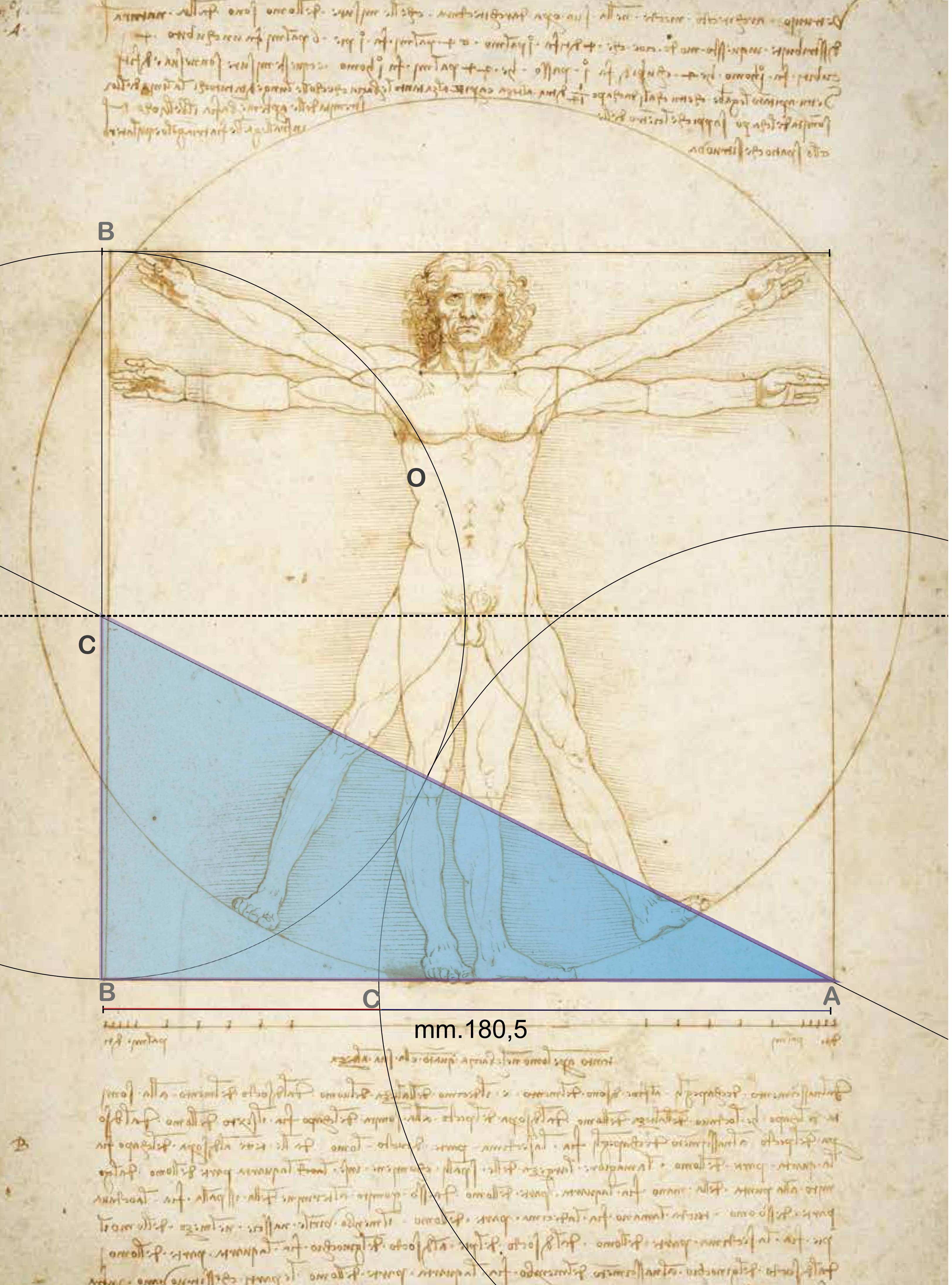

Retrospettiva, evoluzioni e applicazioni della sezione aurea

Lucio Cadeddu

La sezione aurea

La sezione aurea è la soluzione a un problema posto da Euclide (300 a.C. circa) nei suoi *Elementi*, libro VI, proposizione 30:

«Tagliare un segmento in rapporto medio ed estremo»

Euclide scriveva che: «si dice che una linea retta sia stata tagliata in un rapporto estremo e medio quando, come l'intera linea è per il segmento più grande, così è tanto maggiore quanto minore». In un linguaggio più moderno, quello delle proporzioni, si può esprimere come segue:

Il rapporto (o sezione) aureo è definito come il rapporto tra due lunghezze a e b tale che si verifichi

$(a+b) : a = a : b$

Indicando con l'incognita φ il rapporto $\frac{a}{b}$ si ha $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$ ossia $1 + \frac{b}{a} = \varphi$ e quindi: $1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$ da cui l'equazione polinomiale a coefficienti interi: $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ che ha come soluzione positiva $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ che è un numero irrazionale (cioè non esprimibile come una frazione, ovvero come rapporto tra due numeri interi) con infinite cifre dopo la virgola $\varphi = 1{,}618033990\ldots$

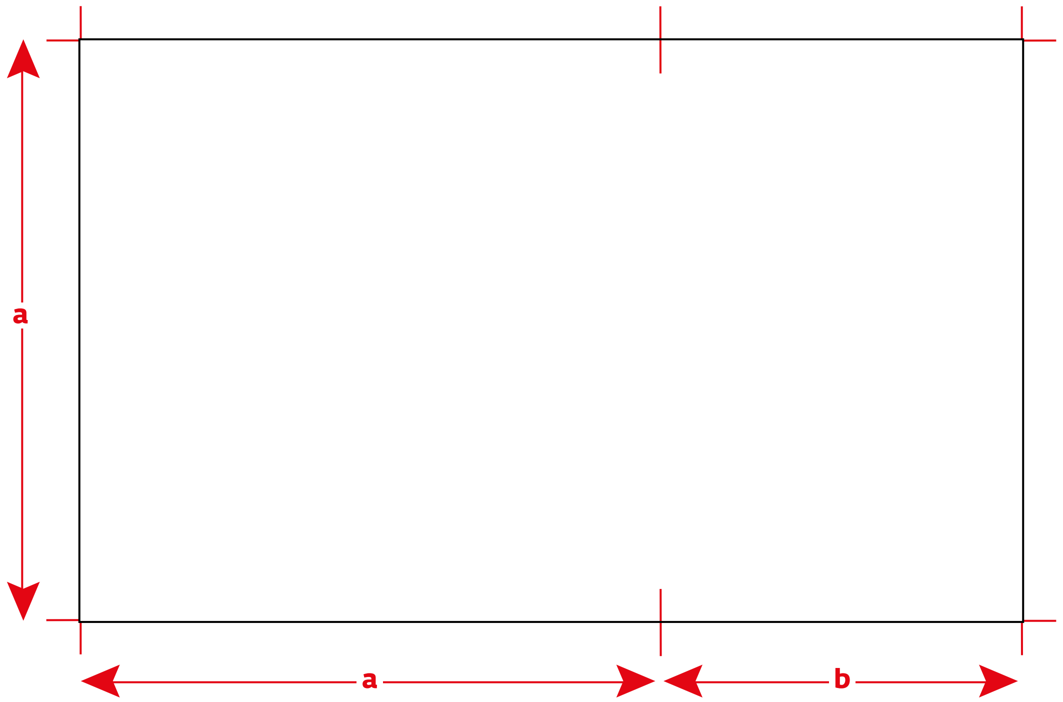

Fig. 1.

