

РЕГУЛЯРНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЯЗЫКОВ СЕТЕЙ ПЕТРИ В ЗАДАЧЕ О ПРОИЗВОДИТЕЛЕ И ПОТРЕБИТЕЛЕ

В.М. СТАТКЕВИЧ

Аннотация. Рассмотрены сеть Петри в задаче о производителе и потребителе (одной из классических задач синхронизации) с ограниченным буфером размера n и регулярные формальные языки L_n , которые она порождает. Для этих языков найдены регулярные выражения в рекурсивном виде, а в случаях ограниченного буфера размера от 1 до 3 — в виде явных формул. По графу достижимости построен конечный автомат, применен метод последовательного удаления вершин. Для высоты итерации (звездной высоты) указанных языков дана оценка сверху, а в случаях ограниченного буфера размера 1 и 2 найдены точные значения. Для указанных языков рассмотрены операции объединения, пересечения, замыкания Клини, конкатенации и разности. Для разности языков $L_n \setminus L_1$ построен конечный автомат и найдены регулярные выражения в рекурсивном виде, а для разности $L_2 \setminus L_1$ — в виде явной формулы.

Ключевые слова: сеть Петри, задача о производителе и потребителе, язык сети Петри, формальный язык, регулярный язык, конечный автомат, регулярное выражение, высота итерации (звездная высота).

ВВЕДЕНИЕ

Сети Петри являются удобным средством для моделирования различных процессов, систем и сетей [1–3]. Одной из классических задач синхронизации является задача о производителе и потребителе, предложенная Э. Дейкстрой [1]; существует несколько различных вариантов этой задачи.

Каждая сеть Петри может порождать язык. В работе [1] определены 12 классов языков и исследована их связь с формальными языками, определяемыми иерархией Хомского (теорию формальных языков см., например, в работах [4–7]).

В данной работе рассмотрены некоторые регулярные языки L -типа сетей Петри в задаче о производителе и потребителе с ограниченным буфером, соответствующие регулярные выражения найдены в рекурсивном виде, а в простейших случаях — в виде явных формул. В простейших случаях найдены высоты итерации рассмотренных языков, а в более сложных дана оценка сверху. Некоторые результаты были анонсированы в тезисах [8–9]. Для варианта задачи с неограниченным буфером и соответственно контекстно-свободного языка L -типа автомат с магазинной памятью приведен в тезисах [8], а более полные результаты подробно изложены в тезисах [10].

В работе [11] рассмотрены задачи управления и проектирования сложных систем и предложена теория дискретно-непрерывных сетей, примени-

мая в случаях, когда объект описывается дифференциальными уравнениями в непрерывном времени, а управление дискретно.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В задаче о производителе и потребителе процесс-производитель A производит объекты (фишки) и помещает их в буфер (позицию p_5), а процесс-потребитель B удаляет объект из буфера и использует его (рис. 1). Задача имеет следующие варианты [1, 3]:

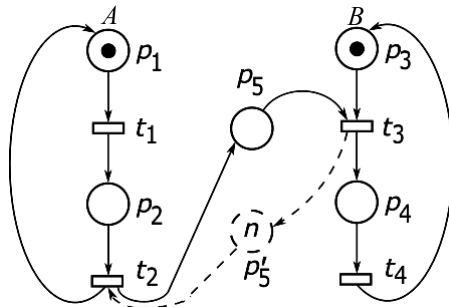


Рис. 1. Задача о производителе и потребителе

1) с неограниченным буфером; 2) с ограниченным буфером размера n , тогда вводится дополнительная позиция p'_5 , имеющая n фишек; 3) с несколькими производителями и несколькими потребителями, тогда в позициях p_1 и p_3 в начальной маркировке μ_0 имеются s и t фишек соответственно; 4) в системе с двумя производителями и двумя потребителями один из потребителей имеет приоритет перед другим; такая система реализуется при помощи ингибиторной дуги.

Пусть A — алфавит, A^* — множество слов, т.е. конечных цепочек символов из A . Формальным языком L над алфавитом A называют некоторое подмножество $L \subset A^*$ [4–7]. Каждому переходу из множества переходов T сопоставим символ алфавита A , $\sigma: T \rightarrow A$ — функция помечения. Подобным образом конечной последовательности переходов $w \in T^*$ сопоставляется слово $\sigma(w) \in A^*$. Пусть задано множество заключительных маркировок F . Языком сети Петри L -типа называют множество таких слов $\sigma(w)$, что маркировка сети Петри после запуска последовательности переходов w является заключительной [1]. В рассматриваемой задаче полагаем $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $\sigma(t_i) = a_i$, $i = 1, \dots, 4$ (таким образом, сеть является свободно помеченной [1]), $F = \{\mu_0\}$.

Множество регулярных выражений над алфавитом A определяется рекурсивно [4, 5, 7]: 1) 0, 1 и любой символ $a \in A$ являются регулярными выражениями; 2) если r и s являются регулярными выражениями, то $(r + s)$, $(r \cdot s)$ и r^* также являются регулярными выражениями; 3) иных регулярных выражений нет. Каждое регулярное выражение r задает язык $L[r] \subset A^*$, определяемый рекурсивно: 1) $L[0] = \emptyset$, $L[1] = \{\epsilon\}$, $L[a] = \{a\}$ для любого символа $a \in A$; 2) $L[r + s] = L[r] \cup L[s]$, $L[r \cdot s] = L[r] \cdot L[s]$, $L[r^*] = (L[r])^*$.

Высота итерации или звездная высота регулярного выражения $sh r$ определяется рекурсивно [5, 12]: 1) $sh 0 = sh a = 0$ для любого символа $a \in A$, $sh 1 = 1$; 2) $sh(r + s) = sh(r \cdot s) = \max(sh r, sh s)$; $sh(r^*) = 1 + sh r$. Высотой итерации регулярного языка L называется минимальная из высот итерации регулярных выражений, задающих язык L .

ЯЗЫКИ, ПОРОЖДАЕМЫЕ СЕТЬЮ С ОГРАНИЧЕННЫМ БУФЕРОМ

РАЗМЕРА n

Рассмотрим сеть Петри с ограниченным буфером размера n , изображенную на рис. 1. Граф достижимости сети, изображенный на рис. 2, имеет блочную структуру.

Порождаемый сетью язык L -типа обозначим L_n . По графу достижимости строим конечный автомат, допускающий язык L_n : вершинам графа (т.е. маркировка сети) сопоставляем состояния автомата, ребрам графа (т.е. переходам сети) — переходы автомата, начальной и заключительной маркировке $\mu_0 = (1,0,1,0,0,n)$ — начальное и допускающее состояние q_0 ($q_0 \in I, q_0 \in F$). Отметим, что подобный принцип построения конечного автомата по графу достижимости использовался в работе [13]. Построенный автомат в данном случае является детерминированным:

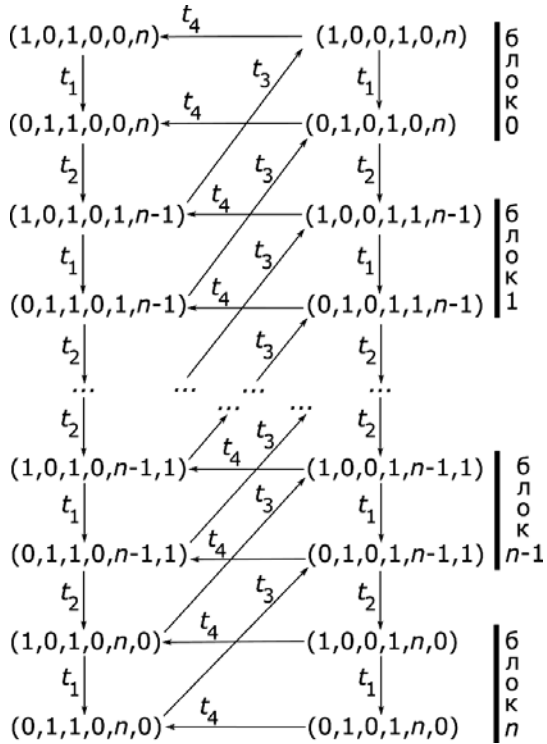


Рис. 2. Граф достижимости сети Петри

$$\langle \{q_0, \dots, q_{4n+3}\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta, \{q_0\}, \{q_0\} \rangle, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \Delta = & \{(q_i, a_1, q_{i+1}) : i \equiv 2, 0 \leq i \leq 4n+2\} \cup \{(q_i, a_2, q_{i+3}) : i \equiv 2, 1 \leq i \leq 4n-1\} \cup \\ & \cup \{(q_i, a_3, q_{i-2}) : i \bmod 4 \in \{0,1\}, 4 \leq i \leq 4n+1\} \cup \\ & \cup \{(q_i, a_4, q_{i-2}) : i \bmod 4 \in \{2,3\}, 2 \leq i \leq 4n+3\} \end{aligned} \tag{2}$$

(здесь и далее mod 4 означает остаток от деления на 4). Отметим, что в работе [14] представлен метод нахождения регулярного выражения для языка безопасной сети без полного построения графа достижимости, а в качестве примера рассмотрена задача о пяти обедающих мудрецах. Представленный метод основан на редукции сети Петри.

