LA GEOMETRÍA EN LA INFORMÁTICA

Manuel Abellanas*
Universidad Politécnica de Madrid
Mabellanas@fi.upm.es

RESUMEN: La Geometría Algorítmica trata problemas geométricos de forma constructiva. Actualmente ha cobrado un gran interés debido a las numerosas aplicaciones que tiene en la Informática. En este trabajo se hace una introducción a la disciplina indicando su interés en Informática y aportando enlaces de interés para la docencia y la investigación en la materia.

1.- INTRODUCCIÓN

La reconstrucción de las lindes de los terrenos en las orillas del Nilo tras las crecidas periódicas de éste fue uno de los motivos del desarrollo de la Geometría en el antiguo Egipto. En tiempos de Euclides la Geometría era considerada uno de los pilares de la ciencia. Especialmente, por lo que tenía de aplicada a los problemas que la vida ordinaria iba originando y para los que demandaba soluciones prácticas. A lo largo de la historia ha recibido más o menos atención dentro de la Matemática. En el último siglo el desarrollo de la Topología y de los espacios abstractos influyó también en la Geometría, primando el interés por la generalización y el estudio de propiedades existenciales no constructivas. Gracias al desarrollo de la Informática han aparecido numerosos problemas geométricos cuya solución es necesaria para resolver problemas informáticos. En algunos casos ha sido suficiente desempolvar problemas ya conocidos y sus soluciones. En otros muchos casos ha sido necesario hacer una reformulación de los problemas y buscar nuevas soluciones adecuadas a las demandas de la Informática. Con todo ello, no ha sido suficiente y han surgido, además, nuevos problemas geométricos al tratar de dar respuesta a problemas informáticos. Esto ha enriquecido la Geometría y está dando trabajo a informáticos y matemáticos interesados por problemas aplicados.

2.- PROBLEMAS GEOMÉTRICOS EN LA INFORMÁTICA

La Matemática es la herramienta que emplean numerosos campos técnicos y científicos para formalizar problemas y buscar soluciones. La Informática no es una excepción. Esto mismo ocurre con el caso particular de la Geometría. En ámbitos bien diferentes surgen problemas geométricos. En este apartado vamos a mostrar algunos ejemplos que surgen en el ámbito de la Informática.

Bases de datos. En el acceso compartido a bases de datos surgen problemas cuando varios usuarios están autorizados a modificar los datos. Mientras un usuario accede a una variable, ésta debe estar bloqueada al resto para evitar una lectura errónea mientras el primero modifica su valor. Si asignamos a cada usuario de una base de datos un parámetro que represente el tiempo de acceso a dicha base, los períodos que el usuario bloquea cada variable quedarán representados como intervalos. Así mismo, en el espacio producto, el producto de los intervalos

* Parcialmente subvencionado por DGES-MEC-PB98-0933

de bloqueo correspondientes a los diferentes usuarios define una región poliédrica que determina la región prohibida. Esto significa que los puntos de dicha región representan puntos de posible conflicto entre usuarios. El análisis de conflictos en el acceso a la base de datos se corresponde con el análisis geométrico de dicha región. Si el número de variables es elevado, como ocurre en la práctica, o el número de usuarios es elevado, la región tiene una elevada complejidad. Esto hace necesario el empleo de algoritmos eficientes para el análisis.

Reconocimiento de patrones. En reconocimiento de patrones, ya sea en archivos sonoros, de imagen, etc., el problema consiste en identificar o reconocer formas o patrones conocidos. Se han desarrollado numerosas técnicas en Geometría Algorítmica que sirven de soporte para ello. Desde las más simples como las envolventes convexas, a otras más sofisticadas como las envolventes alfa y diferentes métodos de agrupación de datos.

Clasificación. Relacionado con el tema anterior, los problemas de clasificación pretenden, en general, encontrar métodos automáticos para clasificar nuevos datos a partir de una colección de datos previamente conocidos. En numerosas ocasiones el problema se reduce a localizar el nuevo dato, empleando diferentes criterios de proximidad, en una subdivisión del espacio de los datos generada por los datos iniciales. Los diagramas de Voronoi[7] en sus diferentes versiones son una herramienta útil para ello.

Optimización de redes. El diseño de redes de comunicaciones también da lugar a problemas de optimización geométrica. Las triangulaciones de Deloné se emplean a menudo para diseñar redes en las que nodos próximos estén conectados entre sí. Una triangulación de una nube de puntos del plano es un grafo cuyos nodos son los puntos y sus aristas son segmentos rectilíneos que los conectan, de modo que dos de ellas no se atraviesan, siendo el número de aristas maximal (lo mayor posible). La triangulación es de Deloné si el menor de los ángulos de todos los triángulos es lo mayor posible. Esta propiedad hace que las aristas conecten puntos entre sí si son próximos. Un subgrafo importante de la triangulación de Deloné es el arbol de expansión mínimo (que es la red que conecta los nodos con la menor cantidad de cable).