Proprietà

Il numero φ ha diverse proprietà interessanti. Dall'equazione precedente si ricava che il suo quadrato è uguale a φ aumentato di *1* ($\varphi^2 = \varphi+1$). Questa proprietà può essere iterata moltiplicando ambo i membri per φ, a passi successivi, per ottenere $\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi$, $\varphi^4 = \varphi^3 + \varphi^2$ e così via. Perciò, sostituendo si può scrivere che $\varphi^3 = 2\varphi + 1$, $\varphi^4 = 2\varphi+1+ \varphi^2 = 3\varphi +2$ e ancora $\varphi^5 = 5\varphi + 3$, $\varphi^6 = 8\varphi + 5$, $\varphi^7 = 13\varphi + 8$ e così via. In altre parole le potenze di φ si possono mettere in relazione diretta con il prodotto tra φ e i numeri della sequenza di Fibonacci (si veda in seguito).

Un'altra proprietà interessante è che l'inverso di φ è uguale a φ *-1* ($\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$). A questa proprietà si riconduce l'algoritmo citato nei capitoli precedenti.

Rettangoli aurei

Quando due segmenti in proporzione aurea sono i lati di un rettangolo esso stesso si definisce rettangolo aureo.

Al tempo nel quale questo tipo di relazione di proporzionalità cominciava a essere usata non erano noti, ovviamente, i calcoli di cui sopra, né i numeri irrazionali come φ. Era dunque necessario un sistema pratico che consentisse, ad esempio, la costruzione di un rettangolo aureo, utilizzando semplicemente riga e compasso, partendo da un quadrato. Come da figura, partendo da un quadrato, è sufficiente dividerlo a metà (risulterà quindi diviso in due rettangoli uguali), fissare il compasso nel punto medio e tracciare un arco di circonferenza di raggio pari alla diagonale di uno di questi rettangoli.

I rettangoli aurei hanno una straordinaria proprietà:

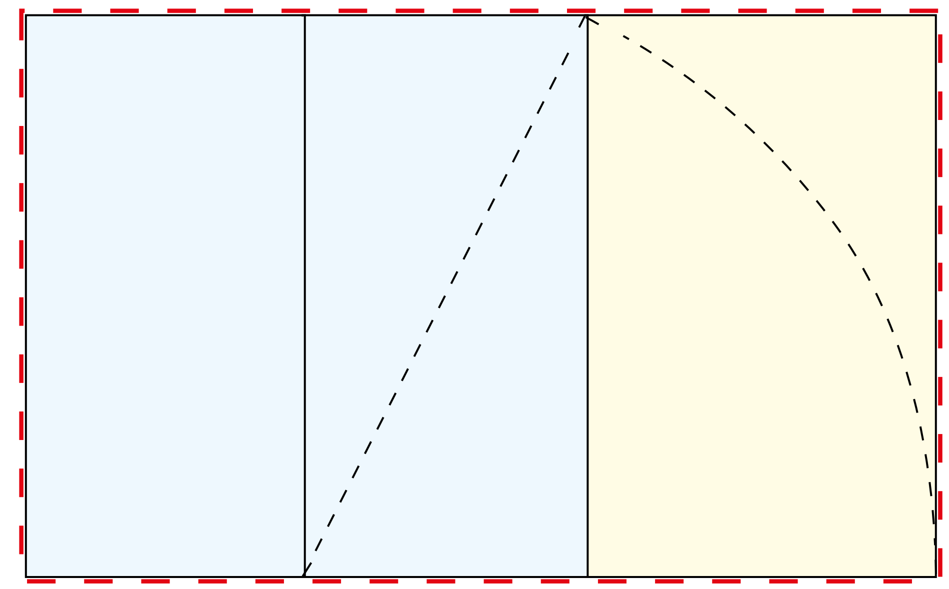

Fig. 2.

