НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

фізико-математичний факультет

кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК _______________

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
________ Олег КЛЕСОВ
« 14 » травня 2021 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 Математика

на тему: «Інтегральне перетворення Ельзакі»

Виконала:
студентка ІІ курсу магістратури, групи ОМ-91мн
Шурубура Руслана Андріївна ___________

Керівник:
проф., д. ф.-м. н., проф.,
Рущицький Ярема Ярославович ___________

Рецензент:
кандидат ф.-м. н., доцент кафедри комп’ютерних наук
Київського міжнародного університету
Юрчук Василь Миколайович ___________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка ______________

Київ – 2021

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
фізико-математичний факультет
кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_______ Олег КЛЕСОВ

«04» лютого 2021 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Шурубурі Руслані Андріївні

1. Тема дисертації «Інтегральне перетворення Ельзакі», науковий керівник дисертації Рущицький Ярема Ярославович, доктор фізико-математичних наук, професор, затверджені наказом по університету від « 26 » березня 2021 р. № 901-с

2. Термін подання студентом дисертації 13 травня 2021 р.

3. Об’єкт дослідження інтегральне перетворення Ельзакі.

4. Предмет дослідження критичний аналіз інтегрального перетворення Ельзакі.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити

1) розглянути відомі інтегральні перетворення;

2) ознайомитися з інтегральним перетворенням Ельзакі;

3) дослідити зв’язки між інтегральними перетвореннями;

4) провести критичний аналіз інтегрального перетворення Ельзакі.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу 23 слайдів.

7. Орієнтовний перелік публікацій

1) Р. А. Шурубура. Вейвлетне перетворення Ельзакі. // Х Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків. Нац. техн. ун-т України «КПІ ім. І. Сікорського». – Київ. – 2021. – 50 с.

8. Дата видачі завдання 04 лютого 2021 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Отримання та обговорення запропонованої теми	04.02.21 – 07.02.21	виконано
2.	Ознайомлення з літературою	08.02.21 – 21.02.21	виконано
3.	Дослідження інтегральних перетворень Лапласа та Фур'є	22.02.21 – 07.03.21	виконано
4.	Ознайомлення з інтегральним перетворенням Сумуду	08.03.21 – 22.03.21	виконано
5.	Дослідження нового інтегрального перетворення Ельзакі	23.03.21 – 12.04.21	виконано
6.	Порівняння ефективності застосування різних інтегральних перетворень на основі диференціальних рівнянь	13.04.21 – 19.04.21	виконано
7.	Критичний аналіз пророблених роботи	19.04.21 – 07.05.21	виконано

8.	Оформлення дипломної роботи	07.05.21 – 10.05.21	виконано

Студент Руслана ШУРУБУРА

Науковий керівник Ярема РУЩИЦЬКИЙ

Реферат

Магістерська дисертація: 58 сторінки, 23 слайдів для проектора, 18 першоджерел.

Актуальність теми: висвітлення ефективності нового інтегрального перетворення Ельзакі та критичний аналіз одержаних результатів.

Мета і завдання роботи: ознайомлення з інтегральним перетворенням Ельзакі та його порівняння з вже відомими інтегральними перетвореннями, а саме: перетворення Фур'є, перетворення Лапласа та маловідомим - перетвореннями Сумуду та Хартлі.

Об'єкт дослідження: інтегральне перетворення Ельзакі.

Предмет дослідження: критичний аналіз інтегрального перетворення Ельзакі на основі вже відомих інтегральних перетворень.

Методи дослідження: основні методи теорії диференціальних рівнянь, математичного аналізу, аналітичні та чисельні методи розв'язання диференціальних рівнянь.

У магістерській дисертації подано критичні висновки інтегрального перетворення Ельзакі, що були зроблені, базуючись на відомих інтегральних перетвореннях та висвітленні зв'язків між ними.

Ключові слова: інтегральне перетворення, інтегральне перетворення Фур'є, інтегральне перетворення Лапласа, інтегральне перетворення Хартлі, інтегральне перетворення Сумуду, інтегральне перетворення Ельзакі.

Abstract

Master degree thesis contains 58 pages, 23 slides for projector, 18 primary sources.

Relevance of the topic: studying the effectiveness of the new Elzaki integral transform and critical analysis of this transform.

Purpose and objectives of the work: acquaintance with the Elzaki integral transformation and its comparison with already known integral transform, Fourier transform and Laplace transform - as well as the little known Sumudu transform and Hartley integral transform.

Object of study: the Elzaki integral transform.

Subject of research: critical analysis of Elzaki integral transform on the basis of already known integral transforms.

Methods of research: basic methods of the theory of differential equations, mathematical analysis, analytical and numerical methods of solving the differential equations.

The master's thesis presents critical analysis of Elzaki`s integral transform, based on the known integral transforms and study of the relations between them.

Keywords: integral transform, Fourier integral transform, Laplace integral transform, Hartley integral transform, Sumudu integral transform, Elzaki integral transform.

Зміст

Вступ

Історія науки свідчить, що більшість важливих наукових результатів отримана в наукових центрах чи вченими, що співпрацювали з такими центрами. Але теж існують приклади, коли вчені з провінції пропонували щось дуже важливе для науки. Такі вчені заслуговують особливої уваги і поваги.

Як перший приклад, можна вказати історію знаменитого фізика Резерфорда, який народився в Новій Зеландії, а став відомим вченим, приїхавши до Кембріджського університету. Тутешні фізики жартували: «у нас тут з‘явився кролик з Нової Зеландії, але він дуже глибоко копає». Повага до Резерфорда з‘явилася майже одразу.

Другий приклад стосується неевклідової геометрії. Перші результати були опубліковані вченими з провінції М.Лобачевським та Я.Больяї і не одразу були оцінені так високо як це написано в сучасних енциклопедіях.

Тому при ознайомленні з науковими публікаціями сучасного вченого з африканського континенту Таріга М. Ельзакі (Tarig M. Elzaki, Математичний факультет Суданського університету науки і технології) щодо нового інтегрального перетворення, яке він без показної скромності зразу назвав перетворенням Ельзакі, виникає два почуття.

Перше, це повага, бо це вчений з далекої від світових наукових центрів провінції з результатом, спорідненим з давніми класичними результатами Фур’є і Лапласа та більш новими результатами Хартлі і Сумуду.

Друге, обережність при оцінці новизни і цінності нового інтегрального перетворення, оскільки до цього часу практично ніхто в провідних математичних центрах не звернув увагу на це перетворення і розвиває його лише сам Ельзакі.

Запишемо для початку означення перетворення Ельзакі у вигляді, запропонованому автором.

Ми розглядаємо функції у множині А, що визначається (див. [1]):

$$A = \left\{ f(t) : \exists M, k_1, k_2 > 0, |f(t)| < Me^{\frac{|t|}{k_j}}, \text{якщо } t \in (-1)^j \times [0; \infty) \right\}$$

Для даної функції у множині А константа М повинна бути скінченним числом, k_1, k_2 можуть бути скінченними або нескінченними. Перетворення Ельзакі, що позначається оператором Е (.) визначається інтегральним рівнянням

$$E[f(t)] = T(\nu) = \nu \int_0^\infty f(t) e^{\frac{-t}{\nu}} dt\, , t \geq 0, k_1 \leq \nu \leq k_2.$$

Змінна ν у цьому перетворенні використовується для факторизації змінної t в аргументі функції f. Це перетворення має більш глибокий зв'язок з перетворенням Лапласа. Ми також представляємо багато різних властивостей цього нового перетворення та перетворення Сумуду, а також декілька властивостей степеня.

Тут для подальшого аналізу треба дати коротку інформацію про вказані вище 4 інтегральні перетворення, близькість до яких перетворення Ельзакі очевидна з вказаного означення.

Розділ 1

Інтегральні перетворення

Існує багато складних проблем в аналізі рівнянь. Для того, щоб спростити їх розв'язання, можуть бути використані інтегральні перетворення, за допомогою яких можна відобразити оригінальне рівняння в більш просте рівняння-зображення, після чого розв'язок рівняння-зображення можна порівняно легко проаналізувати повернувшись до оригінального рівняння за допомогою оберненого інтегрального перетворення.

