Ciências Actuariais: Modelos para Seguros

Alfredo D Egídio dos Reis, ISEG-UTL

1. Introdução

Quando se fala em Actuariado fora do meio da actividade seguradora, a primeira reação é de alguma perplexidade e desconhecimento. Dirão depois alguns: *Os Actuários são os sujeitos que trabalham em seguros, não é?* De qualquer forma, a palavra *actuário* parece ao cidadão comum um pouco estranha. Se formos a um dicionário de língua portuguesa verificamos que é uma palavra de origem latina (*actuarius*), apresentando dois significados: *Especialista dos cálculos de uma companhia de seguros* e... *Escriba que no Senado romano redigia as actas.* Enquanto que o segundo significado tem um significado lógico, já o primeiro parece sem ligação. Não é incomum a palavra actuário aparecer com o significado de guarda-livros ou contabilista (aparece-nos por exemplo em cenas no cinema americano). Citando Ogborn [1956], a *Encyclopædia Britannica* afirma que no Império do Oriente os actuários eram oficiais que mantinham a contabilidade, recebiam o cereal dos responsáveis dos armazéns e o distribuiam aos soldados.

Qual a relação entre os diferentes significados? Aparentemente nenhuma. De acordo com Ogborn [1956] aparentemente a palavra actuário (*actuary*) aparece pela primeira vez ligada aos seguros no século XVIII no Reino Unido quando se sentiu a necessidade de atribuir um título ao responsável de uma nova organização que vendia seguros de vida. Notemos que era uma actividade nascente e em franco desenvolvimento na época. O 'Actuário' tinha apenas inicialmente uma função de gestor. O nome da profissão terá surgido quando na mesma companhia foi nomeado um 'Actuário' assistente que era também um matemático com habilitações em matemática e medicina e interesses em ciência experimental. Tinha portanto conhecimentos que lhe permitiam ser o responsável pelo cálculo dos prémios. Terá sido o primeiro Actuário com o significado que hoje conhecemos. Salientemos que foi exactamente o Reino Unido o grande percursor das Ciências Actuariais, ligadas ao seguro do ramo vida, em particular.

Pode afirmar-se que as matemáticas actuariais remontam ao século XVII com a primeira tabela de mortalidade construída em 1693 por Sir Edmund Halley (também imortalizado pelo cometa com o seu nome).

O Actuariado ou Ciências Actuariais compreende um conjunto de matérias com aplicação na actividade seguradora. Matérias como Matemática (cálculo de probabilidades, matemática financeira), Estatística, Economia, essencialmente. Por a Matemática ser uma matéria fundamental, o actuariado também é conhecido por Matemática Actuarial. A designação 'Ciências Actuariais' parece uma designação mais apropriada por ser mais geral (pode no entanto gerar alguma controvérsia sobre o termo 'ciência'...). Hoje em dia o actuariado já não se confina à actividade seguradora, estendendo-se a áreas como as Finanças, particularmente operações de bolsa, falando-se em Actuariado Financeiro, passando pelos Planos de Pensões. Não é mais que a aplicação de métodos aplicados ao cálculo do risco na actividade seguradora a áreas como as Finanças: cálculo do risco nos mercados financeiros.

2. Formação e Instituições

A profissão de Actuário é uma actividade sujeita a legislação específica e é tutelada pelo Instituto dos Actuários Portugueses (IAP), fundado em 1945. Isto é, para se ser considerado actuário à luz da legislação portuguesa é necessário ser membro do IAP. É uma organização profissional. Tradicionalmente, para se ser membro desta organização era necessário ser-se proposto por um membro já existente, bastando para tal apresentar comprovativo de um mínimo (3 anos) de experiencia profissional em companhia seguradora ou afim. Estuda-se um programa com exames de admissão à profissão.

