RELATO DE EXPERIÊNCIA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E PENSAMENTO ALGÉBRICO: UMA EXPERIÊNCIA EM AULAS DE MATEMÁTICA

Alessandra Senes Marins[1]

Bruno Rodrigo Teixeira[2]

Resumo: Nesse artigo é relatada e analisada uma experiência de ensino e aprendizagem de Matemática, vivenciada com alunos de uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental, em que foi introduzido o conteúdo Expressões Algébricas, na perspectiva da Resolução de Problemas. Esse trabalho foi desenvolvido a partir de um problema que envolvia padrões e regularidades, com o intuito de oportunizar aos alunos a mobilização de diferentes elementos caracterizadores do pensamento algébrico. Assim, a maneira como foi introduzido o conteúdo Expressões Algébricas não ficou restrita à utilização da linguagem algébrica e oportunizou aos alunos mobilizar outros elementos caracterizadores do pensamento algébrico.

1. ASPECTOS TEÓRICOS

1.1 CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Na Educação Básica, "[...] o ensino da Álgebra, em geral, presente nas escolas ainda enfatiza procedimentos e cálculos, contribuindo para um aprendizado mecânico." (BELTRAME, 2009, p. 23). Nesse sentido, ainda é possível observar, como apontaram os autores Fiorentini, Miorim e Miguel, que:

> [...] a maioria dos professores ainda trabalha a Álgebra – de forma mecânica e automatizada, [...] enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões – tal como ocorria há várias décadas (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1992,p. 40).

Assim, a maneira como a Álgebra é abordada, em muitas escolas, nem sempre é propícia para o desenvolvimento de diferentes aspectos do pensamento algébrico, ficando restrita, em muitos casos, apenas à linguagem algébrica. Tendo isto em vista, pode-se destacar, conforme sugerem autores como Ponte (2006), a necessidade de se repensar a abordagem curricular da Álgebra, levando em conta a valorização do pensamento algébrico.

O pensamento algébrico pode se expressar por meio de diversas linguagens. Para Fiorentini, Miorim e Miguel:

> [...] ele pode expressar-se através da linguagem natural, através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para esse fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993,p. 88).

Os autores destacam também a existência de alguns elementos que são caracterizadores do pensamento algébrico: "[...] percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização" (idem, p. 87).

Para Kaput (1995, 1999 *apud* MATOS, 2007, p. 9-10), "[...] o pensamento algébrico manifesta-se quando, através de processos de conjectura e argumentação, são estabelecidas generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais."

Levando em conta as considerações apresentadas, foi desenvolvida uma experiência de ensino e aprendizagem de Matemática – que será relatada nesse artigo – para introduzir o conteúdo Expressões Algébricas, por meio de um problema

[1]Mestranda em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina. (ale_marins@hotmail.com)
[2]Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Professor Assistente do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina. (bruno@uel.br)

que envolvia padrões e regularidades. O intuito era oportunizar aos alunos, durante a resolução do problema, a mobilização de diferentes elementos caracterizadores do pensamento algébrico.

Como a Resolução de Problemas foi a estratégia metodológica escolhida para o desenvolvimento deste trabalho, a seguir, discorreremos brevemente a respeito dela.

1.2 CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tendo como objetivo oportunizar aos alunos a mobilização de outros elementos caracterizadores do pensamento algébrico, além da linguagem algébrica, e, de modo a não enfatizar a mera reprodução mecânica de procedimentos e cálculos, optou-se por utilizar como estratégia metodológica a Resolução de Problemas, visto que, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> Em contrapartida à simples reprodução de procedimentos e ao acúmulo de informações, educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática. [...] A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance (BRASIL, 1998, p. 39).

Assim, no trabalho com a Resolução de Problemas, os alunos podem utilizar seus conhecimentos prévios e diferentes estratégias de resolução que já conhecem, de modo que o professor – o qual assume papel de mediador e auxilia os alunos em suas dificuldades – possa, a partir das resoluções dos alunos, discutir e apresentar formalmente os conteúdos que pretende abordar com determinado problema. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2009).

