C 8

Proyectos Pedagógicos de Modelación: Un contexto para la producción de sentidos y significados matemáticos en el aula

Fabián Arley Posada-Balvin[1]
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Brasil

Es probable que en este momento por lo menos un estudiante se esté preguntando: *¿por qué debo estudiar las matemáticas que me están obligando a aprender en la escuela?* Parece una pregunta fácil de responder, pero una explicación plausible que ayude a minimizar el sentimiento de angustia que oculta no siempre es simple. Algunas respuestas son: *todos los días utilizamos las matemáticas*; *la tecnología no podría existir y avanzar si no fuera por las matemáticas*; *las carreras universitarias más importantes en la actualidad necesitan de las matemáticas*, y comúnmente se hace énfasis especial en el valor utilitario de la matemática. No se puede negar que el conocimiento matemático debe tener propósitos claros que justifiquen su aprendizaje, pero no deberían centrarse únicamente en su carácter útil.

Cuando así se hace, sea porque se enseñe considerando que será aplicada a la *vida real* (problemas cotidianos o de otras ciencias), o porque se recurre a esos problemas como útiles para enseñar matemática, suele pasarse por alto que las matemáticas escolares no se constituyen bajo los mismos principios epistemológicos que la matemática practicada en la *vida real*. Por ejemplo, en la suma 3+4, aunque la escuela afirme que el resultado matemático siempre es 7, cuando en la *vida real* el 3 representa cantidad de manzanas y el 4 de gatos, no es posible determinar el 7 sin intervenir en su significado. Esto quiere decir que la matemática escolar y la matemática que se práctica en la vida real, aunque tengan aspectos en común, no responden necesariamente a los mismos intereses, no se asimilan bajo los mismos significados ni se constituyen bajo los mismos procesos de legitimación.

Una mirada alternativa al carácter utilitario de la matemática, que puede ayudar a pensar la necesidad de aprenderla en la escuela, es considerar que el conocimiento matemático se configura como una manera sistemática de organización de las diversas actividades humanas, de la misma manera como lo haría otro tipo de conocimiento y, a partir de esa consideración, asumir que todas las personas deberían tener derecho a participar intencionalmente de las consecuencias que emergen de tal organización, principalmente cuando se transforman en instrumentos con los que se modifican las condiciones del mundo.

Por ejemplo, en la necesidad de estudiar el comportamiento de transmisión de una enfermedad viral que sigue parámetros de crecimiento, el concepto matemático de función exponencial podría ayudar a organizar las ideas importantes relativas a esa situación, con el potencial de transformarse en un instrumento para combatirla.

En ese caso, al tomar la función exponencial como parte de la matemática escolar, uno de los papeles de la escuela sería favorecer comprensiones de la situación, ayudar a construir alternativas de acción medidas por ese instrumento matemático y en correspondencia con el fenómeno, analizar las posibles transformaciones del problema a partir de los diferentes usos del instrumento y estudiar sus consecuencias. En otras palabras, favorecer la producción de sentidos y significados no solo del conocimiento matemático utilizado como instrumento, sino también de la actividad humana que organiza.

[1] Contacto: *fabian.balvin@ufrn.br, fapoba@gmail.com*

Al colocar la atención en la producción de sentidos y significados para el conocimiento matemático al interior de las diferentes prácticas sociales en que las personas se ven involucradas: cotidianas, científicas, políticas, religiosas, artísticas, inclusive al interior de la misma matemática, se está apelando a su valor funcional (no necesariamente utilitario), ya que la manera como la matemática funciona en cada uno de esos contextos depende de los significados producidos. De ese modo, la escuela debería crear alternativas pedagógicas favorables a la producción colectiva de sentidos y significados para el conocimiento matemático, en la medida que estudiantes y profesores participan de nuevas experiencias en las que se les permita atribuir funciones a la matemática que encuentran (o crean) de acuerdo con el tipo de contexto.

Una de esas alternativas pedagógicas es la Modelación Matemática MM que, para diferentes autores, ofrece buenas posibilidades al desarrollo de la matemática escolar [1-9]. Entre las perspectivas que se encuentran en la literatura [10], este trabajo se enfoca en la que proponen Borba y Villarreal [11] y Malheiros [12], quienes asumen a la MM como un *ambiente de aprendizaje de la matemática* que hace parte de un proceso pedagógico más amplio, denominado Proyectos Pedagógicos de Modelación PPM. Se trata de una propuesta que pretende involucrar a los estudiantes en la construcción de proyectos, cuya temática se elige colectivamente a partir de sus propios intereses. Una vez elegida son orientados a delimitar el campo de estudio, a formular, por lo menos, una situación problemática en el campo delimitado, a producir argumentos para intentar responder la situación formulada y presentar resultados del proceso. Del conjunto de acciones realizadas durante el proceso, algunas tienen el propósito de generar condiciones para el *tratamiento matemático* de las situaciones problema formuladas, siempre que, por las características del proyecto, así lo necesite o lo permita.

El propósito de este capítulo es presentar algunas discusiones relativas a los caminos trazados durante una experiencia realizada con un grupo de estudiantes de educación superior (Biología y Ecología), de una universidad brasileña, mientras desarrollaban PPM como tarea en un curso de cálculo y la manera cómo fue posible producir sentidos y significados matemáticos en ese contexto. Aunque, por la íntima interconexión, cada momento del proyecto es importante para tal propósito, el enfoque principal son las acciones realizadas en el momento que se hace explícito el tratamiento matemático; es decir, en las acciones orientadas a la modelación matemática desarrollada por el grupo de estudiantes, cuando intentan responder las situaciones problemáticas formuladas. Estas ideas se discuten a partir de uno de los proyectos desarrollados.

1. METODOLOGÍA

1.1 Identificación de la situación: Sobre los Proyectos Pedagógicos de Modelación PPM

La Modelación Matemática orientada a prácticas de aula se desarrolla principalmente mediante lo que Antonius et al. [13] denominan *actividades de modelación* o, en términos de Villa-Ochoa et al. [14], *tareas específicas de modelación* que, de acuerdo con estos últimos autores *se configuran para atender las necesidades de formación de los estudiantes en su contexto educativo*. Esto quiere decir que cada tipo de tarea, además de condicionar el papel de los diferentes actores involucrados en ella, pone en evidencia los mecanismos de acción e interacción deseados y los propósitos de formación esperados. De las alternativas de tareas presentadas por estos autores, las más representativas en el aula son las que proponen a los estudiantes situaciones problemáticas, en las que se puede aplicar el conocimiento matemático previamente aprendido o que puedan motivar el aprendizaje de nuevos conceptos.

