Sociedade Brasileira de Educação Matemática
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA em *Revista*
ISSN 2317-904X

O ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I: POSSIBILIDADES DE INVESTIGAÇÃO

THE TEACHING OF DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS I: RESEARCH POSSIBILITIES

Fabiane Mondini[1]
Luciane Ferreira Mocrosky[2]
Rosa Monteiro Paulo[3]

Resumo

Neste texto, apresenta-se um estudo realizado acerca do ensino de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI I). Foram propostas tarefas a serem desenvolvidas pelos alunos com a intenção de analisar as possibilidades de produção de conhecimento ao fazerem investigações com o *software.* Para tanto, as tarefas desenvolvidas em sala de aula foram de natureza investigativa. Analisou-se o que se revelou na vivência para que fosse possível compreender o sentido produzido pelos alunos para as questões do CDI I e a potencialidade das tarefas investigativas. Para discutir a experiência vivida, neste texto, apresenta-se o sentido das tarefas investigativas e exemplifica-se o proposto aos alunos e o modo como se compreende a produção do conhecimento matemático em CDI I.

Palavras-chave: Fenomenologia. Educação Matemática. Tecnologias Digitais. Produção de conhecimento.

Abstract

In this paper we present a study on the teaching of Differential and Integral Calculus I (CDI I). We proposed tasks to be developed by the students to analyze the possibilities of production of knowledge to do research with the software. Therefore the tasks developed in the classroom followed the investigative approach. We analyze what was experienced by students seeking to understand the meaning produced by them to the CDI I issues and the potential of investigative tasks. To discuss what proved to be relevant in the experience we bring in this text the meaning of investigative tasks, exemplify the proposed and made explicit the way in which we understand the production of mathematical knowledge in CDI I.

Keywords: Phenomenology. Mathematics Education. Technologies. Production of knowledge.

[1] Doutora em Educação Matemática; Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP) – Campus de Guaratinguetá, Guaratinguetá, São Paulo, Brasil. E-mail: fabiane.mondini@unesp.br.
[2] Doutora em Educação Matemática; Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) – Campus de Curitiba, Curitiba, Paraná, Brasil. E-mail: mocrosky@utfpr.edu.br
[3] Doutora em Educação Matemática; Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP) – Campus de Guaratinguetá, Guaratinguetá, São Paulo, Brasil. E-mail: rosa.paulo@unesp.br

Introdução

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI) está presente na formação inicial de profissionais das mais diversas áreas do Ensino Superior e exige dos alunos conhecimento de matemática básica, capacidade de visualização, generalização, além do desenvolvimento da habilidade de uso da escrita rigorosa nas justificativas que permeiam a complexidade da disciplina CDI. Em se tratando da Licenciatura em Matemática, essas complexidades se avolumam por esta graduação abranger o preparo de profissionais que ensinarão os conteúdos que permeiam o currículo de CDI na escola de Educação Básica, como, por exemplo, o ensino de funções reais de variáveis reais.

Neste texto, nos interessa dialogar acerca do ensino de CDI I nos cursos de formação inicial de professores de Matemática. Assim como Diogo (2015), entendemos que em um curso de Licenciatura em Matemática, tal diálogo requer, também, discussões que abordem:

> o rigor adotado pela maioria dos livros de Cálculo, o estilo de apresentação sistematizada e formal dessa disciplina, a restrição aos espaços de descoberta para promover convencimento dos alunos, a falta de entendimento pelos alunos das ideias que possibilitam a compreensão de fenômenos naturais, etc (DIOGO, 2015, p.26).

Os livros textos, por exemplo, não são escritos pensando no estudante que, pela primeira vez, se dedica ao estudo da disciplina, mas sim “para aquele que já conhece a teoria [...], pois não convida o aluno ao diálogo, nem à descoberta, mas impõe um primado, sustentado pelo rigor e pela lógica” (DIOGO, 2015, p. 26), o que gera um distanciamento entre o que o estudante já conhece, em decorrência dos estudos realizados na educação básica, e os modos como estes conhecimentos serão solicitados no ensino superior para avançar nas ideias que serão inauguradas nessa etapa escolar que visa formar profissionais.