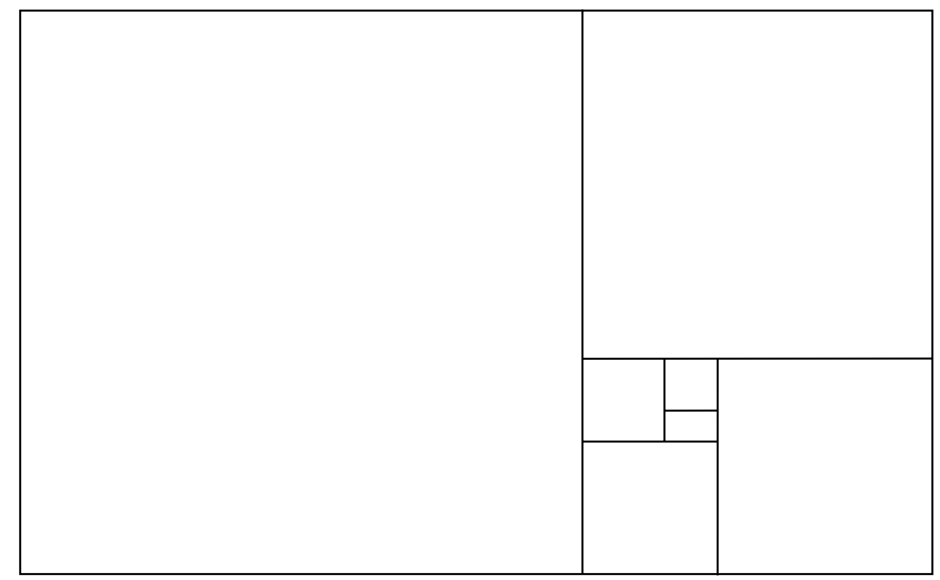

Fig. 3.

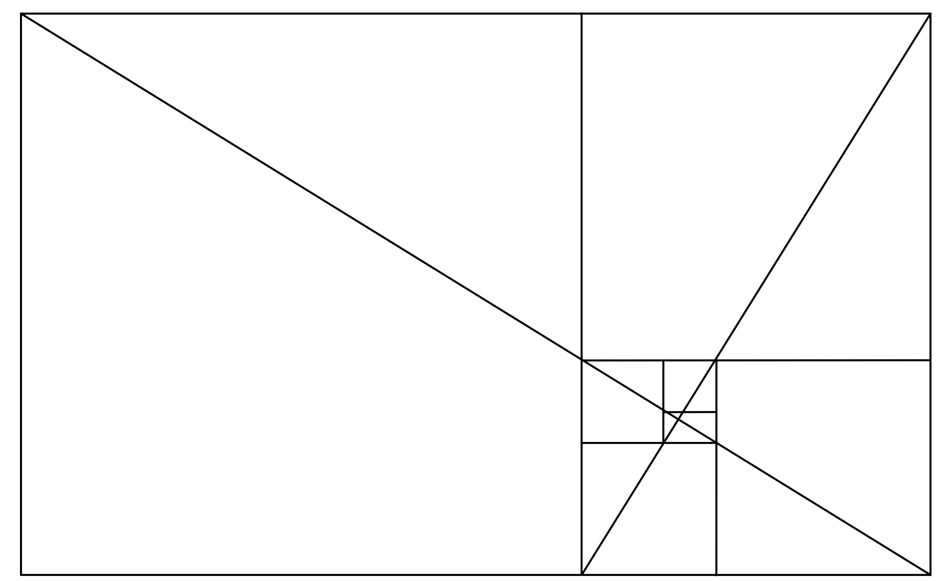

Fig. 4

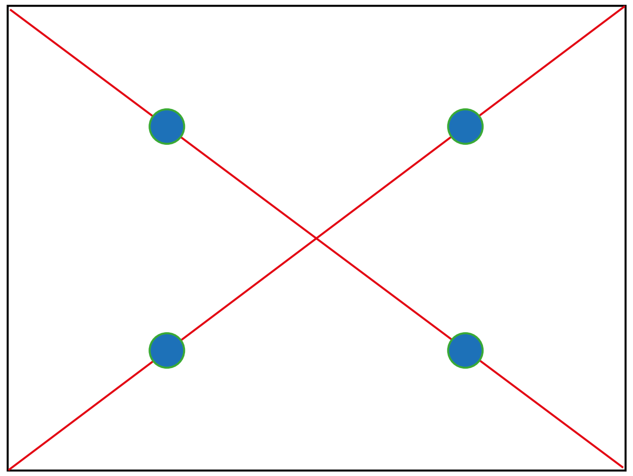

Fig. 5.