Es el caso, por ejemplo, de las tareas denominadas como *enunciados verbales* y de *uso y análisis de modelos* [14]. Esta forma de utilizar la Modelación Matemática, además de resaltar el hecho de que en la composición estructural de los problemas, situaciones o fenómenos que serán modelados, deben aparecer los conceptos matemáticos aprendidos o por aprender, genera la sensación de que existe una relación directa entre tales situaciones y los contenidos curriculares establecidos por la institución educativa.

Para Borba y Villarreal [11] y Borba [3, 4] esa forma de trabajo en clase de matemáticas está más próxima a una perspectiva de resolución de problemas que de modelación. Interpretando estos autores, uno de los valores didácticos, pedagógicos y cognitivos más importantes que la modelación matemática puede aportar a los contextos escolares, tiene que ver con la posibilidad de entenderla como un espacio pedagógico, en el que se pueden construir nuevos significados para el conocimiento matemático en correspondencia con otros tipos de conocimiento.

De esa manera, atendiendo a movimientos pedagógicos que tengan en cuenta realidades tecnológicas y culturales contemporáneas, estos autores proponen considerar a la modelación como un espacio pedagógico amplio que les ofrece a los estudiantes ser protagonistas, no solo en la resolución de los problemas propuestos por el profesor, sino también permitirles la oportunidad de que formulen los problemas que deberían ser resueltos según sus propios intereses, mientras se toma a la Modelación Matemática como una de las diversas maneras de tratar esas problemáticas.

En otras palabras, para fines pedagógicos, el proceso de modelación podría ser interpretado y desarrollado en términos de proyectos abiertos, denominados PPM[2], en los que se incluya como uno de sus componentes formular problemas de interés del estudiante, no únicamente solucionar los problemas propuestos por el profesor. De ese modo, el énfasis principal se coloca en el desarrollo de un proyecto, en el que modelar aparece potencialmente como uno de los momentos. La intención es crear un espacio pedagógico para el desarrollo de prácticas análogas a las que realiza un investigador.

En la práctica, la tarea de producción PPM comienza con una *invitación*[3] del profesor para que los estudiantes organizados en pequeños grupos: 1) seleccionen un tema de interés colectivo, 2) planteen, por lo menos, una situación problemática emergente del tema de elegido, 3) estructuren argumentos para intentar responder los problemas planteados o preguntas formuladas, y 4) escriban un informe en diferentes formatos (escrito, audiovisual, ejecutable) que dé cuenta sintética del proceso desarrollado. El principal desafío es generar condiciones para que en medio de este proceso se torne posible, necesario, deseable o importante el desarrollo de prácticas matemáticas que funcionen como modelo matemático.

Eso quiere decir que, en el contexto de un PPM, una parte de las acciones realizadas puede estar orientada al tratamiento matemático de los problemas formulados, siempre que, por las características del proyecto, así se necesite o se permita. Tal posibilidad se torna en un desafío para el profesor, pues como orientador principal del proceso juega un papel fundamental para incentivar a los estudiantes, mientras les ofrece alternativas conceptuales que no siempre hacen parte del plan de estudios. Esta situación implica una adecuada dosis de flexibilidad académica, disponibilidad de tiempo, paciencia suficiente para atender a los estudiantes en diferentes momentos, determinación para enfrentar lo desconocido, interés por ampliar la cultura general y mucha colaboración institucional.

La intención es construir medios favorables para producir significados matemáticos en el seno de la situación construida y resignificaciones nuevas para el conocimiento matemático, con el que ya se han tenido experiencias en relación con otras situaciones. Es importante resaltar que estos significados se produces o reconfiguran colectivamente en escenarios de discusión, y mediante diferentes artefactos materiales y simbólicos buscando que los estudiantes se tornen protagonistas del proceso. Es una perspectiva de modelación que no pretende hacer énfasis, *a priori*, en los contenidos matemáticos escolares para que se apliquen, o en la que se proponen problemas motivadores para la enseñanza-aprendizaje de conceptos matemáticos curriculares específicos. Los significados matemáticos, y por tanto el aprendizaje, se constituye en correspondencia con las situaciones emergentes.

En ese sentido, con el desarrollo de PPM en el aula las metas específicas de aprendizaje superan el dominio de procedimientos algorítmicos matemáticos, esperando, además, desarrollar en los estudiantes habilidades próximas a la formulación, planteamiento, transformación y resolución de problemas; al dominio de distintos recursos y registros de representación; a la construcción de razonamientos explicativos y argumentativos; y, principalmente, la habilidad de interpretar críticamente la información para intervenir en la vida social y política.

[2] Semejante a la Modelación a través de proyectos según la clasificación propuesta por [14].
[3] Tal invitación tiene cierto carácter de obligatoriedad ya que, como sucede con la mayoría de las tareas escolares, está asociada a una condición evaluativa con valoración numérica.

1.2 Desarrollo de la situación: Un ejemplo de PPM en un curso de matemática aplicada[4]

1.2.1 Primer momento: PPM como una de las tareas del curso.

Durante el segundo semestre de 2013 se desarrolló una investigación con un grupo de estudiantes que hacían parte de un curso de matemática aplicada para Biólogos y Ecólogos en formación de la universidad Paulista Júlio Mesquita Filho UNESP, sede Rio Claro estado de São Paulo, Brasil. Al inicio del curso el profesor les informó a los estudiantes que una de las notas del semestre sería mediante el desarrollo de un PPM. Les pidió que en grupos de cuatro a seis estudiantes escogieran una temática de interés colectivo en la que desarrollarían un proyecto compuesto de tres momentos: 1) formulación de por lo menos una situación problema relativa a la temática de interés seleccionada, 2) generar argumentos para responder o resolver la situación problemática formulada, y 3) redactar un texto como síntesis del proceso de investigación y un video (inédito o editado) relacionado con la temática investigada. Al final del semestre los estudiantes debían realizar una presentación oral de los resultados del proyecto, de máximo veinte minutos, para el resto de los compañeros y además debían presentar el video.