Segundo Escher (2011, p. 86-89), historicamente, podemos classificar os livros didáticos dedicados ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral em três grupos: o primeiro, composto pelos livros mais antigos, que não apresentam descrição geométrica para o resultado; o segundo grupo é integrado por livros lançados entre as décadas de 1970 e 1990, que discutem algumas premissas e apresentam algumas ilustrações quando abordam os temas Função e Limite e um terceiro grupo, composto por livros mais recentes, que apresenta uma boa diversidade de ilustrações, exemplos e aplicações em áreas de conhecimento como a Biologia e a Física.

Mesmo os livros atuais, conforme relata Diogo (2015, p.28), ao explicitarem demonstrações dos teoremas e definições, continuam dando ênfase a afirmações do tipo “não é difícil compreender que" ou "é fácil ver/concluir que", procurando isentar-se da explicação da linguagem formal. Porém, segundo Diogo (2015), o que está claro para quem escreve não é necessariamente claro para quem lê. Desse modo, a leitura da linguagem matemática formalizada que vem apresentando as ideias essenciais do CDI I precisa ser compreendida pelo aluno e isso exige um esforço do professor para além da leitura do livro didático adotado, por exemplo.

A tentativa de favorecer a aprendizagem dos estudantes que cursam a disciplina de CDI I levou autores de livros didáticos, tais como "Stewart (2013), Leithold (1994) e Guidorizzi (2011)" (DIOGO, 2015, 32*),* a uma tendência de expor os conceitos de forma numérica, algébrica e geométrica, além de lançarem mão do uso de diversos programas computacionais, no intuito de, além de abordar os aspectos formais, promoverem a visualização dos conceitos geométricos e o desenvolvimento da intuição matemática. Ou seja, tais autores lançaram mão de algumas estratégias que entendiam serem necessárias à compreensão das ideias matemáticas que apresentavam.

Ao ensinar CDI I no curso de Licenciatura em Matemática e investigar modos de o aluno produzir conhecimento matemático, esses aspectos relativos à compreensão das ideias do Cálculo se fizeram presentes nos colocando atentas. Para este texto, trazemos o estudo desenvolvido com uma turma de alunos da disciplina de CDI I, do primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática, sobre o estudo de funções por meio da técnica de derivadas, desenvolvido com o auxílio do *software* GeoGebra[4]. Tal experiência trata-se de uma investigação matemática sobre a análise de gráficos de funções por meio do estudo da primeira e segunda derivada. Salientamos que as estratégias adotadas no desenvolvimento das tarefas com os alunos foram sustentadas pelo conhecimento das pesquisas que tratam da Investigação na aula de Matemática e que, no desenvolvimento do curso, nortearam os caminhos trilhados.

A postura fenomenológica enquanto uma metodologia guiadora dos procedimentos didáticos e pedagógicos

[4] Este aplicativo estava previamente instalado nos celulares dos estudantes. O GeoGebra é um programa de Geometria Dinâmica livre, multiplataforma e que permite a investigação de conceitos matemáticos em todos os níveis. Neste texto não vamos dar explicações sobre o s*oftware* e suas potencialidades, uma vez que elas podem ser obtidas de modo diverso. Para quem tiver interesse em aprofundar os estudos sobre o GeoGebra sugerimos, por exemplo, a página https://www.geogebra.org/.

Assumir em uma aula de matemática uma *atitude fenomenológica* é compreender a aprendizagem dos estudantes como um projeto "que se atualiza em ações e programações na temporalidade e na espacialidade mundanas (BICUDO, 2011, p. 14)", ou seja, no existir.

Na postura fenomenológica, a Educação é entendida como "*cuidado* com o pro-jeto humano em suas possibilidades de ser" (BICUDO, 1999, p.46), no cotidiano escolar, composto por professores, alunos, funcionários, pais, familiares, enfim, todos os que fazem parte da sociedade na qual a escola está inserida. Nesse cotidiano também há o conceito de Universidade trazido em sua historicidade, construído culturalmente. Há os teóricos que fundamentam o modo de proceder dos profissionais envolvidos com a Educação. Há as políticas públicas que organizam o sistema de ensino.

Ao assumir uma postura fenomenológica no contexto universitário, consideramos a Educação em toda a sua complexidade e há a necessidade de refletir sobre os modos como cada um sente, de acordo "com as nuanças do seu sentir e como cada um vê o mundo a partir de sua própria experiência e de sua cultura" (BICUDO, 1999, p.48). O ato de refletir nessa concepção, isto é, na postura fenomenológica, é o voltar-se "as experiências vividas e tomar ciência da trajetória percorrida e de si mesmo vivenciando a existência de si e do outro" (BICUDO, 1999, p.47). Estes atos são sempre efetivados pelos sujeitos que realizam as atividades nas dimensões temporal e cultural, nas quais elas significam e fazem sentido. Assim, o educador, ao assumir uma postura fenomenológica, vê o aluno como um "*ser de possibilidades*".

Enquanto uma postura didática e pedagógica no âmbito educacional, a fenomenologia "não traz consigo a imposição de uma verdade teórica ou ideológica preestabelecida, mas trabalha no real vivido, buscando a compreensão disso que somos e que fazemos – cada um de nós e todos em conjunto" (BICUDO, 1999, pp. 12-13). A intenção é buscar o sentido e o significado mundano das teorias, das ideologias e das expressões culturais e históricas.

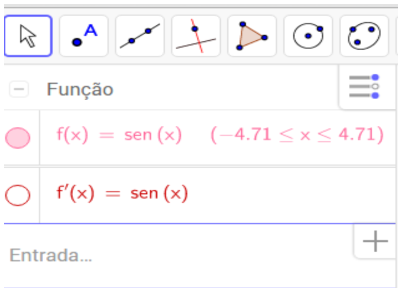
Descrição das tarefas investigativas nas aulas de CDI-I

As tarefas descritas neste texto foram desenvolvidas, conforme mencionado, com alunos do primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática com o objetivo de explorar o comportamento de funções por meio do estudo da primeira e da segunda derivadas. Ao desenvolverem tais tarefas, os alunos já tinham estudado: a definição de derivadas, o seu significado geométrico, as aplicações da primeira derivada na física, as técnicas de derivação, as derivadas sucessivas e o esboço do gráfico de função com o que as derivadas primeira e segunda fornecem. O objetivo das tarefas era que eles compreendessem o que estava sendo feito ao resolverem as questões propostas. Ou seja, nossa intenção é que eles fossem capazes de interpretar o feito de modo que lhes fosse possível “falar” sobre o que faziam e o que isso que faziam significava do ponto de vista matemático.

Tarefa 01: *O que a função f’(x)=sen (x) significa?*

Para o desenvolvimento dessa tarefa, considere o intervalo de $\left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Sabendo que a primeira derivada de uma função qualquer é a função $f'(x) = senx$, o que se pode afirmar sobre f(x)? Como o objetivo na tarefa é trabalhar com o gráfico no plano cartesiano que expresse alguns ângulos notáveis do ciclo trigonométrico, no GeoGebra, é preciso exibir os valores do eixo x em radianos. Para isso, na opção “exibir”, escolha “avançado” e peça para exibir o eixo x em radianos. Feito isso, é preciso entrar com a função f’(x) =sen(x), no campo de entrada do *software*, conforme Figura 1.

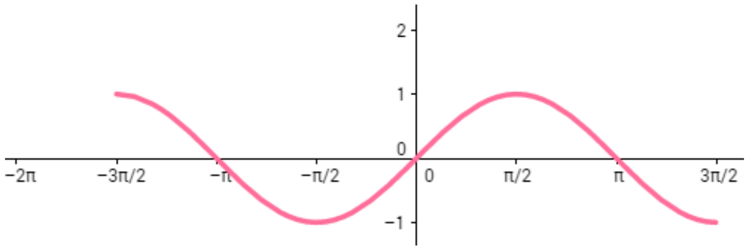
Figura 1 – Seleção da função a ser visualizada



Fonte: arquivo das pesquisadoras.

Para que o gráfico seja visualizado apenas no intervalo desejado, é necessário que ele seja limitado na janela de entrada na opção *função[função, <Valor Inicial>, <Valor final>]*, onde deve-se digitar *função*$\left[f'(x), -\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Para visualizar apenas o gráfico no intervalo que nos interessa na tarefa (ver Figura 2), deve-se desabilitar (esconder), na janela algébrica, o gráfico f’(x) = sen(x), conforme é visto na Figura 1 acima.

Figura 2 – Construção do gráfico com o auxílio do *software* GeoGebra



Fonte: arquivo das pesquisadoras**.**

A intenção na investigação é que o aluno, ao analisar o gráfico da primeira derivada da função, consiga perceber o comportamento da função que originou essa derivada sem que seja necessário escrever a função ou construir seu gráfico. A abertura para o trabalho investigativo é dada por questões como, por exemplo, o que se pode dizer sobre a função cuja derivada é f'(x) = sen(x)?