Пример 1. Пусть $n = 1$. Тогда конечный автомат (1), (2) принимает вид

$$\begin{aligned} M_1 = & \langle \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_1, \{q_0\}, \{q_0\} \rangle, \\ \Delta_1 = & \{(q_0, a_1, q_1), (q_2, a_1, q_3), (q_4, a_1, q_5), (q_6, a_1, q_7), (q_1, a_2, q_4), (q_3, a_2, q_6), \\ & (q_4, a_3, q_2), (q_5, a_3, q_3), (q_2, a_4, q_0), (q_3, a_4, q_1), (q_6, a_4, q_4), (q_7, a_4, q_5)\}. \end{aligned}$$

Регулярное выражение находим, удаляя по очереди состояния автомата M_1 ; подробно метод изложен, например, в работах [4, 5, 7]. Удаляя в каждом из двух блоков (рис. 2) левое нижнее и правое верхнее состояния, т.е. состояния q_1, q_2, q_5 и q_6 , получаем обобщенный автомат

$$M_2 = \langle \{q_0, q_3, q_4, q_7\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{(q_0, a_1 a_2, q_4), (q_4, a_3 a_4, q_0), (q_4, a_1 a_3 + a_3 a_1, q_3), (q_3, a_2 a_4 + a_4 a_2, q_4), (q_3, a_2 a_1, q_7), (q_7, a_4 a_3, q_3)\}, \{q_0\}, \{q_0\} \rangle.$$

Запишем $a_1 \parallel a_3 = a_1 a_3 + a_3 a_1$, $a_2 \parallel a_4 = a_2 a_4 + a_4 a_2$, используя оператор параллельной композиции « \parallel » [1, с. 165], а также последовательно удалим состояния q_7 и q_3 :

$$M_3 = \langle \{q_0, q_4\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{(q_0, a_1 a_2, q_4), (q_4, a_3 a_4, q_0), (q_4, (a_1 \parallel a_3)(a_2 a_1 a_4 a_3)^* (a_2 \parallel a_4), q_4)\}, \{q_0\}, \{q_0\} \rangle.$$

Следовательно, искомое регулярное выражение имеет вид

$$r_1 = [a_1 a_2 [(a_1 \parallel a_3)(a_2 a_1 a_4 a_3)^* (a_2 \parallel a_4)]^* a_3 a_4]^*,$$

его высота итерации $\text{sh } r_1 = 3$. Для нахождения высоты итерации языка L_1 в автомате M_2 последовательно удаляем состояния q_7 и q_4 :

$$M'_3 = \langle \{q_0, q_3\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{(q_0, a_1 a_2 a_3 a_4, q_0), (q_0, a_1 a_2 (a_1 \parallel a_3), q_3), (q_3, (a_2 \parallel a_4) a_3 a_4, q_0), (q_3, (a_2 \parallel a_4)(a_1 \parallel a_3) + a_2 a_1 a_4 a_3, q_3)\}, \{q_0\}, \{q_0\} \rangle.$$

Соответствующее регулярное выражение имеет вид

$$[a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 (a_1 \parallel a_3) [(a_2 \parallel a_4)(a_1 \parallel a_3) + a_2 a_1 a_4 a_3]^* (a_2 \parallel a_4) a_3 a_4]^*,$$

потому высота итерации языка $\text{sh } L_1 = 2$.

Пример 2. Пусть $n = 2$. Тогда конечный автомат (1), (2) принимает вид

$$M_1 = \langle \{q_0, \dots, q_{11}\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_1, \{q_0\}, \{q_0\} \rangle,$$

$$\Delta_1 = \{(q_i, a_1, q_{i+1}) : i = 0, 2, 4, 6, 8, 10\} \cup \{(q_i, a_2, q_{i+3}) : i = 1, 3, 5, 7\} \cup$$

$$\cup \{(q_i, a_3, q_{i-2}) : i = 4, 5, 8, 9\} \cup \{(q_i, a_4, q_{i-2}) : i = 2, 3, 6, 7, 10, 11\}.$$

Как и в примере 1, удалением в каждом из трех блоков левого нижнего и правого верхнего состояний, т.е. состояний q_1, q_2, q_5, q_6, q_9 и q_{10} , получаем обобщенный автомат

$$M_2 = \langle \{q_0, q_3, q_4, q_7, q_8, q_{11}\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_2, \{q_0\}, \{q_0\} \rangle,$$

$$\Delta_2 = \{(q_0, a_1 a_2, q_4), (q_4, a_1 a_2, q_8), (q_4, a_3 a_4, q_0), (q_8, a_3 a_4, q_4),$$

$$(q_3, a_2 a_1, q_7), (q_7, a_2 a_1, q_{11}), (q_7, a_4 a_3, q_3), (q_{11}, a_4 a_3, q_7),$$

$$(q_4, a_1 \parallel a_3, q_3), (q_8, a_1 \parallel a_3, q_7), (q_3, a_2 \parallel a_4, q_4), (q_7, a_2 \parallel a_4, q_8)\}.$$

Последовательно удаляем состояния q_{11} , q_8 и q_3 :

$$M_3 = \langle \{q_0, q_4, q_7\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_3, \{q_0\}, \{q_0\} \rangle,$$

$$\Delta_3 = \{(q_0, a_1 a_2, q_4), (q_4, a_3 a_4, q_0), (q_4, a_1 a_2 a_3 a_4 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 \parallel a_4), q_4),$$

$$(q_4, a_1 a_2 (a_1 \parallel a_3) + (a_1 \parallel a_3) a_2 a_1, q_7), (q_7, a_4 a_3 (a_2 \parallel a_4) + (a_2 \parallel a_4) a_3 a_4, q_4),$$

$$(q_7, (a_2 \parallel a_4)(a_1 \parallel a_3) + a_2 a_1 a_4 a_3 + a_4 a_3 a_2 a_1, q_7)\}.$$

Удаляя состояние q_7 , а затем q_4 , получаем искомое регулярное выражение

$$r_2 = [a_1 a_2 [a_1 a_2 a_3 a_4 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 \parallel a_4) + (a_1 a_2 (a_1 \parallel a_3) + (a_1 \parallel a_3) a_2 a_1) \cdot \\ \cdot [(a_2 \parallel a_4)(a_1 \parallel a_3) + a_2 a_1 a_4 a_3 + a_4 a_3 a_2 a_1]^* (a_4 a_3 (a_2 \parallel a_4) + \\ + (a_2 \parallel a_4) a_3 a_4)]^* a_3 a_4]^*,$$

высота итерации которого $\text{sh } r_2 = 3$. Однако высота итерации языка $\text{sh } L_2 = 2$; в этом убеждаемся, заменяя автомат M_3 на эквивалентный с эпсилон-переходом

$$M'_3 = \langle \{q_0, q'_0, q_4, q_7\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta'_3, \{q_0\}, \{q'_0\} \rangle,$$

$$\Delta'_3 = (\Delta_3 \setminus \{(q_4, a_3 a_4, q_0)\}) \cup \{(q_4, a_3 a_4 a_1 a_2, q_4), (q_0, 1, q'_0), (q_4, a_3 a_4, q'_0)\}$$

и последовательным удалением состояний q_7 и q_4 , получая регулярное выражение

$$r'_2 = 1 + a_1 a_2 [a_1 a_2 a_3 a_4 + a_3 a_4 a_1 a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 \parallel a_4) + (a_1 a_2 (a_1 \parallel a_3) + \\ + (a_1 \parallel a_3) a_2 a_1) [(a_2 \parallel a_4)(a_1 \parallel a_3) + a_2 a_1 a_4 a_3 + \\ + a_4 a_3 a_2 a_1]^* (a_4 a_3 (a_2 \parallel a_4) + (a_2 \parallel a_4) a_3 a_4)]^* a_3 a_4$$

высоты итерации $\text{sh } r'_2 = 2$. Подобное преобразование автомата для уменьшения высоты итерации регулярного выражения приведено, например, в работах [5, упр. 5.4.10] и [12, с. 36].

Пример 3. Пусть $n = 3$. Удаляя в автомате (1), (2) в каждом из четырех блоков (рис. 2) левое нижнее и правое верхнее состояния, получаем обобщенный автомат

$$M_1 = \langle \{q_0, q_3, q_4, q_7, q_8, q_{11}, q_{12}, q_{15}\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_1, \{q_0\}, \{q_0\} \rangle,$$

$$\Delta_1 = \{(q_i, a_1 a_2, q_{i+4}) : i = 0, 4, 8\} \cup \{(q_{i+4}, a_3 a_4, q_i) : i = 0, 4, 8\} \cup$$

$$\cup \{(q_i, a_2 a_1, q_{i+4}) : i = 3, 7, 11\} \cup \{(q_{i+4}, a_4 a_3, q_i) : i = 3, 7, 11\} \cup$$

$$\cup \{(q_i, a_1 \parallel a_3, q_{i-1}) : i = 4, 8, 12\} \cup \{(q_{i-1}, a_2 \parallel a_4, q_i) : i = 4, 8, 12\}.$$

Обозначаем $e_1 = a_1 a_2$, $e_2 = a_3 a_4$, $e_3 = a_1 \parallel a_3$, $e_4 = a_2 \parallel a_4$ и последовательно удаляем состояния q_{15} , q_{12} и q_{11} :

$$M_2 = \langle \{q_0, q_3, q_4, q_7, q_8\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_2, \{q_0\}, \{q_0\} \rangle,$$

$$\Delta_2 = \{(q_0, e_1, q_4), (q_4, e_1, q_8), (q_4, e_2, q_0), (q_8, e_2, q_4),$$

$$(q_3, e_1^R, q_7), (q_7, e_2^R, q_3), (q_4, e_3, q_3), (q_3, e_4, q_4),$$

$$(q_8, e_1 e_2 + e_1 e_3 (e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_4 e_2, q_8), (q_7, e_1^R (e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_2^R, q_7),$$

$$(q_8, e_3 + e_1 e_3 (e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_2^R, q_7), (q_7, e_4 + e_1^R (e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_4 e_2, q_8)\}$$