Diseño de circuitos. En el diseño de las máscaras que intervienen en un circuito se emplean generalmente regiones determinadas por rectángulos. El número de rectángulos que intervienen es muy elevado. Una de las tareas importantes consiste en verificar si el diseño cumple las condiciones necesarias para su correcto funcionamiento. Algunas de ellas corresponden a condiciones geométricas, en particular de distancias mínimas entre las regiones determinadas por la unión de los rectángulos que definen las diferentes máscaras. También aquí se hace imprescindible disponer de algoritmos eficientes para el análisis de objetos geométricos.

Síntesis de imágenes. La síntesis de imágenes es una de las ramas más activas de la Informática Gráfica. En la mayor parte de los casos, las imágenes se forman a partir de un gran número de elementos geométricos sencillos. El problema consiste en estructurarlos adecuadamente para que las operaciones que posteriormente se desean realizar sobre ellos se puedan hacer empleando la menor cantidad de recursos posible. La Geometría Algorítmica aporta tanto estructuras de datos como algoritmos adecuados para la manipulación de dicha información geométrica.

[7] En su versión eucídea plana, el diagrama de Voronoi de n puntos del plano es la descomposición del plano en las regiones de proximidad de los puntos. La región de proximidad de un punto es el conjunto de puntos que son más próximos a él que a cualquiera de los demás.

Existen otras muchas áreas relacionadas con la Informática, o que dependen esencialmente de ella, en las que aparecen problemas geométricos. Por ejemplo en planificación de trayectorias en Robótica o en Cartografía Automática entre otras.

3.- LA GEOMETRÍA ALGORÍTMICA

La Geometría Algorítmica se ocupa de resolver problemas geométricos de modo constructivo. No sólo se interesa por la existencia de la solución de un problema, sino también por encontrar el método (algoritmo) para construir dicha solución. Además, y esto es propio del diseño de software en general, se ocupa de buscar algoritmos eficientes. Es decir, que requieran pocos recursos. El volumen de datos que se maneja en muchas aplicaciones es muy elevado, lo que obliga a buscar no una solución, sino una buena solución algorítmica para el problema. Los dos parámetros que miden generalmente la complejidad de un algoritmo son el espacio y el tiempo. El espacio es la cantidad de memoria necesaria para almacenar tanto los datos de entrada del problema, como los datos que se generan durante el proceso del algoritmo, así como los de la solución. El tiempo depende directamente del número de operaciones básicas que el algoritmo efectúa al resolver el problema. La forma de medir el tiempo para no depender de la máquina empleada consiste precisamente en medir el número de operaciones básicas.

La Geometría Algorítmica, por tanto, forma parte de la teoría del diseño y análisis de algoritmos y estructuras de datos. En ocasiones la Geometría es quien abre las puertas a soluciones más eficientes en problemas que no parecen geométricos. Descubrir que los datos del problema verifican una propiedad geométrica sirve para poder aplicar alguna técnica algorítmica o alguna estructura de datos que agiliza el proceso de los mismos.

Mostraremos, mediante un ejemplo, de qué manera puede surgir la Geometría y cuál es el estilo de la Geometría Algorítmica.

Análisis de rangos en bases de datos. Un problema que se presenta a menudo en el análisis de bases de datos es el estudio de los rangos. Si los datos de la base de datos son uniparamétricos, el rango es la diferencia entre el mayor y el menor. Generalmente los datos están formados por más de un parámetro. Un primer análisis de los rangos consiste en calcular el rango en cada parámetro por separado. Este análisis, sin embargo, da una idea bastante pobre sobre la variación de los datos. Existen varias alternativas para este problema. Veamos varias de ellas planteando el problema en dimensión dos para una mayor sencillez. Cada dato compuesto por dos valores paramétricos puede asociarse a un punto del plano euclídeo, tomando dichos valores como las coordenadas cartesianas del punto. Calcular los rangos en cada coordenada por separado equivale a calcular el menor rectángulo isotético (de lados paralelos a los ejes) que contiene a los datos. En la figura 1 se muestran varias alternativas a esta solución.