Actualmente os membros efectivos do IAP são essencialmente matemáticos e economistas. É que não existe uma licenciatura específica em Portugal em Ciências Actuariais, contrariamente ao que sucede em grande parte dos países europeus, Estados Unidos e outros países de cultura anglo-saxónica. Existe uma especialização, o ramo de Ciências Actuariais no curso de licenciatura em Matemática Aplicada na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. O ISEG, Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade Técnica de Lisboa tem um curso de mestrado em Ciências Actuariais. O próprio IAP fornece um curso de especialização em actuariado não vida por forma a formar e dotar as seguradoras de 'actuários não-vida responsáveis'. É uma exigência recente da União Europeia.

É que existe regulamentação recente e coordenada pela União Europeia à qual todos os países estão sujeitos que obriga as companhias seguradoras tenham um quadro de 'Actuários Responsáveis'. Estes são de dois tipos: *Vida e Não-vida.* Voltaremos a este assunto.

A acreditação oficial da profissão de actuário nos vários países faz-se essencialmente de duas formas distintas. Nos países de cultura anglo-saxónica, EUA incluído, para uma pessoa se tornar actuário não basta ter um curso superior na área de ciências actuariais, aliás isso não é condição obrigatória. Tem que completar uma série de exames a nível nacional da responsabilidade do órgão profissional, tipo IAP. Esses exames compreendem disciplinas de matemática, cálculo actuarial, matemática financeira, fundos de pensões, finanças, economia, demografia. Ao contrário, nos países da europa continental para se tornar actuário e passar a ser membro da organização que tutela a profissão, basta que tenha um curso superior na área. Ou seja, o diploma académico basta para a acreditação profissional.

Esta diferença terá a ver com o facto de que a profissão, essencialmente no Reino Unido, se ter desenvolvido de forma a acompanhar as regras dos mercados não tendo sido acompanhado pelo desenvolvimento académico. Por outro lado, conhecemos o peso que tem a tradição neste país. A universidade durante muito tempo apenas se preocupou com as disciplinas tradicionais da ciência e das letras.

A regulamentação da actividade seguradora das companhias é bastante específica quando comparada com a comum das empresas que vendem um produto ou serviço. É preciso ter em conta que o tipo de negócio feito pelas seguradoras é do tipo *pague primeiro e leve depois* (se levar), i.e., uma pessoa paga primeiro o prémio e a contrapartida do serviço a que se refere o prémio só será executada mais tarde (se for, e oxalá nunca seja, se pensarmos num seguro de automóvel por exemplo!) na forma de indemnização, e para isso é necessário ter algumas garantias que a companhia ainda lá estará nessa altura e em condições. Lá dizem os ditado, *Quem paga adiantado fica sempre mal servido...* e *mais vale prevenir que remediar*. É isto mesmo de que trata o seguro: prevenir.

A actividade seguradora (negócio) é fiscalizada pelo Instituto de Seguros de Portugal (ISP), que tem a função de garantir que as regras legais e o bom funcionamento do mercado seja cumprido. Além das companhias seguradoras que promovem o negócio 'Seguro' existem ainda algumas Mútuas, também sob a alçada do ISP, que não promovem propriamente o negócio seguro mas fazem 'seguro' aos seus associados, mediante contribuições. Por exemplo a Mútua dos Pescadores.

Além do negócio 'Seguro' também as sociedades gestoras de Fundos de Pensões estão sob a alçada do ISP e necessitam de actuários responsáveis, já que o seu cálculo utiliza os instrumentos de matemática actuarial.

Como referimos atrás, a matemática actuarial pode ser dividida em dois ramos fundamentais: Cálculo Actuarial e Teoria do Risco, ligados á area de aplicação, respectivamente seguros do Ramo Vida e Ramo Não-Vida. É que tradicionalmente os métodos são diferentes, embora hoje se assista a uma viragem no sentido em que os métodos não vida estão sendo cada vez mais aplicados ao seguro do ramo vida. Continua no entanto a merecer a abordagem diferenciada. Saliente-se, por outro lado, que estes dois tipos de seguro têm uma diferença fundamental: enquanto que no seguro de vida a indemnização só pode ocorrer uma vez, num seguro automóvel o sinistro pode acontecer multiplas vezes à mesma entidade.