(здесь и далее w^R — обращение или зеркальный образ слова w [4, 5, 7]). Отметим, что удаление состояния q_{15} добавляет лишь петлю $(q_{11}, e_1^R e_2^R, q_{11})$, не изменяя другие переходы автомата; удаление состояний q_{12} и q_{11} добавляет лишь петли у состояний q_7 и q_8 и усложняет переходы из q_7 в q_8 и обратно, также не изменяя другие переходы автомата. Удаляем последовательно состояния q_8 и q_3 :

$$M_3 = \langle \{q_0, q_4, q_7\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_3, \{q_0\}, \{q_0\} \rangle,$$

$$\Delta_3 = \{(q_0, e_1, q_4), (q_4, e_2, q_0), (q_4, e_3 e_4 + e_1 (e_1 e_2 + e_1 e_3 (e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_4 e_2)^* e_2, q_4),$$

$$(q_4, e_3 e_1^R + e_1 (e_1 e_2 + e_1 e_3 (e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_4 e_2)^* (e_3 + e_1 e_3 (e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_2^R), q_7),$$

$$(q_7, e_2^R e_4 + (e_4 + e_1^R (e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_4 e_2) (e_1 e_2 + e_1 e_3 (e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_4 e_2)^* e_2, q_4),$$

$$(q_7, (e_4 + e_1^R (e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_4 e_2) (e_1 e_2 + e_1 e_3 (e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_4 e_2)^* \cdot$$

$$\cdot (e_3 + e_1 e_3 (e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_2^R) + e_1^R (e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_2^R + e_2^R e_1^R, q_7)\}.$$

Удаляя состояние q_7 , а затем q_4 , получаем искомое регулярное выражение

$$\begin{aligned} r_3 = & [e_1 [e_3 e_4 + e_1 (e_1 e_2 + e_1 e_3 (e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_4 e_2)^* e_2 + \\ & + [e_3 e_1^R + e_1 (e_1 e_2 + e_1 e_3 (e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_4 e_2)^* (e_3 + e_1 e_3 (e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_2^R)]] \cdot \\ & \cdot [(e_4 + e_1^R (e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_4 e_2) (e_1 e_2 + e_1 e_3 (e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_4 e_2)^* \cdot \\ & \cdot (e_3 + e_1 e_3 (e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_2^R) + e_1^R (e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_2^R + e_2^R e_1^R]^* \cdot \\ & \cdot [e_2^R e_4 + (e_4 + e_1^R (e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_4 e_2) (e_1 e_2 + e_1 e_3 (e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_4 e_2)^* e_2]^* e_2]^* \end{aligned}$$

высотой итерации $\text{sh } r_3 = 5$. Заменой же автомата M_3 на эквивалентный с эпсилон-переходом (см. пример 2)

$$M'_3 = \langle \{q_0, q'_0, q_4, q_7\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta'_3, \{q_0\}, \{q'_0\} \rangle,$$

$$\Delta'_3 = (\Delta_3 \setminus \{(q_4, e_2, q_0)\}) \cup \{(q_4, e_2 e_1, q_4), (q_0, 1, q'_0), (q_4, e_2, q'_0)\}$$

и последовательным удалением состояний q_7 и q_4 получаем регулярное выражение

$$\begin{aligned} r'_3 = & 1 + e_1[e_2 e_1 + e_3 e_4 + e_1(e_1 e_2 + e_1 e_3(e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_4 e_2)^* e_2 + \\ & + [e_3 e_1^R + e_1(e_1 e_2 + e_1 e_3(e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_4 e_2)^* (e_3 + e_1 e_3(e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_2^R)] \cdot \\ & \cdot [(e_4 + e_1^R(e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_4 e_2)(e_1 e_2 + e_1 e_3(e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_4 e_2)^* \cdot \\ & \cdot (e_3 + e_1 e_3(e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_2^R) + e_1^R(e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_2^R + e_2^R e_1^R]^* \cdot \\ & \cdot [e_2^R e_4 + (e_4 + e_1^R(e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_4 e_2)(e_1 e_2 + e_1 e_3(e_1^R e_2^R + e_4 e_3)^* e_4 e_2)^* e_2]^* e_2 \end{aligned}$$

высотой итерации $\text{sh } r'_3 = 4$. Следовательно, $\text{sh } L_3 \leq 4$, однако существует (см. далее замечание 1 и оценку (17)) более точная оценка $\text{sh } L_3 \leq 3$, на основании которой с учетом очевидного вложения $L_2 \subset L_3$ и равенства $\text{sh } L_2 = 2$ (см. пример 2) автор выдвигает следующую гипотезу.

Гипотеза. $\text{sh } L_3 = 3$.

В общем случае регулярное выражение для L_n имеет следующий рекурсивный вид.

Теорема 1. Язык L_n имеет вид

$$L_n = L[(a_1 a_2 (s_{n-1} + r_{n-1} t_{n-1}^* l_{n-1})^* a_3 a_4)^*] = \quad (3)$$

$$= L[1 + a_1 a_2 (a_3 a_4 a_1 a_2 + s_{n-1} + r_{n-1} t_{n-1}^* l_{n-1})^* a_3 a_4], \quad (4)$$

где регулярные выражения s_{n-1} , l_{n-1} , t_{n-1} и r_{n-1} определены рекурсивно:

$$s_0 = 0, \quad l_0 = a_2 \parallel a_4, \quad t_0 = a_2 a_1 a_4 a_3, \quad r_0 = a_1 \parallel a_3, \quad (5)$$

$$s_{k+1} = a_1 a_2 s_k^* a_3 a_4 + a_1 a_2 s_k^* r_k (t_k + l_k s_k^* r_k)^* l_k s_k^* a_3 a_4, \quad (6)$$

$$t_{k+1} = a_2 a_1 (t_k + l_k s_k^* r_k)^* a_4 a_3, \quad (7)$$

$$l_{k+1} = (a_2 \parallel a_4) + a_2 a_1 (t_k + l_k s_k^* r_k)^* l_k s_k^* a_3 a_4, \quad (8)$$

$$r_{k+1} = (a_1 \parallel a_3) + a_1 a_2 s_k^* r_k (t_k + l_k s_k^* r_k)^* a_4 a_3 \quad (9)$$

(здесь $k = 0, \dots, n-2$).

Доказательство. Рассмотрим автомат (1), (2). Аналогично примерам 1–3 удалением в каждом из $n + 1$ блоков рис. 2 левого нижнего и правого верхнего состояний (т.е. состояний q_i , $i \bmod 4 \in \{1, 2\}$, $1 \leq i \leq 4n + 2$) получаем обобщенный автомат

$$M_1 = \langle \{q_0, q_3, q_4, q_7, \dots, q_{4n}, q_{4n+3}\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_1, \{q_0\}, \{q_0\} \rangle,$$

$$\Delta_1 = \{(q_i, a_1 a_2, q_{i+4}) : i = 0, 4, \dots, 4n - 4\} \cup \{(q_{i+4}, a_3 a_4, q_i) : i = 0, 4, \dots, 4n - 4\} \cup$$

$$\cup \{(q_i, a_2 a_1, q_{i+4}) : i = 3, 7, \dots, 4n - 1\} \cup \{(q_{i+4}, a_4 a_3, q_i) : i = 3, 7, \dots, 4n - 1\} \cup$$

$$\cup \{(q_i, a_1 \parallel a_3, q_{i-1}) : i = 4, 8, \dots, 4n\} \cup \{(q_{i-1}, a_2 \parallel a_4, q_i) : i = 4, 8, \dots, 4n\}.$$

Удаляем состояние q_{4n+3} , тем самым добавляя петлю $(q_{4n-1}, a_2 a_1 a_4 a_3, q_{4n-1})$, добавляем петлю $(q_{4n}, 0, q_{4n})$ и вводим обозначения (5). Множеству переходов полученного автомата принадлежат, в том числе, переходы

$$(q_{4n-4}, a_1 a_2, q_{4n}), (q_{4n}, a_3 a_4, q_{4n-4}), (q_{4n}, s_0, q_{4n}),$$

$$(q_{4n}, r_0, q_{4n-1}), (q_{4n-1}, l_0, q_{4n}), \quad (10)$$

$$(q_{4n-5}, a_2 a_1, q_{4n-1}), (q_{4n-1}, a_4 a_3, q_{4n-5}), (q_{4n-1}, t_0, q_{4n-1}). \quad (11)$$

Удаляем состояние q_{4n} . Тогда из множества переходов удаляются переходы (10), а добавляются переходы

$$(q_{4n-4}, a_1 a_2 s_0^* a_3 a_4, q_{4n-4}), (q_{4n-4}, a_1 a_2 s_0^* r_0, q_{4n-1}),$$

$$(q_{4n-1}, l_0 s_0^* a_3 a_4, q_{4n-4}), (q_{4n-1}, l_0 s_0^* r_0, q_{4n-1}); \quad (12)$$

объединение двух параллельных петель — третьего перехода из формулы (11) и четвертого перехода из формулы (12) — дает петлю $(q_{4n-1}, t_0 + l_0 s_0^* r_0, q_{4n-1})$. Аналогичными рассуждениями удаление состояния q_{4n-1} , объединение параллельных переходов и введение регулярных выражений s_1 , t_1 , l_1 и r_1 согласно формулам (6)–(9) приводит к добавлению переходов

$$(q_{4n-4}, s_1, q_{4n-4}), (q_{4n-5}, t_1, q_{4n-5}), (q_{4n-4}, r_1, q_{4n-5}), (q_{4n-5}, l_1, q_{4n-4}).$$

Выполняя далее подобную процедуру, т.е. удаляя состояния в порядке q_{4n-4} , q_{4n-5} , ..., q_7 , получаем рекурсивные формулы (6)–(9) и автомат

$$M_2 = \langle \{q_0, q_3, q_4\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{(q_0, a_1 a_2, q_4), (q_4, a_3 a_4, q_0),$$

$$(q_4, s_{n-1}, q_4), (q_3, t_{n-1}, q_3), (q_4, r_{n-1}, q_3), (q_3, l_{n-1}, q_4)\}, \{q_0\}, \{q_0\} \rangle.$$

Удаляя состояние q_3 , а затем q_4 , получаем регулярное выражение, доказывающее формулу (3). Заменой же автомата M_2 на эквивалентный с эпсилон-переходом (см. примеры 2, 3)

$$M'_2 = \langle \{q_0, q'_0, q_3, q_4\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \{(q_0, a_1 a_2, q_4), (q_4, a_3 a_4, q'_0), (q_0, 1, q'_0),$$

$$(q_4, a_3 a_4 a_1 a_2 + s_{n-1}, q_4), (q_3, t_{n-1}, q_3), (q_4, r_{n-1}, q_3), (q_3, l_{n-1}, q_4), \{q_0\}, \{q'_0\}$$

и последовательным удалением состояний q_3 и q_4 получаем регулярное выражение, доказывающее формулу (4). Теорема доказана.

Следствие 1. Удаление состояний автомата M_1 теоремы 1 в ином порядке $q_{4n+3}, q_{4n-1}, q_{4n}, q_{4n-5}, q_{4n-4}, \dots, q_8$ приводит к эквивалентным рекурсивным формулам:

$$\hat{s}_0 = s_0 = 0, \hat{l}_0 = l_0 = a_2 \parallel a_4, \hat{t}_0 = t_0 = a_2 a_1 a_4 a_3, \hat{r}_0 = r_0 = a_1 \parallel a_3,$$

$$\hat{s}_{k+1} = a_1 a_2 (\hat{s}_k + \hat{r}_k \hat{t}_k^* \hat{l}_k)^* a_3 a_4, \quad (13)$$

$$\hat{t}_{k+1} = a_2 a_1 \hat{t}_k^* a_4 a_3 + a_2 a_1 \hat{t}_k^* \hat{l}_k (\hat{s}_k + \hat{r}_k \hat{t}_k^* \hat{l}_k)^* \hat{r}_k \hat{t}_k^* a_4 a_3, \quad (14)$$

$$\hat{l}_{k+1} = (a_2 \parallel a_4) + a_2 a_1 \hat{t}_k^* \hat{l}_k (\hat{s}_k + \hat{r}_k \hat{t}_k^* \hat{l}_k)^* a_3 a_4, \quad (15)$$

$$\hat{r}_{k+1} = (a_1 \parallel a_3) + a_1 a_2 (\hat{s}_k + \hat{r}_k \hat{t}_k^* \hat{l}_k)^* \hat{r}_k \hat{t}_k^* a_4 a_3 \quad (16)$$

($k = 0, \dots, n-2$) при сохранении формул (3)–(5), т.е.

$$\begin{aligned} L_n &= L[(a_1 a_2 (\hat{s}_{n-1} + \hat{r}_{n-1} \hat{t}_{n-1}^* \hat{l}_{n-1})^* a_3 a_4)^*] = \\ &= L[1 + a_1 a_2 (a_3 a_4 a_1 a_2 + \hat{s}_{n-1} + \hat{r}_{n-1} \hat{t}_{n-1}^* \hat{l}_{n-1})^* a_3 a_4]. \end{aligned}$$

Следствие 2. Удаление состояний $q_{4n+3}, q_{4n}, q_{4n-1}, q_{4n-4}, q_{4n-5}, \dots, q_{12}, q_{11}$ автомата M_1 теоремы 1 с последующей заменой автомата на эквивалентный с эпсилон-переходом (см. примеры 2, 3) приводит к автомату

$$M_2'' = \langle \{q_0, q'_0, q_3, q_4, q_7, q_8\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_2'', \{q_0\}, \{q'_0\} \rangle,$$

$$\Delta_2'' = \{(q_0, a_1 a_2, q_4), (q_4, a_1 a_2, q_8), (q_4, a_3 a_4, q'_0), (q_8, a_3 a_4, q_4), (q_0, 1, q'_0),$$

$$(q_3, a_2 a_1, q_7), (q_7, a_4 a_3, q_3), (q_4, a_1 \parallel a_3, q_3), (q_3, a_2 \parallel a_4, q_4), (q_4, a_3 a_4 a_1 a_2, q_4),$$

$$(q_8, s_{n-2}, q_8), (q_7, t_{n-2}, q_7), (q_8, r_{n-2}, q_7), (q_7, l_{n-2}, q_8)\};$$

дальнейшим удалением состояний q_3 и q_4 получаем автомат

$$M_3 = \langle \{q_0, q'_0, q_7, q_8\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_3, \{q_0\}, \{q'_0\} \rangle,$$

$$\Delta_3 = \{(q_0, 1 + a_1 a_2 (a_3 a_4 a_1 a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 \parallel a_4))^* a_3 a_4 = e_1, q'_0),$$

$$(q_0, a_1 a_2 (a_3 a_4 a_1 a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 \parallel a_4))^* (a_1 \parallel a_3) a_2 a_1 = e_2, q_7),$$

$$(q_0, a_1 a_2 (a_3 a_4 a_1 a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 \parallel a_4))^* a_1 a_2 = e_3, q_8),$$

$$(q_7, a_4 a_3 (a_2 \parallel a_4)(a_3 a_4 a_1 a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 \parallel a_4))^* a_3 a_4 = e_4, q'_0),$$

$$(q_7, t_{n-2} + a_4 a_3 a_2 a_1 + a_4 a_3 (a_2 \parallel a_4)(a_3 a_4 a_1 a_2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + (a_1 \parallel a_3)(a_2 \parallel a_4))^* (a_1 \parallel a_3)a_2a_1 = e_5, q_7), \\
 & (q_7, l_{n-2} + a_4a_3(a_2 \parallel a_4)(a_3a_4a_1a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 \parallel a_4))^* a_1a_2 = e_6, q_8), \\
 & (q_8, a_3a_4(a_3a_4a_1a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 \parallel a_4))^* a_3a_4 = e_7, q'_0), \\
 & (q_8, r_{n-2} + a_3a_4(a_3a_4a_1a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 \parallel a_4))^* (a_1 \parallel a_3)a_2a_1 = e_8, q_7), \\
 & (q_8, s_{n-2} + a_3a_4(a_3a_4a_1a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 \parallel a_4))^* a_1a_2 = e_9, q_8)\}
 \end{aligned}$$

и соответствующее ему регулярное выражение

$$e_1 + e_2e_5^*e_4 + (e_3 + e_2e_5^*e_6)(e_9 + e_8e_5^*e_6)^*(e_7 + e_8e_5^*e_4).$$

Замечание 1. Оценим высоту итерации языка L_n . Поскольку $s_0 = 0$ согласно формуле (5), регулярные выражения (6)–(9) для случая $k = 0$ представимы в виде

$$\begin{aligned}
 s'_1 &= a_1a_2a_3a_4 + a_1a_2r_0(t_0 + l_0r_0)^* l_0a_3a_4, \\
 t'_1 &= a_2a_1(t_0 + l_0r_0)^* a_4a_3, \\
 l'_1 &= (a_2 \parallel a_4) + a_2a_1(t_0 + l_0r_0)^* l_0a_3a_4, \\
 r'_1 &= (a_1 \parallel a_3) + a_1a_2r_0(t_0 + l_0r_0)^* a_4a_3.
 \end{aligned}$$

Следовательно, $\text{sh } s'_1 = \text{sh } t'_1 = \text{sh } l'_1 = \text{sh } r'_1 = 1$, а из формул (6)–(9) и следствия 2 получаем

$$\begin{aligned}
 \text{sh } s_k &= \text{sh } t_k = \text{sh } l_k = \text{sh } r_k = 2k - 1 \quad (k \geq 1), \\
 \text{sh } e_1 &= \text{sh } e_2 = \text{sh } e_3 = \text{sh } e_4 = \text{sh } e_7 = 1, \\
 \text{sh } e_5 &= \text{sh } e_6 = \text{sh } e_8 = \text{sh } e_9 = 2n - 5,
 \end{aligned}$$

$$\text{sh } L_n \leq 2n - 3 \quad (n \geq 3). \tag{17}$$

Отметим, что ни формула (4) не улучшает полученную оценку (17), поскольку $\text{sh } s_{n-1} = \text{sh } t_{n-1} = \text{sh } l_{n-1} = \text{sh } r_{n-1} = 2n - 3$, $\text{sh } L_n \leq 2n - 1$, ни формулы (13)–(16), поскольку

$$\begin{aligned}
 \text{sh } \hat{s}_1 &= \text{sh } \hat{t}_1 = \text{sh } \hat{l}_1 = \text{sh } \hat{r}_1 = 2, \\
 \text{sh } \hat{s}_{n-1} &= \text{sh } \hat{t}_{n-1} = \text{sh } \hat{l}_{n-1} = \text{sh } \hat{r}_{n-1} = 2n - 2,
 \end{aligned}$$

$\text{sh } L_n \leq 2n$. В случаях $n = 1$ и $n = 2$ высота итерации языка $\text{sh } L_1 = \text{sh } L_2 = 2$ (см. примеры 1, 2), в случае $n = 3$ $\text{sh } L_3 \leq 3$ (см. пример 3). Вопрос улучшения оценки (17), равно как и вопрос нахождения $\text{sh } L_n$, для случаев $n \geq 3$ на данный момент остается для автора открытым.

НЕКОТОРЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ФОРМАЛЬНЫМИ ЯЗЫКАМИ L_n

Для двух языков L_n и L_m ($n > m$) выполняется очевидное вложение $L_n \supset L_m$, потому что $L_n \cup L_m = L_n$, $L_n \cap L_m = L_m$. Из формулы (3) следует равенство $(L_n)^* = L_n$.

Для конкатенации выполняется равенство $L_n L_m = L_m L_n = L_n$. Действительно, для $w \in L_n$ ввиду принадлежности $\varepsilon \in L_m$ для произвольного m имеем $w = w \cdot \varepsilon \in L_n L_m$, откуда следует вложение $L_n \subset L_n L_m$. Докажем обратное вложение. Пусть $w = w_1 w_2 \in L_n L_m$, где $w_1 \in L_n$, $w_2 \in L_m$. Сеть Петри с ограниченным буфером размера n , порождающая слово w_1 , может породить и слово w_2 , поскольку для его порождения требуется меньший буфер размера $m < n$. Потому она может породить и слово $w = w_1 w_2$, т.е. $w \in L_n$, $L_n L_m \subset L_n$. Равенство $L_m L_n = L_n$ доказывается аналогично.

Рассмотрим разность языков L_n и L_m для $n > m$. Язык $L_n \setminus L_m = L_n \cap \overline{L_m}$ регулярен, как пересечение регулярного языка L_n с регулярным языком $\overline{L_m}$ — дополнением к регулярному языку L_m (свойства замкнутости регулярных языков см., например, [4, 5, 7]).

Пример 4. Рассмотрим язык $L_2 \setminus L_1$. Построим конечный автомат M_1 , допускающий данный язык, согласно следующему принципу. Буфер (позиция p_5) имеет ограниченный размер 2 и буфер хотя бы в один момент времени содержит две фишки. Пусть t_0 — момент времени, когда впервые выполнилось условие $\mu(p_5) = 2$. До момента t_0 (формальнее: до соответствующего такта) M_1 функционирует как автомат M_1 примера 1, допускающий язык L_1 ; с момента t_0 — как автомат M_1 примера 2, допускающий язык L_2 . Автомат M_1 имеет вид, указанный на рис. 3:

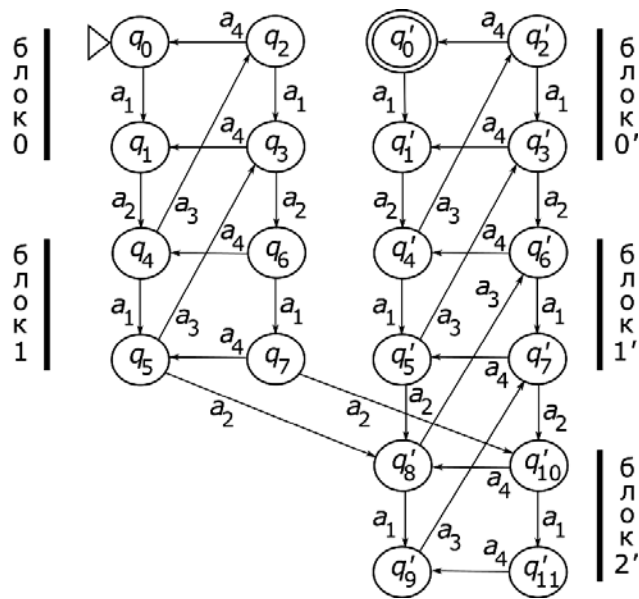


Рис. 3. Автомат, допускающий язык $L_2 \setminus L_1$

$$M_1 = \langle \{q_0, \dots, q_7\} \cup \{q'_0, \dots, q'_{11}\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta'_1 \cup \Delta''_1 \cup \Delta'''_1, \{q_0\}, \{q'_0\} \rangle,$$

$$\Delta'_1 = \{(q_0, a_1, q_1), (q_2, a_1, q_3), (q_4, a_1, q_5), (q_6, a_1, q_7), (q_1, a_2, q_4), (q_3, a_2, q_6),$$

$$(q_4, a_3, q_2), (q_5, a_3, q_3), (q_2, a_4, q_0), (q_3, a_4, q_1), (q_6, a_4, q_4), (q_7, a_4, q_5)\}, (18)$$

$$\Delta_1'' = \{(q_5, a_2, q_8'), (q_7, a_2, q_{10}')\}, (19)$$

$$\Delta_1''' = \{(q'_i, a_1, q'_{i+1}) : i = 0, 2, 4, 6, 8, 10\} \cup \{(q'_i, a_2, q'_{i+3}) : i = 1, 3, 5, 7\} \cup \\ \cup \{(q'_i, a_3, q'_{i-2}) : i = 4, 5, 8, 9\} \cup \{(q'_i, a_4, q'_{i-2}) : i = 2, 3, 6, 7, 10, 11\}.$$

В построенном автомате состояния q_0, \dots, q_7 и переходы из множества Δ_1' соответствуют автомату M_1 примера 1, состояния q'_0, \dots, q'_{11} и переходы из множества Δ_1''' — автомату M_1 примера 2, переходы из множества Δ_1'' «связывают» две различные части. Построенный автомат является детерминированным.

Регулярное выражение находим следующим образом. В каждом из пяти блоков (двух блоков в левой колонке рис. 3 и трех в правой) удаляем левое нижнее и правое верхнее состояния аналогично примеру 2, т.е. состояния $q_1, q_2, q_5, q_6, q'_1, q'_2, q'_5, q'_6, q'_9$ и q'_{10} :

$$M_2 = \langle \{q_0, q_3, q_4, q_7, q'_0, q'_3, q'_4, q'_7, q'_8, q'_{11}\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_2' \cup \\ \cup \Delta_2'' \cup \Delta_2''', \{q_0\}, \{q'_0\} \rangle,$$

$$\Delta_2' = \{(q_0, a_1 a_2, q_4), (q_4, a_3 a_4, q_0), (q_4, a_1 \parallel a_3, q_3), \\ (q_3, a_2 \parallel a_4, q_4), (q_3, a_2 a_1, q_7), (q_7, a_4 a_3, q_3)\}, (20)$$

$$\Delta_2'' = \{(q_4, a_1 a_2, q'_8), (q_7, a_2 a_1, q'_{11}), (q_7, a_2 \parallel a_4, q'_8)\}, (21)$$

$$\Delta_2''' = \{(q'_0, a_1 a_2, q'_4), (q'_4, a_1 a_2, q'_8), (q'_4, a_3 a_4, q'_0), (q'_8, a_3 a_4, q'_4), \\ (q'_3, a_2 a_1, q'_7), (q'_7, a_2 a_1, q'_{11}), (q'_7, a_4 a_3, q'_3), (q'_{11}, a_4 a_3, q'_7), \\ (q'_4, a_1 \parallel a_3, q'_3), (q'_8, a_1 \parallel a_3, q'_7), (q'_3, a_2 \parallel a_4, q'_4), (q'_7, a_2 \parallel a_4, q'_8)\}.$$

Заменяем автомат M_2 на эквивалентный, удаляя переходы $(q_4, a_3 a_4, q_0)$, $(q'_0, a_1 a_2, q'_4)$ и добавляя петли $(q_4, a_3 a_4 a_1 a_2, q_4)$, $(q'_4, a_3 a_4 a_1 a_2, q'_4)$. Последовательно удаляем состояния q'_{11} , q_3 и q'_3 , а также учитываем формулы (5):

$$M_3 = \langle \{q_0, q_4, q_7, q'_0, q'_4, q'_7, q'_8\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_3' \cup \Delta_3'' \cup \Delta_3''', \{q_0\}, \{q'_0\} \rangle,$$

$$\Delta_3' = \{(q_0, a_1 a_2, q_4), (q_4, a_3 a_4 a_1 a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 \parallel a_4), q_4),$$

$$(q_4, (a_1 \parallel a_3) a_2 a_1, q_7), (q_7, a_4 a_3 (a_2 \parallel a_4), q_4), (q_7, a_4 a_3 a_2 a_1, q_7)\},$$

$$\Delta_3'' = \{(q_4, a_1 a_2, q'_8), (q_7, a_2 a_1 a_4 a_3 = t_0, q'_7), (q_7, a_2 \parallel a_4 = l_0, q'_8)\},$$

$$\Delta_3''' = \{(q'_4, a_3 a_4, q'_0), (q'_4, a_3 a_4 a_1 a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 \parallel a_4), q'_4), (q'_4, (a_1 \parallel a_3) a_2 a_1, q'_7),$$

$$(q'_7, a_4 a_3 (a_2 \parallel a_4), q'_4), (q'_7, a_2 a_1 a_4 a_3 + a_4 a_3 a_2 a_1 = t_0 + a_4 a_3 a_2 a_1, q'_7),$$

$$(q'_4, a_1 a_2, q'_8), (q'_8, a_3 a_4, q'_4), (q'_8, a_1 \parallel a_3 = r_0, q'_7), (q'_7, a_2 \parallel a_4 = l_0, q'_8)\}. \quad (22)$$