Наведемо одне з класичних означень інтегрального перетворення (див. [3], [10], [11]).

Функція

$$F(p) = \int_a^b K(p,t) f(t) dt$$

називається інтегральним перетворенням (зображенням) функції $f(t)$, причому $f(t)$ має назву оригіналу свого зображення $F(p)$, а функція $K(p,t) -$ ядра інтегрального перетворення. Інтегральне перетворення над деяким класом функцій $f(t)$ визначається вибором ядра $K(p,t)$ і проміжку інтегрування (a,b). Інтегральне перетворення функції f ставить їй у відповідність функцію F. Це записують $(f \to F)$ і називають прямим перетворенням, а перетворення $F \to f$ — оберненим перетворенням.

Найбільш відомими є інтегральне перетворення Лапласа та Фур'є, також не менш вагомими, але не настільки відомими є інтегральне перетворення Сумуду та Хартлі. Розглянемо детальніше кожне з них.

1.1. Інтегральне перетворення Фур'є

Нехай функція $f(t)$ дійсної змінної $t, -\infty \le t < \infty$, задовольняє таким умовам (див. [3]):

1) $f(t)$ — абсолютно інтегровна на даному проміжку $(-\infty, +\infty)$, тобто

$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{f(t)}|\mathrm{dt}$ — збіжний;

2) $f(t)$ є функцією обмеженої варіації, тобто вона обмежена, має скінченне число відносних екстремумів і точок розриву першого роду.

Тоді можна ввести перетворення Фур'є :

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Обренене перетворення Фур'є визначається так:

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

Це інтегральне перетворення можна отримати як узагальнення перетворення Лапласа (взагалі кажучи, двостороннього) на випадок уявної змінної $p = i\omega$. (див. [3], [9]).

З іншого боку, перетворення Фур'є відповідає граничному випадку комплексного ряду Фур'є

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k e^{ik\Omega t}, \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

з коефіцієнтами

$$f_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-ik\Omega t}dt,$$

коли період $T \to \infty$.

Якщо $f(t)$ – парна функція, то перетворення Фур'є і обернене перетворення Фур'є переходять у взаємно зворотні косинус-перетворення Фур'є

$$\mathcal{F}_c[f(t)] = F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)cos\omega t\,dt,$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F(\omega)cos\omega t\,d\omega.$$

Якщо ж $f(t) -$ непарна функція, то, відповідно, - в синус – перетворення Фур'є

$$\mathcal{F}_s[f(t)] = F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)sin\omega t\,dt,$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F(\omega)sin\omega t\,d\omega.$$

Основні властивості перетворення Фур'є подібні до відповідних властивостей перетворення Лапласа:

1. Лінійність

$$\mathcal{F}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha\mathcal{F}[f_1(t)] + \beta\mathcal{F}[f_2(t)].$$

2. Теорема подібності

$$\mathcal{F}[f(\alpha t);\omega] = \frac{1}{\alpha}\mathcal{F}\left[f(t);\frac{\omega}{\alpha}\right], \quad \text{тобто} \quad f(t) \to \frac{1}{\alpha}F(\frac{\omega}{\alpha})$$

3. Теорема зсуву

$$\mathcal{F}[f(t+\tau)] = e^{i\omega t}\mathcal{F}[f(t)]$$

4. Диференціювання оригіналу

$$\mathcal{F}[f'(t)] = i\omega\mathcal{F}[f(t)];$$

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right] = (i\omega)^n\mathcal{F}[f(t)].$$

5. Теорема про згортку

Згорткою $f * g$ *функцій* $f(t)$ *і* $g(t)$, *заданих в інтервалі* $-\infty < t < \infty$, *називається інтеграл*

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-\tau)dt.$$

Якщо існують пряме й обернене перетворення Фур'є, згортці надамо вигляду

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(\omega)e^{i\omega x}d\omega,$$

де

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}f(t)dt,$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} g(t) dt,$$

тобто Фур'є-перетворення згортки є добутком відповідних перетворень Фур'є вихідних функцій:

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f(t)] \cdot \mathcal{F}[g(t)]$$

або

$$f * g \rightarrow F(\omega)G(\omega).$$

1.2. Інтегральне перетворення Хартлі

Введемо наступним чином перетворення Хартлі (див.[4]):

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) cas(\omega t) dt,$$

де ω – може бути кутовою частотою, а $cas(t)$ – це ядро Хартлі, що означає (див.[5], [12])

$$cas(t) = cost + sint = \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Обернене перетворення Хартлі має вигляд

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) cas(\omega t) d\omega.$$

Пряме порівняння перетворення Фур'є і перетворення Хартлі, показує наскільки близький зв'язок між ними

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)[cos\omega t - isin\omega t] dt,$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)[cos\omega t + isin\omega t] d\omega.$$

Тоді можна зробити декілька важливих висновків:

1. Перетворення Хартлі є перетворенням з дійсним ядром;

2. Пряме і обренене перетворення Хартлі обчислюються ідентично;

3. Квадрат модуля перетворення Фур'є $|F(\nu)|^2$ дорівнює

$$|F(\nu)|^2 = \frac{H^2(\nu) + H^2(-\nu)}{2};$$

4. Дійсна та уявна частини перетворення Фур'є можуть бути обчислені за допомогою перетворення Хартлі

$$Re\{F(\omega)\} = \frac{H(\omega) + H(-\omega)}{2},$$

$$Im\{F(\omega)\} = \frac{H(\omega) - H(-\omega)}{2};$$

5. Якщо $f(t)$ – парна функція, тоді

$$H(\omega) \equiv \ Re\{F(\omega)\}, \qquad Im\{F(\omega)\} \equiv 0.$$

Перетворення Хартлі має ті ж самі властивості, що й перетворення Фур'є, єдиною відмінністю є інший запис **теореми про згортку:**

Якщо дві функції $x(t)$ і $y(t)$ мають перетворення Хартлі $X(\omega)$ і $Y(\omega)$ відповідно, то їх згортка $z(t) = x * y$ є перетворенням Хартлі:

$$Z(\omega) = \sqrt{2\pi}\frac{X(\omega)[Y(\omega) + Y(-\omega)] + X(-\omega)[Y(\omega) - Y(-\omega)]}{2}.$$

1.3. Інтегральне перетворення Лапласа

Пряме перетворення Лапласа ставить у відповідність функції $f(t)$ дійсної змінної t комплексну функцію $F(p)$ комплексної змінної p за допомогою наступного перетворення (див.[6])

$$F(p) = \int_{0}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Функція $f(t)$ називається оригіналом, а функція $F(p)$ - зображенням за Лапласом, або Лаплас-образом.

Однозначність та можливість існування прямого перетворення Лапласа визначається наступними достатніми умовами:

1) Умова однозначності інтегралу :для $t < 0$ всі функції $f(t) = 0$.

2) Умови існування інтегралу:

а) Для $t \geq 0$ на довільному скінченому проміжку дійсної осі функція $f\ (t)$ має не більше ніж скінчену кількість розривів першого роду;

б) Для $t \to \infty$ функція $f\ (t) \leq Aexp(at)$, тобто має скінчений показник степеню зростання $a > 0$ ($a > 0$ - довільна стала) . Останнє означає, що функція може зростати, при наближенні до нескінченно віддаленої точки, але це зростання не швидше за експоненційне.

Перетворення Лапласа має наступні властивості (див. [7], [13]):

1. Теорема єдиності. *Якщо дві неперервні функції $f_1(t)$ та $f_2(t)$ мають одне і те ж зображення $F(p)$, то вони тотожно рівні.*

2. Теорема лінійності. *Нехай* $f_1(t) \leftrightarrow F_1(p)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(p)$, *тоді*

$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \leftrightarrow c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$, *де* c_1, c_2 *– будь-які сталі.*

3. Теорема подібності. *Нехай* $f(t) \leftrightarrow F(p)$, *тоді* $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F(\frac{p}{a})$, *де* a *– будь-яка додатна стала.*

4. Теорема запізнення. *Нехай* $f(t) \leftrightarrow F(p)$, *тоді* $\forall \tau > 0$:

$$f(t-\tau) \cdot \eta(t-\tau) \leftrightarrow F(p) \cdot e^{-p\tau}.$$

5. Теорема зсуву. *Нехай* $f(t) \leftrightarrow F(p)$, *тоді* $\forall\ \alpha$:

$$e^{-\alpha t} f(t) \leftrightarrow F(p+a).$$

6. Теорема диференціювання оригіналу. *Нехай функція* $f\ (t)$ *та її похідні*

$f'(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ *– оригінали. Якщо* $f(t) \leftrightarrow F(p)$, *тоді*

$$f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \leftrightarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^{(n)} F(p) - p^{(n-1)} f(0) - p^{(n-2)} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Якщо $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, *тоді* $f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n F(p)$.