En medio del semestre el profesor les iba solicitando a los grupos informes parciales del proceso de investigación que se va configurando en versiones preliminares del informe final escrito y del video. De igual manera, se agendaban reuniones extra clase con cada grupo para realizar asesorías y, dependiendo de la situación, se invitaban otros profesionales a participar del proceso. Previo a la finalización del calendario académico se solicitó la versión final del informe escrito para una evaluación, antes de la presentación oral. Los últimos encuentros regulares del semestre se destinaron a las presentaciones de los resultados finales del proyecto (podían participar e interactuar personas externas). La valoración de este trabajo representaba el 40% de la evaluación total del curso, y se genera a partir de la cantidad y la calidad de las versiones preliminares, la participación en las reuniones de asesoría, la presentación oral y el uso del video.

El profesor propone el desarrollo de PPM como tarea en los cursos de matemática, principalmente cuando los estudiantes son de carreras distintas de matemática puras o licenciatura, pues considera un contexto propicio para estudiar la matemática escolar, en correspondencia con el conocimiento de las otras áreas, por ejemplo, Biología o Ecología, como en esta versión. Se produjeron quince trabajos configurados de acuerdo con las características creadas por los movimientos de cada grupo. Para efectos de describir los diferentes momentos en los que se dinamizó el ambiente de trabajo en el aula, en este trabajo se concentra la atención en uno de los que optó, ya sea por interés o por necesidad, por usar conocimiento matemático como parte de los argumentos para dar respuesta a la situación problema formulada. Es decir, en el proyecto desarrollado por uno de los grupos de Ecología: *¿Es música o es matemática?*

1.2.2 Segundo momento: Elección de la temática y la formulación de la situación problemática

Una vez explicada la tarea y las condiciones para realizarla, los estudiantes configuran el grupo de trabajo. Aunque no siempre se hicieron explícitas, fueron varias las estrategias que los estudiantes utilizaron para hacerlo, porque comprendieron que era una tarea con un nivel de exigencia académicas relativamente alta. En el caso de este proyecto, manifestaron que primó la proximidad afectiva y, de alguna manera, cierta compatibilidad académica previamente reconocida por haber estudiado juntos en varios cursos. El grupo quedó compuesto por cinco estudiantes y la elección por la música como temática principal resultó relativamente fácil, pues dos de los miembros estaban interesados en ese mundo. Inclusive, uno de ellos tenía nociones empíricas sobre teoría e interpretación musical, con inclinación por instrumentos de viento andinos como la zampoña y la flauta. Los tres miembros restantes también manifestaron sentirse interesados por la temática e incluso expresaron conocer personas cercanas, entre familiares y amigos, que estarían dispuestas a ayudarles en la configuración del proyecto.

Luego comenzaron las discusiones relativas a la formulación de una situación problemática relacionada con la temática y, después de un largo proceso y acompañados por el profesor, que en algunos momentos sugirió consultar a otras personas especializadas en el tema principalmente del área de la física y de la

[4] Este ejemplo aparece descrito y analizado en la disertación doctoral del autor [15].

música, construyeron la pregunta problematizadora: ¿de qué forma se da el proceso de transformación de los sonidos en música? A partir de ahí el grupo estructuró el trabajo escrito en cinco apartes:) aproximación histórica de la música, 2) fundamentos físicos del sonido, 3) conceptualización musical, 4) representación sintáctica y semántica de la música, y 5) posibilidades para construir un instrumento de viento andino.

El profesor y los especialistas consultados les ayudaron indicándoles lecturas, estimulando discusiones, proponiendo ideas e incentivándolos para que los conceptos matemáticos hicieran parte estructural del proyecto, junto con los conceptos de la física y la música. En ese momento comenzaron a percibir al conocimiento matemático como una de las posibles formas organizadoras de la actividad humana de producir música. Empezaron a comprender que el conocimiento matemático podía jugar un papel importante en la coherencia teórica del proyecto que acompaña, a diferencia de las experiencias espontáneas anteriores con el tema. Se da entonces un proceso de resignificación del conocimiento matemático y musical en el contexto del PPM.

1.2.3 Tercer momento: Discriminación de aspectos relevantes orientados a la modelación matemática[5]

Aunque desarrollar PPM es una tarea que en sí misma constituye un problema académico para resolver a partir de los tres grandes momentos descritos, solo voy a presentar algunos análisis del momento en el que los estudiantes produjeron los argumentos para intentar solucionar la situación problemática. Un proceso que, por la íntima conexión mencionada, comienza en el mismo momento que se escoge al tema. Puede afirmarse que, si bien es cierto las prácticas matemáticas se van constituyendo paulatinamente con las discusiones realizadas en cada etapa, fue en el momento de construcción de los argumentos para solucionar la situación donde se hicieron más visibles las acciones orientadas a tal fin.

A primera vista, la pregunta problematizadora parece ser una cuestión que no requiere de matemática para ser respondida, sin embargo, a partir de las primeras discusiones la perspectiva fue cambiando. El cambio se dio cuando se les propuso a los estudiantes que a partir de la información recolectada intentaran discriminar posibles aspectos relevantes de la situación de interés, que permitieran una respuesta plausible a la situación problema. Después de percibir que con lo que sabían hasta el momento no lograban determinar tales aspectos relevantes, se les sugirió algunas lecturas y, de manera independiente, buscaron informaciones de diversas fuentes, incluso algunas en formato audiovisual[6]. La información consultada se sintetiza en las siguientes ideas generales que le presentaron al profesor en los encuentros:

1. El sonido es una perturbación (vibración) que se propaga en un medio material.
2. Físicamente, el sonido se trata como una onda mecánica esférica.
3. A partir del movimiento vibratorio de la fuente sonora y trasmitido por algún medio, principalmente el aire, los sonidos se pueden captar mediante mecanismos del oído humano y procesados por el cerebro.
4. El concepto de frecuencia se usa como una medida de las vibraciones, cuya cantidad se da a partir de una unidad de medida normalmente denominada Hertz (número de vibraciones por segundo).
5. Las frecuencias de los sonidos audibles por los seres humanos están entre 20 y 20000 Hz.
6. Las notas musicales son vibraciones con frecuencias particulares en este intervalo audible.
7. Amplitud, período, intensidad, intervalo, andamiento, textura, ritmo, color y timbre, son conceptos que condicionan las características del sonido.
8. En términos generales, la música se puede entender como un complejo arte de combinación controlada de diferentes sonidos.
9. La composición musical depende principalmente de patrones de combinación de acordes a partir de las escalas de notas musicales escogidas.