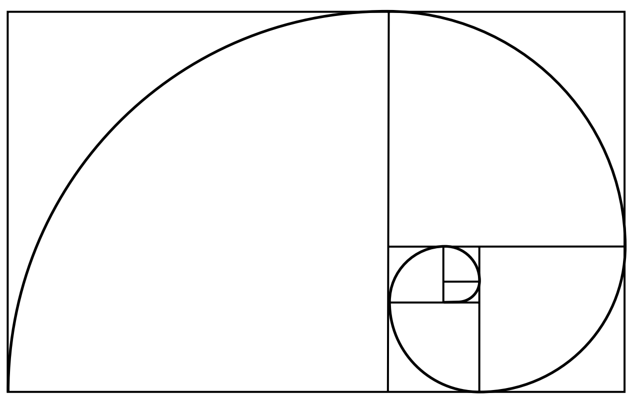

Fig. 6.

se da un rettangolo aureo si elimina un quadrato di lato pari all'altezza (quello azzurro in figura) il rettangolo restante (quello giallo in figura) è ancora un rettangolo aureo. Questo procedimento può essere iterato all'infinito (si veda fig. 3).

Ora, tracciamo le diagonali dei due rettangoli più grandi che appaiono nella sequenza, si prova facilmente che esse siano perpendicolari tra loro. Iterando questo procedimento si vede che tutte le infinite diagonali degli infiniti rettangoli aurei contenuti in quello iniziale sono sempre perpendicolari tra loro. Tutte queste diagonali hanno un unico punto d'intersezione. Lo scienziato e scrittore americano Clifford Pickover definì questo punto "magico" l'*Occhio di Dio*[1].

In realtà, eliminando il quadrato iniziale a destra anziché a sinistra e iterando il procedimento di cui sopra, in modalità diverse, si arriva a identificare quattro centri possibili, che alcuni artisti hanno chiamato *centro d'interesse*. In fotografia, questi punti sono chiamati anche *punti di forza* o *punti visivi d'interesse*, e sono quelli nei quali il fotografo posiziona gli elementi dell'immagine che devono attrarre maggiormente l'interesse di chi guarda (fig. 5).

Se ora tracciassimo, in ogni quadrato che sia via si costruisce, un arco di circonferenza come in fig. 6 otterremmo una curva (di lunghezza asintoticamente infinita) che è una particolare *spirale logaritmica*.

Tale curva si ritrova in natura nella disposizione dei semi di girasole, delle spine di una pianta grassa, in alcune conchiglie (ad esempio il nautilo), nella traiettoria di avvicinamento di un falco alla sua preda, all'interno di una tela di ragno, nella forma di alcune galassie e persino nei vortici creati da un uragano. La spirale "aurea" è una particolare spirale logaritmica la cui distanza dal centro aumenta ogni quarto di giro come una progressione geometrica di ragione φ.

La spirale logaritmica è stata descritta la prima volta da Cartesio nel 1638 e successivamente studiata da Evangelista Torricelli (1645) e Jakob Bernoulli, il quale coniò il termine *Spira mirabilis* (1692) e chiese che ne fosse incisa una sulla lapide della sua tomba. Per errore, però, fu incisa una più banale spirale archimedea[2].