7. Теорема інтегрування оригіналу. *Нехай* $f(t) \leftrightarrow F(p)$, *тоді*

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(p)}{p}.$$

8. Теорема диференціювання зображення. *Нехай* $f(t) \leftrightarrow F(p)$, *тоді*

$$-t\, f(t) \leftrightarrow F'(p),$$

$$t^2 f(t) \; \leftrightarrow \; F''(p),$$

………………………..

$$(-t)^{(n)} f(t) \; \leftrightarrow \; F^{(n)}(p).$$

9. Теорема інтегрування зображення. *Нехай* $f(t) \leftrightarrow F(p)$, *невласний інтеграл* $\int_p^\infty F(\tau)d\tau$ *– збігається, тоді* $\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_p^\infty F(\tau)d\tau$.

10. Згортка оригіналів та її зображення. Згорткою оригіналів називається функція $f_1(t) * \; f_2(t)$, яка визначається співвідношенням

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau \; .$$

Згорткою оригіналів є оригінал.

11. Теорема Бореля (теорема множення зображень). *Нехай* $f_1(t) \leftrightarrow F_1(p)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(p)$, *тоді* $f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(p) \cdot F_2(p)$.

12. Формула Дюамеля. Якщо $f_1(t) \leftrightarrow F_1(p)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(p)$, функція $f_1(t)$ неперервна, а функція $f_2(t)$ неперервно-диференційована на $[0, \infty)$, тоді має місце формула

$$p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) \leftrightarrow f_1(t) f_2(0) + \int_0^t f_1(t-\tau) f'_2(\tau) d\tau$$

$$\equiv f_1(t) f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau) f'_2(\tau) d\tau \, ,$$

яка має назву інтеграл Дюамеля.

13. Теорема обернення. *Якщо* $f(t) \leftrightarrow F(p)$ *та оригінал* $f(t)$ *– неперервна функція, то має місце формула*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} F(p)\cdot e^{pt}dp = \frac{1}{2\pi i}\lim_{b\to\infty}\int_{\gamma-ib}^{\gamma+ib} F(p)\cdot e^{pt}dp\,,$$

де інтегрування проводиться вздовж будь-якої прямої $Re\,p = \gamma$*, яка лежить у півплощині* $F(p) = \frac{A_n(p)}{B_m(p)}$*, де* s_0 *- показник зростання функції* $f(t)$*. Якщо* $F(p)$ *має лише скінчене число ізольованих особливих точок* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *, та* $\lim\limits_{|p|\to\infty} F(p) = 0$*, то відповідний оригінал* $f(t)$ *можна знайти по формулі*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \underset{a_k}{res}[F(p)\cdot e^{pt}]\ .$$

14. Теорема розподілу Хевісайда. *Нехай* $F(p) = \frac{A_n(p)}{B_m(p)}$ *– правильний нескоротний раціональний дріб. Якщо знаменник* $B_m(p)$ *має нулі* $b_1, b_2, \dots, b_n$ *кратності* $m_1, m_2, \dots, m_s$ *відповідно, та* $m_1 + m_2 + \cdots + m_s = m$*, то зображенню* $F(p) = \frac{A_n(p)}{B_m(p)}$ *відповідає оригінал*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \underset{a_k}{res}\left(\frac{A_n(p)}{B_m(p)}e^{pt}\right) = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{A_n(b_k)}{B'_m(b_k)}e^{b_k t}\right).$$

Оригінал, який відповідає правильному раціональному дробу

$F(p) = \frac{A_n(p)}{B_m(p)}$*, можна також знайти, розклавши цей дріб на суму простіших дробів та знайшовши відповідні оригінали, використовуючи властивості перетворення Лапласа.*

1.4. Інтегральне перетворення Сумуду

Завдяки своїй простоті і, як наслідок, особливим і корисним вдастивостям, перетворення Сумуду, вже показало себе багатообіцяючим. З'ясовано, що воно може допомогти у розв'язанні складних проблем в інженерній математиці і прикладних науках. Однак, незважаючи на потенціал, закладений в цьому новому операторі, за 15-літній період в літературі з'явилось лиш декілька теоретичних досліджень (див. [8], [15]).

Розглянемо функції з множини A

$$A = \left\{ f(t) \colon \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)| < Me^{\frac{|t|}{\tau_j}}, \text{якщо } t \in (-1)^j \times [0; \infty) \right\},$$

тоді переворення Сумуду, визначається наступним чином:

$$G(u) = \mathbb{S}[\mathrm{f(t)}] = \int_0^\infty f(ut)e^{-t}dt, \quad u \in (-\tau_1, \tau_2).$$

Було показано, що перетворення Сумуду має спеціальні властивості і, може використовуватися для розв'язування задач, не переходячи до частотної області. Це вважається однією із сильних сторін даного перетворення. Фактично (див. [14]), перетворення Сумуду, яке само по собі є лінійним, зберігає лінійні функції, і, відповідно, зокрема, не змінює одиниць виміру.

Теорема 1.1. *Перетворення Сумуду посилює коефіцієнти степеневого ряду*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

шляхом підставляння до степеневого ряду

$$G(u) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, a_n u^n.$$

Попередня теорема передбачає прозоре обернене перетворення в дискретному випадку, тобто отримання вихідної функції із заданого нею перетворення, очевидним чином.

До нуля функції, обернене дискретне перетворення Сумуду, $f(t)$, в степеневому ряді $G(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n a^n$, задається

$$\mathbb{S}^{-1}[G(u)] = f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!}\right) b_n t^n.$$

Перетворення Сумуду є теоретично дуальним перетворенням Лапласа. Отже, воно має можливість у значній мірі конкурувати з перетворенням Лапласа. Для $Re(s) > 0$, перетворення Лапласа задається параметром

$$F(s) = \$\big(f(t)\big) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

З урахуванням означення, перетворення Сумуду і Лапласа мають відношення дуальності, виражене наступним чином:

$$G\left(\frac{1}{s}\right) = sF(s),\ \ F\left(\frac{1}{u}\right) = uG(u). (*)$$

Рівняння (*), яке називають LSD як короткий запис для дуальності Лапласа і Сумуду, проілюстроване тим, що Сумуду і Лаплас трансформують взаємообмін зображень функцій Дірака $\delta(t)$, і функцій Хевісайда $H(t)$, оскільки

$$\mathbb{S}[\mathrm{H(t)}] = \$\big(\delta(\mathrm{t})\big) = 1,\ \ \mathbb{S}[\delta(\mathrm{t})] = \$\big(\mathrm{H(t)}\big) = \frac{1}{u}.$$

Аналогічним чином, ця дуальність проявляється і в тому, що Сумуду і Лаплас трансформують взаємообмін зображення $sin\ t$ і $\cos t$:

$$\mathbb{S}[\cos \mathrm{t}] = \$(\sin \mathrm{t}) = \frac{1}{1+u^2},\ \ \mathbb{S}[\mathrm{sint}] = \$(\mathrm{cost}) = \frac{u}{1+u^2}.$$

Це також узгоджується з встановленими формулами диференціювання та інтегрування:

$$\mathbb{S}[\mathrm{f}'(\mathrm{t})] = \frac{\mathbb{S}[\mathrm{f(t)}] - \mathrm{f}(0)}{u},$$

$$\mathbb{S}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = u\mathbb{S}[\mathrm{f(t)}].$$

Що стосується додатків, то LSD додатково демонструється наступним прикладом. Отримаємо рішення,

$$x(t) = 1 - e^{-t},$$

для задачі з початковими умовами

$$\frac{dx}{dt} + x = 1, \qquad x(0) = 0,$$

застосуємо перетворення Лапласа для формування допоміжного рівняння $F(s)(s+1) = 1/s$, звідки отримаємо $F(s) = 1/s(1+s) = 1/s - 1/(1+s)$, а потім шукаємо обернене до нього.

