

## Artigo Teórico



### Modelagem Matemática em Cursos de Formação de Professores: Uma Contribuição para a Construção do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

Eleni Bisognin<sup>13</sup>  
Vanilde Bisognin<sup>14</sup>

#### Resumo

Nosso propósito, neste artigo, é relatar uma experiência de ensino com a utilização da Modelagem Matemática e analisar a contribuição dessa metodologia na construção do conhecimento pedagógico do conteúdo, de acordo com as ideias de Lee Shulman. Essa experiência é parte de um projeto de pesquisa que tem os seguintes questionamentos: como os professores constroem os conceitos matemáticos com seus alunos? Quais as estratégias mais eficazes para tornar o conteúdo matemático compreensível para os alunos? Para obter respostas, trabalhamos com professores participantes de um curso de Mestrado em Ensino de Matemática e desenvolvemos uma atividade com a metodologia da Modelagem Matemática. As dúvidas dos professores, suas descobertas e suas reflexões mostram que essa abordagem pode levar o professor a construir um conhecimento do conteúdo e do ensino, criando estratégias para contextualizar os tópicos ensinados e levar os alunos a aprofundá-los.

**Palavras-chave:** Formação de Professores. Modelagem Matemática. Conhecimento Pedagógico do Conteúdo.

#### Introdução

O tema, formação de professores, tem se destacado, nos últimos anos, como uma linha de pesquisa de muitos pesquisadores que atuam em cursos de formação inicial ou continuada, cujo interesse se centraliza na compreensão dos processos pelos quais os professores aprendem, nos conhecimentos necessários para a prática da docência e como os professores articulam os diferentes conhecimentos no exercício da profissão. Para Schulman (1986), um dos aspectos importantes a ser abordado é o conhecimento pedagógico do conteúdo, que se refere ao conhecimento que os professores têm a respeito do conteúdo que ensinam “que vai além do conhecimento da disciplina em si para a dimensão do conhecimento da disciplina *para ensinar*” (SCHULMAN, 1986, p. 9, grifo do autor). Para

<sup>13</sup>Doutor em Matemática. Docente do Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS, Brasil. E-mail: [eleni@unifra.br](mailto:eleni@unifra.br)

<sup>14</sup>Doutor em Matemática. Docente do Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS, Brasil. E-mail: [vanildebisognin@gmail.com](mailto:vanildebisognin@gmail.com)

esse autor, há a necessidade de um conhecimento pedagógico voltado para o ensino, que estabeleça um elo entre o conhecimento do conteúdo específico a ser abordado e o processo de ensinar esse conteúdo.

Sobre o conhecimento do conteúdo, Shulman (1986) identifica três categorias: o conhecimento do conteúdo da disciplina; o conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento curricular. Shulman (1987, p.8) considera que o conhecimento pedagógico do conteúdo, “representa a articulação entre conteúdo e pedagogia em uma compreensão de como tópicos específicos, problemas ou questões são organizados, representados e adaptados aos diversos interesses e habilidades dos aprendizes e apresentados no ato de ensinar”.

Ball, Thames e Phelps (2008), apoiando-se nos textos de Shulman, definiram “conhecimento matemático para o ensino”, como “o conhecimento matemático necessário para desenvolver as tarefas recorrentes de ensinar matemática para os alunos” (p. 399). Esses autores consideram que o *conhecimento do conteúdo*, apontado por Shulman, pode ser subdividido em duas categorias (“conhecimento comum do conteúdo” e “conhecimento especializado do conteúdo”) e que o *conhecimento pedagógico do conteúdo* pode ser dividido em “conhecimento do conteúdo e dos estudantes” e “conhecimento do conteúdo e do ensino”.

A última categoria combina o conhecimento sobre o ensino com o conhecimento sobre a Matemática. Quando um professor tem domínio do conteúdo que vai ensinar, ele sabe como sequenciar os tópicos e como levar o aluno a se aprofundar no tema.

Trabalhando em cursos de formação inicial e continuada de professores, nossas preocupações podem ser traduzidas nas seguintes indagações: como os professores constroem os conceitos matemáticos com seus alunos? Quais as estratégias mais eficazes para tornar o conteúdo matemático compreensível para os alunos?

Para buscar respostas para essas questões, necessitamos nos debruçar sobre a temática da formação docente, desenvolver diferentes experiências de ensino e refletir sobre a própria prática, a fim de propor novas ações. Nesse contexto, consideramos que a Modelagem Matemática é uma estratégia que propicia a construção do conhecimento do conteúdo, que possibilita ao professor estabelecer uma articulação entre os aspectos pedagógicos e o conteúdo específico ao desenvolver as diferentes etapas do processo de modelagem.

