



## UMA PROPOSTA DE AULA COM MODELAGEM MATEMÁTICA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Edilaine Regina dos Santos<sup>1</sup>  
Bruno Rodrigo Teixeira<sup>2</sup>

### Resumo

Este artigo apresenta uma proposta para a condução de uma tarefa de Modelagem Matemática para aulas de Matemática da Educação Básica. Nessa sugestão, são descritas ações, tais como: escolha de um tema, coleta de dados, formulação do problema, formulação de hipóteses, seleção de variáveis, formulação do modelo, validação do modelo, interpretação dos resultados e resposta para o problema. A ideia é que o professor possa trabalhar tópicos de Matemática a partir do tema “a população de idosos no Brasil”, identificado em uma reportagem de um jornal *online* e com dados coletados por meio de uma busca no *site* do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Espera-se que essa proposta possa auxiliar professores a se sentirem mais seguros na condução de aulas com essa abordagem, a iniciar um processo de familiarização de seus alunos com esse tipo de tarefa, e, com isso, torná-la uma prática mais frequente no cotidiano escolar.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Modelagem Matemática. Proposta didática.

### A MATHEMATICAL MODELING DIDACTIC PROPOSAL FOR BASIC EDUCATION CLASSES

### Abstract

In this paper, we present a didactic proposal with a mathematical modeling task for Mathematics Basic Education classes. In this suggestion, the components of modeling process are choice of themes, data collection, problem formulation, hypothesis formulation, variable selection, model formulation, model validation, interpretation of results and response to the problem. The task may allow the teacher to work on Mathematics topics with his students from the theme “the elderly population in Brazil”, identified in an online newspaper article and whose data were collected through a search on the Brazilian Institute Geography and Statistics website. The expectation is helping teachers to feel less unsure in conducting their practices involving this approach, as well as familiarizing their students with mathematical modeling tasks, making it a more frequent practice in school.

**Keywords:** Mathematics Education. Mathematical Modeling. Didactic proposal.

<sup>1</sup>Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática; Universidade Estadual de Londrina/UEL, Londrina, Paraná, Brasil. E-mail: edilaine.santos@uel.br

<sup>2</sup> Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática; Universidade Estadual de Londrina/UEL, Londrina, Paraná, Brasil. E-mail: bruno@uel.br

## **Introdução**

Nos últimos anos, diferentes abordagens para o ensino de Matemática têm sido sugeridas, entre elas a Modelagem Matemática. Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 28), por exemplo, destacam que “nas últimas décadas, muitos pesquisadores e professores têm defendido a incorporação de atividades de Modelagem Matemática nas aulas de Matemática”.

Entretanto, ainda hoje, embora os professores reconheçam a importância da incorporação de tarefas de Modelagem Matemática em sala de aula e o que elas podem oportunizar aos seus alunos, é possível observar que poucos tiveram oportunidade de vivenciá-la em sua formação, seja ela inicial ou continuada e, por isso, muitos deles se sentem inseguros em trabalhar a matemática com seus alunos por meio dela (HERNÁNDEZ et al., 2017).

Tendo isso em vista, neste artigo, apresentamos uma proposta de trabalho com uma tarefa de modelagem matemática com o intuito de que essa possa auxiliar professores na condução da aula com seus alunos.

## **Modelagem Matemática na Educação Matemática: algumas considerações**

Segundo Bassanezi (2011, p. 16) a Modelagem Matemática, que “consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”, pode ser tomada como uma estratégia para o ensino e a aprendizagem da Matemática e tem se mostrado eficaz para esse propósito. Para o autor, “o fenômeno modelado deve servir de pano de fundo ou motivação para o aprendizado das técnicas e conteúdos da própria matemática” (BASSANEZI, 2011, p. 38).

O desenvolvimento de tarefas de Modelagem Matemática em sala de aula, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012 p. 30) pode oferecer aos alunos, entre outros aspectos, “o desenvolvimento do conhecimento crítico e reflexivo; o uso de diferentes registros de representação; a ocorrência de aprendizagem significativa”.