Diante disso, adotar a Resolução de Problemas como estratégia metodológica para o ensino e a aprendizagem de Matemática

> [...] Trata-se de um trabalho onde um problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento far-se-á através de sua resolução. Professor e alunos, juntos, desenvolvem esse trabalho, e a aprendizagem realiza-se de modo cooperativo e colaborativo em sala de aula (ONUCHIC; ALLEVATO, 2009, p. 97).

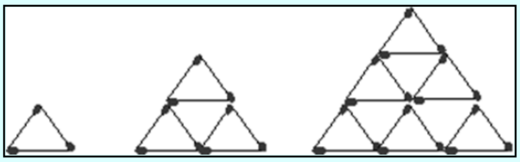
Para implementar a Resolução de Problemas em sala de aula, não há formas rígidas a serem seguidas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2009). Nesse trabalho, optou-se por utilizar as orientações sugeridas na proposta apresentada por Onuchic e Allevato (2009), a qual compreende as seguintes etapas: "1) Preparação do problema, 2) Leitura individual, 3) Leitura em conjunto, 4) Resolução do problema, 5) Observar e incentivar, 6) Registro das resoluções na lousa, 7) Plenária, 8) Busca do consenso e 9) Formalização do conteúdo.

Após a escolha da estratégia metodológica, foi selecionado um problema que envolvia padrões e regularidades para a introdução do conteúdo Expressões Algébricas. O estudo de padrões e regularidades pode ser considerado como uma via privilegiada para promover o desenvolvimento do pensamento algébrico (PONTE, 2006).

A seguir, são apresentados o problema selecionado e o relato do trabalho desenvolvido com os alunos.

2. O PROBLEMA:

Figura 1 – Triângulos com palitos de fósforo [3] (adaptado)



Fonte: http://www.apm.pt/ip/anteriores/mai97/act3c.html

Analise as figuras e responda as questões:

a. Quantos palitos de fósforo são necessários para construir cada figura?

b. O que acontecerá num triângulo cujo lado for formado por4 palitos de fósforo?

c. Quantos palitos são necessários para construir um triângulo, a partir do número de palitos de fósforo que compõe cada lado do triângulo?

d. Investigue outras relações.

3. RELATO DA EXPERIÊNCIA

O problema foi aplicado a uma turma de 15 alunos[4]do 8º ano do Ensino Fundamental, de um colégio da rede particu-

[3] O problema original está disponível em: <http://www.apm.pt/ip/anteriores/mai97/act3c.html>. Acesso em: 30 ago. 2011.
[4] Para preservar a identidade dos alunos (conforme o termo de consentimento livre e esclarecido, assinado pelos pais ou responsáveis pelos alunos) foram utilizados nomes fictícios.

ensino da cidade de Londrina - PR, em uma aula de Matemática para introduzir o conteúdo: Expressões Algébricas, no ano de 2010.

Primeiramente, foi entregue a cada aluno uma folha contendo o problema para que fizesse uma leitura individual. Em seguida, os alunos se organizaram em seis duplas e um trio para a realização de uma nova leitura. Depois, tiveram um tempo para que discutissem suas ideias e possíveis resoluções para o problema.

Durante a resolução do problema, a professora observava as discussões e os questionamentos dos alunos. Neste momento, desempenhou um papel de mediadora ao levantar novas questões para que repensassem em suas resoluções e, assim, pudessem dar continuidade ao trabalho.

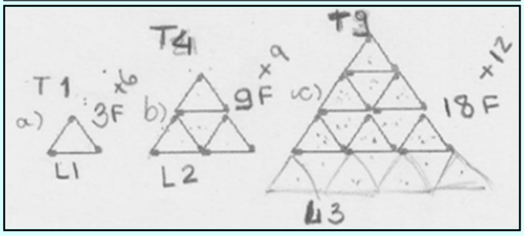
Após terem terminado a resolução do problema, um representante de cada grupo foi à lousa para registrá-la. Com a ajuda da professora, foram discutidas as diversas formas de resoluções, a fim de chegarem a um consenso a respeito do resultado correto.