Последовательно удаляем состояния q'_8 , q_7 и q'_7 ; при удалении состояния q_7 объединение двух параллельных петель

$$(q_4, a_3 a_4 a_1 a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 \parallel a_4), q_4),$$

$$(q_4, (a_1 \parallel a_3) a_2 a_1 (a_4 a_3 a_2 a_1)^* a_4 a_3 (a_2 \parallel a_4), q_4)$$

дает петлю $(q_4, a_3 a_4 a_1 a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 a_1 a_4 a_3)^* (a_2 \parallel a_4), q_4)$; с учетом этого получаем автомат

$$M_4 = \langle \{q_0, q_4, q'_0, q'_4\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta_4, \{q_0\}, \{q'_0\} \rangle,$$

$$\Delta_4 = \{(q_0, a_1 a_2, q_4), (q'_4, a_3 a_4, q'_0),$$

$$(q_4, a_3 a_4 a_1 a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 a_1 a_4 a_3)^* (a_2 \parallel a_4), q_4),$$

$$(q_4, a_1 a_2 a_3 a_4 + (a_1 \parallel a_3) a_2 a_1 (a_4 a_3 a_2 a_1)^* (a_2 \parallel a_4) a_3 a_4 +$$

$$+ (a_1 a_2 (a_1 \parallel a_3) + (a_1 \parallel a_3) a_2 a_1 (a_4 a_3 a_2 a_1)^* (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4)(a_1 \parallel a_3))) \cdot$$

$$\cdot (a_2 a_1 a_4 a_3 + a_4 a_3 a_2 a_1 + (a_2 \parallel a_4)(a_1 \parallel a_3))^* (a_4 a_3 (a_2 \parallel a_4) + (a_2 \parallel a_4) a_3 a_4), q'_4),$$

$$(q'_4, a_1 a_2 a_3 a_4 + a_3 a_4 a_1 a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 \parallel a_4) + (a_1 a_2 (a_1 \parallel a_3) + (a_1 \parallel a_3) a_2 a_1) \cdot$$

$$\cdot (a_2 a_1 a_4 a_3 + a_4 a_3 a_2 a_1 + (a_2 \parallel a_4)(a_1 \parallel a_3))^* (a_4 a_3 (a_2 \parallel a_4) + (a_2 \parallel a_4) a_3 a_4), q'_4)\}.$$

Удаляя состояние q_4 и q'_4 , получаем искомое регулярное выражение

$$r_4 = a_1 a_2 [a_3 a_4 a_1 a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 a_1 a_4 a_3)^* (a_2 \parallel a_4)]^* \cdot$$

$$\cdot [a_1 a_2 a_3 a_4 + (a_1 \parallel a_3) a_2 a_1 (a_4 a_3 a_2 a_1)^* (a_2 \parallel a_4) a_3 a_4 +$$

$$+ (a_1 a_2 (a_1 \parallel a_3) + (a_1 \parallel a_3) a_2 a_1 (a_4 a_3 a_2 a_1)^* (a_2 a_1 a_4 a_3 + (a_2 \parallel a_4)(a_1 \parallel a_3))) \cdot$$

$$\cdot (a_2 a_1 a_4 a_3 + a_4 a_3 a_2 a_1 + (a_2 \parallel a_4)(a_1 \parallel a_3))^* (a_4 a_3 (a_2 \parallel a_4) + (a_2 \parallel a_4) a_3 a_4) \cdot$$

$$\cdot [a_1 a_2 a_3 a_4 + a_3 a_4 a_1 a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 \parallel a_4) + (a_1 a_2 (a_1 \parallel a_3) + (a_1 \parallel a_3) a_2 a_1) \cdot$$

$$\cdot (a_2 a_1 a_4 a_3 + a_4 a_3 a_2 a_1 + (a_2 \parallel a_4)(a_1 \parallel a_3))^* (a_4 a_3 (a_2 \parallel a_4) + (a_2 \parallel a_4) a_3 a_4)]^* a_3 a_4$$

высотой итерации $\text{sh } r_4 = 2$. Тогда высота итерации языка $\text{sh}(L_2 \setminus L_1) = 2$.

Отметим, что $\text{sh}(L_2 \setminus L_1) = \text{sh } L_2$ с учетом примера 2.

Регулярное выражение для $L_n \setminus L_1$ имеет следующий рекурсивный вид.

Теорема 2. Язык $L_n \setminus L_1$, $n \geq 2$ имеет вид $L_n \setminus L_1 = L[r_{n \setminus 1}]$, где

$$\begin{aligned}
 r_{n\setminus 1} = & a_1 a_2 [a_3 a_4 a_1 a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 a_1 a_4 a_3)^* (a_2 \parallel a_4)]^* \cdot \\
 & \cdot [(a_1 a_2 + (a_1 \parallel a_3) a_2 a_1 (a_4 a_3 a_2 a_1)^* l_{n-2}) s_{n-2}^* a_3 a_4 + \\
 & + (a_1 a_2 s_{n-2}^* r_{n-2} + (a_1 \parallel a_3) a_2 a_1 (a_4 a_3 a_2 a_1)^* (t_{n-2} + l_{n-2} s_{n-2}^* r_{n-2})) \cdot \\
 & \cdot (t_{n-2} + l_{n-2} s_{n-2}^* r_{n-2} + a_4 a_3 a_2 a_1)^* (a_4 a_3 (a_2 \parallel a_4) + l_{n-2} s_{n-2}^* a_3 a_4)] \cdot \\
 & \cdot [a_3 a_4 a_1 a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 \parallel a_4) + a_1 a_2 s_{n-2}^* a_3 a_4 + ((a_1 \parallel a_3) a_2 a_1 + a_1 a_2 s_{n-2}^* r_{n-2}) \cdot \\
 & \cdot (t_{n-2} + l_{n-2} s_{n-2}^* r_{n-2} + a_4 a_3 a_2 a_1)^* (a_4 a_3 (a_2 \parallel a_4) + l_{n-2} s_{n-2}^* a_3 a_4)]^* a_3 a_4, \quad (23)
 \end{aligned}$$

а s_{n-2} , t_{n-2} , l_{n-2} и r_{n-2} определены рекурсивно формулами (5)–(9).

Доказательство. Сперва отметим, что для случая $n = 2$ непосредственная подстановка формул (5) в формулу (23) доказывает, что $r_{n\setminus 1}$ совпадает с регулярным выражением r_4 примера 4. Рассмотрим автомат

$$\begin{aligned}
 M_1 = & \langle \{q_0, \dots, q_7\} \cup \{q'_0, \dots, q'_{4n+3}\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta'_1 \cup \Delta''_1 \cup \Delta'''_1, \{q_0\}, \{q'_0\} \rangle, \\
 \Delta'_1 = & \{(q'_i, a_1, q'_{i+1}) : i \geq 2, 0 \leq i \leq 4n + 2\} \cup \{(q'_i, a_2, q'_{i+3}) : i \geq 2, 1 \leq i \leq 4n - 1\} \cup \\
 & \cup \{(q'_i, a_3, q'_{i-2}) : i \bmod 4 \in \{0, 1\}, 4 \leq i \leq 4n + 1\} \cup \\
 & \cup \{(q'_i, a_4, q'_{i-2}) : i \bmod 4 \in \{2, 3\}, 2 \leq i \leq 4n + 3\}
 \end{aligned}$$

(здесь Δ'_1 и Δ''_1 определены формулами (18), (19) соответственно, а Δ'''_1 аналогично формуле (2)). Рассматриваемый автомат является детерминированным. Аналогично теореме 1 удалением в каждом из $n + 3$ блоков левого нижнего и правого верхнего состояний (т.е. состояний q_1 , q_2 , q_5 , q_6 и q'_i , $i \bmod 4 \in \{1, 2\}$, $1 \leq i \leq 4n + 2$) получаем обобщенный автомат

$$\begin{aligned}
 M_2 = & \langle \{q_0, q_3, q_4, q_7, q'_0, q'_3, q'_4, q'_7, \dots, q'_{4n}, q'_{4n+3}\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta'_2 \cup \\
 & \cup \Delta''_2 \cup \Delta'''_2, \{q_0\}, \{q'_0\} \rangle, \\
 \Delta'_2 = & \{(q'_i, a_1 a_2, q'_{i+4}) : i = 0, 4, \dots, 4n - 4\} \cup \{(q'_{i+4}, a_3 a_4, q'_i) : i = 0, 4, \dots, 4n - 4\} \cup \\
 & \cup \{(q'_i, a_2 a_1, q'_{i+4}) : i = 3, 7, \dots, 4n - 1\} \cup \{(q'_{i+4}, a_4 a_3, q'_i) : i = 3, 7, \dots, 4n - 1\} \cup \\
 & \cup \{(q'_i, a_1 \parallel a_3, q'_{i-1}) : i = 4, 8, \dots, 4n\} \cup \{(q'_{i-1}, a_2 \parallel a_4, q'_i) : i = 4, 8, \dots, 4n\}
 \end{aligned}$$