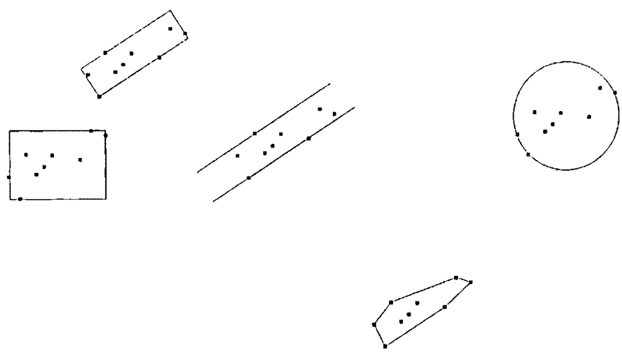

Figura 1: Diferentes alternativas para medir el rango de los datos: Rectángulo isotético, franja de anchura mínima, círculo mínimo, rectángulo libre mínimo, envolvente convexa

Cada una de las propuestas de la figura tiene asociado un problema geométrico diferente. De hecho, aún los que parecen más similares no lo son. El cálculo del menor rectángulo isotético se puede realizar en un tiempo proporcional al número de datos, mientras que el rectángulo libre no es posible calcularlo, en el peor caso, en menos de[8] O(n *log* n). El cálculo de la envolvente convexa, que es el polígono de menor perímetro que contiene a todos los puntos, se puede hacer en un tiempo de orden similar, O(n *log* n). Por otra parte, una vez conocida la envolvente convexa se pueden resolver los otros problemas en tiempo lineal O(n), por lo que todos ellos se pueden resolver en tiempo O(n *log* n). Para ello hay que resolver nuevos problemas geométricos: dado un polígono convexo, hallar el menor rectángulo que lo contiene, el menor círculo que lo contiene, o la menor franja que lo contiene.

Para estar seguros de que no existe una solución mejor para un problema, es preciso obtener una cota inferior para el tiempo de los algoritmos que lo resuelven. Este es uno de los aspectos teóricos de la algorítmica que, en ocasiones, emplea técnicas matemáticas sofisticadas. En otros casos la técnica consiste en aprovechar las cotas inferiores conocidas para otros problemas. Una cota inferior de un problema A se puede transferir a otro B cuando los algoritmos que resuelven el problema B sirven para resolver el problema A y, siempre y cuando la transformación de los datos de entrada del problema A en datos para el problema B, más la transformación de la solución del problema B en la solución del problema A, no supere a la cota inferior que queremos transferir. Un ejemplo sencillo consiste en transferir la conocida cota inferior O(n *log* n) para la ordenación de una lista de números en cota inferior para el cálculo de la envolvente convexa. Si suponemos los números de la lista positivos, transformando cada número x en el punto (x,x^2), se obtienen puntos sobre la parábola $y = x^2$, y, por tanto, en posición convexa. Esto significa que todos ellos aparecen como vértices de la envolvente convexa. Una vez calculada ésta, basta recorrer sus vértices, empezando por el más bajo, para obtener sus abscisas ordenadas de menor a mayor. El resultado es la lista de números ordenada. En consecuencia, no es posible calcular la envolvente convexa, en el peor caso, en menos tiempo, pues ésto llevaría a conseguir ordenar una lista de números en un tiempo imposible.

De los problemas planteados, el primero, calcular el menor rectángulo isotético, ya hemos dicho que puede resolverse en tiempo lineal, y esto es a su vez una cota inferior obvia, pues es preciso procesar cada punto para estar seguro que ninguno queda fuera del rectángulo solución.

[8] O(n log n) es la notación estandar de Knuth empleada para medir la complejidad asintótica de los algoritmos. Una función f (n) se dice que es de orden O(g(n)) si a partir de un cierto valor de n y para un cierto valor entero positivo k se verifica que f(n) < k.g(n)

La franja mínima, el rectángulo libre mínimo y la envolvente convexa se pueden calcular como se ha dicho en tiempo O(n *log* n). Los tres problemas tienen como cota inferior una función de ese mismo orden. Sin embargo, el cálculo del menor círculo contenedor de los puntos puede mejorarse empleando técnicas de poda y búsqueda más sofisticadas. Es posible con esa técnica resolver el problema en tiempo lineal.[9]

4.- LA GEOMETRÍA ALGORÍTMICA EN LOS ESTUDIOS DE INFORMÁTICA

La Geometría Algorítmica, en general bajo el título de Geometría Computacional, ha pasado a formar parte de los planes de estudio de las Ingenierías Informáticas. Esta asignatura, por una parte, complementa las asignaturas de programación y estructuras de datos, y, por otra, sirve de soporte a asignaturas específicas relacionadas con la informática gráfica y con la robótica. En ella se estudian técnicas algorítmicas así como estructuras de datos geométricos avanzadas que permiten el proceso más eficiente de datos geométricos. Como muestra de la afirmación anterior, se recogen a continuación algunas direcciones de Internet con información sobre cursos concretos. En ellas es posible encontrar los programas de las asignaturas e información sobre Geometría Algorítmica:

- Curso de Geometría Computacional en la universidad de McGill (Montreal, Canada): CS-507A Computational Geometry. Detalles en la dirección (http://cgm.cs.mcgill.ca/~godfried/teaching/cg-calendar-99.html). Es interesante visitar la página del profesor Godfried Toussaint (http://cgm.cs.mcgill.ca/~godfried/page.html), uno de los pioneros de la Geometría Algorítmica.