[5] Las ideas que aparecen en este apartado fueron tomadas del trabajo final escrito por los estudiantes y de la transcripción textual del video grabado durante la presentación oral y posterior discusión general. Aunque puedan aparecer imprecisiones conceptuales relativas a la temática, el interés no son las correcciones, por el contrario, algunas de esos errores sirvieron de análisis cognitivo para mejorar la compresión del proceso de construcción de modelos matemáticos en el contexto de PPM.
[6] Google y YouTube fueron las principales fuentes de investigación consultadas para el desarrollo de todos los PPM.

Para iniciar el proceso de construcción de argumentos, que darían una mínima solución a la situación problemática formulada, los estudiantes identificaron y definieron algunas de *las magnitudes físicas y musicales*, que se tornarían relevantes y para lo cual paulatinamente fueron percibiendo que necesitarían construir un sentido matemático de la situación. Esas magnitudes fueron: 1) longitud de una cuerda, 2) tensión de una cuerda, 3) vibración de una cuerda, 4) sonido emitido por una cuerda vibrante, 5) velocidad (en diferentes medios), 6) tiempo, y 7) textura.

Algunas de esas magnitudes aparecieron de manera explícita y otras implícita, y la mayoría fueron tratadas mediante procesos de cuantificación, por ejemplo, las características físicas del sonido (vibración), además de constitución de formas de correlacionarlas para representar la variación y la combinación armónica de cierto tipo de sonidos (notas). Los estudiantes enfatizaron que tal correlación tenía un fuerte componente de interpretación asociado a ideas de la teoría musical, en particular, ideas de patrones específicos de combinación musical (escalas). Con esos aspectos iniciaron la construcción de modelos matemáticos que les ayudaron a experimentar la sensación estética de la música.

1.2.4 Cuarto momento: Producción de argumentos matemáticos

Con base en los elementos anteriores, los estudiantes mostraron que parte de la complejidad del arte de producir música está en la permanente interconexión de aspectos cualitativos y cuantitativos del sonido, y comenzó a aparecer el concepto de variación y de correlación entre las magnitudes, seleccionadas como dos de los aspectos más relevantes para el análisis. Eso significó entender que no era suficiente una mirada cualitativa de la situación problema formulada, solo era una parte de la estrategia para resolverla, pues el componente cuantitativo también aportaba elementos básicos.

Explicaron, por ejemplo, que en la música el pulso indica *la velocidad* con que se ejecuta un sonido, el ritmo lo que determina *la duración* del sonido o de los silencios, y el intervalo *la distancia* entre dos notas musicales, que a su vez puede estar definida por la medida de ciertas *frecuencias*, dando paso a los acordes que son entendidos como ciertas combinaciones de notas y que deben tener la cualidad de ser armoniosas. A partir de varias discusiones respecto a las formas como se relacionan estos aspectos, se seleccionaron razones y proporciones entre las cantidades. Del mismo modo, el tiempo se configuró como una de las magnitudes implícitas más relevantes, que posteriormente se constituyó como una de las variables independientes o de control.

La relación por razones entre cantidades surgió a partir de la información que los estudiantes encontraron en Internet y discutida en los encuentros de asesorías. Según lo consultado, los académicos de la llamada escuela pitagórica del siglo VI antes de la era común fueron los primeros en registrar un ejercicio sistemático para estudiar la música desde un punto de vista matemático. El ejercicio consistió en comparar sonidos producidos por cuerdas igualmente tensionadas, pero con diferentes longitudes, concluyendo que los sonidos producidos eran cualitativamente armónicos, siempre que tuvieran una relación por cociente entre números enteros, específicamente la relación de $\frac{1}{2}$ (un medio) y $\frac{2}{3}$ (dos tercios).

Esto quiere decir que, al hacer vibrar una cuerda cualquiera de referencia, junto a otra cuya longitud sea la mitad, los sonidos emitidos son acordes armónicos, cuya propiedad se utiliza para construir lo que en música se conoce como *octavas*. De ese modo las notas producidas por cuerdas, que están a una relación de longitud de un múltiplo (o división) de dos, construyen notas octavas, que musicalmente significa tener la misma nota, pero en octavas diferentes. Al hacer lo mismo, pero utilizando la medida de dos tercios de longitud de la cuerda de referencia, se construyen las notas *quintas*. De acuerdo con los estudiantes hasta hoy, en teoría musical estas relaciones son la base para explicar las posibles combinaciones de vibraciones armónicas clásicas y permanecen en la base de caracterización de las escalas musicales diatónicas y cromáticas, con las que se producen la mayoría de los acordes y melodías.

Los estudiantes también explicaron que actualmente esos mismos análisis se realizan mediante relaciones de proporcionalidad entre frecuencias. Esta idea surgió después de consultas en libros, en Internet y en discusiones con un profesor de física, de donde se concluyó que utilizando el concepto de frecuencia de una cuerda vibrante es posible explicar cómo se producen los armónicos con ellas. Este ejercicio ayudó no solo para ampliar su comprensión sobre la relación entre la medida de longitud de la cuerda, la frecuencia de vibración y el sonido que produce, sino también para entender porque con ciertos patrones de combinación de tan solo 12 de estas frecuencias (las 12 notas de la conocida escala cromática o tonalidad occidental) es posible producir la mayoría de la música.

En analogía con los análisis realizados por los pitagóricos, los estudiantes explicaron que se trata de fijar como referencia a una frecuencia arbitraria (por ejemplo, la frecuencia de 440 Hz que representa la nota *FA*) y, a partir de ella, construir cualquier otra nota, lo que implicaría simplemente multiplicar o dividir sucesivamente por $\sqrt[12]{2}$. La manera como se representa esa conclusión fue mediante la fórmula $f_n = 440\left(\sqrt[12]{2}\right)^n$, donde *f* indica la frecuencia que se desea conocer y *n* un número entero que indica el orden de la nota, a partir de la nota de referencia 440 (FA).