Além disso, para esse desenvolvimento, Brito e Almeida (2005, p. 66) destacam que, embora ele “não se expresse necessariamente por meio de esquemas explicativos, envolve, comumente, um conjunto de ações [...]”. Nessa proposta, essas ações se configuram em: escolha de temas, coleta de dados, formulação do problema, formulação de hipóteses, seleção

de variáveis, formulação do modelo, validação do modelo, interpretação dos resultados e resposta para o problema.

Na escolha de temas, busca-se fazer “um levantamento de possíveis situações de estudo” (BASSANEZI, 2012, p.11) e na coleta de dados busca-se por “informações relacionadas com o assunto” (BASSANEZI, 2012, p.13), ou seja, com o tema escolhido para o estudo. Em relação à coleta de dados, tem-se que ela pode estar relacionada a dados quantitativos ou qualitativos e pode se dar por algumas maneiras, tais como:

- Através de entrevistas e pesquisas executadas com os métodos de amostragem aleatória – Neste caso a organização de um questionário eficiente e a utilização de alguns conceitos básicos de Estatística são fundamentais;
- Através de pesquisa bibliográfica, utilizando dados já obtidos e catalogados em livros e revistas especializadas;
- Através de experiências programadas [...]. (BASSANEZI, 2012, p.13)

No que diz respeito à formulação do problema, pode-se dizer que essa deve levar a problemas “com enunciados que devem ser explicitados de forma clara, compreensível e operacional” e que deve indicar “exatamente o que se pretende resolver” (BASSANEZI, 2011, p.28). Já as hipóteses

[...] dirigem a investigação e são comumente formulações gerais que permitem [...] deduzir manifestações [...]. A geração de hipóteses se dá de vários modos: observação dos fatos, comparação com outros estudos, dedução lógica, experiência pessoal do modelador, observação de casos singulares da própria teoria, analogia de sistemas etc. (BASSANEZI, 2011, p.28)

Acerca da seleção das variáveis, umas das exigências fundamentais é que sejam claramente definidas (BASSANEZI, 2011). Na formulação do modelo, o “modelo matemático é montado quando se substitui a linguagem usual por uma linguagem matemática” (BASSANEZI, [20--], p.13). Quanto à validação do modelo, tem-se que

É o processo de aceitação ou não do modelo matemático proposto – Nesta etapa, os modelos [...] devem ser testados em confronto com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real – O grau de aproximação desejado destas previsões será o fator preponderante para sua validação. (BASSANEZI, 2011, p.30).

Vale ressaltar que caso o modelo matemático não seja considerado válido é necessária uma análise de todo o processo com o intuito de identificar fatores que contribuíram para essa não aceitação.

Em relação às ações finais, tem-se que “a interpretação dos resultados indicados pelo modelo implica uma análise de uma resposta para o problema. A análise da resposta constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade [...]” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.16).

Todavia, esse conjunto de ações destacado anteriormente pode não ser prática frequente para os alunos. Para Silva, Almeida e Gerolamo (2011, p.30), as atividades de modelagem matemática “colocam os alunos em contato com práticas que, de forma geral, não lhes parecem corriqueiras na sala de aula, como é o caso do envolvimento com uma situação-problema e, em muitos casos, com a própria definição de um problema”.

Uma familiarização dos alunos com atividades desse tipo pode contribuir para a inserção dessas práticas em sala de aula. Segundo Almeida e Dias (2004, p. 25), isso pode ocorrer respeitando diferentes momentos, tais como:

- Em um primeiro momento, são abordadas, com todos os alunos, situações em que estão em estudo a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático, a partir de uma situação problema já estabelecida e apresentada pelo professor; neste momento, a formulação de hipóteses e a investigação do problema, que resulta na dedução do modelo, são realizadas em conjunto com todos os alunos e o professor;
- Posteriormente, uma situação problema já reconhecida, juntamente com um conjunto de informações, pode ser sugerida pelo professor à classe, e os alunos, divididos em grupos, realizam a formulação das hipóteses simplificadoras e a dedução do modelo durante a investigação e, a seguir, validam o modelo encontrado;
- Finalmente, os alunos, distribuídos em grupos, são incentivados a conduzirem um processo de Modelagem, a partir de um problema escolhido por eles, devidamente assessorados pelo professor.