Neste trabalho, relatamos uma experiência realizada com um grupo de professores em formação continuada, participantes de um curso de mestrado em Ensino de Matemática, analisando como eles constroem seus saberes e desenvolvem as habilidades necessárias para o ensino de Matemática por meio da Modelagem Matemática. Esta experiência é parte de um projeto de pesquisa mais amplo que tem como propósito investigar como são construídos os conceitos matemáticos na educação básica. Fundamentamos as indagações da experiência nas ideias de Shulman (1986,1987) sobre o conhecimento pedagógico do conteúdo e de Ball, Thames e Phelps (2008) sobre o conhecimento do conteúdo e do ensino.

### **1. O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e a Modelagem Matemática**

Há, atualmente, na literatura, muitos trabalhos de pesquisa sobre a utilização da Modelagem Matemática no ensino e que servem de referência para novas investigações, tais como o de Bassanezi (2002) e os textos encontrados em Barbosa, Caldeira e Araújo (2007); Campos, Wodewotzki e Jacobini (2011); Meyer, Caldeira e Malheiros (2011); Almeida, Araújo e Bisognin (2011), Brandt, Burak e Klüber (2011); Almeida, Silva e Vertuan (2012), entre outros.

Muitos pesquisadores consideram que ensinar Matemática por meio da Modelagem torna o ensino motivador e significativo, porque o aluno participa da construção dos conceitos e procura respostas às questões e conjecturas por ele levantadas. Levando em conta as etapas da Modelagem indicadas por Burak (2004) – escolha do tema, pesquisa exploratória, levantamento dos problemas, resolução dos problemas e o desenvolvimento da Matemática relacionada ao tema, análise crítica das soluções –, consideramos que a Modelagem Matemática oportuniza ao professor buscar temas atuais e formular problemas desafiadores e significativos, procurar os melhores exemplos e analogias, compreender o conteúdo específico para solucionar os problemas e analisar as soluções. Nessas tarefas, destaca-se a necessidade de o professor dominar o conteúdo da disciplina e a forma como deve trabalhar este conteúdo em sala de aula. Como pontua Shulman (1986), para que ele seja um instigador da aprendizagem de seus alunos:

o professor precisa entender não somente que algo é assim, mas também porque é assim. [...] além disso, nós esperamos que o professor entenda porque um dado tópico é particularmente central para uma disciplina enquanto que um outro pode ser periférico. (SHULMAN, 1986, p. 9).

Assim, em um trabalho com Modelagem, o professor precisa dominar o conteúdo, visto que a busca de soluções para o problema pode envolver tópicos variados de Matemática, mas também precisa saber como focar os assuntos que surgirem, já que alguns deles podem ser fundamentais para a aprendizagem de Matemática, no nível em questão, e precisam ser aprofundados durante o trabalho realizado.

## 2. Relato da Experiência

A experiência aqui relatada foi realizada com um grupo de professores em formação continuada, participantes de um curso de Mestrado em Ensino de Matemática. Inspirados pelas inúmeras notícias veiculadas na mídia sobre acidentes de carro, os professores propuseram a seguinte questão: quão longe um carro deve permanecer de outro numa rodovia para estar em segurança? Esse foi um tema atual e de interesse para eles.

Para buscar responder a essa questão, foi necessário que os professores consultassem *sites* especializados para obter dados e informações. Nessa busca, eles observaram que a construção do modelo matemático dependia do conhecimento sobre a distância de parada de um carro que, por sua vez, dependia da distância de reação do motorista e da distância de frenagem. Em linguagem simbólica, a distância de parada foi representada por  $d_p = d_r + d_f$ .

A distância de reação foi definida como a distância que o carro percorre desde o momento que o motorista percebe o obstáculo até o momento em que o freio é acionado. Ela depende do tempo de reação do motorista e da velocidade do carro. Portanto, o modelo matemático que descreve a distância de reação foi descrito por:  $d_r = t_r \cdot v$ . Tendo obtido a informação de que o tempo de reação de um motorista é, em média, 0,75 s, os professores encontraram um modelo matemático representativo dessa situação:  $d_r = 0,75 \cdot v$ .

A segunda parte referia-se à distância de frenagem. Uma pesquisa em livros e na internet concluiu que muitos fatores interferem para seu cálculo, tais como: o peso do veículo, sua velocidade, a condição dos pneus, a condição dos freios, o atrito e as condições da pista, entre outros. A busca de um modelo matemático representativo dessa situação envolveu conceitos de outras áreas de conhecimento, como de Física e de Engenharia. O

aspecto interdisciplinar também deve ser buscado pelo professor e deve fazer parte do conhecimento pedagógico do conteúdo de sua disciplina e de sua habilidade em relacioná-lo com tópicos ou conceitos de outras disciplinas.