(здесь Δ'_2 и Δ''_2 определены формулами (20), (21) соответственно, а Δ'''_2 аналогично множеству Δ_1 из доказательства теоремы 1). Последовательно удаляем состояния q'_{4n+3} , q'_{4n} , q'_{4n-1} , q'_{4n-4} , q'_{4n-5} , ..., q'_{15} и вводим рекурсивные формулы (6)–(9) по аналогии с рассуждениями доказательства теоремы 1. Отметим, что данные действия не изменяют переходы множеств Δ'_2 и Δ''_2 . Полученный автомат имеет вид

$$\tilde{M}_2 = \langle \{q_0, q_3, q_4, q_7, q'_0, q'_3, q'_4, q'_7, q'_8, q'_{11}, q'_{12}\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta'_2 \cup \cup \Delta''_2 \cup \tilde{\Delta}'''_2, \{q_0\}, \{q'_0\} \rangle,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}'''_2 = & \{(q'_i, a_1 a_2, q'_{i+4}) : i = 0, 4, 8\} \cup \{(q'_{i+4}, a_3 a_4, q'_i) : i = 0, 4, 8\} \cup \\ & \cup \{(q'_3, a_2 a_1, q'_7), (q'_7, a_2 a_1, q'_{11}), (q'_7, a_4 a_3, q'_3), (q'_{11}, a_4 a_3, q'_7), \\ & (q'_4, a_1 \parallel a_3, q'_3), (q'_8, a_1 \parallel a_3, q'_7), (q'_3, a_2 \parallel a_4, q'_4), (q'_7, a_2 \parallel a_4, q'_8), \\ & (q'_{12}, s_{n-3}, q'_{12}), (q'_{11}, t_{n-3}, q'_{11}), (q'_{12}, r_{n-3}, q'_{11}), (q'_{11}, l_{n-3}, q'_{12})\}. \end{aligned}$$

Заменяем автомат \tilde{M}_2 на эквивалентный, удаляя переходы $(q_4, a_3 a_4, q_0)$, $(q'_0, a_1 a_2, q'_4)$ и добавляя петли $(q_4, a_3 a_4 a_1 a_2, q_4)$, $(q'_4, a_3 a_4 a_1 a_2, q'_4)$. Последовательно удаляем состояния q'_{12} и q'_{11} , используем рекурсивные формулы (6)–(9), затем удаляем состояния q_3 и q'_3 :

$$M_3 = \langle \{q_0, q_4, q_7, q'_0, q'_4, q'_7, q'_8\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta'_3 \cup \Delta''_3 \cup \Delta'''_3, \{q_0\}, \{q'_0\} \rangle,$$

$$\begin{aligned} \Delta'_3 = & \{(q_0, a_1 a_2, q_4), (q_4, a_3 a_4 a_1 a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 \parallel a_4), q_4), \\ & (q_4, (a_1 \parallel a_3) a_2 a_1, q_7), (q_7, a_4 a_3 (a_2 \parallel a_4), q_4), (q_7, a_4 a_3 a_2 a_1, q_7)\}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\Delta''_3 = \{(q_4, a_1 a_2, q'_8), (q_7, t_{n-2}, q'_7), (q_7, l_{n-2}, q'_8)\}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Delta'''_3 = & \{(q'_4, a_3 a_4, q'_0), (q'_4, a_3 a_4 a_1 a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 \parallel a_4), q'_4), (q'_4, (a_1 \parallel a_3) a_2 a_1, q'_7), \\ & (q'_7, a_4 a_3 (a_2 \parallel a_4), q'_4), (q'_7, t_{n-2} + a_4 a_3 a_2 a_1, q'_7), (q'_4, a_1 a_2, q'_8), \\ & (q'_8, a_3 a_4, q'_4), (q'_8, r_{n-2}, q'_7), (q'_7, l_{n-2}, q'_8), (q'_8, s_{n-2}, q'_8)\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Сравнение данного автомата с автоматом M_3 примера 4 показывает:

- 1) в множествах Δ'_3 переходы совпадают;
- 2) в множествах Δ''_3 второй и третий переходы различаются лишь индексами;
- 3) в множествах Δ'''_3 пятый, восьмой и девятый переходы различаются лишь индексами, а десятый переход множества (26) при $n = 2$ с учетом формул (5) является пустым переходом $(q'_8, s_0 = 0, q'_8)$ и его можно без потери общности добавить в множество (22).

Потому, выполняя предложенные в примере 4 дальнейшие действия, а именно последовательно удаляя состояния q'_8 , q_7 , q'_7 , q_4 и q'_4 , а также принимая во внимание оговоренную в п. 3) петлю (q'_8, s_{n-2}, q'_8) , получаем искомое регулярное выражение (23).

Теорема доказана.

Следствие 3. Язык $L_n \setminus L_1$ также допускает представление в виде $L_n \setminus L_1 = L[r'_{n \setminus 1}]$, где

$$r'_{n \setminus 1} = a_1 a_2 [a_3 a_4 a_1 a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2 a_1 a_4 a_3)^* (a_2 \parallel a_4)]^*.$$

$$\begin{aligned} & \cdot [s_{n-1} + (a_1 \parallel a_3)a_2a_1(a_4a_3a_2a_1)^*(t_{n-2} + l_{n-2}s_{n-2}^*r_{n-2})^*l_{n-2}s_{n-2}^*a_3a_4 + \\ & + (a_1a_2s_{n-2}^*r_{n-2} + (a_1 \parallel a_3)a_2a_1(a_4a_3a_2a_1)^*(t_{n-2} + l_{n-2}s_{n-2}^*r_{n-2})) \cdot \\ & \cdot (t_{n-2} + l_{n-2}s_{n-2}^*r_{n-2})^*a_4a_3t_{n-1}l_{n-1}] \cdot [a_3a_4a_1a_2 + s_{n-1} + r_{n-1}t_{n-1}^*l_{n-1}]^*a_3a_4. \quad (27) \end{aligned}$$

Доказательство. В доказательстве теоремы 2 при построении автомата M_3 по автомату \tilde{M}_2 не удаляем (в отличие от доказательства теоремы 2) состояние q'_3 , получая следующий автомат:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_3 = & \langle \{q_0, q_4, q_7, q'_0, q'_3, q'_4, q'_7, q'_8\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta'_3 \cup \Delta''_3 \cup \tilde{\Delta}''_3, \{q_0\}, \{q'_0\} \rangle, \\ \tilde{\Delta}''_3 = & \{(q'_4, a_3a_4, q'_0), (q'_4, a_3a_4a_1a_2, q'_4), (q'_4, a_1 \parallel a_3, q'_3), (q'_3, a_2 \parallel a_4, q'_4), \\ & (q'_3, a_2a_1, q'_7), (q'_7, a_4a_3, q'_3), (q'_7, t_{n-2}, q'_7), (q'_4, a_1a_2, q'_8), \\ & (q'_8, a_3a_4, q'_4), (q'_8, r_{n-2}, q'_7), (q'_7, l_{n-2}, q'_8), (q'_8, s_{n-2}, q'_8)\} \end{aligned}$$

(здесь Δ'_3 и Δ''_3 определены формулами (24), (25) соответственно). Последовательно удаляем состояния q'_8 и q'_7 , используем рекурсивные формулы (6)–(9):

$$\begin{aligned} \tilde{M}_4 = & \langle \{q_0, q_4, q_7, q'_0, q'_3, q'_4\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \Delta'_3 \cup \tilde{\Delta}_4, \{q_0\}, \{q'_0\} \rangle, \\ \tilde{\Delta}_4 = & \{(q_4, a_1a_2s_{n-2}^*r_{n-2}(t_{n-2} + l_{n-2}s_{n-2}^*r_{n-2})^*a_4a_3 \neq r_{n-1}, q'_3), (q_4, s_{n-1}, q'_4), \\ & (q_7, (t_{n-2} + l_{n-2}s_{n-2}^*r_{n-2})^+a_4a_3, q'_3), (q_7, (t_{n-2} + l_{n-2}s_{n-2}^*r_{n-2})^*l_{n-2}s_{n-2}^*a_3a_4, q'_4), \\ & (q'_4, a_3a_4, q'_0), (q'_4, a_3a_4a_1a_2 + s_{n-1}, q'_4), (q'_4, r_{n-1}, q'_3), (q'_3, l_{n-1}, q'_4), (q'_3, t_{n-1}, q'_3)\} \end{aligned}$$

(в третьем переходе множества $\tilde{\Delta}_4$ использована запись $e^+ = e^*e$, см. например, [4, 5]). Последовательным удалением состояний q_7 и q'_3 получаем автомат

$$\begin{aligned} \tilde{M}_5 = & \langle \{q_0, q_4, q'_0, q'_4\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \tilde{\Delta}_5, \{q_0\}, \{q'_0\} \rangle, \\ \tilde{\Delta}_5 = & \{(q_0, a_1a_2, q_4), (q'_4, a_3a_4, q'_0), \\ & (q_4, a_3a_4a_1a_2 + (a_1 \parallel a_3)(a_2a_1a_4a_3)^*(a_2 \parallel a_4), q_4), \\ & (q_4, s_{n-1} + (a_1 \parallel a_3)a_2a_1(a_4a_3a_2a_1)^*(t_{n-2} + l_{n-2}s_{n-2}^*r_{n-2})^*l_{n-2}s_{n-2}^*a_3a_4 + \\ & + (a_1a_2s_{n-2}^*r_{n-2} + (a_1 \parallel a_3)a_2a_1(a_4a_3a_2a_1)^*(t_{n-2} + l_{n-2}s_{n-2}^*r_{n-2})) \cdot \\ & \cdot (t_{n-2} + l_{n-2}s_{n-2}^*r_{n-2})^*a_4a_3t_{n-1}l_{n-1}, q'_4), (q'_4, a_3a_4a_1a_2 + s_{n-1} + r_{n-1}t_{n-1}^*l_{n-1}, q'_4)\} \end{aligned}$$

и искомое регулярное выражение (27). Следствие доказано.