Neste artigo, a proposta de trabalho com uma tarefa de Modelagem Matemática apresentada segue a perspectiva do primeiro momento descrito pelas autoras supracitadas.

## **A proposta**

Na proposta aqui sugerida, inicialmente o professor apresenta aos alunos uma situação já estabelecida por ele. Nesse caso, a ideia é que o trabalho ocorra a partir do tema “a população de idosos no Brasil”, identificado em uma reportagem de um jornal *online* no mês de Novembro de 2016, como apresentado a seguir:

“As vagas especiais de estacionamento, o caixa preferencial e a meia-entrada são alguns dos direitos assegurados à terceira idade nas últimas décadas pelo Estatuto do Idoso. Porém, as necessidades desta população vão muito além disso. Com o aumento da expectativa de vida e a diminuição da taxa de fecundidade, o País envelhece rapidamente, o que torna o planejamento das políticas públicas um grande desafio. [...] Segundo projeções do IBGE, até 2020, a população de idosos chegará a 32 milhões, cerca de 15% da população total, o que fará do Brasil o detentor da sexta maior população idosa do mundo.”

Fonte: <<http://www.bonde.com.br/bondenews/parana/populacao-de-idosos-no-parana-deve-dobrar-ate-2030-427680.html>>

Em seguida, sugere-se que seja feita uma explicação aos alunos no sentido de que são consideradas idosas, em nosso país, pessoas com idade igual ou superior a 60 anos, e que, na sequência, seja feita a apresentação dos seguintes dados, referentes à população brasileira pertencente a essa faixa etária, coletados por meio de uma busca no site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

Tabela 1 – dados sobre a população brasileira com 60 anos ou mais de acordo com os anos.

Anos	População
1980	7 216 017
1991	10 722 705
2000	14 536 029
2010	20 590 599

Fonte: IBGE

Após uma discussão relativa a tais informações, o professor pode apresentar o seguinte problema: frente à tendência dos dados sobre as últimas décadas, o número de pessoas com 60 anos ou mais no Brasil chegará em 32 milhões em 2020, como apontado pela reportagem?

Cabe ressaltar que, segundo Hernández et al. (2017, p. 340, tradução nossa), é importante que o professor oportunize aos alunos um momento para que possam “fazer perguntas esclarecedoras para assegurar que eles entendam o que estão sendo solicitados a fazer”. Considerando a familiaridade dos alunos com tarefas de modelagem e os objetivos de ensino, ainda segundo os autores, os professores podem pedir aos alunos que proponham e

discutam “ideias iniciais sobre como abordar a tarefa e discutir a necessidade de usar a matemática para analisar o problema” (HERNÁNDEZ et al., 2017, p. 340, tradução nossa).

A partir disso, o professor pode orientar os alunos a trabalharem em grupo. Em seguida, a fazerem uma análise dos dados com o intuito de verificarem, por exemplo: a existência de uma relação de dependência entre as variáveis do problema, a dinâmica da variação da população. Pode-se conduzi-los para a elaboração de uma curva de tendência, com a finalidade de terem uma ideia do comportamento dos dados, e de uma tabela, como a apresentada a seguir, que possibilita analisar a razão entre o número de habitantes com 60 anos ou mais do ano de uma determinada década e da década imediatamente anterior.

Tabela 2 – Razões obtidas

Ano	População	Razão
1980	7 216 017	-
1991	10 722 705	1,485958944...
2000	14 536 029	1,355630785...
2010	20 590 599	1,416521596...

Fonte: elaborada pelos autores

Por meio dessa análise, nesse momento de formulação de hipóteses, professores e alunos, em conjunto, podem elaborar as seguintes proposições:

- 1) considerar intervalos iguais de 10 anos para que se tenha uma nova informação sobre a população idosa. Com isso, considera-se 1990 no lugar de 1991;
- 2) desde 1980 a população com 60 anos ou mais tem aumentado com o passar do tempo e assim continuará;
- 3) a razão entre o número de habitantes com 60 anos ou mais do ano de uma determinada década e da década imediatamente anterior é constante, pois os valores estão próximos a 1,4. Sendo  $k$  essa constante, podemos considerar a média aritmética simples desses valores (tomados com todas as casas decimais com que aparecem na Tabela 2) para obter uma aproximação ao valor de  $k$ . Assim,  $k = 1,41937$ .