Os conceitos de Física envolvidos na atividade foram força, trabalho e energia cinética. Uma das conclusões dos professores, após o estudo do tema, foi: se os freios de um carro são acionados produzindo uma força  $F$ , contrária ao movimento do carro, então o trabalho realizado é o produto da força pela distância de frenagem (deslocamento)  $T = F \cdot d_f$  e tem por efeito anular a energia cinética do carro. Como a energia cinética de um carro de massa  $m$  e velocidade  $v$  é obtida pelo produto  $\frac{1}{2} m v^2$ , então  $T = \frac{1}{2} m v^2$ . Nesse caso  $F \cdot d_f = \frac{1}{2} m v^2$  e como a força  $F$  é proporcional à massa  $m$  do carro, resulta que a distância de frenagem ( $d_f$ ) é proporcional ao quadrado da velocidade ( $v$ ). A partir dessa informação os professores calcularam a distância média de frenagem de um carro em função da velocidade, como mostrado no Quadro 1, a seguir.

<b>v</b>	0	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
<b>d<sub>f</sub></b>	0	12,75	17	21,25	25,50	29,75	34	38,25	42,50	46,75	51	55,25

Quadro 1- Distância média de frenagem em função da velocidade  
Fonte: dados da pesquisa

Essa informação lhes permitiu encontrar o modelo matemático  $d_f = 0,425v^2$  para obter a distância de frenagem em função da velocidade pelo método dos Mínimos Quadrados.

Os professores, assim, estavam mostrando seu domínio do conteúdo em questão, ou seja, a partir dos dados encontrados nos *sites*, eles chegaram a um modelo que, em princípio, poderia ser explicado aos seus alunos.

Finalmente, o grupo de professores conseguiu encontrar resposta para a questão: quão longe um carro deve permanecer de outro carro, numa rodovia, para estar em segurança? O modelo matemático encontrado  $d_p = 0,75v + 0,425v^2$  permitiu determinar quantos metros, aproximadamente, um carro deve ficar de outro em função de sua velocidade, para sentir-se em segurança e não colidir em caso de necessidade de uma parada brusca.

O interesse do grupo foi mais além e surgiu a discussão sobre se a pista era seca ou molhada, pois as condições de atrito eram distintas. Novamente eles se debruçaram sobre o tema e a busca de informações para obter um modelo que lhes permitisse obter a distância de parada. No caso da pista molhada, foram obtidos outros valores para a distância média de frenagem e o modelo matemático representativo da situação foi  $d_f = 0,625v^2$ , portanto, a distância de parada de um carro em pista molhada foi determinada por  $d_p = 0,75v + 0,625v^2$ .

### 3. Discussão dos Resultados

A discussão e a reflexão estabelecidas pelo grupo, sobre as atividades realizadas, permitiram elencar formas de explorar o conteúdo e estabelecer conexões sobre tópicos da própria Matemática e de outras disciplinas. Esse aspecto é o que Ball, Thames e Phelps (2008) destacam como “conhecimento comum” e “conhecimento especializado”, categorias essas derivadas da categoria “conhecimento do conteúdo”, definida por Shulman (1986).

A representação gráfica e a análise comparativa dos modelos provocou uma discussão no grupo, pois muitos professores ficaram entusiasmados com a possibilidade de explorar modelos representados por uma função quadrática e dar um significado aos coeficientes baseados numa situação real.

As considerações de Shulman (1986) sobre o conhecimento pedagógico do conteúdo e as explicações de Ball, Thames e Phelps (2008) sobre o conhecimento do conteúdo e do ensino podem ser vislumbradas nesta parte da experiência aqui relatada, haja vista que os professores vislumbraram uma maneira de contextualizar um conteúdo da educação básica que, muitas vezes, é apenas apresentado por meio de fórmulas.

Podem ser observadas também algumas características do conhecimento especializado do conteúdo, destacadas por Ball, Thames e Phelps (2008): como os professores falavam sobre a linguagem matemática utilizada, como representavam o modelo matemático, que argumentos utilizavam para explicar e justificar seus resultados e suas ideias matemáticas.

Esta experiência de ensino, realizada por meio da Modelagem Matemática, permitiu aos professores pensar além do próprio conteúdo matemático, pois, ao tentar resolver o

problema proposto, notaram a importância de dar significado ao que ensinam. Na fala de uma das professoras, integrantes do grupo, observamos como a construção do conhecimento pedagógico do conteúdo estava acontecendo.

