo de Sierpinski y compararemos lo que ocupan estos datos y lo que ocupa un fichero BMP del mismo triángulo. Veremos las ideas en que se basan otros métodos de compresión y los algoritmos más sencillos de compresión fractal, tanto para imágenes binarias como monocromas. Para comprimir imágenes en color, se utiliza la compresión por bandas, normalmente RGB o YUV, comprimiendo cada banda como una imagen monocroma, volviendo a juntarlas en el proceso de descompresión.

La principal ventaja de la compresión fractal es su ratio de compresión, mientras que su principal inconveniente es la lentitud a la hora de comprimir, ya que la descompresión es bastante rápida. Esto hace que sea muy útil para guardar mucha información en poco espacio, así como para transmitirla por la red. Un ejemplo de esto es la enciclopedia Encarta, cuyas

imágenes están comprimidas con este tipo de compresión. Acabaremos el curso estudiando mejoras de los algoritmos estudiados que aumenten la velocidad de compresión, sin perder calidad.

### **3.- DESARROLLO Y DIDÁCTICA DEL CURSO.**

La asignatura es cuatrimestral con cuatro horas a la semana. Tres horas en el aula y una de realización de prácticas. Por ser el primer año que se impartía esta asignatura y debido a que algunos alumnos que la escogieron tenían conocimiento de cómo se aplicaba la Geometría fractal en diversas materias en las que tenían interés, se les permitió realizar una practica libre. en la que podían profundizar en esos temas y exponerlo en clase.

Durante los dos primeros meses aproximadamente, mientras los alumnos iban realizando las prácticas y tenían materia suficiente para trabajar, se utilizaban las tres horas semanales en créditos teóricos. Estas tres horas se impartían en dos días, uno una hora y otro dos. La última hora se aprovechaba para mostrar con el ordenador proyectos fin de carrera realizados en la Facultad, relacionados con los temas que se explicaban en el momento. También se mostraban programas de libre distribución que sirvieran para aclarar ideas y motivar a los alumnos en sus prácticas, tales como fractin, el juego de la vida, chaos, fractus, etc.

En la última parte del curso, se reservaba la última hora del día de dos para que los alumnos expusieran sus prácticas. Estas solían presentarse con ordenador, ya que en la mayor parte de los casos se implementaban algoritmos, aunque también se admitía la exposición de un tema. Hay que mencionar que todas las aulas de la Facultad están equipadas con cañon, lo que permite explicar con ayuda del ordenador.

### **4.- CONCLUSIÓN, OBJETIVOS Y VALORACIÓN FINAL DEL CURSO.**

El interés y el trabajo realizado por los alumnos, en la mayoría de los casos, fue extraordinario. Gracias a las prácticas realizadas, se vieron temas que en un principio no se incluían en la asignatura. Cabe destacar entre estos temas, el de música fractal, L-System, series fractales, fractales en la ciencia, fractales aleatorios y generación de paisajes, mapas, planetas y nubes. Hay que destacar que debido al interés de los alumnos, el tema de compresión de imágenes, que aún estando en el programa, se estudió con mayor profundidad de la que se pensaba en un principio. En este sentido varios de los trabajos realizados por los alumnos consistieron en el análisis e implementación de estos algoritmos con diferentes mejoras.

La creatividad mostrada por varios de los alumnos en la realización de las practicas, así como la calidad y trabajo de estas hacen valorar muy positivamente esta experiencia.

En general este tipo de asignaturas que se imparten en los cursos superiores, enfocadas adecuadamente a los intereses de los estudiantes de informática, llevan al alumno a interesarse por temas matemáticos para realizar su proyecto fin de carrera e incluso investigar en estos campos con la idea de desarrollar su tesis doctoral.

## 5.- BIBLIOGRAFÍA.

1. Barnsley M.F., *Fractals Everywhere*. Academic press, 1993
2. Barnsley M.F., Hurd L.P., *Fractal Image Compression*. AK Peters, Ltd., 1993
3. Bunde A. Y Havlin S. (Eds.) , *Fractals in Science*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
4. Falconer K.J., *Fractal Geometry*. Wiley, New York, 1990.
5. Fisher Y., *Fractal Image Compression*. Springer-Verlag, 1994.
6. Flake G-W., *The computational Beauty of Nature*. Bradford Book, Massachusetts, 1999.
7. Guzman M., Martín M.A., Morán M., Reyes M. *Estructuras fractales y aplicaciones*. Labor, Barcelona, 1993.
8. Mandelbrot B., *Fractals Geometry of Nature*. W.H. freeman and Co., New york, 1982.
9. Peitgen O.H., Jürgens H. y Saupe D., *Chaos and Fractals. New Frontiers of Science*. Springer-Verlag, Berlin 1992.
10. H.-O.Peitgen y P.H.Richter, *The beauty of fractals*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
11. Stewart, J. *The Magical Maze: Seeing the World Through Mathematical Eyes*. John Wiley & Sons, Inc. 1998.