Як альтернативу використаємо перетворення Сумуду для одержання допоміжного рівняння $\left[\frac{G(u)}{u}\right] + G(u) = 1$, що демонструє перетворення $G(u)$:

$$G(u) = \mathbb{S}[x(t)] = \frac{u}{u+1} = 1 - \frac{1}{(1+u)}.$$

Теорема 1.2. *Нехай $f(t)$ належить A, і нехай $G_n(u)$ позначимо перетворення Сумуду для $n-$ ої похідної $f^{(n)}(t)$, тоді для $n \geq 1$*

$$G_n(u) = \frac{G(u)}{u^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{u^{n-k}}.$$

Наступна теорема дозволяє так само ефективно використовувати перетворення Сумуду для диференціальних рівнянь з багатократними інтегралами із залежною змінною, перетворюючи їх в алгебраїчні.

Теорема 1.3. *Нехай $f(t)$ належить A, і нехай $G^n(u)$ означає перетворення Сумуду первісної від функції $f\,(t)$, отриманого шляхом послідовного інтегрування функції $f(t), n$ разів:*

$$W^n(t) = \int\int_0^t \dots \int_0^t f(\tau)(d\tau)^n,$$

тоді для $n \geq 1$,

$$G^n(u) = \mathbb{S}\big(W^n(t)\big) = u^n G(u).$$

Ця теорема узагальнює теорію згортки Сумуду, яка стверджує, що перетворення

$$(f * g)(t) = \int_o^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau,$$

визначається як

$$\mathbb{S}\big((f * g)(t)\big) = uF(u)G(u).$$

Нехай $f(t), g(t), h(t), h_1(t), \dots$ і $h_n(t)$ належать функції A, мають перетворення Сумуду $F(u), G(u), H(u), H_1(u), \dots$ і $H_n(u)$ відповідно, тоді перетворення Сумуду

$$(f * g)^n(t) = \int \int_0^t \dots \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)(d\tau)^n,$$

визначається як

$$\mathbb{S}\big((f * g)^n(t)\big) = u^n F(u) G(u).$$

Більше того, для будь-якого $n \geq 1$,

$$\mathbb{S}[(h_1 * h_2 * \dots * h_n)(t)] = u^{n-1} H_1(u) H_2(u) \dots H_n(u).$$

Зокрема, перетворення Сумуду $(f * g * h)$ з f, g, h що належать A, визначаються як

$$\mathbb{S}[(\mathrm{f} * \mathrm{g} * \mathrm{h})(\mathrm{t})] = u^2 F(u) G(u) H(u).$$

Попередні результати можуть бути використані для інтегральних, диференціальних та інтегрально-диференціальних рівнянь.

Дискретне перетворення Сумуду може бути ефективно використано для визначення деяких правил про те, як загальне перетворення впливає на різні функціональні операції. Ми маємо

$$\mathbb{S}[t f'(t)] = u \frac{dG(u)}{du}$$

і це

$$\mathbb{S}[\mathrm{texp(t)}] = \frac{\mathrm{u}}{(1-\mathrm{u})^2}.$$

Можна задатися питанням, як перетворення Сумуду діє на $t^n f(t)$. Очевидно, якщо $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ тоді

$$\mathbb{S}[tf(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)!\, a_n u^{n+1} = u \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)!\, a_n u^n = u \frac{d}{du} \sum_{n=0}^{\infty} n!\, a_n u^{n+1}.$$

Цей результат допомагає спочатку відповісти на це питання при $n = 1$. Це приводить до індукційного аргументу перетворення добутку f з додатньою цілочисельною змінною t.

Теорема 1.3. *Нехай $G(u)$ – перетворення Сумуду функції $f(t)$ в* A, *і нехай $G_k(u)$ – k-та похідна $G(u)$ по u, тоді перетворення Сумуду функції $t^n f(t)$ буде задане наступним чином*

$$\mathbb{S}[t^n f(t)] = u^n \sum_{k=0}^{n} a_k^n u^k G_k(u),$$

де $a_0^n = n!, a_n^n = n!\, n,\ a_{n-1}^n = n^2$, і для $k = 2, 3, \dots, n-2$,

$$a_k^n = a_{k-1}^{n-1} + (n+k) a_k^{n-1}.$$

Попередня теорема узагальнюється для довільного цілого числа n. Крім того вона встановлює рекурентне співвідношення яке передбачає коефіцієнти a_k^n для будь-якої цілочисельної пари (n, k).

Теорема 1.4. *Нехай $G(u)$ – перетворення Сумуду функції $f(t)$ в* A, *нехай $f^{(n)}(t)$ означає n –ту похідну від $f(t)$ по t, і нехай $G_n(u)$ означає n –ту похідну від $G(u)$ по u, тоді перетворення Сумуду функції $t^n f^{(n)}$ матиме вигляд*

$$\mathbb{S}[t^n f^n(t)] = u^n G_n(u).$$

Розділ 2

Нове інтегральне перетворення Ельзакі

Як пише автор, перетворення Ельзакі отримано з класичного інтеграла Фур'є, на основі математичної простоти перетворення Ельзакі і його фундаментальних властивостей.

Перетворення Ельзакі було введено Тарігом Ельзакі для полегшення процесу звичайних рівнянь і рівнянь з частинними похідними.

Зазвичай перетворення Фур'є, Лапласа та Сумуду є зручними математичними інструментами для розв'язування диференціальних рівнянь. Також для розв'язання можна використовувати перетворення Ельзакі та деякі його основні властивості диференціальних рівняннь (див.[1]).

Перетворення Ельзакі визначене для функції експоненціального росту.

Ми розглядаємо функції у множині А, що визначається:

$$A = \left\{ f(t) \colon \exists M, k_1, k_2 > 0, |f(t)| < Me^{\frac{|t|}{k_j}}, \text{якщо } t \in (-1)^j \times [0; \infty) \right\}.$$

Для даної функції у множині A константа M повинна бути скінченним числом, k_1, k_2 можуть бути скінченними або нескінченними. Перетворення Ельзакі, що позначається оператором $E(.)$ визначається інтегральним рівнянням

$$E[f(t)] = T(v) = v \int_0^\infty f(t) e^{\frac{-t}{v}} dt \,, t \geq 0, k_1 \leq v \leq k_2.$$

Змінна ν у цьому перетворенні використовується для факторизації змінної t в аргументі функції f. Це перетворення має більш глибокий зв'язок з перетворенням Лапласа. Ми також представляємо багато різних властивостей цього нового перетворення та перетворення Сумуду, а також декілька властивостей степеня.

Мета цього дослідження – показати застосування нового перетворення і його ефективність при лінійних диференціальних рівнянь.

2.1 Перетворення Ельзакі деяких функцій

Достатні умови існування перетворення Ельзакі полягають у тому, що $f\ (t)$ для $t \geq 0$ буде кусково-неперервним та експоненціальним порядком. В іншому випадку перетворення Ельзакі може існувати або не існувати(див.[1], [16]).

У цьому розділі ми знаходимо перетворення Ельзакі простих функцій.

(i) Нехай $f(t) = 1,$ тоді :

$$E(1) = \nu \int_0^{\infty} e^{\frac{-t}{\nu}} dt = \nu(-\nu e^{\frac{-t}{\nu}})\Big|_0^{\infty} = \nu^2.$$

(ii) Нехай $f(t) = t,$ тоді :

$$E(t) = \nu \int_0^{\infty} t e^{\frac{-t}{\nu}} dt.$$

Інтегруємо частинами, щоб знайти: $E(t) = \ \nu^3$.

У загальному випадку, якщо $n > \ 0$ - ціле число, тоді

$$E(t^n) = n!\, \nu^{n+2}.$$

(iii)

$$E[e^{at}] = \nu \int_0^{\infty} e^{\frac{-t}{\nu}} e^{at} dt = \frac{\nu^2}{1 - a\nu}.$$

Цей результат буде корисним для знаходження перетворення Ельзакі:

$$E[sinat] = \frac{av^3}{1 + a^2v^2} \qquad E[cosat] = \frac{v^2}{1 + a^2v^2}$$

$$E[sinhat] = \frac{av^3}{1 - a^2v^2} \qquad E[coshat] = \frac{v^2}{1 - a^2v^2}.$$

Теорема 2.1.