Além disso, podem definir as variáveis. Nessa proposta, tem-se como exemplo as seguintes: a variável  $n$  relacionada ao ano de determinada década para o qual se tem a informação sobre a população idosa (sendo  $n$  um número inteiro não negativo,  $n=0$  o ano para o qual se tem a informação inicial sobre a população idosa,  $n=1$  o próximo e assim por diante) e  $P_n$  referente a essa população em  $n$ . Assim, temos:

Tabela 3 – utilizando uma variável auxiliar

<i>Ano</i>	<i>n</i>	<i>P<sub>n</sub></i>
1980	0	7 216 017
1990	1	10 722 705
2000	2	14 536 029
2010	3	20 590 599

Fonte: elaborada pelos autores.

Tendo tudo isso em vista, a ideia é a de proceder à formulação do modelo matemático que possibilitará uma interpretação dos resultados e uma resposta para o problema. No início desse processo, o professor pode orientar os alunos, em relação às hipóteses, para que façam a transição da linguagem natural para a linguagem matemática.

Nesse sentido, considerando a hipótese 3, os alunos poderão concluir que  $\frac{P_n}{P_{n-1}} = k$ , ou

seja, a razão entre o número que representa a população idosa do Brasil de um ano de uma determinada década e da década imediatamente anterior é igual a uma constante, nesse caso denominada  $k$ . Assim, tem-se que  $P_n = k.P_{n-1}$ . A partir disso, os alunos podem ser orientados a considerar o valor  $P_0$  como sendo o que representa a informação inicial que se tem e substituir  $n$  por valores inteiros positivos, como segue abaixo:

$$\text{para } n=1 \text{ tem-se } P_1 = k.P_0$$

$$\text{para } n=2 \text{ tem-se } P_2 = k.P_1 = k.(k.P_0) = k^2.P_0$$

$$\text{para } n=3 \text{ tem-se } P_3 = k.P_2 = k.(k^2.P_0) = k^3.P_0$$

e concluir que para  $n$  qualquer tem-se  $P_n = k^n.P_0$ , isto é,  $P_n = P_0.k^n$ . Frente a um modelo matemático geral, os alunos devem ser orientados a torná-lo específico para a situação em estudo, determinando nesse caso os valores de  $k$  e  $P_0$ .

Considerando  $k = 1,41937$ , obtido a partir da média aritmética simples dos valores das razões obtidas, e  $P_0 = 7\,216\,017$  tem-se, então, que  $P_n = 7\,216\,017.(1,41937)^n$ .

Vale destacar que enquanto os alunos se envolvem nesse processo de formulação do modelo matemático, o professor pode acompanhá-los, avaliando o trabalho e, além disso, pode tomar nota das estratégias utilizadas, dos encaminhamentos realizados, das dificuldades apresentadas, das oportunidades para aprendizagens matemáticas (HERNÁNDEZ et al., 2017), que poderão orientar uma sistematização de todo esse trabalho realizado.

Assim que os alunos formularem o modelo, pode-se incentivá-los para a validação do mesmo. Os resultados dessa ação podem ser apresentados em uma tabela, como a que segue,

em que “População observada” se refere ao número de habitantes informado pelo IBGE e “População estimada” ao número de habitantes determinado pelo modelo matemático obtido. Além disso, para que avaliem se o modelo é válido, pode-se orientá-los quanto ao cálculo da diferença (em valor absoluto) entre os valores correspondentes a população observada e a população estimada, e a diferença obtida pode ser comparada ao valor observado, em percentual (%).

Tabela 4 – validação do modelo matemático

Ano	n	População observada	População estimada	Diferença (em valor absoluto) entre a população observada e a estimada	Diferença comparada ao valor observado (%)
1980	0	7 216 017	7 216 017	0	0
1990	1	10 722 705	10 242 198	480 507	4,48
2000	2	14 536 029	14 537 469	1 440	0,01
2010	3	20 590 599	20 634 047	43 448	0,21

Fonte: elaborada pelos autores.