Замечание 2. Формула (27), использующая индексы $n-2$ и $n-1$, выглядит более компактной по сравнению с формулой (23). По сути же регулярное выражение $r'_{n\setminus 1}$ из-за дополнительного шага рекурсии сложнее, чем $r_{n\setminus 1}$. Именно потому в примере 4 и в доказательстве теоремы 2 состояние q'_3 удаляется до состояний q'_8 и q'_7 , хотя шаг рекурсии предполагает обратное.

Замечание 3. Для высоты итерации языка $L_n \setminus L_m$ ($n > m$) выполняется равенство $\text{sh}(L_n \setminus L_m) = \text{sh} L_n$, поскольку высоту итерации языка определяет именно n (подобно тому, как на рис. 3 высоту итерации языка определяет именно правая, более высокая колонка).

Отметим, что в работе [15] предложен эвристический алгоритм построения по заданному конечному автомату регулярного выражения, высота итерации которого близка к высоте итерации соответствующего регулярного языка (такое регулярное выражение в работе [15] называется псевдооптимальным).

Замечание 4. Напомним, что языком сети Петри T -типа называют множество таких слов $\sigma(w)$, что после запуска последовательности переходов w ни один переход невозможно запустить [1]. Порождаемый сетью Петри, изображенной на рис. 1, язык T -типа не содержит ни одного слова $L = \emptyset$ как для варианта задачи с ограниченным буфером, так и с неограниченным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Питерсон, *Теория сетей Петри и моделирование систем*. М.: Мир, 1984, 264 с.
2. В.Е. Котов, *Сети Петри*. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1984, 160 с.
3. Т. Мурата, “Сети Петри: Свойства, анализ, приложения”, *ТИИЭР*, т. 77, № 4, с. 41–85, 1989.
4. А.Е. Пентус и М.Р. Пентус, *Теория формальных языков*. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ, 2004, 80 с.
5. А.Е. Пентус и М.Р. Пентус, *Математическая теория формальных языков*. М.: «Бином», 2006, 247 с.
6. С. Гинзбург, *Математическая теория контекстно-свободных языков*. М.: Мир, 1970, 326 с.
7. Дж. Э. Хопкрофт, Р. Мотвани, и Дж. Д. Ульман, *Введение в теорию автоматов, языков и вычислений*. М.: Вильямс, 2002, 528 с.
8. В.М. Статкевич, “Регулярные выражения для языков сети Петри «производитель/потребитель» с ограниченным буфером размера 1 и 2”, на *Системный анализ и информационные технологии, материалы 19-й Международной научно-технической конференции SAIT 2017*, Киев, 22–25 мая 2017, с. 123.
9. V. Statkevych, “On regular expressions for producer/consumer Petri net languages with bounded buffer”, in *Nonlinear Analysis and Applications: Materials of 4th International scientific conference on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine V.S. Mel'nik*, Kyiv, 4–6 April, 2018, p. 68.
10. V. Mukhin and V. Statkevych, “On one context-free language for producer/consumer Petri net with the unbounded buffer”, in *15th International conference on Development and Application Systems*, Suceava, Romania, 21–23 May, 2020, pp. 137–140.

11. М.З. Згуровский и В.А. Денисенко, *Дискретно-непрерывные системы с управляемой структурой. Теория, моделирование, применение*. К.: Наукова думка, 1998, 351 с.
12. А. Саломая, *Жемчужины теории формальных языков*. М.: Мир, 1986, 159 с.
13. R. Valk and G. Vidal-Naquet, "Petri nets and regular languages", *Journal of Computer and System Sciences*, **23**, pp. 299–325, 1981.
14. A. Gronewold and H. Fleischhack, "Computing Petri net languages by reductions", in *Fundamentals of computation theory: 10th International conference; proceedings / FCT'95*, Drezden, Germany, August 22–25, 1995, Springer, pp. 253–262.
15. С.В. Баумгертнер и Б.Ф. Мельников, "Мультиэвристический подход к проблеме звездно-высотной минимизации недетерминированных конечных автоматов", *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии*, № 1, с. 5–7, 2010.

Поступила 11.08.2020

INFORMATION ON THE ARTICLE

Vitalii M. Statkevych, ORCID: 0000-0001-5210-9890, Educational and Scientific Complex "Institute for Applied System Analysis" of the National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Ukraine, e-mail: mstatkevich@yahoo.com

REGULAR EXPRESSIONS FOR SOME PETRI NET LANGUAGES FOR THE PRODUCER/CONSUMER PROBLEM / V.M. Statkevych

Abstract. We consider a Petri net for the producer/consumer problem (one of the classical synchronization problems) with the bounded buffer of size n and the regular formal languages L_n , generated by the net. We propose regular expressions denoting these languages in the recursive form, in case of the bounded buffer of size from 1 to 3 the explicit formulas are proposed. We transform a reachability graph into a finite automaton and use the state elimination method. We give an upper estimate for the star-height of the mentioned languages, in case of the bounded buffer of size 1 and 2 the exact values are calculated. We also consider union, intersection, Kleene closure, concatenation and set difference operations on mentioned languages. We give the finite automaton and propose regular expressions denoting the set difference of languages $L_n \setminus L_1$ in the recursive form, for $L_2 \setminus L_1$ the explicit formula is proposed.

Keywords: Petri net, producer/consumer problem, Petri net language, formal language, regular language, finite automaton, regular expression, star-height.

РЕГУЛЯРНІ ВИРАЗИ ДЛЯ ДЕЯКИХ МОВ МЕРЕЖ ПЕТРІ В ЗАДАЧІ ПРО ПОСТАЧАЛЬНИКА ТА СПОЖИВАЧА / В.М. Статкевич

Анотація. Розглянуто мережу Петрі в задачі про постачальника та споживача (одній з класичних задач синхронізації) з обмеженим буфером розміру n і регулярні формальні мови L_n , які вона породжує. Для цих мов знайдено регулярні вирази в рекурсивному вигляді, а у випадках обмеженого буфера розміру від 1 до 3 — у вигляді явних формул. За графом досяжності побудовано скінченний автомат, застосовано метод послідовного видалення вершин. Для висоти ітерації (зіркової висоти) вказаних мов надано оцінку зверху, а у випадках обмеженого буфера розміру 1 та 2 знайдено точні значення. Для вказаних мов розглянуто операції об'єднання, перетину, замикання Кліні, конкатенації та різниці. Для різниці мов $L_n \setminus L_1$ побудовано скінченний автомат і знайдено регулярні вирази в рекурсивному вигляді, а для різниці $L_2 \setminus L_1$ — у вигляді явної формули.

Ключові слова: мережа Петрі, задача про постачальника та споживача, мова мережі Петрі, формальна мова, регулярна мова, скінченний автомат, регулярний вираз, висота ітерації (зіркова висота).

REFERENCES

1. J. Peterson, *Petri net theory and modeling of systems*. Moscow: Mir, 1984.
2. V.E. Kotov, *Petri nets*. Moscow: Nauka, 1984.
3. T. Murata, "Petri nets: Properties, analysis and applications", *Trudy Instituta inzhenerov po elektrotekhnike i radioelektronike*, vol. 77, no. 4, pp. 41–85, 1989.
4. A.E. Pentus and M.R. Pentus, *Formal language theory*. Moscow: Mekhaniko-matematicheskii fakul'tet Moskovskogo Gosudarstvennogo Universiteta, 2004.
5. A.E. Pentus and M.R. Pentus, *The mathematical theory of formal languages*. Moscow: Binom, 2006.
6. S. Ginsburg, *The mathematical theory of context-free languages*. Moscow: Mir, 1970.
7. J.E. Hopcroft, R. Motwani and J.D. Ullman, *Introduction to automata theory, languages, and computation*, 2nd ed. Moscow: Williams Publishing House, 2002.
8. V.M. Statkevych, "Regular expressions for producer/consumer Petri net languages with bounded buffer of size 1 and 2", in *19th Int. Conf. on System Analysis and Information Technology (SAIT)*, Kyiv, Educational and Scientific Complex "Institute for Applied System Analysis" of National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", 22–25 May 2017, pp. 123.
9. V. Statkevych, "On regular expressions for producer/consumer Petri net languages with bounded buffer", in *4th Int. Scientific Conf. Nonlinear Analysis and Applications on memory of corresponding member of National Academy of Science of Ukraine V.S. Mel'nik*, Kyiv, National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", 4–6 Apr. 2018, pp. 68.
10. V. Mukhin and V. Statkevych, "On one context-free language for producer/consumer Petri net with the unbounded buffer", in *15th Int. Conf. on Development and Application Systems (DAS)*, Suceava, Romania, 21–23 May 2020, pp. 137–140. doi: 10.1109/DAS49615.2020.9108948
11. M.Z. Zgurovsky and V.A. Denisenko, *Discrete-continuous systems with controlled structure. Theory, modeling, applications*. Kiev: Naukova Dumka, 1998.
12. A. Salomaa, *Jewels of formal language theory*. Moscow: Mir, 1986.
13. R. Valk and G. Vidal-Naquet, "Petri nets and regular languages", *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 23, issue 3, pp. 299–325, 1981.
14. A. Gronewold and H. Fleischhack, "Computing Petri net languages by reductions", in *10th Int. Conf. Fundamentals of computation theory (FCT)*, Drezden, Germany, Springer, 22–25 Aug. 1995, pp. 253–262. doi: 10.1007/3-540-60249-6_57
15. S.V. Baumgertner and B.F. Melnikov, "Multi-heuristic approach for the star-height minimization of non-deterministic finite automata", *Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems analysis and information technologies*, no. 1, pp. 5–7, 2010.