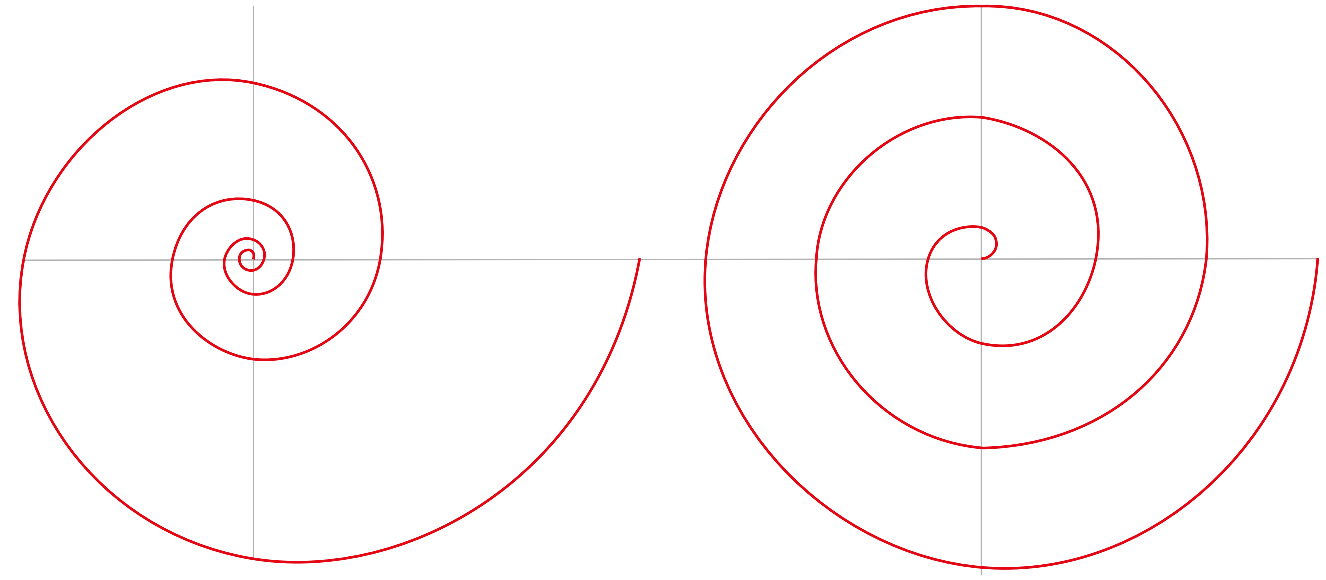

Fig. 7. Spirale logaritmica (a sinistra) e archimedea (a destra)

La spirale logaritmica differisce da quella archimedea per il fatto che le distanze fra i bracci di una spirale logaritmica aumentano secondo una progressione geometrica, mentre in una spirale archimedea queste distanze sono costanti (cfr. fig. 7). Anche la spirale aurea, come il rettangolo aureo, può essere costruita semplicemente utilizzando riga e compasso. Il centro asintotico di questa spirale è il centro d'interesse citato prima.

Triangoli aurei

Si possono definire, allo stesso modo dei rettangoli, i cosiddetti triangoli aurei o "sublimi". Si tratta di triangoli isosceli nei quali il rapporto tra il lato obliquo e la base è pari a φ. Ne consegue che l'angolo al vertice è pari a $\frac{\pi}{5}$ cioè 36°. Gli angoli alla base saranno, conseguentemente, di 72° ciascuno. Per questo motivo, talvolta, si definisce un rettangolo aureo uno con due angoli da 72° e uno da 36°. Un decagono regolare può essere suddiviso in dieci triangoli aurei, che hanno le basi coincidenti coi lati del poligono. I vertici sono in comune, al centro del decagono. Il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza è la parte aurea del raggio.

Anche per i triangoli aurei vale la proprietà di scomponibilità iterata, mantenendo le stesse proporzioni iniziali, come per i rettangoli aurei. Più precisamente bisecando uno degli angoli alla base si formano due triangoli, uno aureo e l'altro, isoscele, con la proprietà di avere uguale a φ il rapporto tra base e lato obliquo. Tale triangolo viene chiamato *gnomone aureo*. Iterando questa suddivisione il processo continua indefinitamente. Anche in questo caso può costruirsi, in questa sequenza di triangoli, una curva simile alla spirale aurea.

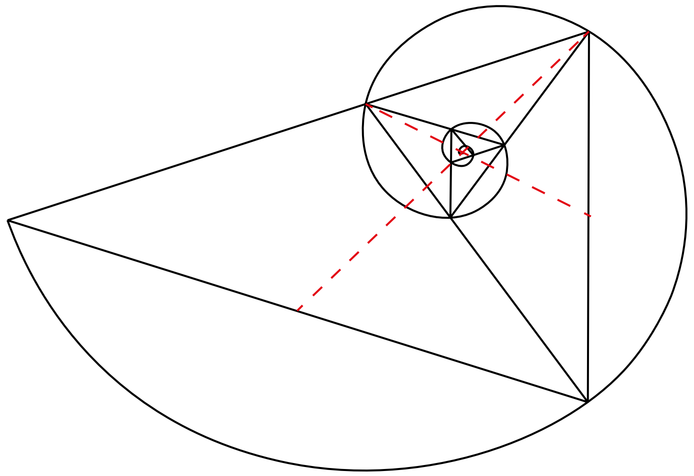

Fig. 8.

Triangolo di Keplero

Un triangolo di Keplero è un triangolo rettangolo nel quale i quadrati costruiti sui cateti e sull'ipotenusa hanno aree in progressione geometrica di ragione φ (es. $1, \varphi, \varphi^2$). Quindi, se un cateto ha lunghezza 1, per il teorema di Pitagora l'altro cateto ha lunghezza $\varphi^{1/2}$ e l'ipotenusa ha lunghezza φ. Più precisamente $\varphi^2 = \varphi+1$ (quadrato dell'ipotenusa uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti) e questa non è altro che l'equazione che definisce il numero φ! Questo tipo di triangolo può essere costruito con riga e compasso partendo da un rettangolo aureo.

Cronologia sulla proporzione aurea

Le origini della proporzione oggi nota come proporzione aurea sono a tutt'oggi incerte ma esisterebbero delle evidenze che la retrodaterebbero ai tempi delle Egizi e della costruzione delle Piramidi e in particolare alla Grande Piramide di Giza (2560 a.C.). Il consenso della comunità scientifica su questo aspetto storico non è, tuttavia, unanime. Il rapporto aureo esisterebbe tra il semilato della piramide e l'altezza della facciata triangolare. Questo porterebbe a un'*inclinazione teorica* della facciata pari a circa 51° 49'. La piramide reale ha un'altezza di circa 147 m e lati da 230m, con un'inclinazione della pareti di 51° 50' 35", molto simile all'inclinazione teorica! Facendo i calcoli tra il semilato e l'altezza "reali":

$$\frac{186{,}64}{115} = 1{,}62295652\ldots$$

ossia un valore molto simile a φ.

Esistono delle congetture che attribuiscono l'applicazione ripetuta delle proporzioni auree nella costruzione del Partenone (inizio costruzione: 445 a.C.), realizzato dagli architetti Ictino, Callicrate e Mnesicle, che lavorarono sotto la diretta supervisione di Fidia (490 a.C. - 432 a.C.), *epískopos* di tutti i lavori principali. Nel 1910, il matematico Mark Barr iniziò a utilizzare l'iniziale del nome Fidia, la lettera greca Phi (φ) come simbolo per il rapporto aureo. In realtà, lo stesso Barr ebbe a scrivere che non è affatto probabile che Fidia utilizzò per davvero, coscientemente, questo rapporto[3].

Platone (428 a.C- 347 a.C), nel suo *Timaeus*, considerava la sezione aurea come la più suggestiva relazione matematica nonché la chiave per tutta la fisica del cosmo.

Euclide (365 a.C- 300 a.C), nei suoi *Elementi* introdusse il concetto di dividere un segmento nel suo rapporto medio ed estremo.