3. Técnicas Actuariais Vida

A área das ciências actuariais tradicionais é, como já se disse o cálculo o problema do seguro-vida, nomeadamente como calcular o Prémio do seguro ou melhor, a sua estimação. Para isso são elaboradas as Tabelas de Mortalidade.

Poderemos sintetizar isto com a definição de uma variável aleatória contínua X representando o Tempo de Vida de um indivíduo recém-nascido. Designa-se por Função de Sobrevivência $s(x)$ a probabilidade de um indivíduo atingir a idade x:

$$s(x) = \Pr(X > x),$$

ou seja, o complementar da função de distribuição de X. A vida futura de um indivíduo com idade x designa-se por $T(x) = X - x$. É com esta variável aleatória que se vai trabalhar.

A notação matemática do cálculo actuarial é bastante extensa e complexa. Está no entanto normalizada, aceite internacionalmente pelos órgãos actuariais. Vamos somente apresentar a simbologia necessária a uma compreensão simples de um problema. Tradicionalmente o cálculo actuarial é apresentado em termos de valores esperados ou médias de diferentes variáveis aleatórias relacionadas. Podem-se consultar os índices da simbologia internacionalmente adoptada na bibliografia tradicional. Em português existem sebentas de cálculo actuarial. Como um dos livros fundamentais sobre esta matéria consideraremos apenas a excelente referência americana Bowers, Gerber, Hickman, Jones, e Nesbitt [1986], *Actuarial Mathematics*.

Definimos algumas probabilidades fundamentais:

$$\begin{aligned} {}_tq_x &= \Pr[T(x) \leq t], \; t \geq 0 \\ {}_tp_x &= 1 - {}_tq_x \end{aligned}$$

como sendo respectivamente probabilidade de um indivíduo com idade x morrer antes de completar a idade $x+t$ e o seu complementar no caso de atingir a idade $x+t$. Designamos ainda por l_x o número esperado de sobreviventes com idade x numa população, e por

$${}_td_x = l_x - l_{x+t}$$

o número médio de mortes entre as idades x e $x+t$.

Na prática nós estamos familiarizados com pagamento de prémios por unidade de tempo, habitualmente um ano, que podem ser subdivididos mensalmente, por exemplo. Para simplificação nós consideraremos apenas estas quantidades em tempo discreto, por unidade de tempo. Quando $t = 1$, escreveremos simplificadamente

$${}_1q_x = q_x$$

$$
\begin{aligned}
{}_1p_x &= p_x \\
{}_1d_x &= d_x
\end{aligned}
$$

É ainda importante a noção de Força de Mortalidade ou Taxa Instantânea de Mortalidade:

$$\mu_x = -\frac{l'_x}{l_x} = -\frac{d}{dx}\log l_x = -\frac{s'(x)}{s(x)} \ .$$

Existem algumas Leis de Mortalidade que sugerem a estimação tanto da força de mortalidade como da função de sobrevivência, obtida por métodos de regressão. Nomeadamente:

$$
\begin{aligned}
\text{Lei de Gompertz} &: \quad \mu_x = Bc^x \rightarrow s(x) = e^{-m(c^x-1)}, \ B > 0, C > 1, x \geq 0 \\
\text{Lei de Makeham} &: \quad \mu_x = A + Bc^x \rightarrow s(x) = e^{-Ax-m(c^x-1)}, \ A \geq -B
\end{aligned}
$$

Pode-se aproximar facilmente a Esperança de Vida ou Vida Média de forma simples pela seguinte fórmula:

$$\overset{o}{e}_x = \frac{\frac{1}{2}d_x + \left(1 + \frac{1}{2}\right) d_{x+1} + ... + \left(\omega - x + \frac{1}{2}\right) d_\omega}{d_x + d_{x+1} + ... + d_\omega}$$

sendo ω a Idade Limite de um indivíduo, e admitindo uma distribuição uniforme do número de mortes ao longo do período-ano.