- Curso de Geometría Computacional en la Universidad Politécnica de Cataluña (http://www-fib.upc.es/NovaGuia/Assignatures/GEOC.html).

- Curso de Geometría Computacional en la Universidad de Sevilla (http://ma1.fie.us.es/miembros/almar/docencia/cg-info.htm)

- Curso de Geometría Computacional en la Escuela Universitaria de Informática de la Universidad Politécnica de Madrid (http://www.eui.upm.es/jesteinv/asign/geo_com.htm).

- Curso de Geometría Computacional en la Facultad de Informática de la U.P.M. (http://www.dma.fi.upm.es/docencia/segundociclo/geomcomp/home.htm).

Los libros de O'Rourke, M. De Berg et al., Preparata, Boissonat, entre otros, son textos habituales en todas ellas. (Véase la bibliografía).

[9] Pueden consultarse los detalles de éstos y otros problemas en los libros de O'Rourke o de M. De Berg et al. Citados en la bibliografía.

5.- INVESTIGACIÓN EN GEOMETRÍA ALGORÍTMICA

La Geometría Algorítmica es también un activo campo de investigación en el que participan Informáticos y Matemáticos. Buena prueba de ello son las revistas especializadas en la materia publicadas por grandes editoriales científicas (*Discrete and Computational Geometry* de Springer, *Computational Geometry, Theory and Applications* de Elsevier, *International Journal on Computational Geometry* de World Scientific), todas ellas con un nivel elevado en las listas de índices de impacto, así como el gran número de artículos publicados en otras revistas científicas relacionadas. Para hacerse una idea de la cantidad de trabajos publicados y para hacer búquedas y consultas, puede consultarse la base de datos Geombib, de la que existe un espejo en la UPC (http://www-ma2.upc.es/~geomc/geombib/geombibe.html).

Existen congresos nacionales, europeos e internacionales específicos. En España los Encuentros de Geometría Computacional (9ª edición en Girona en 2001). En otros paises existen congresos locales (Francia, Canada, EEUU,...). Existe un congreso Europeo (el XVI se celebró en Israel en 2000). Y existen varios internacionales, de los cuales el más significativo es el patrocinado por la ACM (la edición XVIII tendrá lugar en Barcelona en 2002).

El gran auge de la investigación en Geometría Algorítmica se debe al gran número de campos en los que surgen problemas geométricos para los cuáles es preciso dar soluciones algorítmicas eficientes. Esto hace que sea una de las áreas más activas de la Matemática Aplicada, que da respuesta a algunos de los problemas que plantea la Tecnología Informática y se nutre a su vez de ella con nuevos problemas.

Dos de las direcciones en Internet relacionadas con la investigación en Geometría Algorítmica son la página mantenida por Jeff Erikson (http://compgeom.cs.uiuc.edu/~jeffe/compgeom/) y la mantenida por Godfried Toussaint (http://cgm.cs.mcgill.ca/~godfried/computational.geometry.html). En ellas hay numerosos enlaces entre los que cabe destacar los enlaces a congresos, publicaciones, páginas de grupos de investigación, software disponible en la red, etc.

En España varios grupos trabajan en Geometría Algorítmica. Entre ellos el de la Universidad de Cantabria (http://matsun1.matesco.unican.es/Cag/), el de la Universidad Politécnica de Cataluña (http://www-ma2.upc.es/~geomc/) y el de la Comunidad de Madrid (http://www.dma.fi.upm.es/research/geocomp/).

6.- BIBLIOGRAFÍA

J. O'Rourke:"*Computational Geometry in C*", Cambridge U. Press,1994.

M. de Berg y otros: "*Computational Geometry: Algorithms and Applications*", Springer, 1997.

J. D. Boissonat, M. Yvinec: "*Algorithmic Geometry*". Cambridge Univ. Press, 1998.

H. Edelsbrunner: "*Algorithms in Combinatorial Geometry*". Springer, 1987.

F. Preparata, M. I. Shamos: "*Computational Geometry: An Introduction*". Springer, 1985