La serie di Fibonacci, dal nome del matematico pisano Leonardo Pisano Bogollo (detto Fibonacci, 1175-1242), apparve per la prima volta nel suo *Liber Abaci* del 1202, a margine di un esempio sulla riproduzione e la conseguente discendenza di una coppia di conigli. Fibonacci considera la crescita di una popolazione di conigli astratta (biologicamente non realistica), supponendo che: una coppia di conigli appena nati, un maschio e una femmina, siano messi insieme (i conigli sono in grado di accoppiarsi all'età di un mese) in modo che alla fine del secondo mese una femmina possa produrre un altro paio di conigli; i conigli non muoiono mai e una coppia di accoppiamento produce sempre una nuova coppia (un maschio, una femmina) ogni mese a partire dal secondo mese in poi. La domanda è: quante coppie ci saranno in un anno? In tale successione numerica di coppie di conigli ogni numero è la somma dei due suoi precedenti: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13…

Non è certo che Fibonacci conoscesse il legame col rapporto aureo e la sua successione di numeri. Si può infatti dimostrare che il rapporto tra due numeri consecutivi, al crescere dei numeri presi in considerazione, tende ad approssimare sempre più precisamente il numero aureo.

La sequenza di Fibonacci appare però, per la prima volta, nella matematica indiana, in relazione alla prosodia sanscrita. Nella tradizione sanscrita della prosodia, c'era interesse nell'elencare tutti i modelli di sillabe lunghe (L) che sono 2 unità di durata, e sillabe corte (S) che sono 1 unità di durata. Il conteggio dei diversi modelli di L e S di una data durata determina una successione come quella di Fibonacci.

La prima volta che questo rapporto fu chiamato *divina proportione* è nel 1497, ad opera del matematico Luca Pacioli (1445-1517) che così indicò la sezione aurea nel suo libro *De divina proportione*[4], manoscritto corredato, nella versione a stampa del 1509, dalle illustrazioni di Leonardo da Vinci, il quale utilizzò questo concetto di proporzionalità in alcune sue opere, in particolare nell'*Ultima cena* e nell'*Uomo Vitruviano*.

Poco tempo dopo Johannes Kepler (1571-1630), scoprendo le leggi che governano i movimenti dei pianeti e la natura ellittica delle loro orbite menzionò la sezione aurea:

> *«La geometria ha due grandi tesori: uno è il teorema di Pitagora e l'altra è la divisione di un segmento in rapporto medio ed estremo (la sezione aurea). Possiamo paragonare il primo a una certa quantità d'oro, e definire il secondo una pietra preziosa».*

Il primo calcolo noto di cifre di φ risale al 1597, quando il matematico tedesco Michael Maestlin (1550-1631) in una lettera a Keplero menzionò il valore, riferendosi al reciproco di φ, come «circa 0.6180340» (5 cifre corrette);

La prima volta che questa proporzione, fino a quel momento chiamata "divina" o, semplicemente, non accompagnata da alcun aggettivo, assunse la qualifica di "aureo" (*goldensection*) pare sia da far risalire al matematico Martin Ohm (1792-1872) che nel suo libro *Die reineElementar-Mathematik*[5] utilizzò il termine tedesco *goldenerschnitt* (*goldensection*).

Più recentemente, il matematico Roger Penrose, in collaborazione con Robert Ammann, ha realizzato (1974) le cosiddette tassellature di Penrose[6], ossia uno schema di figure geometriche basate sulla sezione aurea, che permette di ottenere una tassellatura di superfici infinite in modo aperiodico. Strutture con simmetrie simili, i cosiddetti quasicristalli, sono state scoperte nel 1984 da Dan Shechtman del Technion – IsraelInstitute of Technology e per questa sua scoperta gli è stato assegnato il Premio Nobel per la chimica nel 2011. I quasicristalli sono una particolare forma di solido nel quale gli atomi sono disposti in una struttura deterministica ma non ripetitiva, cioè non periodica come avviene invece nei normali cristalli. Esiste una forte analogia tra i quasicristalli e la tassellatura di Penrose: alcuni quasicristalli possono essere sezionati in modo tale che gli atomi sulla superficie seguano esattamente lo schema di una tassellatura di Penrose[7].

1 Pickover 1997.
2 Fleckenstein, Speiser 1969.
3 Barr 1929, p. 325.
4 Pacioli 1982.
5 Ohm 1815.
6 Gardner 1989.
7 Fan 2018.