Foi minha primeira experiência de transformar e apresentar um conteúdo de modo que seja significativo a partir de um contexto da vida real. Esse exemplo me mostrou como posso explorar os modelos lineares dando diferentes interpretações ao coeficiente linear e não só explorar seu aspecto geométrico. (Depoimento de integrante da pesquisa )

Outro aspecto apontado pelos professores foi o desenvolvimento de competências que as atividades de Modelagem propiciam. Dessa experiência por eles vivenciada, destacaram que esse tipo de abordagem lhes permitiu investigar novas estratégias de resolução e aplicá-las em diferentes contextos, o que implicou em uma reflexão sobre os conhecimentos necessários para sua resolução. Eles apontaram a necessidade de o professor dominar o conteúdo para ensinar, porque, só assim, se tem a habilidade de escolher e desenvolver exemplos e estratégias eficazes para poder ensinar aos alunos. No caso de o professor não ter uma boa fundamentação teórica sobre o conteúdo e sobre o conhecimento pedagógico do conteúdo, Ball, Thames e Phelps (2008) salientam que isso poderá levá-lo a explorar indevidamente os conceitos matemáticos envolvidos, a improvisar e a propor relações entre os conceitos que não são possíveis de serem estabelecidas.

#### **4. Considerações Finais**

Os cursos de formação inicial (licenciatura) ou continuada de professores (programas de pós-graduação em ensino de Matemática) são ambientes propícios para construir não só o conhecimento do conteúdo como também o conhecimento pedagógico do conteúdo. Esse último se reconstrói e se sedimenta na prática, no exercício de sua profissão, no desenvolvimento de experiências de ensino particulares de cada professor, fruto de sua reflexão entre teoria e prática e de sua ação em sala de aula.

A experiência aqui relatada mostrou, para os docentes que a propuseram, que é possível não só revisar conteúdos matemáticos que os professores ensinam na educação básica, mas também oportunizar o conhecimento de uma abordagem metodológica que aproxima o conteúdo da realidade em que o aluno vive. Essa experiência demonstrou, também, como os professores estabelecem relações entre os conhecimentos por eles

construídos ao longo de sua trajetória profissional, ou de sua formação inicial, e esses construídos no Curso de Mestrado.

Na discussão final entre os integrantes do grupo, sobre se a Modelagem Matemática favorece a reflexão, a percepção, a tomada de decisões, a resolução de problemas, as relações entre conceitos e a construção de significados para o conteúdo trabalhado, foi destacado que a escolha da Modelagem foi uma estratégia eficaz que favoreceu a construção de conceitos matemáticos. Além disso, a atividade exemplificou como eles podem tornar os conteúdos compreensíveis para os alunos em suas aulas de Matemática.

Os professores salientaram, ainda, que os diferentes modos de representação, por exemplo, modelos do mundo real e a maneira como essas representações foram usadas, deram sentido ao conteúdo e clareza sobre os objetivos do professor. Concluímos desse diálogo e das opiniões expressas que, no contexto de aprender a ensinar, é importante o professor conhecer o conteúdo matemático e ter o conhecimento pedagógico do conteúdo para entender se as atividades programadas fazem sentido para os alunos.

Sabemos que os professores podem construir o conhecimento pedagógico do conteúdo por meio de diferentes estratégias, mas acreditamos que a Modelagem Matemática é uma forma eficaz de construí-lo. Acreditamos, também, que nos cursos de formação continuada de professores, como os cursos de mestrado em Ensino de Matemática, é importante oportunizar experiências para que esses docentes projetem atividades de ensino e aprendizagem, analisem os conceitos matemáticos que podem ser construídos e explorados e reflitam sobre como tornar esses conceitos compreensíveis para os alunos. Programar uma atividade de ensino para construir determinado conceito matemático é diferente de apenas conhecer o conteúdo. Nesse sentido, nos cursos de formação inicial e continuada, deve haver o objetivo de proporcionar aos professores o conhecimento do conteúdo e, também, a construção do conhecimento pedagógico desse conteúdo.



**Referências**

- ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (Org.). **Práticas de Modelagem na Educação Matemática**. Londrina: EDUEL, 2011.
- ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. (Org.). **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Editora Contexto, 2012.
- BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G.; Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? **Journal of Teacher Education**, v.59, n.5, p. 389-407, 2008.
- BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais**. Recife: SBEM, 2007. Biblioteca do Educador Matemático.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.
- BRANDT, C. F.; BURAK, D.; KLÜBER, T. E. (Org.). **Modelagem Matemática: uma perspectiva para a Educação Básica**. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2011.
- BURAK, D. Modelagem Matemática e a Sala de Aula. In: ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2004, Londrina. **Anais...** Londrina: UEL, 2004. 1 CD-ROM.
- CAMPOS, C. R.; WODEWOTZKI, M. L.; JACOBINI, O. R. (Org.). **Educação Estatística: teoria e prática em ambientes de modelagem matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. Coleção Tendências em Educação Matemática.
- MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS A. P. S. (Org.). **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.
- SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.
- SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, p. 1-22, Feb. 1987.



Veja mais em [www.sbemrasil.org.br](http://www.sbemrasil.org.br)

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA