UNIVERSITAT DE BARCELONA

Contribucions a la teoria de models de la lògica sense identitat

Pilar Dellunde i Clavé

CONTRIBUCIONS A LA TEORIA DE MODELS DE LA LÒGICA SENSE IDENTITAT

Pilar Dellunde i Clavé

Als pares i al Ferran,
que sempre m'han fet costat i
han fet possible aquest treball.

Bellaterra, maig de 1996.

CONTRIBUCIONS A LA TEORIA DE MODELS DE LA LÒGICA SENSE IDENTITAT

Pilar Dellunde i Clavé

Memòria presentada per a optar al títol de doctora en Filosofia per la Universitat de Barcelona. Maig de 1996.

Director: **Dr. Ramon Jansana i Ferrer**

Programa de doctorat: Lògica pura i aplicada (Bienni 1991-93).
Departament de Lògica, Història i Filosofia de la Ciència.

Introducció

Aquesta tesi és una contribució a la teoria de models dels llenguatges sense identitat. Estudiem el fragment de la lògica de primer ordre compost per totes aquelles fórmules que no tenen el símbol d'identitat. Hem encunyat el mot *lògica sense identitat (equality-free logic)* per a designar-lo. La relació d'identitat és, per a nosaltres, una noció lògica, amb un significat fixat. Tal i com és comú avui en dia, tenim un símbol especial en els llenguatges de primer ordre per a la identitat. Encara que, al començament, aquest no era el costum usual, la utilitat i naturalitat d'aquesta pràctica per a l'estudi de les teories matemàtiques va conduir els lògics a aquesta manera de tractar la identitat. Com a conseqüència, les investigacions van concentrar-se en aquesta versió més forta de la lògica de primer ordre, deixant de banda l'estudi de la lògica sense identitat. Recentment, la recerca en els camps de la lògica algebraica i de les ciències de la computació ha atret l'atenció envers alguns fragments de la lògica sense identitat. Un estudi general d'aquesta lògica se'ns presenta ara com a necessari. El nostre propòsit és fer-lo des del punt de vista de la teoria de models.

Els conceptes fonamentals estudiats en aquest treball són el de *congruència de Leibniz* i el de *relació de parentiu (relative relation)*, ambdues nocions juguen un paper central en l'estudi modelo-teorètic de la lògica sense identitat. En lògica de segon ordre podem definir la relació d'identitat fent servir la fórmula següent:

$$\forall P(Px \leftrightarrow Py).$$

Aquesta idea té el seu origen en el Principi de la identitat dels indiscernibles de G. W. Leibniz. A diferència dels llenguatges de segon ordre, no hi ha cap fórmula sense identitat ni cap conjunt de fórmules sense identitat que defineixi la identitat a totes les estructures. A més a més, hi ha estructures en les quals la relació d'identitat no pot ésser definida per una fórmula o un conjunt de fórmules sense identitat, fins i tot fent servir paràmetres del model. Això és, hi ha elements diferents al model que no podem distingir fent servir fórmules de primer ordre. En aquesta situació, el concepte de congruència de Leibniz, o identitat de Leibniz, com a vegades també l'anomenarem, sorgeix d'una manera molt natural. Es diu que aquesta congruència relaciona dos elements d'un model quan satisfan exactament les mateixes fórmules atòmiques sense identitat amb paràmetres en el model. És senzill mostrar que dos elements relacionats per la congruència de Leibniz tenen aquesta propietat per a totes les fórmules sense identitat. Aquesta congruència sempre existeix i resulta que és la major congruència del model. Donada una estructura $\mathfrak{A}$, designem amb $\Omega(\mathfrak{A})$ la congruència de Leibniz d'$\mathfrak{A}$ i diem que el quocient $\mathfrak{A}/\Omega(\mathfrak{A})$ és la reducció d'$\mathfrak{A}$. Quan fem el quocient, mòdul la congruència de Leibniz, el que fem és identificar aquells elements que no podem distingir utilitzant fórmules de primer ordre sense identitat i paràmetres del model. Així, la congruència de Leibniz de la reducció d'un model sempre és la identitat. D'una estructura amb la propietat que la seva congruència de Leibniz és la identitat en diem estructura *reduïda*. És senzill veure que qualsevol estructura reduïda és isomorfa a la seva reducció. La importància de les estructrures reduïdes, en lògica sense identitat, prové del fet que la reducció d'un model és una imatge homomorfa estricta del model. Per tant, el model i la seva reducció satisfan exactament els mateixos enunciats sense identitat, vegeu el Lema 1.2. L'altre concepte important estudiat en aquest tesi és el de relació de parentiu. Es diu que dues estructures són *parentes* quan tenen reduccions isomorfes. Al llarg de tot aquest treball donarem diferents caracteritzacions d'aquesta relació. El nostre objectiu és fer palès que aquesta relació juga, en lògica sense identitat, el mateix paper que la relació d'isomorfisme juga en lògica amb identitat.

L'interès actual de la congruència de Leibniz i de la relació de parentiu prové del treball de W. Blok i de D. Pigozzi. Ells van introduir el concepte de relació de parentiu per al cas especial de les matrius lògiques a [BP86] i a [BP89] van fer extensiu l'ús de la que ells van anomenar congruència de Leibniz. És un fet conegut, que va ser observat primer per S. L. Bloom a [Blo75], que a cada sistema deductiu proposicional es pot associar una teoria universal de Horn estricta sense identitat. Per aquesta raó, per a poder estudiar els aspectes algebraics dels sistemes deductius, és útil conèixer les propietats model-teorètiques d'aquest fragment de la lògica sense identitat. El treball de J. Czelakowski, del qual són una mostra els articles [Cze80a] i [Cze80b], dóna també un enfocament algebraic a l'estudi de la teoria de models de la lògica sense identitat. També la tesi doctoral de R. Elgueta, [Elg94], va en aquesta direcció.

L'estudi de les teories universals de Horn sense identitat també van ésser el primer motiu que ens va conduir a l'estudi de la lògica sense identitat i hem dedicat el darrer capítol d'aquesta tesi al seu estudi. Tanmateix, nosaltres estem interessats en un estudi general de la lògica de primer ordre sense identitat i l'enfocament que donem al seu estudi prové de la teoria de models clàssica. Fent servir la relació de parentiu desenvolupem eines usuals en teoria de models, tals com el mètode dels diagrames o els sistemes de back-and-forth systems i obtenim caracteritzacions algebraiques de l'equivalència elemental en aquests llenguatges. Una de les contribucions més importants d'aquest treball és la caracterització dels enunciats de primer ordre que són lògicament equivalents a un enunciat sense identitat. Al Capítol 4 demostrem el teorema de preservació següent: Un enunciat de primer ordre és lògicament equivalent a un enunciat sense identitat si i només si es preserva sota imatges homomorfes estrictes i antiimatges homomorfes estrictes.

La tesi té sis capítols. Al primer presentem la notació i els resultats i definicions preliminars. Al segon introduïm la noció de congruència de Leibniz, de relació de parentiu i d'estructura reduïda. Donem exemples d'estructures reduïdes i demostrem una condició necessària i suficient perquè una teoria tingui tots els seus models reduïts. A la darrera secció desenvolupem el mètode dels diagrames perquè pugui ser aplicat a llenguatges sense identitat.

En el tercer capítol donem tres caracteritzacions de l'equivalència elemental per a la lògica sense identitat. Introduïm les relacions de parentiu parcials, per a definir un cert tipus de sistema de back-and-forth. Fent servir aquests sistemes, oferim una primera caracterització de la relació d'equivalència elemental. També obtenim alguns altres resultats per a llenguatges infinitaris. Una segona caracterització és obtinguda fent servir extensions elementals (en el sentit de la lògica de primer ordre amb identitat) i la relació de parentiu. Finalment, obtenim una caracterització anàloga al Teorema de les ultrapotències de Keisler i Shelah per a lògica de primer ordre amb identitat. Introduïm unes construccions similars als ultraproductes, que anomenem ultrafiltre-productes i que ens serviran per a obtenir caracteritzacions equivalents a aquesta tercera. Aquest tipus d'estructures sembla que són les contrapartides més naturals als ultraproductes, quan treballem en llenguatges sense identitat.

El Capítol 4 està dedicat als resultats de preservació i de caracterització. A la primera secció donem un teorema de caracterització per a classes elementals en lògica sense identitat. A la segona estudiem els fragments següents d'aquesta lògica: universal, universal-atòmic, universal-existencial, positiu i Horn.

Donat un cardinal infinit κ, introduïm, al Capítol 5, la noció de model κ-saturat sense identitat, per abreujar l'anomenem L^{-}-κ-saturat. És a dir, un model que satisfà tots els 1-tipus sobre conjunts de paràmetres de cardinalitat menor que κ, on totes les fórmules del tipus són sense identitat. Comparem aquesta noció amb les nocions usuals de model κ-saturat, κ-universal i κ-homogeni. A la darrera secció, fent servir models L^{-}-ω-saturats i els mètodes de back-and-forth introduïts al Capítol 3, presentem una caracterització de les teories que són L^{-}-completes, això és teories tals que tots els seus models són elementalment equivalents en lògica sense identitat. Mostrem algunes teories amb la propietat que hi ha un cardinal infinit λ tal que, per a tot cardinal infinit $\kappa \geq \lambda$, la teoria no té models reduïts de cardinalitat κ. L'existència d'aquestes teories està garantida per l'existència de models infinits L^{-}-κ-saturats, per a tot cardinal infinit κ. Aquest fet és demostrat a la primera secció d'aquest capítol. Acabem el capítol amb alguns exemples de teories completes (en el sentit usual del terme) que estan axiomatitzades per un conjunt d'enunciats sense identitat, i n'estudiem algunes propietats.

L'últim capítol de la tesi, com ja hem esmentat abans, el dediquem a l'estudi del fragment universal de Horn sense identitat dels llenguatges infinitaris $L_{\kappa\lambda}$, amb κ i λ cardinals infinits regulars. Obtenim resultats de caracterització i de preservació, parant esment especial a les classes d'estructures reduïdes. Fent servir aquests resultats demostrem teoremes d'interpolació i definibilitat per a aquest fragment.

Pel que sabem fins ara, tots els resultats són originals. Els Teoremes 4.10 i 4.16, han estat demostrats independentment per R. Elgueta a [Elg94]. També el Teorema 6.1 ha estat demostrat per ell a [Elg94], però només per al cas especial de les fórmules de primer ordre universals de Horn estrictes. Els resultats del Capítol 6 apareixeran en l'article [DJ] en *The Journal of Symbolic Logic.*

Agraïments

Voldria agrair a en R. Jansana els seus consells durant l'elaboració d'aquest treball i l'haver-me encoratjat a fer recerca en lògica. Voldria agrair també a en E. Casanovas i a en J. Flum les seves contribucions a aquesta tesi i l'atraure la meva atenció cap a l'estudi de la teoria de models. Agraeixo a en J. Czelakowski, en W. Hodges, en D. Pigozzi, en J. Truss i a tots els membres del Seminari de Lògica de Barcelona els seus valuosos comentaris. Finalment agraeixo ai Departament de Filosofia de la U.A.B. el seu suport, a en R. Bosch els seus suggeriments i al Servei de Llengua Catalana de la U.B. la correcció del català.

Preliminars

En aquest capítol presentem la notació, les definicions d'alguns dels conceptes fonamentals d'aquesta tesi i els enunciats d'alguns resultats coneguts sobre aquests conceptes. A partir d'ara, L serà un tipus de semblança amb almenys un símbol relacional. Designarem amb L el conjunt de les fórmules de primer ordre de tipus L i per L_0 el conjunt de les fórmules sense quantificadors de tipus L. Donats dos cardinals infinits κ i λ, designem amb $L_{\kappa\lambda}$ el llenguatge infinitari de tipus L que té κ variables, i permet conjuncions de conjunts de fórmules de cardinalitat menor que κ i quantificació de conjunts de variables de cardinalitat menor que λ. $L_{\infty\omega}$ és el llenguatge infinitari de tipus L que té una classe pròpia de variables, i permet conjuncions de qualsevol conjunt de fórmules i quantificació d'un conjunt finit de variables; tenim

$$L_{\infty\omega} = \bigcup_{\kappa \in CN} L_{\kappa\omega},$$

on CN és la classe dels nombres cardinals. A més a més, $L_{\infty\infty}$ és el llenguatge infinitari de tipus L, que té una classe pròpia de variables, i permet conjuncions de qualsevol conjunt de fórmules i quantificació de qualsevol conjunt de variables; tenim

$$L_{\infty\infty} = \bigcup_{\kappa \in CN} L_{\kappa\kappa}.$$

En relació amb els llenguatges infinitaris es pot consultar [Bar68], [Kei71] i [Dic75].

Donada una classe Σ de fórmules, designarem amb Σ^- la classe de les fórmules sense identitat de Σ, això és, la classe de fórmules de Σ que no contenen el símbol d'identitat. Donades dues L-estructures $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ i una classe Σ de fórmules de tipus L, escriurem $\mathfrak{A} \equiv_\Sigma \mathfrak{B}$ i $\mathfrak{A} \equiv_\Sigma^- \mathfrak{B}$ per a dir que $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ satisfan exactament els mateixos enunciats de Σ i Σ^-, respectivament. En cas que Σ sigui una de les classes següents $L, L_0, L_{\kappa\lambda}, L_{\infty\omega}, L_{\infty\infty}$, abreujarem l'expressió $\equiv_\Sigma^-$ fent servir els símbols següents: $\equiv$, $\equiv_0$, $\equiv_{\kappa\lambda}$, $\equiv_{\infty\omega}$, $\equiv_{\infty\infty}$, $\equiv^-$, $\equiv_0^-$, $\equiv_{\kappa\lambda}^-$, $\equiv_{\infty\omega}^-$ i $\equiv_{\infty\infty}^-$.

Per a qualsevol L-estructura $\mathfrak{A}$ i qualsevol conjunt $B \subseteq A$, designem amb $L(B)$ el tipus de semblança obtingut a partir de L, afegint un nou símbol constant per a cada element de B, i designem amb $\mathfrak{A}_B$ l'expansió natural de $\mathfrak{A}$ a $L(B)$, on cada nova constant designa el seu corresponent element. Perquè sigui més clar, farem servir el mateix símbol per a la constant i per a l'element que designa, tret dels Lemes 3.26 i 4.19 i del Teorema 4.20, on podria portar a confusió. $|A|$ designa la cardinalitat del conjunt A. Donada una estructura $\mathfrak{A}$, per a tot conjunt $B \subseteq A$, $\langle B \rangle$ designa la subestructura de $\mathfrak{A}$ generada per B. Finalment, abreujarem l'expressió "si, i només si" per "ssi".

Ara recordarem algunes nocions i n'enunciarem alguns fets bàsics. Primer, definim la noció d'homomorfisme estricte. Aquesta terminologia prové de [Cze81]. A [Mon76], aquests homomorfismes s'anomenen "two-way homomorphisms" i no han de ser confosos amb els "strong homomorphisms" en el sentit de [CK91].

Definició 1.1 Si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són L-estructures, direm que una funció $h : A \to B$ és un *homomorfisme estricte* de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ si per a tot símbol constant $c \in L$,

$$h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}},$$

per a tot símbol funcional n-àdic $f \in L$ i tota $a_1, \dots, a_n \in A$,

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n)),$$

per a tot símbol relacional n-àdic $R \in L$ i tota $a_1, \dots, a_n \in A$,

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R^{\mathfrak{A}} \quad \text{ssi} \quad \langle h(a_1), \dots, h(a_n) \rangle \in R^{\mathfrak{B}}.$$

Ara donarem una caracterització dels homomorfismes estrictes.

Lema 1.2 *Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures i $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ un homomorfisme de $\mathfrak{A}$ sobre $\mathfrak{B}$. Aleshores, els enunciats següents són equivalents:*

i) *h és un homomorfisme estricte.*

ii) *Per a tota fórmula atòmica $\phi \in L^-$, $\phi = \phi(x_0, \dots, x_{n-1})$ i per a tota seqüència $a_0, \dots, a_{n-1}$ d'elements de A,*

$$\mathfrak{A} \models \phi[a_0, \dots, a_{n-1}] \quad \textit{ssi} \quad \mathfrak{B} \models \phi[h(a_0), \dots, h(a_{n-1})].$$

iii) *Per a tota fórmula $\phi \in L^-$, $\phi = \phi(x_0, \dots, x_{n-1})$ i per a tota seqüència $a_0, \dots, a_{n-1}$ d'elements de A,*

$$\mathfrak{A} \models \phi[a_0, \dots, a_{n-1}] \quad \textit{ssi} \quad \mathfrak{B} \models \phi[h(a_0), \dots, h(a_{n-1})].$$

iv) *Per a tota fórmula* $\phi \in L^-_{\infty\infty}$, $\phi = \phi(x_\alpha : \alpha < \xi)$ *i per a tota seqüència* $(a_\alpha : \alpha < \xi)$ *d'elements de* A,

$$\mathfrak{A} \models \phi\,[a_\alpha : \alpha < \xi] \quad \textit{ssi} \quad \mathfrak{B} \models \phi\,[h(a_\alpha) : \alpha < \xi]\,.$$

Aquest lema és una reformulació d'un fet conegut i és fàcil de demostrar per inducció. Observem que, en particular, si hi ha un homomorfisme estricte de $\mathfrak{A}$ sobre $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ satisfan exactament els mateixos enunciats de $L^-_{\infty\infty}$.

Donada una L-estructura $\mathfrak{A}$, una *congruència de* $\mathfrak{A}$ és una relació d'equivalència θ en A amb la propietat que per a tota $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_n \in A$ tals que $\langle a_i, b_i\rangle \in \theta$, per a cada $i = 1, \ldots, n$, tot símbol funcional n-àdic $f \in L$ i tot símbol relacional n-àdic $R \in L$,

$$\langle f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n)\rangle \in \theta,$$

i

$$\text{si} \quad \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in R^{\mathfrak{A}}, \quad \text{llavors} \quad \langle b_1, \ldots, b_n\rangle \in R^{\mathfrak{A}}.$$

Si h és un homomorfisme estricte de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$, llavors el seu nucli és una congruència de $\mathfrak{A}$. A més a més, si θ és una congruència de $\mathfrak{A}$ podem considerar l'estructura quocient $\mathfrak{A}/\theta$; aleshores l'homomorfisme canònic de $\mathfrak{A}$ sobre $\mathfrak{A}/\theta$ és un homomorfisme estricte.

La noció de subestructura elemental pot ser generalitzada a lògica sense identitat d'una manera natural.

Definició 1.3 Si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són L-estructures, diem que $\mathfrak{A}$ és una L^--*subestructura* de $\mathfrak{B}$, en símbols $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$, si $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ i per a tota $\phi(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in L^-$ i tota $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$,

$$\mathfrak{A} \models \phi\,[a_0, \ldots, a_{n-1}] \quad \textit{sii} \quad \mathfrak{B} \models \phi\,[a_0, \ldots, a_{n-1}]\,.$$

Si $\mathfrak{A}$ és una L^--subestructura de $\mathfrak{B}$, direm també que $\mathfrak{B}$ és una L^--*extensió* de $\mathfrak{A}$.

Donada una classe K de L-estructures definim les classes següents de L-estructures:

$\mathbf{S}(K)$ la classe de totes les subestructures de membres de K.

$\mathbf{S}^{\preceq^-}(K)$—la classe de totes les L^--subestructures de membres de K.

$\mathbf{P}(K)$—la classe de tots els productes directes de sistemes de membres de K.

$\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(K)$—la classe de tots els productes reduïts, sobre filtres propis κ-complets, de sistemes de membres de K.

$\mathbf{P}_{\mathbf{U}_\kappa}(K)$—la classe de tots els ultraproductes, sobre ultrafiltres propis

κ-complets, de sistemes de membres de K.

$\mathbf{H}(K)$—la classe de totes les imatges homomorfes de membres de K.

$\mathbf{H}^{-1}(K)$—la classe de totes les antiimatges homomorfes de membres de K.

$\mathbf{H_S}(K)$—la classe de totes les imatges homomorfes estrictes de membres de K.

$\mathbf{H_S^{-1}}(K)$—la classe de totes les antiimatges homomorfes estrictes de membres de K.

Suposem que totes les classes anteriors estan tancades sota imatges isomorfes i que els productes directes i els reduïts són productes de sistemes que no són buits.

Observem que per a tot tipus de semblança L i per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$, $\mathbf{H_S^{-1}}(\mathfrak{A})$ és la classe de totes les L-estructures que són isomorfes a una L-estructura obtinguda de la manera següent: assignem a cada $a \in A$ un nombre cardinal $\mu_a \geq 0$. Per a tot $a \in A$ escollim un conjunt C_a de cardinalitat μ_a tal que per a tot $a \neq a'$, $C_a \cap C_{a'} = \emptyset$. Sigui $C = \bigcup_{a \in A} C_a$. Per a tot símbol relacional k-àdic $R \in L$ definim $R^{\mathfrak{C}}$ de la manera següent: per a tota $a_1, \ldots, a_k \in A$ i tota $b_1 \in C_{a_1}, \ldots, b_k \in C_{a_k}$,

$$\langle a_1, \ldots, a_k \rangle \in R^{\mathfrak{A}} \text{ ssi } \langle b_1, \ldots, b_k \rangle \in R^{\mathfrak{C}}.$$

Per a tot símbol constant $c \in L$, sigui $c^{\mathfrak{C}}$ un element escollit de $C_{c^{\mathfrak{A}}}$. I per a tot símbol funcional k-àdic $f \in L$, tota $a_1, \ldots, a_k \in A$ i tota $b_1 \in C_{a_1}, \ldots, b_k \in C_{a_k}$, sigui $f^{\mathfrak{C}}(b_1, \ldots, b_k)$ un element escollit de $C_{f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k)}$. Si considerem només tipus de semblança relacionals, donada una seqüència de cardinals $(\mu_a : a \in A)$ hi ha, llevat d'isomorfia, únicament una estructura $\mathfrak{C}$ construïda de la manera abans esmentada; designem aquesta estructura amb $\mathfrak{A}(\mu_a : a \in A)$. Si per a tot $a \in A$, $\mu_a = \lambda$, la designarem amb $\mathfrak{A}(\lambda)$.

És un fet conegut que donada una L-estructura $\mathfrak{A}$, podem construir una antiimatge homomorfa estricta de $\mathfrak{A}$ que tingui com a reducte algebraic l'àlgebra de termes. Recordem aquesta construcció. Llevat que s'especifiqui el contrari, a partir d'ara les enumeracions de conjunts podran tenir repeticions.

Definició 1.4 Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura. Donada una enumeració $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ de A, definim la L-estructura $Ter_{\overline{a}}^{\mathfrak{A}}$ de la manera següent:

- El reducte algebraic de $Ter_{\overline{a}}^{\mathfrak{A}}$ és Ter_{V_I}, això és, l'àlgebra de termes de tipus L

generada pel conjunt $V_I = \{x_i : i \in I\}$.

- Per tal de definir la interpretació dels símbols relacionals, definim primer una funció $h_0 : V_I \to A$ així:
$$h_0(x_i) = a_i,$$
per a tot $i \in I$. Llavors, estenem h_0 a un homomorfisme h de Ter_{V_I} sobre el reducte algebraic de $\mathfrak{A}$. I per a tot símbol relacional n-àdic $R \in L$ definim $R^{Ter^{\mathfrak{A}}_{\bar{a}}}$ de la manera següent: per a tota $t_0, \ldots, t_{n-1} \in Ter_{V_I}$,
$$\langle t_0, \ldots, t_{n-1}\rangle \in R^{Ter^{\mathfrak{A}}_{\bar{a}}} \quad ssi \quad \langle h(t_0), \ldots, h(t_{n-1})\rangle \in R^{\mathfrak{A}}.$$

Lema 1.5 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura i $\bar{a} = (a_i : i \in I)$ una enumeració de A. Aleshores, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S}(Ter^{\mathfrak{A}}_{\bar{a}})$.*

Demostració. Per definició és clar que h és un homomorfisme estricte. □

Per concloure el capítol enunciarem un fet conegut sobre teories axiomatitzades per conjunts d'enunciats sense identitat. La demostració d'aquest fet fa servir les estructures de termes que hem introduït abans. Per a nosaltres una *teoria de L* és un conjunt qualsevol d'enunciats de L, no necessàriament consistent. Es diu que una teoria és *tancada,* si està tancada sota la relació de conseqüència. A més a més, donada una classe K de L-estructures, *la teoria de K*, en símbols $\mathrm{Th}(K)$, és el conjunt de tots els enunciats de L vertaders en totes les estructures de K i *la teoria sense identitat de K*, en símbols $\mathrm{Th}^-(K)$, és el conjunt de tots els enunciats sense identitat de $\mathrm{Th}(K)$. En cas que $K = \{\mathfrak{A}\}$, anomenarem $\mathrm{Th}(K)$ ($\mathrm{Th}^-(K)$) *la teoria de $\mathfrak{A}$* (*la teoria sense identitat de* $\mathfrak{A}$, respectivament) i la designarem amb $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ ($\mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$, respectivament).

Lema 1.6 *Sigui T una teoria consistent de L. Si $T \subseteq L^-$, llavors T té models infinits.*

Demostració. Com que T és consistent, hi ha una L-estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models T$. Sigui $\bar{a} = (a_i : i \in I)$ una enumeració de A on hi hagi un element de A repetit un nombre infinit de vegades, llavors $Ter^{\mathfrak{A}}_{\bar{a}}$ és infinit. Pel Lema 1.5, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S}(Ter^{\mathfrak{A}}_{\bar{a}})$ i donat que $T \subseteq L^-$, pel Lema 1.2, $Ter^{\mathfrak{A}}_{\bar{a}} \models T$. Per tant T té models infinits. □

Nocions i fets bàsics

2.1 La congruència de Leibniz i les estructures reduïdes

En aquesta secció introduïm les nocions de congruència de Leibniz d'una estructura i d'estructura reduïda. La congruència de Leibniz d'una estructura és la més gran congruència de l'estructura; és senzill de veure que sempre existeix. La noció de congruència de Leibniz va ser considerada abans, podem veure per exemple [Mon76], però el seu nom i el seu interès actual prové de [BP89]. Una estructura és reduïda quan la seva congruència de Leibniz és la identitat. Aquests dos conceptes es fan servir usualment en lògica algebraica. La noció d'estructura reduïda va ser introduïda anteriorment amb altres noms: estructura irreduïble a [Zub57] o estructura primitiva a [Mon76]. En aquesta secció establirem algunes propietats bàsiques modelo-teorètiques de les estructures reduïdes i donarem alguns exemples de teories de primer ordre amb models reduïts. Demostrarem que tots els models d'una teoria de primer ordre són reduïts si i només si aquesta teoria defineix explícitament el símbol d'identitat, és a dir, si hi ha una fórmula sense identitat $\phi(x, y) \in L$ tal que $\forall x \forall y\, [x \approx y \leftrightarrow \phi(x, y)]$ és conseqüència de la teoria.

Recordem la definició de tipus sobre un conjunt de paràmetres en un model. Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura i B un subconjunt de A. Expandim el llenguatge afegint un nou símbol constant per a cada element de B. Fixat un cardinal κ, es diu que un conjunt p de fórmules de $L(B)$ en les variables $\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ és un *κ-tipus sobre B* en $\mathfrak{A}$ si p és consistent amb $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_B)$. A més a més, p és *complet* si per a tota fórmula $\phi \in L(B)$ en les variables $\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$, $\phi \in p$ o $\neg\phi \in p$.

Fixada una κ-tupla $\overline{a} = (a_\alpha : \alpha \in \kappa)$ d'elements de A, el *tipus de $\overline{a}$ sobre B* en $\mathfrak{A}$, en símbols $\mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}(\overline{a}/B)$, és el conjunt de totes les fórmules de $L(B)$ en les variables $\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ satisfetes per $\overline{a}$. El conjunt $\mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}(\overline{a}/B)$ és un *κ-tipus complet sobre B* en $\mathfrak{A}$. Amb $\mathrm{atp}_{\mathfrak{A}}(\overline{a}/B)$ designarem el conjunt de les fórmules atòmiques de $\mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}(\overline{a}/B)$. Ara introduirem les nocions corresponents per a lògica sense identitat.

Definició 2.1 Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura i B un subconjunt de A. Fixat un cardinal κ, direm que un conjunt p de fórmules de $L^-(B)$ en les variables $\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ és un L^--κ-tipus sobre B en $\mathfrak{A}$ si p és consistent amb $\mathrm{Th}^-(\mathfrak{A}_B)$. A més a més, direm que p és L^--*complet* si i només si per a tota fórmula $\phi \in L^-(B)$ en les variables $\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$, $\phi \in p$ o $\neg\phi \in p$.

Observem que per a tot conjunt de fórmules p de $L^-(B)$, p és consistent amb $\mathrm{Th}^-(\mathfrak{A}_B)$ ssi p és consistent amb $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_B)$. Per tant, un conjunt de fórmules p de $L^-(B)$ és un L^--κ-tipus sobre B en $\mathfrak{A}$ ssi p és un κ-tipus sobre B en $\mathfrak{A}$ i totes les fórmules de p són fórmules sense identitat.

Fixada una κ-tupla $\overline{a} = (a_\alpha : \alpha \in \kappa)$ d'elements de A, el *tipus sense identitat de $\overline{a}$ sobre B* en $\mathfrak{A}$, en símbols $\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}}(\overline{a}/B)$, és el conjunt de totes les fórmules sense identitat de $\mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}(\overline{a}/B)$. És senzill de veure que el conjunt $\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}}(\overline{a}/B)$ és un *L^--κ-tipus complet sobre* B en $\mathfrak{A}$. Amb $\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}}(\overline{a}/B)$ designarem el conjunt de les fórmules atòmiques de $\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}}(\overline{a}/B)$ i l'anomenarem el *tipus atòmic sense identitat de $\overline{a}$ sobre B* en $\mathfrak{A}$.

Definició 2.2 Fixada una L-estructura $\mathfrak{A}$, definim la relació $\Omega(\mathfrak{A})$ en $\mathfrak{A}$ de la forma següent:

$$\langle a, b\rangle \in \Omega(\mathfrak{A}) \quad \text{sii} \quad \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}}(a/A) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}}(b/A),$$

per a tot $a, b \in A$. $\Omega(\mathfrak{A})$ és la major relació de congruència en $\mathfrak{A}$, és a dir, tota relació de congruència en $\mathfrak{A}$ està inclosa en ella. És anomenada *congruència de Leibniz* de A.

Es diu que una estructura és *reduïda* si no hi ha elements diferents en el seu domini que tinguin el mateix tipus atòmic sense identitat sobre l'estructura, en altres paraules, si la seva congruència de Leibniz és la identitat. L'estructura quocient $\mathfrak{A}/\Omega(\mathfrak{A})$ és reduïda i la solem designar amb $\mathfrak{A}^*$. Aquesta estructura és anomenada *la reducció de* A. Observem que, de la definició se'n segueix que $\mathfrak{A}^* \cong (\mathfrak{A}^*)^*$. A més a més, es pot mostrar fàcilment que l'homomorfisme canònic de A en $\mathfrak{A}^*$ és estricte.

Lema 2.3 *Donada una L-estructura $\mathfrak{A}$, per a tot $a, b \in A$ són equivalents els enunciats següents:*

i) $\langle a, b\rangle \in \Omega(\mathfrak{A})$.

ii) *Per a tota* $\phi(x) \in L^-_{\infty\infty}(A)$,

$$\mathfrak{A} \models \phi\,[a] \quad \textit{sii} \quad \mathfrak{A} \models \phi\,[b]\,.$$

Demostració. ii) $\Rightarrow$ i) és clar i i) $\Rightarrow$ ii) es demostra per inducció en ϕ. $\square$

Observem que el Lema 2.3 implica que, donats $a, b \in A$,

$$\langle a, b\rangle \in \Omega(\mathfrak{A}) \quad \text{sii} \quad \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}}(a/A) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}}(b/A).$$

Exemples d'estructures reduïdes

1. Ordres lineals.

2. El model $({}^{\omega}2, E_n)_{n\in\omega}$, on, per a tot $n \in \omega$, E_n és una relació d'equivalència definida per: per a tot $f, g \in {}^{\omega}2$,

$$\langle f, g\rangle \in E_n \quad \text{sii} \quad f \restriction n = g \restriction n.$$

Observem que, per a tot $f, g \in {}^{\omega}2$, $f = g$ ssi per a tot $n \in \omega$, $\langle f, g\rangle \in E_n$.

3. El graf random, (A, R), és a dir el graf comptable amb la propietat següent: si X i Y són conjunts finits i disjunts de vèrtexs de A, llavors hi ha un element $x \notin X \cup Y$ que és adjacent a tots els vèrtexs de X i a cap de Y. (A, R) és reduïda perquè, per definició, donats dos elements diferents $a, b \in A$, hi ha un element $c \in A$ diferent d'a i de b tal que $\langle a, c\rangle \in R$ i $\langle b, c\rangle \notin R$.

Hi ha teories de L que no tenen models reduïts. Per exemple, la teoria d'una relació d'equivalència amb infinites classes totes elles infinites. La raó és que, en qualsevol model d'aquesta teoria, dos elements qualssevol pertanyents a la mateixa classe d'equivalència tenen el mateix tipus atòmic sense identitat sobre el model. Observem també que qualsevol teoria de L axiomatitzada per un conjunt d'enunciats sense identitat té models que són reduïts i models que no ho són: per a tot model $\mathfrak{A}$ d'una teoria d'aquest tipus, donat que $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{A}^*$ és un model reduït de la teoria. A més a més, fixada una enumeració $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ de A amb com a mínim, un element de A repetit, $Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}}$ no és reduïda i és també un model de la teoria perquè $Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}} \in \mathbf{H}^{-1}_{\mathbf{S}}(\mathfrak{A})$ i aleshores, $\mathfrak{A} \equiv^- Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}}$.

Ara donarem una condició suficient perquè una teoria de L tingui models no reduïts. Primer de tot, recordem algunes definicions. Sigui T una teoria de L, $\overline{x} = x_1, \ldots, x_n$ una seqüència de variables i $p(\overline{x})$ un conjunt de fórmules. Es diu que una fórmula $\phi = \phi(\overline{x})$ *aïlla* $p(\overline{x})$ en T si $T \models \phi(\overline{x}) \to p(\overline{x})$. I es diu que $p(\overline{x})$ és *aïllat* en T si hi ha una fórmula $\phi(\overline{x})$ consistent amb T tal que $\phi(\overline{x})$ aïlla $p(\overline{x})$ en T. Fixada una L-estructura $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ *realitza* $p(\overline{x})$ si hi ha una n-tupla $\overline{a} = a_1, \ldots, a_n \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models p[\overline{a}]$. I finalment, es diu que $\mathfrak{A}$ *omet* $p(\overline{x})$ si $\mathfrak{A}$ no realitza $p(\overline{x})$. Una teoria T de L *omet* $p(\overline{x})$ si hi ha $\mathfrak{A} \models T$ tal que $\mathfrak{A}$ omet $p(\overline{x})$.

Observem que, per a tota teoria T de L, els models reduïts de T són aquells que ometen el següent conjunt de fórmules:

$$p_r = \{x \not\approx y\} \cup \{\forall \overline{z}[\phi(x, \overline{z}) \leftrightarrow \phi(y, \overline{z})] : \phi \in L^- \text{ atòmica}\}.$$

Per tant, podem obtenir el resultat següent:

Proposició 2.4 *Sigui T una teoria consistent de L. Si p_r és aïllat en T, llavors alguns models de T no són reduïts.*

Demostració. Si p_r és aïllat en T, hi ha una fórmula $\phi(x,y)$ consistent amb T tal que $\phi(x,y)$ aïlla p_r en T. Clarament, cap model de $T \cup \{\exists x \exists y \phi(x,y)\}$ és reduït. □

Demostrarem que l'altra direcció de la Proposició 2.4 val per a tipus de semblança finits i relacionals. Més tard presentarem un exemple que mostrarà que, fins i tot en el cas de les teories completes, en general la inversa no val.

Proposició 2.5 *Sigui L un tipus de semblança finit i relacional i T una teoria consistent de L. Si alguns models de T no són reduïts, llavors p_r és aïllat en T.*

Demostració. Donat que L és finit i relacional, hi ha, llevat d'equivalència lògica, un nombre finit de fórmules en p_r. Podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que p_r és finit. Sigui $\phi(x,y)$ la conjunció de totes les fórmules de p_r. Com que T té models que no són reduïts, $\phi(x,y)$ és consistent amb T. Clarament $\phi(x,y)$ aïlla p_r en T. □

Ara enunciarem el Teorema d'omissió de tipus clàssic. Una demostració d'aquest teorema es pot trobar a la pàgina 80 de [CK91]. Utilitzant aquest teorema obtindrem una condició suficient perquè una teoria de L tingui models reduïts, en cas que L sigui comptable.

Teorema 2.6 (Teorema d'omissió de tipus) *Sigui L comptable i T una teoria consistent de L. Si $p(\overline{x})$ no és aïllat en T, llavors T omet $p(\overline{x})$.*

Proposició 2.7 *Sigui L comptable i T una teoria consistent de L. Si p_r no és aïllat en T, llavors alguns models de T són reduïts.*

Demostració. Pel Teorema 2.6. □

Recordem que, per a teories completes, la inversa del Teorema 2.6 és vertadera. Per tant, per a teories completes, la inversa de la Proposició 2.7 també és vertadera. Però, en general, la inversa de la Proposició 2.7 no val: sigui $L = \{P_n : n \in \omega\}$, on, per a cada $n \in \omega$, P_n és un símbol relacional monàdic, i T és el conjunt de conseqüències de les fórmules següents:

$$\{\exists x P_n x : n \in \omega\} \cup \{\forall x \neg (P_n x \wedge P_m x) : n, m \in \omega, n \neq m\}.$$

T és consistent i com que T està axiomatitzada per un conjunt d'enunciats sense identitat, per una observació prèvia, T té models que són reduïts. Sigui $\phi(x,y) = x \not\approx y \wedge P_0x \wedge P_0y$, llavors $T \models \phi(x,y) \to p_r$. Per tant, p_r és aïllat en T. Aleshores, la inversa de la Proposició 2.7 no és vertadera per a T.

Donem ara un contraexemple per a demostrar el fet que hem esmentat abans: que, en general, fins i tot per a teories completes, la inversa de la Proposició 2.4 no és vertadera: Sigui $L = \{P_n : n \in \omega\}$, on, per a tot $n \in \omega$, P_n és un símbol relacional monàdic i T' és la teoria de les infinites propietats independents, és el conjunt de conseqüències de les fórmules següents:

$$\exists x(P_{i_0}x \wedge \ldots \wedge P_{i_n}x \wedge \neg P_{j_0}x \wedge \ldots \wedge \neg P_{j_k}x),$$

on $i_0, \ldots, i_n, j_0, \ldots, j_k \in \omega$ són diferents. És conegut que T' és consistent i completa. Per una observació prèvia, com que T' està axiomatitzada per un conjunt d'enunciats sense identitat, T' té models que no són reduïts. Però fent servir un altre cop la mateixa observació, tenim que T' té models reduïts. Per tant, com que T' és completa, per la inversa de la Proposició 2.7, p_r no és aïllat en T'. Per tant, la inversa de la Proposició 2.4 no és vertadera per a T'.

Aquests exemples ens deixen veure que, en algunes teories amb models reduïts, p_r és aïllat i en d'altres no. Com a corol.lari de la proposició següent, mostrarem que, per a tota teoria tancada T en un tipus de semblança comptable, si T té models reduïts i p_r no és aïllat en T, aleshores la teoria dels models reduïts de T és precisament T.

Proposició 2.8 *Sigui L comptable i T una teoria consistent i tancada de L. Llavors, els enunciats següents són equivalents:*

i) *p no és aïllat en T.*

ii) $T = \mathrm{Th}(\{\mathfrak{A} \models T : \mathfrak{A}$ *omet* $p\})$.

Demostració. Vegeu [CF], Proposició 1.3. □

Corol.lari 2.9 *Sigui L comptable i T una teoria consistent i tancada de L. Llavors, els enunciats següents són equivalents:*

i) *p_r no és aïllat en T.*

ii) $T = \mathrm{Th}(\{\mathfrak{A} \models T : \mathfrak{A}$ *és reduïda*$\})$.

Demostració. Per la Proposició 2.8. □

Finalment, per a concloure la secció donarem una condició necessària i suficient perquè una teoria de L tingui tots els seus models reduïts. Fixada una teoria T de L, diem que T *defineix explícitament el símbol d'identitat* ssi hi ha una fórmula sense identitat $\phi(x,y) \in L$ tal que

$$T \models \forall x \forall y \, [x \approx y \leftrightarrow \phi(x,y)] \, .$$

En aquest cas, direm que ϕ és una *definició del símbol d'identitat a* T.

Teorema 2.10 *Sigui T una teoria consistent de L. Llavors, els enunciats següents són equivalents:*

i) *T té tots els seus models reduïts.*

ii) *T defineix explícitament el símbol d'identitat.*

Demostració. i) $\Rightarrow$ ii) Sigui $\Gamma(x,y)$ el conjunt de fórmules següent:

$$\Gamma(x,y) = \{\forall \bar{z} \, [\psi(x,\bar{z}) \leftrightarrow \psi(y,\bar{z})] : \psi \in L^{-} \text{ atòmica}\} \, .$$

Com que tots els models de T són reduïts,

$$T \cup \Gamma(x,y) \models x \approx y.$$

Per tant, per compacitat, hi ha un conjunt finit $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que

$$T \cup \Gamma_0(x,y) \models x \approx y.$$

Sigui $\phi(x,y)$ la conjunció de totes les fórmules de Γ_0. Aleshores,

$$T \models \forall x \forall y \, [x \approx y \leftrightarrow \phi(x,y)] \, .$$

ii) $\Rightarrow$ i) Sigui $\mathfrak{A} \models T$. Demostrarem que $\mathfrak{A}$ és reduïda. Siguin $a, a' \in A$ tals que $\langle a, a' \rangle \in \Omega(\mathfrak{A})$, mostrarem que $a = a'$. Sigui $\phi(x,y)$ una definició del símbol d'identitat a T. Donat que $\mathfrak{A} \models \phi\,[a,a]$, pel Lema 2.3, $\mathfrak{A} \models \phi\,[a,a']$ i per tant, $a = a'$. Aleshores, $\mathfrak{A}$ és reduïda. $\square$

En els teoremes 2.11 i 2.12 donem condicions necessàries i suficients perquè una teoria de $L_{\kappa\kappa}$ tingui tots els seus models reduïts. Les demostracions són anàlogues a la del Teorema 2.10. Al Teorema 2.11, ens restringim al cas en què κ és fortament compacte i fem servir, en la demostració, el Teorema de κ-compacitat de $L_{\kappa\kappa}$. I, en el Teorema 2.12, ens restringim a tipus de semblança tals que $|L| < \kappa$, on κ és un cardinal regular $\kappa > \omega$. Fixada una teoria T de $L_{\kappa\kappa}$, direm que T *defineix explícitament el símbol d'identitat* ssi hi ha una fórmula sense identitat $\phi(x,y) \in L_{\kappa\kappa}$ tal que

$$T \models \forall x \forall y \, [x \approx y \leftrightarrow \phi(x,y)] \, .$$

En aquest cas, direm que ϕ és una *definició del símbol d'identitat a* T.

Teorema 2.11 *Sigui κ un cardinal fortament compacte i T una teoria consistent de $L_{\kappa\kappa}$. Llavors, els enunciats següents són equivalents:*

i) *T té tots els seus models reduïts.*

ii) *T defineix explícitament el símbol d'identitat.*

Teorema 2.12 *Suposem que κ és un cardinal regular $\kappa > \omega$ i $|L| < \kappa$. Donada una teoria consistent T de $L_{\kappa\kappa}$, els enunciats següents són equivalents:*

i) *T té tots els seus models reduïts.*

ii) $\bigwedge_{\substack{\phi \in L^- \\ \text{atòmica}}} \forall \overline{z}\, [\phi(x, \overline{z}) \leftrightarrow \phi(y, \overline{z})]$ *és una definició del símbol d'identitat a T.*

Proposició 2.13 *Suposem que κ és un cardinal infinit regular $\kappa > \omega$ i $|L| < \kappa$. Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures reduïdes, llavors per a tot cardinal regular infinit $\lambda \leq \kappa$,*

$$\mathfrak{A} \equiv^{-}_{\kappa\lambda} \mathfrak{B} \quad \text{sii} \quad \mathfrak{A} \equiv_{\kappa\lambda} \mathfrak{B}.$$

Demostració. $\Leftarrow$) és clar. $\Rightarrow$) Suposem que $\mathfrak{A} \equiv^{-}_{\kappa\lambda} \mathfrak{B}$. Considerem la fórmula

$$\psi(x, y) = \bigwedge_{\substack{\phi \in L^- \\ \text{atòmica}}} \forall \overline{z}\, [\phi(x, \overline{z}) \leftrightarrow \phi(y, \overline{z})],$$

que és una fórmula de $L^{-}_{\kappa\omega}$ perquè $|L| < \kappa$. Donat que $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són reduïdes,

$$\mathfrak{A} \models \forall x \forall y\, [x \approx y \leftrightarrow \psi(x, y)]$$

i

$$\mathfrak{B} \models \forall x \forall y\, [x \approx y \leftrightarrow \psi(x, y)].$$

Per tant, per a tot enunciat $\sigma \in L_{\kappa\lambda}$, hi ha un enunciat $\sigma' \in L^{-}_{\kappa\lambda}$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \sigma \leftrightarrow \sigma'$$

i

$$\mathfrak{B} \models \sigma \leftrightarrow \sigma'.$$

L'enunciat σ' pot ser obtingut a partir de σ reemplaçant cada aparició d'una fórmula de la forma $t_1 \approx t_2$ per una aparició de $\psi(t_1, t_2)$. Aleshores, $\mathfrak{A} \equiv_{\kappa\lambda} \mathfrak{B}$. $\square$

Observem que, a la Proposició 2.13, no podem treure la restricció que $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són reduïdes: suposem que κ és un cardinal infinit regular no comptable i $|L| < \kappa$. Llavors, per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \equiv^-_{\infty\infty} \mathfrak{A}^*$ i per tant, $\mathfrak{A} \equiv^-_{\kappa\lambda} \mathfrak{A}^*$. A més a més, tenim que $\mathfrak{A} \models \exists x \exists y (x \not\approx y \wedge \psi(x,y))$, on $\psi(x,y)$ és la fórmula definida a la demostració de la Proposició 2.13. Però $\mathfrak{A}^* \not\models \exists x \exists y (x \not\approx y \wedge \psi(x,y))$, perquè $\mathfrak{A}^*$ és reduïda. Així, $\mathfrak{A} \not\equiv_{\kappa\lambda} \mathfrak{A}^*$.

Corol.lari 2.14 *Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures reduïdes. Llavors*

i) *Per a tot cardinal infinit λ,*

$$\mathfrak{A} \equiv^-_{\infty\lambda} \mathfrak{B} \quad \text{ssi} \quad \mathfrak{A} \equiv_{\infty\lambda} \mathfrak{B}.$$

ii) $\mathfrak{A} \equiv^-_{\infty\infty} \mathfrak{B}$ *ssi* $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\infty} \mathfrak{B}$.

Demostració. Per la Proposició 2.13. □

Teorema 2.15 *Sigui L un tipus de semblança finit i relacional i $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures reduïdes. Llavors,*

$$\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B} \quad \text{ssi} \quad \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}.$$

Demostració. Fem servir el mateix tipus de demostració que en la Proposició 2.13 i utilizem el fet que, per a tot tipus de semblança finit i relacional L, hi ha un conjunt finit de fórmules Γ de la forma $\forall \overline{z}\, [\phi(x,\overline{z}) \leftrightarrow \phi(y,\overline{z})]$, on $\phi \in L^-$ és atòmica i tal que si $\psi(x,y)$ és la conjunció de totes les fórmules de Γ, llavors per a tota L-estructura reduïda $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \models \forall x \forall y\, [x \approx y \leftrightarrow \psi(x,y)]\,. \ \square$$

Si traiem la restricció que L sigui finit i relacional, aquest resultat en general no és cert. Tenim el contraexemple següent: Sigui $L = \{P, f\}$, on P és un símbol relacional monàdic i f és un símbol funcional monàdic. Considerem la L-estructura $\mathfrak{A} = (\omega, P^{\mathfrak{A}}, f^{\mathfrak{A}})$ on $P^{\mathfrak{A}} = \{0\}$, $f^{\mathfrak{A}}(0) = 0$ i per a tot $n \in \omega$, $f^{\mathfrak{A}}(n+1) = n$, i la L-estructura $\mathfrak{B} = (\omega \cup \{b\}, P^{\mathfrak{B}}, f^{\mathfrak{B}})$, on $b \notin \omega$, $P^{\mathfrak{B}} = P^{\mathfrak{A}}$ i $f^{\mathfrak{B}} = f^{\mathfrak{A}} \cup \{\langle b, b\rangle\}$. Fent servir els mètodes de back-and-forth introduïts a la Secció 3.1, es demostra a l'Exemple 3.11 que $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. Però $\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{B}$, perquè $\mathfrak{A} \not\models \exists x \exists y (x \not\approx y \wedge f(x) \approx x \wedge f(y) \approx y)$ i $\mathfrak{B} \models \exists x \exists y (x \not\approx y \wedge f(x) \approx x \wedge f(y) \approx y)$.

2.2 La relació de parentiu

Ara introduirem la noció de relació de parentiu, una relació d'equivalència entre estructures que juga el mateix paper, en llenguatges sense identitat, que la relació d'isomorfisme en els llenguatges amb identitat. Aquesta noció va ser introduïda per G. Zubieta a [Zub57], fent servir la condició iv) de la Proposició 2.17 com a definició, però només per a estructures relacionals, i independentment per W. Blok i D. Pigozzi a [BP86], fent servir la condició ii) de la Proposició 2.17 com a definició, però per al cas especial de les matrius lògiques. El mot "relative", que nosaltres traduïm per "parentiu", va ser introduït pels dos darrers autors.

Definició 2.16 Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures. Direm que una relació $R \subseteq A \times B$ és una *relació de parentiu* entre $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ si $\mathrm{dom}(R) = A$, $\mathrm{rg}(R) = B$ i

(1) per a tota constant $c \in L, c^{\mathfrak{A}} R c^{\mathfrak{B}}$,

(2) per a tot símbol funcional n-àdic $f \in L$, tota $a_1, \ldots, a_n \in A$ i tota $b_1, \ldots, b_n \in B$ tals que $a_i R b_i$ per a cada $i = 1, \ldots, n$,

$$f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) R f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n),$$

(3) per a tot símbol relacional n-àdic $S \in L$, tota $a_1, \ldots, a_n \in A$ i tota $b_1, \ldots, b_n \in B$ tals que $a_i R b_i$ per a cada $i = 1, \ldots, n$,

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in S^{\mathfrak{A}} \quad \text{ssi} \quad \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \in S^{\mathfrak{B}}.$$

Direm que dues L-estructures $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són *parentes*, en símbols $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, si hi ha una relació de parentiu entre elles.

La relació entre dues estructures de ser l'una o bé una imatge estricta homomorfa de l'altra o bé una antiimatge estricta homomorfa de l'altra, no és en general una relació transitiva. La seva transitivització és precisament la relació de parentiu, com mostra la proposició següent. L'equivalència entre ii), iii), iv) i v) ja és present a [BP86] pel cas especial de les matrius lògiques.

Proposició 2.17 *Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures. Els enunciats següents són equivalents:*

i) $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$.

ii) *Hi ha $n \in \omega$ i L-estructures $\mathfrak{C}_0, \ldots, \mathfrak{C}_n$ tals que $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_0$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}_n$ i per a tot $i < n$, $\mathfrak{C}_{i+1} \in \mathbf{H_S}(\mathfrak{C}_i)$ o $\mathfrak{C}_{i+1} \in \mathbf{H_S^{-1}}(\mathfrak{C}_i)$.*

iii) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathbf{H_S}(\mathfrak{C})$ *per a alguna* $\mathfrak{C}$.

iv) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathbf{H_S^{-1}}(\mathfrak{C})$ *per a alguna* $\mathfrak{C}$.

v) $\mathfrak{A}^* \cong \mathfrak{B}^*$.

vi) *Hi ha enumeracions de A i de B, $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ i $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ respectivament, tals que $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$.*

vii) *Hi ha enumeracions de A i de B, $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ i $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ respectivament, tals que $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$.*

viii) *Hi ha enumeracions de A i de B, $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ i $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ respectivament, tals que $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_{\infty\infty}^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$.*

Demostració. viii) $\Rightarrow$ vii) i vii) $\Rightarrow$ vi) són clars i vi) $\Rightarrow$ viii) es demostra per inducció en les fórmules de $L_{\infty\infty}^-$. iii) $\Rightarrow$ ii), iv) $\Rightarrow$ ii) i v) $\Rightarrow$ iv) també són clars.

vi) $\Rightarrow$ v) Suposem que hi ha enumeracions de A i de B, $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ i $\overline{b} = (b_i : i \in I)$, respectivament tals que $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$. Definim $h : \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*$ de la forma següent: per a tot $i \in I$,

$$h([a_i]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [b_i]_{\Omega(\mathfrak{B})}\,.$$

Primer veurem que, per a tot terme $t(y_1, \ldots, y_n)$ de L i per a tota $i_1, \ldots, i_n, j \in I$,

$$\text{(1)} \quad \left[t^{\mathfrak{A}}\left[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}\right]\right]_{\Omega(\mathfrak{A})} = [a_j]_{\Omega(\mathfrak{A})} \quad \text{ssi} \quad \left[t^{\mathfrak{B}}\left[b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}\right]\right]_{\Omega(\mathfrak{B})} = [b_j]_{\Omega(\mathfrak{B})}\,.$$

Suposem que $\left[t^{\mathfrak{A}}\left[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}\right]\right]_{\Omega(\mathfrak{A})} = [a_j]_{\Omega(\mathfrak{A})}$ i que

$$\left[t^{\mathfrak{B}}\left[b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}\right]\right]_{\Omega(\mathfrak{B})} \neq [b_j]_{\Omega(\mathfrak{B})}\,.$$

Llavors, hi ha una fórmula sense quantificadors $\phi(z, x_1, \ldots, x_m) \in L^-$ (on $z, x_1, \ldots, x_m$ són variables que no apareixen en el terme t) i una seqüència $d_1, \ldots, d_m$ d'elements de B tals que

$$\mathfrak{B} \models \phi(z, x_1, \ldots, x_m)\left[t^{\mathfrak{B}}\left[b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}\right], d_1, \ldots, d_m\right],$$

però

$$\mathfrak{B} \not\models \phi(z, x_1, \ldots, x_m)\left[b_j, d_1, \ldots, d_m\right].$$

Llavors, per a cada $0 < k \leq m$, escollim $j_k \in I$ tal que $d_k = b_{j_k}$ a l'enumeració $\overline{b}$ de B. Per tant,

$$\mathfrak{B} \models \phi(z, x_1, \ldots, x_m)\left[t^{\mathfrak{B}}\left[b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}\right], b_{j_1}, \ldots, b_{j_m}\right]$$

però

$$\mathfrak{B} \not\models \phi(z, x_1, \ldots, x_m)\left[b_j, b_{j_1}, \ldots, b_{j_m}\right].$$

Sigui ϕ' la fórmula obtinguda a partir de ϕ substituint la variable z pel terme t. Així

$$\mathfrak{B} \models \phi'(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m)\left[b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}, b_{j_1}, \ldots, b_{j_m}\right].$$

Donat que

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b}),$$

tenim que

$$\mathfrak{A} \models \phi'(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m)\,[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}, a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}]$$

i

$$\mathfrak{A} \not\models \phi(z, x_1, \ldots, x_m)\,[a_j, a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}]\,.$$

Però aleshores obtenim

$$\mathfrak{A} \models \phi(z, x_1, \ldots, x_m)\left[t^{\mathfrak{A}}\,[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}]\,, a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}\right],$$

que és absurd. Per tant, podem concloure que

$$\left[t^{\mathfrak{B}}\,[b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}]\right]_{\Omega(\mathfrak{B})} = [b_j]_{\Omega(\mathfrak{B})}\,.$$

Anàlogament, podem demostrar l'altra direcció de (1). Per (1) tenim que h està ben definida i és injectiva. A més a més, donat que $\overline{b}$ és una enumeració de B, tenim que h és exhaustiva. Vegem ara que h és un homomorfisme estricte: per a tot símbol relacional n-àdic $R \in L$ i tota $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n} \in A$,

$$\begin{aligned}
\langle [a_{i_1}]_{\Omega(\mathfrak{A})}, \ldots, [a_{i_n}]_{\Omega(\mathfrak{A})}\rangle \in R^{\mathfrak{A}^*} \quad &\text{ssi} \quad \langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}\rangle \in R^{\mathfrak{A}}\\
&\text{ssi} \quad \mathfrak{A} \models Rx_1 \ldots x_n\,[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}]\\
&\text{ssi} \quad \mathfrak{B} \models Rx_1 \ldots x_n\,[b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}]\\
&\text{ssi} \quad \langle b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}\rangle \in R^{\mathfrak{B}}\\
&\text{ssi} \quad \langle [b_{i_1}]_{\Omega(\mathfrak{B})}, \ldots, [b_{i_n}]_{\Omega(\mathfrak{B})}\rangle \in R^{\mathfrak{B}^*}.
\end{aligned}$$

Suposem ara que $f \in L$ és un símbol funcional n-àdic i $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n} \in A$. Tenim que

$$h(f^{\mathfrak{A}^*}([a_{i_1}]_{\Omega(\mathfrak{A})}, \ldots, [a_{i_n}]_{\Omega(\mathfrak{A})})) = h(\left[f^{\mathfrak{A}}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})\right]_{\Omega(\mathfrak{A})}).$$

Sigui $j \in I$ tal que $f^{\mathfrak{A}}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) = a_j$ en l'enumeració $\overline{a}$ de A, llavors

$$h(\left[f^{\mathfrak{A}}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})\right]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = h([a_j]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [b_j]_{\Omega(\mathfrak{B})}\,,$$

i per (1)

$$[b_j]_{\Omega(\mathfrak{B})} = \left[f^{\mathfrak{B}}(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n})\right]_{\Omega(\mathfrak{B})} = f^{\mathfrak{B}^*}([b_{i_1}]_{\Omega(\mathfrak{B})}, \ldots, [b_{i_n}]_{\Omega(\mathfrak{B})}).$$

D'una manera anàloga provem que per a tot símbol constant $c \in L$, $h(c^{\mathfrak{A}^*}) = c^{\mathfrak{B}^*}$. Per tant, podem concloure que h és un isomorfisme.

ii) $\Rightarrow$ v) En tenim prou amb mostrar que si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són L-estructures i $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ és un homomorfisme estricte de A sobre $\mathfrak{B}$, llavors $\mathfrak{A}^* \cong \mathfrak{B}^*$. Donat que h és sobre $\mathfrak{B}$, tenim que $\overline{a} = (a : a \in A)$ i $\overline{b} = (h(a) : a \in A)$ són enumeracions de A i de B. I donat que h és un homomorfisme estricte, pel Lema 1.2 tenim que

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

Per tant, per la implicació vi) $\Rightarrow$ v) que ja hem demostrat, podem concloure que $\mathfrak{A}^* \cong \mathfrak{B}^*$.

vi) $\Rightarrow$ iii) Suposem que hi ha enumeracions de A i de B, $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ i $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ respectivament, tals que $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$. Sigui $\mathfrak{C} = Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}}$. Pel Lema 1.5, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S}(\mathfrak{C})$. Donat que $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$, hi ha un homomorfisme estricte f de $\mathfrak{C}$ sobre $\mathfrak{B}$ que és una extensió de la funció $f_0 : Var_I \to B$ definida per:

$$f_0(x_i) = b_i$$

per a tot $i \in I$. Per tant, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathbf{H_S}(\mathfrak{C})$.

i) $\Rightarrow$ vi) Sigui $R = \{\langle a_i, b_i \rangle : i \in I\}$ una relació de parentiu entre $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$. Per inducció és simple mostrar que, per a tota $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in L_0^-$, i tota $i_1, \ldots, i_n \in I$,

$$\mathfrak{A} \models \phi\,[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}] \quad \text{ssi} \quad \mathfrak{B} \models \phi\,[b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}]\,.$$

Llavors, $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ i $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ són enumeracions de A i de B respectivament, tals que $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$.

v) $\Rightarrow$ i) Suposem que $\mathfrak{A}^* \cong \mathfrak{B}^*$ i sigui $h : \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*$ un isomorfisme. Definim la relació $R \subseteq A \times B$ de la manera següent

$$aRb \quad \text{ssi} \quad h([a]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [b]_{\Omega(\mathfrak{B})}\,,$$

per a tot $a \in A$ i tot $b \in B$. És senzill de veure que R és una relació de parentiu entre $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$. □

Com a corol.lari immediat de la Proposició 2.17 obtenim el resultat següent:

Corol.lari 2.18 *Per a tota classe K de L-estructures,*

$$\mathbf{H_S}\mathbf{H_S^{-1}}(K) = \mathbf{H_S^{-1}}\mathbf{H_S}(K).$$

Demostració. Observem que, per la Proposició 2.17, donades dues L-estructures, $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S}\mathbf{H_S^{-1}}(\mathfrak{B})$ ssi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathbf{H_S}(\mathfrak{C})$ per a alguna $\mathfrak{C}$ ssi $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathbf{H_S^{-1}}(\mathfrak{C})$ per a alguna $\mathfrak{C}$ ssi $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S^{-1}}\mathbf{H_S}(\mathfrak{B})$. □

El darrer resultat d'aquesta secció mostra que, donades dues L-estructures $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, si considerem dues seqüències d'elements $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ i $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ de A i de B respectivament, que han d'ésser necessàriament enumeracions, llavors la subestructura $\langle \overline{a} \rangle$ de A generada per $\overline{a}$ i la subestructura $\langle \overline{b} \rangle$ de $\mathfrak{B}$ generada per $\overline{b}$ són parents.

Corol.lari 2.19 *Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures i $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ i $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ seqüències d'elements de A i de B respectivament. Llavors, els enunciats següents són equivalents:*

i) $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$.

ii) $\langle \overline{a} \rangle^* \cong \langle \overline{b} \rangle^*$ *i hi ha un isomorfisme* $h : \langle \overline{a} \rangle^* \to \langle \overline{b} \rangle^*$ *tal que, per a tot* $i \in I$, $h([a_i]_{\Omega(\langle \overline{a} \rangle)}) = [b_i]_{\Omega(\langle \overline{b} \rangle)}$.

iii) $\langle \overline{a} \rangle \sim \langle \overline{b} \rangle$ *i hi ha una relació de parentiu* R *entre* $\langle \overline{a} \rangle$ *i* $\langle \overline{b} \rangle$ *tal que, per a tot* $i \in I$, $a_i R b_i$.

Demostració. i) $\Rightarrow$ ii) Suposem que $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$. Com que $\langle \overline{a} \rangle$ és una subestructura de A i $\langle \overline{b} \rangle$ és una subestructura de $\mathfrak{B}$, és clar que $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\langle \overline{a} \rangle, \overline{a})$ i $(\mathfrak{B}, \overline{b}) \equiv_0^- (\langle \overline{b} \rangle, \overline{b})$. Per tant,

$$(\langle \overline{a} \rangle, \overline{a}) \equiv_0^- (\langle \overline{b} \rangle, \overline{b}).$$

Sigui Ter el conjunt dels termes de L. Definim enumeracions $\overline{c}$ i $\overline{d}$, de $\langle \overline{a} \rangle$ i de $\langle \overline{b} \rangle$ respectivament, per:

$$\overline{c} = \langle t^{\langle \overline{a} \rangle} [a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}] : t(x_1, \ldots, x_n) \in Ter, i_1, \ldots, i_n \in I, n \in \omega \rangle$$

$$\overline{d} = \langle t^{\langle \overline{b} \rangle} [b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}] : t(x_1, \ldots, x_n) \in Ter, i_1, \ldots, i_n \in I, n \in \omega \rangle.$$

Aleshores,

$$(\langle \overline{a} \rangle, \overline{c}) \equiv_0^- (\langle \overline{b} \rangle, \overline{d}),$$

i per la demostració de vi) $\Rightarrow$ v) de la Proposició 2.17, $\langle \overline{a} \rangle^* \cong \langle \overline{b} \rangle^*$ i hi ha un isomorfisme $h : \langle \overline{a} \rangle^* \to \langle \overline{b} \rangle^*$ tal que, per a tot $i \in I$, $h([a_i]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [b_i]_{\Omega(\langle \overline{b} \rangle)}$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Per la demostració de v) $\Rightarrow$ i) de la Proposició 2.17.

iii) $\Rightarrow$ i) Per la demostració de i) $\Rightarrow$ vi) de la Proposició 2.17 i el fet que $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\langle \overline{a} \rangle, \overline{a})$ i $(\mathfrak{B}, \overline{b}) \equiv_0^- (\langle \overline{b} \rangle, \overline{b})$. □

2.3 El mètode dels diagrames

El mètode dels diagrames, introduït per L. A. Henkin i A. Robinson ha esdevingut una eina molt útil per a la teoria de models. Però si volem gaudir dels avantatges que ens ofereix quan treballem en lògica sense identitat, no podem fer servir aquesta tècnica tal com ens arriba. En aquesta secció presentem diferents proposicions que ens permetran treballar amb diagrames en aquesta lògica. Fixada una L-estructura $\mathfrak{A}$, definim d'una manera natural *el diagrama sense identitat de* $\mathfrak{A}$, en símbols $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$, com el conjunt de tots els enunciats sense identitat del diagrama de $\mathfrak{A}$. D'una manera anàloga definim *el diagrama elemental sense identitat de* $\mathfrak{A}$, *el diagrama positiu sense identitat de* $\mathfrak{A}$ i *el diagrama negatiu sense identitat de* $\mathfrak{A}$, que designem respectivament amb $\mathsf{eldiag}^-(\mathfrak{A})$, $\mathsf{posdiag}^-(\mathfrak{A})$ i $\mathsf{negdiag}^-(\mathfrak{A})$. Per a referències sobre el mètode dels diagrames es pot consultar [CK91] i [Hod93b].

Les proposicions 2.20, 2.26, 2.27 i 2.28 són contrapartides dels resultats clàssics sobre diagrames i els farem servir més tard per a obtenir teoremes de preservació. Recordem ara algunes definicions. Fixades dues L-estructures $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ i una funció $f : A \to B$, diem que una fórmula $\phi(\overline{x}) \in L$ és *preservada per* f si per a cada tuple $\overline{a}$ d'elements de A, si $\mathfrak{A} \models \phi[\overline{a}]$ llavors $\mathfrak{B} \models \phi[f(\overline{a})]$. I donat un conjunt de fórmules $\Phi \subseteq L$, diem que f és una *Φ-funció* si f preserva totes les fórmules de Φ.

Proposició 2.20 *Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures. Aleshores, els enunciats següents són equivalents:*

i) *Hi ha una expansió de $\mathfrak{B}$ que satisfà el* $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$.

ii) *Hi ha una L_0^--funció $h : A \to B$.*

iii) *Hi ha una enumeració $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ de A i una seqüència $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ d'elements de B tals que*
$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

iv) $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{C}$, *per a alguna* $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$.

v) $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S^{-1} H_S S}(\mathfrak{B})$.

vi) $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S H_S^{-1} S}(\mathfrak{B})$.

Demostració. Clarament i) $\Leftrightarrow$ ii) $\Leftrightarrow$ iii). Per la Proposició 2.17 i el Corol.lari 2.18, iv) $\Leftrightarrow$ v) $\Leftrightarrow$ vi) també és clar. iii) $\Rightarrow$ iv) Pel Corol.lari 2.19 tenim que $\langle \overline{a} \rangle \sim \langle \overline{b} \rangle$ i, donat que $\overline{a}$ és una enumeració de A, $\mathfrak{A} = \langle \overline{a} \rangle$. Llavors, $\mathfrak{A} \sim \langle \overline{b} \rangle$ i $\langle \overline{b} \rangle \subseteq \mathfrak{B}$.

iv) $\Rightarrow$ iii) Com que $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{C}$, per a alguna $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$, per la Proposició 2.17, hi ha enumeracions de A i de C, $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ i $\overline{b} = (b_i : i \in I)$, respectivament, tals que $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{C}, \overline{b})$. Per tant, com que $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$, $(\mathfrak{C}, \overline{b}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$ i, com a conseqüència, $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$. □

Veurem que, per a tipus de semblança relacionals, podem millorar la Proposició 2.20 mostrant que les condicions i) – vi) són equivalents a $\mathfrak{A}^* \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}^*$.

Lema 2.21 *Sigui L relacional. Fixades dues L-estructures $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, si $\mathfrak{A} \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}$, llavors $\mathfrak{A}^* \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}^*$.*

Demostració. Suposem que $\mathfrak{A} \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}$ i sigui $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ una immersió. Escollim per a cada classe d'equivalència $x \in \mathfrak{A}^*$ un representant $a_x \in A$. Sigui X el conjunt d'aquests representants. Sigui $f : \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*$ la funció definida per:

$$f([a]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [h(a)]_{\Omega(\mathfrak{B})},$$

per a tot $a \in X$. Com que L és relacional, és senzill veure que f està ben definida i és una immersió. □

Observem que en el Lema 2.21 no es pot treure la restricció que L és relacional. Sigui $L = \{R, f\}$, on R és un símbol relacional binari i f un símbol funcional monàdic. Considerem l'estructura $\mathfrak{A} = (\{a, b\}, \emptyset, f^{\mathfrak{A}})$, on $f^{\mathfrak{A}}(a) = b$ i $f^{\mathfrak{A}}(b) = a$, i l'estructura $\mathfrak{B} = (\{a, b, c\}, R^{\mathfrak{B}}, f^{\mathfrak{B}})$, on $R^{\mathfrak{B}} = \{\langle a, c\rangle\}$ i $f^{\mathfrak{B}} = f^{\mathfrak{A}} \cup \{\langle c, a\rangle\}$. És senzill mostrar que $\mathfrak{A} \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}$ però $\mathfrak{A}^* \underset{\sim}{\not\subset} \mathfrak{B}^*$.

Corol.lari 2.22 *Sigui L relacional. Fixades dues L-estructures $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, són equivalents:*

i) *Hi ha una expansió de $\mathfrak{B}$ que satisfà el* $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$.

ii) $\mathfrak{A}^* \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}^*$.

Proof. i) ⇒ ii) Veurem que la condició iv) de la Proposició 2.20 implica que $\mathfrak{A}^* \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}^*$. Si $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{C}$, per a algun $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$, llavors com que L és relacional, pel Lema 2.21, $\mathfrak{C}^* \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}^*$. Per tant, $\mathfrak{A}^* \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}^*$.

ii) ⇒ i) Suposem que $\mathfrak{A}^* \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}^*$. Sigui $f : \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*$ una immersió. Per a tot $a \in A$, escollim un element $b_a \in B$ tal que

$$f([a]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [b_a]_{\Omega(\mathfrak{B})}\,.$$

Fent servir el fet que $\mathfrak{A}^* \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}^*$ és senzill mostrar que $(\mathfrak{B}, b_a)_{a\in A}$ satisfà el $\mathsf{diag}(\mathfrak{A})$. □

Introduïm ara *el diagrama de Leibniz* d'un model. Donades dues estructures $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, aquest diagrama ens permetrà obtenir una caracterització de quan $\mathfrak{A}^* \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}^*$. La definició de diagrama de Leibniz va ser introduïda per primer cop a [Elg94].

Fixada una L-estructura $\mathfrak{A}$, el *diagrama de Leibniz de* $\mathfrak{A}$, en símbols $\mathsf{Ldiag}(\mathfrak{A})$, és el conjunt $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{A}) \cup \Delta$, on Δ és el conjunt dels enunciats de $L^-(A)$ de la forma

$$\forall \overline{z}\, [\phi(t_1(a_1, \ldots, a_n), \overline{z}) \leftrightarrow \phi(t_2(b_1, \ldots, b_k), \overline{z})]$$

tals que

$$t_1^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n] \equiv t_2^{\mathfrak{A}}[b_1, \ldots, b_k] \quad \mathrm{mod}(\Omega(\mathfrak{A})),$$

on $\phi(x, \overline{z}) \in L^-$ és una fórmula atòmica, $t_1(x_1, \ldots, x_n)$ i $t_2(y_1, \ldots, y_k)$ són termes de L i $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k \in A$.

Proposició 2.23 *Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures. Llavors, els enunciats següents són equivalents:*

i) *Hi ha una expansió de* $\mathfrak{B}$ *que satisfà el* $\mathsf{Ldiag}(\mathfrak{A})$.

ii) $\mathfrak{A}^* \underset{\sim}{\subseteq} \mathfrak{B}^*$.

Demostració. i) $\Rightarrow$ ii) Suposem que hi ha una expansió de $\mathfrak{B}$ que satisfà el $\mathsf{Ldiag}(\mathfrak{A})$. Sigui $\bar{a} = (a : a \in A)$. Llavors, hi ha una seqüència d'elements de $\mathfrak{B}$, $\bar{b} = (b_a : a \in A)$, tal que

$$(\mathfrak{B}, \bar{b}) \models \mathsf{Ldiag}(\mathfrak{A}).$$

Com que $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{A}) \subseteq \mathsf{Ldiag}(\mathfrak{A})$,

$$(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \bar{b}).$$

Pel Corol.lari 2.19 hi ha un únic isomorfisme $f : \mathfrak{A}^* \to \langle \bar{b} \rangle^*$ tal que, per a tot $a \in A$, $f([a]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [b_a]_{\Omega(\langle \bar{b} \rangle)}$. Definim $g : \langle \bar{b} \rangle^* \to \mathfrak{B}^*$ de la manera següent: per a tot $c \in \langle \bar{b} \rangle$

$$g([c]_{\Omega(\langle \bar{b} \rangle)}) = [c]_{\Omega(\mathfrak{B})}.$$

Mostrarem que g és una immersió. Tenim que g està ben definida: suposem que $c, c' \in \langle \bar{b} \rangle$ i $[c]_{\Omega(\langle \bar{b} \rangle)} = [c']_{\Omega(\langle \bar{b} \rangle)}$. Siguin $b_{a_1}, \ldots, b_{a_n} \in rg(\bar{b})$, $t\,(\bar{x})$ i $t'\,(\bar{x})$ termes de L (on $\bar{x} = x_1, \ldots, x_n$) tals que

$$t^{\langle \bar{b} \rangle}\,[b_{a_1}, \ldots, b_{a_n}] = c$$

i

$$t'^{\langle \bar{b} \rangle}\,[b_{a_1}, \ldots, b_{a_n}] = c'.$$

Suposem, buscant una contradicció, que $[c]_{\Omega(\mathfrak{B})} \neq [c']_{\Omega(\mathfrak{B})}$. Llavors hi ha una fórmula atòmica sense identitat $\phi = \phi(y, \bar{w})$ tal que

$$\mathfrak{B} \not\models \forall \bar{w}(\phi(y, \bar{w}) \leftrightarrow \phi(y', \bar{w}))\,[c, c'],$$

on y, y' i les variables de $\bar{w}$ són diferents de les variables de $\bar{x}$. Sigui ϕ_1 la fórmula obtinguda a partir de ϕ substituint la variable y pel terme t. I sigui ϕ_2 la fórmula obtinguda a partir de ϕ substituint la variable y' pel terme t'. Llavors,

$$\mathfrak{B} \not\models \forall \bar{w}(\phi_1(\bar{x}, \bar{w}) \leftrightarrow \phi_2(\bar{x}, \bar{w}))\,[b_{a_1}, \ldots, b_{a_n}]. \tag{2.1}$$

Com que $[c]_{\Omega(\langle \bar{b} \rangle)} = [c']_{\Omega(\langle \bar{b} \rangle)}$ i $f : \mathfrak{A}^* \to \langle \bar{b} \rangle^*$ és un isomorfisme tal que per a tot $a \in A$, $f([a]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [b_a]_{\Omega(\langle \bar{b} \rangle)}$, tenim que

$$t^{\mathfrak{A}}\,[a_1, \ldots, a_n] \equiv t'^{\mathfrak{A}}\,[a_1, \ldots, a_n] \quad \mathrm{mod}(\Omega(\mathfrak{A})).$$

Llavors,

$$\mathfrak{A} \models \forall \bar{w}(\phi_1(\bar{x}, \bar{w}) \leftrightarrow \phi_2(\bar{x}, \bar{w}))\,[a_1, \ldots, a_n]$$

i com que $(\mathfrak{B}, \bar{b}) \models \mathsf{Ldiag}(\mathfrak{A})$,

$$\mathfrak{B} \models \forall \bar{w}(\phi_1(\bar{x}, \bar{w}) \leftrightarrow \phi_2(\bar{x}, \bar{w}))\,[b_{a_1}, \ldots, b_{a_n}]\,,$$

però això contradiu (2.1). Per tant, podem concloure que g està ben definida. A més a més, g és clarament injectiva i és un homomorfisme estricte perquè $\langle \bar{b} \rangle \subseteq \mathfrak{B}$. Per tant, $\mathfrak{A}^* \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}^*$.

ii) $\Rightarrow$ i) Sigui $f : \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*$ una immersió. Per a tot $a \in A$, escollim un element $b_a \in B$ tal que $f([a]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [b_a]_{\Omega(\mathfrak{B})}$. Llavors $(\mathfrak{B}, b_a)_{a \in A}$ satisfà el $\mathsf{Ldiag}(\mathfrak{A})$. □

Introduïm ara *el diagrama elemental sense identitat* d'un model. Donades dues estructures $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, fent servir aquest diagrama presentarem una caracterització de quan $\mathfrak{A}^* \precsim^- \mathfrak{B}^*$. Primer mostrarem alguns lemes preliminars.

Lema 2.24 *Donades dues L-estructures $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, si $\mathfrak{A} \precsim^- \mathfrak{B}$, llavors $\mathfrak{A}^* \precsim^- \mathfrak{B}^*$.*

Demostració. Suposem que $\mathfrak{A} \precsim^- \mathfrak{B}$ i sigui $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ una immersió que preserva totes les fórmules sense identitat. Sigui $f : \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*$ la funció definida per:

$$f([a]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [h(a)]_{\Omega(\mathfrak{B})}\,,$$

per a tot $a \in A$. Com que $\mathfrak{A} \precsim^- \mathfrak{B}$, és senzill demostrar, amb els arguments usuals, que donats $a, a' \in A$,

$$[a]_{\Omega(\mathfrak{A})} = [a']_{\Omega(\mathfrak{A})} \quad \text{ssi} \quad [h(a)]_{\Omega(\mathfrak{B})} = [h(a')]_{\Omega(\mathfrak{B})}\,.$$

D'aquest fet podem concloure que f està ben definida i és injectiva. Fent servir el fet que $\mathfrak{A} \precsim^- \mathfrak{B}$, és senzill mostrar que f és una immersió que preserva totes les fórmules sense identitat. □

Lema 2.25 *Per a tota classe K de L-estructures,*

i) $\mathbf{S}^{\preceq^-}\mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}(K) \subseteq \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}^{\preceq^-}(K)$.

ii) $\mathbf{S}^{\preceq^-}\mathbf{H}_\mathbf{S}(K) \subseteq \mathbf{H}_\mathbf{S}\mathbf{S}^{\preceq^-}(K)$.

Demostració. Vegeu [Elg94], Lema 4.1.2. □

Proposició 2.26 *Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures. Llavors, els enunciats següents són equivalents:*

i) *Hi ha una expansió de $\mathfrak{B}$ que satisfà el* $\mathsf{eldiag}^-(\mathfrak{A})$.

ii) *Hi ha una L^--funció $h : A \to B$.*

iii) *Hi ha una enumeració de A, $\overline{a} = (a_i : i \in I)$, i una seqüència d'elements de B, $\overline{b} = (b_i : i \in I)$, tal que*
$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

iv) $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{C}$, *per a alguna* $\mathfrak{C} \preceq^- \mathfrak{B}$.

v) $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}_\mathbf{S}\mathbf{S}^{\preceq^-}(\mathfrak{B})$.

vi) $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}_\mathbf{S}\mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}^{\preceq^-}(\mathfrak{B})$.

vii) $\mathfrak{A}^* \precsim^- \mathfrak{B}^*$.

Demostració. Clarament i) $\Leftrightarrow$ ii) $\Leftrightarrow$ iii). I iv) $\Leftrightarrow$ v) $\Leftrightarrow$ vi) també és clar per la Proposició 2.17 i pel Corol.lari 2.18.

iv) $\Rightarrow$ iii) com que $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{C}$, per a alguna $\mathfrak{C} \preceq^- \mathfrak{B}$, per la Proposició 2.17, hi ha enumeracions de A i de C, $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ i $\overline{b} = (b_i : i \in I)$, respectivament, tals que $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{C}, \overline{b})$. Per tant, com que $\mathfrak{C} \preceq^- \mathfrak{B}$, $(\mathfrak{C}, \overline{b}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$ i en conseqüència, $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$. iii) $\Rightarrow$ iv) donat que $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$, per la demostració de i) $\Rightarrow$ ii) del Corol.lari 2.19, hi ha enumeracions $\overline{c}$ i $\overline{d}$ de $A = \langle \overline{a} \rangle$ i de $\langle \overline{b} \rangle$ respectivament, tals que
$$(\mathfrak{A}, \overline{c}) \equiv_0^- (\langle \overline{b} \rangle, \overline{d})$$
i $\overline{a} \subseteq \overline{c}$ i $\overline{b} \subseteq \overline{d}$. Per tant, per la Proposició 2.17,
$$(\mathfrak{A}, \overline{c}) \equiv^- (\langle \overline{b} \rangle, \overline{d})$$
i $\mathfrak{A} \sim \langle \overline{b} \rangle$. Llavors
$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\langle \overline{b} \rangle, \overline{b})$$
i en conseqüència, com que $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$, tenim que
$$(\mathfrak{B}, \overline{b}) \equiv^- (\langle \overline{b} \rangle, \overline{b}).$$
Fent servir aquest darrer fet, és senzill veure que $\langle \overline{b} \rangle \preceq^- \mathfrak{B}$. Així, $\mathfrak{A} \sim \langle \overline{b} \rangle$ i $\langle \overline{b} \rangle \preceq^- \mathfrak{B}$, per tant la condició iv) val.

iv) $\Rightarrow$ vii) pel Lema 2.24. vii) $\Rightarrow$ v) com que $\mathfrak{A}^* \precsim^- \mathfrak{B}^*$ implica que $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}^{\preceq^-}\mathbf{H}_\mathbf{S}(\mathfrak{B})$, pel Lema 2.25, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}_\mathbf{S}\mathbf{S}^{\preceq^-}(\mathfrak{B})$. $\square$

Acabem aquesta secció amb *el diagrama positiu sense identitat* i *el diagrama negatiu sense identitat* d'un model.

Proposició 2.27 *Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures i* At^- *el conjunt de les fórmules atòmiques de L^-. Llavors, els enunciats següents són equivalents:*

i) *Hi ha una expansió de* $\mathfrak{B}$ *que satisfà el* $\mathsf{posdiag}^-(\mathfrak{A})$.

ii) *Hi ha una* At^-*-funció* $h : A \to B$.

iii) $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S H^{-1} S}(\mathfrak{B})$.

Demostració. i) $\Leftrightarrow$ ii) és clar. ii) $\Rightarrow$ iii) Suposem que $h : A \to B$ és una At^--funció. Sigui $\mathfrak{C}$ la subestructura de $\mathfrak{B}$ generada per $h[A]$. Sigui $\kappa = |A|$ i $\overline{a} = (a_\alpha : \alpha \in \kappa)$ una enumeració de A sense repeticions. Considerem la L-estructura $Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}}$ dels Preliminars i la funció $g : V_\kappa \to C$, definida per:

$$g(x_\alpha) = h(a_\alpha),$$

per a tot $\alpha \in \kappa$. Estenem g a un homomorfisme g' de Ter_{V_κ} en el reducte algebraic de $\mathfrak{C}$. Com que $\mathfrak{C}$ està generada per $h[A]$, g' és sobre C. Fent servir el fet que h preserva les fórmules atòmiques sense identitat, és rutinari mostrar que g' és un homomorfisme de $Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}}$ sobre $\mathfrak{C}$. Per tant, com que pel Lema 1.5, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S}(Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}})$, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S H^{-1} S}(\mathfrak{B})$.

iii) $\Rightarrow$ ii) Suposem que $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S H^{-1} S}(\mathfrak{B})$. Llavors, hi ha L-estructures $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{D}$ amb les propietats següents: (1) $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{B}$, (2) hi ha un homomorfisme estricte f de $\mathfrak{C}$ sobre $\mathfrak{A}$ i (3) hi ha un homomorfisme g de $\mathfrak{C}$ sobre $\mathfrak{D}$. Escollim per a tot $a \in A$, un element $c_a \in f^{-1}[a]$. Sigui $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ la funció definida per: per a tot $a \in A$, $h(a) = g(c_a)$. Així definida h és clarament una At^--funció. □

Proposició 2.28 *Siguin* $\mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}$ *L-estructures i* Negat^- *el conjunt de les negacions de fórmules atòmiques de* L^-. *Llavors, els enunciats següents són equivalents:*

i) *Hi ha una expansió de* $\mathfrak{B}$ *que satisfà el* $\mathsf{negdiag}^-(\mathfrak{A})$.

ii) *Hi ha una* Negat^-*-funció* $h : A \to B$.

iii) $\mathfrak{A} \in \mathbf{H H_S^{-1} S}(\mathfrak{B})$.

Demostració. Anàloga a la demostració de la Proposició 2.27. □

Caracteritzacions de $\equiv^-$

3.1 Mètodes de back-and-forth

En aquesta secció donarem una caracterització de les relacions $\equiv^-$ i $\equiv^-_{\infty\omega}$ fent servir mètodes de back-and-forth. En lloc de fer servir funcions parcials, farem servir relacions de parentiu parcials. Com que el nostre llenguatge no té símbol d'identitat, afegirem noves condicions a les usuals de back i forth per a poder treballar amb símbols funcionals i símbols constants. La caracterització de l'equivalència elemental en termes de l'existència d'una estratègia guanyadora en un joc associat va ser introduïda per A. Ehrenfeucht i R. Fraïssé i la caracterització de la relació $\equiv_{\infty\omega}$ és deguda a C. R. Karp; per referències sobre aquest tema consulteu [Bar73] i [EFT84].

Primer recordem les definicions d'isomorfisme parcial, d'estructures ξ-finitament isomorfes i d'estructures parcialment isomorfes.

Definició 3.1 Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures. Una funció p és *un isomorfisme parcial de* $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ ssi dom$(p)\subseteq A$, rg$(p)\subseteq B$ i p té les propietats següents:

- p és injectiva.
- Per a tot símbol relacional n-àdic $R \in L$ i tota $a_1, \ldots, a_n \in$ dom(p),

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R^{\mathfrak{A}} \quad \text{ssi} \quad \langle p(a_1), \ldots, p(a_n) \rangle \in R^{\mathfrak{B}}.$$

- Per a tot símbol funcional n-àdic $f \in L$ i tota $a_1, \ldots, a_n, a \in$ dom(p),

$$f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a \quad \text{ssi} \quad f^{\mathfrak{B}}(p(a_1), \ldots, p(a_n)) = p(a).$$

- Per a tot símbol constant $c \in L$ i tot $a \in \mathrm{dom(p)}$,

$$c^{\mathfrak{A}} = a \quad \text{ssi} \quad c^{\mathfrak{B}} = p(a).$$

En la definició següent fem servir ξ, η, ζ per a denotar ordinals.

Definició 3.2 Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures. $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són *ξ-finitament isomorfes* via $(I_\eta)_{\eta\leq\xi}$, en símbols $(I_\eta)_{\eta\leq\xi} : \mathfrak{A} \cong_\xi \mathfrak{B}$, ssi

i) Tot I_η és un conjunt no buit d'isomorfismes parcials de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ i per a tot $\eta \leq \zeta \leq \xi$, $I_\zeta \subseteq I_\eta$.

ii) (Condició forth) Per a tot $\eta{+}1 \leq \xi$, tot $p \in I_{\eta+1}$ i tot $a \in A$ hi ha $q \in I_\eta$ tal que $q \supseteq p$ i $a \in \mathrm{dom}(q)$.

iii) (Condició back) Per a tot $\eta{+}1 \leq \xi$, tot $p \in I_{\eta+1}$ i tot $b \in B$ hi ha $q \in I_\eta$ tal que $q \supseteq p$ i $b \in \mathrm{rg}(q)$.

Escriurem $\mathfrak{A} \cong_\xi \mathfrak{B}$ si hi ha $(I_\eta)_{\eta\leq\xi}$ tal que $(I_\eta)_{\eta\leq\xi} : \mathfrak{A} \cong_\xi \mathfrak{B}$. Direm que $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són *finitament isomorfes*, en símbols $\mathfrak{A} \cong_f \mathfrak{B}$, si per a tot $n \in \omega$, $\mathfrak{A} \cong_n \mathfrak{B}$.

Definició 3.3 Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L -estructures. $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són *parcialment isomorfes* via I, en símbols $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, ssi

i) I és un conjunt no buit d'isomorfismes parcials de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

ii) (Condició forth) Per a tota $p \in I$ i tot $a \in A$ hi ha $q \in I$ tal que $q \supseteq p$ i $a \in \mathrm{dom(q)}$.

iii) (Condició back) Per a tota $p \in I$ i tot $b \in B$ hi ha $q \in I$ tal que $q \supseteq p$ i $b \in \mathrm{rg(q)}$.

Escriurem $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, si hi ha I tal que $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.

Ara introduirem el concepte de relació de parentiu parcial.

Definició 3.4 Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures. Una relació $p \subseteq A \times B$ és *una relació de parentiu parcial* ssi per a cada símbol relacional n-àdic $R \in L$ i tota $\langle a_1, b_1\rangle, \ldots, \langle a_n, b_n\rangle \in p$,

$$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in R^{\mathfrak{A}} \;\; \text{ssi} \;\; \langle b_1, \ldots, b_n\rangle \in R^{\mathfrak{B}}.$$

Observem que el conjunt buit, tot homomorfisme estricte de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ i tota relació de parentiu entre $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són relacions de parentiu parcials.

Lema 3.5 *Sigui L relacional, $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures i $p \subseteq A \times B$. Sigui $\{\langle a_i, b_i \rangle : i \in I\}$ una enumeració de p. Llavors, els enunciats següents són equivalents:*

i) *p és una relació de parentiu parcial entre $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$.*

ii) *p és una relació de parentiu entre $\langle \mathrm{dom}(p) \rangle$ i $\langle \mathrm{rg}(p) \rangle$.*

iii) $(\mathfrak{A}, a_i)_{i \in I} \equiv_0^- (\mathfrak{B}, b_i)_{i \in I}$.

Demostració. iii) $\Rightarrow$ i) i i) $\Rightarrow$ ii) són clars. ii) $\Rightarrow$ iii) Per la demostració de i) $\Rightarrow$ vi) de la Proposició 2.17 fent servir el fet que

$$(\langle \mathrm{dom}(p) \rangle, a_i)_{i \in I} \equiv_0^- (\mathfrak{A}, a_i)_{i \in I}$$

i

$$(\langle \mathrm{rg}(p) \rangle, b_i)_{i \in I} \equiv_0^- (\mathfrak{B}, b_i)_{i \in I}. \ \square$$

Mostrarem ara que el Lema 3.5 no val per a tipus de semblança no relacionals. Sigui $\mathcal{Z} = (Z, +, 0, E)$, on $(Z, +, 0)$ és el grup additiu dels enters i E està definida de la manera següent:

$$\langle n, m \rangle \in E \quad \text{ssi} \quad n - m \text{ és divisible per } 2,$$

per a tot $n, m \in Z$. Sigui $p \subseteq Z \times Z$ la relació definida per:

$$p = \{\langle x, y \rangle \in Z \times Z : x \text{ és parell i } y \text{ és senar}\}.$$

Clarament, p és una relació de parentiu parcial. Tanmateix, $\langle 2, 3 \rangle \in p$ però $\langle 2+2, 3+3 \rangle \notin p$, per tant, p no és una relació de parentiu entre $\langle \mathrm{dom}(p) \rangle$ i $\langle \mathrm{rg}(p) \rangle$.

En la definició següent fem servir ξ, η, ζ per a denotar ordinals.

Definició 3.6 Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures. $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són *ξ-finitament parents* via $(I_\eta)_{\eta \leq \xi}$, en símbols $(I_\eta)_{\eta \leq \xi} : \mathfrak{A} \sim_\xi \mathfrak{B}$, ssi

i) Tot I_η és un conjunt no buit de relacions de parentiu parcials i per a tot $\eta \leq \zeta \leq \xi$, $I_\zeta \subseteq I_\eta$.

ii) (Condició forth) Per a tot $\eta+1 \leq \xi$, tota $p \in I_{\eta+1}$ i tot $a \in A$ hi ha $q \in I_\eta$ tal que $q \supseteq p$ i $a \in dom(q)$.

iii) (Condició back) Per a tot $\eta+1 \leq \xi$, tota $p \in I_{\eta+1}$ i tot $b \in B$ hi ha $q \in I_\eta$ tal que $q \supseteq p$ i $b \in rg(q)$.

iv) Per a tot $\eta+1 \leq \xi$, tota $p \in I_{\eta+1}$ i tot símbol constant $c \in L$, $p \cup \{\langle c^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{B}}\rangle\} \in I_\eta$.

v) Per a tot $\eta+1 \leq \xi$, tota $p \in I_{\eta+1}$, tot símbol funcional m-àdic $f \in L$ i tota $\langle a_1, b_1\rangle, \ldots, \langle a_m, b_m\rangle \in p$,

$$p \cup \left\{\langle f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m), f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_m)\rangle\right\} \in I_\eta.$$

Escriurem $\mathfrak{A} \sim_\xi \mathfrak{B}$ quan hi hagi $(I_\eta)_{\eta\leq\xi}$ tal que $(I_\eta)_{\eta\leq\xi} : \mathfrak{A} \sim_\xi \mathfrak{B}$. Direm que $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són *finitament parents*, en símbols $\mathfrak{A} \sim_f \mathfrak{B}$, si per a tot $n \in \omega$, $\mathfrak{A} \sim_n \mathfrak{B}$.

Donarem ara una mesura de la complexitat d'una fórmula de $L^-_{\infty\omega}$. Assignem a cada $\phi \in L^-_{\infty\omega}$ un ordinal anomenat el nested rank de ϕ.

Definició 3.7 Per a cada terme t de L, sigui $S(t)$ el conjunt dels subtermes de t que no són variables. Fixada una fórmula de $L^-_{\infty\omega}$ definim per inducció *el nested rank de* ϕ, designat amb $NR(\phi)$, de la manera següent:

$$\mathrm{NR}(Rt_1 \ldots t_n) = \left|\bigcup_{1\leq i\leq n} S(t_i)\right|$$
$$\mathrm{NR}(\neg\phi) = \mathrm{NR}(\phi)$$
$$\mathrm{NR}(\bigwedge \Phi) = \sup\{\mathrm{NR}(\phi) : \phi \in \Phi\}, \text{ per a tot conjunt } \Phi \subseteq L^-_{\infty\omega}.$$
$$\mathrm{NR}(\exists x\phi) = \mathrm{NR}(\phi) + 1.$$

Fixades $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures, per a tot $n \in \omega$, escrivim

$$\mathfrak{A} \equiv^-_n \mathfrak{B}$$

quan $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ satisfan exactament els mateixos enunciats de L^- de nested rank $\leq n$.

Calcularem el nested rank d'una fórmula per tal d'il.lustrar la definició. Sigui $L = \{R, f, g\}$, on R és un símbol relacional binari i f i g són símbols funcionals monàdics. Prenem

$$\phi = \exists y \forall x \,[Rf(y)f(y) \wedge Rg(x)f(g(x))],$$

llavors $\mathrm{NR}(Rf(y)f(y)) = 1$, $\mathrm{NR}(Rg(x)f(g(x))) = 2$ i $\mathrm{NR}(\phi) = 4$.

El Teorema 3.10 caracteritza la relació de L^--equivalència en termes de la relació $\sim_f$. En la demostració fem servir la noció de nested rank d'una fórmula que hem introduït abans.

Lema 3.8 *Fixat un tipus de semblança finit L i un conjunt finit V de variables, per a tot $n \in \omega$ hi ha, llevat d'equivalència lògica, només un nombre finit de fórmules de L^- amb les variables en V i de nested rank $\leq n$.*

Demostració. Sigui L un tipus de semblança finit i V un conjunt finit de variables. Sigui $Ter_V^0 = V$ i per a tot $n \in \omega$

$$Ter_V^{n-1} = Ter_V^n \cup \{c : c \in L\} \cup \{f(t_1, \ldots, t_k) : f \in L \text{ és } k\text{-àdic i } t_1, \ldots, t_k \in Ter_V^n\}.$$

És clar que Ter_V^n és finit, per a tot $n \in \omega$. Una inducció senzilla sobre la construcció d'un terme t amb les variables en V mostra que per a tot $n \in \omega$, si $|S(t)| \leq n$, llavors $t \in Ter_V^n$. D'aquí se'n segueix que, per a tota fórmula atòmica sense identitat $Rt_1 \ldots t_m$ amb les variables en V i tot $n \in \omega$, si $\mathrm{NR}(Rt_1 \ldots t_m) \leq n$, llavors $t_1, \ldots, t_m \in Ter_V^n$. Per tant, hi ha només un nombre finit de fórmules atòmiques sense identitat amb les variables en V de nested rank $\leq n$. Fent servir aquest fet, és senzill de concloure la demostració per inducció sobre el nested rank. □

Proposició 3.9 *Sigui L un tipus de semblança finit i $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures. Llavors per a tot $n \in \omega$,*

$$\mathfrak{A} \equiv_n^- \mathfrak{B} \quad \textit{ssi} \quad \mathfrak{A} \sim_n \mathfrak{B}.$$

Demostració. $\Rightarrow$) Suposem que $\mathfrak{A} \equiv_n^- \mathfrak{B}$. Definim per a tot $m \leq n$, I_m com el conjunt de totes les relacions de parentiu parcials p tals que hi ha $k \in \omega$ amb $p = \{\langle a_1, b_1 \rangle, \ldots, \langle a_k, b_k \rangle\}$ i per a tota $\phi = \phi(y_1, \ldots, y_k) \in L^-$ amb $\mathrm{NR}(\phi) \leq m$

$$\mathfrak{A} \models \phi\,[a_1, \ldots, a_k] \quad \text{ssi} \quad \mathfrak{B} \models \phi\,[b_1, \ldots, b_k]\,.$$

Vegem que les condicions i)–v) de la definició de $\sim_n$ es donen.

i) Com que $\mathfrak{A} \equiv_n^- \mathfrak{B}$, tenim que $\emptyset \in I_m$ i clarament, si $m' \leq m \leq n$, llavors $I_m \subseteq I_{m'}$. ii) Sigui $m+1 \leq n$, $p \in I_{m+1}$ i $p = \{\langle a_1, b_1 \rangle, \ldots, \langle a_k, b_k \rangle\}$. Suposem que $a \in A$. Com que L és finit, pel Lema 3.8, hi ha un conjunt finit X de fórmules sense identitat en les variables $z, y_1, \ldots, y_k$, i de nested rank $\leq m$, tal que qualsevol fórmula en les variables $z, y_1, \ldots, y_k$, i de nested rank $\leq m$, és lògicament equivalent a una fórmula d'aquest conjunt. Considerem ara el conjunt $\Phi = \{\psi \in X : \mathfrak{A} \models \psi\,[a, a_1, \ldots, a_k]\}$. Llavors $\mathfrak{A} \models \exists z \bigwedge \Phi\,[a_1, \ldots, a_k]$ i com que $\mathrm{NR}(\exists z \bigwedge \Phi) \leq m+1$ i $p \in I_{m+1}$, per la suposició $\mathfrak{B} \models \exists z \bigwedge \Phi\,[b_1, \ldots, b_k]$. Sigui $b \in B$ tal que $\mathfrak{B} \models \bigwedge \Phi\,[b, b_1, \ldots, b_k]$. Així, clarament $p \cup \{\langle a, b \rangle\} \in I_m$.

iii) és anàleg a ii).

La demostració de iv) és similar a la demostració de v). Demostrem només aquest darrer cas. Sigui $m+1 \leq n$, $p \in I_{m+1}$, $f \in L$ un símbol funcional l-àdic i $\langle a_1, b_1 \rangle, \ldots, \langle a_l, b_l \rangle \in p$. Sigui $p = \{\langle a_1, b_1 \rangle, \ldots, \langle a_l, b_l \rangle, \ldots, \langle a_k, b_k \rangle\}$. Mostrarem que, per a tota fórmula $\phi(y_1, \ldots, y_{k-1}) \in L^-$ amb $\mathrm{NR}(\phi) \leq m$,

$$\mathfrak{A} \models \phi\left[a_1, \ldots, a_k, f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_l)\right] \quad \text{ssi} \quad \mathfrak{B} \models \phi\left[b_1, \ldots, b_k, f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_l)\right].$$

Suposem que $\phi(y_1, \ldots, y_{k+1}) \in L^-$ és una fórmula amb $\mathrm{NR}(\phi) \leq m$, llavors

$$\mathfrak{A} \models \phi\left[a_1, \ldots, a_k, f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_l)\right] \quad \text{ssi} \quad \mathfrak{A} \models \phi'\left[a_1, \ldots, a_k\right],$$

on ϕ' és obtinguda substituint en ϕ la variable y_{k+1} pel terme $f(y_1, \ldots, y_l)$. Com que $\mathrm{NR}(\phi') \leq m+1$ i $p \in I_{m+1}$,

$$\mathfrak{A} \models \phi'\left[a_1, \ldots, a_k\right] \quad \text{ssi} \quad \mathfrak{B} \models \phi'\left[b_1, \ldots, b_k\right].$$

Així,

$$\mathfrak{B} \models \phi'\left[b_1, \ldots, b_k\right] \quad \text{ssi} \quad \mathfrak{B} \models \phi\left[b_1, \ldots, b_k, f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_l)\right],$$

i per tant, $p \cup \left\{\langle f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_l), f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_l)\rangle\right\} \in I_m$. Podem concloure que $(I_m)_{m \leq n} : \mathfrak{A} \sim_n \mathfrak{B}$.

$\Leftarrow$) Suposem ara que $(I_m)_{m \leq n} : \mathfrak{A} \sim_n \mathfrak{B}$. Primer mostrarem per inducció en m que

($*$) Si $m \leq n$ i $\phi = Rt_1 \ldots t_l$ és una fórmula atòmica, les variables lliures de la qual es troben entre aquestes $x_1, \ldots, x_k$ i el seu nested rank és $\leq m$ llavors, per a tot $p \in I_m$ i tota $\langle a_1, b_1\rangle, \ldots, \langle a_k, b_k\rangle \in p$ hi ha $q \in I_0$ tal que $p \subseteq q$ i per a tot i, $1 \leq i \leq l$, $\langle t_i^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_k], t_i^{\mathfrak{B}}[b_1, \ldots, b_k]\rangle \in q$.

El cas $m = 0$ és clar. Suposem inductivament que la condició ($*$) val per a m. Sigui $\phi = Rt_1 \ldots t_l$ amb nested rank $\leq m+1 \leq n$, $p \in I_{m+1}$ i $\langle a_1, b_1\rangle, \ldots, \langle a_k, b_k\rangle \in p$. Si $\mathrm{NR}(Rt_1 \ldots t_l) = 0$ ja hem acabat. Per tant sigui $\mathrm{NR}(Rt_1 \ldots t_l) \geq 1$. Hi ha un subterme $r = r(x_1, \ldots, x_k)$ d'algun terme t_i de ϕ amb $1 \leq i \leq l$, que és, o bé una constant o bé un terme de la forma $g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_j})$, on g és un símbol funcional j-àdic de L i $i_1, \ldots, i_j \in \{1, \ldots, k\}$. Sigui y una nova variable que no apareix a ϕ i per a tot $i, 1 \leq i \leq l$, sigui t_i' el terme obtingut a partir de t_i, substituint el terme $r(x_1, \ldots, x_k)$ per la variable y. Observem que, $t_i' = t_i'(x_1, \ldots, x_k, y)$ i que $\phi' = Rt_1' \ldots t_l'$ té nested rank $\leq m$. Per les condicions iv) i v) de la definició de $\sim_n$,

$$p \cup \left\{\langle r^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_k], r^{\mathfrak{B}}[b_1, \ldots, b_k]\rangle\right\} \in I_m.$$

Per tant, per hipòtesi inductiva, hi ha $q \in I_0$ tal que

$$p \cup \left\{\langle r^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_k], r^{\mathfrak{B}}[b_1, \ldots, b_k]\rangle\right\} \subseteq q$$

i per a tot i, $1 \leq i \leq l$,

$$\langle t_i'^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_k, r^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_k]], t_i'^{\mathfrak{B}}[b_1, \ldots, b_k, r^{\mathfrak{B}}[b_1, \ldots, b_k]]\rangle \in q.$$

Llavors, clarament $p \subseteq q$ i per a tot i, $1 \leq i \leq l$, $\langle t_i^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_k], t_i^{\mathfrak{B}}[b_1, \ldots, b_k]\rangle \in q$. Per tant, la condició ($*$) val.

Sigui $m \leq n$. Demostrem per inducció en ϕ que per a tota fórmula $\phi(y_1, \ldots, y_k) \in L^-$ de nested rank $\leq m$, tota $p \in I_m$ i tota $\langle a_1, b_1\rangle, \ldots, \langle a_k, b_k\rangle \in p$,

$$\mathfrak{A} \models \phi\,[a_1, \ldots, a_k] \qquad \text{ssi} \qquad \mathfrak{B} \models \phi\,[b_1, \ldots, b_k]\,. \tag{3.1}$$

Si ϕ és atòmica, és clar per la condició $(*)$. Els casos $\neg$ i $\wedge$ són immediats. Sigui $\phi = \exists y\psi$ i suposem inductivament que val la condició (3.1) per a ψ. Si $\mathfrak{A} \models \exists y\psi\,[a_1, \ldots, a_k]$, llavors hi ha $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi\,[a, a_1, \ldots, a_k]$. Observem que $m \geq \mathrm{NR}(\exists y\psi) \geq 1$. Així $\mathrm{NR}(\psi) \leq m - 1$. Per tant, per ii) de la definició de $\sim_n$, hi ha $q \in I_{m-1}$ tal que $q \supseteq p$ i $a \in \mathrm{dom}(q)$. Sigui $b \in B$ tal que $\langle a, b\rangle \in q$. Per hipòtesi inductiva, $\mathfrak{B} \models \psi\,[b, b_1, \ldots, b_k]$ i per tant, $\mathfrak{B} \models \exists y\psi\,[b_1, \ldots, b_k]$. L'altra direcció es pot demostrar d'una manera anàloga fent ús de la condició iii) de la definició de $\sim_n$. Per la condició (3.1) podem concloure que $\mathfrak{A} \equiv_n^- \mathfrak{B}$. □

Observem que, en la demostració anterior, quan mostrem que $\mathfrak{A} \sim_n \mathfrak{B}$ implica $\mathfrak{A} \equiv_n^- \mathfrak{B}$, no fem ús del fet que L és un tipus de semblança finit. També és útil parar esment en el fet que, quan demostrem que $\mathfrak{A} \equiv_n^- \mathfrak{B}$ implica $\mathfrak{A} \sim_n \mathfrak{B}$, obtenim $(I_m)_{m\leq n}$ tal que $(I_m)_{m\leq n} : \mathfrak{A} \sim_n \mathfrak{B}$ i per a tot $m \leq n$ totes les relacions de parentiu parcials de I_m són finites.

Teorema 3.10 *Sigui L un tipus de semblança finit i $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures, llavors*

$$\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B} \qquad \textit{ssi} \qquad \mathfrak{A} \sim_f \mathfrak{B}.$$

Demostració. Per la Proposició 3.9. □

Observem que per a tipus de semblança finits no és veritat en general que $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$ impliqui $\mathfrak{A} \sim_f \mathfrak{B}$:

Exemple 3.11 Sigui $L = \{P_n : n \in \omega\}$ on, per a tot $n \in \omega$, P_n és un símbol relacional monàdic, $\mathfrak{A} = (\omega, P_n^{\mathfrak{A}})$ on per a tot $n \in \omega$, $P_n^{\mathfrak{A}} = \{m \in \omega : m \geq n\}$ i $\mathfrak{B} = (\omega \cup \{b\}, P_n^{\mathfrak{B}})$ on $b \notin \omega$ i per a tot $n \in \omega$, $P_n^{\mathfrak{B}} = P_n^{\mathfrak{A}} \cup \{b\}$. Vegem ara que, per a tot conjunt finit $L_0 \subseteq L$, $\mathfrak{A} \restriction L_0 \in \mathbf{H_S}(\mathfrak{B} \restriction L_0)$ i en conseqüència, $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. Suposem que $L_0 \subseteq L$ és finit i sigui $k \in \omega$ el més gran nombre tal que $P_k \in L_0$. Sigui $h : \mathfrak{B} \restriction L_0 \to \mathfrak{A} \restriction L_0$ la funció definida per: per a tot $n \in \omega$, $h(n) = n$ i $h(b) = k + 1$. Clarament h és un homomorfisme estricte. Tanmateix, no hi ha cap relació de parentiu parcial p tal que $b \in \mathrm{rg}(p)$ i per tant, $\mathfrak{A} \not\sim_f \mathfrak{B}$.

Ara donarem una caracterització de la relació de $L^-_{\infty\omega}$-equivalència en termes de la relació $\sim_p$.

Definició 3.12 Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures. $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són *parcialment parents* via I, en símbols $I : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, ssi

i) I és un conjunt no buit de relacions de parentiu parcials.

ii) (Condició forth) Per a tota $p \in I$ i tot $a \in A$ hi ha $q \in I$ tal que $q \supseteq p$ i $a \in \mathrm{dom(q)}$.

iii) (Condició back) Per a tota $p \in I$ i tot $b \in B$ hi ha $q \in I$ tal que $q \supseteq p$ i $b \in \mathrm{rg(q)}$.

iv) Per a tota $p \in I$ i tot símbol constant $c \in L$, $p \cup \{\langle c^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{B}} \rangle\} \in I$.

v) Per a tota $p \in I$, tot símbol funcional k-àdic $f \in L$ i tota $\langle a_1, b_1 \rangle, \ldots, \langle a_k, b_k \rangle \in p$,

$$p \cup \left\{ \langle f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k), f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_k) \rangle \right\} \in I.$$

Escriurem $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$ quan hi hagi I tal que $I : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.

Teorema 3.13 *Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures, llavors*

$$\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B} \qquad ssi \qquad \mathfrak{A} \equiv^-_{\infty\omega} \mathfrak{B}.$$

Demostració. $\Rightarrow$) Suposem que $I : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$. Primer observem que, fixat un conjunt finit de variables $V = \{x_1, \ldots, x_k\}$, fent servir les condicions iv) i v) de la definició de $\sim_p$ i el fet que, per a tot $n \in \omega$, Ter^n_V és finit (quan Ter^n_V està definit de la mateixa manera que a la demostració del Lema 3.8), és senzill mostrar per inducció en n que

(**) Si $p \in I$ i $\langle a_1, b_1 \rangle, \ldots, \langle a_k, b_k \rangle \in p$, llavors hi ha $q \in I$ tal que $p \subseteq q$ i per a tot terme $t \in Ter^n_V$, $\langle t^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_k], t^{\mathfrak{B}}[b_1, \ldots, b_k] \rangle \in q$.

Ara demostrem per inducció en ϕ que per a tota fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_k) \in L^-_{\infty\omega}$, tota $p \in I$ i tota $\langle a_1, b_1 \rangle, \ldots, \langle a_k, b_k \rangle \in p$

$$\mathfrak{A} \models \phi\,[a_1, \ldots, a_k] \qquad \text{ssi} \qquad \mathfrak{B} \models \phi\,[b_1, \ldots, b_k]\,. \tag{3.2}$$

Si ϕ és atòmica, la condició (3.2) se segueix de la condició (**). Els casos $\neg$ i $\bigwedge$ són clars. Si $\phi = \exists y \psi$, suposem inductivament que la condició (3.2) val per a ψ i

$$\mathfrak{A} \models \exists y \psi\,[a_1, \ldots, a_k]\,.$$

Llavors, hi ha $c \in A$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \psi\,[c, a_1, \ldots, a_k]\,,$$

i per ii) de la definició de $\sim_p$, hi ha $q \in I$ tal que $q \supseteq p$ i $c \in \mathrm{dom}(q)$. Sigui $d \in B$ tal que $\langle c, d \rangle \in q$. Per tant, per hipòtesi inductiva,

$$\mathfrak{B} \models \psi\,[d, b_1, \ldots, b_k]$$

i llavors,

$$\mathfrak{B} \models \exists y \psi\,[b_1, \ldots, b_k]\,.$$

L'altra direcció es demostra anàlogament, fent servir la condició iii) de la definició de $\sim_p$.

$\Leftarrow$) Suposem ara que $\mathfrak{A} \equiv^-_{\infty\omega} \mathfrak{B}$. Definim I com el conjunt de totes les relacions de parentiu parcials p tals que hi ha $k \in \omega$ amb $p = \{\langle a_1, b_1 \rangle, \ldots, \langle a_k, b_k \rangle\}$ i per a tota $\phi(x_1, \ldots, x_k) \in L^-_{\infty\omega}$,

$$\mathfrak{A} \models \phi\,[a_1, \ldots, a_k] \quad \text{ssi} \quad \mathfrak{B} \models \phi\,[b_1, \ldots, b_k]\,.$$

Mostrem que les condicions i)–v) de la definició de $\sim_p$ es donen.

i) Com que $\mathfrak{A} \equiv^-_{\infty\omega} \mathfrak{B}$, $\emptyset \in I$. ii) Sigui $p \in I$, $p = \{\langle a_1, b_1 \rangle, \ldots, \langle a_k, b_k \rangle\}$ i $a \in A$. Suposem, buscant una contradicció, que no hi ha $b \in B$ tal que per a tot $\phi(x_1, \ldots, x_{k-1}) \in L^-_{\infty\omega}$

$$\mathfrak{A} \models \phi\,[a_1, \ldots, a_k, a] \quad \text{ssi} \quad \mathfrak{B} \models \phi\,[b_1, \ldots, b_k, b]\,.$$

Per a tot $b \in B$ escollim una fórmula $\phi_b(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in L^-_{\infty\omega}$ tal que

$$\mathfrak{A} \models \phi_b\,[a_1, \ldots, a_k, a]$$

i

$$\mathfrak{B} \not\models \phi_b\,[b_1, \ldots, b_k, b]\,.$$

Considerem ara el conjunt de totes aquestes fórmules

$$\Phi = \{\phi_b(x_1, \ldots, x_{k+1}) : b \in B\}\,.$$

Sigui ψ la conjunció de totes les fórmules de Φ. Tenim que $\psi = \psi(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in L^-_{\infty\omega}$ i

$$\mathfrak{A} \models \exists x_{k+1} \psi\,[a_1, \ldots, a_k]\,.$$

Com que $p \in I$,

$$\mathfrak{B} \models \exists x_{k+1} \psi\,[b_1, \ldots, b_k]\,,$$

però això és absurd. Per tant, podem concloure que val la condició ii). La condició iii) es demostra d'una manera anàloga a ii). I per definició de I les condicions iv) i v) també se satisfan. □

Observem que, en la demostració anterior, si suposem que $\mathfrak{A} \equiv^-_{\infty\omega} \mathfrak{B}$ obtenim un conjunt I tal que $I : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$ i tota relació de parentiu parcial en I és finita. Vegem ara les diferents relacions entre $\sim$, $\sim_p$ i $\sim_f$.

Proposició 3.14 *Siguin* $\mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}$ *L-estructures. Si* $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, *llavors* $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.

Demostració. Si R és una relació de parentiu entre $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, $\{R\} : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$. $\square$

Vegem que la inversa d'aquesta proposició no és certa:

Exemple 3.15 Sigui $L = \{E\}$ on E és un símbol relacional binari, $\mathfrak{A} = (\omega_1, E^{\mathfrak{A}})$ i $\mathfrak{B} = (\omega, E^{\mathfrak{B}})$, on $E^{\mathfrak{A}}$ i $E^{\mathfrak{B}}$ són, respectivament, la identitat a ω_1 i a ω. Clarament $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són reduïdes i $\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{B}$, per tant $\mathfrak{A} \not\sim \mathfrak{B}$. Però $I : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, on

$$I = \{p \subseteq \omega_1 \times \omega\text{: } p \text{ és una funció parcial finita injectiva}\}.$$

Proposició 3.16 *Siguin* $\mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}$ *L-estructures tals que* $\mathfrak{A}^*$ *i* $\mathfrak{B}^*$ *són comptables, llavors*

$$\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B} \quad ssi \quad \mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}.$$

Demostració. $\Leftarrow$) és clar per la Proposició 3.14. $\Rightarrow$) Si $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, pel Teorema 3.13, $\mathfrak{A} \equiv^-_{\infty\omega} \mathfrak{B}$. Llavors $\mathfrak{A}^* \equiv^-_{\infty\omega} \mathfrak{B}^*$ i com que $\mathfrak{A}^*$ i $\mathfrak{B}^*$ són reduïdes, pel Corol.lari 2.14, $\mathfrak{A}^* \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{B}^*$. És un resultat ben conegut que dues estructures comptables i $L_{\infty\omega}$-equivalents són isomorfes, per tant, com que $\mathfrak{A}^*$ i $\mathfrak{B}^*$ són comptables, $\mathfrak{A}^* \cong \mathfrak{B}^*$ i en conseqüència, $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$. $\square$

Corol.lari 3.17 *Si* $\mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}$ *són L-estructures comptables i reduïdes, llavors*

$$\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B} \quad ssi \quad \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}.$$

Demostració. Per la Proposició 3.16. $\square$

Per a veure la relació entre $\sim_p$ i $\sim_\xi$, per a un ordinal donat ξ, demostrarem un teorema anàleg al Teorema 3.13 per a fórmules de $L^-_{\infty\omega}$ de nested rank $\leq \xi$. Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures, per a tot ordinal ξ, escriurem

$$\mathfrak{A} \equiv^-_{\infty\omega,\xi} \mathfrak{B}$$

quan $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ satisfacin exactament els mateixos enunciats de $L^-_{\infty\omega}$ de nested rank $\leq \xi$.

Teorema 3.18 *Siguin* $\mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}$ *L-estructures, llavors*

$$\mathfrak{A} \sim_\xi \mathfrak{B} \quad ssi \quad \mathfrak{A} \equiv^-_{\infty\omega,\xi} \mathfrak{B}.$$

Demostració. $\Rightarrow$) Suposem que $(I_\eta)_{\eta\leq\xi} : \mathfrak{A} \sim_\xi \mathfrak{B}$. Sigui $\beta \leq \xi$. Demostrem per inducció en ϕ que, per a tota fórmula $\phi(y_1, \ldots, y_k) \in L^-_{\infty\omega}$ de nested rank $\leq \beta$, tota $p \in I_\beta$ i tota $\langle a_1, b_1\rangle, \ldots, \langle a_k, b_k\rangle \in p$,

$$\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_k] \quad \text{ssi} \quad \mathfrak{B} \models \phi[b_1, \ldots, b_k].$$

Suposem que ϕ és atòmica. Si $\beta \in \omega$, per la condició $(*)$ de la demostració de la Proposició 3.9, és clar que val la condició (3.1). I en cas que $\beta \geq \omega$, podem fer ús de la condició $(*)$ juntament amb el fet que, per a tot $n \in \omega$, $I_\beta \subseteq I_n$.

Els casos $\neg$ i $\bigwedge$ són immediats. Sigui $\phi = \exists y\psi$ i suposem inductivament que val la condició (3.1) per a ψ. Si $\mathfrak{A} \models \exists y\psi[a_1, \ldots, a_k]$ llavors hi ha $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi[a, a_1, \ldots, a_k]$. Observem que $\beta \geq \mathrm{NR}(\exists y\psi) = \mathrm{NR}(\psi) + 1$. Així, per ii) de la definició de $\sim_\xi$, hi ha $q \in I_{\beta-1}$ tal que $q \supseteq p$ i $a \in \mathrm{dom}(q)$. Sigui $b \in B$ tal que $\langle a, b\rangle \in q$. Per hipòtesi inductiva, $\mathfrak{B} \models \psi[b, b_1, \ldots, b_k]$ i per tant $\mathfrak{B} \models \exists y\psi[b_1, \ldots, b_k]$. L'altra direcció es demostra de forma anàloga fent servir la condició iii) de la definició de $\sim_\xi$. Per (3.1) podem concloure que $\mathfrak{A} \equiv^-_{\infty\omega,\xi} \mathfrak{B}$.

$\Leftarrow$) Suposem que $\mathfrak{A} \equiv^-_{\infty\omega,\xi} \mathfrak{B}$. Per a tot $\beta \leq \xi$, definim I_β com el conjunt de totes les relacions de parentiu parcials p tals que hi ha $k \in \omega$ amb $p = \{\langle a_1, b_1\rangle, \ldots, \langle a_k, b_k\rangle\}$ i per a tota $\phi(x_1, \ldots, x_k) \in L^-_{\infty\omega}$ amb $\mathrm{NR}(\phi) \leq \beta$,

$$\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_k] \quad \text{ssi} \quad \mathfrak{B} \models \phi[b_1, \ldots, b_k].$$

És rutinari verificar que les condicions i)–v) de la definició de $\sim_\xi$ es donen, fent servir un argument similar al que vam donar a la direcció de dreta a esquerra en la demostració del Teorema 3.13. $\square$

Proposició 3.19 *Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures. Llavors,*

$$\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B} \qquad \textit{ssi} \quad (\mathfrak{A} \sim_\xi \mathfrak{B}, \textit{ per a tot ordinal } \xi).$$

Demostració. $\Rightarrow$) Suposem que $I : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$ i sigui per a tot $\eta \in \xi$, $I_\eta = I$. Llavors $(I_\eta)_{\eta\leq\xi} : \mathfrak{A} \sim_\xi \mathfrak{B}$. $\Leftarrow$) Suposem que per a tot ordinal ξ, $\mathfrak{A} \sim_\xi \mathfrak{B}$. Llavors, pel Teorema 3.18, per a tot ordinal ξ, $\mathfrak{A} \equiv^-_{\infty\omega,\xi} \mathfrak{B}$. En conseqüència, $\mathfrak{A} \equiv^-_{\infty\omega} \mathfrak{B}$ i pel Teorema 3.13, $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$. $\square$

Corol.lari 3.20 *Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures. Si $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, llavors $\mathfrak{A} \sim_f \mathfrak{B}$.*

Demostració. Per la Proposició 3.19. $\square$

El contraexemple següent mostra que la inversa d'aquest corol.lari no és certa:

Exemple 3.21 Sigui $L = \{P, f\}$ on P és un símbol relacional monàdic i f és un símbol funcional monàdic. Considerem la L-estructura $\mathfrak{A} = (\omega, P^{\mathfrak{A}}, f^{\mathfrak{A}})$ on $P^{\mathfrak{A}} = \{0\}$, $f^{\mathfrak{A}}(0) = 0$ i per a tot $n \in \omega$, $f^{\mathfrak{A}}(n+1) = n$, i la L-estructura $\mathfrak{B} = (\omega \cup \{b\}, P^{\mathfrak{B}}, f^{\mathfrak{B}})$ on $b \notin \omega$, $P^{\mathfrak{B}} = P^{\mathfrak{A}}$ i $f^{\mathfrak{B}} = f^{\mathfrak{A}} \cup \{\langle b, b\rangle\}$. Veurem que $\mathfrak{B} \sim_f \mathfrak{A}$. Sigui, per a tot $n \in \omega$,

$$I_n = \{p : p \subseteq Id_\omega \cup \{\langle b, j+1\rangle : j \geq n\}\}.$$

Clarament per a tot $n \in \omega$, $(I_m)_{m \leq n} : \mathfrak{B} \sim_n \mathfrak{A}$. Per tant, $\mathfrak{B} \sim_f \mathfrak{A}$. Però $\mathfrak{A} \not\models \exists x(\bigwedge_{n\in\omega} \neg P f^n(x))$ i $\mathfrak{B} \models \exists x(\bigwedge_{n\in\omega} \neg P f^n(x))$. Llavors, $\mathfrak{B} \not\equiv^-_{\infty\omega} \mathfrak{A}$ i així, pel Teorema 3.13, $\mathfrak{A} \not\sim_p \mathfrak{B}$.

Proposició 3.22 *Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures finites, llavors*

$$\mathfrak{A} \sim_f \mathfrak{B} \quad \textit{ssi} \quad \mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}.$$

Demostració. $\Leftarrow$) és clar per la Proposició 3.14 i el Corol.lari 3.20. $\Rightarrow$) Suposem que $\mathfrak{A} \sim_f \mathfrak{B}$ i sigui per a tot $m \in \omega$, $(I_n^m)_{n \leq m} : \mathfrak{A} \sim_m \mathfrak{B}$. Per a cada $n \in \omega$ definim el conjunt I_n de la manera següent:

$$I_n = \bigcup_{m \geq n} I_n^m.$$

Observem que per a tot $n, n' \in \omega$, si $n \leq n'$, llavors $I_{n'} \subseteq I_n$. Com que $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són finites, per a tot $n \in \omega$, hi ha $p \in I_n$ amb $\mathrm{dom}(p) = A$ i $\mathrm{rg}(p) = B$. A més a més, com que $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són finites, hi ha un nombre finit de relacions de parentiu parcials. En conseqüència, hi ha p amb $\mathrm{dom}(p) = A$ i $\mathrm{rg}(p) = B$ tal que per a tot $n \in \omega$, $p \in I_n$. Sigui $p = \{\langle a_i, b_i\rangle : i \in I\}$ una enumeració de p. Llavors, per la demostració de la Proposició 3.9, per a tot $n \in \omega$,

$$(\mathfrak{A}, a_i)_{i\in I} \equiv_n^- (\mathfrak{B}, b_i)_{i\in I}$$

i per tant,

$$(\mathfrak{A}, a_i)_{i\in I} \equiv^- (\mathfrak{B}, b_i)_{i\in I}.$$

Per la Proposició 2.17 podem concloure que $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$. □

Per a finalitzar la secció veurem com els sistemes de back-and-forth ens permeten obtenir caracteritzacions útils de la relació $\equiv^-$ per a tipus de semblança relacionals. En la demostració d'aquest resultat farem servir les estructures $\mathfrak{A}(\lambda)$ introduïdes als Preliminars.

Lema 3.23 *Sigui L relacional i $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures. Suposem que $k \in \omega$ i $p = \{\langle a_0, b_0\rangle, \ldots, \langle a_{k-1}, b_{k-1}\rangle\}$ és una relació de parentiu parcial $p \subseteq A \times B$. Siguin $\bar{A} = \langle A_0, \ldots, A_{k-1}\rangle$ i $\bar{B} = \langle B_0, \ldots, B_{k-1}\rangle$ seqüències de subconjunts infinits de $A(\omega)$ i $B(\omega)$, respectivament, amb les propietats següents:*

i) *Per a tot* $i \leq k-1$, $A_i \subsetneq C_{a_i}$ *i* $B_i \subsetneq C_{b_i}$.

ii) *Per a tot* $i, j \leq k-1$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ *i* $B_i \cap B_j = \emptyset$.

iii) *Per a tot* $a \in \mathrm{dom}(p)$, $C_a - (A_0 \cup \cdots \cup A_{k-1})$ *és infinit i per a tot* $b \in \mathrm{rg}(p)$, $C_b - (B_0 \cup \cdots \cup B_{k-1})$ *és infinit.*

Llavors, per a tota seqüència $\bar{f} = \langle f_0, \ldots, f_{k-1} \rangle$ *tal que* $f_i : A_i \to B_i$ *és una bijecció, per a tot* $i \leq k-1$, *el conjunt*

$$p_{\bar{A},\bar{B},\bar{f}} = \{\langle x, f_i(x) \rangle : x \in A_i, i \leq k-1\}$$

és un isomorfisme parcial de $\mathfrak{A}(\omega)$ *en* $\mathfrak{B}(\omega)$.

Demostració. És clar per definició de $\mathfrak{A}(\omega)$ i de $\mathfrak{B}(\omega)$. □

Teorema 3.24 *Sigui* L *relacional i* $\mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}$ L*-estructures. Llavors, els enunciats següents són equivalents:*

i) $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$.

ii) $\mathfrak{A}(\omega) \equiv \mathfrak{B}(\omega)$.

iii) *Per a algun cardinal infinit* λ, $\mathfrak{A}(\lambda) \equiv \mathfrak{B}(\lambda)$.

iv) *Per a tot cardinal infinit* λ, $\mathfrak{A}(\lambda) \equiv \mathfrak{B}(\lambda)$.

Demostració. ii) $\Rightarrow$ iii) i iv) $\Rightarrow$ iii) són clars. iii) $\Rightarrow$ i) és clar perquè per a tot cardinal infinit λ, $\mathfrak{A}(\lambda) \in \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}(\mathfrak{A})$ i $\mathfrak{B}(\lambda) \in \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}(\mathfrak{B})$. i) $\Rightarrow$ ii) Suposem que $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. Mostrarem que per a tot subconjunt finit $L_0 \subseteq L$,

$$(\mathfrak{A}(\omega) \restriction L_0) \cong_f (\mathfrak{B}(\omega) \restriction L_0).$$

Sigui $L_0 \subseteq L$ finit, mostrarem que per a tot $n \in \omega$,

$$(\mathfrak{A}(\omega) \restriction L_0) \cong_n (\mathfrak{B}(\omega) \restriction L_0).$$

Fixem $n \in \omega$, com que $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \equiv_n^- \mathfrak{B}$ i llavors, $(\mathfrak{A} \restriction L_0) \equiv_n^- (\mathfrak{B} \restriction L_0)$. Donat que L_0 és finit, per la Proposició 3.9 i l'observació que se segueix de la seva prova, hi ha $(I_m)_{m \leq n}$ tal que

$$(I_m)_{m \leq n} : (\mathfrak{A} \restriction L_0) \sim_n (\mathfrak{B} \restriction L_0),$$

i per a tot $m \leq n$, I_m és un conjunt de relacions parcials de parentiu finites. Observem que $(\mathfrak{A}(\omega) \restriction L_0) = (\mathfrak{A} \restriction L_0)\ (\omega)$ i $(\mathfrak{B}(\omega) \restriction L_0) = (\mathfrak{B} \restriction L_0)\ (\omega)$; aquest fet ens permet aplicar el Lema 3.23. Per a tot $m \leq n$, sigui Y_m el conjunt de tots els isomorfismes parcials $p_{\bar{A},\bar{B},\bar{f}}$ de $\mathfrak{A}(\omega) \restriction L_0$ en $\mathfrak{B}(\omega) \restriction L_0$ amb les propietats enunciades al Lema 3.23 i $p \in I_m$. Mostrarem ara que

$$(Y_m)_{m \leq n} : (\mathfrak{A}(\omega) \restriction L_0) \cong_n (\mathfrak{B}(\omega) \restriction L_0).$$

No és difícil provar que per a tot $m \leq n$, Y_m no és buit. Demostrarem ara que val la condició forth de la definició de $\cong_n$; la condició back té una prova anàloga. Suposem que $m+1 \leq n$, $p_{\bar{A},\bar{B},\bar{f}} \in Y_{m+1}$ i $x \in A(\omega)$. Sigui $a \in A$ amb $x \in C_a$. Si $x \in \mathrm{dom}(p_{\bar{A},\bar{B},\bar{f}})$, llavors no hi ha res a demostrar, perquè $p_{\bar{A},\bar{B},\bar{f}} \in Y_{m+1} \subseteq Y_m$. Si $x \notin \mathrm{dom}(p_{\bar{A},\bar{B},\bar{f}})$ podem distingir dos casos:

Cas I: $a \in \mathrm{dom}(p)$. Sigui $p = \{\langle a_0, b_0\rangle, \ldots, \langle a_{k-1}, b_{k-1}\rangle\}$ i $i \leq k-1$ amb $a = a_i$. Llavors escollim $y \in C_{b_i} - (B_0 \cup \cdots \cup B_{k-1})$ i definim $A_i' = A_i \cup \{x\}$, $B_i' = B_i \cup \{y\}$ i $f_i' = f_i \cup \{\langle x, y\rangle\}$. Sigui

$$\bar{A}' = \langle A_0, \ldots, A_{i-1}, A_i', A_{i+1}, \ldots, A_{k-1}\rangle,$$

$$\bar{B}' = \langle B_0, \ldots, B_{i-1}, B_i', B_{i+1}, \ldots, B_{k-1}\rangle,$$

i

$$\bar{f}' = \langle f_0, \ldots, f_{i-1}, f_i', f_{i+1}, \ldots, f_{k-1}\rangle.$$

Llavors $p_{\bar{A}',\bar{B}',\bar{f}'} \in Y_{m+1} \subseteq Y_m$, $x \in \mathrm{dom}(p_{\bar{A}',\bar{B}',\bar{f}'})$ i $p_{\bar{A},\bar{B},\bar{f}} \subseteq p_{\bar{A}',\bar{B}',\bar{f}'}$. Aleshores, la condició forth se satisfà.

Cas II: $a \notin \mathrm{dom}(p)$. Sigui $p = \{\langle a_0, b_0\rangle, \ldots, \langle a_{k-1}, b_{k-1}\rangle\}$. Com que

$$(I_m)_{m \leq n} : (\mathfrak{A} \restriction L_0) \sim_n (\mathfrak{B} \restriction L_0),$$

per la condició forth de la definició de $\sim_n$, hi ha $q \in I_m$ tal que $q \supseteq p$ i $a \in \mathrm{dom}(q)$. Sigui $q = \{\langle a_0, b_0\rangle, \ldots, \langle a_{k-1}, b_{k-1}\rangle, \ldots, \langle a_l, b_l\rangle\}$ i $j \leq l$ amb $a = a_j$. Com que $\bar{A}$, $\bar{B}$ i $\bar{f}$ satisfan les propietats enunciades al Lema 3.23, poden ser esteses a seqüències

$$\bar{A}' = \langle A_0, \ldots, A_{k-1}, \ldots, A_l\rangle,$$

$$\bar{B}' = \langle B_0, \ldots, B_{k-1}, \ldots, B_l\rangle,$$

i

$$\bar{f}' = \langle f_0, \ldots, f_{k-1}, \ldots, f_l\rangle,$$

que també satisfan aquestes propietats i $x \in A_j$. Clarament llavors $p_{\bar{A},\bar{B},\bar{f}} \subseteq q_{\bar{A}',\bar{B}',\bar{f}'}$, $q_{\bar{A}',\bar{B}',\bar{f}'} \in Y_m$ i $x \in \mathrm{dom}(q_{\bar{A}',\bar{B}',\bar{f}'})$. Aleshores, la condició forth també se satisfà

Podem concloure que

$$(Y_m)_{m \leq n} : (\mathfrak{A}(\omega) \restriction L_0) \cong_n (\mathfrak{B}(\omega) \restriction L_0).$$

Per tant,

$$(\mathfrak{A}(\omega) \restriction L_0) \cong_f (\mathfrak{B}(\omega) \restriction L_0),$$

per a tot L_0 finit. En conseqüència, $\mathfrak{A}(\omega) \equiv \mathfrak{B}(\omega)$.

i) $\Rightarrow$ iv) Suposem que $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. Com que per a tot cardinal infinit λ, $\mathfrak{A}(\lambda) \in \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}(\mathfrak{A})$ i $\mathfrak{B}(\lambda) \in \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}(\mathfrak{B})$, tenim que $\mathfrak{A}(\lambda) \equiv^- \mathfrak{B}(\lambda)$. Aleshores per la implicació i) $\Rightarrow$ ii) que ja hem demostrat,

$$(\mathfrak{A}(\lambda))(\omega) \equiv (\mathfrak{B}(\lambda))(\omega).$$

Per tant, com que $(\mathfrak{A}(\lambda))(\omega) \cong \mathfrak{A}(\lambda)$ i $(\mathfrak{B}(\lambda))(\omega) \cong \mathfrak{B}(\lambda)$, tenim que $\mathfrak{A}(\lambda) \equiv \mathfrak{B}(\lambda)$. □

Corol.lari 3.25 *Sigui L relacional i $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures. Llavors, els enunciats següents són equivalents:*

i) $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$.

ii) $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{B}'$, *per a algunes* $\mathfrak{A}' \in \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}(\mathfrak{A})$ *i* $\mathfrak{B}' \in \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}(\mathfrak{B})$.

iii) $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{B}'$, *per a algunes* $\mathfrak{A}' \sim \mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}' \sim \mathfrak{B}$.

Demostració. Per la Proposició 3.24. □

3.2 Extensions i ultrafiltre-potències

Hi ha una coneguda caracterització de l'equivalència elemental en termes d'ultrapotències deguda a H. J. Keisler i S. Shelah, segons la qual dues estructures $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són elementalment equivalents ssi tenen ultrapotències isomorfes. Una caracterització similar val per a l'equivalència elemental per lògica sense identitat si enlloc d'isomorfisme d'ultrapotències postulem només que les ultrapotències siguin parentes. En aquesta secció presentem aquest resultat, en el Teorema 3.32, juntament amb una altra caracterització de la relació d'equivalència elemental per a aquesta lògica en termes d'extensions elementals, en el Teorema 3.27.

Algunes construccions que són similars als productes reduïts, anomenades filtre-productes, es fan servir per a donar noves versions del Teorema 3.32. L'ús d'aquest tipus d'estructures és especialment interessant perquè, en tipus de semblança relacionals, ens proporcionen una versió més forta del teorema. En aquest cas, es pot reemplaçar la relació de parentiu per la d'isomorfisme quan formulem el teorema.

Els teoremes d'aquesta secció els aplicarem en la demostració dels teoremes de caracterització del Capítol 4. Com a referència sobre el Teorema de Keisler-Shelah es pot consultar [She71] i [CK91]. Començarem amb un resultat preliminar:

Lema 3.26 *Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures i suposem que hi ha seqüències d'elements de A i de B, $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ i $\overline{b} = (b_i : i \in I)$, respectivament, tals que*

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

Llavors hi ha $\mathfrak{A}' \succeq \mathfrak{A}$ i seqüències $\overline{c} = (a_j : j \in J)$ i $\overline{d} = (b_j : j \in J)$ d'elements de A' i de B, respectivament, tals que

$$(\mathfrak{A}', \overline{c}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{d}),$$

$\overline{a} \subseteq \overline{c}$, $\overline{b} \subseteq \overline{d}$ i $\overline{d}$ és una enumeració de B.

Demostració. Expandim el llenguatge introduint constants classificades en els tres conjunts disjunts següents:

$$C_A = \{c_a : a \in A - \mathrm{rg}(\overline{a})\},\ C_I = \{c_i : i \in I\},\ C_B = \{c_b : b \in B - \mathrm{rg}(\overline{b})\},$$

i considerem el diagrama elemental de $\mathfrak{A}$ en aquest llenguatge expandit, és a dir, el conjunt de tots els enunciats de tipus $L \cup C_I \cup C_A$ vertaders a $(\mathfrak{A}, \overline{a}, a)_{a \in A - \mathrm{rg}(\overline{a})}$, i el diagrama elemental sense identitat de $\mathfrak{B}$ en aquest llenguatge expandit, és a dir, el conjunt de tots els enunciats sense identitat de tipus $L \cup C_I \cup C_B$ vertaders a $(\mathfrak{B}, \overline{b}, b)_{b \in B - \mathrm{rg}(\overline{b})}$. Sigui Γ la unió d'aquests dos diagrames. Com que $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$, Γ és consistent. Sigui

$$\mathfrak{C} = (\mathfrak{A}', c^{\mathfrak{C}})_{c \in C_A \cup C_B \cup C_I}$$

un model de Γ. Podem suposar que $c_i^{\mathfrak{C}} = a_i$, per a tot $i \in I$ i que $c_a^{\mathfrak{C}} = a$ per a tot $a \in A - \mathrm{rg}(\overline{a})$. Com que $\mathfrak{C}$ és un model del diagrama elemental de $\mathfrak{A}$, tenim que $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{A}'$. Sigui $\overline{c} = \overline{a} \cup (c_b^{\mathfrak{C}} : b \in B - \mathrm{rg}(\overline{b}))$ i $\overline{d} = \overline{b} \cup (b : b \in B - \mathrm{rg}(\overline{b}))$. Donat que $\mathfrak{C}$ és un model del diagrama elemental sense identitat de $\mathfrak{B}$,

$$(\mathfrak{A}', \overline{c}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{d}). \ \square$$

Observem que, en la demostració anterior, si $\kappa = \max(|A|, |B|, |L|, \aleph_0)$, pel Teorema de Löwenheim-Skolem, podem prendre $\mathfrak{A}'$ de cardinalitat $\leq \kappa$. Ara donarem una caracterització de l'equivalència elemental en lògica sense identitat, fent servir extensions elementals.

Teorema 3.27 *Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures. Llavors els enunciats següents són equivalents:*

i) $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$.

ii) *Hi ha $\mathfrak{C} \succeq \mathfrak{A}$ i $\mathfrak{D} \succeq \mathfrak{B}$ tals que $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{D}$.*

Demostració. ii) $\Rightarrow$ i) és clar. i) $\Rightarrow$ ii) Suposem que $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. Fent servir el Lema 3.26 definim per inducció dues cadenes elementals de models $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\omega}$ i $(\mathfrak{B}_n)_{n\in\omega}$ i dues cadenes de seqüències $(\overline{a}_n)_{n\in\omega}$ i $(\overline{b}_n)_{n\in\omega}$ tals que, per a tot $n \in \omega$,

a) $\overline{a}_n = (a_i : i \in I_n)$ i $\overline{b}_n = (b_i : i \in I_n)$ són seqüències d'elements de A_n i de B_n respectivament, tals que

$$(\mathfrak{A}_n, \overline{a}_n) \equiv^- (\mathfrak{B}_n, \overline{b}_n).$$

b) $A_n \subseteq \mathrm{rg}(\overline{a}_{n+1})$ i $B_n \subseteq \mathrm{rg}(\overline{b}_{n+1})$.

Siguin $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}$ i $\overline{a}_0 = \overline{b}_0 = \emptyset$. Donat que $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$, les condicions a) i b) són satisfetes. Suposem ara, inductivament, que hem definit $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$, $\overline{a}_n$ i $\overline{b}_n$ que satisfan les condicions a) i b). Donat que

$$(\mathfrak{A}_n, \overline{a}_n) \equiv^- (\mathfrak{B}_n, \overline{b}_n),$$

pel Lema 3.26 hi ha $\mathfrak{A}' \succeq \mathfrak{A}_n$ i seqüències $\overline{c} = (a_j : j \in J)$ i $\overline{d} = (b_j : j \in J)$ de A' i de B_n respectivament, tals que

$$(\mathfrak{A}', \overline{c}) \equiv^- (\mathfrak{B}_n, \overline{d}),$$

$\overline{a}_n \subseteq \overline{c}$, $\overline{b}_n \subseteq \overline{d}$ i $\overline{d}$ és una enumeració de B_n. Altre cop, pel Lema 3.26, hi ha $\mathfrak{B}' \succeq \mathfrak{B}_n$ i seqüències $\overline{c}' = (a_j : j \in J')$ i $\overline{d}' = (b_j : j \in J')$ de A' i de B' respectivament, tals que

$$(\mathfrak{A}', \overline{c}') \equiv^- (\mathfrak{B}', \overline{d}')$$

$\overline{c} \subseteq \overline{c}'$, $\overline{d} \subseteq \overline{d}'$ i $\overline{c}'$ és una enumeració de A'. Siguin $\mathfrak{A}_{n+1} = \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}_{n+1} = \mathfrak{B}'$, $\overline{a}_{n+1} = \overline{c}'$ i $\overline{b}_{n+1} = \overline{d}'$. Així definits, les condicions a) i b) se satisfan.

Siguin $\mathfrak{C} = \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{D} = \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{B}_n$, $\overline{c} = \bigcup_{n\in\omega} \overline{a}_n$ i $\overline{d} = \bigcup_{n\in\omega} \overline{b}_n$. Tenim que $\mathfrak{C} \succeq \mathfrak{A}$ i $\mathfrak{D} \succeq \mathfrak{B}$. A més a més, $\overline{c}$ i $\overline{d}$ són enumeracions de C i de D, respectivament, i

$$(\mathfrak{C}, \overline{c}) \equiv^- (\mathfrak{D}, \overline{d}).$$

Per la Proposició 2.17, podem concloure que $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{D}$. □

Observem que, en l'anterior demostració, si $\kappa = \max(|A|, |B|, |L|, \aleph_0)$, fent servir l'observació que segueix el Lema 3.26, podem prendre $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{D}$ de cardinalitat $\leq \kappa$.

Corol.lari 3.28 *Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures. Llavors, els enunciats següents són equivalents:*

i) $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$.

ii) *Hi ha $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{A}$ i $\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{B}$ de cardinalitat $\leq |L| + \aleph_0$, tals que $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{D}$.*

Demostració. ii) $\Rightarrow$ i) és clar. i) $\Rightarrow$ ii) Suposem que $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. Pel Teorema de Löwenheim-Skolem, hi ha $\mathfrak{C}' \equiv \mathfrak{A}$ i $\mathfrak{D}' \equiv \mathfrak{B}$ de cardinalitat $\leq |L| + \aleph_0$. Clarament, $\mathfrak{C}' \equiv^- \mathfrak{D}'$, llavors pel Teorema 3.27 i l'observació que va a continuació de la seva demostració, hi ha $\mathfrak{C} \succeq \mathfrak{C}'$ i $\mathfrak{D} \succeq \mathfrak{D}'$ de cardinalitat $\leq |L| + \aleph_0$, tals que $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{D}$. Clarament, $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{A}$ i $\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{B}$. □

Presentem ara una caracterització de l'equivalència elemental en lògica sense identitat, fent servir ultrapotències. Comencem amb notació i alguns lemes preliminars. Si $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ és una família de L-estructures, $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ és el producte directe de la família i per a tot filtre F sobre I, $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F$ és el producte reduït mòdul F. Designem amb $\mathfrak{A}^I$ la potència directa de $\mathfrak{A}$ i, fixat un ultrafiltre U sobre I, designem amb $\mathfrak{A}^U$ la ultrapotència de $\mathfrak{A}$ mòdul U.

Lema 3.29 *Sigui I un conjunt no buit, $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ una família de L-estructures i F un filtre sobre I. Llavors, hi ha un homomorfisme estricte exhaustiu $h : \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F \to \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i^*/F$.*

Demostració. Per a tot $a \in \prod_{i\in I} A_i$ sigui $a' = \langle [a(i)]_{\Omega(\mathfrak{A}_i)} : i \in I\rangle$. Definim $h : \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F \to \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i^*/F$ de la manera següent: per a tot $a \in \prod_{i\in I} A_i$, $h([a]_F) = [a']_F$. És senzill veure que h és un homomorfisme estricte exhaustiu. □

Corol.lari 3.30 *Sigui I un conjunt no buit, $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ una família de L-estructures i F un filtre sobre I. Llavors,*

$$(\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F)^* \cong (\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i^*/F)^*.$$

Demostració. Pel Lema 3.29. □

Lema 3.31 *Siguin J i K conjunts no buits i D i G ultrafiltres sobre J i K respectivament. Llavors, hi ha un conjunt no buit I i un ultrafiltre propi U sobre I tal que, per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$,*

$$\left(\mathfrak{A}^D\right)^G \cong \mathfrak{A}^U.$$

Demostració. La demostració és anàloga a la demostració del Lemma 2.22 de la pàgina 216 de [BS81]. □

Teorema 3.32 *Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures. Llavors, $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$ ssi $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ tenen ultrapotències parentes.*

Demostració. $\Leftarrow$) és clar. $\Rightarrow$) Suposem que $\mathfrak{A} \equiv^{-} \mathfrak{B}$. Llavors, pel Teorema 3.27, hi ha extensions elementals $\mathfrak{A}' \succeq \mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}' \succeq \mathfrak{B}$ tals que

$$(\mathfrak{A}')^* \cong (\mathfrak{B}')^*. \tag{3.3}$$

Pel Teorema de les ultrapotències de Keisler i Shelah per a lògica de primer ordre amb identitat, donat que $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}'$ hi ha un conjunt no buit J i un ultrafiltre propi D sobre J tals que

$$\mathfrak{A}^D \cong \mathfrak{A}'^D \tag{3.4}$$

Considerem ara l'estructura $\mathfrak{B}'^D$. Pel Corol.lari 3.30,

$$(\mathfrak{B}'^D)^* \cong ((\mathfrak{B}'^*)^D)^*,$$

per tant, per (3.3),

$$(\mathfrak{B}'^D)^* \cong ((\mathfrak{A}'^*)^D)^*,$$

i altre cop pel Corol.lari 3.30,

$$(\mathfrak{B}'^D)^* \cong (\mathfrak{A}'^D)^*$$

i per (3.4),

$$(\mathfrak{B}'^D)^* \cong (\mathfrak{A}^D)^*. \tag{3.5}$$

Pel Teorema de les ultrapotències de Keisler i Shelah per a lògica de primer ordre amb identitat, donat que $\mathfrak{B}^D \equiv \mathfrak{B}'^D$, hi ha un conjunt no buit K i un ultrafiltre propi G sobre K tals que

$$\left(\mathfrak{B}^D\right)^G \cong \left(\mathfrak{B}'^D\right)^G. \tag{3.6}$$

Considerem ara l'estructura $\left(\mathfrak{A}^D\right)^G$, tenim que, pel Corol.lari 3.30,

$$\left(\left(\mathfrak{A}^D\right)^G\right)^* \cong \left(\left(\left(\mathfrak{A}^D\right)^*\right)^G\right)^*$$

per tant, per (3.5),

$$\left(\left(\mathfrak{A}^D\right)^G\right)^* \cong \left(\left(\left(\mathfrak{B}'^D\right)^*\right)^G\right)^*$$

i altre cop pel Corol.lari 3.30,

$$\left(\left(\mathfrak{A}^D\right)^G\right)^* \cong \left((\mathfrak{B}'^D)^G\right)^*$$

i per (3.6),

$$\left(\left(\mathfrak{A}^D\right)^G\right)^* \cong \left(\left(\mathfrak{B}^D\right)^G\right)^*.$$

Per tant, pel Lema 3.31, hi ha un conjunt no buit I i un ultrafiltre propi U sobre I tals que

$$\left(\mathfrak{A}^D\right)^G \cong (\mathfrak{A}^U)$$

i

$$\left(\mathfrak{B}^D\right)^G \cong (\mathfrak{B}^U).$$

Així, obtenim

$$(\mathfrak{A}^U)^* \cong (\mathfrak{B}^U)^*.$$

Per tant,

$$\mathfrak{A}^U \sim \mathfrak{B}^U. \ \square$$

El Teorema 3.33 és una millora del Teorema 3.32. Aquest resultat pot ser obtingut fent servir una demostració anàloga a la donada en el Teorema de Keisler i Shelah, nosaltres en donarem només algunes indicacions.

Teorema 3.33 *Si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són L-estructures, els enunciats següents són equivalents:*

i) $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$.

ii) $\mathfrak{A}^U \sim \mathfrak{B}^U$, *per a algun ultrafiltre propi U sobre un conjunt de cardinalitat $\leq 2^{|A|+|B|+\omega}$.*

Indicacions de la demostració. Sigui $\kappa = 2^{|A|+|B|+\omega}$. Llavors, $|A|^\kappa, |B|^\kappa \leq 2^\kappa$. Podem suposar que $|L| + \aleph_0 \leq \kappa$. En la demostració de [She71] del resultat anàleg per a llenguatges de primer ordre amb identitat, sota la hipòtesi que $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ es mostra que hi ha enumeracions $(a_i : i < 2^\kappa)$ i $(b_i : i < 2^\kappa)$ de ${}^\kappa A$ i de ${}^\kappa B$ respectivament, i un ultrafiltre U sobre κ tal que per a tota fórmula de primer ordre $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ i tota $i_1 < \cdots < i_n < 2^\kappa$,

$$\{j < \kappa : \mathfrak{A} \models \phi[a_{i_1}(j), \ldots, a_{i_n}(j)]\} \in U \ \text{ ssi } \ \{j < \kappa : \mathfrak{B} \models \phi[b_{i_1}(j), \ldots, b_{i_n}(j)]\} \in U.$$

La mateixa demostració funciona per a una fórmula sense identitat ϕ sota la hipòtesi única que $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. En el cas del llenguatge amb identitat, la conclusió és

$$(\mathfrak{A}^U, ([a_i]_U)_{i<2^\kappa}) \equiv (\mathfrak{B}^U, ([b_i]_U)_{i<2^\kappa})$$

i, per tant, $\mathfrak{A}^U \cong \mathfrak{B}^U$. En el cas d'un llenguatge sense identitat podem concloure que

$$(\mathfrak{A}^U, ([a_i]_U)_{i<2^\kappa}) \equiv^- (\mathfrak{B}^U, ([b_i]_U)_{i<2^\kappa})$$

i, per la Proposició 2.17, que $\mathfrak{A}^U \sim \mathfrak{B}^U$. $\square$

Observem que, per la Proposició 2.17, el Teorema 3.32 pot ser reescrit de la manera següent:

$$\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B} \quad \text{ssi} \quad (\mathfrak{A}^U)^* \cong (\mathfrak{B}^U)^*,$$

per a algun ultrafiltre U sobre un conjunt de cardinalitat $\leq 2^{|A|+|B|+\omega}$. La composició de l'operació d'ultrapotència amb la de reducció és un quocient del producte directe i el podem considerar com a una única operació. Aquesta operació quocient és la que, de fet, juga el paper, en lògica sense identitat, de l'operació d'ultrapotència en el Teorema de Keisler i Shelah.

En lògica sense identitat les operacions del producte reduït, de l'ultraproducte i de la ultrapotència no són les més naturals, perquè no és necessari considerar els quocients mòdul la relació associada al filtre. Ara introduirem uns operadors que tindran el mateix paper en lògica sense identitat que els ultraproductes i les ultrapotències tenen en lògica amb identitat. Han estat considerats, per exemple, per J. Monk, [Mon76], i W. Blok i D. Pigozzi, [BP92], però segons el nostre punt de vista, el seu paper en lògica sense identitat no ha estat prou estudiat.

Definició 3.34 Sigui I un conjunt no buit, $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ una família de L-estructures i F un filtre sobre I. Definim el *filtre-producte* de la família $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ mòdul F, que designarem amb $\prod_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i$, de la forma següent:

- El domini de $\prod_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i$ és $\prod_{i\in I} A_i$.
- Per a tot símbol constant $c \in L$, $c^{\prod_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i} = \langle c^{\mathfrak{A}_i} : i \in I\rangle$.
- Per a tot símbol funcional n-àdic $f \in L$ i tota $a_1, \ldots, a_n \in \prod_{i\in I} A_i$,

$$\mathrm{f}^{\prod_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}}^{\mathrm{F}} \mathfrak{A}_\mathrm{i}}(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{n}) = \langle \mathrm{f}^{\mathfrak{A}_\mathrm{i}}(\mathrm{a}_1(\mathrm{i}), \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{n}(\mathrm{i})) : \mathrm{i} \in \mathrm{I}\rangle.$$

- Per a tot símbol relacional n-àdic $R \in L$ i tota $a_1, \ldots, a_n \in \prod_{i\in I} A_i$,

$$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in R^{\prod_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i} \text{ ssi } \left\{i \in I : \langle a_1(i), \ldots, a_n(i)\rangle \in R^{\mathfrak{A}_i}\right\} \in F.$$

Fixat un ultrafiltre U sobre I, diem que $\prod_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i$ és *l'ultrafiltre-producte* de la família $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ mòdul U. I en cas que, per a tot $i \in I$, $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$, diem que $\prod^U \mathfrak{A}$ és *la ultrafiltre-potència* de $\mathfrak{A}$.

Observem que la relació $\sim_F$ definida a $\prod_{i\in I} A_i$ per:

$$a \sim_F b \text{ ssi } \{i \in I : a(i) = b(i)\} \in F$$

per a tot $a, b \in \prod_{i\in I} A_i$, és una relació de congruència en $\prod_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i$ i el producte reduït $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F$ és precisament el quocient $\prod_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i/\!\sim_F$. Per tant, $\prod_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i \in \mathbf{H_S^{-1}}(\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F)$ i així $\prod_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i$ i $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F$ són parents. Això mostra, en particular, que els ultraproductes no són necessaris en lògica sense identitat i ens permet reescriure el Teorema 3.32 de la manera següent:

Teorema 3.35 *Si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són L-estructures, els enunciats següents són equivalents:*

i) $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$.

ii) $\prod^U \mathfrak{A} \sim \prod^U \mathfrak{B}$, *per a algun ultrafiltre propi U sobre un conjunt de cardinalitat $\leq 2^{|A|+|B|+\omega}$.*

Demostració. Pel Teorema 3.32. □

Ara enunciarem alguns fets simples sobre les noves construccions. La proposició que ve a continuació és una versió del Teorema de Łoś per a lògica sense identitat i per a ultrafiltre-productes. La seva demostració és senzilla.

Proposició 3.36 *Sigui I un conjunt no buit, $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ una família de L-estructures i U un ultrafiltre propi sobre I. Llavors, per a tota $a_1, \ldots, a_n \in \prod_{i\in I} A_i$ i tota fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in L^-$,*

$$\prod\nolimits_{i\in I}^{U} \mathfrak{A}_i \models \phi\,[a_1, \ldots, a_n] \ \ ssi\ \ \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \phi\,[a_1(i), \ldots, a_n(i)]\} \in U.$$

Observem que de la proposició anterior se segueix que si U és un ultrafiltre propi sobre I, la funció $h(a) = \langle a : i \in I\rangle$ és un isomorfisme de $\mathfrak{A}$ sobre una L^--subestructura de $\prod^U \mathfrak{A}$.

L'exemple següent mostra que en el Teorema 3.35 no podem reemplaçar la relació de parentiu per la d'isomorfia, és a dir, l'exemple mostra que, en general, no és veritat que $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$ impliqui que hi ha un ultrafiltre propi U tal que $\prod^U \mathfrak{A} \cong \prod^U \mathfrak{B}$.

Exemple 3.37 Sigui L un tipus de semblança amb un símbol relacional monàdic P, un símbol funcional monàdic f (i possiblement més símbols funcionals però no més símbols relacionals). Siguin $\mathfrak{A} = (\{0,1\}, P^{\mathfrak{A}}, f^{\mathfrak{A}}, \ldots)$ i $\mathfrak{B} = (\{0,1\}, P^{\mathfrak{B}}, f^{\mathfrak{B}}, \ldots)$ dues L-estructures amb $P^{\mathfrak{A}} = P^{\mathfrak{B}} = \{0,1\}$, $f^{\mathfrak{A}} = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}$ i $f^{\mathfrak{B}} = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle\}$. Clarament, $\mathfrak{A}^* \cong \mathfrak{B}^*$ i per tant, $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. Però no hi ha cap ultrafiltre U tal que $\prod^U \mathfrak{A} \cong \prod^U \mathfrak{B}$, perquè $\prod^U \mathfrak{A} \models \forall x f(x) \approx x$ i $\prod^U \mathfrak{B} \not\models \forall x f(x) \approx x$.

Ara veurem que, per a tipus de semblança relacionals i estructures amb dos elements com a mínim, podem reemplaçar en el Teorema 3.35 la relació de parentiu per la d'isomorfia.

Lema 3.38 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura amb si més no dos elements, I un conjunt no buit i U un ultrafiltre sobre I. Llavors, per a tot $a \in A^I$, $|U| \leq |[a]_U|$.*

Demostració. Sigui $a \in A^I$. Fixem dos elements diferents $c, d \in A$ i definim per a tot $X \in U$ un element $a_X \in A^I$ de la manera següent:

$$a_X(i) = \begin{cases} a(i), & \text{si } i \in X \\ c, & \text{si } i \notin X \text{ i } a(i) \neq c \\ d, & \text{si } i \notin X \text{ i } a(i) = c, \end{cases}$$

per a tot $i \in I$. Clarament $\{i \in I : a_X(i) = a(i)\} = X \in U$. A més a més, per a tot $X, Y \in U$, si $X \neq Y$ tenim que $a_X \neq a_Y$. Per tant, podem concloure que $|U| \leq |[a]_U|$. □

Observem que, en el Lema 3.38, si $|A| < |I|$ llavors $|U| = |[a]_U|$.

Lema 3.39 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura amb si més no dos elements, I un conjunt no buit i U un ultrafiltre propi sobre I. Llavors, per a tot $a \in A^I$, $|U| \leq \left|[a]_{\Omega(\prod^U \mathfrak{A})}\right|$.*

Demostració. Donat que la relació $\sim_U$ in A^I, tal com l'hem definida abans, és una relació de congruència en $\prod^U \mathfrak{A}$ i la congruència de Leibniz $\Omega(\prod^U \mathfrak{A})$ és la major congruència, pel Lema 3.38 tenim que $|U| \leq |[a]_U| \leq \left|[a]_{\Omega(\prod^U \mathfrak{A})}\right|$. □

Observem que, com abans, si $|A| < |I|$ llavors $|U| = \left|[a]_{\Omega(\prod^U \mathfrak{A})}\right|$.

Teorema 3.40 *Sigui L relacional i $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ dues L-estructures amb si més no dos elements. Els enunciats següents són equivalents:*

i) $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$.

ii) $\prod^U \mathfrak{A} \cong \prod^U \mathfrak{B}$ *per a algun ultrafiltre propi U sobre un conjunt de cardinalitat* $\leq 2^{|A| \cdot |B| \cdot \omega}$.

Demostració. ii) $\Rightarrow$ i) és clar. i) $\Rightarrow$ ii) Suposem que $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. Per la prova del Teorema 3.33, $\prod^U \mathfrak{A} \sim \prod^U \mathfrak{B}$ per a algun ultrafiltre propi U sobre un conjunt I de cardinalitat $\leq 2^{|A| \cdot |B| \cdot \omega}$. Llavors, pel Lema 3.39 i l'observació que segueix la seva demostració, tenim que per a tot $a \in A^I$ i per a tot $b \in B^I$,

$$(*) \qquad \left|[a]_{\Omega(\prod^U \mathfrak{A})}\right| = |U| = \left|[b]_{\Omega(\prod^U \mathfrak{B})}\right|.$$

Ara, donat que $(\prod^U \mathfrak{A})^* \cong (\prod^U \mathfrak{B})^*$, sigui h un isomorfisme entre aquestes estructures. Amb el seu ajut i fent servir la condició $(*)$ podem obtenir enumeracions sense repeticions de A^I i de B^I, $\bar{a} = (a_j : j \in J)$ i $\bar{b} = (b_j : j \in J)$, respectivament, tals que

$$(\prod^U \mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv^- (\prod^U \mathfrak{B}, \bar{b}).$$

Donat que L és relacional, la funció que envia a_j a b_j és una isomorfia de $\prod^U \mathfrak{A}$ sobre $\prod^U \mathfrak{B}$. $\square$

Lema 3.41 *Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures. Si $\mathfrak{A}$ és una estructura amb només un element i $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$, llavors $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}^*$.*

Demostració. Clarament $\mathfrak{A}$ és reduïda i donat que $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$, és senzill veure que la funció $h : B \to A$ definida per: $h(b) = a$, per a tot $b \in B$, és un homomorfisme estricte de $\mathfrak{B}$ sobre $\mathfrak{A}$. $\square$

Corol.lari 3.42 *Sigui L relacional i siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures. Llavors, $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$ ssi es dóna un dels tres casos següents:*

i) $\prod^U \mathfrak{A} \cong \prod^U \mathfrak{B}$ *per a algun ultrafiltre U sobre un conjunt de cardinalitat* $\leq 2^{|A|+|B|+\omega}$.

ii) $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}^*$.

iii) $\mathfrak{A}^* \cong \mathfrak{B}$.

Demostració. Cadascuna de les condicions i), ii) i iii) implica $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. Ara bé, si $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$ i ambdues estructures tenen si més no dos elements, la condició i) se segueix del Teorema 3.40, i, en cas que una de les dues estructures tingui només un element, pel Lema 3.41, o bé la condició ii) o bé la condició iii) valdrà. $\square$

Per a posar fi a aquesta secció, donat que $\prod^U \mathfrak{A} \in \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}(\mathfrak{A}^U)$ podem obtenir el resultat següent per a tipus de semblança relacionals:

Proposició 3.43 *Sigui L un tipus de semblança relacional, $\mathfrak{A}$ una L-estructura amb si més no dos elements, I un conjunt no buit tal que $|A| < |I|$ i U un ultrafiltre sobre I. Llavors,*

$$\prod^U \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}^U(2^{|I|}).$$

Demostració. Pel Lema 3.38 i l'observació que segueix la seva prova, donat que $|A| < |I|$, $|U| = |[a]_U|$. Llavors, podem definir per a tota classe d'equivalència $x \in A^U$, una funció bijectiva $f_x : x \to C_x$ (recordem la definició de $\mathfrak{A}(\lambda)$ dels Preliminars). Ara definim $h : \prod^U A \to A^U(2^{|I|})$ per $h(a) = f_x(a)$, per a tot $a \in A^I$, on $a \in x$. És senzill comprovar que h és un isomorfisme. $\square$

Corol.lari 3.44 *Sigui L un tipus de semblança relacional i $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ dues L-estructures amb si més no dos elements. Llavors, els enunciats següents són equivalents:*

i) $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$.

ii) $\mathfrak{A}^U(2^{|I|}) \cong \mathfrak{B}^U(2^{|I|})$ *per a algun ultrafiltre U sobre un conjunt I de cardinalitat* $\leq 2^{|A|+|B|+\omega}$.

Demostració. Pel Teorema 3.40 i per la Proposició 3.43. □

Teoremes de preservació i de caracterització

4.1 Classes elementals en lògica sense identitat

Del Teorema de les ultrapotències de Keisler i Shelah se segueix que una classe K d'estructures és *elemental* ssi K està tancada sota ultraproductes, còpies isomorfes i el complement de K està tancat sota ultrapotències. En aquesta secció aplicarem aquest resultat conjuntament amb el Teorema 3.27 per a demostrar que les classes elementals en lògica sense identitat són les classes elementals (en el sentit habitual) que estan tancades sota $\mathbf{H_S}$ i $\mathbf{H_S^{-1}}$, Teorema 4.1. Aquest resultat ens ofereix una caracterització algebraica de les classes L^--elementals.

Les classes elementals poder ésser caracteritzades d'altres formes, com les classes tancades sota subestructures elementals, ultraproductes i còpies isomorfes, Teorema 2.16 del Capítol V de [BS81], o com les classes tancades sota ultraproductes i equivalència elemental, Teorema 4.1.12 de [CK91]. Arguments similars es poden dur a terme per a obtenir els resultats corresponents per a lògica sense identitat, Teorema 4.2.1 de [Elg94]. Però cap d'aquestes altres caracteritzacions són purament algebraiques. Creiem que és especialment important una caracterització algebraica, perquè té com a conseqüència un teorema de preservació per als enunciats sense identitat, en el qual no apareixen operadors poc naturals, des del punt de vista de la pràctica matemàtica, com ara l'operador $\mathbf{S}^{\preceq^-}$. És un resultat conegut que, un enunciat sense identitat es preserva sota $\mathbf{H_S}$ i sota $\mathbf{H_S^{-1}}$. En el Corol.lari 4.2 es demostra la inversa: tot enunciat de primer ordre que es preserva sota $\mathbf{H_S}$ i sota $\mathbf{H_S^{-1}}$ és equivalent a un enunciat sense identitat. Considerem aquest resultat una de les contribucions més importants d'aquesta tesi doctoral.

Teorema 4.1 *Sigui K una classe de L-estructures. Els enunciats següents són equiv-*

alents:

i) K *és axiomatitzable per un conjunt d'enunciats sense identitat.*

ii) K *està tancada sota ultraproductes,* $\mathbf{H_S}$ *i* $\mathbf{H_S^{-1}}$ *i per a tota* L*-estructura* $\mathfrak{A}$*: si alguna ultrapotència de* $\mathfrak{A}$ *pertany a* K*, llavors* $\mathfrak{A} \in K$*.*

Demostració. i) $\Rightarrow$ ii) és clar. ii) $\Rightarrow$ i) Mostrarem que, si $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^-(K)$, llavors $\mathfrak{A} \in K$. Suposem que $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^-(K)$. Com que $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^-(K)$, per a tota $\sigma \in \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ hi ha $\mathfrak{B}_\sigma \in K$ tal que $\mathfrak{B}_\sigma \models \sigma$. Sigui $I = \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ i considerem per a tota $\sigma \in \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ el conjunt $J_\sigma = \{\beta \in I : \beta \models \sigma\}$. Com que $J = \{J_\sigma : \sigma \in I\}$ té la propietat de la intersecció finita, el podem estendre a un ultrafiltre propi U sobre I. Sigui $\mathfrak{B} = \prod_{\sigma \in I} \mathfrak{B}_\sigma / U$. Observem que $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. Com que K està tancada sota ultraproductes, $\mathfrak{B} \in K$. Pel Teorema 3.27, hi ha $\mathfrak{C} \succeq \mathfrak{A}$ i $\mathfrak{D} \succeq \mathfrak{B}$ tals que $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{D}$. Per tant, per la Proposició 2.17, $\mathfrak{C}^* \cong \mathfrak{D}^*$. Per suposició K està tancada sota ultraproductes i còpies isomorfes i el complement de K està tancat sota ultrapotències. Per tant, K és una classe elemental. Així, com que $\mathfrak{B} \in K$ i $\mathfrak{D} \succeq \mathfrak{B}$, tenim que $\mathfrak{D} \in K$. Donat que K està tancada sota $\mathbf{H_S}$, $\mathfrak{D}^* \in K$. En conseqüència, $\mathfrak{C}^* \in K$, ja que K està tancada sota $\mathbf{H_S^{-1}}$, $\mathfrak{C} \in K$. Com que $\mathfrak{C} \succeq \mathfrak{A}$, podem concloure que $\mathfrak{A} \in K$. □

Corol.lari 4.2 *Sigui* $T \cup \{\sigma\}$ *un conjunt d'enunciats de tipus* L*. Llavors:*

i) T *és axiomatitzable per un conjunt d'enunciats sense identitat ssi* T *es preserva sota* $\mathbf{H_S}$ *i* $\mathbf{H_S^{-1}}$*.*

ii) σ *és lògicament equivalent a un enunciat sense identitat ssi* σ *es preserva sota* $\mathbf{H_S}$ *i* $\mathbf{H_S^{-1}}$*.*

Demostració. i) La implicació d'esquerra a dreta és clara. Per a demostrar l'altra implicació observem que, com que T és un conjunt d'enunciats de primer ordre, $\mathrm{Mod}(T)$ està tancada sota $\mathbf{P_U}$ i si alguna ultrapotència de $\mathfrak{A}$ pertany a $\mathrm{Mod}(T)$, llavors $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(T)$. A més a més, com que T es preserva sota $\mathbf{H_S}$ i $\mathbf{H_S^{-1}}$, $\mathrm{Mod}(T)$ està tancada sota $\mathbf{H_S}$ i $\mathbf{H_S^{-1}}$. Pel Teorema 4.1, T pot ser axiomatitzada per un conjunt d'enunciats sense identitat.

ii) La implicació d'esquerra a dreta és clara. Demostrem l'altra implicació. Per i) hi ha un conjunt d'enunciats sense identitat Γ tal que $\mathrm{Mod}(\Gamma) = \mathrm{Mod}(\sigma)$. Per compacitat, hi ha un conjunt finit $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma_0 \models \sigma$. Llavors, σ és lògicament equivalent a $\bigwedge \Gamma_0$. □

Fent servir ultrafiltre-productes i ultrafiltre-potències podem reescriure el Teorema 4.1 de la manera següent:

Teorema 4.3 *Sigui K una classe de L-estructures. Els enunciats següents són equivalents:*

i) *K és axiomatitzable per un conjunt d'enunciats sense identitat.*

ii) *K està tancada sota ultrafiltre-productes, $\mathbf{H_S}$ i $\mathbf{H_S^{-1}}$ i per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$: si alguna ultrafiltre-potència de $\mathfrak{A}$ pertany a K, llavors $\mathfrak{A} \in K$.*

Demostració. Pel Teorema 4.1. $\square$

El Teorema 3.40 ens permet obtenir una nova caracterització de les classes elementals en lògica sense identitat, encara que restringida a tipus de semblança relacionals.

Teorema 4.4 *Sigui L un tipus de semblança relacional i K una classe de L-estructures. Llavors, els enunciats següents són equivalents:*

i) *K és axiomatitzable per un conjunt d'enunciats sense identitat.*

ii) a) *K està tancada sota ultrafiltre-productes i imatges isomorfes.*

  b) *per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$, si alguna ultrafiltre-potència de $\mathfrak{A}$ pertany a K, llavors $\mathfrak{A} \in K$.*

  c) *per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$ amb només un element, $\mathfrak{A} \in K$ ssi hi ha $\mathfrak{B} \in \mathbf{H_S^{-1}}(\mathfrak{A})$ tal que $\mathfrak{B} \in K$ i $|B| \geq 2$.*

Demostració. Que i) implica les condicions a) i b) de ii) és clar. També implica la condició c), perquè K està tancada sota $\mathbf{H_S^{-1}}$ i $\mathbf{H_S}$. Ara suposem que es dóna ii). Raonant com en la demostració del Teorema 4.1, però ara fent servir ultrafiltre-productes en lloc d'ultraproductes, és suficient mostrar que $\mathfrak{A} \in K$ sota la hipòtesi que $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$, per a alguna $\mathfrak{B} \in K$. Si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ tenen si més no dos elements, això se segueix del Teorema 3.40. Si $\mathfrak{A}$ és una estructura amb només un element i $\mathfrak{B}$ no ho és, pel Lema 3.41, $\mathfrak{B} \in \mathbf{H_S^{-1}}(\mathfrak{A})$ i llavors, per la condició c) de la hipòtesi, obtenim $\mathfrak{A} \in K$. Ara, si $\mathfrak{B}$ és una estructura amb només un element i $\mathfrak{A}$ no ho és, com que $\mathfrak{B} \in K$, hi ha, per c), $\mathfrak{C} \in K$ amb si més no dos elements tal que $\mathfrak{C} \in \mathbf{H_S^{-1}}(\mathfrak{B})$. Però llavors $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{C}$ i podem raonar com en el primer cas. Finalment, observem que, si ambdues estructures tenen només un element, com que són equivalents en lògica sense identitat, han de ser isomorfes. $\square$

Els exemples següents mostren que la condició c) del Teorema 4.4 no es pot eliminar.

Exemple 4.5 Sigui $L = \{P\}$, on P és un símbol relacional monàdic. Sigui K_1 la classe de totes les L-estructures amb només un element i sigui K_2 la classe de totes les L-estructures amb si més no dos elements. K_1 i K_2 no són axiomatitzables per un conjunt d'enunciats sense identitat. Ambdues satisfan a) i b) del Teorema 4.4. Però K_1 no satisfà la implicació d'esquerra a dreta en la condició c) i K_2 no satisfà la implicació de dreta a esquerra en aquesta condició.

Finalment, fent servir les estructures $\mathfrak{A}(\lambda)$ introduïdes en els Preliminars donarem altres caracteritzacions de les classes elementals en L^-, per a tipus de semblança relacionals.

Teorema 4.6 *Sigui L un tipus de semblança relacional i K una classe de L-estructures. Els enunciats següents són equivalents:*

i) *K és axiomatitzable per un conjunt d'enunciats sense identitat.*

ii) a) *K està tancada sota ultraproductes, còpies isomorfes i, per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$: si alguna ultrapotència de $\mathfrak{A}$ pertany a K, llavors $\mathfrak{A} \in K$.*

b) *per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \in K$ ssi $\mathfrak{A}(\omega) \in K$.*

Demostració. Que i) implica les condicions a) i b) de ii) és clar perquè $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{A}(\omega)$. Suposem que ii) val. Raonant com en la demostració del Teorema 4.1, en tenim prou amb mostrar que $\mathfrak{A} \in K$, sota la hipòtesi que $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$ per a alguna $\mathfrak{B} \in K$. Com que $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$, pel Teorema 3.24, $\mathfrak{A}(\omega) \equiv \mathfrak{B}(\omega)$ i pel Teorema de les ultrapotències de Keisler i Shelah per a lògica amb identitat, $(\mathfrak{A}(\omega))^U \cong (\mathfrak{B}(\omega))^U$ per a algun ultrafiltre propi U. Per b), com que $\mathfrak{B} \in K$, $\mathfrak{B}(\omega) \in K$ i per a), $(\mathfrak{B}(\omega))^U \in K$. Per tant, per a), $(\mathfrak{A}(\omega))^U \in K$ i altre cop per a), $\mathfrak{A}(\omega) \in K$. Finalment, per b), $\mathfrak{A} \in K$. □

El Teorema 4.6 el podem reescriure així:

Teorema 4.7 *Sigui L un tipus de semblança relacional i K una classe de L-estructures. Els enunciats següents són equivalents:*

i) *K és axiomatitzable per un conjunt d'enunciats sense identitat.*

ii) *K és una classe elemental tal que, per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$,*

$$\mathfrak{A} \in K \quad \textit{ssi} \quad \mathfrak{A}(\omega) \in K.$$

Demostració. Pel Teorema 4.6. □

Fem servir ara les estructures $\mathfrak{A}(\omega)$ i els ultrafiltre-productes junts, per a donar una darrera caracterització de les classes elementals, en lògica sense identitat, per a tipus de semblança relacionals.

Teorema 4.8 *Sigui L un tipus de semblança relacional i K una classe de L-estructures. Els enunciats següents són equivalents:*

i) *K és axiomatitzable per un conjunt d'enunciats sense identitat.*

ii) a) *K està tancada sota ultrafiltre-productes i imatges isomorfes i, per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$, si alguna ultrafiltre-potència de $\mathfrak{A}$ pertany a K, llavors $\mathfrak{A} \in K$.*

b) *per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \in K$ ssi $\mathfrak{A}(\omega) \in K$.*

Demostració. Que i) implica les condicions a) i b) de ii) és clar perquè $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{A}(\omega)$. Suposem que ii) val. Raonant com en la demostració del Teorema 4.1, però ara fent servir ultrafiltre-productes en lloc d'ultraproductes, n'hi ha prou a mostrar que $\mathfrak{A} \in K$ sota la hipòtesi que $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$, per a alguna $\mathfrak{B} \in K$. Com que $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}(\omega) \equiv^- \mathfrak{B}(\omega)$ i pel Teorema 3.40, $\prod^U \mathfrak{A}(\omega) \cong \prod^U \mathfrak{B}(\omega)$ per a algun ultrafiltre propi U. Per tant, per b), com que $\mathfrak{B} \in K$, $\mathfrak{B}(\omega) \in K$ i per a), $\prod^U \mathfrak{B}(\omega) \in K$. Per tant, per a), $\prod^U \mathfrak{A}(\omega) \in K$ i altre cop per a), $\mathfrak{A}(\omega) \in K$. Finalment, per b), $\mathfrak{A} \in K$. □

Podem treure la conseqüència següent del nostre darrer teorema de caracterització per a classes elementals a L^-, en tipus de semblança relacionals:

Corol.lari 4.9 *Sigui L un tipus de semblança relacional i sigui $T \cup \{\sigma\}$ un conjunt d'enunciats de tipus L. Llavors:*

i) *T és axiomatitzable per un conjunt d'enunciats sense identitat ssi per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models T$ ssi $\mathfrak{A}(\omega) \models T$.*

ii) *σ és lògicament equivalent a un enunciat sense identitat ssi per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models \sigma$ ssi $\mathfrak{A}(\omega) \models \sigma$.*

Demostració. La demostració és anàloga a la del Corol.lari 4.2, però fent servir el Teorema 4.7 enlloc del Teorema 4.1. □

4.2 Alguns fragments de L^-

En aquesta secció demostrarem teoremes de preservació i de caracterització per als fragments següents de la lògica sense identitat: universal, universal-atòmic, universal-existencial, positiu i Horn. Com a referència es pot consultar [BS81], [CK91] i [Hod93b].

A [Bir35] G. Birkhoff va demostrar que les classes d'àlgebres definides per identitats eren precisament aquelles que estaven tancades sota **H**, **S** i **P**. Aquí obtindrem un resultat anàleg a aquest teorema per a lògica sense identitat. Es diu que $\phi \in L$ és una *fórmula universal-atòmica* si $\phi = \forall \overline{x} \psi$, per a alguna fórmula atòmica ψ. Fixada una classe K de L-estructures designem amb $\mathrm{Th}^{\mathrm{At}^-}(K)$ el conjunt

$$\mathrm{Th}^{\mathrm{At}^-}(K) = \{\sigma \in \mathrm{Th}^-(K) : \sigma \text{ és universal-atòmica}\}.$$

Diem que una estructura és *trivial* si té només un element i en ella totes les interpretacions dels símbols relacionals són diferents del buit. Observem que en tota estructura trivial tots els enunciats universal-atòmics són vertaders.

Lema 4.10 *Si $\mathfrak{A}$ és una L-estructura trivial, llavors per a tota L-estructura $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \in$* $\mathbf{H}(\mathfrak{B})$.

Demostració. És senzill mostrar que la funció $h : B \to A$ definida per:

$$h(b) = a,$$

per a tot $b \in B$, és un homomorfisme. $\square$

We will show that, for every L-structure $\mathfrak{A}$, if $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^{\mathrm{At}^-}(M)$, then $\mathfrak{A} \in K$. Suppose that $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^{\mathrm{At}^-}(M)$ and let $T = \mathsf{negdiag}^-(\mathfrak{A})$. We can distinguish two cases. Case I: $T = \emptyset$. In this case $\mathfrak{A}^*$ is a trivial structure. Since all the trivial structures are isomorphic, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}(\mathfrak{A}^*)$ and M contains a trivial structure, we have that $\mathfrak{A} \in K$.

Case II: $T \neq \emptyset$. For every $\neg\phi \in T$, if t

Teorema 4.11 *Sigui K una classe de L-estructures. Els enunciats següents són equivalents:*

i) *K està axiomatitzada per un conjunt d'enunciats universals-atòmics sense identitat.*

ii) *K està tancada sota $\mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{S}$ i $\mathbf{P}$ i conté una estructura trivial.*

iii) *$K = \mathbf{H}\mathbf{H}_S^{-1}\mathbf{SP}(M)$, per a alguna classe M de L-estructures que conté una estructura trivial.*

Demostració. i) $\Rightarrow$ ii) i ii) $\Rightarrow$ iii) és clar. iii) $\Rightarrow$ i) Suposem que $K = \mathbf{H}\mathbf{H}_S^{-1}\mathbf{SP}(M)$, per a alguna classe M de L-estructures que conté una estructura trivial. Mostrarem que, per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$, si $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^{\mathrm{At}^-}(M)$, llavors $\mathfrak{A} \in K$. Suposem que $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^{\mathrm{At}^-}(M)$ i sigui $T = \mathsf{negdiag}^-(\mathfrak{A})$. Podem distingir dos casos. Casa I: $T = \emptyset$. En aquest cas $\mathfrak{A}^*$ és una estructura trivial. Atès que totes les estructures trivials són isomorfes, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}(\mathfrak{A}^*)$ i com que M conté una estructura trivial tenim que $\mathfrak{A} \in K$.

Cas II: $T \neq \emptyset$. Per a tota $\neg\phi \in T$, si les constants que apareixen a $\neg\phi$ es troben entre $a_1, \ldots, a_n$, com que $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^{\mathrm{At}^-}(M)$, hi ha $\mathfrak{B} \in M$ tal que $\mathfrak{B} \models \exists x_1 \ldots x_n \neg\phi'$, on ϕ' és obtinguda a partir de ϕ substituint per cada $1 \leq i \leq n$, la constant a_i per la x_i. Escollim, per a tota $\neg\phi \in T$, $\mathfrak{B}_{\neg\phi} \in M$ i $b_1^{\neg\phi}, \ldots, b_n^{\neg\phi} \in B_{\neg\phi}$ tals que

$$\mathfrak{B}_{\neg\phi} \models \neg\phi' \left[b_1^{\neg\phi}, \ldots, b_n^{\neg\phi}\right].$$

Sigui $\mathfrak{B} = \prod_{\neg\phi\in T} \mathfrak{B}_{\neg\phi}$. Definim, per a tot $a \in A$, un element $\hat{a} \in B$ per:

$$\hat{a}(\neg\phi) = \begin{cases} b_i^{\neg\phi}, & \text{si } a \in \{a_1, \ldots, a_n\} \text{ i } a = a_i, \\ \text{arbitrari}, & \text{altrament}, \end{cases}$$

per a tota $\neg\phi \in T$. Tenim que $(\mathfrak{B}, \hat{a})_{a\in A}$ és una expansió de $\mathfrak{B}$ que satisfà el $\mathsf{negdiag}^-(\mathfrak{A})$. Per tant, per la Proposició 2.28, $\mathfrak{A} \in \mathbf{HH}_S^{-1}\mathbf{S}(\mathfrak{B})$. Com que $\mathfrak{B} \in \mathbf{P}(M)$ i $K = \mathbf{HH}_S^{-1}\mathbf{SP}(M)$, $\mathfrak{A} \in K$. □

Corol.lari 4.12 *Sigui T un conjunt consistent d'enunciats de L i σ un enunciat consistent de L tal que $\not\models \sigma$. Llavors:*

i) *T està axiomatitzat per un conjunt d'enunciats universals-atòmics sense identitat ssi T es preserva sota $\mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{S}$ i $\mathbf{P}$.*

ii) *σ és lògicament equivalent a una conjunció finita d'enunciats universal-atòmics sense identitat ssi σ es preserva sota $\mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{S}$ i $\mathbf{P}$.*

Demostració. Pel Teorema 4.11 fent servir una demostració anàloga a la demostració del Corol.lari 4.2. □

Trivialment podem trobar un enunciat consistent σ tal que $\not\models \sigma$, σ es preserva sota $\mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{S}$ i $\mathbf{P}$, però σ no és lògicament equivalent a cap enunciat universal-atòmic sense identitat. Sigui $L = \{P, Q\}$, on P i Q són símbols relacionals monàdics, i $\sigma = \forall x Px \wedge \forall x Qx$.

El teorema de caracterització per al fragment positiu de la lògica de primer ordre amb identitat és degut a R. C. Lyndon, podem trobar-lo a [Lyn59]. Ara n'obtindrem una versió per a llenguatges sense identitat. Considerem ara només fórmules construïdes a partir de les atòmiques i negacions d'atòmiques, fent servir únicament les connectives $\wedge$, $\vee$ i els quantificadors $\forall$, $\exists$.

Donat un símbol s (s pot pertànyer a L o pot ser el símbol d'identitat) i una fórmula ϕ de L, diem que s apareix *positivament* a ϕ ssi s té una aparició a ϕ, que no es troba en l'abast d'un símbol de negació. I diem que s apareix *negativament* a ϕ ssi s té una aparició a ϕ, que es troba en l'abast d'un símbol de negació.

Donada una fórmula $\phi \in L$, sigui $Rel(\phi)$ ($Fun(\phi)$) el conjunt dels símbols relacionals (funcionals) de L que apareixen a ϕ, i sigui $Rel^+(\phi)$ ($Rel^-(\phi)$) el conjunt dels símbols de $Rel(\phi)$ que apareixen positivament (negativament) a ϕ.

A [Mot84] podem trobar la següent versió estesa del Teorema d'interpolació de Lyndon, deguda a A. Oberschelp i T. Fujiwara.

Teorema 4.13 *Suposem que ϕ i ψ són enunciats de L tals que $\phi \models \psi$, $\not\models \neg\phi$ i $\not\models \psi$. Llavors, hi ha un enunciat θ de L tal que:*

i) $\phi \models \theta$ *i* $\theta \models \psi$.

ii) $Rel^+(\theta) \subseteq Rel^+(\phi) \cap Rel^+(\psi)$ *i* $Rel^-(\theta) \subseteq Rel^-(\phi) \cap Rel^-(\psi)$.

iii) $Fun(\theta) \subseteq Fun(\phi) \cap Fun(\psi)$.

iv) *Si θ té com a mínim una aparició positiva (negativa) del símbol d'identitat, llavors ϕ (ψ, respectivament) té com a mínim una aparició positiva (negativa) del símbol d'identitat.*

Diem que $\phi \in L$ és una *fórmula positiva* si ϕ està construïda a partir de les fórmules atòmiques, fent servir només les connectives $\wedge$, $\vee$ i els quantificadors $\forall$, $\exists$. Recordem el teorema de caracterització per al fragment positiu de la lògica amb identitat.

Teorema 4.14 *Si K és una classe de L-estructures, els enunciats següents són equivalents:*

i) *K està axiomatitzada per un conjunt d'enunciats positius.*

ii) *K està tancada sota $\mathbf{P_U}$, $\mathbf{H}$ i per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$, si alguna ultrapotència de $\mathfrak{A}$ pertany a K, llavors $\mathfrak{A} \in K$.*

Ara demostrarem la versió següent per a lògica sense identitat.

Teorema 4.15 *Si K és una classe no buida de L-estructures, els enunciats següents són equivalents:*

i) *K està axiomatitzada per un conjunt d'enunciats positius sense identitat.*

ii) *K està tancada sota $\mathbf{P_U}$, $\mathbf{H}$ i $\mathbf{H_S^{-1}}$ i per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$, si alguna ultrapotència de $\mathfrak{A}$ pertany a K, llavors $\mathfrak{A} \in K$.*

Demostració. i) $\Rightarrow$ ii) és clar. ii) $\Rightarrow$ i) Com que K està tancada sota $\mathbf{H}$, K està també tancada sota $\mathbf{H_S}$. Per tant, per ii) i pel Teorema 4.1, K està axiomatitzada per un conjunt d'enunciats sense identitat Γ. A més a més, per ii) i pel Teorema 4.14, K

està axiomatitzada per un conjunt d'enunciats positius Σ (possiblement amb identitat). Com que $\Gamma \models \Sigma$, per a tota $\sigma \in \Sigma$ tal que $\not\models \sigma$ podem escollir $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$ tals que

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \sigma.$$

Sigui $\alpha_\sigma = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$; tenim que $\alpha_\sigma \models \sigma$ i α_σ és un enunciat sense identitat. A més a més, $\not\models \neg\alpha_\sigma$, perquè K no és buida. Per tant, hi ha un enunciat $\theta_\sigma \in L$ que satisfà les condicions i) – iv) del Teorema 4.13. Observem que, per la condició iv), com que a α_σ no apareix el símbol d'identitat, a θ_σ no apareix el símbol d'identitat positivament. A més a més, com que σ és positiva, a θ_σ el símbol d'identitat no apareix negativament. Llavors, podem concloure que θ_σ és un enunciat sense identitat i per la condició ii), com que σ és positiva,

$$Rel^-(\theta_\sigma) \subseteq Rel^-(\alpha_\sigma) \cap Rel^-(\sigma) = Rel^-(\alpha_\sigma) \cap \emptyset = \emptyset.$$

Llavors θ_σ és un enunciat positiu. Així, $\{\theta_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ és un conjunt d'enunciats positius sense identitat que axiomatitza K. $\square$

Corol.lari 4.16 *Sigui T un conjunt consistent d'enunciats de L i σ un enunciat consistent de L. Llavors:*

i) *T està axiomatitzada per un conjunt d'enunciats positius sense identitat ssi T es preserva sota $\mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}$ i $\mathbf{H}$.*

ii) *σ és lògicament equivalent a un enunciat positiu sense identitat ssi σ es preserva sota $\mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}$ i $\mathbf{H}$.*

Demostració. Pel Teorema 4.15, fent servir una demostració anàloga a la demostració del Corol.lari 4.2 i el fet que una conjunció finita d'enunciats positius és un enunciat positiu. $\square$

A [Tar54], A. Tarski va donar un teorema de caracterització pel fragment universal de la lògica de primer ordre amb identitat. A [Łoś55], J. Łoś el va generalitzar. Obtindrem ara un anàleg per a lògica sense identitat. Es diu que $\phi \in L$ és una *fórmula universal* si $\phi = \forall\overline{x}\psi$, per a alguna fórmula sense quantificadors ψ. Fixada una classe K de L-estructures designem amb $\mathrm{Th}^{\forall^-}(K)$ el conjunt

$$\mathrm{Th}^{\forall^-}(K) = \{\sigma \in \mathrm{Th}^-(K) : \sigma \text{ és universal}\}.$$

Teorema 4.17 *Sigui K una classe de L-estructures. Els enunciats següents són equivalents:*

i) *K està axiomatitzada per un conjunt d'enunciats universals sense identitat.*

ii) *K està tancada sota $\mathbf{H_S^{-1}}$, $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{S}$ i $\mathbf{P_U}$.*

iii) *$K = \mathbf{H_S H_S^{-1} S P_U}(M)$, per a alguna classe M de L-estructures.*

Demostració. i) $\Rightarrow$ ii) i ii) $\Rightarrow$ iii) és clar. iii) $\Rightarrow$ i) Suposem que $K = \mathbf{H_S H_S^{-1} S P_U}(M)$, per a alguna classe M de L-estructures. Mostrarem que, per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$, si $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^{\forall^-}(M)$, llavors $\mathfrak{A} \in K$. Suposem que $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^{\forall^-}(M)$ i sigui $T = \mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$. Per a tot subconjunt finit $\Gamma \subseteq T$, si les constants que apareixen als enunciats de Γ es troben entre $a_1, \ldots, a_n$, com que $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^{\forall^-}(K)$, hi ha $\mathfrak{B} \in M$ tal que $\mathfrak{B} \models \exists x_1 \ldots x_n \bigwedge \Gamma'$, on Γ' es pot obtenir a partir de Γ substituint per a cada $1 \leq i \leq n$, la constant a_i per la variable x_i. Escollim, per a tot subconjunt finit $\Gamma \subseteq T$, $\mathfrak{B}_\Gamma \in M$ i $b_1^\Gamma, \ldots, b_n^\Gamma \in B_\Gamma$ tals que

$$\mathfrak{B}_\Gamma \models \bigwedge \Gamma' \left[b_1^\Gamma, \ldots, b_n^\Gamma\right].$$

Sigui $I = \{\Gamma \subseteq T : \Gamma \text{ finit}\}$ i per a tot $\Gamma \in I$, $J_\Gamma = \{\Delta \in I : \Gamma \subseteq \Delta\}$. Com que $J = \{J_\Gamma : \Gamma \in I\}$ té la propietat de la intersecció finita, el podem estendre a un ultrafiltre propi U sobre I. Sigui $\mathfrak{B} = \prod_{\Gamma \in I} \mathfrak{B}_\Gamma / U$, clarament $\mathfrak{B} \in \mathbf{P_U}(M)$. Definim, per a tot $a \in A$, un element $\hat{a} \in \prod_{\Gamma \in I} B_\Gamma$ per:

$$\hat{a}(\Gamma) = \begin{cases} b_i^\Gamma, & \text{si } a \in \{a_1, \ldots, a_n\} \text{ i } a = a_i, \\ \text{arbitrari}, & \text{altrament}, \end{cases}$$

per a tot $\Gamma \in I$. Llavors $(\mathfrak{B}, [\hat{a}]_U)_{a \in A}$ és una expansió de $\mathfrak{B}$ que satisfà el $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$. Per tant, per la Proposició 2.20, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S^{-1} H_S S}(\mathfrak{B})$. Com que $\mathfrak{B} \in \mathbf{P_U}(M)$ i $K = \mathbf{H_S^{-1} H_S S P_U}(M)$, llavors $\mathfrak{A} \in K$. □

Corol.lari 4.18 *Sigui $T \cup \{\sigma\}$ un conjunt d'enunciats de L. Llavors:*

i) *T està axiomatitzada per un conjunt d'enunciats universals sense identitat ssi T es preserva sota $\mathbf{H_S^{-1}}$, $\mathbf{H_S}$ i $\mathbf{S}$.*

ii) *σ és lògicament equivalent a un enunciat universal sense identitat ssi σ es preserva sota $\mathbf{H_S^{-1}}$, $\mathbf{H_S}$ i $\mathbf{S}$.*

Demostració. Pel Teorema 4.17 fent servir una demostració anàloga a la demostració del Corol.lari 4.2 i el fet que una conjunció finita d'enunciats universals és equivalent a un enunciat universal. □

Les teories que es preserven sota unions de cadenes van ser caracteritzades per J. Loś i R. Suszko a [LS55], C. C. Chang va millorar aquest resultat a [Cha59]. Vegem ara un teorema anàleg per a lògica sense identitat. Es diu que $\phi \in L$ és una *fórmula* *universal-existencial* si $\phi = \forall\overline{y}\exists\overline{x}\psi$, per a alguna fórmula sense quantificadors ψ. Fixada una classe K de L-estructures, designem amb $\mathrm{Th}^{\forall\exists^-}(K)$ el conjunt

$$\mathrm{Th}^{\forall\exists^-}(K) = \{\sigma \in \mathrm{Th}^-(K) : \sigma \text{ és universal-existencial}\}.$$

Fixada una L-estructura $\mathfrak{A}$, expandim el llenguatge afegint un nou símbol constant per a cada element de A. Designem amb $\mathsf{univdiag}^-(\mathfrak{A})$ el conjunt d'enunciats del llenguatge expandit següent,

$$\mathsf{univdiag}^-(\mathfrak{A}) = \{\sigma \in L^-(A) : \sigma \text{ és un enunciat universal i } \mathfrak{A}_A \models \sigma\}.$$

Lema 4.19 *Suposem que $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són L-estructures tals que tot enunciat universal-existencial sense identitat vertader a $\mathfrak{B}$ també és vertader a $\mathfrak{A}$. Llavors, hi ha L-estructures $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{D}$ tals que*

i) $\mathfrak{A}^* \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{D}^*$.

ii) $\mathfrak{A}^* \preceq^- \mathfrak{D}^*$.

iii) $\mathfrak{B} \equiv^- \mathfrak{C}$.

Demostració. Expandim el llenguatge introduint un conjunt de noves constants $C_A = \{c_a : a \in A\}$ i considerem el conjunt $\Gamma = \mathrm{Th}^-(\mathfrak{B}) \cup \mathsf{univdiag}^-(\mathfrak{A})$ d'enunciats en el llenguatge expandit. Primer mostrem que Γ és consistent. Altrament, com que una conjunció de fórmules universals és equivalent a una fórmula universal, hi hauria una fórmula $\forall\overline{x}\psi(c_{a_1}, \dots, c_{a_l}) \in \mathsf{univdiag}^-(\mathfrak{A})$ tal que

$$\mathrm{Th}^-(\mathfrak{B}) \models \neg\forall\overline{x}\psi(c_{a_1}, \dots, c_{a_l})$$

on $c_{a_1}, \dots, c_{a_l}$ són totes les noves constants que apareixen a $\neg\forall\overline{x}\psi(c_{a_1}, \dots, c_{a_l})$. Com que les constants $c_{a_1}, \dots, c_{a_l}$ no apareixen en els enunciats de $\mathrm{Th}^-(\mathfrak{B})$, si $y_1, \dots, y_l$ són variables que no apareixen a $\forall\overline{x}\psi(c_{a_1}, \dots, c_{a_l})$ i substituïm per a tot $i = 1, \dots, l$ la constant c_{a_i} per la variable y_i,

$$\mathrm{Th}^-(\mathfrak{B}) \models \forall y_1 \dots y_l \exists\overline{x}\neg\psi$$

i llavors,

$$\mathfrak{B} \models \forall y_1 \dots y_l \exists\overline{x}\neg\psi.$$

Per suposició, qualsevol enunciat universal-existencial sense identitat vertader a $\mathfrak{B}$ també és vertader a $\mathfrak{A}$. En conseqüència,

$$\mathfrak{A} \models \forall y_1 \dots y_l \exists\overline{x}\neg\psi,$$

però això és absurd, perquè $\forall\overline{x}\psi(c_{a_1}, \dots, c_{a_l}) \in \mathsf{univdiag}^-(\mathfrak{A})$.

Sigui $(\mathfrak{B}', c^{\mathfrak{B}'})_{c \in C_A}$ un model de Γ. Tenim que $\mathfrak{B} \equiv^- \mathfrak{B}'$. Ara expandirem més el llenguatge afegint un conjunt

$$C_{B'} = \left\{ c_b : b \in B' - \left\{ c^{\mathfrak{B}'} : c \in C_A \right\} \right\}$$

de nous símbols constants, un conjunt que sigui disjunt amb $C_A \cup L$. Considerem $\mathsf{eldiag}^-(\mathfrak{A})$, el diagrama elemental sense identitat de $\mathfrak{A}$ en el llenguatge expandit $L \cup C_A$ i $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{B}')$, el diagrama sense identitat de $\mathfrak{B}'$ en el llenguatge expandit $L \cup C_A \cup C_{B'}$. Sigui Σ la unió d'aquests dos diagrames. Mostrarem que Σ és consistent. Altrament, hi hauria fórmules

$$\phi_1(c_{b_1}, \ldots, c_{b_k}), \ldots, \phi_n(c_{b_1}, \ldots, c_{b_k}) \in \mathsf{diag}^-(\mathfrak{B}'),$$

amb $b_1, \ldots, b_k \in B' - \left\{ c^{\mathfrak{B}'} : c \in C_A \right\}$ i tals que

$$\mathsf{eldiag}^-(\mathfrak{A}) \models \neg\phi_1 \vee \ldots \vee \neg\phi_n(c_{b_1}, \ldots, c_{b_k}),$$

on $c_{b_1}, \ldots, c_{b_k}$ són totes les noves constants que apareixen a la fórmula $\neg\phi_1 \vee \ldots \vee \neg\phi_n(c_{b_1}, \ldots, c_{b_k})$. Com que les constants $c_{b_1}, \ldots, c_{b_k}$ no apareixen als enunciats de $\mathsf{eldiag}^-(\mathfrak{A})$, si $y_1, \ldots, y_k$ són variables que no apareixen a $\neg\phi_1 \vee \ldots \vee \neg\phi_n(c_{b_1}, \ldots, c_{b_k})$ i substituïm per a tot $i = 1, \ldots, k$ la constant c_{b_i} per la variable y_i,

$$\mathsf{eldiag}^-(\mathfrak{A}) \models \forall y_1 \ldots y_k(\neg\phi_1 \vee \ldots \vee \neg\phi_n)$$

i llavors,

$$(\mathfrak{A}, a)_{a \in A} \models \forall y_1 \ldots y_k(\neg\phi_1 \vee \ldots \vee \neg\phi_n).$$

Com que $(\mathfrak{B}', c^{\mathfrak{B}'})_{c \in C_A}$ és un model de $\mathsf{univdiag}^-(\mathfrak{A})$,

$$(\mathfrak{B}', c^{\mathfrak{B}'})_{c \in C_A} \models \forall y_1 \ldots y_k(\neg\phi_1 \vee \ldots \vee \neg\phi_n),$$

però això és absurd, perquè

$$\phi_1(c_{b_1}, \ldots, c_{b_k}), \ldots, \phi_n(c_{b_1}, \ldots, c_{b_k}) \in \mathsf{diag}^-(\mathfrak{B}').$$

Sigui $(\mathfrak{D}, c^{\mathfrak{D}})_{c \in C_A \cup C_{B'}}$ un model de Σ. D'una banda, com que $(\mathfrak{D}, c^{\mathfrak{D}})_{c \in C_A \cup C_{B'}}$ és un model de $\mathsf{eldiag}^-(\mathfrak{A})$, per la Proposició 2.26, $\mathfrak{A}^* \precsim^- \mathfrak{D}^*$ i, fent servir els arguments usuals, és senzill mostrar que la funció $h : \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{D}^*$ definida per:

$$h([a]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = \left[c_a^{\mathfrak{D}} \right]_{\Omega(\mathfrak{D})},$$

per a tot $a \in A$, és una immersió que preserva les fórmules sense identitat. Podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que per a tot $a \in A$,

$$[a]_{\Omega(\mathfrak{A})} = \left[c_a^{\mathfrak{D}} \right]_{\Omega(\mathfrak{D})}.$$

Sigui $\mathfrak{C}$ la subestructura de $\mathfrak{D}^*$ generada pel conjunt

$$\left\{\left[c^{\mathfrak{D}}\right]_{\Omega(\mathfrak{D})} : c \in C_A \cup C_{B'}\right\}.$$

Llavors, tenim que $\mathfrak{A}^* \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{D}^*$ i $\mathfrak{A}^* \preceq^- \mathfrak{D}^*$.

D'altra banda, com que tots els enunciats de $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{B}')$ són sense identitat,

$$(\mathfrak{D}^*, \left[c^{\mathfrak{D}}\right]_{\Omega(\mathfrak{D})})_{c \in C_A \cup C_{B'}}$$

també és un model de $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{B}')$. Així, per la demostració de iii) $\Rightarrow$ iv) en la Proposició 2.20, $\mathfrak{B}' \sim \mathfrak{C}$ i, en conseqüència, $\mathfrak{B} \equiv^- \mathfrak{C}$. Així definits, els models $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{D}$ satisfan les condicions exigides. □

Fixada una classe K d'estructures, es diu que un subconjunt $X \subseteq K$ és un sub*conjunt dirigit superiorment* si per a cada dues estructures $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in X$, hi ha una estructura $\mathfrak{C} \in X$ tal que $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$. I es diu que K està tancada sota *unions de subconjunts dirigits superiorment*, si per a tot subconjunt dirigit superiorment $X \subseteq K$, $\bigcup X \in K$.

Teorema 4.20 *Si K és una classe de L-estructures, els enunciats següents són equivalents:*

i) *K està axiomatitzada per un conjunt d'enunciats universal-existencials sense identitat.*

ii) *K està tancada sota $\mathbf{P_U}$, $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{H_S^{-1}}$ i unions de subconjunts dirigits superiorment i per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$, si alguna ultrapotència de $\mathfrak{A}$ pertany a K, llavors $\mathfrak{A} \in K$.*

iii) *K està tancada sota $\mathbf{P_U}$, $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{H_S^{-1}}$ i unions de cadenes comptables i per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$, si alguna ultrapotència de $\mathfrak{A}$ pertany a K, llavors $\mathfrak{A} \in K$.*

iv) *K està tancada sota $\mathbf{P_U}$, $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{H_S^{-1}}$ i unions de cadenes i per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$, si alguna ultrapotència de $\mathfrak{A}$ pertany a K, llavors $\mathfrak{A} \in K$.*

Demostració. i) $\Rightarrow$ ii), i) $\Rightarrow$ iii), ii) $\Rightarrow$ iii), iv) $\Rightarrow$ iii) i i) $\Rightarrow$ iv) és clar. iii) $\Rightarrow$ i) Com que K està tancada sota $\mathbf{P_U}$, $\mathbf{H_S}$ i $\mathbf{H_S^{-1}}$ i el complement de K està tancat sota ultrapotències, pel Teorema 4.1, K està axiomatitzada per un conjunt d'enunciats sense identitat T. Demostrarem que, per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$, si $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^{\forall\exists^-}(K)$, llavors $\mathfrak{A} \models T$ i, en conseqüència, $\mathfrak{A} \in K$. Suposem que $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^{\forall\exists^-}(K)$.

Primer mostrarem que hi ha una L-estructura $\mathfrak{B} \in K$, tal que tot enunciat universal-existencial sense identitat vertader a $\mathfrak{B}$ també és vertader a $\mathfrak{A}$. Expandim el llenguatge introduint un nou conjunt $C_A = \{c_a : a \in A\}$ de símbols constants i considerem el conjunt $\Gamma = T \cup \mathsf{univdiag}^-(\mathfrak{A})$ d'enunciats en el llenguatge expandit. Demostrarem primer que Γ és consistent. Si no ho fos, com que tota conjunció d'enunciats universals és lògicament equivalent a un enunciat universal, hi hauria una fórmula $\forall\overline{x}\psi(c_{a_1},\ldots,c_{a_l}) \in \mathsf{univdiag}^-(\mathfrak{A})$ tal que

$$T \models \neg\forall\overline{x}\psi(c_{a_1},\ldots,c_{a_l})$$

on $c_{a_1},\ldots,c_{a_l}$ són totes les noves constants que apareixen a $\neg\forall\overline{x}\psi(c_{a_1},\ldots,c_{a_l})$. Com que les constants $c_{a_1},\ldots,c_{a_l}$ no apareixen en els enunciats de T, si $y_1,\ldots,y_l$ són variables que no apareixen a $\neg\forall\overline{x}\psi(c_{a_1},\ldots,c_{a_l})$ i substituïm per a tot $i = 1,\ldots,l$ la constant c_{a_i} per la variable y_i,

$$T \models \forall y_1 \ldots y_l \exists\overline{x}\neg\psi.$$

Però llavors,

$$\forall y_1 \ldots y_l \exists\overline{x}\neg\psi \in \mathrm{Th}^{\forall\exists^-}(K)$$

i com que $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^{\forall\exists^-}(K)$,

$$\mathfrak{A} \models \forall y_1 \ldots y_l \exists\overline{x}\neg\psi,$$

però això és absurd, perquè $\forall\overline{x}\psi(c_{a_1},\ldots,c_{a_l}) \in \mathsf{univdiag}^-(\mathfrak{A})$. Així, podem concloure que Γ és consistent.

Sigui $(\mathfrak{B}, c^{\mathfrak{B}})_{c\in C_A}$ un model de Γ. Vegem que tot enunciat universal-existencial sense identitat vertader a $\mathfrak{B}$ també és vertader a $\mathfrak{A}$. Suposem que $\forall\overline{x}\exists\overline{y}\psi$ és un enunciat universal-existencial sense identitat vertader a $\mathfrak{B}$. Si $\mathfrak{A} \not\models \forall\overline{x}\exists\overline{y}\psi$, hi hauria $a_1,\ldots,a_l \in A$ tals que $\mathfrak{A} \models \forall\overline{y}\neg\psi\,[a_1,\ldots,a_l]$ i llavors, $\forall\overline{y}\neg\psi(c_{a_1},\ldots,c_{a_l}) \in \mathsf{univdiag}^-(\mathfrak{A})$. Això és absurd perquè $(\mathfrak{B}, c^{\mathfrak{B}})_{c\in C_A}$ és un model de $\mathsf{univdiag}^-(\mathfrak{A})$.

Ara definirem per inducció dues seqüències de models, $(\mathfrak{A}_n : n \in \omega)$ i $(\mathfrak{C}_{n+1} : n \in \omega)$ amb les propietats següents: per a tot $n \in \omega$,

a) Tot enunciat universal-existencial sense identitat vertader a $\mathfrak{B}$ també és vertader a $\mathfrak{A}_n$.

b) $\mathfrak{A}^*_n \subseteq \mathfrak{C}_{n+1} \subseteq \mathfrak{A}^*_{n+1}$.

c) $\mathfrak{A}^*_n \preceq^- \mathfrak{A}^*_{n+1}$.

d) $\mathfrak{B} \equiv^- \mathfrak{C}_{n+1}$.

Sigui $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$ i apliquem el Lema 4.19 per a obtenir $\mathfrak{A}_1$ i $\mathfrak{C}_1$. Sigui $n > 0$ i suposem inductivament que hem definit $\mathfrak{A}_n$ i $\mathfrak{C}_n$ que satisfan les condicions a) – d). Podem tornar a aplicar el Lema 4.19 per a obtenir $\mathfrak{A}_{n+1}$ i $\mathfrak{C}_{n+1}$. Sigui $\mathfrak{C} = \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{C}_n = \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{A}^*_n$. Com que $\mathfrak{B} \models T$ i per a tot $n \in \omega$, $\mathfrak{B} \equiv^- \mathfrak{C}_{n+1}$, tenim que, per a tot $n \in \omega$, $\mathfrak{C}_{n+1} \models T$. Per tant, com que, per suposició, K està tancada sota unions de cadenes comptables, $\mathfrak{C} \models T$. I com que $\mathfrak{A}^*_n \preceq^- \mathfrak{A}^*_{n+1}$, per a tot $n \in \omega$, $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}^*_0 \preceq^- \mathfrak{C}$.

Llavors com que T és un conjunt d'enunciats sense identitat, $\mathfrak{A}^* \models T$ i en conseqüència, $\mathfrak{A} \models T$. □

Corol.lari 4.21 *Sigui $T \cup \{\sigma\}$ un conjunt d'enunciats de L. Llavors,*

i) *T està axiomatitzat per un conjunt d'enunciats universal-existencials sense identitat ssi T es preserva sota $\mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}$ i $\mathbf{H}_\mathbf{S}$ i unions de cadenes.*

ii) *σ és lògicament equivalent a un enunciat universal-existencial sense identitat ssi σ es preserva sota $\mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}$ i $\mathbf{H}_\mathbf{S}$ i unions de cadenes.*

Demostració. Pel Teorema 4.20 fent servir una demostració anàloga a la demostració del Corol.lari 4.2 i el fet que tota conjunció finita d'enunciats universals-existencials és equivalent a un enunciat universal-existencial. □

Finalment, demostrarem ara un teorema de preservació per al fragment de Horn de L^-. Keisler va demostrar un teorema de preservació per als enunciats de Horn (en el cas amb identitat) fent servir la hipòtesi del continu, [Kei65], i llavors Galvin va eliminar aquesta hipòtesi, [Gal70]. Hi ha dues demostracions més d'aquest teorema, una obtinguda per Mansfield, fent servir models valorats booleanament, [Man72]. L'altra és deguda a Shelah, [She71]; ell suggereix que el teorema pot ser demostrat amb la mateixa tècnica que ell va introduir per a demostrar que dos models elementalment equivalents tenen ultrapotències isomorfes. La nostra demostració segueix les línies principals de la demostració de Keisler i Galvin. Fent servir el mateix tipus de demostració que Mansfield és possible obtenir un teorema de preservació per a teories en general, no només pels enunciats, [Dell]. Recordem ara la definició de fórmula de Horn:

Es diu que una fórmula $\phi \in L$ és una *fórmula bàsica de Horn* si ϕ és una disjunció de fórmules

$$\chi_1 \vee \ldots \vee \chi_n$$

on, com a màxim, una de les fórmules χ_i és atòmica, i la resta són negacions de fórmules atòmiques. Una *fórmula de Horn* ϕ és una fórmula construïda a partir de les fórmules de Horn bàsiques utilitzant només la connectiva $\wedge$ i els quantificadors $\forall, \exists$.

Lema 4.22 *Sigui $\mathfrak{B}$ una L-estructura, I un conjunt no buit i $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ una família de L-estructures. Els enunciats següents són equivalents:*

i) *$\mathfrak{B} \sim \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F$, per a algun filtre propi F sobre I.*

ii) *$\mathfrak{B} \sim \prod_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i$, per a algun filtre propi F sobre I.*

iii) *Hi ha enumeracions de* $\prod_{i\in I} A_i$ *i de* B, $\overline{a} = (a_j : j \in J)$ *i* $\overline{b} = (b_j : j \in J)$ *respectivament, tals que, per a tota fórmula bàsica de Horn* $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in L^-$ *i tota* $a_{j_1}, \ldots, a_{j_n} \in \prod_{i\in I} A_i$, *si per a tot* $i \in I$

$$\mathfrak{A}_i \models \phi\left[a_{j_1}(i), \ldots, a_{j_n}(i)\right],$$

llavors,

$$\mathfrak{B} \models \phi\left[b_{j_1}, \ldots, b_{j_n}\right].$$

Demostració. i) $\Leftrightarrow$ ii) és clar. ii) $\Rightarrow$ iii) Suposem que $\mathfrak{B} \sim \prod_{i\in I}^{F} \mathfrak{A}_i$. Per la Proposició 2.17, hi ha enumeracions de $\prod_{i\in I} A_i$ i de B, $\overline{a} = (a_j : j \in J)$ i $\overline{b} = (b_j : j \in J)$ respectivament, tals que

$$(\prod\nolimits_{i\in I}^{F} \mathfrak{A}_i, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

Suposem que $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ és una fórmula bàsica de Horn de L^- i $a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}$ elements de $\prod_{i\in I} A_i$ tals que per a tot $i \in I$

$$\mathfrak{A}_i \models \phi\left[a_{j_1}(i), \ldots, a_{j_n}(i)\right].$$

Llavors, com que ϕ és una fórmula de Horn,

$$\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F \models \phi\left[[a_{j_1}]_F, \ldots, [a_{j_n}]_F\right],$$

i com que ϕ és una fórmula sense identitat,

$$\prod\nolimits_{i\in I}^{F} \mathfrak{A}_i \models \phi\left[a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}\right].$$

Per tant,

$$\mathfrak{B} \models \phi\left[b_{j_1}, \ldots, b_{j_n}\right].$$

Així, val la condició iii).

iii) $\Rightarrow$ ii) Suposem que hi ha enumeracions de $\prod_{i\in I} A_i$ i de B, $\overline{a} = (a_j : j \in J)$ i $\overline{b} = (b_j : j \in J)$ respectivament, tals que val la condició iii). Fixada una seqüència $\overline{d} = a_{j_1}, \ldots, a_{j_n} \in \prod_{i\in I} A_i$, designem amb $\overline{d}(i)$ la seqüència $a_{j_1}(i), \ldots, a_{j_n}(i)$ i amb $\overline{b}_{\overline{d}}$ la corresponent seqüència de B, $b_{j_1}, \ldots, b_{j_n}$. Ara definirem, per a tot $n \in \omega$, tota seqüència $\overline{d} = a_{j_1}, \ldots, a_{j_n} \in \prod_{i\in I} A_i$ i tota fórmula atòmica sense identitat $\phi = \phi(x_1, \ldots, x_n)$, el conjunt

$$S_{\phi\overline{d}} = \left\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \phi\left[\overline{d}(i)\right]\right\}$$

i el conjunt $R = \left\{S_{\phi\overline{d}} : \mathfrak{B} \models \phi\left[\overline{b}_{\overline{d}}\right]\right\}$. Podem distingir dos casos. Cas I: $R = \emptyset$. En aquest cas, sigui $F = \{I\}$. És senzill mostrar que

$$(\prod\nolimits_{i\in I}^{F} \mathfrak{A}_i, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

Cas II: $R \neq \emptyset$. Observem que R té la propietat de la intersecció finita: suposem que $S_{\phi_1 \overline{d}_1}, \ldots, S_{\phi_k \overline{d}_k} \in R$ i que, per a tot $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k$, el conjunt de variables que apareixen a ϕ_i i el conjunt de variables que apareixen a ϕ_j són disjunts. Llavors,

$$\mathfrak{B} \models \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k \left[\overline{b}_{\overline{d}_1}, \ldots, \overline{b}_{\overline{d}_k}\right].$$

Suposem també, buscant una contradicció, que $S_{\phi_1 \overline{d}_1} \cap \ldots \cap S_{\phi_k \overline{d}_k} = \emptyset$. Llavors, per a tot $i \in I$,

$$\mathfrak{A}_i \models \neg\phi_1 \vee \ldots \vee \neg\phi_k \left[\overline{d}_1(i), \ldots, \overline{d}_k(i)\right].$$

I com que $\neg\phi_1 \vee \ldots \vee \neg\phi_k$ és una fórmula bàsica de Horn sense identitat, per iii),

$$\mathfrak{B} \models \neg\phi_1 \vee \ldots \vee \neg\phi_k \left[\overline{b}_{\overline{d_1}}, \ldots, \overline{b}_{\overline{d_k}}\right],$$

però això és absurd. Per tant podem concloure que R té la propietat de la intersecció finita.

Sigui ara F el filtre sobre I generat per R. Com que R té la propietat de la intersecció finita, F és propi. Mostrem que

$$(\prod\nolimits_{i\in I}^{F} \mathfrak{A}_i, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

Sigui $\psi = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula atòmica sense identitat i $\overline{c} = a_{j_1}, \ldots, a_{j_n} \in \prod_{i\in I} A_i$. Suposem que

$$\prod\nolimits_{i\in I}^{F} \mathfrak{A}_i \models \psi\left[\overline{c}\right].$$

Llavors,

$$X = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi\left[\overline{c}(i)\right]\} \in F$$

i en conseqüència, com que F és el filtre sobre I generat per R, hi ha $S_{\phi_1 \overline{d}_1}, \ldots, S_{\phi_k \overline{d}_k} \in R$ tals que

$$X \supseteq S_{\phi_1 \overline{d}_1} \cap \ldots \cap S_{\phi_k \overline{d}_k}.$$

Suposem que, per a tot $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k$, el conjunt de variables que apareixen a ϕ_i i el conjunt de variables que apareixen a ϕ_j són disjunts. Llavors, per a tot $i \in I$,

$$\mathfrak{A}_i \models \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k \rightarrow \psi \left[\overline{d}_1(i), \ldots, \overline{d}_k(i), \overline{c}(i)\right].$$

D'una banda, com que $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k \rightarrow \psi$ és equivalent a una fórmula bàsica de Horn sense identitat i val la condició iii),

$$\mathfrak{B} \models \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k \rightarrow \psi \left[\overline{b}_{\overline{d_1}}, \ldots, \overline{b}_{\overline{d_k}}, \overline{b}_{\overline{c}}\right].$$

I, d'altra banda, com que $S_{\phi_1 \overline{d}_1}, \ldots, S_{\phi_k \overline{d}_k} \in R$,

$$\mathfrak{B} \models \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k \left[\overline{b}_{\overline{d_1}}, \ldots, \overline{b}_{\overline{d_k}}\right].$$

Així, $\mathfrak{B} \models \psi\left[\overline{b_{\bar{c}}}\right]$. Inversament, si $\mathfrak{B} \models \psi\left[\overline{b_{\bar{c}}}\right]$, llavors $S_{\psi\bar{c}} \in R \subseteq F$. I com que ψ és una fórmula atòmica sense identitat,

$$\prod\nolimits_{i\in I}^{F} \mathfrak{A}_i \models \psi\left[\bar{c}\right].$$

Per tant, podem concloure que

$$(\prod\nolimits_{i\in I}^{F} \mathfrak{A}_i, \bar{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \bar{b}).$$

Per la Proposició 2.17, $\mathfrak{B} \sim \prod_{i\in I}^{F} \mathfrak{A}_i$. □

Ara introduirem alguna notació. Fixat un cardinal infinit κ i un conjunt I de cardinalitat κ, l'expressió "per a gairebé tot $i \in I$" significa "per a tots, llevat de menys de κ elements de I". Si suposem que $2^\kappa = \kappa^+$, la propera proposició ens dóna una condició suficient perquè una estructura saturada de cardinalitat κ^+ sigui parenta d'un producte reduït d'un conjunt d'estructures. Farem servir després aquest fet per a obtenir el teorema de preservació desitjat.

Proposició 4.23 ($2^\kappa = \kappa^+$) *Suposem que $|L| \leq \kappa$. Sigui $\mathfrak{B}$ una L-estructura saturada de cardinalitat κ^+, I un conjunt de cardinalitat κ i $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ una família de L-estructures de cardinalitat $\leq \kappa^+$. Suposem que, per a tot enunciat de Horn $\sigma \in L^-$, si per a gairebé tot $i \in I$*

$$\mathfrak{A}_i \models \sigma,$$

llavors

$$\mathfrak{B} \models \sigma.$$

Així, $\mathfrak{B} \in \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}_\mathbf{S}\mathbf{P}_\mathbf{R}(\{\mathfrak{A}_i : i \in I\})$.

Demostració. Sigui $\mathfrak{A} = \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i$. Com que $2^\kappa = \kappa^+$, tenim que $|A| \leq \kappa^+$. Siguin $(a'_\xi : \xi \in \kappa^+)$ i $(b'_\xi : \xi \in \kappa^+)$ enumeracions de A i de B respectivament. Per inducció transfinita definim dues enumeracions, $(a_\xi : \xi \in \kappa^+)$ i $(b_\xi : \xi \in \kappa^+)$, de A i de B respectivament, tals que per a tot $\nu \in \kappa^+$, $(a_\xi : \xi \in \nu)$ i $(b_\xi : \xi \in \nu)$ satisfan la condició següent: per a tota fórmula de Horn $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in L^-$, tota $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \nu$ i tota $a_{\xi_1}, \ldots, a_{\xi_n} \in A$,

$$\begin{array}{l} \text{si per a gairebé tot } i \in I, \mathfrak{A}_i \models \phi\left[a_{\xi_1}(i), \ldots, a_{\xi_n}(i)\right], \\ \text{llavors } \mathfrak{B} \models \phi\left[b_{\xi_1}, \ldots, b_{\xi_n}\right]. \end{array} \tag{4.1}$$

Suposem inductivament que hem definit $(a_\xi : \xi \in \nu)$ i $(b_\xi : \xi \in \nu)$ tals que satisfan la condició (4.1). Podem diferenciar dos casos: cas $\nu = \mu + 2k$ i cas $\nu = \mu + 2k + 1$, on μ és un límit o és 0 i $k \in \omega$.

Cas $\nu = \mu + 2k$. Sigui $a_\nu = a'_{\mu+k}$. Sigui p el conjunt de totes les fórmules $\phi(x, b_{\xi_1}, \ldots, b_{\xi_n}) \in L(B)$ tals que $\phi(x, y_1, \ldots, y_n) \in L$ és una fórmula de Horn sense identitat, $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \nu$ i per a gairebé tot $i \in I$,

$$\mathfrak{A}_i \models \phi\left[a_\nu(i), a_{\xi_1}(i), \ldots, a_{\xi_n}(i)\right].$$

Si $\phi(x, b_{\xi_1}, \ldots, b_{\xi_n}) \in p$, llavors per a gairebé tot $i \in I$,

$$\mathfrak{A}_i \models \exists x \phi\left[a_{\xi_1}(i), \ldots, a_{\xi_n}(i)\right].$$

Per tant, com que el conjunt de les fórmules de Horn de L^- està tancat sota $\exists$, per hipòtesi inductiva,

$$\mathfrak{B} \models \exists x \phi\left[b_{\xi_1}, \ldots, b_{\xi_n}\right].$$

I com que el conjunt de les fórmules de Horn de L^- està tancat sota $\wedge$, p és un 1-tipus sobre el conjunt $\{b_\xi : \xi \in \nu\}$ en $\mathfrak{B}$. En conseqüència, com que $\mathfrak{B}$ és saturat, $\mathfrak{B}$ satisfà p. Sigui b_ν una realització de p.

Cas $\nu = \mu + 2k + 1$. Sigui $b_\nu = b'_{\mu+k}$. Sigui q el conjunt de totes les fórmules $\phi(x, a_{\xi_1}, \ldots, a_{\xi_n}) \in L(A)$ tals que $\phi(x, y_1, \ldots, y_n) \in L$ és una fórmula de Horn sense identitat, $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \nu$ i

$$\mathfrak{B} \models \neg\phi\left[b_\nu, b_{\xi_1}, \ldots, b_{\xi_n}\right].$$

Per a tota fórmula de Horn sense identitat $\phi(x, y_1, \ldots, y_n) \in L$, si $\mathfrak{B} \models \neg\phi\left[b_\nu, b_{\xi_1}, \ldots, b_{\xi_n}\right]$, llavors $\mathfrak{B} \models \neg\forall x \phi\left[b_{\xi_1}, \ldots, b_{\xi_n}\right]$. Definim per a tota $\phi = \phi(x, a_{\xi_1}, \ldots, a_{\xi_n}) \in q$ el conjunt

$$I_\phi = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \not\models \forall x \phi\left[a_{\xi_1}(i), \ldots, a_{\xi_n}(i)\right]\}.$$

Com que el conjunt de les fórmules de Horn de L^- està tancat sota $\forall$, per hipòtesi inductiva, $|I_\phi| = \kappa$. Per tant, pel Lema 6.1.6. de [CK91], com que $|q| \leq \kappa$, hi ha $(J_\phi : \phi \in q)$ tal que:

a) per a tota $\phi \in q$, $J_\phi \subseteq I_\phi$ i $|J_\phi| = \kappa$.
b) per a tota $\phi, \phi' \in q$, si $\phi \neq \phi'$, llavors $J_\phi \cap J_{\phi'} = \emptyset$.

Definim ara $a_\nu \in A$ de la manera següent:

$$a_\nu(i) = \begin{cases} a_\nu(i) \in A_i \text{ tal que } \mathfrak{A}_i \models \neg\phi\left[a_\nu(i), a_{\xi_1}(i), \ldots, a_{\xi_n}(i)\right], & \text{si } i \in J_\phi, \\ \text{arbitrari}, & \text{altrament}, \end{cases}$$

per a tot $i \in I$.

Un cop s'ha acabat la construcció, $(a_\xi : \xi \in \kappa^+)$ i $(b_\xi : \xi \in \kappa^+)$ tenen la propietat desitjada: per a tot $\nu \in \kappa^+$, $(a_\xi : \xi \in \nu)$ i $(b_\xi : \xi \in \nu)$ satisfan la condició (4.1). Per tant, aquestes enumeracions satisfan també iii) del Lema 4.22. Podem concloure que $\mathfrak{B} \in \mathbf{H_S^{-1} H_S P_R}(\{\mathfrak{A}_i : i \in I\})$. $\square$

Ara, suposant la hipòtesi del continu, demostrarem un teorema de preservació per a enunciats de Horn sense identitat. Més tard mostrarem com eliminar aquesta hipòtesi.

Teorema 4.24 ($2^\omega = \aleph_1$) *Per a tot enunciat $\sigma \in L$, els enunciats següents són equivalents:*

i) σ *es preserva sota* $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{H_S^{-1}}$*i* $\mathbf{P_R}$.

ii) σ *és lògicament equivalent a un enunciat de Horn sense identitat.*

Demostració. ii) $\Rightarrow$ i) és clar. i) $\Rightarrow$ ii) Suposem que σ es preserva sota $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{H_S^{-1}}$i $\mathbf{P_R}$. Podem assumir que L és finit (considerem només els símbols que apareixen a σ). Si σ és inconsistent és clar. Altrament, sigui Σ el conjunt d'enunciats següent:

$$\Sigma = \{\psi \in L^- : \psi \text{ és un enunciat de Horn i } \models \sigma \rightarrow \psi\}.$$

Clarament $\Sigma \neq \emptyset$. Demostrarem que hi ha $\psi \in \Sigma$ tal que $\models \psi \rightarrow \sigma$. Per compacitat, com que Σ està tancat sota $\wedge$, en tenim prou amb mostrar que $\Sigma \models \sigma$. Com que σ es preserva sota $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{H_S^{-1}}$, pel Corol.lari 4.2, σ és lògicament equivalent a un enunciat sense identitat. Per tant, si volem mostrar que $\Sigma \models \sigma$, com que tot model finit és equivalent, en lògica sense identitat, a un model infinit, n'hi ha prou a veure que per a tota L-estructura infinita $\mathfrak{A}$, si $\mathfrak{A} \models \Sigma$, llavors $\mathfrak{A} \models \sigma$. A més a més, com que L és finit, pel Teorema de Löwenheim-Skolem podem restringir-nos a models comptables. Suposem que $\mathfrak{A}$ és una L-estructura infinita, comptable i tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$. Mostrarem que $\mathfrak{A} \models \sigma$. Sigui $\mathfrak{B}$ una extensió elemental de $\mathfrak{A}$ de cardinalitat $\aleph_1$ i saturada. Com que L és finit i $|A| < 2^\omega = \aleph_1$, l'existència d'una extensió d'aquest tipus està garantida pel Lema 5.1.4 de [CK91].

Sigui Ψ el conjunt

$$\Psi = \{\psi \in L^- : \psi \text{ és un enunciat de Horn i } \neg\psi \wedge \sigma \text{ és consistent}\}.$$

Clarament $\Psi \neq \emptyset$. Escollim, per a tot $\psi \in \Psi$ un model comptable $\mathfrak{A}_\psi$ de $\neg\psi \wedge \sigma$. Sigui $I = \omega \times \Psi$ i per a tot $i = \langle n, \psi \rangle \in I$, $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_\psi$. Ara demostrarem que per a tot enunciat de Horn $\psi \in L^-$, si per a gairebé tot $i \in I$, $\mathfrak{A}_i \models \psi$, llavors, $\mathfrak{B} \models \psi$. Suposem que $\psi \in L^-$ és un enunciat de Horn tal que, per a gairebé tot $i \in I, \mathfrak{A}_i \models \psi$. Llavors $\psi \notin \Psi$, altrament per a tot $n \in \omega$ i tot $i = \langle n, \psi \rangle \in I$, $\mathfrak{A}_i \models \neg\psi$, contradient el fet que, per a gairebé tot $i \in I$, $\mathfrak{A}_i \models \psi$. Per tant, $\psi \in \Sigma$ i com que $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \models \Sigma$ i, en conseqüència, $\mathfrak{B} \models \psi$. Així, per la Proposició 4.23, $\mathfrak{B} \in \mathbf{H_S^{-1}H_SP_R}(\{\mathfrak{A}_i : i \in I\})$. Com que σ es preserva sota $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{H_S^{-1}}$i $\mathbf{P_R}$ i per a tot $i \in I$, $\mathfrak{A}_i \models \sigma$, $\mathfrak{B} \models \sigma$ i així, $\mathfrak{A} \models \sigma$. Podem concloure que $\Sigma \models \sigma$. Llavors, σ és lògicament equivalent a un enunciat de Horn sense identitat. $\square$

Ara eliminarem la hipòtesi del continu del Teorema 4.24. Suposem que L és finit i assignem nombres de Gödel adequats als símbols i a les expressions de L. Per tenir una definició de predicat aritmètic i enunciat aritmètic, consulteu el Capítol 6.2. de [CK91].

Teorema 4.25 (Gödel) *Sigui Γ un enunciat aritmètic,*

$$Si\ ZF + CH \vdash \Gamma,\ llavors\ ZF \vdash \Gamma.$$

Observem que els predicats "σ és un enunciat sense identitat de L" i "σ és un enunciat de Horn sense identitat de L" són recursius i el predicat "σ és lògicament equivalent a un enunciat de Horn sense identitat de L" és aritmètic

Lema 4.26 *El predicat "σ es preserva sota $\mathbf{H_S}$ i $\mathbf{H_S^{-1}}$" és aritmètic.*

Demostració. Pel Corol.lari 4.2, perquè el predicat "σ és un enunciat sense identitat de L" és recursiu. □

Teorema 4.27 (Galvin) *El predicat "σ es preserva sota $\mathbf{P_R}$" és aritmètic.*

Corol.lari 4.28 *El predicat "σ es preserva sota $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{H_S^{-1}}$ i $\mathbf{P_R}$" és aritmètic.*

Demostració. Pel Lema 4.26 i pel Teorema 4.27. □

Corol.lari 4.29 *L'enunciat "σ és lògicament equivalent a un enunciat de Horn sense identitat de L ssi σ es preserva sota $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{H_S^{-1}}$ i $\mathbf{P_R}$" és aritmètic.*

Teorema 4.30 *Per a tot enunciat $\sigma \in L$, els enunciats següents són equivalents:*

i) *σ es preserva sota $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{H_S^{-1}}$ i $\mathbf{P_R}$.*

ii) *σ és lògicament equivalent a un enunciat de Horn sense identitat.*

Demostració. Pel Corol.lari 4.29 i pels Teoremes 4.24 i 4.25. □

Models saturats sense identitat

5.1 Caracteritzacions

Aquest capítol està dedicat a l'estudi dels models saturats sense identitat. En aquesta secció introduirem el concepte de model saturat sense identitat (que abreujarem amb el nom de L^--saturat) i demostrarem, entre d'altres coses, que la L^--saturació és preservada per la relació de parentiu, Corol.lari 5.7 i l'existència de models infinits $\mathfrak{A}$, que són L^--$|A|^+$-saturats (Exemple 5.12). D'aquest darrer resultat se segueix que els models L^--saturats tenen un comportament diferent que els models saturats usuals.

A la propera secció veurem la relació del concepte de model L^--saturat amb les nocions usuals de model homogeni i model universal. Fent servir els models L^--ω-saturats d'una teoria i els mètodes de back-and-forth que hem introduït abans, a la darrera secció d'aquest capítol donarem criteris perquè una teoria sigui L^--completa, perquè tingui eliminació de quantificadors per a L^- i perquè sigui L^--$\aleph_0$-categòrica. La noció de model saturat va ser per primer cop introduïda per M. Morley i R. Vaught a [MV62], com un cas especial de les estructures que apareixen en els articles de R. Jónsson, [Jon56] i [Jon60]. Per tenir més referències sobre models saturats es pot consultar [CK91], [Hod93b] i [Poi85].

Primer recordarem la noció de tipus sense identitat sobre un conjunt de paràmetres en un model, introduïda a la Secció 2.2. Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura i D un subconjunt de A. Donat un cardinal κ, diem que un conjunt p de fórmules de $L^-(D)$ en les variables $\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ és un *L^--κ-tipus sobre D* en $\mathfrak{A}$ si p és consistent amb $\mathrm{Th}^-(\mathfrak{A}_D)$. A més a més, diem que p és *L^--complet* ssi per a tota fórmula $\phi \in L^-(D)$ en les variables $\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$, $\phi \in p$ o $\neg\phi \in p$. Diem que un κ-tuple $\overline{a} = (a_\alpha : \alpha \in \kappa)$ d'elements de A *realitza p* si

$$\mathfrak{A}_D \models \phi[a_\alpha : \alpha \in \kappa],$$

per a tota $\phi \in p$, i diem que $\mathfrak{A}$ *omet p* si no hi ha cap κ-tuple en A que realitzi p.

Finalment, diem que un L^--κ-*tipus sobre* D en $\mathfrak{A}$ és realitzat en $\mathfrak{A}$ ssi si hi ha un κ-tuple d'elements de A realitza p.

Observem que, per a tot conjunt p de fórmules de $L^-(D)$, p és consistent amb $\mathrm{Th}^-(\mathfrak{A}_D)$ ssi p és consistent amb $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_D)$. Per tant, un conjunt p de fórmules de $L^-(D)$ és un L^--κ-tipus sobre D en $\mathfrak{A}$ ssi p és un κ-tipus sobre D en $\mathfrak{A}$ i totes les fórmules de p són sense identitat.

Definició 5.1 Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures i $r \subseteq A \times B$ una relació. Per a tota fórmula $\phi \in L(\mathrm{dom}(r))$, $\phi = \phi(\bar{x}, a_1, \ldots, a_n)$, sigui Σ^r_ϕ el conjunt de fórmules següent de $L(\mathrm{rg}(r))$:

$$\{\phi(\bar{x}, b_1, \ldots, b_n) \in L(\mathrm{rg}(r)) : per\ a\ tot\ i \in \{1, \ldots, n\},\ \langle a_i, b_i\rangle \in r\},$$

on $\phi(\bar{x}, b_1, \ldots, b_n)$ és obtinguda a partir de ϕ substituint a_i per b_i, per a tot $i = 1, \ldots, n$. Per a tot conjunt p de fórmules de $L(\mathrm{dom}(r))$ sigui $p^r = \bigcup_{\phi \in p} \Sigma^r_\phi$.

En particular, si $\mathfrak{A}$ és una L-estructura, D un subconjunt de A i p un conjunt de fórmules de $L^-(D)$, designem amb p^* el conjunt p^r, on $r \subseteq A \times A^*$ és la relació definida per:

$$r = \left\{\langle d, [d]_{\Omega(\mathfrak{A})}\rangle : d \in D\right\}.$$

I designem amb D^* el conjunt

$$\left\{[d]_{\Omega(\mathfrak{A})} : d \in D\right\}.$$

Lema 5.2 *Siguin* $\mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}$ *L-estructures,* $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ *i* $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ *seqüències d'elements de A i de B respectivament i* $r = \{\langle a_i, b_i\rangle : i \in I\}$. *Suposem que* $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$. *Llavors, per a tot cardinal* κ *i tot conjunt p de fórmules de* $L^-(\mathrm{dom}(r))$ *en les variables* $\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$,

i) *p és un* L^--κ-*tipus sobre* $\mathrm{dom}(r)$ *en* $\mathfrak{A}$ *ssi* p^r *és un* L^--κ-*tipus sobre* $\mathrm{rg}(r)$ *en* $\mathfrak{B}$.

ii) *Si p és* L^--*complet, llavors* p^r *és* L^--*complet.*

Demostració. Només provarem la direcció $\Rightarrow$) de i), l'altra direcció i ii) es poden demostrar fent servir arguments anàlegs. Suposem que p és un L^--κ-tipus sobre $\mathrm{dom}(r)$ en $\mathfrak{A}$. Suposem també, buscant una contradicció, que p^r no és consistent amb $\mathrm{Th}^-(\mathfrak{B}_{\mathrm{rg}(r)})$. Llavors hi ha $\phi_1, \ldots, \phi_k \in L^-$, $\phi_l = \phi_l(\bar{x}, y_1, \ldots, y_n)$, per a tot $l \in \{1, \ldots, k\}$, i elements $l_1, \ldots, l_n \in I$ tals que $\phi_l(\bar{x}, a_{l_1}, \ldots, a_{l_n}) \in p$, per a tot $l \in 1, \ldots, k$, i

$$\mathrm{Th}^-(\mathfrak{B}_{\mathrm{rg}(r)}) \models \bigvee_{1 \le l \le k} \neg\phi_l(\bar{x}, b_{l_1}, \ldots, b_{l_n}),$$

llavors

$$\mathfrak{B} \models \bigvee_{1\leq l\leq k} \neg\phi_l\,[b_{l_1},\ldots,b_{l_n}]\,.$$

Atès que $(\mathfrak{A},\overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B},\overline{b})$,

$$\mathfrak{A} \models \bigvee_{1\leq l\leq k} \neg\phi_l\,[a_{l_1},\ldots,a_{l_n}]\,,$$

però això és absurdm, perquè per suposició, p és consistent amb $\mathrm{Th}^-(\mathfrak{A}_{\mathrm{dom}(r)})$. □

El Lema següent ens dóna una caracterització dels tipus L^--complets:

Lema 5.3 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura, D un subconjunt de A i κ un cardinal. Per a tot conjunt p de fórmules de $L^-(D)$ en les variables $\{x_\alpha : \alpha\in\kappa\}$, els enunciats següents són equivalents:*

i) *p és un L^--κ-tipus L^--complet sobre D en $\mathfrak{A}$.*

ii) *Hi ha $\mathfrak{A}'$ tal que $D\subseteq A'$ i $\mathfrak{A}'_D \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_D)$ i hi ha una seqüència $\overline{m} = (m_\alpha : \alpha\in\kappa)$ d'elements de A' tal que $p = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}'}(\overline{m}/D)$.*

iii) *Hi ha $\mathfrak{A}'$ tal que $D\subseteq A'$ i $\mathfrak{A}'_D \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A}_D)$ i hi ha una seqüència $\overline{m} = (m_\alpha : \alpha\in\kappa)$ d'elements de A' tal que $p = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}'}(\overline{m}/D)$.*

iv) *Hi ha $\mathfrak{A}'$ tal que $\mathfrak{A}\preceq\mathfrak{A}'$ i hi ha una seqüència $\overline{m} = (m_\alpha : \alpha\in\kappa)$ d'elements de A' tal que $p = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}'}(\overline{m}/D)$.*

v) *Hi ha $\mathfrak{A}'$ tal que $\mathfrak{A}\preceq^-\mathfrak{A}'$ i hi ha una seqüència $\overline{m} = (m_\alpha : \alpha\in\kappa)$ d'elements de A' tal que $p = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}'}(\overline{m}/D)$.*

Demostració. ii) $\Rightarrow$ iii), iii) $\Rightarrow$ i), iv) $\Rightarrow$ v) i v) $\Rightarrow$ i) són clars. i) $\Rightarrow$ ii) és senzill de veure, perquè, com hem observat abans, tot L^--κ-tipus és consistent amb $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_D)$. i) $\Rightarrow$ iv) Farem servir el fet que p és consistent amb $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$. La demostració d'aquest fet és senzilla. □

Observem que, a ii) i iii) del Lema 5.3, podem prendre $\mathfrak{A}'$ tal que $|A'|\leq \text{màx}(|D|,|L|,\aleph_0)$. I a iv) i v) podem prendre $\mathfrak{A}'$ tal que $|A'|\leq \text{màx}(|A|,|L|,\aleph_0)$.

Si considerem estructures reduïdes, podem obtenir la versió següent del Lema 5.3:

Corol.lari 5.4 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura reduïda, D un subconjunt de A i κ un cardinal. Per a tot conjunt p de fórmules de $L^-(D)$ en les variables $\{x_\alpha : \alpha\in\kappa\}$, els enunciats següents són equivalents:*

i) *p és un L^--κ-tipus L^--complet sobre D en $\mathfrak{A}$.*

ii) *Hi ha una L-estructura reduïda $\mathfrak{A}'$ tal que $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{A}'$ i hi ha una seqüència $\overline{m} = (m_\alpha : \alpha \in \kappa)$ d'elements de A' tal que $p = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}'}(\overline{m}/D)$.*

Demostració. ii) $\Rightarrow$ i) és clar. i) $\Rightarrow$ ii) Com que p és un L^--κ-tipus L^--complet sobre D en $\mathfrak{A}$, pel Lema 5.3, hi ha $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$ i una seqüència $\bar{l} = (l_\alpha : \alpha \in \kappa)$ d'elements de B tal que $p = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(\bar{l}/D)$. Llavors, fent servir una demostració anàloga a la demostració del Lema 2.24, és senzill verificar que $\mathfrak{A}^* \precsim^- \mathfrak{B}^*$ i que la funció $j : \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*$ definida per:

$$j([a]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [a]_{\Omega(\mathfrak{B})},$$

per a tot $a \in A$, és una immersió que preserva totes les fórmules sense identitat. Si $\bar{k} = ([l_\alpha]_{\Omega(\mathfrak{B})} : \alpha \in \kappa)$, clarament $p^* = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}^*}(\bar{k}/D^*)$. Com que $\mathfrak{A}$ és reduïda, hi ha un isomorfisme $f : (\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \to (\mathfrak{A}^*, [a]_{\Omega(\mathfrak{A})})_{a\in A}$. Així $f \circ j : (\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \to (\mathfrak{B}^*, [a]_{\Omega(\mathfrak{B})})_{a\in A}$ és una immersió. Per tant, podem trobar una L-estructura $\mathfrak{A}'$ tal que $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{A}'$ i un isomorfisme $h : (\mathfrak{A}', a)_{a\in A} \to (\mathfrak{B}^*, [a]_{\Omega(\mathfrak{B})})_{a\in A}$ tal que $h \restriction A = f \circ j$. Sigui $\overline{m} = (h^{-1}([l_\alpha]_{\Omega(\mathfrak{B})}) : \alpha \in \kappa)$. Clarament $p = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}'}(\overline{m}/D)$ i com que $\mathfrak{B}^*$ és reduïda, $\mathfrak{A}'$ també és reduïda. □

Ara introduirem el concepte més important d'aquesta secció, els models saturats sense identitat.

Definició 5.5 Donada una L-estructura $\mathfrak{A}$ i un cardinal κ, diem que $\mathfrak{A}$ és L^--κ-saturat ssi per a tot $D \subseteq A$ amb $|D| < \kappa$, $\mathfrak{A}$ realitza tots els L^--1-tipus sobre D en $\mathfrak{A}$. I diem que $\mathfrak{A}$ és *L^--saturat* ssi $\mathfrak{A}$ és L^--$|A|$-saturat.

Com que tot L^--κ-tipus pot ser estès a un L^--κ-tipus L^--complet, un model $\mathfrak{A}$ és L^--κ-saturat si per a tot $D \subseteq A$ amb $|D| < \kappa$, $\mathfrak{A}$ realitza tots els L^--1-tipus L^--complets sobre D en $\mathfrak{A}$. Ara mostrarem que la relació de parentiu preserva la L^--saturació dels models.

Proposició 5.6 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura i κ un cardinal. Llavors, $\mathfrak{A}$ és L^--κ-saturat ssi $\mathfrak{A}^*$ és L^--κ-saturat.*

Demostració. $\Leftarrow$) Suposem que $\mathfrak{A}^*$ és L^--κ-saturat. Sigui E un subconjunt de A de cardinalitat menor que κ i p un L^--1-tipus sobre E en $\mathfrak{A}$. Llavors, pel Lema 5.2, p^* és un L^--1-tipus sobre E^* en $\mathfrak{A}^*$. Com que $\mathfrak{A}^*$ és L^--κ-saturat i $|E^*| < \kappa$, hi ha un element $x \in A^*$ que realitza p^*. Sigui $a \in A$ un membre de la classe d'equivalència x. Clarament a és una realització de p en $\mathfrak{A}$.

$\Rightarrow$) Suposem que $\mathfrak{A}$ és L^--κ-saturat. Sigui E un subconjunt de A^* de cardinalitat menor que κ i p un L^--1-tipus sobre E en $\mathfrak{A}^*$. Escollim per a tota classe d'equivalència $e \in E$ un representant $a_e \in e$. Sigui $D = \{a_e : e \in E\}$. Per a tota fórmula $\phi \in p$, $\phi = \phi(\bar{x}, e_1, \ldots, e_n)$, sigui ϕ' la fórmula de $L(D)$ obtinguda a partir de ϕ substituint e_i per a_{e_i}, per a cada $i = 1, \ldots, n$. Sigui $q = \{\phi' : \phi \in p\}$, clarament $q^* = p$. Pel Lema 5.2, q és un L^--1-tipus sobre D en $\mathfrak{A}$. Com que $\mathfrak{A}$ és L^--κ-saturat i $|D| < \kappa$, hi ha un element $a \in A$ que realitza q. Llavors $[a]_{\Omega(\mathfrak{A})}$ és una realització de p en $\mathfrak{A}^*$. □

Corol.lari 5.7 *Sigui κ un cardinal i $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures tals que $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$. Llavors, $\mathfrak{A}$ és L^--κ-saturat ssi $\mathfrak{B}$ és L^--κ-saturat.*

Demostració. Suposem que $\mathfrak{A}$ és L^--κ-saturat. Per la Proposició 5.6, $\mathfrak{A}^*$ és L^--κ-saturat. Com que $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, per la Proposició 2.17, $\mathfrak{A}^* \cong \mathfrak{B}^*$. Per tant, $\mathfrak{B}^*$ és L^--κ-saturat, i altre cop per la Proposició 5.6, $\mathfrak{B}$ és L^--κ-saturat. L'altra direcció es demostra de manera anàloga. □

Ara enunciarem alguns fets sense demostració. La seva demostració és anàloga a la demostració en el cas de la lògica amb identitat.

Fets:

(1) Donat un cardinal κ, si $\mathfrak{A}$ és L^--κ-saturat, llavors per a tot $D \subseteq A$ amb $|D| < \kappa$, $\mathfrak{A}$ realitza tots els L^--κ-tipus sobre D en $\mathfrak{A}$.

(2) Donat un cardinal κ, tot model té una L^--extensió que és L^--κ-saturada.

(3) Tot model finit és L^--κ-saturat, per a tot cardinal κ.

(4) Dos models L^--equivalents i L^--saturats de la mateixa cardinalitat són parents.

Observem que, del Fet (4) se segueix que dos models reduïts de la mateixa cardinalitat que siguin L^--equivalents i L^--saturats són isomorfs. Això en general no és cert, considerem el contraexemple següent:

Exemple 5.8 Sigui E un símbol relacional binari i $\mathfrak{A} = (\omega_1, E^{\mathfrak{A}})$, on $E^{\mathfrak{A}}$ és la identitat a ω_1. És senzill veure $\mathfrak{A}$ és saturat. Com que tot L^--κ-tipus és un κ-tipus, tot model κ-saturat és L^--κ-saturat. Així $\mathfrak{A}$ és L^--saturat i com que $\mathfrak{A}(\omega) \sim \mathfrak{A}$, pel Corol.lari 5.7, $\mathfrak{A}(\omega)$ és L^--saturat. $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{A}(\omega)$ tenen la mateixa cardinalitat, són L^--equivalents i L^--saturats, però clarament no són isomorfs.

Hem fet ús, al contraexemple anterior, del fet que tot model saturat és L^--saturat. Però la inversa en general no és certa, més tard en veurem algun contraexemple. Primer veiem que, per a les estructures reduïdes en tipus de semblança finits i relacionals, els dos conceptes coincideixen:

Proposició 5.9 *Sigui L tipus de semblança finit i relacional i $\mathfrak{A}$ una L-estructura reduïda. Llavors, $\mathfrak{A}$ és L^--saturat ssi $\mathfrak{A}$ és saturat.*

Demostració. $\Leftarrow$) és clar. $\Rightarrow$) Suposem que $\mathfrak{A}$ és L^--saturat. Sigui D un subconjunt de A amb $|D| < |A|$ i p un 1-tipus sobre D en $\mathfrak{A}$. Com que L és finit i relacional i $\mathfrak{A}$ és reduïda, hi ha un conjunt finit Γ de fórmules de la forma $\forall \overline{z}\,[\phi(x,\overline{z}) \leftrightarrow \phi(y,\overline{z})]$ on $\phi \in L^-$ és atòmica i tal que, si $\psi(x,y)$ és la conjunció de totes les fórmules de Γ, llavors

$$\mathfrak{A} \models \forall x \forall y\,[x \approx y \leftrightarrow \psi(x,y)]\,.$$

Per a tota fórmula $\phi \in L(D)$, sigui $\phi' \in L^-(D)$ la fórmula obtinguda a partir de ϕ reemplaçant cada aparició d'una fórmula de la forma $t_1 \approx t_2$ per una aparició de $\psi(t_1,t_2)$. Sigui $p' = \{\phi' : \phi \in p\}$. És senzill veure que p' és un L^--1-tipus sobre D en $\mathfrak{A}$. Com que $\mathfrak{A}$ és L^--saturada, hi ha una realització de p', $a \in A$. Clarament, a és també una realització de p. $\Box$

Els exemples següents mostren que no podem treure les restriccions de la Proposició 5.9.

Exemple 5.10 No podem treure la restricció que L sigui relacional a la Proposició 5.9. Sigui $L = \{P, f\}$, on P és un símbol relacional monàdic i f és un símbol funcional monàdic. Sigui $\mathfrak{B} = (\omega \cup \{b\}, P^{\mathfrak{B}}, f^{\mathfrak{B}})$, on $b \notin \omega$, $P^{\mathfrak{B}} = \{0\}$, $f^{\mathfrak{B}}(0) = 0$, $f^{\mathfrak{B}}(b) = b$ i per a tot $n \in \omega$, $f^{\mathfrak{B}}(n+1) = n$. Clarament $\mathfrak{B}$ és reduïda. Mostrarem que $\mathfrak{B}$ és L^--saturada però no és saturada. Sigui D un subconjunt de B amb $|D| < |B|$ i p un L^--1-tipus L^--complet sobre D en $\mathfrak{B}$. Com que $\mathfrak{B}$ és reduïda, pel Corol.lari 5.4, hi ha una L-estructura reduïda $\mathfrak{A}$ i un element $a \in A$ tal que $\mathfrak{B} \preceq^- \mathfrak{A}$ i $p = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}}(a/D)$. Considerem ara el conjunt $p_0 = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}}(a/A)$. Totes les fórmules de p_0 són de la forma $Pf^n x$, per a algun $n \in \omega$. Sigui Y el conjunt

$$Y = \{n \in \omega : Pf^n x \in p_0\}\,.$$

Si $Y = \emptyset$,

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}}(b/A) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}}(a/A)$$

i llavors, com que $\mathfrak{A}$ és reduïda, $b = a$. Així, p és realitzat en $\mathfrak{B}$. Si $Y \neq \emptyset$, com que $\forall x(Px \rightarrow Pfx) \in \mathrm{Th}^-(\mathfrak{B})$, donat $n \in Y$, per a tot $m \geq n$, $m \in Y$. Sigui $k \in \omega$ el mínim de Y, llavors

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}}(k/A) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}}(a/A),$$

i com que $\mathfrak{A}$ és reduïda, $k = a$. Així, p és realitzat en $\mathfrak{B}$. A més a més, tenim que $\mathfrak{B}$ no és saturada perquè el 1-tipus següent no és realitzat en $\mathfrak{B}$:

$$p = \{x \not\approx b\} \cup \{\neg P f^n x : n \in \omega\}\,.$$

Exemple 5.11 No podem treure la restricció que el model sigui reduït a la Proposició 5.9. Sigui $\mathfrak{A}(\omega)$ com en l'Exemple 5.8. Allí vam mostrar que l'estructura $\mathfrak{A}(\omega)$ és L^--saturada. Si recordem la construcció de $\mathfrak{A}(\omega)$ per mitjà dels conjunts C_a dels Preliminars, és senzill mostrar que $\mathfrak{A}(\omega)$ no és saturada perquè no satisfà el 1-tipus següent:

$$\{x \not\approx a : a \in C_0\} \cup \{Exa : a \in C_0\}.$$

Exemple 5.12 No podem treure la restricció que L sigui finit a la Proposició 5.9. Sigui $L = \{P_n : n \in \omega\}$, on per a tot $n \in \omega$, P_n és un símbol relacional monàdic i $\mathfrak{A} = (P(\omega), P_n^{\mathfrak{A}})_{n\in\omega}$, on, per a tot $X \in P(\omega)$,

$$X \in P_n^{\mathfrak{A}} \quad \text{sii} \quad n \in X.$$

Clarament $\mathfrak{A}$ és reduïda. Primer mostrarem que $\mathfrak{A}$ és L^--saturada. De fet, mostrarem més que això, mostrarem que $\mathfrak{A}$ és L^--$|A|^+$-saturada. Sigui D un subconjunt de A i p un L^--1-tipus L^--complet sobre D en $\mathfrak{A}$. Com que $\mathfrak{A}$ és reduïda, pel Corol.lari 5.4, hi ha una L-estructura reduïda $\mathfrak{A}'$ i un element $a \in A'$ tal que $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{A}'$ i $p = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}'}(a/D)$. Considerem ara el conjunt $p_0 = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}'}(a/A')$. Totes les fórmules de p_0 són de la forma $P_n x$, per a algun $n \in \omega$. Sigui Y el conjunt

$$Y = \{n \in \omega : P_n x \in p_0\}.$$

Observem que $Y \in A$ i

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}'}(Y/A') = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}'}(a/A').$$

Per tant, com que $\mathfrak{A}'$ és reduïda, $Y = a$. Així, p és realitzat en $\mathfrak{A}$. Podem concloure que $\mathfrak{A}$ és L^--$|A|^+$-saturada. Tanmateix, $\mathfrak{A}$ no és saturada perquè el 2-tipus següent no és realitzat en $\mathfrak{A}$

$$p = \{x \not\approx y\} \cup \{P_n x \leftrightarrow P_n y : n \in \omega\}.$$

L'existència de models L^--$|A|^+$-saturats, com el model $\mathfrak{A}$ de l'Exemple 5.12, ens permet veure una propietat de la L^--saturació que la saturació usual no comparteix. Una estructura infinita $\mathfrak{A}$ no pot ser mai $|A|^+$-saturada, perquè el tipus següent no pot ser realitzat en $\mathfrak{A}$:

$$p = \{x \not\approx a : a \in A\}.$$

Ara donarem una caracterització de les L-estructures $\mathfrak{A}$ que són L^--$|A|^+$-saturades. Obtindrem el resultat següent: $\mathfrak{A}$ és L^--$|A|^+$-saturada ssi tota L^--extensió de $\mathfrak{A}$ és parenta amb $\mathfrak{A}$. Més tard veurem que, si $\mathfrak{A}$ és L^--$|A|^+$-saturada, parlant intuïtivament, $\mathfrak{A}^*$ és el més gran model reduït de $\mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$. Primer, demostrem els lemes següents.

Lema 5.13 *Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures. Suposem que $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$, $a \in A$ i $b \in B$. Si $\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(a/A)$, llavors $\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(a/B)$.*

Demostració. Suposem que $\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(a/A)$. Llavors, com que per a tota fórmula atòmica sense identitat $\phi(x, \bar{z}) \in L$,

$$\forall \bar{z}(\phi(a, \bar{z}) \leftrightarrow \phi(y, \bar{z})) \in \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(a/A),$$

tenim que, per a tota fórmula atòmica sense identitat $\phi(x, \bar{z}) \in L$,

$$\forall \bar{z}(\phi(a, \bar{z}) \leftrightarrow \phi(y, \bar{z})) \in \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A),$$

i així,

$$B \models \forall \bar{z}(\phi(x, \bar{z}) \leftrightarrow \phi(y, \bar{z}))\,[a, b]\,.$$

Per tant,

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(a/B). \ \square$$

Observem que, en el Lema 5.13, si a més a més $\mathfrak{B}$ és reduïda i $\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(a/A)$, llavors $a = b$.

Lema 5.14 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura. Si $\mathfrak{A}$ és L^--$|A|^+$-saturada, llavors per a tota $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$ i tot $b, b' \in B$, els enunciats següents són equivalents:*

i) $\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b'/A)$.

ii) $\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b'/A)$.

iii) $\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b'/B)$.

iv) $\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b'/B)$.

Demostració. iii) $\Rightarrow$ iv) i iv) $\Rightarrow$ i) són clars. i) $\Rightarrow$ ii) Suposem que $\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b'/A)$. Sigui $p = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A)$ i $p' = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b'/A)$. Com que $\mathfrak{A}$ és L^--$|A|^+$-saturada i $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$, hi ha $a, a' \in A$ tals que a és una realització de p i a' és una realització de p'. Per tant,

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(a/A) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b'/A) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(a'/A),$$

i com que $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$,

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}}(a/A) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}}(a'/A).$$

Així,

$$\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}}(a/A) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}}(a'/A)$$

i com que $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$,

$$\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(a/A) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(a'/A).$$

En conseqüència,

$$\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(a/A) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(a'/A) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b'/A).$$

ii) $\Rightarrow$ iii) Suposem que $p = \text{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A) = \text{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b'/A)$. Com que $\mathfrak{A}$ és L^--$|A|^-$-saturada i $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$, hi ha $a \in A$ tal que a és una realització de p. Per tant,

$$\text{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A) = \text{tp}^-_{\mathfrak{B}}(a/A) = \text{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b'/A).$$

Llavors, pel Lema 5.13,

$$\text{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \text{atp}^-_{\mathfrak{B}}(a/B) = \text{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b'/B). \ \Box$$

Proposició 5.15 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura. Els enunciats següents són equivalents:*

i) *$\mathfrak{A}$ és L^--$|A|^-$-saturada.*

ii) *Per a tota $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$ i tot $b \in B$ hi ha $a \in A$ tal que*

$$\text{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \text{atp}^-_{\mathfrak{B}}(a/B).$$

iii) *Per a tota $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$, la funció $h : A^* \to B^*$ definida per:*

$$h([a]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [a]_{\Omega(\mathfrak{B})},$$

per a tot $a \in A$, és un isomorfisme.

iv) *Per a tota $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{A}$.*

v) *Per a tota $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{A}$.*

Demostració. iii) $\Rightarrow$ iv) i iv) $\Rightarrow$ v) són clars. i) $\Rightarrow$ ii) Sigui $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$ i $b \in B$, considerem $p = \text{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A)$. Per i), com que $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$, hi ha un element $a \in A$ tal que a és una realització de p. Per tant, pel Lema 5.13,

$$\text{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \text{atp}^-_{\mathfrak{B}}(a/B).$$

ii) $\Rightarrow$ iii) Sigui $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$. Per ii), per a tot $b \in B - A$, podem escollir $a_b \in A$ tal que

$$\text{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \text{atp}^-_{\mathfrak{B}}(a_b/B).$$

Per a tot $b \in A$, sigui $a_b = b$. Llavors $(a_b : b \in B)$ i $(b : b \in B)$ són enumeracions de A i de B respectivament, tals que

$$(\mathfrak{A}, a_b)_{b \in B} \equiv^-_0 (\mathfrak{B}, b)_{b \in B}.$$

Per la demostració de vi) $\Rightarrow$ v) de la Proposició 2.17, la funció $h : A^* \to B^*$ definida per:

$$h([a_b]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [b]_{\Omega(\mathfrak{B})},$$

per a tot $b \in B$, és un isomorfisme. Però com que $a_b \in [b]_{\Omega(\mathfrak{B})}$, per a tot $b \in B$ tenim que $h' : A^* \to B^*$ definida per:

$$h'([a]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [a]_{\Omega(\mathfrak{B})},$$

per a tot $a \in A$, és un isomorfisme.

v) $\Rightarrow$ i) Sigui $\mathfrak{B}$ una L-estructura tal que $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ i $\mathfrak{B}$ és $|A|^+$-saturada. Llavors $\mathfrak{B}$ és L^--$|A|^+$-saturada. Per iv), $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{A}$ i per la Proposició 5.6, $\mathfrak{A}$ és L^--$|A|^+$-saturada. $\square$

Ara donarem una altra caracterització dels models L^--$|A|^+$-saturats:

Proposició 5.16 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura. Els enunciats següents són equivalents:*

i) *$\mathfrak{A}$ és L^--$|A|^-$-saturada.*

ii) *$\mathfrak{A}$ és L^--ω-saturada i, per a tota $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$ i tot $b \in B$ hi ha un conjunt finit $E \subseteq A$ tal que, per a tot $c \in B$,*

$$\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/E) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(c/E) \quad \textit{ssi} \quad \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(c/B).$$

iii) *Hi ha un cardinal infinit $\kappa \leq |A|$ tal que $\mathfrak{A}$ és L^--κ-saturada i, per a tota $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$ i tot $b \in B$ hi ha $E \subseteq A$ amb $|E| < \kappa$ tal que, per a tot $c \in B$,*

$$\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/E) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(c/E) \quad \textit{ssi} \quad \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(c/B).$$

Demostració. ii) $\Rightarrow$ iii) és clar. i) $\Rightarrow$ ii) Si $\mathfrak{A}$ és L^--$|A|^+$-saturada, llavors $\mathfrak{A}$ és L^--ω-saturada. Sigui $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$ i $b \in B$. Com que $\mathfrak{A}$ és L^--$|A|^+$-saturada, per la Proposició 5.15, hi ha $a \in A$ tal que

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(a/B)$$

i per tant,

$$\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(a/B).$$

Sigui $E = \{a\}$ i suposem que $c \in B$. Si

$$\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/E) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(c/E),$$

llavors, per a tota fórmula atòmica sense identitat $\phi(x, \bar{z}) \in L$, com que

$$\forall \bar{z}(\phi(a, \bar{z}) \leftrightarrow \phi(y, \bar{z})) \in \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/E)$$

tenim que

$$\forall \bar{z}(\phi(a, \bar{z}) \leftrightarrow \phi(y, \bar{z})) \in \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(c/E),$$

i llavors,

$$B \models \forall \bar{z}(\phi(x, \bar{z}) \leftrightarrow \phi(y, \bar{z}))\,[a, c]\,.$$

En conseqüència,

$$\mathrm{atp}_{\mathfrak{B}}^{-}(c/B) = \mathrm{atp}_{\mathfrak{B}}^{-}(a/B) = \mathrm{atp}_{\mathfrak{B}}^{-}(b/B).$$

Inversament, si

$$\mathrm{atp}_{\mathfrak{B}}^{-}(b/B) = \mathrm{atp}_{\mathfrak{B}}^{-}(c/B),$$

llavors,

$$\mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}^{-}(b/B) = \mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}^{-}(c/B),$$

i així,

$$\mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}^{-}(b/E) = \mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}^{-}(c/E).$$

iii) $\Rightarrow$ i) Sigui p un L^{-}-1-tipus sobre $D \subseteq A$ en $\mathfrak{A}$. Suposem que p és L^{-}-complet. Pel Lema 5.3 hi ha $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} \preceq^{-} \mathfrak{B}$ i $b \in B$ tal que $p = \mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}^{-}(b/D)$. Per iii), hi ha $E \subseteq A$ amb $|E| < \kappa \leq |A|$ tal que, per a tot $c \in B$,

$$\mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}^{-}(b/E) = \mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}^{-}(c/E) \quad \text{ssi} \quad \mathrm{atp}_{\mathfrak{B}}^{-}(b/B) = \mathrm{atp}_{\mathfrak{B}}^{-}(c/B).$$

Sigui $q = \mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}^{-}(b/E)$. Com que $\mathfrak{A}$ és L^{-}-κ-saturada i $\mathfrak{A} \preceq^{-} \mathfrak{B}$, hi ha un element $a \in A$ tal que a és una realització de q. Per tant,

$$\mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}^{-}(b/E) = \mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}^{-}(a/E),$$

i llavors, per suposició,

$$\mathrm{atp}_{\mathfrak{B}}^{-}(b/B) = \mathrm{atp}_{\mathfrak{B}}^{-}(a/B),$$

en conseqüència,

$$\mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}^{-}(b/D) = \mathrm{tp}_{\mathfrak{B}}^{-}(a/D)$$

i a és una realització de p. Llavors, podem concloure que $\mathfrak{A}$ és L^{-}-$|A|^{+}$-saturada. □

Finalitzem aquesta secció amb un exemple d'aplicació de la Proposició 5.16.

Lema 5.17 *Sigui L un tipus de semblança tal que l'arietat de tots els seus símbols és ≤ 1. Llavors, tota estructura L^{-}-ω-saturada $\mathfrak{A}$ és L^{-}-$|A|^{+}$-saturada.*

Demostració. Observem que, en cas que l'aritetat de tots els símbols de L sigui ≤ 1, per a tota L-estructura $\mathfrak{B}$,

$$\mathrm{atp}_{\mathfrak{B}}^{-}(b/\emptyset) = \mathrm{atp}_{\mathfrak{B}}^{-}(c/\emptyset) \quad \text{sii} \quad \mathrm{atp}_{\mathfrak{B}}^{-}(b/B) = \mathrm{atp}_{\mathfrak{B}}^{-}(c/B).$$

per a tot $b, c \in B$. En conseqüència, per la Proposició 5.16, per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$, si $\mathfrak{A}$ és L^{-}-ω-saturada, llavors $\mathfrak{A}$ és L^{-}-$|A|^{+}$-saturada. □

5.2 Models L^--universals i L^--homogenis

A [MV62] M. Morley i R. Vaught van introduir els conceptes de model universal i de model homogeni, adaptant algunes nocions dels articles de R. Jónsson, [Jon56] i [Jon60]. El concepte de model fortament homogeni és degut a S. Shelah, [She78]. En aquesta secció introduirem els models L^--universals, L^--homogenis i fortament L^--homogenis, conceptes anàlegs als anteriors per a lògica sense identitat. Veurem que la relació de parentiu preserva la L^--universalitat, la L^--homogeneïtat i la L^--homogeneïtat forta dels models. Al Corol.lari 5.33 caracteritzarem els models L^--saturats fent servir models L^--universals i L^--homogenis. Finalment, examinarem la relació d'aquests conceptes amb els usuals per a lògica amb identitat. En particular, mostrarem, a la Proposició 5.39, que tota estructura reduïda i fortament L^--homogènia és fortament homogènia i veurem que la inversa no és certa.

Recordem la definició de model universal. Donada una L-estructura $\mathfrak{A}$ i un cardinal κ, diem que $\mathfrak{A}$ és *κ-universal* ssi per a tota L-estructura $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ amb $|B| < \kappa$, hi ha una immersió elemental $f : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$. Una estructura $\mathfrak{A}$ és *universal* si és $|A|^+$-universal. Definim ara la noció corresponent per a lògica sense identitat.

Definició 5.18 *Donada una L-estructura $\mathfrak{A}$ i un cardinal κ, diem que $\mathfrak{A}$ és L^--κ-*universal *ssi per a tota L-estructura $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ amb $|B| < \kappa$, hi ha una L^--funció $f : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$. I diem que $\mathfrak{A}$ és L^--*universal *si és L^--$|A|^+$-universal.*

Proposició 5.19 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura i κ un cardinal. Els enunciats següents són equivalents:*

i) *$\mathfrak{A}$ és L^--κ-universal.*

ii) *Per a tota $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ amb $|B| < \kappa$, hi ha una expansió de $\mathfrak{A}$ que satisfà el* $\mathsf{eldiag}^-(\mathfrak{B})$.

iii) *Per a tota $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ amb $|B| < \kappa$, hi ha una enumeració de B, $\overline{b} = (b_i : i \in I)$, i una seqüència d'elements de A, $\overline{a} = (a_i : i \in I)$, tal que*

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

iv) *Per a tota $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ amb $|B| < \kappa$, $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{C}$, per a alguna $\mathfrak{C} \preceq^- \mathfrak{A}$.*

v) *Per a tota $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ amb $|B| < \kappa$, $\mathfrak{B} \in \mathbf{H_S^{-1} H_S S^{\preceq^-}}(\mathfrak{A})$.*

vi) *Per a tota $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ amb $|B| < \kappa$, $\mathfrak{B} \in \mathbf{H_S H_S^{-1} S^{\preceq^-}}(\mathfrak{A})$.*

vii) *Per a tota $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ amb $|B| < \kappa$, $\mathfrak{B}^* \precsim^- \mathfrak{A}^*$.*

Demostració. Per la Proposició 2.26. $\square$

Observem que, en cas que L sigui relacional, tota L^--funció és un homomorfisme estricte. Per tant, en aquest cas, una L-estructura $\mathfrak{A}$ és L^--κ-universal ssi per a tota L-estructura $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ amb $|B| < \kappa$ hi ha un homomorfisme estricte $f : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$.

Ara veurem que la relació de parentiu preserva la L^--universalitat dels models.

Proposició 5.20 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura i κ un cardinal. Llavors, $\mathfrak{A}$ és L^--κ-universal ssi $\mathfrak{A}^*$ és L^--κ-universal.*

Demostració. $\Rightarrow$) Suposem que $\mathfrak{A}$ és L^--κ-universal. Sigui $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A}^*)$ amb $|B| < \kappa$. Llavors $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ i com que $\mathfrak{A}$ és L^--κ-universal, per la Proposició 5.19, $\mathfrak{B}^* \precsim^- \mathfrak{A}^*$. I com que $(\mathfrak{A}^*)^* \cong \mathfrak{A}^*$, tenim que $\mathfrak{B}^* \precsim^- (\mathfrak{A}^*)^*$. Podem concloure, per la Proposició 5.19, que $\mathfrak{A}^*$ és L^--κ-universal. La demostració de l'altra direcció és anàloga. $\square$

Corol.lari 5.21 *Sigui κ un cardinal i $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures tals que $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$. Llavors, $\mathfrak{A}$ és L^--κ-universal ssi $\mathfrak{B}$ és L^--κ-universal.*

Demostració. Per la Proposició 5.20. $\square$

Veiem ara la relació entre les nocions de model L^--saturat i de model L^--universal.

Proposició 5.22 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura i κ un cardinal. Si $\mathfrak{A}$ és L^--κ-saturada, llavors $\mathfrak{A}$ és L^--κ^+-universal.*

Demostració. Suposem que $\mathfrak{A}$ és L^--κ-saturada i sigui $\mathfrak{B}$ una L-estructura tal que $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ i $|B| = \lambda \leq \kappa$. Sigui $\bar{b} = (b_\alpha : \alpha \in \lambda)$ una enumeració de B sense repeticions i $p = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(\bar{b}/\emptyset)$. Com que $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$, p és un L^--λ-tipus sobre $\emptyset$ en $\mathfrak{A}$. Per tant, com que $\lambda \leq \kappa$ i $\mathfrak{A}$ és L^--κ-saturada, p es realitza en $\mathfrak{A}$. Sigui $\bar{a} = (a_\alpha : \alpha \in \lambda)$ una realització de p en $\mathfrak{A}$. Llavors,

$$(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \bar{b}).$$

Per tant, per la Proposició 5.19, $\mathfrak{A}$ és L^--κ^+-universal. $\square$

Corol.lari 5.23 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura. Si $\mathfrak{A}$ és L^--saturada, llavors $\mathfrak{A}$ és L^--universal.*

Demostració. Per la Proposició 5.22. $\square$

Observem que, per a alguns tipus de semblança, és possible que hi hagi estructures que són L^--κ-universals, per a cada cardinal κ. Sigui $\mathfrak{A}$ com en l'Exemple 5.12. Com que $\mathfrak{A}$ és L^--$|A|^+$-saturada, $\mathfrak{A}$ és L^--κ-saturada, per a cada cardinal κ. Llavors, per la Proposició 5.22, $\mathfrak{A}$ és L^--κ-universal, per a cada cardinal κ. En aquests casos, per la Proposició 5.19 vii), podem dir, parlant intuïtivament, que $\mathfrak{A}^*$ és el més gran model reduït de $\mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$.

Ara veurem la relació entre la noció de model L^--universal i la noció de model universal.

Proposició 5.24 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura tal que* $\text{màx}(|L|, \aleph_0) \leq |A|$. *Si $\mathfrak{A}$ és universal, llavors $\mathfrak{A}$ és L^--universal.*

Demostració. Suposem que $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ i $|B| \leq |A|$. Per l'observació que segueix la Proposició 3.27, com que $\text{màx}(|L|, \aleph_0) \leq |A|$, hi ha L-estructures $\mathfrak{C} \succeq \mathfrak{A}$ i $\mathfrak{D} \succeq \mathfrak{B}$ tals que $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{D}$ i $\text{màx}(|C|, |D|) \leq |A|$. Pel Lema 2.24, $\mathfrak{B}^* \precsim^- \mathfrak{D}^*$ i com que $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}^* \precsim^- \mathfrak{C}^*$. Com que $\mathfrak{C} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$, $|C| \leq |A|$ i $\mathfrak{A}$ és universal obtenim que $\mathfrak{C} \precsim \mathfrak{A}$. Per tant, pel Lema 2.24, $\mathfrak{C}^* \precsim^- \mathfrak{A}^*$ i llavors $\mathfrak{B}^* \precsim^- \mathfrak{A}^*$. Podem concloure que $\mathfrak{A}$ és L^--universal. □

Mostrarem que la inversa del Corol.lari 5.23 no és certa.

Exemple 5.25 Sigui $L = \{<\}$ i $\mathfrak{A}$ el model obtingut substituint a $\eta + 1$ (on η és el tipus d'ordre dels racionals) cada element per una còpia dels enters amb el seu ordre estricte usual. És un fet conegut que aquest model és universal però no és saturat. Per la Proposició 5.24, $\mathfrak{A}$ és L^--universal i per la Proposició 5.9, com que L és finit i relacional i $\mathfrak{A}$ és reduït, tenim que $\mathfrak{A}$ no és L^--saturat.

Observem també que la inversa de la Proposició 5.24 no és certa. Sigui $\mathfrak{B}$ com en l'Exemple 5.10. Allí es va mostrar que $\mathfrak{B}$ era L^--saturat. Llavors, pel Corol.lari 5.23, $\mathfrak{B}$ és L^--universal. Vegem que $\mathfrak{B}$ no és universal. Considerem el 1-tipus següent

$$p = \{x \not\approx b\} \cup \{\neg P f^n x : n \in \omega\},$$

p no és realitzat en $\mathfrak{B}$. Sigui $\mathfrak{A}$ una extensió elemental de $\mathfrak{B}$ tal que $|B| = |A|$ i p sigui realitzat en $\mathfrak{A}$, és un fet conegut que una extensió tal existeix. Clarament $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{B})$ i $\mathfrak{A} \not\precsim \mathfrak{B}$. Així, $\mathfrak{B}$ no és universal.

Ara introduirem les nocions de model L^--homogeni i de model fortament L^--homogeni. Mostrarem la relació d'aquests conceptes amb les nocions usuals de model homogeni, de model fortament homogeni i també amb la noció de model L^--saturat introduïda abans. Recordem la definició de model homogeni. Donada una L-estructura

$\mathfrak{A}$ i un cardinal κ, $\mathfrak{A}$ és *κ-homogènia* ssi per a cada dues seqüències $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ i $\overline{a}' = (a'_i : i \in I)$ d'elements de A tals que $|I| < \kappa$ i

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv (\mathfrak{A}, \overline{a}'),$$

passa el següent: per a tot $d \in A$ hi ha $d' \in A$ tal que

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}, d) \equiv (\mathfrak{A}, \overline{a}', d').$$

Una estructura $\mathfrak{A}$ és *homogènia* si és $|A|$-homogènia. Ara introduirem la noció corresponent per a lògica sense identitat.

Definició 5.26 Donada una L-estructura $\mathfrak{A}$ i un cardinal κ, diem que $\mathfrak{A}$ és *L^--κ-homogènia* ssi per a cada dues seqüències $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ i $\overline{a}' = (a'_i : i \in I)$ d'elements de A tals que $|I| < \kappa$ i

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}'),$$

passa el següent: per a tot $d \in A$ hi ha $d' \in A$ tal que

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}, d) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}', d').$$

Diem que $\mathfrak{A}$ és L^--homogènia si és L^--$|A|$-homogènia.

Ara veurem que la relació de parentiu preserva la L^--homogeneïtat dels models.

Proposició 5.27 *Siguin $\mathfrak{A}$ una L-estructura i κ un cardinal. Llavors $\mathfrak{A}$ és L^--κ-homogènia ssi $\mathfrak{A}^*$ és L^--κ-homogènia.*

Demostració. $\Rightarrow$) Suposem que $\mathfrak{A}$ és L^--κ-homogènia i siguin $\overline{e} = (e_k : k \in K)$ i $\overline{e}' = (e'_k : k \in K)$ seqüències d'elements de A^* tals que $|K| < \kappa$ i

$$(\mathfrak{A}^*, \overline{e}) \equiv^- (\mathfrak{A}^*, \overline{e}').$$

Sigui $d \in A^*$. Escollim per a cada classe d'equivalència $x \in A^*$, un representant $a_x \in A$. Considerem ara les corresponents seqüències $\overline{a}_e = (a_{e_k} : k \in K)$ i $\overline{a}_{e'} = (a_{e'_k} : k \in K)$ d'elements de A, tenim que

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}_e) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}_{e'}).$$

Com que $\mathfrak{A}$ és L^--κ-homogènia i $a_d \in A$, hi ha $a' \in A$ tal que

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}_e, a_d) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}_{e'}, a'),$$

per tant,

$$(\mathfrak{A}^*, \overline{e}, d) \equiv^- (\mathfrak{A}^*, \overline{e}', [a']_{\Omega(\mathfrak{A})}).$$

Podem concloure que $\mathfrak{A}^*$ és L^--κ-homogènia. La demostració de l'altra direcció és anàloga. $\square$

Corol.lari 5.28 *Sigui κ un cardinal i $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures tals que $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$. Llavors, $\mathfrak{A}$ és L^--κ-homogènia ssi $\mathfrak{B}$ és L^--κ-homogènia.*

Demostració. Per la Proposició 5.27. □

Veiem ara la relació entre els conceptes de model L^--saturat i de model L^--homogeni.

Proposició 5.29 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura i κ un cardinal. Si $\mathfrak{A}$ és L^--κ-saturada, llavors $\mathfrak{A}$ és L^--κ-homogènia.*

Demostració. Suposem que $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ i $\overline{a}' = (a'_i : i \in I)$ són seqüències d'elements de A tals que

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}')$$

i $|I| < \kappa$. Sigui $r = \{\langle a_i, a'_i\rangle : i \in I\}$. Donat un element $d \in A$, considerem el tipus $p = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}}(d/\mathrm{dom}(r))$. Com que $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}')$, pel Lema 5.2, p^r és un L^--1-tipus sobre $\mathrm{rg}(r)$ en $\mathfrak{A}$. Com que $\mathfrak{A}$ és L^--κ-saturada, hi ha una realització $d' \in A$ de p^r. Llavors,

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}, d) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}', d'). \ \square$$

Corol.lari 5.30 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura. Si $\mathfrak{A}$ és L^--saturada, llavors $\mathfrak{A}$ és L^--homogènia.*

Demostració. Per la Proposició 5.29. □

L'exemple següent mostra que la inversa del Corol.lari 5.30 no és certa:

Exemple 5.31 Sigui $\mathfrak{A} = (\omega, <, n)_{n\in\omega}$, on $<$ és l'ordre estricte usual en ω. $\mathfrak{A}$ és L^--homogènia perquè si $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ i $\overline{a}' = (a'_i : i \in I)$ són dues seqüències d'elements de A tals que

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}'),$$

és senzill veure que, per a tot $i \in I$, $a_i = a'_i$, i així, per a tot $d \in A$,

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}, d) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}', d).$$

Però $\mathfrak{A}$ no és L^--saturada, perquè el L^--1-tipus següent no és realitzat en $\mathfrak{A}$

$$\{n < x : n \in \omega\}.$$

Ara donarem una caracterització dels models L^--saturats fent servir models L^--homogenis i models L^--universals.

Proposició 5.32 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura i κ un cardinal amb* $\text{màx}(|L|, \aleph_0) \leq \kappa$. *Llavors $\mathfrak{A}$ és L^--κ-saturada ssi $\mathfrak{A}$ és L^--κ-homogènia i L^--κ^+-universal.*

Demostració. $\Rightarrow$) Per les Proposicions 5.22 i 5.29. $\Leftarrow$) Suposem que $\mathfrak{A}$ és L^--κ-homogènia i L^--κ^+-universal. Sigui D un subconjunt de A amb $|D| < \kappa$ i p un L^--1-tipus L^--complet sobre D en $\mathfrak{A}$. Pel Lema 5.3 i l'observació que figura a continuació del lema, com que $\text{màx}(|L|, \aleph_0) \leq \kappa$, hi ha $\mathfrak{A}'$ tal que $D \subseteq A'$, $\mathfrak{A}'_D \models \text{Th}^-(\mathfrak{A}_D)$ i $|A'| \leq \kappa$, i hi ha $b \in A'$ tal que $p = \text{tp}^-_{\mathfrak{A}'}(b/D)$. Com que $|A'| \leq \kappa$, $\mathfrak{A}' \models \text{Th}^-(\mathfrak{A})$ i $\mathfrak{A}$ és L^--κ^+-universal, per la Proposició 5.19, hi ha una enumeració de A', $\overline{a}' = (a'_i : i \in I)$, i una seqüència d'elements de A, $\overline{a} = (a_i : i \in I)$, tals que

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{A}', \overline{a}').$$

Sigui $b = a'_l$ en l'enumeració $\overline{a}'$ de A', $\overline{d}' = (a'_{i_j} : j \in J)$ una enumeració de D sense repeticions tal que $\overline{d}' \subseteq \overline{a}'$, i siguin $\overline{d} = (a_{i_j} : j \in J)$ els corresponents elements en l'enumeració $\overline{a}$ de A. Llavors,

$$(\mathfrak{A}, \overline{d}, a_l) \equiv^- (\mathfrak{A}', \overline{d}', a'_l), \tag{5.1}$$

i per tant, com que $D \subseteq A'$ i $\mathfrak{A}'_D \models \text{Th}^-(\mathfrak{A}_D)$,

$$(\mathfrak{A}, \overline{d}') \equiv^- (\mathfrak{A}', \overline{d}').$$

Llavors, per (5.1),

$$(\mathfrak{A}, \overline{d}') \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{d}).$$

Així, com que $\mathfrak{A}$ és L^--κ-homogeni, $|J| < \kappa$ i $a_l \in A$, hi ha $e \in A$ tal que

$$(\mathfrak{A}, \overline{d}', e) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{d}, a_l),$$

i llavors, per (5.1),

$$(\mathfrak{A}, \overline{d}', e) \equiv^- (\mathfrak{A}', \overline{d}', a'_l).$$

Així, e és una realització de p en $\mathfrak{A}$. Podem concloure que $\mathfrak{A}$ és L^--κ-saturada. □

Observem que, en la proposició anterior, si $\text{màx}(|L|, \aleph_0) < \kappa$ només necessitem que $\mathfrak{A}$ sigui L^--κ-universal.

Corol.lari 5.33 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura amb* $\text{màx}(|L|, \aleph_0) \leq |A|$. *Llavors $\mathfrak{A}$ és L^-saturada ssi $\mathfrak{A}$ és L^--homogènia i L^--universal.*

Demostració. Per la Proposició 5.32. □

Recordem la definició de model fortament homogeni. Donada una L-estructura $\mathfrak{A}$ i un cardinal κ, $\mathfrak{A}$ és *fortament κ-homogènia* ssi per a cada dues seqüències $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ i $\overline{a}' = (a'_i : i \in I)$ d'elements de A tals que $|I| < \kappa$ i

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv (\mathfrak{A}, \overline{a}'),$$

hi ha enumeracions $\overline{d} = (d_j : j \in J)$ i $\overline{d}' = (d'_j : j \in J)$ de A tals que

$$(\mathfrak{A}, \overline{d}) \equiv (\mathfrak{A}, \overline{d}')$$

i $\overline{a} \subseteq \overline{d}$ i $\overline{a}' \subseteq \overline{d}'$. Una estructura $\mathfrak{A}$ és *fortament homogènia* si és fortament $|A|$-homogènia.

Observem que, si tenim un model $\mathfrak{A}$ i enumeracions $\overline{d} = (d_j : j \in J)$ i $\overline{d}' = (d'_j : j \in J)$ de A tals que

$$(\mathfrak{A}, \overline{d}) \equiv (\mathfrak{A}, \overline{d}'),$$

la funció $h : A \to A$ definida per: $h(d_j) = d'_j$, per a tot $j \in J$, és un automorfisme. Ara introduirem la noció corresponent per a lògica sense identitat.

Definició 5.34 Donada una L-estructura $\mathfrak{A}$ i un cardinal κ, diem que $\mathfrak{A}$ és *fortament L^--κ-homogènia* ssi per a cada dues seqüències $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ i $\overline{a}' = (a'_i : i \in I)$ d'elements de A tals que $|I| < \kappa$ i

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}'),$$

hi ha enumeracions $\overline{d} = (d_j : j \in J)$ i $\overline{d}' = (d'_j : j \in J)$ de A tals que

$$(\mathfrak{A}, \overline{d}) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{d}')$$

i $\overline{a} \subseteq \overline{d}$ i $\overline{a}' \subseteq \overline{d}'$. Diem que $\mathfrak{A}$ és *fortament L^--homogènia* si és fortament L^--$|A|$-homogènia.

Observem que, si tenim un model $\mathfrak{A}$ i enumeracions $\overline{d} = (d_j : j \in J)$ i $\overline{d}' = (d'_j : j \in J)$ de A tals que

$$(\mathfrak{A}, \overline{d}) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{d}'),$$

la relació $R = \left\{ \langle d_j, d'_j \rangle : j \in J \right\}$ és una relació de parentiu.

Tenim que la L^--homogeneïtat forta és preservada per la relació de parentiu.

Proposició 5.35 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura i κ un cardinal. Llavors, $\mathfrak{A}$ és fortament L^--κ-homogènia ssi $\mathfrak{A}^*$ és fortament L^--κ-homogènia.*

Demostració. Seguint el mateix tipus d'arguments que vam fer servir a la demostració de la Proposició 5.27. □

Corol.lari 5.36 *Sigui κ un cardinal i $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ L-estructures tals que $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$. Llavors, $\mathfrak{A}$ és fortament L^--κ-homogènia ssi $\mathfrak{B}$ és fortament L^--κ-homogènia.*

Demostració. Per la Proposició 5.35. □

Observem que, per definició, tot model fortament L^--κ-homogeni és L^--κ-homogeni, però la inversa no és certa. Sigui $\mathfrak{A} = \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\eta}$, on $\boldsymbol{\lambda}$ és el tipus d'ordre dels reals i $\boldsymbol{\eta}$ és el tipus d'ordre dels racionals. Com que el tipus de semblança és finit i relacional i $\mathfrak{A}$ és reduïda, per la Proposició 2.15, per a cada dues seqüències $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ i $\overline{a}' = (a'_i : i \in I)$ d'elements de A,

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}') \quad \text{iff} \quad (\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv (\mathfrak{A}, \overline{a}'). \tag{5.2}$$

És un fet conegut que aquest model és ω-homogeni però no fortament ω-homogeni. Fent servir aquest fet i és senzill mostrar que $\mathfrak{A}$ és L^--ω-homogeni però no fortament L^--ω-homogeni.

Proposició 5.37 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura. Llavors, $\mathfrak{A}$ és fortament L^--homogènia ssi $\mathfrak{A}$ és L^--homogènia.*

Demostració. Pel mateix tipus d'arguments que els del resultat anàleg per a models fortament homogenis.

Ara veurem la relació entre els conceptes de model L^--saturat i de model fortament L^--homogeni.

Corol.lari 5.38 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura. Si $\mathfrak{A}$ és L^--saturada, llavors $\mathfrak{A}$ és fortament L^--homogènia.*

Demostració. Pel Corol.lari 5.30 i per la Proposició 5.37. □

Observem que la inversa del Corol.lari 5.38 no és certa, la estructura $\mathfrak{A}$ de l'Exemple 5.31 és L^--homogènia i en conseqüència, fortament L^--homogènia, però no és L^--saturada.

Finalment veurem la relació entre els conceptes de L^--homogeni, fortament L^--homogeni i les nocions corresponents de lògica amb identitat, parant esment especial a les estructures reduïdes.

Proposició 5.39 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura reduïda. Si $\mathfrak{A}$ és fortament L^--homogènia, llavors $\mathfrak{A}$ és fortament homogènia.*

Demostració. Suposem que $\mathfrak{A}$ és reduïda i fortament L^--homogènia i $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ i $\overline{a}' = (a'_i : i \in I)$ són dues seqüències d'elements de A tals que $|I| < |A|$ i

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv (\mathfrak{A}, \overline{a}').$$

Llavors,

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}'),$$

i com que $\mathfrak{A}$ és fortament L^--homogènia, hi ha enumeracions $\overline{d} = (d_j : j \in J)$ i $\overline{d}' = (d'_j : j \in J)$ de A, tals que

$$(\mathfrak{A}, \overline{d}) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{d}')$$

i $\overline{a} \subseteq \overline{d}$ i $\overline{a}' \subseteq \overline{d}'$. Però com que $\mathfrak{A}$ és reduïda, per la demostració de vi $\Rightarrow$ v) de la Proposició 2.17, hi ha un automorfisme $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ tal que, per a tot $j \in J$, $f(d_j) = d'_j$. Per tant,

$$(\mathfrak{A}, \overline{d}) \equiv (\mathfrak{A}, \overline{d}').$$

En conseqüència, $\mathfrak{A}$ és fortament homogènia. □

Corol.lari 5.40 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura reduïda. Si $\mathfrak{A}$ és L^--homogènia, llavors $\mathfrak{A}$ és homogènia.*

Demostració. Per la Proposició 5.39, perquè tota estructura L^--homogènia és fortament L^--homogènia i tota estructura fortament homogènia és homogènia. □

Corol.lari 5.41 *Sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura reduïda. Si $\mathfrak{A}$ és L^--saturada, llavors $\mathfrak{A}$ és fortament homogènia.*

Demostració. Pel Corol.lari 5.38 i la Proposició 5.39. □

Observem que en la Proposició 5.39 no podem treure la restricció que $\mathfrak{A}$ sigui reduïda:

Exemple 5.42 Sigui $L = \{E\}$ on E és un símbol relacional binari i $\mathfrak{A} = (\omega_1 + \omega, E^{\mathfrak{A}})$ on $E^{\mathfrak{A}}$ és la relació d'equivalència definida per: $\langle \alpha, \beta \rangle \in E^{\mathfrak{A}}$ ssi o bé ($\alpha \leq \omega_1$ i $\beta \leq \omega_1$) o bé ($\alpha > \omega_1$ i $\beta > \omega_1$), per a tot $\alpha, \beta \in \omega_1 + \omega$. És senzill verificar que $\mathfrak{A}$ no és reduïda i que $\mathfrak{A}^*$ és finita. Llavors, $\mathfrak{A}^*$ és L^--saturada i en conseqüència, pel Corol.lari 5.7, $\mathfrak{A}$ és L^--saturada. Llavors, pel Corol.lari 5.38, $\mathfrak{A}$ és fortament L^--homogènia. Però $\mathfrak{A}$ no és fortament homogènia: agafem $\alpha \leq \omega_1$ i $\beta > \omega_1$ i I el conjunt de tots els isomorfismes parcials finits p tals que $p(\alpha) = \beta$. És senzill veure que $I : (\mathfrak{A}, \alpha) \cong_p (\mathfrak{A}, \beta)$. Per tant,

$$(\mathfrak{A}, \alpha) \equiv (\mathfrak{A}, \beta).$$

Però, com que les classes d'equivalència de α i de β són de diferent cardinalitat, no hi ha cap automorfisme $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ tal que $h(\alpha) = \beta$.

Observem també que la inversa de la Proposició 5.39 no és certa:

Exemple 5.43 Sigui $L = \{P, E, f\}$ on P és un símbol relacional monàdic, E un símbol relacional binari i f un símbol funcional monàdic. Sigui $\mathfrak{A} = (A, P^{\mathfrak{A}}, f^{\mathfrak{A}}, E^{\mathfrak{A}})$, on $A = M \cup M' \cup \{b\}$, $M = \{a_n : n \in \omega\}$, $M' = \{a'_n : n \in \omega\}$, $b \notin M \cup M'$ i $M \cap M' = \emptyset$. Sigui $P^{\mathfrak{A}} = \{a_0, a'_0\}$ i per a tot $n \in \omega$, $f^{\mathfrak{A}}(a_{n+1}) = a_n$, $f^{\mathfrak{A}}(a_0) = a_0$, $f^{\mathfrak{A}}(a'_{n+1}) = a'_n$, $f^{\mathfrak{A}}(a'_0) = a'_0$ i $f^{\mathfrak{A}}(b) = b$. Finalment, sigui

$$E^{\mathfrak{A}} = \left[(M' \cup \{b\}) \times (M' \cup \{b\})\right] \cup [M \times M].$$

Clarament $\mathfrak{A}$ és reduïda. Observem que $\mathfrak{A}$ és fortament homogènia: suposem que $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ i $\overline{a}' = (a'_i : i \in I)$ són seqüències d'elements de A tals que

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv (\mathfrak{A}, \overline{a}').$$

És senzill mostrar, en aquest cas, que per a tot $i \in I$, $a_i = a'_i$. Per tant, la identitat és l'automorfisme desitjat. Però $\mathfrak{A}$ no és fortament L^--homogènia. Per a mostrar això primer demostrem que

$$(\mathfrak{A}, a_0) \sim_f (\mathfrak{A}, a'_0).$$

Sigui $n \in \omega$, provem que

$$(\mathfrak{A}, a_0) \sim_n (\mathfrak{A}, a'_0).$$

Sigui $X = \{\langle a_i, a'_i \rangle : i \in \omega\} \cup \{\langle a'_i, a_i \rangle : i \in \omega\}$ i per a tot $l \in \omega$, sigui

$$Y_l = X \cup \{\langle b, a_{k+1} \rangle, \langle a_{k+1}, b \rangle : k \geq l\}.$$

Ara, per a tot $m \leq n$, sigui

$$I_m = \left\{p \cup \{\langle a_0, a'_0 \rangle\} : p \subseteq Y_l, \textit{ per a algun } l \geq m\right\}.$$

Clarament $(I_m)_{m \leq n}$ satisfà les condicions i) – v) de la definició de $\sim_n$. Per tant,

$$(\mathfrak{A}, a_0) \sim_f (\mathfrak{A}, a'_0).$$

En conseqüència,

$$(\mathfrak{A}, a_0) \equiv^- (\mathfrak{A}, a'_0),$$

però no hi ha $d \in A$ tal que

$$(\mathfrak{A}, a_0, d) \equiv^- (\mathfrak{A}, a'_0, b).$$

Podem concloure que $\mathfrak{A}$ no és L^--homogènia. Per tant $\mathfrak{A}$ no és fortament L^--homogènia.

Com que l'estructura $\mathfrak{A}$ de l'anterior contraexemple és homogènia però no L^--homogènia, tenim que la inversa del Corol.lari 5.40 no és certa.

5.3 Teories L^--completes

Les teories axiomatitzades per un conjunt d'enunciats sense identitat han estat caracteritzades al Capítol 4. En aquesta secció estudiarem algunes propietats d'aquest tipus de teories (Proposicions 5.44, 5.45 i 5.46). Introduirem les nocions de teoria L^--completa i de teoria L^--$\aleph_0$-categòrica i desenvoluparem la tècnica d'eliminació de quantificadors per a L^-. Fent servir els models L^--ω-saturats i els mètodes de back-and-forth introduïts abans, presentarem caracteritzacions d'aquests conceptes (Proposicions 5.48, 5.52, 5.56 i 5.59). Acabem la secció amb l'estudi d'algunes teories completes i axiomatitzades per un conjunt d'enunciats sense identitat. Per a tenir més referències sobre el mètode d'eliminació de quantificadors i sobre la categoricitat de les teories vegeu [CK91], [Hod93b] i [Poi85].

A les proposicions que vénen a continuació, presentem dues característiques de les teories consistents axiomatitzades per un conjunt d'enunciats sense identitat. Primera: si tenen només models infinits, llavors no són κ-categòriques, per a cap cardinal infinit κ. I, segona: si són consistents i d'un tipus de semblança, o bé finit i relacional o bé que contingui símbols funcionals, no són completes.

Proposició 5.44 *Si T és un conjunt d'enunciats sense identitat que té només models infinits, llavors per a tot cardinal infinit κ, T no és κ-categòrica.*

Demostració. Sigui κ un cardinal infinit tal que hi ha un model $\mathfrak{A}$ de T de cardinalitat κ. Mostrarem que hi ha un model $\mathfrak{B}$ de T de cardinalitat κ tal que $\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{B}$. Per a demostrar que $\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{B}$, distingirem dos casos. En ambdós casos farem servir el fet següent:

Fet: Si $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ és un isomorfisme de $\mathfrak{A}$ sobre $\mathfrak{B}$, per a tot $a \in A$, la restricció de h a $[a]_{\Omega(\mathfrak{A})}$ és una bijecció entre $[a]_{\Omega(\mathfrak{A})}$ i $[h(a)]_{\Omega(\mathfrak{B})}$.

Cas I: Per a tot $a \in A$, $\left|[a]_{\Omega(\mathfrak{A})}\right| = \kappa$. Sigui $\mathfrak{B}$ una estructura obtinguda a partir de $\mathfrak{A}^*$ de la mateixa manera que en els Preliminars, fent servir la seqüència de cardinals $(\mu_b : b \in A)$ definida així: per a tot $b \in A$,

$$\mu_b = \begin{cases} \kappa, & \text{si } b = a_0, \\ 1, & \text{altrament,} \end{cases}$$

on a_0 és un element fixat de A. Llavors $\mathfrak{B} \in \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}(\mathfrak{A}^*)$ i com que T està axiomatitzada per un conjunt d'enunciats sense identitat i $\mathfrak{A} \models T$, $\mathfrak{B} \models T$. És clar que $\mathfrak{B}$ té cardinalitat κ i, fent servir el fet enunciat abans, és senzill veure que $\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{B}$.

Cas II: Hi ha $a \in A$ tal que $\left|[a]_{\Omega(\mathfrak{A})}\right| < \kappa$. En aquest cas sigui $\mathfrak{B}$ una estructura obtinguda a partir de $\mathfrak{A}$ de la mateixa manera que en els Preliminars, fent servir la seqüència de cardinals $(\mu_b : b \in A)$ definida així:

$$\mu_b = \begin{cases} \kappa, & \text{si } \left|[b]_{\Omega(\mathfrak{A})}\right| < \kappa, \\ 1, & \text{altrament,} \end{cases}$$

per a tot $b \in A$. Raonant com en el cas I, es mostra que $\mathfrak{B}$ és un model de T de cardinalitat κ que no és isomorf a $\mathfrak{A}$. □

Proposició 5.45 *Si L és finit i relacional, llavors no hi ha cap teoria completa i consistent axiomatitzada per un conjunt d'enunciats sense identitat.*

Demostració. Suposem, buscant una contradicció, que L és finit i relacional i que hi ha una teoria T completa i consistent axiomatitzada per un conjunt d'enunciats sense identitat de L. Com que L és finit i relacional, hi ha un conjunt finit Γ de fórmules de la forma $\forall \overline{z}\,[\phi(x,\overline{z}) \leftrightarrow \phi(y,\overline{z})]$, on $\phi \in L^-$ és atòmica, i tal que tota fórmula d'aquesta forma en les variables x, y és lògicament equivalent a una d'aquest conjunt. Sigui $\psi(x,y)$ la conjunció de totes les fórmules de Γ. Sigui σ l'enunciat $\forall x \forall y(x \approx y \leftrightarrow \psi(x,y))$. Com que T és completa, o bé $T \models \sigma$ o bé $T \models \neg\sigma$. Per tant, o bé tots els models de T són reduïts o bé tots els models de T són no reduïts, però això és absurd, perquè per suposició T està axiomatitzada per un conjunt d'enunciats sense identitat. □

Proposició 5.46 *Si L té símbols funcionals, llavors no hi ha cap teoria completa i consistent axiomatitzada per un conjunt d'enunciats sense identitat.*

Demostració. Suposem, buscant una contradicció, que L conté, si més no, un símbol funcional, f, d'arietat, diguem n, i que hi ha una teoria T completa i consistent axiomatitzada per un conjunt d'enunciats sense identitat de L. Primer, observem que, per a tot model $\mathfrak{A}$ de T i tota enumeració $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ de A, $Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}}$ és un model de T, on $Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}}$ és l'estructura definida als Preliminars. Com que $Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}}$ és una estructura de termes,

$$Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}} \models \forall x_1 \dots x_n \forall y_1 \dots y_n (f(x_1,\dots,x_n) \approx f(y_1,\dots,y_n) \to \bigwedge_{1 \le i \le n} x_i \approx y_i),$$

i

$$Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}} \models \forall x_1 \dots x_n \quad f(x_1,\dots,x_n) \not\approx x_1.$$

Per tant, com que T és completa,

$$T \models \forall x_1 \dots x_n \forall y_1 \dots y_n (f(x_1,\dots,x_n) \approx f(y_1,\dots,y_n) \to \bigwedge_{1 \le i \le n} x_i \approx y_i)$$

i

$$T \models \forall x_1 \dots x_n \quad f(x_1, \dots, x_n) \not\approx x_1.$$

Ara suposem que $\mathfrak{A}$ és un model de T i sigui $\mathfrak{B}$ una estructura obtinguda a partir de $\mathfrak{A}$ de la mateixa manera que en els Preliminars, fent servir la seqüència de cardinals $(\mu_b : b \in A)$ definida així: per a tot $b \in A$,

$$\mu_b = \begin{cases} 2, & \text{si } b = a, \\ 1, & \text{altrament,} \end{cases}$$

on a és un element fixat de A. Clarament $\mathfrak{B} \in \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}(\mathfrak{A})$ i com que T està axiomatitzada per un conjunt d'enunciats sense identitat, $\mathfrak{B} \models T$. Però observem que $f^{\mathfrak{A}}(a, \dots, a) \neq a$, perquè

$$T \models \forall x_1 \dots x_n \quad f(x_1, \dots, x_n) \not\approx x_1.$$

Llavors, si d i e són els dos elements de C_a, per definició de $\mathfrak{B}$, $f^{\mathfrak{B}}(d, \dots, d) \in C_{f^{\mathfrak{A}}(a,\dots,a)}$, $f^{\mathfrak{B}}(e, \dots, e) \in C_{f^{\mathfrak{A}}(a,\dots,a)}$ i $\left|C_{f^{\mathfrak{A}}(a,\dots,a)}\right| = 1$. Així, $f^{\mathfrak{B}}(d, \dots, d) = f^{\mathfrak{B}}(e, \dots, e)$, però això és absurd perquè $\mathfrak{B}$ és un model de T i

$$T \models \forall x_1 \dots x_n \forall y_1 \dots y_n (f(x_1, \dots, x_n) \approx f(y_1, \dots, y_n) \to \bigwedge_{1 \leq i \leq n} x_i \approx y_i). \ \square$$

Ara introduirem la noció de teoria L^--completa. Diem que una teoria T és *L^--completa* ssi per a tot enunciat $\sigma \in L^-$, $T \models \sigma$ o $T \models \neg\sigma$. Per tal de presentar una caracterització de les teories L^--completes, introduïm una mica de notació i demostrem alguns fets bàsics sobre els models L^--ω-saturats. Donades dues L-estructures $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ i seqüències $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ i $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ d'elements de A i de B respectivament, designarem amb $(\overline{a}, \overline{b})$ la relació $r \subseteq A \times B$ definida per:

$$r = \{\langle a_i, b_i \rangle : i \in I\}.$$

I donat un cardinal κ, un conjunt $D \subseteq A$ i un L^--κ-tipus p sobre D en $\mathfrak{A}$, designarem amb $p^{(\overline{a},\overline{b})}$ el tipus p^r de la Definició 5.1. Finalment definim els conjunts següents:

$$I_0 = \left\{(\overline{a}, \overline{b}) : (\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b}),\ \overline{a}, \overline{b} \text{ finits}\right\}$$

i

$$I_1 = \left\{(\overline{a}, \overline{b}) : (\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b}),\ \overline{a}, \overline{b} \text{ finits}\right\}.$$

Observem que els elements de I_0 i I_1 són relacions de parentiu parcials. En cas que $\mathfrak{A} \equiv_0^- \mathfrak{B}$, tenim que $\emptyset \in I_0$ i, en cas que $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$, tenim que $\emptyset \in I_1$.

Lema 5.47 *Si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són models L^--ω-saturats, els enunciats següents són equivalents:*

i) $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$.

ii) $I_1 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.

iii) $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.

iv) $\mathfrak{A} \sim_f \mathfrak{B}$.

Demostració. ii) $\Rightarrow$ iii), iii) $\Rightarrow$ iv) i iv) $\Rightarrow$ i) són clars. i $\Rightarrow$ ii) Suposem que $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. Veurem que I_1 satisfà les condicions i) – v) de la definició de $\sim_p$. Com que $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$, $\emptyset \in I_1$ i així, val la condició i). Siguin $\overline{a} = (a_i : i \in J)$ i $\overline{b} = (b_i : i \in J)$ seqüències finites tals que $(\overline{a}, \overline{b}) \in I_1$ i $c \in A$. Sigui p el tipus sense identitat de c sobre $\{a_i : i \in J\}$ en $\mathfrak{A}$. Com que $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$, $p^{(\overline{a}, \overline{b})}$ és un L^--1-tipus sobre $\{b_i : i \in J\}$ en $\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{B}$ és L^--ω-saturat, hi ha $d \in B$ que realitza $p^{(\overline{a}, \overline{b})}$. Així $(\overline{a}c, \overline{b}d) \in I_1$ i per tant, val la condició ii). D'una manera anàloga podem mostrar que val la condició iii). Les condicions iv) i v) se satisfan clarament. Podem concloure que $I_1 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$. □

Observem que, per a L-estructures qualssevol, el Lema 5.47 no és cert, recordem les L-estructures $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ de l'Exemple 3.5, on es demostra que $\mathfrak{A} \sim_f \mathfrak{B}$ però $\mathfrak{A} \not\sim_p \mathfrak{B}$.

Els models L^--ω-saturats ens oferiran una caracterització de la L^--completesa d'una teoria:

Proposició 5.48 *Per a tota teoria T de L, els enunciats següents són equivalents:*

i) *T és L^--completa.*

ii) *Si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són models L^--ω-saturats de T, llavors $I_1 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.*

iii) *Si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són models L^--ω-saturats de T, llavors $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.*

iv) *Si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són models L^--ω-saturats de T, llavors $\mathfrak{A} \sim_f \mathfrak{B}$.*

Demostració. ii) $\Rightarrow$ iii) i iii) $\Rightarrow$ iv) són clars. i) $\Rightarrow$ ii) Suposem que $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són models L^--ω-saturats de T. Com que T és L^--completa, $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. Llavors, pel Lema 5.47, $I_1 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.

iv) $\Rightarrow$ i) Mostrem que, si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són models de T, llavors $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. Siguin $\mathfrak{A}' \succeq \mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}' \succeq \mathfrak{B}$ extensions ω-saturades. Per tant, $\mathfrak{A}'$ i $\mathfrak{B}'$ són models L^--ω-saturats de T. Llavors, per iv), $\mathfrak{A}' \sim_f \mathfrak{B}'$ i en conseqüència, $\mathfrak{A}' \equiv^- \mathfrak{B}'$. Així $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. □

Ara estudiarem el concepte d'eliminació de quantificadors per a L^-. Donada una teoria T de L, diem que T *té eliminació de quantificadors per a* L^- ssi per a tota fórmula $\phi(\overline{x}) \in L^-$ hi ha una fórmula $\phi'(\overline{x}) \in L_0^-$ tal que

$$T \models \phi \leftrightarrow \phi'. \tag{5.3}$$

I diem que T *té eliminació de quantificadors pels no-enunciats de* L^- si la condició (5.3) val només per a les fórmules que no són enunciats. Donarem primer una caracterització semàntica de les teories L^--completes que tenen eliminació de quantificadors per a L^- i més tard una caracterització algebraica fent servir els models L^--ω-saturats i els mètodes de back-and-forth.

Lema 5.49 *Sigui* T *una teoria de* L *i* Φ *un conjunt de fórmules de* L^- *tal que*

i) *tota fórmula atòmica de* L^- *pertany a* Φ,

ii) Φ *està tancada sota combinacions booleanes,*

iii) *per a tota fórmula* $\phi(\overline{x}, y) \in \Phi$, $\exists y \phi(\overline{x}, y)$ *és equivalent, mòdul* T, *a una fórmula* $\psi(\overline{x}) \in \Phi$.

Llavors, per a tota fórmula $\phi(\overline{x}) \in L^-$ *hi ha una fórmula* $\phi'(\overline{x}) \in \Phi$ *tal que*

$$T \models \phi \leftrightarrow \phi'.$$

Demostració. Per inducció sobre la complexitat de ϕ. □

Observem que, si exigim en la condició iii) del Lema 5.49 que $\exists y \phi(\overline{x}, y)$ tingui si més no una variable lliure, llavors el Lema 5.49 val, si exigim en el seu enunciat que $\phi(\overline{x})$ tingui si més no una variable lliure. Ara introduïm una mica de notació. Si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són L-estructures, $\mathfrak{A} \Rrightarrow_1^- \mathfrak{B}$ significarà que tot enunciat existencial sense identitat vertader en $\mathfrak{A}$ és també vertader en $\mathfrak{B}$.

Lema 5.50 *Sigui* L *un tipus de semblança amb si més no un símbol constant. Per a tota teoria* T *de* L, *els enunciats següents són equivalents:*

i) T *té eliminació de quantificadors per a* L^-.

ii) *Si* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ *i* $\overline{a} \in A, \overline{b} \in B$ *són seqüències finites,*

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b}) \Rightarrow (\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

iii) *Si* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ *i* $\overline{a} \in A, \overline{b} \in B$ *són seqüències finites,*

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b}) \Rightarrow (\mathfrak{A}, \overline{a}) \Rrightarrow_1^- (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

Demostració. i) $\Rightarrow$ ii) i ii) $\Rightarrow$ iii) són clars. iii) $\Rightarrow$ i) Clarament si Φ és el conjunt de totes les fórmules sense quantificadors de L^-, llavors Φ satisfà les condicions i) i ii) del Lema 5.49. Vegem que també val la condició iii). Suposem que $\exists y\phi(\overline{x},y) \in L^-$ on $\phi(\overline{x},y) \in \Phi$. Si $T \cup \{\exists y\phi(\overline{x},y)\}$ és inconsistent, és clar. Altrament, sigui Γ el conjunt

$$\Gamma = \{\psi(\overline{x}) \in \Phi : T \cup \{\exists y\phi(\overline{x},y)\} \models \psi(\overline{x})\}.$$

Veurem que $T \cup \Gamma \models \exists y\phi(\overline{x},y)$. Suposem, buscant una contradicció, que hi ha un model $\mathfrak{A} \models T$ tal que, per a alguna $\overline{a} \in A$, $\mathfrak{A} \models \Gamma[\overline{a}]$ i $\mathfrak{A} \not\models \exists y\phi(\overline{x},y)[\overline{a}]$. Expandim el llenguatge afegint noves constants per als elements de $\overline{a}$. Considerem ara el conjunt Δ definit per

$$\Delta = \{\sigma(\overline{a}) : \sigma(\overline{x}) \in \Phi \text{ i } (\mathfrak{A},\overline{a}) \models \sigma(\overline{a})\}. \tag{5.4}$$

Tenim que $T \cup \Delta \cup \{\exists y\phi(\overline{a},y)\}$ és consistent, altrament sigui $\sigma_1(\overline{a}),\ldots,\sigma_n(\overline{a}) \in \Delta$ tal que

$$T \cup \{\exists y\phi(\overline{a},y)\} \models \neg\sigma_1(\overline{a}) \vee \ldots \vee \neg\sigma_n(\overline{a}),$$

llavors, com que les noves constants no apareixen a T,

$$T \models \exists y\phi(\overline{x},y) \to \neg\sigma_1(\overline{x}) \vee \ldots \vee \neg\sigma_n(\overline{x})$$

i per tant, per definició de Γ, tindrem $\neg\sigma_1(\overline{x}) \vee \ldots \vee \neg\sigma_n(\overline{x}) \in \Gamma$, però això és absurd perquè $\mathfrak{A} \models \Gamma[\overline{a}]$. Així $T \cup \Delta \cup \{\exists y\phi(\overline{a},y)\}$ és consistent. Sigui $(\mathfrak{B},\overline{b}) \models T \cup \Delta \cup \{\exists y\phi(\overline{a},y)\}$. Tenim que

$$(\mathfrak{B},\overline{b}) \equiv_0^- (\mathfrak{A},\overline{a}).$$

Llavors, per iii)

$$(\mathfrak{B},\overline{b}) \Rrightarrow_1^- (\mathfrak{A},\overline{a}).$$

Per tant, com que

$$\mathfrak{B} \models \exists y\phi(\overline{x},y)\left[\overline{b}\right],$$

obtenim

$$\mathfrak{A} \models \exists y\phi(\overline{x},y)[\overline{a}],$$

que és absurd. Per tant, $T \cup \Gamma \models \exists y\phi(\overline{x},y)$ i en conseqüència, hi ha $\psi(\overline{x}) \in \Phi$ tal que

$$T \models \psi(\overline{x}) \leftrightarrow \exists y\phi(\overline{x},y).$$

Així, pel Lema 5.49, podem concloure que T té eliminació de quantificadors per a L^-.
$\square$

Observem que en les condicions ii) i iii) del Lema 5.50 permetem que les seqüències $\overline{a}$ i $\overline{b}$ siguin buides. Tornem a enunciar el Lema per als no-enunciats.

Lema 5.51 *Per a tota teoria T de L, els enunciats següents són equivalents:*

i) *T té eliminació de quantificadors per a no-enunciats de L^-.*

ii) *Si* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \models T$ *i* $\bar{a} \in A, \bar{b} \in B$ *són seqüències finites no buides,*

$$(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \bar{b}) \Rightarrow (\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \bar{b}).$$

iii) *Si* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \models T$ *i* $\bar{a} \in A, \bar{b} \in B$ *són seqüències finites no buides,*

$$(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \bar{b}) \Rightarrow (\mathfrak{A}, \bar{a}) \Rrightarrow_1^- (\mathfrak{B}, \bar{b}).$$

Demostració. Anàloga a la demostració del Lema 5.50, però fent servir l'observació que segueix el Lema 5.49. □

Proposició 5.52 *Sigui L un tipus de semblança amb si més no un símbol constant. Per a tota teoria T de L els enunciats següents són equivalents:*

i) *T és L^--completa i té eliminació de quantificadors per a L^-.*

ii) *Si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són models L^--ω-saturats de T, $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.*

Demostració. i) $\Rightarrow$ ii) Suposem que $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són models L^--ω-saturats de T. Com que T és L^--completa, per la Proposició 5.48, $I_1 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$. I com que T té eliminació de quantificadors per a L^-, pel Lema 5.50, $I_0 = I_1$. Per tant $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.

ii) $\Rightarrow$ i) Suposem que és cert que, si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són models L^--ω-saturats de T, $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$. Llavors, per la Proposició 5.48, T és L^--completa. Suposem ara que $\mathfrak{A}'$ i $\mathfrak{B}'$ són models de T i $\bar{a} \in A'$ i $\bar{b} \in B'$ són seqüències finites tals que

$$(\mathfrak{B}', \bar{b}) \equiv_0^- (\mathfrak{A}', \bar{a}).$$

Veurem que

$$(\mathfrak{B}', \bar{b}) \equiv^- (\mathfrak{A}', \bar{a}).$$

Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ estructures ω-saturades tals que $\mathfrak{A} \succeq \mathfrak{A}'$ i $\mathfrak{B} \succeq \mathfrak{B}'$. Llavors,

$$(\mathfrak{B}, \bar{b}) \equiv_0^- (\mathfrak{A}, \bar{a})$$

i tenim que $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són models L^--ω-saturats de T. Per tant, per ii), $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$. Així, per la demostració del Teorema 3.13, tenim

$$(\mathfrak{B}, \bar{b}) \equiv_{\infty\omega}^- (\mathfrak{A}, \bar{a}),$$

i llavors

$$(\mathfrak{B}, \bar{b}) \equiv^- (\mathfrak{A}, \bar{a}).$$

Així,

$$(\mathfrak{B}', \bar{b}) \equiv^- (\mathfrak{A}', \bar{a}).$$

En conseqüència, pel Lema 5.50, podem concloure que T té eliminació de quantificadors per a L^-. □

Ara reescriurem la Proposició 5.51 per a no-enunciats.

Proposició 5.53 *Per a tota teoria T de L, els enunciats següents són equivalents:*

i) *T és L^--completa i té eliminació de quantificadors per a no-enunciats de L^-.*

ii) *Si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són models L^--ω-saturats de T, $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.*

Demostració. Anàloga a la demostració de la Proposició 5.52 però fent servir el Lema 5.51. □

Ara introduirem la noció de teoria L^--κ-categòrica. Sigui T un conjunt d'enunciats de L^- i κ un cardinal, diem que T és *L^--κ-categòrica* ssi T té, llevat d'isomorfisme, com a màxim un model reduït de cardinalitat κ. Com hem vist a la Proposició 5.44, per a tota teoria $T \subseteq L^-$ que tingui només models infinits, T no és κ-categòrica, per a cap cardinal infinit κ. No obstant això, com que per a tota $T \subseteq L^-$, $\mathrm{Mod}(T) = \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}(\mathrm{Mod}^*(T))$, on $\mathrm{Mod}^*(T)$ és la classe de tots els models reduïts de T, per tal d'estudiar els models de T és important conèixer quantes estructures reduïdes hi ha en cada cardinalitat. Hi ha teories que tenen només un model reduït en algun cardinal κ i hi ha teories que no tenen cap model reduït, en algun cardinal κ. Observem que aquest darrer fet no contradiu el Teorema de Löwenheim-Skolem. Per exemple, considerant la teoria sense identitat d'un model $\mathfrak{A}$, que sigui L^--$|A|^+$-saturat, hi haurà un cardinal κ tal que per a tot cardinal $\lambda \geq \kappa$ no hi haurà models reduïts d'aquesta teoria de cardinalitat λ.

Proposició 5.54 *Sigui T un conjunt d'enunciats de L^-. Si sempre que $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són models de T, $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, llavors T és L^--completa i L^--$\aleph_0$-categòrica.*

Demostració. D'una banda, com que, si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són models L^--ω-saturats de T, $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, per la Proposició 5.48, T és L^--completa. D'altra banda, com que, si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són models reduïts comptables de T, $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, pel Corol.lari 3.17, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Per tant, T és L^--$\aleph_0$-categòrica. □

La proposició que vindrà a continuació ens donarà una caracterització de les teories que són L^--completes i L^--$\aleph_0$-categòriques, quan L és comptable. Primer, però, demostrarem els lemes següents:

Lema 5.55 *Sigui L comptable i T un conjunt d'enunciats de L^-. Si T és L^--$\aleph_0$-categòrica, llavors T és L^--completa.*

Demostració. Suposem que T és L^--$\aleph_0$-categòrica. Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ models de T. Com que L és comptable, pel Teorema de Löwenheim-Skolem, hi ha L-estructures $\mathfrak{A}'$ i $\mathfrak{B}'$ comptables tals que $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}' \equiv \mathfrak{B}$. Llavors $\mathfrak{A}'$ i $\mathfrak{B}'$ són models comptables de

T i per tant, com que T és L^--$\aleph_0$-categòrica i $T \subseteq L^-$, $\mathfrak{A}'^*$ i $\mathfrak{B}'^*$ són models isomorfs de T. Clarament llavors $\mathfrak{A}' \equiv^- \mathfrak{B}'$ i per tant, $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. Podem concloure que T és L^--completa. □

Proposició 5.56 *Sigui L comptable. Per a tot conjunt T d'enunciats de L^- els enunciats següents són equivalents:*

i) *T és L^--completa i L^--$\aleph_0$-categòrica.*

ii) *Si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són models comptables de T, $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.*

Demostració. i) $\Rightarrow$ ii) Suposem que T és L^--completa i L^--$\aleph_0$-categòrica. Siguin $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ models comptables de T. Com que $T \subseteq L^-$, $\mathfrak{A}^*$ i $\mathfrak{B}^*$ són models de T. Per tant, com que T és L^--$\aleph_0$-categòrica, $\mathfrak{A}^* \cong \mathfrak{B}^*$. Llavors $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ i, en conseqüència, $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.

ii) $\Rightarrow$ i) Suposem que, si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són models comptables de T, $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$. Llavors, pel Corol.lari 3.17, si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són models reduïts comptables de T, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Així, T és L^--$\aleph_0$-categòrica i pel Lema 5.55, com que L és comptable, T és L^--completa. □

Ara estudiarem les teories que tenen les tres propietats següents alhora: admeten eliminació de quantificadors per a L^-, són L^--completes i L^--$\aleph_0$-categòriques.

Proposició 5.57 *Sigui L un tipus de semblança amb si més no un símbol constant i T un conjunt d'enunciats de L^-. Si per a tots els models $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ de T, $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, llavors T és L^--completa, L^--$\aleph_0$-categòrica i té eliminació de quantificadors per a L^-.*

Demostració. Com que, si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són models L^--ω-saturats de T, $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, per la Proposició 5.52, T és L^--completa i té eliminació de quantificadors per a L^-. Donats dos models reduïts comptables $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ de T, $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$. Llavors, pel Corol.lari 3.17, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Per tant, T també és L^--$\aleph_0$-categòrica. □

La Proposició 5.57 pot ser reescrita per a no-enunciats de la manera següent:

Proposició 5.58 *Sigui T un conjunt d'enunciats de L^-. Si per a tots els models $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ de T, $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, llavors T és L^--completa, L^--$\aleph_0$-categòrica i té eliminació de quantificadors per a no-enunciats de L^-.*

Demostració. La demostració és anàloga a la demostració de la Proposició 5.57 però fent servir la Proposició 5.53. □

Proposició 5.59 *Sigui L comptable i amb si més no un símbol constant. Per a tot conjunt T d'enunciats de L^-, si per a tots els models comptables $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ de T, $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, llavors T és L^--completa, L^--$\aleph_0$-categòrica i té eliminació de quantificadors per a L^-.*

Demostració. Com que, per a tots els models comptables $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ de T, $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, per la Proposició 5.56, T és L^--completa i L^--$\aleph_0$-categòrica. Suposem ara que $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \models T$ i que hi ha seqüències finites $\overline{a} \in A$ i $\overline{b} \in B$ tals que $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$. Vegem que $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$. Com que L és comptable, pel Teorema de Löwenheim-Skolem, hi ha L-estructures comptables $(\mathfrak{A}', \overline{a}')$ i $(\mathfrak{B}', \overline{b}')$ tals que $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv (\mathfrak{A}', \overline{a}')$ i $(\mathfrak{B}, \overline{b}) \equiv (\mathfrak{B}', \overline{b}')$. Llavors, $\mathfrak{A}'$ i $\mathfrak{B}'$ són models de T i $(\mathfrak{A}', \overline{a}') \equiv_0^- (\mathfrak{B}', \overline{b}')$. Així $(\overline{a}', \overline{b}') \in I_0$, i com que $I_0 : \mathfrak{A}' \sim_p \mathfrak{B}'$, per la demostració del Teorema 3.13, $(\mathfrak{A}', \overline{a}') \equiv^- (\mathfrak{B}', \overline{b}')$ i llavors $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$. Podem concloure, per la Proposició 5.50, que T té eliminació de quantificadors per a L^-. □

Reescrivim la Proposició 5.59 per a no-enunciats:

Proposició 5.60 *Sigui L comptable i T un conjunt d'enunciats de L^-. Si per a tots els models comptables $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ de T, $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, llavors T és L^--completa, L^--$\aleph_0$-categòrica i té eliminació de quantificadors per a no-enunciats de L^- .*

Demostració. La demostració és anàloga a la demostració de la Proposició 5.59 fent servir la Proposició 5.51. □

Per a acabar la secció estudiarem alguns exemples de teories completes consistents axiomatitzades per un conjunt d'enunciats sense identitat. Tots els exemples són de tipus de semblança infinits i relacionals perquè, com hem demostrat a les Proposicions 5.45 i 5.46, no hi ha teories completes consistents axiomatitzades per un conjunt d'enunciats de L^-, si L o bé és finit i relacional o bé conté símbols funcionals.

Exemple 5.61 Sigui $L = \{R_n : n \in \omega\}$, on, per a tot $n \in \omega$, R_n és un símbol relacional binari. Considerem la L-estructura $\mathfrak{A} = ({}^{\omega}2, R_n^{\mathfrak{A}})_{n \in \omega}$, on, per a tot $n \in \omega$, $R_n^{\mathfrak{A}}$ és la relació d'equivalència definida per:

$$\langle f, g \rangle \in R_n^{\mathfrak{A}} \quad \text{sii} \quad f \restriction n = g \restriction n,$$

per a tot $f, g \in {}^{\omega}2$. Sigui $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$, és un fet conegut que T és completa i que està axiomatitzada pel conjunt d'enunciats sense identitat següent:

$1_{(n)}$ "R_n és una relació d'equivalència".
$2_{(n)}$ "R_n té exactament 2^n classes d'equivalència".
$3_{(n)}$ $\forall x \forall y (R_{n+1}xy \rightarrow R_nxy)$.
$4_{(n)}$ $\forall x \exists y (R_nxy \wedge \neg R_{n+1}xy)$.

Com que T té només models infinits, per la Proposició 5.44, per a tot cardinal infinit κ, T no és κ-categòrica. No obstant això T és L^--$\aleph_0$-categòrica. Demostrarem ara aquesta propietat juntament amb el fet que T té eliminació de quantificadors per a no-enunciats de L^-. Per la Proposició 5.60, en tenim prou a demostrar que, per a tots els models comptables $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ de T, $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.

Suposem que $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són models comptables de T. Com que $\emptyset \in I_0$, la condició i) de la definició de $\sim_p$ se satisfà. Vegem ara que satisfà també la condició ii). Suposem que $\overline{c} = (c_i : i \leq k)$ i $\overline{d} = (d_i : i \leq k)$ són seqüències finites d'elements de A i de B respectivament, tals que $(\overline{c}, \overline{d}) \in I_0$ i $a \in A$. Podem distingir dos casos:

Cas I: Hi ha $i \leq k$ tal que, per a tot $n \in \omega$, $\langle c_i, a\rangle \in R_n^{\mathfrak{A}}$. Llavors, escollim $b = d_i$.

Cas II: Per a tot $i \leq k$ hi ha $n \in \omega$ tal que $\langle c_i, a\rangle \notin R_n^{\mathfrak{A}}$. Llavors, hi ha un nombre màxim $m \geq 1$ amb la propietat que hi ha $i \leq k$ tal que $\langle c_i, a\rangle \in R_m^{\mathfrak{A}}$. Pels axiomes, si $i, j \leq k$, $\langle c_i, a\rangle \in R_m^{\mathfrak{A}}$ i $\langle c_j, a\rangle \in R_m^{\mathfrak{A}}$, llavors $\langle c_i, c_j\rangle \in R_{m+1}^{\mathfrak{A}}$. Fixem $i_0 \leq k$ tal que $\langle c_{i_0}, a\rangle \in R_m^{\mathfrak{A}}$. Com que $\forall x \exists y (R_m xy \wedge \neg R_{m+1} xy)$ és un axioma de T, podem escollir $b \in B$ tal que

$$\mathfrak{B} \models R_m xy \wedge \neg R_{m+1} xy \, [d_{i_0}, b] \, .$$

Per elecció de b, en ambdós casos tenim que $(\overline{c}a, \overline{d}b) \in I_0$. Clarament la condició ii) se satisfà. La condició iii) la demostrem de manera anàloga. Podem concloure que $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$. Per tant, per la Proposició 5.60, T té eliminació de quantificadors per a no-enunciats de L^- i és L^--$\aleph_0$-categòrica.

Llevat d'isomorfisme, l'únic model reduït comptable de T és la subestructura de $\mathfrak{A}$ que té per domini el conjunt

$$C = \{f \in^{\omega} 2 : \exists n \in \omega \forall m \geq n, f(m) = 0\} \, .$$

$\mathfrak{A}$ és el model reduït més gran d'aquesta teoria. Per tal de demostrar-ho, veurem que $\mathfrak{A}$ és L^--$|A|^+$-saturat. Per la Proposició 5.15, n'hi ha prou amb mostrar que, per a tota L-estructura $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$ i tot $b \in B$, hi ha $g \in^{\omega} 2$ tal que

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(g/B).$$

Suposem que $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$ i $b \in B$. Com que per a tot $n \in \omega$ hi ha exactament 2^n classes d'equivalència en la partició originada per $R_n^{\mathfrak{B}}$, per a tot $n \in \omega$ hi ha $f_n \in^{\omega} 2$ tal que $\langle f_n, b\rangle \in R_n^{\mathfrak{B}}$. Llavors, considerem la funció $g \in^{\omega} 2$ definida de la manera següent: per a tot $n \in \omega$, $g(n) = f_n(n)$. Clarament, per a tot $n \in \omega$, $\langle g, b\rangle \in R_n^{\mathfrak{B}}$ i per tant,

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(g/B).$$

Exemple 5.62 Sigui L com en l'Exemple 5.61. Considerem la L-estructura $\mathfrak{B} = ({}^{\omega}\omega, R_n^{\mathfrak{B}})_{n \in \omega}$, on, per a tot $n \in \omega$, $R_n^{\mathfrak{B}}$ és la relació d'equivalència definida per:

$$\langle f, g\rangle \in R_n^{\mathfrak{B}} \quad \text{sii} \quad f \restriction n = g \restriction n,$$

per a tot $f, g \in^{\omega}\omega$. Sigui $T' = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$, és un fet conegut que T' és completa i que està axiomatitzada pel conjunt d'enunciats sense identitat següent:

1	$\forall x \forall y R_0 xy$.
$2_{(n)}$	"R_n és una relació d'equivalència".
$3_{(n)}$	$\forall x \forall y (R_{n+1}xy \rightarrow R_n xy)$.
$4_{(n)(m)}$	$\forall x \exists y_0 \ldots y_m (\bigwedge_{i \leq m} R_n x y_i \wedge \bigwedge_{i \leq m} \neg R_{n+1} x y_i \wedge \bigwedge_{\substack{i,j \leq m \\ i \neq j}} \neg R_{n+1} y_j y_i)$.

Com que T' té només models infinits, per la Proposició 5.44, per a tot cardinal infinit κ, T' no és κ-categòrica. Però, seguint el mateix tipus d'arguments que els de l'Exemple 5.61, es pot mostrar que és L^--$\aleph_0$-categòrica i té eliminació de quantificadors per a no-enunciats de L^-. Llevat d'isomorfisme, l'únic model reduït comptable de T' és la subestructura de $\mathfrak{B}$ que té com a domini el conjunt

$$D = \{f \in {}^{\omega}\omega : \exists n \in \omega \forall m \geq n, f(m) = 0\}.$$

Mostrarem ara que no hi ha cap model $\mathfrak{A}$ de T' que sigui L^--$|A|^+$-saturat. Suposem que $\mathfrak{A}$ és un model de T' i X el conjunt de totes les classes d'equivalència de $R_1^{\mathfrak{A}}$. Per a tot $x \in X$ escollim un representant $a_x \in A$. Considerem el L^--1-tipus sobre $\{a_x : x \in X\}$ en $\mathfrak{A}$ següent,

$$p = \{\neg R_1 y a_x : x \in X\}.$$

Clarament, p no és realitzat en $\mathfrak{A}$.

Exemple 5.63 Sigui $L = \{P_n : n \in \omega\}$, on, per a tot $n \in \omega$, P_n és un símbol relacional monàdic. Considerem la L-estructura $\mathfrak{A} = (P(\omega), P_n^{\mathfrak{A}})_{n \in \omega}$ de l'Exemple 5.12. Sigui $T'' = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. És un fet conegut que T'' és completa i que està axiomatitzada pel conjunt d'enunciats sense identitat següent:

$$\exists x (P_{i_0} x \wedge \ldots \wedge P_{i_n} x \wedge \neg P_{j_0} x \wedge \ldots \wedge \neg P_{j_k} x),$$

on $i_0, \ldots, i_n, j_0, \ldots, j_k \in \omega$ són tots diferents

Com que T'' té només models infinits, per la Proposició 5.44, per a tot cardinal infinit κ, T'' no és κ-categòrica. Demostrarem ara que T'' no és L^--$\aleph_0$-categòrica: sigui $\mathfrak{B}$ la subestructura de $\mathfrak{A}$ que té com a domini $P_\omega(\omega)$, la col.lecció de tots els conjunts finits de nombres naturals i sigui $\mathfrak{C}$ la subestructura de $\mathfrak{A}$ que té com a domini $P_\omega(\omega) \cup \{\omega\}$. Clarament, aquests dos models són comptables, reduïts i $\mathfrak{B} \not\cong \mathfrak{C}$.

És senzill mostrar que, per a tots els models L^--ω-saturats $\mathfrak{C}$ i $\mathfrak{B}$ de T, $I_0 : \mathfrak{C} \sim_p \mathfrak{B}$. Llavors, per la Proposició 5.53, T té eliminació de quantificadors per a no-enunciats de L^-. Com que l'arietat de tots els símbols de L és ≤ 1, pel Lema 5.17, tot model L^--ω-saturat d'aquesta teoria és L^--κ-saturat, per a tot cardinal κ. En particular, com hem mostrat a l'Exemple 5.12, $\mathfrak{A}$ és L^--$|A|^+$-saturat. $\mathfrak{A}$ és, per tant, el model reduït més gran d'aquesta teoria.

Lògica infinitària universal de Horn sense identitat

6.1 Teoremes de preservació i de caracterització

En aquest capítol estudiem principalment teoremes de preservació i de caracterització per a dos fragments dels llenguatges infinitaris $L^{-}_{\kappa\kappa}$, amb κ regular: el fragment universal de Horn i el fragment universal estricte de Horn, i obtenim teoremes de consistència conjunta, d'interpolació i de definibilitat. El fragment universal de Horn de la lògica de primer ordre amb identitat ha estat extensament estudiat; com a referències podem prendre [McN77], [Hod93a] i [Hod93b]. Però el fragment universal de Horn sense identitat, usat freqüentment en programació lògica, ha rebut molta menys atenció des del punt de vista de la teoria de models. Tanmateix, en el camp de la lògica algebraica podem trobar un teorema que, traduït adequadament, és un resultat de preservació pel fragment universal estricte de Horn dels llenguatges infinitaris sense identitat, en un tipus de semblança que, a part dels símbols funcionals té només un símbol relacional monàdic. Aquest teorema és degut a J. Czelakowski; [Cze80a], Teorema 6.1, i [Cze80b], Teorema 5.1. Aquest teorema i d'altres resultats de lògica algebraica han estat el punt de partença del nostre treball.

A partir d'ara κ serà un cardinal infinit regular. Recordem la definició de fórmula universal de Horn. Una fórmula ϕ de $L_{\kappa\kappa}$ és una *fórmula bàsica de Horn* si ϕ és una disjunció de menys de κ fórmules, on, com a màxim una d'aquestes és atòmica i tota la resta són negacions de fórmules atòmiques. Una fórmula bàsica de Horn és *estricta* si exactament un dels seus disjunts és atòmic. Una *fórmula universal de Horn* ϕ de $L_{\kappa\kappa}$ és una fórmula de la forma:

$$\forall \{x_\xi : \xi < \mu\} \bigwedge_{\rho<\nu} \psi_\rho$$

on $\nu, \mu < \kappa$, i per a tot $\rho < \nu$, ψ_ρ és una fórmula bàsica de Horn. Si per a tot $\rho < \nu, \psi_\rho$

és una fórmula bàsica de Horn estricta, es diu que ϕ és *fórmula universal de Horn estricta.* Donada una classe K de L-estructures, la *teoria universal de Horn sense identitat de K en $L_{\kappa\kappa}$* és el conjunt

$$\{\sigma \in L^{-}_{\kappa\kappa} : \sigma \text{ és un enunciat universal de Horn i per a tot } \mathfrak{D} \in K,\ \mathfrak{D} \models \sigma\}.$$

Per tal de demostrar el teorema següent recordem que un filtre sobre un conjunt no buit I és *κ-complet* si està tancat sota interseccions de menys de κ elements. És un fet conegut que, si I és un conjunt no buit, κ un cardinal infinit regular i J una col.lecció de subconjunts de I que tingui la propietat de la κ-intersecció (és a dir, la intersecció de menys de κ elements de J és no buida), llavors hi ha un filtre F sobre I que és κ-complet i que inclou J. Farem servir també el fet que, donada una classe d'estructures M, $\mathbf{P}_{\mathbf{R}\kappa}\mathbf{P}_{\mathbf{R}\kappa}(M) \subseteq \mathbf{P}_{\mathbf{R}\kappa}(M)$. Aquest fet pot ésser demostrat fàcilment fent servir el mateix tipus d'arguments que en la demostració del Lema 2.22 de la pàgina 216 de [BS81].

Teorema 6.1 *Per a tota classe K de L-estructures, els enunciats següents són equivalents:*

i) *K està axiomatitzada per un conjunt d'enunciats universals de Horn de $L^{-}_{\kappa\kappa}$.*

ii) *K està tancada sota $\mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}$, $\mathbf{H}_{\mathbf{S}}$, $\mathbf{S}$ i $\mathbf{P}_{\mathbf{R}\kappa}$.*

iii) *$K = \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{S}}\mathbf{S}\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(M)$, per a alguna classe M.*

Demostració. i) $\Rightarrow$ ii) i ii) $\Rightarrow$ iii) són clars. iii) $\Rightarrow$ i) Suposem que $K = \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{S}}\mathbf{S}\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(M)$, per a alguna classe M. Sigui T la teoria universal de Horn sense identitat de M en $L_{\kappa\kappa}$ i $\mathfrak{A}$ un model de T. Demostrarem que $\mathfrak{A} \in K$. Expandim el llenguatge afegint un nou símbol constant per a cada element de A. Considerem el $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$ en aquest llenguatge expandit. Per a tot $\Gamma \subseteq \mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$, si les noves constants que apareixen en els enunciats de Γ es troben entre aquestes $\{a_\xi : \xi < \mu\}$, escollim un conjunt de noves variables $\{x_\xi : \xi < \mu\}$ i designem amb $\{\phi' : \phi \in \Gamma\}$, on per a tota $\phi \in \Gamma$, ϕ' és la fórmula obtinguda a partir de ϕ substituint, per a cada $\xi < \mu$ la constant a_ξ per la variable x_ξ.

Donat un conjunt $\Gamma \subseteq \mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$ amb $|\Gamma| < \kappa$, considerem l'enunciat $\sigma = \exists\{x_\xi : \xi < \mu\} \bigwedge \Gamma'$. Mostrarem que hi ha $\mathfrak{D} \in \mathbf{P}(M)$ tal que $\mathfrak{D} \models \sigma$. Suposem el contrari, buscant una contradicció. Podem diferenciar dos casos:

Cas I: Hi ha com a màxim un enunciat a Γ que és una negació d'un enunciat atòmic. En aquest cas, $\neg\sigma$ és lògicament equivalent a un enunciat universal de Horn $\gamma \in L^{-}_{\kappa\kappa}$. Hem suposat que, per a tot $\mathfrak{D} \in \mathbf{P}(M)$, $\mathfrak{D} \models \neg\sigma$ i en particular, per a tot $\mathfrak{D} \in M$, $\mathfrak{D} \models \neg\sigma$, per tant $\gamma \in T$. Però això és impossible perquè $\mathfrak{A} \models T$ i $\mathfrak{A} \models \sigma$.

Cas II: Hi ha més d'un enunciat a Γ que és una negació d'un enunciat atòmic. En aquest cas, sigui $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ el conjunt de tots els enunciats atòmics de Γ i $\{\psi_\nu : \nu < \lambda\}$ una enumeració de tots els enunciats de Γ que són negacions d'enunciats atòmics. Per a tot $\nu < \lambda$, sigui σ_ν l'enunciat

$$\sigma_\nu = \exists\{x_\xi : \xi < \mu\}(\bigwedge \Gamma_0' \wedge \psi_\nu').$$

Observem que $\neg\sigma_\nu$ és lògicament equivalent a un enunciat universal de Horn de $L^-_{\kappa\kappa}$ i per un argument anàleg al del Cas I, podem obtenir $\mathfrak{D} \in M$ tal que $\mathfrak{D} \models \sigma_\nu$. Escollim, per a tot $\nu < \lambda$, $\mathfrak{D}_\nu \in M$ i elements de D_ν, $\{d^\nu_\xi : \xi < \mu\}$, tals que $\mathfrak{D}_\nu \models (\bigwedge \Gamma_0' \wedge \psi_\nu')[d^\nu_\xi : \xi < \mu]$. Considerem ara l'estructura $\prod_{\nu<\lambda} \mathfrak{D}_\nu$ i definim, per a tot $\xi < \mu$, un element $d_\xi \in \prod_{\nu<\lambda} D_\nu$ de la forma següent:

$$d_\xi(\nu) = d^\nu_\xi$$

per a tot $\nu < \lambda$. Llavors $\prod_{\nu<\lambda} \mathfrak{D}_\nu \models \bigwedge \Gamma' [d_\xi : \xi < \mu]$ i $\prod_{\nu<\lambda} \mathfrak{D}_\nu \in \mathbf{P}(M)$, que és impossible perquè hem suposat just el contrari.

Ara, per tal de demostrar el teorema, sigui $I = \{\Gamma \subseteq \mathsf{diag}^-(\mathfrak{A}) : |\Gamma| < \kappa\}$. Fent servir el fet que acabem de demostrar, escollim per a tot $\Gamma \in I$, $\mathfrak{D}_\Gamma \in \mathbf{P}(M)$ i elements $\{d^\Gamma_\xi : \xi < \mu\}$ de D_Γ tals que $\mathfrak{D}_\Gamma \models \bigwedge \Gamma'[d^\Gamma_\xi : \xi < \mu]$. Per a tot $\Gamma \in I$, sigui $J_\Gamma = \{\Delta \in I : \Gamma \subseteq \Delta\}$ i $J = \{J_\Gamma : \Gamma \in I\}$. Com que κ és regular, és senzill veure que J té la propietat de la κ-intersecció. Així, hi ha un filtre propi F sobre I que és κ-complet i que és una extensió de J. Ara construirem el producte reduït $\mathfrak{D} = \prod_{\Gamma\in I} \mathfrak{D}_\Gamma / F$. Observem que $\mathfrak{D} \in \mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}\mathbf{P}(M)$. Definim, per a tot $a \in A$, un element $\hat{a} \in \prod_{\Gamma \in I} D_\Gamma$ per:

$$\hat{a}(\Gamma) = \begin{cases} d^\Gamma_{\xi_0}, & \text{si } a \in \{a_\xi : \xi < \mu\} \text{ i } a = a_{\xi_0}, \\ \text{arbitrari}, & \text{altrament}, \end{cases}$$

per a tot $\Gamma \in I$. Llavors, per a tota $\psi \in \mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$,

$$J_{\{\psi\}} \subseteq \{\Delta \in I : \mathfrak{D}_\Delta \models \psi'[d^\Delta_\xi : \xi < \mu]\ \} \in F,$$

així per a tota fórmula atòmica $\phi \in L^-_{\kappa\kappa}$ i tota $a_1, \ldots, a_n \in A$,

$$\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_n] \text{ sii } \mathfrak{D} \models \phi\,[[\hat{a}_1]_F, \ldots, [\hat{a}_n]_F].$$

Així $(\mathfrak{D}, [\hat{a}]_F)_{a\in A}$ és una expansió de $\mathfrak{D}$ que satisfà el $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$. Per tant, per la Proposició 2.20, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}_\mathbf{S}\mathbf{S}\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}\mathbf{P}(M)$ i com que

$$\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}\mathbf{P}(M) \subseteq \mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(M) \subseteq \mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(M),$$

podem concloure que $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}_\mathbf{S}\mathbf{S}\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(M) = K$. □

Corol.lari 6.2 *Per a tot conjunt T d'enunciats de $L_{\kappa\kappa}$, els enunciats següents són equivalents:*

i) *T està axiomatitzada per un conjunt d'enunciats universals de Horn de $L^-_{\kappa\kappa}$.*

ii) *T es preserva sota $\mathbf{H_S^{-1}}$, $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{S}$ i $\mathbf{P_{R\kappa}}$.*

Demostració. Pel Teorema 6.1. □

Corol.lari 6.3 *Sigui κ o bé ω o bé un cardinal fortament compacte. Per a tot enunciat $\sigma \in L_{\kappa\kappa}$, σ es preserva sota $\mathbf{H_S^{-1}}$, $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{S}$ i $\mathbf{P_{R\kappa}}$ ssi σ és equivalent a un enunciat universal de Horn de $L^-_{\kappa\kappa}$.*

Demostració. Pel Corol.lari 6.2 fent servir els arguments usuals juntament amb el fet que, si $\kappa = \omega$ o κ és fortament compacte, llavors per a tot conjunt $\Gamma \cup \{\phi\}$ d'enunciats de $L_{\kappa\kappa}$, si $\Gamma \models \phi$, llavors hi ha $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ amb $|\Gamma_0| < \kappa$ tal que $\Gamma_0 \models \phi$. □

Ara mostrarem que, donats dos cardinals infinits i regulars λ i μ tals que $\lambda < \kappa$ i $\mu \leq \kappa$, no és cert el següent: per a tota classe K de L-estructures,

> K està axiomatitzada per un conjunt d'enunciats universals de Horn de $L^-_{\kappa\lambda}$ ssi $K = \mathbf{H_S^{-1}H_SSP_{R_\mu}}(M)$, per a alguna classe M.

Per tal de demostrar-ho introduïm una mica de notació i mostrem la proposició que ve a continuació. Una fórmula *universal* de $L_{\kappa\lambda}$ és una fórmula de la forma:

$$\forall \{x_\xi : \xi < \mu\} \psi,$$

on ψ és una fórmula sense quantificadors de $L_{\kappa\lambda}$. I una fórmula *existencial* de $L_{\kappa\kappa}$ és una fórmula de la forma:

$$\exists \{x_\xi : \xi < \mu\} \psi,$$

on ψ és una fórmula sense quantificadors de $L_{\kappa\lambda}$. Donades dues L-estructures, $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$, escriurem $\mathfrak{A} \equiv^-_{\forall_{\kappa\lambda}} \mathfrak{B}$ quan $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ satisfacin exactament els mateixos enunciats universals de $L^-_{\kappa\lambda}$ i escriurem $\mathfrak{A} \equiv^-_{\exists_{\kappa\lambda}} \mathfrak{B}$ quan $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ satisfacin exactament els mateixos enunciats existencials de $L^-_{\kappa\lambda}$.