Destacamos que os alunos já tinham estudado o comportamento das funções por meio da análise da primeira e da segunda derivada e sabiam que, para isso, deveriam discutir pontos críticos, concavidade, intervalos de crescimento e de decrescimento. Logo, ao iniciarem a interpretação do gráfico exibido na tela do celular, buscaram identificar os pontos críticos destacados por pontos de máximo e mínimo da função. A partir da análise desses pontos, discutiram os intervalos de crescimento e decrescimento da função. Algumas conclusões dessa análise são:

- a função cuja primeira derivada é f'(x)=sen(x), possui pontos críticos quando $x = -\pi, x = 0$ e $x = \pi$, pois nesses pontos f'(x) = 0.
- a função f(x) é crescente no intervalo $\left[\frac{-3\pi}{2}, -\pi\right] \cup [0, \pi]$, pois nesse intervalo f'(x)>0 e f(x) é decrescente no intervalo $[-\pi, 0] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, pois nele f'(x)<0.
- como o sinal de f'(x) muda de positivo para negativo em $x = -\pi$ e em $x = \pi$, os pontos $(\pi, f(-\pi))$ e $(\pi, f(\pi))$ são valores máximo de f(x), ou seja, são os pontos em que a função muda de crescente para decrescente. Do mesmo modo, o ponto (0, f(0)) é um ponto de mínimo da função, pois quando x=0, o sinal de f'(x) muda de negativo para positivo, isso significa que a função muda de decrescente para crescente.

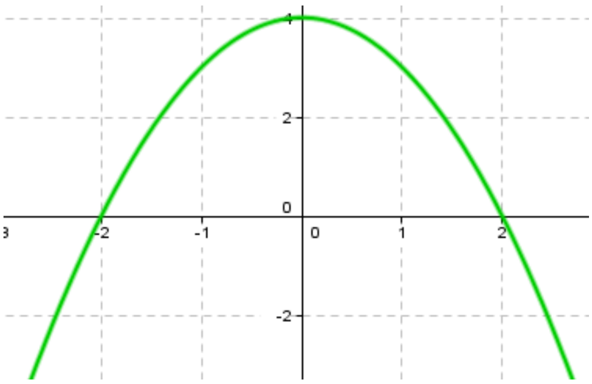
A experiência vivida com tais tarefas em sala de aula nos leva a dizer que essas conclusões não são unânimes e nem claras para todos os alunos. Ou seja, há aluno que ao olhar para o gráfico da primeira derivada da função, por exemplo, tende a interpretar a função tal e qual. Ele olha para o intervalo em que a derivada é crescente e afirma que a função também é crescente nesse intervalo. Isso nos leva a interpretar que há uma dificuldade de visualização do comportamento da função. Logo, se estamos numa postura em que a investigação é relevante, é importante mobilizar algumas ações que oportunizem tal discussão e levem a explorações que favoreçam o avanço da análise e a superação da dificuldade.

A tarefa 2, descrita na continuidade deste texto, tem a intenção de abrir uma possibilidade de compreensão daquilo que ainda não estava claro na interpretação geométrica, visto que, do ponto de vista algébrico, os alunos eram capazes de fazer a tarefa.

Tarefa 02: *O que as funções* $f'(x) = -x^2 + 4$ $f''(x) = -2x$ *dizem de f(x)?*

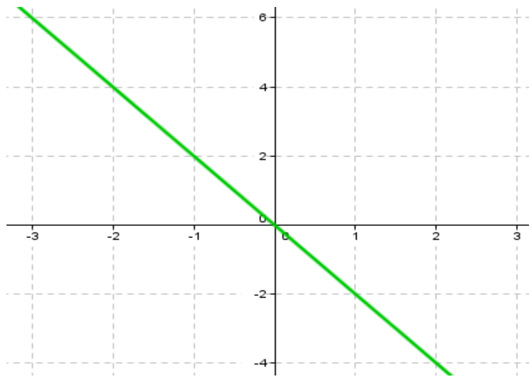
O gráfico da função f'(x) está representado na Figura 3. E a Figura 4 expressa o gráfico da segunda derivada de f(x). Identifique os pontos: de máximos, de mínimo e de inflexão de f(x). Descreva os intervalos em que a função f(x) é crescente e os intervalos em que ela é decrescente. Fale sobre a concavidade de f(x).

Figura 3 – Gráfico da função primeira derivada



Fonte: arquivo das pesquisadoras.

Figura 4 – Gráfico da função segunda derivada



Fonte: arquivo das pesquisadoras.

Nesta tarefa, envolvemos os alunos na análise de funções polinomiais. O objetivo é continuar a leitura e a interpretação do gráfico da primeira e da segunda derivada da função com vistas ao estudo do comportamento da função inicial f(x).

No momento da atividade, os estudantes não conheciam as funções cujos gráficos da primeira e da segunda derivada são representados pelas Figuras 3 e 4. Destaca-se que os alunos ainda não haviam estudado o conceito de antiderivadas e tais explorações abrem caminho para o trabalho com essa ideia.

Os alunos identificaram que a função, cuja primeira derivada é representada pelo gráfico da Figura 3, possui dois pontos críticos (pontos onde a primeira derivada é zero ou não existe): em $x = -2$ e $x = 2$. Também concluíram que f(x) é crescente se $x \in [-2,2]$, pois nesse intervalo o gráfico da primeira derivada é maior que zero, e que f(x) é decrescente se $x < -2$ ou $x > 2$, pois nesse intervalo o gráfico da primeira derivada é menor que zero. Como o sinal da primeira derivada muda de negativo para positivo em $x = -2$, disseram que em $x = -2$ a função tem um ponto de mínimo, ou seja, muda de decrescente para crescente. Do mesmo modo, analisam que x=2 é um ponto de máximo da função, pois o gráfico mostra que, em sua vizinhança, o sinal muda de positivo para negativo. Porém, vale ressaltar que para alguns alunos cuja ideia da primeira derivada ainda não era clara, a conclusão foi equivocada, uma vez que afirmaram que a função é crescente se x<0 e decrescente se x>0 com um ponto de máximo em x=0. Entende-se que esta tarefa investigativa também é relevante ao professor uma vez que, explorar geometricamente este tema dá-lhe a possibilidade de identificar alunos que não compreenderam a ideia de derivada - mesmo que algebricamente saibam derivar. Há, por parte desses alunos, domínio da técnica, mas não do sentido matemático.

A análise do gráfico da Figura 4 permite a identificação de pontos de inflexão, que, nesse caso, ocorre em x=0, de modo que os alunos possam falar do comportamento da concavidade da função. Como o sinal do gráfico é positivo se x<0 e negativo se x>0, os alunos concluem que a função, cujo gráfico da segunda derivada é representado pela Figura 4, é côncavo para cima se x<0 e côncavo para baixo se x>0.

Alguns alunos, por não compreenderem a ideia da segunda derivada, responderam que a função, cuja segunda derivada está representada graficamente na Figura 4, é côncava para baixo, uma vez que se trata de uma reta decrescente. Outros, responderam também que a Figura 4 é uma reta e, portanto, não é possível falar de concavidade. A partir dessa demanda, outras tarefas foram propostas com a intenção de levar os alunos a fazerem novas análises. Embora se possa ter críticas relativas ao uso da visualização na produção do conhecimento matemático, vale destacar, neste momento, o seu significado na investigação com vistas à produção de conhecimento pelo aluno.

Guzmán (2002, p. 2, tradução nossa), ao discutir o sentido da visualização na produção do conhecimento matemático, argumenta que "o fato de a visualização ser importante na matemática é algo bastante natural se levarmos em consideração o significado da atividade matemática". Aqui chamamos a atenção para o que se está assumindo como "atividade matemática". Se considerarmos o cenário da Investigação ela pode ser compreendida como uma tarefa que exige investigação e, com o uso do *software* GeoGebra, a visualização pode ser o "ponto de partida".

A seguir, temos a tarefa 3 em que há duas determinadas funções f(x) e g(x), cuja derivada primeira de f(x) é representada na Figura 5 e a derivada segunda de g(x) é representada na Figura 6.

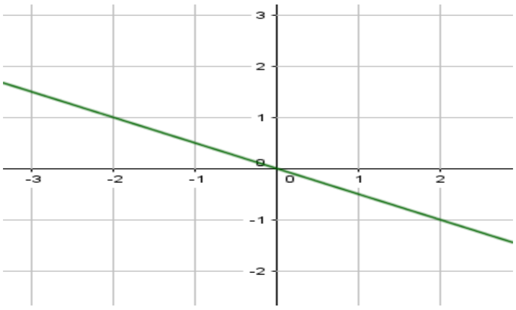
Tarefa 03: *possibilidade de leitura de gráficos de derivadas*

A proposta foi para que os alunos analisassem os pontos de máximos, de mínimo e de inflexão de f(x) e g(x), descrevendo os intervalos em que tais funções eram crescentes e decrescentes e falando sobre a concavidade de g(x).

Ao analisar os gráficos, os alunos identificam que quando x=0 há um ponto crítico na função f(x), bem como, quando x<0 a função é crescente, pois o gráfico da primeira derivada tem sinal positivo nesse intervalo e que se x>0 a função é decrescente, pois o gráfico tem sinal negativo para esse intervalo.

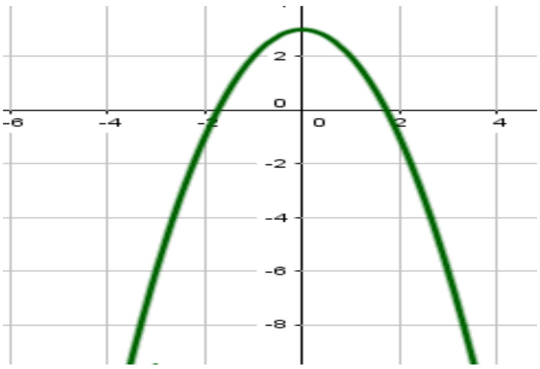
A exploração da tarefa mostra que a análise, relativamente ao gráfico da Figura 5, permite que os alunos percebam e digam que, embora o gráfico da primeira derivada da função f(x) seja representado por uma reta estritamente decrescente, isso não significa que a função f(x) seja estritamente decrescente.

Figura 5 – Gráfico da primeira derivada de f(x)



Fonte: Arquivo das pesquisadoras.

Figura 6 – Gráfico da segunda derivada de g(x)



Fonte: Arquivo das pesquisadoras.

Ao discutir o gráfico da Figura 6, os alunos destacam que a função g(x) possui dois pontos de inflexão em x=-2 e x=2 e que a função tem concavidade voltada para cima se $x \in [-2,2]$, pois nesse intervalo o gráfico da segunda derivada é maior que zero, e que g(x) é côncava para baixo se $x \leq -2$ ou $x \geq 2$, pois nesse intervalo o gráfico da segunda derivada é menor que zero.

Destaca-se, portanto, o sentido da visualização tal qual ela é favorecida pelo uso do *software* GeoGebra. Não se trata de um olhar para o gráfico e dizer o visto. Trata-se, como afirma Guzmán (2002, p. 3, tradução nossa), de uma interpretação – ou leitura adequada – do que se apresenta na tela do celular. O autor afirma que a visualização, embora parta da construção e transformação (por meio da manipulação) de figuras, ela caminha na direção da "imaginação", exigida na investigação matemática e no processo que Guzmán (2002) denomina de *matematização*, que envolve a busca de generalidade no processo de investigação.

Considerações finais

Neste texto, a intenção foi discutir o modo pelo qual se compreende a possibilidade de produção do conhecimento matemático do aluno em um contexto em que as tecnologias digitais estão presentes. Para tanto, foram elaboradas tarefas de sala de aula que permitissem aos alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I investigar o que a primeira e a segunda derivada permitem dizer a respeito da função. O modo pelo qual a proposta foi pensada e desenvolvida baseou-se no sentido das tarefas investigativas tal qual ela é discutida por Ponte et al. (1999, 2000, 2006).

Nas falas dos sujeitos da pesquisa vê-se que há um modo de interpretar as situações matemáticas que são do senso comum. Por exemplo, eles afirmam que a função é decrescente quando a sua derivada é decrescente. Por meio do recurso do *software,* nota-se uma possibilidade de exploração gráfica que os alunos fazem investigando onde o gráfico da função f'(x) é negativo. Esse fato, aliado aos conhecimentos sobre os testes – isto é, à análise do significado da primeira e segunda derivada – permite que os alunos identifiquem os intervalos em que f'(x) é negativo (a primeira derivada) e concluam que, nesse mesmo intervalo, a função f(x) é decrescente. A investigação do gráfico no *software*, de modo semelhante, levou-os a compreender o comportamento de f(x) quando o gráfico de f'(x) é positivo.

O significado da segunda derivada também foi explorado pelos alunos, permitindo-lhes compreender o que faziam algebricamente. Por meio da investigação gráfica, os alunos puderam concluir, por exemplo, que no caso em que o gráfico de f''(x) é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, o gráfico de f'(x) não é, de mesmo modo, voltado para baixo. Interpretando os intervalos da função, eles foram capazes de concluir que, quando f''(x) é positivo, f(x) tem concavidade voltada para cima e quando o gráfico de f''(x) é negativo, f(x) tem concavidade voltada para baixo.

Vimos, no processo investigativo, o envolvimento dos alunos com as análises do que lhes era dado na tela do celular. Tal análise provocou uma interação que, de modo espontâneo, os fez dialogar acerca do que percebiam, compreendendo e interpretando. A percepção, tal qual ela pode ser compreendida com Bicudo (2010), permite o "ver claro, aberto como possibilidade /.../ desdobrada /.../ em termos de pensamento em movimento" (BICUDO, 2010, p. 33). Esse pensamento em movimento é o que possibilita a análise e a reflexão que, por sua vez, faz com que o sujeito se dê conta do que faz, do que percebe e procure modos de expressar o percebido, abrindo-se ao diálogo. O diálogo permeia a tarefa, pois os alunos procuram expor o modo pelo qual analisam o que, na tela do celular, lhes aparece. Eles argumentam, levantam hipóteses e as validam ou refutam mediante a análise do que, por meio da exploração do *software*, pode ser feito. O dinamismo do *software* dá liberdade para a investigação, permite que verifiquem se o pensar faz sentido ao outro. Isso volta ao movimento do pensar que, abrindo-se, expondo-se, dialogando com o outro permite que o sentido se faça e que o conhecimento seja produzido.

Referências

BICUDO, M. A. V**.** A pesquisa qualitativa olhada para além dos seus procedimentos. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica**. 1ªed. São Paulo: Editora Cortez, 2011, v. , p. 11-28.

BICUDO, M. A. V. Filosofia da Educação Matemática segundo uma perspectiva fenomenológica. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Filosofia da Educação Matemática**: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas. São Paulo: Editora da UNESP, 2010, p. 23- 47.

BICUDO, M. A. V. A contribuição da fenomenologia à educação. In: BICUDO, M. A. V.; CAPPELETTI, I. F. (Org.). **Fenomenologia: uma visão abrangente da Educação**. 1ed. São Paulo: Olho d'Água, 1999, v. 1, p. 11-51.

DIOGO, M. G. V. S. **Uma Abordagem Didático-Pedagógica do Cálculo Diferencial e Integral I Na formação de professores de Matemática.** 2015, 256p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

ESCHER, M. A. **Dimensões Teórico-metodológicas do Cálculo Diferencial e Integral**: perspectiva histórica e de ensino e aprendizagem. 2011. 222 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2011

GUIDORIZZI. H. L. **Um curso de Cálculo**. Vol.1. 5ª ed. v.1, Rio de Janeiro: LTC editora. 2008.

GUZMÁN, M. The Role of Visualization in the Teaching and Learning of Mathematical Analysis. **Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics** (at the Undergraduate Level) Hersonissos, Creta, Grécia, 2002.

LEITHOLD, L. **Cálculo com Geometria Analítica**. 3ª ed. v. 1, São Paulo: Harbra & Row do Brasil, 1994.

PONTE, J. P., OLIVEIRA, H., BRUNHEIRA, L., VARANDAS, J. M. & FERREIRA, C. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. **Quadrante**, v.7, n. 2, p. 41-70, 1999.

PONTE, J. P. Tecnologias de Informação e Comunicação na Formação de Professores: Que Desafios? **Revista Iberoamericana de Educación**. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI), Madrid, España, n. 24, p. 63-90, setiembre-diciembre, 2000.

PONTE, J. P., QUARESMA, M., PEREIRA-MATA, J., BAPTISTA, M. O Estudo de Aula como Processo de Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática. **Bolema,** v. 30, n. 56, p. 868-891, Dez. 2006.

STEWART, J. **Cálculo**. Vol. 1. 7 ed. tradução de EZ2 Translate . São Paulo: Cengage Learning, 2013.

STEWART, J. **Cálculo**. Vol. 2. 7 ed. tradução de EZ2 Translate. São Paulo: Cengage Learning, 2013

Recebido em: 12 de julho de 2017.

Aprovado em: 17 de agosto de 2018.