Tomando como punto de partida la medida de la frecuencia de cuerdas vibrantes, esta perspectiva moderna sobre producción de notas musicales también se tornó importante para los estudiantes, pues les ofreció la posibilidad de tener un soporte matemático para pensar en la construcción de un instrumento musical de viento andino. Situación motivada por las explicaciones de un estudiante del área de física invitado a una de las reuniones, quien demostró cómo los mismos resultados con cuerdas se puede aplicar a los sonidos producidos cuando el aire pasa con ciertas velocidades por tubos abiertos o cerrados.

La comprensión de los estudiantes al respecto se explica tanto en el informe final escrito como en la presentación oral que, además de describir detalladamente algunos de los argumentos clave para responder a la situación problema planteada, a partir de conceptos y procedimientos matemáticos, ejemplificaron sus ideas con la construcción de un instrumento simple de viento llamado *Didgeridoo*, y estructuraron un proyecto para intentar construir una *Flauta de bambú* y una *Zanpoña*, otro instrumento de viento un poco más elaborado, pero con los mismos principios. Para esto explicaron que, para obtener una determinada nota, en este caso se debe tener en cuenta el largo del tubo y la velocidad del soplo, es decir, una frecuencia patrón específica. Para un tubo abierto como Didgeridoo o flauta, si la longitud es constante, la frecuencia del sonido es directamente proporcional a la velocidad del soplo; o si la velocidad es constante, es inversamente proporcional al largo del tubo. Para soportar esta explicación se apoyaron en la fórmula $f = m\frac{V}{L}$, donde *f* es frecuencia, *V* velocidad del soplo, *L* longitud del tubo y *m* una constante numérica.

2. EVALUACIÓN EN EL CONTEXTO DEL PPM

Al cumplir el papel de tarea de un curso de matemática, a los PPM se les asigna un valor numérico, tradicionalmente llamado nota, pero por sus características explicadas, en que no se plantea un objetivo específico de aprendizaje matemático escolar *a priori*, es probable que los contenidos curriculares de matemática no aparezcan en las condiciones esperadas por la escuela, entonces, la evaluación tiene un carácter fundamentalmente formativo, pues cada orientación del profesor tenía como propósito evaluar las condiciones de desarrollo del proyecto e intervenir para construir la necesidad de usar conocimiento matemático. Eso quiere decir que aprovecha cada etapa del proceso para ponderar el potencial del conocimiento matemático, caracterizar las funciones que puede experimentar en la situación problema formulada y persuadir a los estudiantes para que lo usen en relación con los sentidos y los significados que se puedan constituir.

A partir de esos aspectos se producen y evalúan colectivamente los diferentes tipos de sentidos y de significados que se le atribuye a la matemática, en relación con los otros conocimientos que componen el proyecto. En ese sentido la pertinencia, la certidumbre, la validez y la profundidad del conocimiento matemático se evalúan por niveles auto regulables en el mismo proceso. Situación que se aprovecha mejor cuando en el proyecto se explicita intencionalmente la importancia o la necesidad de usar la matemática, como parte estructural de los argumentos que pretenden responder a la situación problema. Se podría decir que la nota final asignada deja de ser tan importante, para dar mayor espacio a la evaluación orientada a formar sentidos y significados matemáticos *in situ*.

A partir de los argumentos matemáticos construidos y presentados para responder las situaciones problema formuladas, el profesor las aprovecha para generar un debate pedagógico en torno a ellos, sea porque eventualmente hayan sido trabajados en otros momentos del curso o porque hayan sido tema de otras materias de matemática cursadas. Es conveniente enfatizar que este aprovechamiento depende principalmente de los intereses, las habilidades y las estrategias, que el profesor utiliza para producir conexiones rápidas y profundas entre los diferentes conceptos matemáticos vinculados a los proyectos con los contenidos curriculares. Para el caso de este proyecto, en que los conceptos matemáticos emergieron en relación con conceptos musicales, el profesor resaltó tres que previamente habían sido objeto de estudio en este y otros cursos: *razones*, *proporcionalidad* y *función lineal*.

El primero fue referenciado por los estudiantes en la explicación que dieron sobre cómo los pitagóricos conectaron los sonidos producidos por cuerdas a ciertas fracciones, para que se tornaran sonidos armónicos. Para discutir tal conexión se analizaron dos comentarios históricos relacionados con el significado de número en la época de esos matemáticos: 1) para los pitagóricos el *ser contable* era una condición fundamental de las cosas en el mundo, y para ellos todo en el universo se rige por propiedades numéricas, teniendo en cuenta, 2) que para la época solo eran considerados números aquellos que actualmente se reconocen como números naturales. Por eso las relaciones *de un medio*, *dos tercios, tres cuartos* etc., presentadas por los estudiantes para describir la relación de cuerdas con sonidos armónicos, realmente no representaban números, sino razones entre cantidades o simplemente relaciones relativas entre dos cantidades que, en términos generales, se denominan *razones*.

Una de las dificultades que los estudiantes expresaron en varios momentos del proyecto se relaciona con el uso del concepto matemático de *razón* asociado a conceptos musicales. Por ejemplo, el concepto de *octavas* en la música se asocia a la razón de *un medio*, que indica la relación entre longitudes de dos cuerdas con la misma tensión, y las *quintas* musicales se asocian a una razón de *dos tercios*. En este contexto las fracciones un medio y dos tercios son formas de expresar la relación por cociente entre dos números naturales, por eso indican razones, mientras que octavas y quintas no significan fracciones, sino *unidades* de medida musical compuestas por ocho y cinco tonos respectivamente.