A última coluna da tabela evidencia que a diferença entre os valores observados e os valores estimados pelo modelo é pequena, ultrapassando 0,21% apenas no caso em que a diferença comparada ao valor observado é de 4,48%. Contudo, como o valor observado se refere ao ano de 1991 e a partir de uma hipótese formulada foi considerado como sendo de 1990, já era de se esperar um percentual um pouco maior, mas que ainda pode ser considerado pequeno em relação ao total.

Considerando o modelo válido, retorna-se ao problema com o intuito de interpretar os resultados e obter uma resposta para ele. Retomando o problema, “frente à tendência dos dados sobre as últimas décadas, o número de pessoas com 60 anos ou mais chegará no Brasil em 32 milhões em 2020, como apontado pela reportagem?” e considerando o modelo matemático formulado com base nos dados obtidos e hipóteses consideradas, tem-se para 2020, correspondente a  $n=4$ , que a população de idosos será

$$P_4 = 7216017 \cdot (1,41937)^4$$

$$P_4 = 29287347$$

não chegando, então, a 32 milhões, como mencionado pelo veículo de informação.

Nesse momento, o professor pode promover uma discussão com os alunos no sentido de que esses compreendam que as hipóteses e o caminho matemático utilizado levaram ao modelo e ao resultado acima descritos, e que, desse modo, outras hipóteses e outros caminhos

poderiam possivelmente ocasionar outros modelos e resultados, como pode ter sido o caso da projeção apresentada na reportagem.

Finalizada a atividade de modelagem matemática, o professor pode

[...] resumir as principais ideias matemáticas que os alunos usaram em suas soluções. Esta etapa também pode servir como uma oportunidade para [...] discutir o próprio processo de modelagem. Os professores podem pedir aos alunos para refletirem sobre o processo de modelagem e comentarem sobre estratégias que os ajudaram a ter sucesso para encontrar suas soluções. Revisitar é uma oportunidade ideal para discutir como o problema poderia ser alterado ou estendido e se as soluções dos alunos ainda são viáveis nessas novas situações. (HERNÁNDEZ et al., 2017, p.340, tradução nossa)

Ainda nessa parte, o professor pode fazer uma sistematização de alguma ideia decorrente dessa atividade de modelagem matemática, tal como a apresentada a seguir:

- o modelo formulado  $P_n = P_0.k^n$  pode ser utilizado sempre que tivermos trabalhando com situações em que  $\frac{P_n}{P_{n-1}} = k$ , ou seja, em que sempre tivermos a razão entre uma quantidade e a imediatamente anterior igual a uma constante.

### Algumas considerações

O objetivo, ao escrever este artigo, foi o de compartilhar uma proposta de trabalho com uma tarefa de Modelagem Matemática com o intuito de que essa possa auxiliar professores na condução da aula com seus alunos.

A partir do tema “a população de idosos no Brasil”, identificado em uma reportagem de um jornal *online*, e com dados coletados por meio de uma busca no *site* do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, o professor pode conduzir a aula por meio de uma tarefa de modelagem matemática de acordo com o primeiro momento de familiarização dos alunos com essa forma de trabalho em sala de aula.

Esperamos que essa proposta possa contribuir para que os professores sintam-se mais seguros em trabalhar com seus alunos por meio de tarefas de modelagem matemática e, assim, essa possa se tornar uma prática mais frequente no cotidiano escolar.

### Referências

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro, v. 17, n. 22, p. 19-36, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. 3.ed. São Paulo: Contexto, 2011.

BASSANEZI, R. C. **Temas & Modelos**. São Paulo: Edit. Unicamp, 2012.

BASSANEZI, R. C. **Equações Diferenciais Ordinárias**: um curso introdutório. [S.l.]: Coleção BC&T – UFABC, [20--].

BRITO, D. S.; ALMEIDA, L. W. O conceito de função em situações de modelagem Matemática. **ZETETIKÉ**, Campinas, v.13, n. 23, p.63-86, 2005.

HERNÁNDEZ, M. L. et al. Mathematical Modeling in the High School Curriculum. **The Mathematics Teacher**, v. 110, n. 5, p.336-342, 2017.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. M. W.; GEROLOMO, A. M. L. Aprendendo a fazer Modelagem Matemática: a vez do aluno. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 1, p. 28-36, 2011.