Para responder a primeira pergunta (item *a*), os alunos não tiveram dificuldades, pois cada um contou a quantidade de palitos de cada figura, a saber, 3, 9 e 18. Ao iniciarem a resolução da segunda questão (item *b*), alguns desenharam a quarta figura para obter a quantidade de palitos. Outros preferiram analisar a quantidade de palitos de cada figura, obtida no *item a*, a fim de resolver a questão por meio da sequência numérica que estava sendo constituída a partir delas.

Neste momento, a professora fez um questionamento à turma: será que é possível obtermos o número de palitos, sem que seja necessário desenhar a próxima figura, analisando a sequência numérica obtida e as construções geométricas? Em decorrência disso, os alunos que já haviam desenhado a quarta figura, também tentaram determinar o número de palitos analisando a sequência numérica obtida a partir da construção geométrica das figuras.

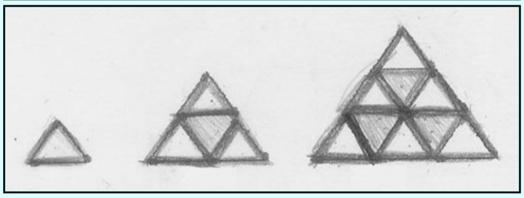
Os alunos Edgar e George, ao analisarem as figuras, verificaram que, além da sequência 3, 9 e 18, havia outra sequência numérica que poderia ser obtida a partir da quantidade de palitos inseridos de uma construção para a outra: 6, 9 e 12, como se pode observar na Figura 2. Assim, da primeira para a segunda figura, aumentaram-se 6 palitos; da segunda para a terceira, 9 palitos; e, consequentemente, da terceira para a quarta, 12. Logo, o número de palitos na quarta figura seria 30.

Figura 2 – Resolução dos alunos Edgar e George referente ao item b



No grupo dos alunos Ricardo, Marcos e Carlos, foi analisada a quantidade de triângulos formados por palitos. Na primeira figura, tem-se 1 triângulo; na segunda, 3, ou seja, são 3 triângulos que necessitam de palitos para sua construção, pois o triângulo do meio (hachurado) é formado pela junção dos outros triângulos; e, na terceira figura, são 6 triângulos (não hachurados), como mostra o desenho a seguir:

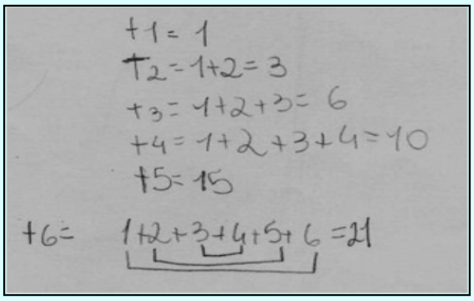
Figura 3 – Resolução dos alunos Ricardo, Marcos e Carlos referente ao item b



Observando essa construção geométrica, tal grupo percebeu outra sequência numérica: 1, 3, e 6, que representa a quantidade de triângulos não hachurados presentes em cada figura. Além disto, o grupo percebeu também que para obter a quantidade de palitos de fósforo, bastava multiplicar os números desta sequência por três. Portanto, para encontrar a quantidade de palitos na quarta figura, determinaram antes o quarto elemento da sequência, mediante o seguinte raciocínio: se de 1 para 3 aumentaram-se 2 palitos, e de 3 para 6 foram 3, então de 6 para o próximo número da sequência seriam acrescentados 4 palitos, obtendo o número 10. Em seguida, multiplicaram-no por 3 e apresentaram 30 como resposta.

Para responder a terceira pergunta (item *c*), como alguns grupos tinham refletido sobre a quantidade de palitos de fósforo no item *b* sem a necessidade de desenhar a figura, verificaram que bastava generalizar os processos utilizados para responder a segunda pergunta. Isto é, formalizaram por meio de uma expressão algébrica, a quantidade de palitos de fósforo existente em uma figura qualquer.

Figura 4 – Resolução das alunas Helen e Marta referente ao item c



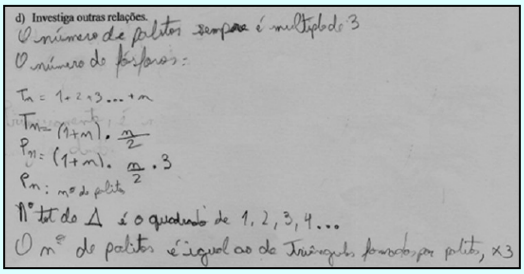
Assim como o grupo de Ricardo, Carlos e Marcos, o de Helen e Marta obteve a sequência 1, 3, 6, 10. Com isso, elas descobriram uma relação com a soma de números naturais, a fim de determinar os próximos elementos desta sequência, como mostra a figura a seguir.

As alunas desse grupo, além de determinar o número de triângulos não hachurados (conforme a figura*3*) das primeiras quatro figuras, o fizeram também para a quinta e sexta figuras, denominando-os de T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 e T_6.

Observando essas resoluções, a professora fez o seguinte questionamento: Como podemos obter a quantidade de palitos em uma determinada figura? O grupo de Ricardo, Marcos e Carlos respondeu que bastava somar 1 com o número de palitos que formam o lado de cada figura (que também representa a quantidade de termos presentes na sequência) e multiplicar pela metade deste número; pois, como a soma era de dois em dois números (conforme esquema apresentado para T_6, na figura 4), era preciso dividir essa quantidade por dois. Este procedimento descrito pelos alunos também é conhecido como a soma de Gauss [5], e já havia sido estudado pela turma no ano anterior.

Neste instante, a professora fez outra pergunta ao grupo: – Então podemos representar o número correspondente à quantidade de palitos presentes no lado de uma figura qualquer com uma letra? O grupo respondeu que sim, expondo a resolução ilustrada a seguir:

Figura 5 – Resolução dos alunos Ricardo, Marcos e Carlos, referente ao item d



Nesta resolução, é possível observar que o grupo chama de T_n o número de triângulos não hachurados presentes em cada figura, e a letra *n* representa a quantidade de palitos existentes no lado da figura. Já P_n, representa o número de palitos de fósforo contidos em cada figura.

Este grupo descobre outra relação referente ao número de triângulos que compõem cada figura. Para a primeira figura, temos 1 triângulo; para a segunda, temos 4; para a terceira 9, formando a sequência: 1, 4 e 9. Logo, os termos da sequência correspondem ao quadrado do número de palitos do lado de cada triângulo.

Analisando essas resoluções, é possível verificar processos de conjecturas e argumentação por meio dos quais foram obtidas generalizações, o que para Kaput (1995, 1999 *apud* MATOS, 2007, p. 9-10) são manifestações do pensamento algébrico.

[5] Conta-se que, com aproximadamente dez anos de idade, o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), após a solicitação de um professor à sua turma para somar todos os números naturais de 1 a 100, em pouco tempo teria conseguido obter o resultado correto. A estratégia utilizada por Gauss teria sido agrupar os 100 números envolvidos na soma em 50 pares de números. Sendo101 a soma de cada um desses pares (1+100=101; 2+99 = 101; 3+98=101, e assim por diante), o valor da soma de todos os números naturais de 1 a 100 seria 50.101= 5050. (IEZZI et al., 2010)

A percepção de regularidades esteve presente nas resoluções do problema em cada grupo, para identificar o número de palitos que compõe cada lado de uma determinada figura, o número de triângulos não hachurados e o total de triângulos. O processo de generalização também esteve presente nessas resoluções, a partir do momento no qual os alunos buscaram uma expressão algébrica que representasse as regularidades encontradas. Assim, a resolução do problema possibilitou aos alunos mobilizar alguns dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico, apresentados por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993).

Não houve divergências quanto às respostas para as duas primeiras perguntas apresentadas no enunciado do problema (itens *a* e *b*), pois todos chegaram ao mesmo resultado. Porém, para a terceira pergunta (item *c*), um grupo não conseguiu determinar a expressão algébrica que respondesse a esta questão, mas nas apresentações dos grupos mostraram ter compreendido como estes formularam suas resoluções. Já para a última (item *d*), todos apresentaram as expressões obtidas durante a resolução do problema, como foi possível observar, por exemplo, na resolução de um dos grupos na figura 5.

Por fim, a professora, a partir das resoluções apresentadas pelos alunos, introduziu o conceito de Expressões Algébricas. Primeiramente, foi feita aos alunos uma pergunta a respeito do que seria uma expressão algébrica, e a maioria respondeu que seria uma expressão matemática contendo números e letras.

A seguir, a professora definiu que as letras de uma expressão algébrica são chamadas de variáveis, pois podem assumir qualquer valor numérico para o qual a expressão esteja definida. Já os valores numéricos existentes em uma expressão algébrica são denominados constantes, pois seus valores sempre permanecem os mesmos na expressão.

Para finalizar, a professora destacou que no caso de problemas como esse, por exemplo, os valores que podem ser assumidos pela variável dependem também do contexto do problema, e as constantes são determinadas a partir de um padrão apresentado no problema. Na expressão: $T_n = (1+n)\cdot\frac{n}{2}$, a constante 1 foi utilizada para representar o padrão da soma do primeiro com o último termo, sendo ela o primeiro termo, e, a constante 2 é utilizada na divisão entre o produto da soma obtida e a quantidade de termos presentes na sequência, já que a soma é feita aos pares (do primeiro com o último termo, do segundo com o penúltimo, e assim por diante). Na expressão: $P_n = (1+n)\cdot\frac{n}{2}\cdot 3$, a constante 3 é multiplicada para obter-se a quantidade de palitos necessários para formar uma determinada figura.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A maneira como foi introduzido o conteúdo Expressões Algébricas, não ficou restrita a utilização da linguagem algébrica, afastando-se da forma puramente mecânica. O trabalho com um problema que envolvia padrões e regularidades na perspectiva da Resolução de Problemas oportunizou aos alunos mobilizar outros elementos caracterizadores do pensamento algébrico.

Diante disso, foi possível constatar que aulas ministradas sob a perspectiva da Resolução de Problemas podem auxiliar na abordagem de conteúdos de Álgebra, de modo a valorizar diferentes aspectos do desenvolvimento do pensamento algébrico.

Referências bibliográficas

BELTRAME, J. T. **A álgebra nos livros didáticos:** um estudo dos usos das variáveis, segundo o modelo 3UV**.** 2009. 160 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de EducaçãoFundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Matemática).**Brasília: MEC/SEF, 1998.

FIORENTINI, D.; MIGUEL, A.; MIORIN, M. A. Álgebra ou geometria: para onde pende o pêndulo? In:**Pro-Posições.** Campinas, v.3, n.1 [7], p. 39-54, 1992.

______. Contribuição para um repensar... A educação algébrica elementar. In:**Pro-Posições.** Campinas, v.4, n.1 [10], p. 78-91, 1993.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciência e aplicações**. 6. ed., São Paulo: Saraiva, 2010. v.1: ensino médio, 304 p.

MATOS, A. S. S. M. de. **Explorando relações funcionais no 8º ano:** um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico**.** 2007. 254 p. Dissertação (Mestrado em Educação Especialidade de Didática da Matemática). Universidade de Lisboa, Lisboa, 2007.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Trabalhando volume de cilindros através da Resolução de Problemas. **Educação Matemática em Revista**(Rio Grande do Sul), Canoas, v.1, n.10, p. 95-103, 2009.

PONTE, J. P. Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), **Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores** Lisboa: SEM-SPCE, 2006, p. 5-27.