Con respecto a los conceptos de proporcionalidad y función lineal discutidos en el proyecto y tomando como referencia el tratado moderno de la música, es decir, a partir del concepto físico de frecuencia, el profesor explicó que no solo indican relaciones bajo una determinada regla entre cantidades, sino también maneras de expresar cómo varían conjuntamente. Por ejemplo, la función lineal se puede comprender como un desdoblamiento de variaciones y relaciones directamente proporcionales simples, que indican valores constantes para los cocientes correspondientes entre las diferencias de los valores de las variables relacionadas o entre los valores directamente, y que se pueden representar en la forma $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2} = \mu$ y $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \mu$ respectivamente, generalizado en la forma $f(x) = \mu x$.

Para producir nuevos significados sobre esos conceptos matemáticos, el profesor aprovechó el interés de los estudiantes por construir un instrumento musical andino de viento y la discusión dada en el proyecto con la expresión simbólica $f = m\frac{V}{L}$, en la que mostró la relación entre la frecuencia de vibración *f* del aire que pasa por un tubo de longitud L a una velocidad V; también explicó que otra manera de interpretar esas expresiones, inicialmente denominada por ellos como *fórmula*, podía ser a partir del concepto de función lineal, si la longitud L del tubo es constante y la velocidad varía, o racional, si la que es constante es la velocidad del aire soplado y lo que varía es la longitud del tubo.

Para generar un espacio se diálogo en el que los significados se construyeran colectivamente, el profesor propuso la pregunta: ¿cómo podemos utilizar ese resultado matemático en la construcción de los instrumentos de viento? A partir de diferentes reflexiones, comentarios y respuestas se llegó a la conclusión plausible para todos de que *con ese resultado se podrían determinar maneras de producir notas musicales, tomando en cuenta que se pueden variar las longitudes del tubo y la velocidad del soplo.* Por ejemplo, si la longitud del tubo es constante, como es el caso del *Didgeridoo* y de la *Zampoña*, la frecuencia (notas musicales) dependen de ajustar su velocidad de forma directamente proporcional, es decir, para producir notas de frecuencia más altas (las agudas) habría que soplar más fuerte, mientras que soplos de velocidad menor producen frecuencias menores (notas graves). Ahora bien, con soplos de velocidad constante se podrían conseguir notas musicales diferentes modificando la longitud del tubo, como es el caso de las *Flautas* de bambú, en las que se pueden tapar o destapar los orificios.

3. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Para discutir elementos relativos a la producción de sentidos y significados matemáticos en el marco de los PPM, se pueden plantear ciertos aspectos que relacionan al proceso de modelación matemática con las funciones cognitivas que los modelos tienen como organizadores de la actividad humana. Imaginemos alguna acción realizada por determinada persona con la intención de transformar algo o de producir cierto resultado. Este tipo de acciones, realizadas de manera intencionada, normalmente requieren el uso, también intencionado, de algún tipo de *instrumento* que le sirva de mediador.

Supongamos, por ejemplo, que se requiere *partir una manzana*, para lo cual se puede utilizar *un cuchillo*. La acción de partir y el instrumento utilizado para realizarla (el cuchillo -podría ser otro instrumento-) tienen una íntima e indisoluble relación condicionada por el carácter *intencional* con la que fue o será realizada la acción. La idea general de *modelación* parte de esa relación, ya que el *instrumento* cuchillo no solo indica el medio para realizar la *acción intencionada* de partir, sino que también y simultáneamente se puede comprender como un *representante* de tal acción.

Por otro lado, un instrumento no solo sirve para realizar un tipo de acción, por ejemplo, el cuchillo, además de servir para partir, se puede utilizar para realizar acciones como rasgar, chuzar, pinchar, raspar etc., condicionando las maneras particulares de ejecutar esas acciones. Eso quiere decir que no solo representa la acción de partir, también puede representar muchas otras. Pero, además, aunque se tenga un conjunto de posibilidades de acción representadas en tal instrumento, también se pueden imaginar nuevas formas de acción, con nuevas intenciones y con el objetivo de obtener nuevos resultados. Se crea así un movimiento permanente de acciones que se realizan, posibles acciones realizables y otras tantas que, inclusive, no se pueden imaginar en este momento, pues se podrían realizar hasta sin intención (pero estas no son de interés por el momento).

Algo similar se puede decir de las palabras y otras formas simbólicas, por ejemplo, la palabra cuchillo, es decir un *cuchillo simbólico* que se torna también en *instrumento,* pero esta vez *cognitivo*, ya no para cortar, raspar, partir como se haría scon el cuchillo material, sino con el que se puede *representar* cognitivamente ese conjunto de acciones, e imaginar innumerables nuevas posibilidades.

En esos términos los artefactos materiales y simbólicos producidos por los seres humanos para sobrevivir en el mundo son, al mismo tiempo, medios para transformar la naturaleza, pero también fines de y para esas transformaciones. Se puede decir que tales artefactos *representan* material y cognitivamente formas de acciones intencionadas, construidas históricamente y legitimadas por mecanismos de institucionalidad. En las prácticas cotidianas se utilizan para apropiarse del mundo, para modificarlo y para constituir a los humanos como seres sociales y culturales.

La palabra clave es *representar*, pues los artefactos se pueden comprender como *representantes* de lo que se hace, de lo que se quiere y de lo que se espera y, por eso, se pueden asumir como *modelos de y para* los diferentes *modos de acción e de intensión* humanos, es decir, *de prácticas*. En estos términos un modelo no es simplemente un reflejo o copia de algún estado de cosas o ideas, sino, más allá de esto, representaciones de modos de prácticas adquiridas, de modos de prácticas en prospectiva (que serán realizadas) o de modos de prácticas imaginarias.

En estas condiciones *un modelo* tiene como principal característica ser *un artefacto* escogido o construido deliberadamente, no solo para *representar prácticas intencionadas*, sino también para modificar las condiciones de comprensión de las *prácticas modeladas*. Por lo tanto, la ganancia que se obtiene al modelar es extender las posibilidades de comprensión de los humanos, de transformación, de tratamiento, de proyección y de control de las prácticas modeladas a través de los mecanismos ofrecidos por las prácticas que las modelan.

Se desprende entonces que todo proceso de modelación, es decir, de construcción o elección de modelos, implica tener por lo menos dos sistemas que indican formas particulares de prácticas: uno de interés, *el modelado*, y el otro que lo representa, *el modelo*. Determinar cuál es cuál depende del potencial que el *sistema modelo* tiene para representar las *propiedades consideradas relevantes* del *sistema modelado*, de acuerdo con los intereses e intenciones que tienen los sujetos que lo construyen o eligen.