Нехай $T(v)$ *– це перетворення Ельзакі* $[E(f(t)) = T(v)]$. *Тоді*

(i)
$$E[f'(t)] = \frac{T(v)}{v} - vf(0);$$

(ii)
$$E[f''(t)] = \frac{T(v)}{v^2} - f(0) - vf'(0);$$

(iii)
$$E\left[f^{(n)}(t)\right] = \frac{T(v)}{v^n} - \sum_{k=0}^{n-1} v^{2-n+k} f^{(k)}(0).$$

Доведення.

(i)
$$E[f'(t)] = v\int_0^\infty f'(t)e^{\frac{-t}{v}}dt.$$

Інтегруємо частинами, щоб знайти:

$$E[f'(t)] = \frac{T(v)}{v} - vf(0).$$

(ii) Нехай $g(t) = f'(t)$, тоді:

$$E[g'(t) = \frac{1}{\nu} E[g(t)] - \nu g(0),$$

використовуючи (i), знайдемо

$$E[f''(t)] = \frac{T(\nu)}{\nu^2} - f(0) - \nu f'(0).$$

(iii) Може бути доведено методом математичної індукції. ■

Перетворення Ельзакі може застосовуватися до задач, які зазвичай розв'язуються за допомогою перетворення Лапласа.

Дійсно, як показує наступна теорема, перетворення Ельзакі тісно пов'язане з перетворенням Лапласа $F(s\ )$ (див. [2], [17]).

Теорема 2.2.

Нехай

$$f(t) \in A = \left\{ \begin{matrix} f(t) | \exists M,\ k_1, k_2 > 0 | \\ |f(t)| < Me^{\frac{|t|}{k_i}}, \text{якщо } t \in (-1)^j \times [0; \infty) \end{matrix} \right\},$$

де перетворення Лапласа $F\ (s)$, *тоді перетворення Ельзакі* $T\ (\nu)$ *функції* $f\ (t)$ *має вигляд*

$$T(\nu) = \nu F\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Доведення.

Нехай $f(t) \in A$. Тоді для $-k_1 < \nu < k_2$, маємо

$$T(\nu) = \nu^2 \int_0^\infty e^{-t} f(\nu t) dt.$$

Нехай $w = \nu t$. Тоді маємо

$$T(\nu) = \nu^2 \int_0^\infty e^{-\frac{w}{\nu}} f(w) \frac{dw}{\nu} = \nu \int_0^\infty e^{-\frac{w}{\nu}} f(w) dw = \nu F\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Також маємо, що $T(1) = F(1)$. Отже, перетворення Ельзакі і Лапласа повинні співвпадати при $\nu = s = 1$. ■

Фактично зв'язок перетворення Ельзакі з перетворенням Лапласа йде набагато глибше, тому правила F і T в $T(\nu) = \nu F\left(\frac{1}{\nu}\right)$ можуть бути взаємозамінні наступними наслідками.

Наслідок 2.1.

Нехай для $f(t)$ існують F і T для Лапласа і Ельзакі. Тоді

$$F(s) = sT\left(\frac{1}{s}\right).$$

Доведення.

Дане співвідношення можна отримати з $T(\nu) = \nu F\left(\frac{1}{\nu}\right)$, взявши $\nu = \frac{1}{s}$.

Рівняння

$$T(\nu) = \nu F\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

і

$$F(s) = sT\left(\frac{1}{s}\right)$$

утворюють відношення дуальності, які регулюють ці два перетворення і можуть бути засобами отримання одного через інше, коли це необхідно. ■

2.2 Одержаний результат

Далі доведемо подібний результат, який показує зв'язок з перетворенням Сумуду та перетворенням Ельзакі.

Твердження 2.1.

Нехай

$$f(t) \in A = \left\{ \begin{matrix} f(t) | \exists M,\ k_1, k_2 > 0 | \\ |f(t)| < Me^{\frac{|t|}{k_i}}, \text{ якщо } t \in (-1)^j \times [0; \infty) \end{matrix} \right\},$$

де перетворення Сумуду $G(.)$*, тоді перетворення Ельзакі* $T(.)$ *функції* $f\ (t)$ *має вигляд*

$$T(v) = v^2 G(v).$$

Доведення.

Нехай $f(t) \in A$. Позначимо через $T(v)$ – перетворення Ельзакі, де $-k_1 < v < k_2$. Тоді

$$T(v) = \int_0^\infty v\ f(t) e^{\frac{-t}{v}} dt = \left| \begin{matrix} \dfrac{t}{v} = u \\ t = vu \\ dt = vdu \\ t \quad 0 \quad \infty \\ u \quad 0 \quad \infty \end{matrix} \right| = v^2 \int_0^\infty f(uv) e^{-u} du = v^2 G(v).$$

Отже,

$$T(v) = v^2 G(v). \quad \blacksquare$$

2.3. Перетворення Ельзакі для похідних і інтегралів

Переформульована рівність $T(\nu) = \nu F\left(\frac{1}{\nu}\right)$ буде нашим робочим визначенням, оскільки перетворення Лапласа з $sint$ це $\frac{1}{1+s^2}$. Перетворення Ельзакі - це $E[sinat] = \frac{\nu^3}{1+\nu^2}$, що ілюструє дуальність між цими двома перетвореннями (див.[2], [18]).

Теорема 2.3.

Нехай $F'(s\ )$ *і* $T'(v)$ *будуть перетвореннями Лапласа і Ельзакі похідної* $f(t)$ *. Тоді:*

(i)
$$T'(\nu) = \frac{T(\nu)}{\nu} - \nu;$$

(ii)
$$T^{(n)}(\nu) = \frac{T(\nu)}{\nu^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{2-n+k} f^{(k)}(0), \quad n \geq 1,$$

де $T^n(\nu)$ *і* $F^n(s)$ *це перетворення Ельзакі і Лапласа* $n -$ та *похідна функції* $f(t)$.

Доведення.

(i) Оскільки перетворення Лапласа похідних $f(t)$ є $F'(s) = sF(s) - f(0)$.

Тоді

$$T'(\nu) = \nu F'\left(\frac{1}{\nu}\right) = \nu\left[\frac{1}{\nu} F\left(\frac{1}{\nu}\right) - f(0)\right] = F\left(\frac{1}{\nu}\right) - \nu f(0) = \frac{T(\nu)}{\nu} - \nu f(0).$$

(ii) За визначенням, перетворення Лапласа для $f^{(n)}(t)$ отримується наступним чином

$$F^{(n)}(s) = S^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} S^{n-(k+1)} f^{(k)}(0).$$

Тому

$$F\left(\frac{1}{\nu}\right) = \frac{F\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\nu^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\nu^{n-(k+1)}}.$$

Тоді, з $T^{(k)}(\nu) = \nu F^{(k)}\left(\frac{1}{\nu}\right)$ для $0 \le k \le m$, ми отримуємо

$$T^{(n)}(\nu) = \frac{T(\nu)}{\nu^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \nu^{2-n+k} f^{(k)}(0)\,. \blacksquare$$

Теорема 2.4.

Нехай $T\,'(\nu)$ і $F\,'(s)$ позначаються перетворення Ельзакі і Лапласа визначеного інтеграла від $f(t)$

$$h(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Тоді

$$T'(\nu) = E[h(t)] = \nu T(\nu).$$

Доведення.

За означенням перетворення Лапласа $F'(s) = L\big(h(t)\big) = \frac{F(s)}{s}$.

Звідси

$$T'(\nu) = E[h(t)] = \nu T(\nu). \blacksquare$$

Теорема 2.5.

Нехай $T(\nu)$ є перетворенням Ельзакі функції $f(t)$ тоді:

(i)
$$E[tf(t) = \nu^2 \frac{dT(\nu)}{d\nu} - \nu T(\nu);$$

(ii)
$$E[t^2 f(t)] = \nu^4 \frac{d^2}{d\nu^2} T(\nu).$$

Доведення.

З означенням перетворення Ельзакі ми маємо

(i)
$$\frac{dT}{d\nu} = T'(\nu) = \frac{d}{d\nu}\int_0^\infty \nu e^{-t/\nu} f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \nu} \nu e^{-t/\nu} f(t)dt$$
$$= \int_0^\infty \frac{1}{\nu} e^{-t/\nu}\big(tf(t)\big)dt + \int_0^\infty e^{-t/\nu} f(t)dt.$$

Тоді

$$= \frac{1}{\nu^2} E\big(tf(t)\big) + \frac{1}{\nu} E\big(f(t)\big),$$

$$E[tf(t)] = \nu^2 \frac{dT(\nu)}{d\nu} - \nu T(\nu),$$

де

$$E[f(t)] = T(\nu).$$

Доведення (ii) аналогічне. ■

Теорема 2.6.

Якщо $E[f(t)] = T(\nu)$ *тоді*

(i)
$$E[tf'(t)] = \nu^2 \frac{d}{d\nu}\left[\frac{T(\nu)}{\nu} - \nu f(0)\right] - \nu\left[\frac{T(\nu)}{\nu} - \nu f(0)\right];$$

(ii)
$$E[tf''(t)] = \nu^2 \frac{d}{d\nu}\left[\frac{T(\nu)}{\nu^2} - f(0) - \nu f'(0)\right] - \nu\left[\frac{T(\nu)}{\nu^2} - f(0) - \nu f'(0)\right];$$

(iii)
$$E[t^2 f''(t)] = \nu^4 \frac{d^2}{d\nu^2}\left[\frac{T(\nu)}{\nu^2} - f(0) - \nu f'(0)\right].$$

Доведення.

(i) З попередньої теореми ми маємо

$$E[tf'(t)] = \nu^2 \frac{d}{d\nu}\left[E\big(f'(t)\big)\right] - \nu E[f'(t)]$$
$$= \nu^2 \frac{d}{d\nu}\left[\frac{T(\nu)}{\nu} - \nu f(0)\right] - \nu\left[\frac{T(\nu)}{\nu} - \nu f(0)\right].$$

Доведення (ii) і (iii) аналогічне до (i). ■

Теорема зсуву

Нехай $f(t) \in A$ *з перетворенням Ельзакі* $T(\nu)$. *Тоді*

$$E[e^{at} f(t)] = \frac{1}{1 - a\nu} T\left[\frac{\nu}{1 - a\nu}\right].$$

Доведення.

З означення перетворення Ельзакі ми маємо:

$$E[e^{at}f(t)] = \nu^2 \int_0^\infty f(\nu t)e^{-(1-a\nu)t}dt.$$

Нехай $w = (1 - a\nu)t \Rightarrow dw = (1 - a\nu)dt$, тоді

$$\frac{\nu^2}{1-a\nu}\int_0^\infty f\left[\frac{w\nu}{1-a\nu}\right]e^{-w}dw = \frac{1}{1-a\nu}T\left[\frac{\nu}{1-a\nu}\right]. \quad \blacksquare$$

Теорема згортки.

Нехай $f(t)$ і $g(t)$ будуть визначені в А, *де перетворення Лапласа і Ельзакі $F(s)$ і $G(s)$ перетворюють $M(\nu)$ і $N(\nu)$. Потім перетворення Ельзакі з згортки f і g*

$$(f * g)(t) = \int_0^\infty f(t)g(t-\tau)d\tau.$$

Отримується

$$E[(f * g)(t)] = \frac{1}{\nu}M(\nu)N(\nu).$$

Доведення.

Перетворення Лапласа в $(f * g)$ записується:

$$L[(f * g)] = F(s)G(s).$$

За відношенням дуальності $T(\nu) = \nu F\left(\frac{1}{\nu}\right)$ ми маємо:

$$E[(f * g)(t)] = \nu L[(f * g)(t)],$$

і з

$$M(\nu) = \nu F\left(\frac{1}{\nu}\right), \qquad N(\nu) = \nu G\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Тоді

$$E[(f * g)(t)] = \nu\left[F\left(\frac{1}{\nu}\right) \cdot G\left(\frac{1}{\nu}\right)\right],$$

$$\nu\left[\frac{M(\nu)}{\nu} \cdot \frac{N(\nu)}{\nu}\right] = \frac{1}{\nu} M(\nu) N(\nu). \quad \blacksquare$$

Розділ 3

Критичний аналіз перетворення Ельзакі

У даному розділі висвітлено порівняння застосувань інтегральних перетворень на основі деяких диференціальних рівнянь.

Приклад 1.

- Перетворення Ельзакі:

$$\frac{dy}{dx} + y = 0, \qquad y(0) = 1$$

Застосуємо перетворення Ельзакі до цього рівняння:

$$y' \;\rightarrow\; \frac{1}{v}E(y) - vy(0) = \frac{1}{v}E(y) - v$$

$$y \;\rightarrow\; E(y)$$

Отримаємо наступне рівняння:

$$\frac{1}{v}E(y) - v + E(y) = 0$$

$$E(y) = \frac{v^2}{1+v}$$

За оберненим перетворенням Ельзакі маємо, що

$$y(x) = e^{-x}.$$

- Перетворення Лапласа:

$$\frac{dy}{dx} + y = 0, \qquad y(0) = 1$$

Застосуємо перетворення Лапласа до цього рівняння:

$$y' \;\to\; pY(p) - y(0) = pY(p) - 1$$

$$y \;\to\; Y(p)$$

Отримаємо наступне рівняння:

$$pY(p) - 1 + Y(p) = 0$$

$$Y(p) = \frac{1}{p+1}$$

За оберненим перетворенням Лапласа маємо, що

$$y(x) = e^{-x}.$$

Висновок. *Таким чином, показано ефективність звичайного однорідного диференціального рівняння двома методами, а саме: перетворення Ельзакі та Лапласа. Обидва інтегральні перетворення дали однаковий результат, проте, судячи з розв'язку, перетворення Ельзакі не є простішим за інші перетворення.*

Приклад 2.

- Перетворення Ельзакі:

$$y' + 2y = x, \quad y(0) = 1$$

Застосуємо перетворення Ельзакі до цього рівняння:

$$y' \;\to\; \frac{1}{v}E(y) - vy(0) = \frac{1}{v}E(y) - v$$

$$y \;\to\; E(y)$$

$$x \to v^3$$

Отримаємо наступне рівняння:

$$\frac{1}{v}E(y) - v + 2E(y) = v^3$$

$$E(y) = \frac{(v^3 + v)v}{1 + 2v}$$

Далі ми розкладаємо на прості дроби і отримуємо

$$E(y) = \frac{1}{2}v^3 + \frac{5}{4}\left(\frac{v^2}{1 + 2v}\right) - \frac{1}{4}v^2$$

І за оберненим перетворенням Ельзакі маємо, що

$$y(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}e^{-2x} - \frac{1}{4}$$

- <u>Перетворення Лапласа:</u>

$$y' + 2y = x, \quad y(0) = 1$$

Застосуємо перетворення Лапласа до цього рівняння:

$$y' \;\rightarrow\; pY(p) - y(0) = \; pY(p) - 1$$

$$y \;\rightarrow\; Y(p)$$

$$x \rightarrow \frac{1}{p^2}$$

Отримаємо наступне рівняння:

$$pY(p) - 1 + 2Y(p) = \frac{1}{p^2}$$

$$Y(p) = \frac{1 + p^2}{p^2(p + 2)}$$

Розкладемо отримане рівняння на прості дроби

$$\frac{1+p^2}{p^2(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+2}$$

Тоді

$$A = -\frac{1}{4}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{5}{4}$$

Отже,

$$Y(p) = -\frac{1}{4p} + \frac{1}{2p^2} + \frac{5}{4(p+2)}$$

За оберненим перетворенням Лапласа маємо, що

$$y(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}e^{-2x} - \frac{1}{4}.$$

Висновок. *У даному прикладі розглянуто неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку з нульовою початковою умовою. Перевіривши розв'язність даного рівняння двома методами, одержано результат, перетворення Лапласа нічим не поступається новому інтегральному перетворенню.*

Приклад 3.

- Перетворення Ельзакі:

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = y'(0) = 1$$

Застосуємо перетворення Ельзакі до цього рівняння:

$$y'' \to \frac{1}{\nu^2}E(y) - y(0) - \nu y'(0) = \frac{1}{\nu^2}E(y) - 1 - \nu$$

$$y \;\to\; E(y)$$

Отримаємо наступне рівняння:

$$\frac{1}{\nu^2}E(y) - 1 - \nu + E(y) = 0$$

$$E(y) = \frac{\nu^2}{1+\nu^2} + \frac{\nu^3}{1+\nu^2}$$

За оберненим перетворенням Ельзакі маємо, що

$$y(x) = sinx + cosx.$$

- Перетворення Лапласа:

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = y'(0) = 1$$

Застосуємо перетворення Лапласа до цього рівняння:

$$y'' \to p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p - 1$$

$$y \to Y(p)$$

Отримаємо наступне рівняння:

$$p^2Y(p) - p - 1 + Y(p) = 0$$

$$Y(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1}$$

За оберненим перетворенням Лапласа маємо, що

$$y(x) = sinx + cosx.$$

Висновок. *Маємо однорідне диференціальне рівняння другого порядку з відповідними початковими умовами. Детально описавши розв’язок даного рівняння за допомогою інтегральних перетворень,* *бачимо, що ефективність перетворення Ельзакі рівно така ж сама як і перетворення Лапласа.*

Приклад 4.

- <u>Перетворення Ельзакі:</u>

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 4$$

Застосуємо перетворення Ельзакі до цього рівняння:

$$y'' \to \frac{1}{v^2}E(y) - y(0) - vy'(0) = \frac{1}{v^2}E(y) - 1 - 4v$$

$$y' \ \to \ \frac{1}{v}E(y) - vy(0) = \frac{1}{v}E(y) - v$$

$$y \ \to \ E(y)$$

Отримаємо наступне рівняння

$$\frac{1}{v^2}E(y) - 1 - 4v - \frac{3}{v}E(y) + 3v + 2E(y) = 0$$

$$E(y)\left(\frac{(v-1)(2v-1)}{v^2}\right) = 1 + v$$

$$E(y) = v^2\left(\frac{1+v}{(v-1)(2v-1)}\right)$$

Розкладемо отримане рівняння на прості дроби

$$\frac{1+v}{(v-1)(2v-1)} = \frac{A}{v-1} + \frac{B}{2v-1}$$

Тоді

$$A = 2, B = -3$$

Отже,

$$E(y) = \nu^2\left(\frac{2}{\nu - 1} - \frac{3}{2\nu - 1}\right)$$

За оберненим перетворенням Ельзакі маємо, що

$$y(x) = -2e^x + 3e^{2x}$$

- Перетворення Лапласа:

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 4$$

Застосуємо перетворення Лапласа до цього рівняння:

$$y'' \to p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p - 4$$

$$y' \to pY(p) - y(0) = pY(p) - 1$$

$$y \to Y(p)$$

Отримаємо наступне рівняння

$$p^2Y(p) - p - 4 - 3pY(p) + 3 + 2Y(p) = 0$$

$$Y(p) = \frac{p + 1}{(p - 2)(p - 1)}$$

Розкладемо отримане рівняння на прості дроби

$$\frac{p + 1}{(p - 1)(p - 2)} = \frac{A}{p - 1} + \frac{B}{p - 2}$$

Тоді

$$A = -2, B = 3$$

Отже,

$$Y(p) = -\frac{2}{p-1} + \frac{3}{p-2}$$

За оберненим перетворенням Лапласа маємо, що

$$y(x) = -2e^{x} + 3e^{2x}.$$

Висновок. *Аналогічно до прикладу 3, розглянуто однорідне диференціальне рівняння другого порядку з початковими умовами. Підрахувавши кількість ітерацій у вигляді кроків розв'язань, можемо зробити висновок, що перетворення Ельзакі не спрощує обчислень.*

Приклад 5.

- Перетворення Ельзакі:

$$y'' + 9y = cos2x, \qquad y(0) = 1, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Для зручності позначимо

$$y'(0) = c$$

Застосуємо перетворення Ельзакі до цього рівняння:

$$y'' \to \frac{1}{v^2}E(y) - y(0) - vy'(0) = \frac{1}{v^2}E(y) - 1 - cv$$

$$y \;\to\; E(y)$$

$$cos2x \;\to\; \frac{v^2}{4v^2+1}$$

Отримаємо наступне рівняння:

$$\frac{1}{v^2}E(y) - 1 - cv + 9E(y) = \frac{v^2}{4v^2+1}$$

$$E(y) = \nu^2\left(\frac{\nu^2}{(4\nu^2+1)(9\nu^2+1)} + \frac{1}{9\nu^2+1} + \frac{\nu c}{9\nu^2+1}\right)$$

Розкладемо отримане рівняння на прості дроби

$$\frac{\nu^2}{(4\nu^2+1)(9\nu^2+1)} = \frac{A\nu+B}{4\nu^2+1} + \frac{C\nu+D}{9\nu^2+1}$$

Тоді

$$A = 0, B = \frac{1}{5}, C = 0, D = -\frac{1}{5}$$

Отже,

$$E(y) = \nu^2\left(\frac{1}{5(4\nu^2+1)} + \frac{4}{5(9\nu^2+1)} + \frac{\nu c}{9\nu^2+1}\right)$$

За оберненим перетворенням Ельзакі маємо, що

$$y(x) = \frac{4}{5}cos3x + \frac{c}{3}sin3x + \frac{1}{5}cos2x$$

З початкової умови $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ маємо, що $c = \frac{4}{5}$, а, отже,

$$y(x) = \frac{4}{5}cos3x + \frac{4}{5}sin3x + \frac{1}{5}cos2x.$$

- Перетворення Лапласа:

$$y'' + 9y = cos2x, \qquad y(0) = 1, \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Для зручності позначимо

$$y'(0) = c$$

Застосуємо перетворення Лапласа до цього рівняння:

$$y'' \to p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p - c$$

$$y \to Y(p)$$

$$cos2x \ \to \ \frac{p}{p^2+4}$$

Отримаємо наступне рівняння:

$$p^2Y(p) - p - c + 9Y(p) = \frac{p}{p^2+4}$$

$$Y(p) = \frac{p}{(p^2+4)(p^2+9)} + \frac{p}{p^2+9} + \frac{c}{p^2+9}$$

Розкладемо отримане рівняння на прості дроби

$$\frac{p}{(p^2+4)(p^2+9)} = \frac{Ap+B}{p^2+4} + \frac{Cp+D}{p^2+9}$$

Тоді

$$A = \frac{1}{5}, B = 0, C = -\frac{1}{5}, D = 0$$

Отже,

$$Y(p) = \frac{5p}{4(p^2+4)} + \frac{4p}{5(p^2+9)} + \frac{c}{p^2+9}$$

За оберненим перетворенням Лапласа маємо, що

$$y(x) = \frac{4}{5}cos3x + \frac{c}{3}sin3x + \frac{1}{5}cos2x.$$

З початкової умови $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ маємо, що $c = \frac{4}{5}$, а отже

$$y(x) = \frac{4}{5}cos3x + \frac{4}{5}sin3x + \frac{1}{5}cos2x.$$

Висновок. *Розглянуто неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з початковими умовами. На відміну, від попередніх рівнянь, його розв'язок є об'ємнішим та складнішим. Від перетворення Ельзакі очікувалось його полегшення порівняно з перетворенням Лапласа, але, на жаль, цього не трапилось.*

Приклад 6.