Estas quantidades, assim como outras, estão estimadas e presentes em tabelas de mortalidade, por países ou mesmo por regiões. Existem de facto tabelas de mortalidade portuguesas, que são elaboradas com bases nos censos à população.

É fundamental ter conhecimentos adicionais de matemática financeira, importante para o cálculo/estimação dos prémios. Por exemplo necessitamos de quantidades como o Valor Actual de uma Unidade de Capital actualizada financeira e actuarialmente:

$${}_nE_x = \ {}_np_x \ (1+i)^{-n} = {}_np_x \ v^n$$

em que i é a taxa de juro por período e $v = (1+i)^{-1}$o factor de actualização financeiro. Ou ainda da noção de renda por exemplo, Valor Actual de uma Renda, Incerta, Temporária, Termos Normais, Imediata**:**

$$a_{x:\overline{n}|} = {}_1E_x \ + {}_2E_n \ + ... + {}_nE_x$$

É uma renda incerta por os termos da renda estarem sujeitos a uma contingência. Se considerarmos uma Renda Vitalícia estenderemos o período até à idade ω:

$$a_x = {}_1E_x \ + {}_2E_n \ + ... + {}_nE_x \ + ... + {}_{\omega-x}E_x \ .$$

Estes valores de renda estão tabelados em Tabelas Actuariais.

Consideremos um exemplo de um Seguro de Vida Inteira. O segurador compromete-se ao pagamento de uma unidade de capital por morte de um elemento (de l_x) no final do ano. A quantia simples a pagar ao segurador pelo indivíduo de idade x designa-se por A_x. Teremos:

$$\begin{aligned} A_x &= q_x v + {}_1p_x \; q_{x+1} \, v^2 + {}_2p_x \; q_{x+2} \, v^3 + ... \\ &= (1-p_x)v + (p_x - {}_2p_x)v^2 + ({}_2p_x - {}_3p_x)v^3 + ... \\ &= v\left(1 + p_x v + {}_2p_x \, v^2 + ...\right) - \left(p_x v + {}_2p_x \, v^2 + ...\right) \end{aligned}$$

ou seja

$$A_x = v(1+a_x) - a_x = \frac{1-ia_x}{1+i} \; .$$

Se o pagamento for considerado a meio do ano por exemplo, teremos $\bar{A}_x = A_x(1+i)^{1/2}$. Estas quantias são quantias líquidas, prémio puro, não incorpora quaisquer cargas (adicionais), de segurança ou para fazer face a despesas de índole administrativa.

No exemplo que considerámos o Prémio era único: A_x. O mais habitual é que o prémio possa ser pago escalonadamente. Em grande parte dos casos o prémio é pago periodicamente através de uma quantia constante. É o Prémio Nivelado. Se considerarmos por exemplo que há pagamento deste prémio constante (no início de cada período) enquanto o segurado estiver vivo e o capital seguro for de 1000 contos então haverá que equacionar

$$1000 \; \bar{A}_x = P \, \ddot{a}_x$$

onde o segundo membro representa uma renda vitalícia com termos antecipados (no fim de contas nós pagamos os prémios *à cabeça*, não é?) e P representa o prémio.

A contrapor a isto e para finalizar este tema mencionaremos ainda que de uma forma sumária que o cálculo do Prémio Nivelado não será o ‘Prémio Natural’. Intuitivamnte compreenderemos que à medida que a idade x aumenta *aproximar-se-á* a data da indemninazão da seguradora, pelo que será natural que o prémio escalonado seja crescente, por aumento do risco para a seguradora de ano para ano. De facto assim é, pode-se mostrar matematicamente. Pelo que quando pagamos o prémio nivelado estamos a pagar mais do que devíamos nos primeiros tempos e menos nos últimos. Ou seja a seguradora está a cobrar antecipadamente dinheiro a mais que deve guardar para utilizar nos ultimos períodos para compensar o dinheiro a menos que receberá. Sob pena de que quando chegar o momento da indemnização *não haja lá dinheiro no fundo*. São as Reservas Matemáticas. Os regulamentos da actividade seguradora em todos os países são muito cuidadosas na obrigação da constituição destas reservas. Claro que as companhias terão a possibilidade de aplicar financeiramente estes fundos até para benefício do cliente. Na realidade este dinheiro é dos segurados que desembolsaram a mais. No entanto são definidas regras para a sua aplicação. A companhia deverá ainda *existir* no futuro, na altura das suas obrigações contratuais que é o pagamento da indemnização. Se não o cliente só se fartou de pagar e não recebeu o serviço em troca. Este negócio é muitas vezes um serviço a longo prazo.