Es importante resaltar que en la frase *construir o elegir modelos* la *o* es inclusiva, pues los procesos constructivos de poner en común dos sistemas, a partir de determinados aspectos relevantes, normalmente se realizan con base en la apropiación electiva de modelos previamente construidos para representar otros sistemas.

La mayoría de las prácticas científicas y algunas artísticas deben su desarrollo principalmente a la construcción de modelos. Uno de ellos, con peso histórico importante, son los matemáticos, ya que favorecen un tratamiento cuantitativo. Para autores como Obando et al. [16], la matemática *representa* un tipo especial de práctica social, denominadas *prácticas matemáticas* que indican:

> *ciertas formas de acción de los individuos, en sus relaciones entre sí, y con el medio, a través de los procesos de objetivación tanto de la cantidad y la forma -por ejemplo, medir, contar, comprar, vender, intercambiar, construir, fabricar, estimar, describir, localizar-, como de la variación de una u otra -movimiento, cambio, comparación, transformación, y otras.*

Estas prácticas se materializan principalmente mediante el uso de artefactos de naturaleza simbólica y, según Duval [17, 18], mediante sistemas semióticos de representación, o a través de formas semióticas de objetivación [19]. En estas condiciones se podría decir que en la medida en que se hacen *afirmaciones, declaraciones, suposiciones y se ejecutan acciones* en el seno de ciertas prácticas sociales: científicas, artísticas, cotidianas, económicas, religiosas, de la propia matemática, etc. con la intención de organizarlas, transformarlas, controlarlas mediante procesos de cuantificación y de formación de patrones de variación y regularidad, usando *justificadamente* diferentes registros semióticos de representación, se está modelando matemáticamente.

Cuando este proceso se lleva a contextos educativos con la intención pedagógica de producir *significados matemáticos*, es importante crear condiciones para que además de realizar cálculos, hacer operaciones y generar afirmaciones matemáticas mediante el uso de diferentes registros de representación semiótica, también se puedan construir argumentos favorables para justificar dialógicamente tales cálculos, operaciones y afirmaciones [20].

Es de ese modo que la tarea constituida por el ambiente pedagógico PPM se torna en una oportunidad para la producción de sentidos y significados matemáticos. Incentivando a los estudiantes desde el mismo momento de la elección de la temática, y de la formulación de la situación problemática, a generar afirmaciones y argumentaciones impregnadas de nuevos significados matemáticos, imbricados al campo fenomenológico de la formulación y resolución de situaciones problema.

En el caso del proyecto presentado en este capítulo el proceso se realizó confrontando el campo conceptual de la física (modelo físico de la situación) con el sistema de representación matemático (modelo matemático), para luego usarlos como argumentos a la pregunta problematizadora: ¿de qué forma se da el proceso de transformación de los sonidos en música? Tal vez tenga sentido decir que lo producido en ese momento fue un *modelo musical* que, eventualmente, produce una transformación en la manera sensible de apreciar la música de quienes participaron en el proyecto.

Cuando el modelo matemático fue usado para explicar el comportamiento físico del sonido y éste a su vez dio soporte a la explicación del comportamiento del modelo musical, se creó un contexto no solo para la producción de nuevos significados matemáticos, sino también físicos y musicales, que alcanzaron un nuevo nivel cuando se usaron para imaginar posibilidades de construir un instrumento musical de viento. En otro momento, este contexto se podría aprovechar, por ejemplo, para producir nuevos sentidos y significados a partir de la relación histórica del concepto matemático de función con el fenómeno físico de una cuerda vibrante [21], y en la construcción de otros instrumentos musicales en diferentes épocas y culturas.

4. CONCLUSIONES

El propósito principal de este capítulo era discutir la manera cómo el desarrollo de PPM propicia el proceso de producción de sentidos y significados matemáticos, en la medida que se construye, por lo menos, un modelo matemático de la situación. Para eso se presentaron ideas relativas al camino trazado por un grupo de estudiantes de educación superior (Biología y Ecología) que cursaban una materia de cálculo. Se presentó cada momento del proceso explicando, a manera de ejemplo, el desarrollo de uno de los proyectos y una síntesis de la forma como la matemática se fue asociando con otros tipos de conocimientos (la física y la música en este caso), para producir nuevos significados. Para finalizar la discusión y tal vez abrir nuevas posibilidades de debate, resalto algunos aspectos relevantes sobre la relación entre la modelación matemática y la producción de sentidos y significados en el contexto de PPM, cuando se desarrolla como tarea escolar.

Dado que las acciones desarrolladas en los PPM se orientan intencionalmente a la producción colectiva de conocimiento en contextos de clase, constituye un tipo de tarea que no está totalmente regido por un plan de estudios prestablecido, sino por reglas emergentes del movimiento en cada proyecto y de los intereses de cada actor involucrado (el de los estudiantes en primera línea). Esas características de los PPM generan algunas dificultades al ponerlos en práctica en el aula, de las que se mencionan tres que se consideran importantes:

1. El énfasis que hacen los académicos proponentes para que sea una actividad escolar colectiva. Para ellos, la formación de valores pedagógicos, como la capacidad de planificación, la evaluación crítica del mundo circundante, la construcción creativa de procesos de comunicación, el respeto por el otro y el trabajo en equipo, son tan importantes como aprender matemáticas para actuar éticamente en sociedad y se alcanzan de mejor forma si la escuela incentiva a los estudiantes a trabajar en equipo.

2. La demanda institucional de cumplir los contenidos curriculares preestablecidos y con los diferentes mecanismos de presión para que se atiendan en tiempos específicos y en igualdad de condiciones para todos los estudiantes. No es nuevo que tal demanda se satisface mediante la estrategia de listar un conjunto de conceptos y técnicas, que se asumen como obligatorios, en muchos casos solo porque así lo dicta la tradición. Si el tema fuera ecuación, por ejemplo, y ninguno de los proyectos producidos requirieran de esa temática, es posible que el profesor se viera obligado a tener que priorizar otras metodologías. En otras palabras, los PPM se pueden ver como una manera de transgredir la rigidez curricular y, en la medida de lo posible, una forma de complejizarlo.