- Перетворення Ельзакі:

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{3x}, y(0) = -3, y'(0) = 5$$

Застосуємо перетворення Ельзакі до цього рівняння:

$$y'' \to \frac{1}{v^2}E(y) - y(0) - vy'(0) = \frac{1}{v^2}E(y) + 3 - 5v$$

$$y' \ \to \ \frac{1}{v}E(y) - vy(0) = \ \frac{1}{v}E(y) + 3v$$

$$y \ \to \ E(y)$$

$$e^{3t} \to \frac{v^2}{1-3v}$$

Отримаємо наступне рівняння:

$$\frac{1}{v^2}E(y) + 3 - 5v - \frac{3}{v}E(y) - 9v + 2E(y) = \ \frac{v^2}{1-3v}$$

$$E(y) = \frac{v^2(-38v^2 + 23v - 3)}{(1-2v)(1-3v)(1-v)}$$

Розкладемо отримане рівняння на прості дроби

$$\frac{-38v^2 + 23v - 3}{(1-2v)(1-3v)(1-v)} = \frac{A}{1-3v} + \frac{B}{1-v} + \frac{C}{1-2v}$$

Тоді

$$A = 2, B = -9, C = 4$$

Отже,

$$E(y) = \nu^2 \left(\frac{2}{1 - 3\nu} - \frac{9}{1 - \nu} + \frac{4}{1 - 2\nu} \right)$$

За оберненим перетворенням Ельзакі маємо, що

$$y(x) = 2e^{3x} + 4e^{2x} - 9e^{x}.$$

- <u>Перетворення Лапласа:</u>

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{3x}, y(0) = -3, y'(0) = 5$$

Застосуємо перетворення Лапласа до цього рівняння:

$$y'' \to p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p - 4$$

$$y' \ \to \ pY(p) - y(0) = \ pY(p) - 1$$

$$y \to Y(p)$$

$$e^{3x} \to \frac{1}{p - 3}$$

Отримаємо наступне рівняння

$$p^2Y(p) - p - 4 - \ pY(p) + 3 + 2Y(p) = \frac{4}{p - 3}$$

$$Y(p) = \frac{3p^2 - 23p + 38}{(p - 3)(p - 2)(p - 1)}$$

Розкладемо отримане рівняння на прості дроби

$$\frac{3p^2 - 23p + 38}{(p-3)(p-2)(p-1)} = \frac{A}{p-3} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-1}$$

Тоді

$$A = 2, B = 4, C = -9$$

Отже,

$$Y(p) = \frac{2}{p-3} + \frac{4}{p-2} - \frac{9}{p-1}$$

За оберненим перетворенням Лапласа маємо, що

$$y(x) = 2e^{3x} + 4e^{2x} - 9e^{x}.$$

Висновок. *Диференціальне рівняння другого порядку зі спеціальною правою частиною у вигляді експоненти було розв'язане двома способами. В кожному з них було поставлено оригіналу відповідне зображення, яке полегшило роботу, але за допомогою перетворення Ельзакі не вдалось уникнути та зменшити об'єм виконаної роботи.*

Приклад 7.

- Перетворення Ельзакі:

$$y'' + 4y = 9x, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 7$$

Застосуємо перетворення Ельзакі до цього рівняння:

$$y'' \to \frac{1}{v^2}E(y) - y(0) - vy'(0) = \frac{1}{v^2}E(y) - 7v$$

$$y \;\to\; E(y)$$

$$x \to v^3$$

Отримаємо наступне рівняння:

$$\frac{1}{\nu^2}E(y) - 7\nu + 4E(y) = 9\nu^3$$

$$E(y) = \frac{9\nu^3}{4} - \frac{19}{8(1+4\nu^2)}$$

За оберненим перетворенням Ельзакі маємо, що

$$y(x) = \frac{9}{4}x + \frac{19}{8}sin2x.$$

- <u>Перетворення Лапласа:</u>

$$y'' + 4y = 9x, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 7$$

Застосуємо перетворення Лапласа до цього рівняння:

$$y'' \to p^2Y(p) - 7$$

$$y \to Y(p)$$

$$x \to \frac{1}{p^2}$$

Отримаємо наступне рівняння:

$$p^2Y(p) - 7 + 4Y(p) = \frac{9}{p^2}$$

$$Y(p) = \frac{7p^2 + 9}{p^2(p^2+4)}$$

Розкладемо отримане рівняння на прості дроби

$$\frac{7p^2+9}{p^2(p^2+4)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p^2}+\frac{Cx+D}{p^2+4}$$

Тоді

$$A=0, B=\frac{9}{4}, C=0, D=\frac{19}{4}$$

Отже,

$$Y(p)=\frac{9}{4p^2}+\frac{19}{4(p^2+4)}$$

За оберненим перетворенням Лапласа маємо, що

$$y(x)=\frac{9}{4}x+\frac{19}{8}sin2x.$$

Висновок. *В останньому прикладі було запропоновано розв'язання неоднорідного диференціального рівняння другого порядку з правою частиною у вигляді многочлена першого степеня. Як і в попередніх прикладах ефективність Ельзакі відмітити не вдалось.*

Розділ 4

Висновок

Після висвітлення вищенаведених зв’язків, можна зрозуміти, що унікальні, за словами Ельзакі, властивості його перетворення, які вказані як перевага його результату, насправді є тими ж, що і в Сумуду.

Більше того, у своїй роботі Ельзакі вважає особливістю той факт, що у порівнянні з перетворенням Лапласа, дане перетворення не потребує переходу до оберненого перетворення в розв’язанні звичайних диференціальних рівнянь. Здавалося б, ця особливість робить перетворення Ельзакі простішим для початківців, але насправді це не так, що було показано на прикладі звичайних диференціальних рівнянь.

У ситуації, коли вже існують певні методи аналізу рівнянь, кожен новий метод повинен продемонструвати якісь переваги у порівнянні зі старими методами.

На жаль, таких переваг у методі, основаному на перетворенні Ельзакі, не були знайдені. Тому вказане на початку роботи ігнорування провідними науковими математичними центрами перетворення Ельзакі стає більш зрозумілим.

Список літератури

[1] T. Elzaki. The new integral transform "Elzaki transform". Global Journal of Pure and Applied Mathematics, January 2011.

[2] T. M. Elzaki, S. M. Ezaki. On the connections between Laplace and ELzaki transforms. Advances in Theoretical and Applied Mathematics.Vol. 6, No.1, 2011. p. 1–10.

[3] Піх С. С., Ровенчак А. А., Криницький Ю. С. 1001 задача з математичної фізики. Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2006. 328 с.

[4] Тропченко А. Ю., Тропченко А.А. Цифровая обработка сигналов. Методы предварительной обработки. Учебное пособие по дисциплине "Теоретическая информатика". СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. 100 с.

[5] R. N. Bracewell. Discrete Hartley transform. J. Opt. Soc.Am.Vol.73, No.12, December 1983.

[6] Швець В. Т. Вища математика: операційне числення. Одеса. Видавництво ВМВ, 2015. 138 с.

[7] Є. В. Массалітіна, В. О. Гончаренко. Операційне числення: Метод. вказівки до вивч. дисципліни “Вища математика” для студ. енергет. спец. усіх форм навчання. К.: НТУУ “КПІ”, 2006. – 47 с.

[8] F. B. M. Belgacem, A. A. Karaballi. “Sumudu transform fundamental properties investigations and applications”. Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, May 2006.

[9] Davies B. Integral Transforms and Their Applications. Springer-Verlag New York.3rd ed. Vol. 41, 2001. p. 368.

[10] John W. Miles. Integral transforms in applied mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 1971

[11] Жислин Г. М. Электронное учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. 80 с.

[12] Hartley R. V. L. A More Symmetrical Fourier Analysis Applied to Transmission Problems. Proceedings of the IRE, 30(3), 1942. p.144–150.

[13] Массалітіна Є.В., Кільчинський О.О. Операційне числення. Теорія та методика розв'язування задач. Методичний посібник для студентів технічних спеціальностей. К.: НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2018. 90 с.

[14] Watugala, G. K. Sumudu transform: a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 24(1),1993 p.35–43.

[15] S. T. Demiray, H. Bulut, F. B. M. Belgacem. Sumudu transform method for analytical solutions of fractional type ordinary differential equations. Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering, 2015

[16] R. Murali, E. Thandapani, A. P. Selvan, A. A. S. Rani. Discrete Elzaki transforms and its applications. Far East Journal of Mathematical Sciences. Pushpa Publishing House, Prayagraj, India. Vol. 120, No. 1, 2019. p. 81-93

[17] S. Aggarwal, K. Bhatnagar, A. Dua. Dualities between Elzaki Transform and some useful integral transforms. International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering. Vol. 8. Iss. 12, October 2019.

[18] H. Kim. A note on the shifting theorems for the Elzaki transform. Int. Journal of Math. Analysis. Vol. 8. No. 10, 2014. p. 481- 488.