4. Técnicas Actuariais Não-Vida

A Teoria do Risco no colectivo considera como base de estudo uma carteira de seguros, um conjunto de apólices. Por exemplo, bastantes de nós já nos confrontámos com o seguro obrigatório de automóvel. Quando vamos fazer o seguro, perguntam-nos a faixa etária, a idade do veículo, a cilindrada. As apólices são agrupadas de acordo com certas características para tarifação. Novamente, o cálculo do prémio é fundamental. É uma quantia fixa, por período, para prover a acontecimentos aleatórios: as indemnizações. Aleatoriedade dois níveis; em primeiro é necessário ocorrerem indemnizações, podendo ser múltiplas, e no caso de ocorrerem será necessário quantificar o seu montante. Temos que, em cada período, consideramos um montante aleatório não negativo

$$\begin{aligned} S &= X_1 + X_2 + ... + X_N \\ &= 0 \text{ se } N = 0 \end{aligned}$$

onde N é o número de indemnizações da carteira e X_i é o montante individual da indemnização i. Assume-se que os montantes individuais são independentes e têm a mesma distribuição e são também independentes de N. No seguro automóvel acidentes em cadeia trazem problemas de não independência, mas há formas de contornar esta situação. Avaliamos probabilisticamnete S com o estudo da sua função de distribuição

$$\begin{aligned} G(x) &= \Pr(S \leq x) = \Pr(X_1 + X_2 + ... + X_N \leq x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(S \leq x \text{ e } N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(S \leq x | N = n) \Pr(N = n) \end{aligned}$$

$G(x)$ tem média $E(S) = E(X)E(N)$ e variância $V(X) = E(N)V(X)+V(N)E(X)^2$. Uma vez conhecidas ou estimadas as distribuições de N e X, a distribuição de S é obtida por aproximação, em geral.

É normal considerarmos a distribuição de Poisson para N, com função de probabilidade

$$\Pr(N = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!},\ n = 0, 1, 2... \text{ e } \lambda > 0$$

Em muitos casos a escolha da distribuição de Poisson é discutível, mas é muito conveniente do ponto de vista matemático. A distribuição de S chama-se então Poisson composta. Para a distribuição comum dos montantes individuais X, que designamos por $F(x)$, distribuições como a Exponencial, Gama, Lognormal, Pareto são escolhas a considerar. As distribuições Lognormal e de Pareto são distribuições a considerar para riscos *perigosos* por terem uma cauda muito longa (seguros de incêndio industrial ou de intempéries naturais, por exemplo). São no entanto mais difíceis de trabalhar do ponto de vista matemático.

Relativamente à distribuição Poisson composta, poderia parecer que quando o parâmetro da Poisson fosse grande, a distribuição normal fosse facilmente uma boa aproximação (considerando o Teorema do Limite Central). Não é o caso em geral já que esta distribuição é simétria, e a convergência à normal parece ser lenta. A experiência mostra que a distribuição de S deverá ter uma assimetria positiva com algum significado.

Usa-se então uma modificação da distribuição Normal, criando-lhe artificialmente uma assimetria positiva. A distribuição resultante chama-se *Normal Power*. Outra distribuição que fornece uma razoável aproximação é a distribuição Gama deslocada. A escolha dos parâmetros é efectuada em função dos três primeiros momentos de S.