3. La alta demanda de recursos que la estrategia de PPM implica en términos de tiempo, de tecnologías y de personas especializadas en los variados temas que pueden surgir, según las temáticas escogidas por los estudiantes.

Ante esas posibles dificultades para el desarrollo de PPM se pueden crear oportunidades positivas, como comenzar a pensar en procesos de flexibilización curricular, en que el aprendizaje de las matemáticas pueda ser sustituido por la producción de sentidos y significados matemáticos en la medida que sirven de apoyo no solo para la formulación de situaciones problemas, sino también para la construcción de argumentos favorables para darles respuesta. Para determinar la necesidad o la pertinencia de asumir una mirada relativa a procesos de matematización que sirvan de modelo, y dependiendo de las características del proyecto estructurado, se construyen argumentos colectivos. Para que esto se logre en el contexto del desarrollo de los PPM se debe generar una relación interactiva entre profesor y estudiante, diferente a la de alguien que enseña (profesor) y otro que aprende (estudiante).

Cuando el estudiante asume un papel protagónico, tanto en la elección del tema como en el proceso de formulación de la situación problema y en la consecuente construcción de argumentos de solución, se crean condiciones para que se ubique entre aquello que parece saber y lo que aun ignora, pero que le gustaría estudiar. A ello se podría llamar *motivación*, en términos de hacer que se apropie de algo que antes le era ajeno. Así motivado, se puede incentivar a construir buenas preguntas, a formular proyectos y a construir argumentos para la solución. De este modo se recorre el camino de la formación de un pensamiento crítico.

En convergencia con ese propósito el desarrollo de PPM en el aula pretende ir más allá de la producción de sentidos y significados matemáticos en contexto, aspirando a avanzar hacia el supra propósito pedagógico de hacer posible la proclamada necesidad de mantener viva la curiosidad; de hacer de la ignorancia y de la inconformidad aspectos movilizadores hacia cuestionar, indagar y dudar con sentido; de aprender a construir estrategias para gestionar las correlaciones con el mundo social y material, y, por esa vía, crear las bases para formar ciudadanos con suficiente autonomía intelectual. Propósitos que deben ser iniciados desde los primeros años de escolaridad.

A primera vista y por las características de muchos contextos escolares que, en general, se rigen por planes de estudio con metas, metodologías y resultados esperados rígidos, proponer el desarrollo de PPM en clase de matemática parece una tarea inviable. Sin embargo, y a manera de ejemplo, en los siguientes enlaces se encuentran experiencias realizadas en escuelas públicas de educación básica brasileña. En *https://ufmg.br/comunicacao/publicacoes/boletim/edicao/2077/matematica-para-a-vida* se describe el desarrollo de un PPM por estudiantes de séptimo grado en una escuela pública del estado de Minas Gerais, y se discuten aspectos relativos a los valores pedagógicos que pretende formar. En *https://www.youtube.com/watch?v=rPWwibLp5tc&feature=youtu.be* se complementa esta descripción y se explica, en formato audiovisual (video), la manera cómo vivenciaron el proceso los estudiantes y el papel del profesor durante el trabajo.

De igual manera, en [15] se describe el desarrollo de otros tres proyectos que surgieron en el mismo curso de este capítulo. Otras experiencias son la del grupo de Educación Matemática de la universidad de Córdoba, Argentina (http://edumat.famaf.unc.edu.ar/-) y la del grupo GPIMEM de São Paulo, Brasil (https://igce.rc.unesp.br/#!/gpimem-), que muestran posibilidades de actuación en diferentes niveles escolares bajo perspectivas similares a la de PPM presentada en este capítulo.

REFERENCIAS

[1] Bassanezi R. (2002). Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: Uma nova estratégia. Contexto.
[2] Blum W. et al. (2007). Modelling and aplications in mathematics education. Springer.
[3] Borba M. (2009). Potential scenarios for Internet use in the mathematics classroom. ZDM Mathematics Education 41, 453–465.
[4] Borba M. (2011). Can modelling be taught and learnt? -A commentary-. En Kaiser G. et al. (Eds.), Trends in teaching and learning of mathematical modelling. Springer.
[5] Kaiser G. et al. (2011). Trends in teaching and learning of mathematical modelling. Springer.
[6] Lehrer R. y Schauble L. (2007). A developmental approach for supporting he epistemology of modeling. En Blum W. et al. (Eds.), Modelling and applications in mathematics education (pp. 153-160). Springer.
[7] Lesh R. et al. (2010). Modeling students' mathematical modeling competencies. Springer.
[8] Meyer J. et al. (2011). Modelagem em educação matemática. Autêntica.
[9] Stillman G. et al. (2013). Teaching mathematical modelling: Connecting to researsh and practice. Springer.
[10] Araújo J. (2010). Brazilian research on modelling in mathematics education. ZDM Mathematics Education 42, 337-348.
[11] Borba M. y Villarreal M. (2005). Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation. Springer.
[12] Malheiros A. (2007). Modelagem matemática e pedagogia de projetos: Possíveis interseções. Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte, Brazil.
[13] Antonius S. et al. (2007). Classroom activities and the teacher. En Blum W. et al. (Eds.), Modelling and Applications in Mathematics Education. Springer.
[14] Villa-Ochoa J. et al. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemática. Espaço Plural, XVIII(36), 219-251.
[15] Posada-Balvin F. (2015). Práticas algébricas no contexto da modelagem compreendida como proposta pedagógica. Disertación doctoral. Universidade Federal do Rio Grande do Norte.
[16] Obando G. et al. (2014). Filosofía, matemáticas y educación: Una perspectiva histórico-cultural en educación matemática. Revista Científica Universidad distrital 3(20), 72-90.
[17] Duval R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle.
[18] Duval R. (2017). Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations. Springer.

[19] Radford L. et al. (2008). Semiotics in mathematics Education: Epistemology, histoy, Classroom and culture. Sense Publishers.
[20] Posada-Balvin F. y Borba M. (2019). Práticas algébricas no contexto de projetos pedagógicos de modelagem. Boletim de Educação Matemática 33(6), 45-66.
[21] Youschkevitch A. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. Archive for History of Exact Sciences 16(1), 37-85.