O Prémio a atribuir à carteira por unidade de tempo deve ser superior a $E(S)$. Prova-se matematicamente que, no caso contrário, a probabilidade de a carteira incorrer em ruína é igual a 1. A esperança matemática de S designa-se por prémio puro. A este deve-se juntar uma carga de segurança (positiva) para compensar desvios aleatórios do risco. Por exemplo, o Prémio P:

$$P = (1 + \alpha)E(S) \text{ com } \alpha > 0$$

em que α é a carga de segurança. Note-se que não estão aqui considerados quaisquer outras componentes de natureza administrativa. Esta forma de cálculo do prémio designa-se por princípio do valor esperado.

O Prémio puro para um determinado risco i componente da carteira pode ser estimado, por exemplo, pelo Prémio de Credibilidade que é uma média ponderada entre a média empírica global dos elementos da carteira e a média de indemnizações da apólice ou risco em causa:

$$P_i = z\,\overline{X}_i + (1-z)\,\overline{X}$$

O factor z designa-se por factor de credibilidade, um valor compreendido entre 0 e 1. Em princípio quanto maior for a informação disponível sobre a apólice em causa maior será o peso do factor de credibilidade.

Lembremo-nos por exemplo do prémio do nosso seguro automóvel. Quando fazemos um seguro pela primeira vez é-nos atribuído um prémio *indiferenciado*, como se nós nos comportassemos como a média dos indíviduos da carteira, do nosso grupo de tarifação. A companhia não tem nenhuma informação sobre o nosso comportamento. À medida que os anos decorrem, se não tivermos sinistros é-nos atribuído um *bonus*. Na realidade não é um bónus é apenas o reconhecimento de que nos portamos positivamente bem e que portanto não devemos ser tarifados da mesma forma que um segurado que mostra *apetência* pelo risco. Se tivermos sinistros o prémio é-nos agravado (*malus*) pelos motivos contrários. Não é uma penalização no verdadeiro sentido do termo.

Este sistema de *bonus-malus* por vezes cria distorções já que leva, por exemplo, a que indivíduos que não queiram ter o seu prémio agravado, não declarem sinistros até um certo montante, embora os tenham tido, não figurando portanto nas estatísticas. A diferenciação de prémios entre apólices duma mesma carteira é por princípio uma questão de justiça.

Em termos globais o modelo clássico de risco colectivo é um processo aleatório $\{U(t), t \geq 0\}$ cujo parâmetro é o tempo:

$$U(t) = u + P\,t - S(t)$$

em que $U(t)$ é a reserva de risco até ao instante t, $u = U(0) \geq 0$ é a reserva inicial, P é o prémio por unidade de tempo e $S(t)$ são as indemnizações agregadas até ao instante t. A reserva inicial pode ser encarada como um investimento inicial ou o estado do processo no instante já conhecido, tem um papel importante, já que para valores baixos de u a probabilidade de ruína eventual da carteira é alta, embora isto também dependa das carraterísticas de risco da carteira.

Este modelo é o modelo em tempo contínuo. Na prática trabalha-se muito o modelo correspondente em tempo discreto.

Para terminar referencio como uma boa leitura sobre Teoria do Risco a excelente monografia de Lourdes Centeno [1998] em edição recente e revista ou ainda a referência citada anteriormente como introdução.

5. Referências

Bowers, N.L.; Gerber, H.U.; Hickman, J.C.; Jones, D.L. e Nesbitt, C.J. [1986]. *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries, Itasca, Illinois.

Centeno, Lourdes [1998]. *Teoria do Risco.* Textos de apoio, CEMAPRE-ISEG, Lisboa.

Ogborn, M.E. [1956]. The professional name of actuary. *Journal of the Institute of Actuaries*, 82:361, 233-246.

Alfredo D Egídio dos Reis
Departamento de Matemática
Instituto Superior de Economia e Gestão
Rua do Quelhas 2
1200 Lisboa
alfredo@iseg.utl.pt
`http://www.iseg.utl.pt/~alfredo/`