Proposició 6.4 *Sigui L un tipus de semblança relacional amb $|L| < \lambda \leq \kappa$. Si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són L-estructures, els enunciats següents són equivalents:*

i) $\mathfrak{A} \equiv^-_{\forall_{\kappa\lambda}} \mathfrak{B}$.

ii) $\mathfrak{A} \equiv^-_{\exists_{\kappa\lambda}} \mathfrak{B}$.

iii) a) *Per a tot $\gamma < \lambda$ i tota seqüència $\bar{a} = (a_\zeta : \zeta \in \gamma)$ d'elements de A hi ha una seqüència $\bar{b} = (b_\zeta : \zeta \in \gamma)$ d'elements de B tal que $(\bar{a}, \bar{b})$ és una relació de parentiu parcial entre $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$.*

b) *Per a tot* $\gamma < \lambda$ *i tota seqüència* $\bar{b} = (b_\zeta : \zeta \in \gamma)$ *d'elements de* B *hi ha una seqüència* $\bar{a} = (a_\zeta : \zeta \in \gamma)$ *d'elements de* A *tal que* $(\bar{a}, \bar{b})$ *és una relació de parentiu parcial entre* $\mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}$.

Demostració. i) $\Leftrightarrow$ ii) és clar. ii) $\Rightarrow$ iii) Suposem que $\mathfrak{A} \equiv_{\exists^-_{\kappa\lambda}} \mathfrak{B}$. Mostrarem només a), perquè la demostració de b) és anàloga. Sigui $\gamma < \lambda$, $\bar{a} = (a_\zeta : \zeta \in \gamma)$ una seqüència d'elements de A i Γ el conjunt de totes les fórmules atòmiques i negacions de fórmules atòmiques sense identitat en les variables $(x_\zeta : \zeta \in \gamma)$ que són satisfetes per $\bar{a}$. Considerem la conjunció $\bigwedge \Gamma$ de totes les fórmules de Γ. Com que L és relacional, $\gamma < \lambda$ i $|L| < \lambda$, tenim que $\bigwedge \Gamma \in L^-_{\kappa\lambda}$. A més a més, $\exists \{x_\zeta : \zeta \in \gamma\} \bigwedge \Gamma$ és un enunciat existencial de $L^-_{\kappa\lambda}$ tal que $\mathfrak{A} \models \exists \{x_\zeta : \zeta \in \gamma\} \bigwedge \Gamma$. Llavors, com que hem suposat que $\mathfrak{A} \equiv_{\exists^-_{\kappa\lambda}} \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \models \exists \{x_\zeta : \zeta \in \gamma\} \bigwedge \Gamma$. Sigui $\bar{b} = (b_\zeta : \zeta \in \gamma)$ una seqüència d'elements de B tal que $\mathfrak{B} \models \bigwedge \Gamma [b_\zeta : \zeta \in \gamma]$. És senzill veure que $(\bar{a}, \bar{b})$ és una relació de parentiu parcial entre $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$.

iii) $\Rightarrow$ ii) Suposem ara que val la condició iii). Sigui $\sigma = \exists \{x_\zeta : \zeta \in \gamma\} \phi$ un enunciat existencial de $L^-_{\kappa\lambda}$ tal que $\mathfrak{A} \models \sigma$. Evidentment $\gamma \in \lambda$. Sigui $\bar{a} = (a_\zeta : \zeta \in \gamma)$ una seqüència d'elements de A, tal que $\mathfrak{A} \models \phi [a_\zeta : \zeta \in \gamma]$. Per la condició iii) a) hi ha una seqüència $\bar{b} = (b_\zeta : \zeta \in \gamma)$ d'elements de B tal que $(\bar{a}, \bar{b})$ és una relació de parentiu parcial entre $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$. Com que L és relacional, pel Lema 3.5, tenim que $\mathfrak{B} \models \phi [b_\zeta : \zeta \in \gamma]$, així tenim que $\mathfrak{B} \models \sigma$. Per un argument anàleg es pot mostrar que, si $\mathfrak{B} \models \sigma$ i σ és un enunciat existencial de $L^-_{\kappa\lambda}$, llavors $\mathfrak{A} \models \sigma$. Per tant, $\mathfrak{A} \equiv_{\exists^-_{\kappa\lambda}} \mathfrak{B}$. □

La Proposició 6.4 no és certa per a tipus de semblança qualssevol. Sigui $L = \{P, f\}$, on P és un símbol relacional monàdic i f un símbol funcional monàdic. Considerem la L-estructura $\mathfrak{A} = (\{0,1\}, P^{\mathfrak{A}}, f^{\mathfrak{A}})$, on $P^{\mathfrak{A}} = \{0\}$, $f^{\mathfrak{A}}(0) = 0$ i $f^{\mathfrak{A}}(1) = 0$ i la L-estructura $\mathfrak{B} = (\{0,1\}, P^{\mathfrak{B}}, f^{\mathfrak{B}})$, on $P^{\mathfrak{B}} = \{0\}$, $f^{\mathfrak{B}}(0) = 1$ i $f^{\mathfrak{B}}(1) = 0$. Clarament $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ satisfan la condició iii) de la Proposició 6.4 però $\mathfrak{A} \models \forall x P f x$ i $\mathfrak{B} \not\models \forall x P f x$. Així, no satisfan els mateixos enunciats universals.

Ara donarem una demostració del fet que hem esmentat abans, fent ús de la Proposició 6.4. Podem distingir dos casos. Cas I: $\lambda < \mu$. Agafem $L = \{R\}$, on R és un símbol relacional binari. Sigui $\mathfrak{A} = (\lambda + 1, <)$, on $<$ és el bon ordre usual de $\lambda + 1$ i sigui $\mathfrak{B}$ la subestructura de $\mathfrak{A}$ amb domini λ. Fent servir la Proposició 6.4 és senzill mostrar que $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ satisfan exactament els mateixos enunciats universals de $L^-_{\kappa\lambda}$ i, per tant, satisfan exactament els mateixos enunciats universals de Horn de $L^-_{\kappa\lambda}$. Però clarament no satisfan els mateixos enunciats universals de Horn de $L^-_{\mu\mu}$, perquè l'enunciat

$$\forall \{x_\xi : \xi \leq \lambda\} \bigvee_{\rho < \xi \leq \lambda} \neg R x_\rho x_\xi$$

és vertader en $\mathfrak{B}$ però no en $\mathfrak{A}$. Per tant, $K = \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1} \mathbf{H}_\mathbf{S} \mathbf{S} \mathbf{P}_{\mathbf{R}_\mu}(\mathfrak{B})$ no és axiomatitzable per un conjunt d'enunciats universals de Horn de $L^-_{\kappa\lambda}$..

Cas II: $\lambda \geq \mu$. Podem trobar una classe axiomatitzada per un conjunt d'enunciats universals de Horn de $L^{-}_{\kappa\lambda}$ i que no està axiomatitzada per un conjunt d'enunciats universals de Horn de $L^{-}_{\mu\mu}$. Agafem $L = \{P_\xi : \xi \in \mu\}$, on, per a cada $\xi \in \mu$, P_ξ és un símbol relacional monàdic. Considerem l'enunciat següent de $L^{-}_{\kappa\lambda}$,

$$\sigma = \forall x \bigvee_{\xi \in \mu} \neg P_\xi x.$$

Sigui $\mathfrak{A} = (\mu, P^{\mathfrak{A}}_\xi)_{\xi \in \mu}$, on, per a tot $\xi \in \mu$, $P^{\mathfrak{A}}_\xi = \{\alpha \in \mu : \xi \leq \alpha\}$, i $\mathfrak{B} = (\mu+1, P^{\mathfrak{B}}_\xi)_{\xi \in \mu}$, on, per a tot $\xi \in \mu$, $P^{\mathfrak{B}}_\xi = \{\alpha \in \mu + 1 : \xi \leq \alpha\}$. Fent servir la Proposició 6.4, és senzill demostrar que, per a tot $L_0 \subseteq L$ amb $|L_0| < \mu$, $\mathfrak{A} \restriction L_0$ i $\mathfrak{B} \restriction L_0$ satisfan exactament els mateixos enunciats universals del llenguatge infinitari $(L_0)^{-}_{\mu\mu}$. Així $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ satisfan exactament els mateixos enunciats universals de $L^{-}_{\mu\mu}$ i per tant, satisfan els mateixos enunciats universals de Horn de $L^{-}_{\mu\mu}$. Si $\mathrm{Mod}(\sigma)$ fos axiomatitzada per un conjunt d'enunciats universals de Horn de $L^{-}_{\mu\mu}$, tindríem $\mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}(\sigma)$, perquè $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(\sigma)$, però és clar que $\mathfrak{B} \notin \mathrm{Mod}(\sigma)$. Així, la classe $\mathrm{Mod}(\sigma)$ és la classe que estàvem buscant. □

Ara, com a conseqüència del Teorema 6.1 obtindrem una caracterització pel fragment universal estricte de Horn. Recordem que una *estructura trivial* és una estructura amb només un element, en la qual les interpretacions dels símbols relacionals no són buides i, per tant, tota fórmula universal-atòmica hi és vertadera.

Corol.lari 6.5 *Per a tota classe K de L-estructures, els enunciats següents són equivalents:*

i) *K està axiomatitzada per un conjunt d'enunciats universals de Horn estrictes de $L^{-}_{\kappa\kappa}$.*

ii) *K està tancada sota $\mathbf{H}^{-1}_{\mathbf{S}}, \mathbf{H}_{\mathbf{S}}, \mathbf{S}$ i $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}$ i conté una estructura trivial.*

iii) *$K = \mathbf{H}^{-1}_{\mathbf{S}}\mathbf{H}_{\mathbf{S}}\mathbf{S}\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(M)$, per a alguna classe M que conté una estructura trivial.*

Demostració. Pel Teorema 6.1, fent servir el fet que, en una estructura trivial tot enunciat universal de Horn estricte de $L^{-}_{\kappa\kappa}$ és vertader i tot enunciat universal de Horn de $L^{-}_{\kappa\kappa}$ no estricte és fals. □

El teorema que ve a continuació és una millora del Teorema 6.1 per a $L^{-}_{\kappa\kappa}$ en cas que κ sigui o bé ω o bé fortament compacte. A la demostració fem servir el fet que, donada una classe d'estructures M, si κ és o bé ω o bé fortament compacte, llavors $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(M) \subseteq \mathbf{SPP}_{\mathbf{U}_\kappa}(M)$. Aquest fet es pot demostrar fàcilment fent servir el mateix tipus d'arguments que en la demostració del Lema 2.22 de la pàgina 216 de [BS81].

Teorema 6.6 *Sigui κ o bé ω o bé fortament compacte. Si K és una classe de L-estructures, els enunciats següents són equivalents:*

i) *K està axiomatitzada per un conjunt d'enunciats universals de Horn (estrictes) de $L^-_{\kappa\kappa}$.*

ii) *K està tancada sota $\mathbf{H_S^{-1}}, \mathbf{H_S}, \mathbf{S}, \mathbf{P}$ i $\mathbf{P_{U_\kappa}}$ (i conté una estructura trivial).*

iii) *$K = \mathbf{H_S^{-1}H_S SPP_{U_\kappa}}(M)$, per a alguna classe M (que conté una estructura trivial).*

Demostració. Només mostrarem el cas no estricte. El cas estricte s'obté de la mateixa manera com el Corol.lari 6.5 ha estat obtingut a partir del Teorema 6.1. i) $\Rightarrow$ ii) i ii) $\Rightarrow$ iii) són fàcils de demostrar. iii) $\Rightarrow$ i) Suposem que $K = \mathbf{H_S^{-1}H_S SPP_{U_\kappa}}(M)$, per a alguna classe M. Com que

$$\mathbf{PP_{U\kappa}}(M) \subseteq \mathbf{P_{R\kappa}P_{R\kappa}}(M) \subseteq \mathbf{P_{R\kappa}}(M),$$

llavors

$$K = \mathbf{H_S^{-1}H_S SPP_{U_\kappa}}(M) \subseteq \mathbf{H_S^{-1}H_S SP_{R_\kappa}}(M).$$

I com que κ és o bé ω o bé fortament compacte,

$$\mathbf{P_{R\kappa}}(M) \subseteq \mathbf{SPP_{U\kappa}}(M).$$

Per tant,

$$\mathbf{H_S^{-1}H_S SP_{R_\kappa}}(M) \subseteq \mathbf{H_S^{-1}H_S SPP_{U_\kappa}}(M) = K.$$

Així,

$$K = \mathbf{H_S^{-1}H_S SP_{R_\kappa}}(M).$$

Pel Teorema 6.1 podem concloure que K està axiomatitzada per un conjunt d'enunciats universals de Horn estrictes de $L^-_{\kappa\kappa}$. □

Ara demostrarem un teorema similar al Teorema 6.1 però pel llenguatge infinitari $L^-_{\infty\infty}$. La caracterització s'obtindrà en termes dels operadors $\mathbf{S}$, $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{H_S^{-1}}$ i $\mathbf{P}$, sense que intervinguin els productes reduïts, el preu a pagar és haver de treballar amb classes d'enunciats en lloc de conjunts.

Teorema 6.7 *Per a tota classe K de L-estructures, els enunciats següents són equivalents:*

i) *K està axiomatitzada per una classe d'enunciats universals de Horn (estrictes) de $L^-_{\infty\infty}$.*

ii) *K està tancada sota* $\mathbf{H_S^{-1}}$, $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{S}$ *i* $\mathbf{P}$ *(i conté una estructura trivial).*

iii) $K = \mathbf{H_S^{-1}H_SSP}(M)$, *per a alguna classe M (que conté una estructura trivial).*

Demostració. Només mostrarem el cas no estricte. El cas estricte s'obté de la mateixa manera com el Corol.lari 6.5 ha estat obtingut a partir del Teorema 6.1. i) $\Rightarrow$ ii) i ii) $\Rightarrow$ iii) són fàcils de demostrar. iii) $\Rightarrow$ i) Suposem que $K = \mathbf{H_S^{-1}H_SSP}(M)$, per a alguna classe M. Sigui T la teoria universal de Horn sense identitat en $L_{\infty\infty}$ de M, això és, la classe de tots els enunciats universals de Horn de $L^{-}_{\infty\infty}$ vertaders a totes les estructures de M. Mostrarem que, per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$, si $\mathfrak{A} \models T$ llavors $\mathfrak{A} \in K$. Suposem que $\mathfrak{A} \models T$. Expandim el llenguatge afegint un nou símbol constant per a cada element de A. Sigui $\lambda = |A|$ i $\{a_\xi : \xi < \lambda\}$ una enumeració de les noves constants. Considerem el $\mathsf{diag}^{-}(\mathfrak{A})$ en aquest llenguatge expandit. Sigui $\{x_\xi : \xi < \lambda\}$ un conjunt de variables noves i Γ' el conjunt obtingut a partir de $\mathsf{diag}^{-}(\mathfrak{A})$ substituint, a cada enunciat de $\mathsf{diag}^{-}(\mathfrak{A})$, per a tot $\xi < \lambda$, la constant a_ξ per la variable x_ξ. Llavors argumentant com a la demostració del Teorema 6.1 es pot obtenir $\mathfrak{D} \in \mathbf{P}(M)$ tal que $\mathfrak{D} \models \exists\{x_\xi : \xi < \lambda\} \bigwedge \Gamma'$. Escollim un conjunt $\{d_\xi : \xi < \lambda\}$ d'elements de D tal que $\mathfrak{D} \models \bigwedge \Gamma' [d_\xi : \xi < \lambda]$. Llavors $(\mathfrak{D}, d_\xi)_{\xi<\lambda}$ és una expansió de $\mathfrak{D}$ que satisfà el $\mathsf{diag}^{-}(\mathfrak{A})$. Per tant, per la Proposició 2.20, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S^{-1}H_SSP}(M) = K$. □

Ara demostrarem un teorema de caracterització fent servir, en lloc de productes reduïts, productes directes i classes d'estructures κ-locals. Donat un cardinal infinit κ, diem que una classe K d'estructures és *κ-local*, si tota estructura té la propietat següent: si totes les seves subestructures generades per menys de κ elements pertanyen a K, llavors també ella pertany a K.

Teorema 6.8 *Sigui κ un cardinal infinit regular no comptable, L un tipus de semblança tal que $|L| < \kappa$ i K una classe de L-estructures. Llavors els enunciats següents són equivalents:*

i) *K està axiomatitzada per un conjunt d'enunciats universals (estrictes) de Horn de $L^{-}_{\kappa\kappa}$.*

ii) *K és κ-local i està tancada sota* $\mathbf{H_S^{-1}}$, $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{S}$ *i* $\mathbf{P}$ *(i conté una estructura trivial).*

Demostració. Només mostrarem el cas no estricte. El cas estricte s'obté de la mateixa manera com el Corol.lari 6.5 ha estat obtingut a partir del Teorema 6.1. i) $\Rightarrow$ ii) és senzill perquè tot enunciat universal de Horn de $L_{\kappa\kappa}$ que sigui fals en una estructura, és fals en una subestructura seva generada per menys de κ elements. ii) $\Rightarrow$ i) Sigui T la teoria universal de Horn sense identitat en $L_{\kappa\kappa}$ de K i $\mathfrak{A}$ un model de T. Veurem que $\mathfrak{A} \in K$. Com que K és κ-local, en tenim prou a mostrar que tota subestructura de $\mathfrak{A}$ generada per menys de κ elements pertany a K. Sigui $\mathfrak{B}$ una subestructura de $\mathfrak{A}$ generada per menys de κ elements. Com que κ és un cardinal infinit regular no comptable i $|L| < \kappa$ tenim que $|B| < \kappa$. Llavors $\mathsf{diag}^{-}(\mathfrak{B})$ és un conjunt de cardinalitat menor que κ i podem argumentar com a la demostració del Teorema 6.7 per a concloure que $\mathfrak{B} \in \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{S}}\mathbf{SP}(M) = K$. □

6.2 Classes universals de Horn reduïdes sense identitat

Ara presentarem teoremes de caracterització per a les classes d'estructures reduïdes que són els models reduïts d'alguna teoria universal de Horn sense identitat en $L_{\kappa\kappa}$. Com que per a tota estructura n'existeix la reducció, podem considerar, per a tot operador O que transformi una classe d'estructures K en una altra $O(K)$, l'operador corresponent O^* que transforma la classe d'estructures K en la classe de les estructures isomorfes a alguna reducció d'un membre de $O(K)$. Anomenarem a aquests operadors *operadors de reducció* i anomenarem a O^* la *reducció* de O. Els operadors de reducció van ésser considerats per primer cop a [BP92]. Demostrarem un teorema que caracteritza quan una classe d'estructures reduïdes és la classe dels models reduïts d'una teoria universal de Horn de $L_{\kappa\kappa}^{-}$. Aquest teorema és conseqüència de resultats anteriors i del Lema 6.10 que estudia el comportament d'alguns operadors de reducció. La seva formulació és igual que la del teorema corresponent per a $L_{\kappa\kappa}$ (amb identitat) llevat del fet que reemplacem els operadors $\mathbf{S}$ i $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}$ per les seves reduccions.

Definició 6.9 Per a tota classe K de L-estructures sigui K^* la classe següent:

$$K^* = \{\mathfrak{B} : \text{ hi ha } \mathfrak{A} \in K \text{ tal que } \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}^*\}.$$

I, per a tot operador $\mathbf{O}$, $\mathbf{O}^*$ és l'operador que, per a tota classe K de L-estructures

$$\mathbf{O}^*(K) = (\mathbf{O}(K))^*.$$

El lema següent estudia el comportament dels operadors de reducció.

Lema 6.10 *Per a tota classe K de L-estructures i tot operador $\mathbf{O} \in \{\mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}, \mathbf{P}_{\mathbf{U}_\kappa}\}$:*

i) $\mathbf{H}^{-1*}(K^*) \subseteq K^*$.

ii) $\mathbf{H}^*(K^*) \subseteq K^*$.

iii) $\mathbf{O}^*(K) \subseteq \mathbf{O}^*(K^*)$.

Demostració. i) Suposem que $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}^{-1*}(K^*)$. Sigui $\mathfrak{B} \in \mathbf{H}^{-1}(K^*)$ tal que $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}^*$ i sigui h un homomorfisme estricte de $\mathfrak{B}$ sobre algun $\mathfrak{C} \in K^*$. Llavors $\mathfrak{B}^* \cong \mathfrak{C}$. Per tant, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{C}$. Així, $\mathfrak{A} \in K^*$. La demostració de ii) és similar.

iii) Mostrem primer el cas en què $\mathbf{O}$ és $\mathbf{S}$. Suposem que $\mathfrak{A} \in \mathbf{S}^*(K)$. Siguin $\mathfrak{B} \in K$ i $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$ tals que $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{C}^*$. Sigui g_B^* l'homomorfisme canònic de $\mathfrak{B}$ sobre $\mathfrak{B}^*$. Llavors $\mathfrak{D} = g_B^*[\mathfrak{C}]$ és una subestructura de $\mathfrak{B}^*$, així $\mathfrak{D} \in \mathbf{S}(K^*)$. Com que $\mathfrak{C}^* \cong \mathfrak{D}^*$, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{D}^*$. Per tant, $\mathfrak{A} \in \mathbf{S}^*(K^*)$.

Ara demostrarem el cas en què $\mathbf{O}$ és $\mathbf{P}_{\mathbf{U}_\kappa}$. Suposem que $\mathfrak{A} \in \mathbf{P}^*_{\mathbf{U}_\kappa}(K)$. Sigui $\mathfrak{B} \in \mathbf{P}_{\mathbf{U}_\kappa}(K)$ tal que $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}^*$ i sigui $\{\mathfrak{B}_i : i \in I\} \subseteq K$ una família d'estructures i U un ultrafiltre propi κ-complet sobre un conjunt no buit I tal que $\mathfrak{B} = \prod_{i\in I} \mathfrak{B}_i/U$. Sigui $\mathfrak{C} = \prod_{i\in I} \mathfrak{B}_i^*/U$. Llavors, si per a cada $i \in I$, $g_{B_i}^*$ és l'homomorfisme canònic de $\mathfrak{B}_i$ sobre $\mathfrak{B}_i^*$, definim per a cada $f \in \prod_{i\in I} B_i$, $f' \in \prod_{i\in I} B_i^*$ per:

$$f'(i) = g_{B_i}^*(f(i))$$

per a cada $i \in I$. Llavors, definim la funció $h : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ per:

$$h([f]_U) = [f']_U$$

per a cada $f \in \prod_{i\in I} B_i$. Com que els homomorfismes canònics $g_{B_i}^*$ són estrictes, és immediat verificar que la definició és independent dels representants escollits i que és un homomorfisme estricte de $\mathfrak{B}$ sobre $\mathfrak{C}$. Per tant, $\mathfrak{B}^* \cong \mathfrak{C}^*$. Com que $\{\mathfrak{B}_i^* : i \in I\} \subseteq K^*$, $\mathfrak{B}^* \in \mathbf{P}^*_{\mathbf{U}_\kappa}(K^*)$. Llavors podem concloure que $\mathfrak{A} \in \mathbf{P}^*_{\mathbf{U}_\kappa}(K^*)$.

La demostració de la resta dels casos és similar a la darrera que hem donat. □

Ara demostrarem el teorema promès i la versió corresponent quan κ és fortament compacte o ω.

Teorema 6.11 *Per a tota classe K de L-estructures reduïdes, els enunciats següents són equivalents:*

i) *K és la classe dels models reduïts d'una teoria universal de Horn de $L^-_{\kappa\kappa}$.*

ii) *K està tancada sota $\mathbf{S}^*$ i $\mathbf{P}^*_{\mathbf{R}_\kappa}$.*

iii) *$K = \mathbf{S}^*\mathbf{P}^*_{\mathbf{R}_\kappa}(M)$, per a alguna classe M.*

Demostració. i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) és senzill. iii) $\Rightarrow$ i) Sigui T la teoria universal de Horn de M en $L^-_{\kappa\kappa}$. Si $\mathfrak{A}$ és un model reduït de T, llavors per la prova del Teorema 6.1 tenim que $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}_\mathbf{S}\mathbf{S}\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(M)$. Per tant, com que $\mathfrak{A}$ és reduït, $\mathfrak{A} \in \mathbf{S}^*\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(M)$ i pel Lema 6.10 iii) tenim que $\mathfrak{A} \in K$. □

Teorema 6.12 *Si κ és o bé un cardinal fortament compacte o bé ω, llavors per a tota classe K de L-estructures reduïdes, els enunciats següents són equivalents:*

i) *K és la classe dels models reduïts d'una teoria universal de Horn de $L^-_{\kappa\kappa}$.*

ii) *K està tancada sota* $\mathbf{S}^*$, $\mathbf{P}^*$ *i* $\mathbf{P}^*_{\mathbf{U}_\kappa}$.

iii) $K = \mathbf{S}^*\mathbf{P}^*\mathbf{P}^*_{\mathbf{U}_\kappa}(M)$, *per a alguna classe* M.

Demostració. Com la demostració del Teorema 6.11, però fent servir el Teorema 6.6 en lloc del Teorema 6.1. □

De la mateixa manera podem demostrar el següent:

Teorema 6.13 *Per a tota classe K de L-estructures reduïdes, els enunciats següents són equivalents:*

i) *K és la classe dels models reduïts d'una classe d'enunciats universals de Horn de* $L^-_{\infty\infty}$.

ii) *K està tancada sota* $\mathbf{S}^*$ *i* $\mathbf{P}^*$.

iii) $K = \mathbf{S}^*\mathbf{P}^*(M)$, *per a alguna classe* M.

D'aquests resultats també podem deduir els resultats corresponents per al cas dels enunciats universals de Horn estrictes, si afegim que les classes continguin una estructura trivial.

Ara donarem una demostració del ben conegut teorema de caracterització per a les classes de models d'una teoria universal de Horn de $L_{\kappa\kappa}$ (amb identitat) d'una determinada classe d'estructures. Amb un argument anàleg podem obtenir el teorema que correspon, per al cas dels llenguatges amb identitat, al Teorema 6.13, substituint els operadors $\mathbf{S}^*$ i $\mathbf{P}^*$ pels operadors $\mathbf{S}$ i $\mathbf{P}$.

Teorema 6.14 *Sigui L un tipus de semblança qualsevol. Llavors per a tota classe K de L-estructures els enunciats següents són equivalents:*

i) *K és la classe dels models d'una teoria universal de Horn de* $L_{\kappa\kappa}$.

ii) *K està tancada sota* $\mathbf{S}$ *i* $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}$.

iii) $K = \mathbf{S}\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(M)$, *per a alguna classe* M.

Demostració. i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) és senzill. iii) $\Rightarrow$ i) Sigui T la teoria universal de Horn de M en $L_{\kappa\kappa}$ (amb identitat). Expandim el tipus de semblança L amb un nou símbol relacional E i substituïm el símbol d'identitat pel símbol E en tot enunciat de T. Designem la teoria resultant amb T'. Donada una L-estructura $\mathfrak{A}$, sigui $\mathfrak{A}^E$ l'estructura de tipus $L \cup \{E\}$, $\langle \mathfrak{A}, E^{\mathfrak{A}^E} \rangle$, on $E^{\mathfrak{A}^E}$ és la identitat en el domini A de $\mathfrak{A}$. Òbviament, per a tota L-estructura $\mathfrak{A}$ la $L \cup \{E\}$-estructura $\mathfrak{A}^E$ és reduïda. Ara considerem la classe de $L \cup \{E\}$-estructures $M' = \{\mathfrak{A}^E : \mathfrak{A} \in M\}$. Clarament, la teoria universal de Horn en $L^-_{\kappa\kappa}$, de tipus $L \cup \{E\}$, de la classe M' és precisament T'.

Per tal de mostrar el que volem, sigui $\mathfrak{A}$ una L-estructura que sigui un model de T, veurem que $\mathfrak{A} \in K$. Clarament, $\mathfrak{A}^E$ és un model reduït de T'. Per tant, per la demostració del Teorema 6.11 tenim que $\mathfrak{A}^E \in \mathbf{S}^*\mathbf{P}^*_{\mathbf{R}_\kappa}(M')$. Siguin $\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{C}$ $L \cup \{E\}$-estructures tals que $\mathfrak{A}^E \cong \mathfrak{C}^*$, $\mathfrak{C}$ és una subestructura de $\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{B}$ és la reducció d'algun producte reduït, mòdul un filtre propi κ-complet, d'algun sistema no buit d'estructures de M'. Com que la interpretació de E és la identitat en tota estructura de M', la interpretació de E en tot producte reduït d'elements de M' ha d'esser la identitat. Per tant, tots aquests productes reduïts són estructures reduïdes. Així $E^{\mathfrak{B}}$ és la identitat i també ho és $E^{\mathfrak{C}}$. Llavors $\mathfrak{C}$ és reduïda i per tant, $\mathfrak{A}^E \cong \mathfrak{C}$. Així $E^{\mathfrak{A}^E}$ és la identitat. Com a conseqüència, tal i com és senzill de veure, $\mathfrak{A} \in \mathbf{SP}_{\mathbf{R}_\kappa}(M)$. □

6.3 Interpolació i definibilitat

Farem servir els resultats anteriors per a obtenir un teorema de consistència conjunta, Teorema 6.17; un teorema d'interpolació, Teorema 6.18; i un teorema de definibilitat, Teorema 6.19. Per a demostrar el teorema de consistència conjunta primer enunciarem el teorema de compacitat següent pel fragment de Horn del llenguatge infinitari $L_{\kappa\kappa}$. A [HS81] se'n pot trobar la demostració.

Teorema 6.15 (Compacitat) *Sigui Γ un conjunt d'enunciats de Horn de $L_{\kappa\kappa}$. Si tot $\Delta \subseteq \Gamma$ amb $|\Delta| < \kappa$ té un model, llavors Γ té un model.*

Corol.lari 6.16 *Sigui $\Gamma \cup \{\sigma\}$ un conjunt d'enunciats universals de Horn de $L_{\kappa\kappa}$. Si $\Gamma \models \sigma$, llavors hi ha $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que $|\Delta| < \kappa$ i $\Delta \models \sigma$.*

Demostració. Sigui $\sigma = \forall\{x_\xi : \xi < \lambda\}(\bigwedge_{\rho<\mu} \psi_\rho \to \phi)$, amb $\mu < \kappa$. Sigui $\bar{c} = (c_\xi : \xi < \lambda)$ una seqüència de nous símbols constants. Si $\Gamma \models \sigma$, llavors $\Gamma \models \bigwedge_{\rho<\mu} \psi_\rho(\bar{c}) \to \phi(\bar{c})$. Així $\Gamma \cup \{\psi_\rho(\bar{c}) : \rho < \mu\} \cup \{\neg\phi(\bar{c})\}$ no té cap model. Com que els $\psi_\rho(\bar{c})$ i $\neg\phi(\bar{c})$ són trivialment enunciats universals de Horn sense identitat del llenguatge expandit, podem aplicar el Teorema 6.15 i concloure que hi ha algun subconjunt Γ' de Γ amb $|\Gamma'| < \kappa$ tal que $\Gamma' \cup \{\psi_\rho(\bar{c}) : \rho < \mu\} \models \phi(\bar{c})$. Així $\Gamma' \models \sigma$. Si σ és de la forma $\forall\{x_\xi : \xi < \lambda\} \bigvee_{\rho<\mu} \neg\psi_\rho$ l'argument és anàleg. □

Siguin ara L_0 i L_1 tipus de semblança amb els mateixos símbols funcionals i constants i amb, com a mínim, un símbol relacional en comú. Sigui per a cada $i = 0, 1$, $L^i_{\kappa\kappa}$ el llenguatge infinitari de tipus L_i.

Teorema 6.17 *Per a tot conjunt $\Gamma_0 \subseteq L^0_{\kappa\kappa}$ i $\Gamma_1 \subseteq L^1_{\kappa\kappa}$ d'enunciats universals de Horn sense identitat, els enunciats següents són equivalents:*

i) $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ *és insatisfactible.*

ii) *Hi ha un enunciat universal de Horn sense identitat* $\theta \in L^0_{\kappa\kappa} \cap L^1_{\kappa\kappa}$ *tal que* $\Gamma_0 \models \theta$ *i* $\Gamma_1 \models \neg\theta$.

Demostració. ii) $\Rightarrow$ i) és clar. i) $\Rightarrow$ ii) Suposem que $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ és insatisfactible. Per a cada $i = 0, 1$, sigui K_i la classe següent

$$K_i = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \text{ és el reducte a } L_0 \cap L_1 \text{ d'alguna } \mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}(\Gamma_i)\}.$$

Mostrarem que K_0 està tancada sota $\mathbf{S}$ i $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}$. D'una banda, si $\mathfrak{B}' \in K_0$ i $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{B}'$, llavors hi ha una L_0-estructura $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{B} \models \Gamma_0$ i $\mathfrak{B}$ és una expansió de $\mathfrak{B}'$. Com que $L_0 \cap L_1$ conté tots els símbols funcionals i constants de L_0, hi ha $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{A}$ és una expansió de $\mathfrak{A}'$. Com que Γ_0 és un conjunt d'enunciats universals, $\mathfrak{A} \models \Gamma_0$ i per tant, $\mathfrak{A}' \in K_0$. Així K_0 està tancada sota $\mathbf{S}$. D'altra banda, com a conseqüència del Teorema d'expansió de [CK91] (Teorema 4.1.8), tenim que K_0 està tancada sota $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}$.

Considerem la classe $K = \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{S}}\mathbf{S}\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(K_0)$. Com que K_0 està tancada sota $\mathbf{S}$ i $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}$, $K = \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{S}}(K_0)$. Mostrarem ara que $K \cap K_1 = \emptyset$. Suposem, buscant una contradicció, que hi ha una $L_0 \cap L_1$-estructura $\mathfrak{B}' \in K \cap K_1$. Com que $\mathfrak{B}' \in K$, hi ha $\mathfrak{A}' \in K_0$ tal que $\mathfrak{B}' \in \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{S}}(\mathfrak{A}')$. Per la Proposició 2.17, $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}' \in \mathbf{H}_{\mathbf{S}}(\mathfrak{C}')$, per a alguna $\mathfrak{C}'$. Siguin $h : \mathfrak{C}' \to \mathfrak{A}$ i $g : \mathfrak{C}' \to \mathfrak{B}'$ homomorfismes estrictes exhaustius. Com que $\mathfrak{A}' \in K_0$, hi ha una L_0-estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Gamma_0$ i $\mathfrak{A}$ és una expansió de $\mathfrak{A}'$. I com que $\mathfrak{B}' \in K_1$, hi ha una L_1-estructura $\mathfrak{B}$ tal que $\mathfrak{B} \models \Gamma_1$ i $\mathfrak{B}$ és una expansió de $\mathfrak{B}'$. Ara definim una $L_0 \cup L_1$-estructura $\mathfrak{C}$ que és una expansió de $\mathfrak{C}'$:

- Per a tot símbol relacional n-àdic $R \in L_0 - (L_0 \cap L_1)$ i tota $c_1, \ldots, c_n \in C'$,
$$\langle c_1, \ldots, c_n \rangle \in R^{\mathfrak{C}} \quad \text{ssi} \quad \langle h(c_1), \ldots, h(c_n) \rangle \in R^{\mathfrak{A}}.$$
- Per a tot símbol relacional n-àdic $R \in L_1 - (L_0 \cap L_1)$ i tota $c_1, \ldots, c_n \in C'$,
$$\langle c_1, \ldots, c_n \rangle \in R^{\mathfrak{B}} \quad \text{ssi} \quad \langle g(c_1), \ldots, g(c_n) \rangle \in R^{\mathfrak{B}}.$$

Observem que, per definició, com que L_0 i L_1 tenen els mateixos símbols funcionals i constants, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}_{\mathbf{S}}(\mathfrak{C} \restriction L_0)$ i $\mathfrak{B} \in \mathbf{H}_{\mathbf{S}}(\mathfrak{C} \restriction L_1)$. Però com que Γ_0 i Γ_1 són conjunts d'enunciats sense identitat i $\mathfrak{A} \models \Gamma_0$ i $\mathfrak{B} \models \Gamma_1$, tenim que $\mathfrak{C} \models \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, que és absurd perquè $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ és insatisfactible. Així, podem concloure que $K \cap K_1 = \emptyset$.

Com que $K = \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{S}}\mathbf{S}\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(K_0)$, pel Teorema 6.1, K està axiomatitzada per un conjunt Δ d'enunciats universals de Horn sense identitat de $L^0_{\kappa\kappa} \cap L^1_{\kappa\kappa}$. Com que $K_0 \subseteq K$, $\Gamma_0 \models \Delta$ i com que $K \cap K_1 = \emptyset$, $\Gamma_1 \cup \Delta$ és insatisfactible. Pel Teorema 6.15, hi ha $\Delta_0 \subseteq \Delta$ amb $|\Delta_0| < \kappa$ tal que $\Gamma_1 \cup \Delta_0$ és insatisfactible. Sigui θ la conjunció de tots els enunciats de Δ_0. Clarament, $\theta \in L^0_{\kappa\kappa} \cap L^1_{\kappa\kappa}$ i θ és equivalent a un enunciat universal de Horn sense identitat tal que $\Gamma_0 \models \theta$ i $\Gamma_1 \models \neg\theta$. Per tant, val la condició ii). $\square$

Teorema 6.18 *Si $\phi_0, \phi_1 \in L^-_{\kappa\kappa}$ són enunciats universals de Horn tals que $\phi_0 \models \neg\phi_1$ i tenen, si més no, un símbol relacional en comú, llavors hi ha un enunciat universal de Horn $\theta \in L^-_{\kappa\kappa}$ tal que:*

i) $\phi_0 \models \theta$ *i* $\theta \models \neg\phi_1$,

ii) *Per a tot símbol relacional $R \in L$, si R apareix a θ, llavors R apareix en ambdues, ϕ_0 i ϕ_1.*

Demostració. Sigui L' el conjunt dels símbols funcionals i constants de L. Per a tot $i = 0, 1$, sigui L'_i el conjunt de símbols relacionals que apareixen a ϕ_i i $L_i = L' \cup L'_i$. Llavors, L_0 i L_1 tenen els mateixos símbols funcionals i constants i $\{\phi_0\} \cup \{\phi_1\}$ és insatisfactible. Per tant, pel Teorema 6.17, tenim l'enunciat desitjat que satisfà i) i ii). □

Tenim un contraexemple que mostra que, la clàusula següent:

$$(\Diamond) \text{ tot símbol de } L \text{ que apareix a } \theta \text{ apareix en ambdues, } \phi_0 \text{ i } \phi_1,$$

no pot substituir la clàusula ii) del Teorema 6.18. Sigui $L = \{<, f\}$, on $<$ és un símbol relacional binari i f un símbol funcional monàdic. Sigui ϕ_0 la conjunció dels enunciats:

$$\begin{array}{ll} (1) & \forall x(\neg x < x) \\ (2) & \forall x(x < f(x)) \\ (3) & \forall x \forall y \forall z(x < y \wedge y < z \rightarrow x < z) \end{array}$$

i $\phi_1 = \forall x \forall y \forall z(x < z \rightarrow y < z)$. Clarament, ϕ_0 i ϕ_1 són equivalents a enunciats universals de Horn sense identitat i $\phi_0 \models \neg\phi_1$. Però no hi ha cap enunciat universal de Horn sense identitat que satisfaci i) i $(\Diamond)$. Suposem, buscant una contradicció, que existeix un enunciat tal, diguem-li θ. El tipus de semblança de θ ha de ser $\{<\}$, a causa de $(\Diamond)$. I tot model de θ ha de tenir més d'un element, perquè per la condició i), $\theta \models \neg\phi_1$. Sigui $\mathfrak{A}$ un model de θ de tipus de semblança $\{<\}$ i $a \in A$ un element arbitrari. Si $\mathfrak{A}'$ és la subestructura de $\mathfrak{A}$ generada per $\{a\}$, $\mathfrak{A}'$ té només un element en el seu domini i $\mathfrak{A}' \models \theta$, perquè θ és un enunciat universal, però això és absurd.

Teorema 6.19 *Sigui L un tipus de semblança qualsevol amb un símbol relacional R i tal que $L - \{R\}$ tingui almenys un símbol relacional. Per a tot conjunt Γ d'enunciats universals de Horn de $L^-_{\kappa\kappa}$, els enunciats següents són equivalents:*

i) Γ *defineix implícitament R. (això és, si $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models \Gamma$ i els reductes de $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ a $L - \{R\}$ són el mateix, llavors $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$).*

ii) *Hi ha una fórmula universal de Horn $\phi(\overline{x}) \in L^-_{\kappa\kappa}$ tal que ϕ és una definició explícita de R respecte a Γ (és a dir, $\Gamma \models \forall\overline{x}(\phi(\overline{x}) \leftrightarrow R\overline{x})$) i tots els símbols de ϕ pertanyen a $L - \{R\}$).*

Demostració. ii) $\Rightarrow$ i) és clar. ii) $\Rightarrow$ i) Sigui n l'arietat de R. Suposem que Γ defineix implícitament R. Sigui R' un nou símbol relacional n-àdic i $c_1, \ldots, c_n$ noves constants. Sigui Γ' el conjunt obtingut a partir de Γ substituint en tot enunciat de Γ el símbol R pel símbol R'. Així tenim

$$\Gamma \cup \Gamma' \models \forall x_1 \ldots x_n (Rx_1 \ldots x_n \leftrightarrow R'x_1 \ldots x_n),$$

perquè Γ defineix implícitament R. Llavors,

$$\Gamma \cup \Gamma' \models Rc_1 \ldots c_n \rightarrow R'c_1 \ldots c_n.$$

Pel Corol.lari 6.16, hi ha $\Sigma \subseteq \Gamma$ i $\Sigma' \subseteq \Gamma'$ amb $|\Sigma| < \kappa$ i $|\Sigma'| < \kappa$ tals que

$$\Sigma \cup \Sigma' \models Rc_1 \ldots c_n \rightarrow R'c_1 \ldots c_n.$$

A més a més, podem trobar Σ i Σ' tals que Σ' és obtingut a partir de Σ substituint R per R' en cada enunciat de Σ. Sigui $\bigwedge \Sigma$ la conjunció de totes les fórmules de Σ i $\bigwedge \Sigma'$ la conjunció de totes les fórmules de Σ'. $\bigwedge \Sigma$ i $\bigwedge \Sigma'$ són equivalents a enunciats universals de Horn sense identitat. Així tenim que

$$\bigwedge \Sigma \wedge Rc_1 \ldots c_n \models \bigwedge \Sigma' \rightarrow R'c_1 \ldots c_n.$$

L'enunciat $\bigwedge \Sigma' \rightarrow R'c_1 \ldots c_n$ és equivalent a la negació d'un enunciat universal de Horn sense identitat. Per tant, pel Teorema 6.18 hi ha un enunciat universal de Horn sense identitat $\phi = \phi(x_1, \ldots, x_n) \in L^-_{\kappa\kappa}$ amb els seus símbols relacionals en $L - \{R\}$ tal que

$$\bigwedge \Sigma \wedge Rc_1 \ldots c_n \models \phi(c_1, \ldots, c_n) \tag{6.1}$$

i

$$\phi(c_1, \ldots, c_n) \models \bigwedge \Sigma' \rightarrow R'c_1 \ldots c_n.$$

Com que els símbols R i R' no apareixen a ϕ,

$$\phi(c_1, \ldots, c_n) \models \bigwedge \Sigma \rightarrow Rc_1 \ldots c_n. \tag{6.2}$$

A més a més, per (6.1),

$$\bigwedge \Sigma \models Rc_1 \ldots c_n \rightarrow \phi(c_1, \ldots, c_n)$$

i per (6.2),

$$\bigwedge \Sigma \models \phi(c_1, \ldots, c_n) \rightarrow Rc_1 \ldots c_n.$$

Com que les noves constants no apareixen a $\bigwedge \Sigma$,

$$\bigwedge \Sigma \models \forall x_1 \ldots x_n (\phi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow Rx_1 \ldots x_n)$$

i en conseqüència,

$$\Gamma \models \forall x_1 \ldots x_n (\phi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow Rx_1 \ldots x_n).$$

Podem concloure que ϕ és una definició explícita de R respecte a Γ. $\square$

[Bar68] BARWISE, J. *The syntax and semantics of infinitary languages.* Springer-Verlag, 1968. Lecture Notes in Mathematics, 72.

[Bar73] BARWISE, J. "Back and forth through infinitary logic". A: MORLEY, M. (ED.) *Studies in Model Theory,* 8. Mathematical Association of America, 1973.

[Bir35] BIRKHOFF, G. "On the structure of abstract algebras". *Proc. Camb. Phil. Soc.,* 31, (1935): 433-454.

[Blo75] BLOOM, S. L. "Some theorems on structural consequence operations". *Studia Logica,* 34, (1975): 1-9.

[BP86] BLOK, W.; PIGOZZI, D. "Protoalgebraic logics". *Studia Logica,* 45, (1986): 337-369.

[BP89] BLOK, W.; PIGOZZI, D. *Algebraizable logics.* 1989. Mem. Amer. Math. Soc., 396.

[BP92] BLOK, W.; PIGOZZI, D. "Algebraic semantics for universal Horn logic without equality". A: ROMANOWSKA, A.; SMITH, J. D. H. (EDS.) *Universal Algebra and Quasigroups.* Heldermann Verlag, 1992.

[BS81] BURRIS, S.; SANKAPPANAVAR, H. P. *A course in universal algebra.* New York: Springer-Verlag, 1981.

[CF] CASANOVAS, E.; FARRE, R. "Omitting types in incomplete theories". *J. Symbolic Logic.* [En premsa].

[Cha59] CHANG, C. C. "On unions of chains of models". *Proc. Amer. Math. Soc.,* 10, (1959): 120-127.

[CK91] CHANG, C. C.; KEISLER, J. *Model theory.* 3rd. ed. 1991. Amsterdam: North-Holland. Studies in Logic and the Fundations of Mathematics, 73.

[Cze80a] CZELAKOWSKI, J. *Model-theoretic methods in metodology of propositional calculi.* 1980. The Polish Academy of Sciences Institute of Philosophy and Sociology.

[Cze80b] CZELAKOWSKI, J. "Reduced products of logical matrices". *Studia Logica,* 39, (1980): 19-43.

[Cze81] CZELAKOWSKI, J. "Equivalential logics I". *Studia Logica,* 40, (1981): 227-236.

[Dell] DELLUNDE, P. *Boolean-valued models and logic without equality.* Preprint.

[DJ] DELLUNDE, P.; JANSANA R. "Some characterization theorems for infinitary universal Horn logic without equality". *J. Symbolic Logic.* [En premsa].

[Dic75] DICKMANN, A. M. *Large infinitary languages.* 1975. Amsterdam: North-Holland. Studies in Logic and the Fundations of Mathematics, 83.

[EFT84] EBBINGHAUS, H. D.; FLUM, J.; THOMAS, W. *Mathematical Logic.* Berlin: Springer-Verlag, 1984.

[Elg94] ELGUETA, R. "Algebraic model theory for languages without equality". Universitat de Barcelona. 1994. Tesi doctoral.

[Gal70] GALVIN, F. "Horn sentences". *Ann. Math. Logic,* 1, (1970): 389-422.

[Hod93a] HODGES, W. "Logical features of Horn clauses". A: GABBAY, D. M.; HOGGER, C. J. (EDS.) *Handbook of Logic in Artificial intelligence and Logic programming.* Springer-Verlag, 1993.

[Hod93b] HODGES, W. *Model Theory.* Cambridge University Press, 1993.

[HS81] HODGES, W.; SHELAH, S. "Infinite games and reduced products". *Ann. Math. Logic,* 20, (1981): 77-108.

[Jon56] JONSSON, B. "Universal relational systems". *Math. Scand.,* 4, (1956): 193-208.

[Jon60] JONSSON, B. "Homogeneous universal relational systems". *Math. Scand.,* 8, (1960): 137-142.

[Kei65] KEISLER, H. J. "Reduced products and Horn classes". *Trans. Amer. Math. Soc.,* 117, (1965): 307-328.

[Kei71] KEISLER, H. J. *Model theory for infinitary logic.* 1971. Amsterdam: North-Holland.

[Los55] LOS, J. "On the extending of models I". *Fundamenta Math.,* 42, (1955): 38-54.

[LS55] Łos, J.; Suszko, R. "On the extending of models II". *Fundamenta Math.*, 44, (1955): 52-60.

[Lyn59] Lyndon, R. C. "An interpolation theorem in the predicate calculus". *Pacific J. Math.*, 9, (1959): 129-142.

[Man72] Mansfield, R. "Horn classes and reduced direct products". *Trans. Amer. Math. Soc.*, 172, (1972): 279-286.

[McN77] McNulty, G. F. "Fragments of first order logic I: Universal Horn logic ". *J. Symbolic Logic*, 42, (1977): 221-237.

[Mon76] Monk, J. D. *Mathematical Logic.* New York: Springer-Verlag, 1976.

[Mot84] Motohashi, N. "Equality and Lyndon's interpolation theorem ". *J. Symbolic Logic*, 49, (1984): 123-128.

[MV62] Morley, M.; Vaught, R. "Homogeneous universal models". *Math. Scand.*, 11, (1962): 37-57.

[Poi85] Poizat, B. *Cours de Théorie des Modèles.* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, 1985.

[She71] Shelah, S. "Every two elementarily equivalent models have isomorphic ultrapowers". *Israel J. Math.*, 10, (1971): 224-233.

[She78] Shelah, S. *Classification theory and the number of non-isomorphic models.* 1978. Amsterdam: North-Holland.

[Tar54] Tarski, A. "Contributions to the theory of models". *Indag. Math.*, 16, (1954): 582-588.

[Zub57] Zubieta, G. "Clases aritméticas definidas sin igualdad". *Boletín de la Sociedad Matemática Mejicana*, 2, (1957): 45-53.

CONTRIBUTIONS TO THE MODEL THEORY OF EQUALITY-FREE LOGIC

Pilar Dellunde i Clavé

Als pares i al Ferran,
que sempre m'han fet costat i
han fet possible aquest treball.

Bellaterra, maig de 1996.

CONTRIBUTIONS TO THE MODEL THEORY OF EQUALITY-FREE LOGIC

Pilar Dellunde i Clavé

Memòria presentada per a optar al títol de doctora en Filosofia per la Universitat de Barcelona. Maig de 1996.

Director: **Dr. Ramon Jansana i Ferrer**

Programa de doctorat: Lògica pura i aplicada (Bienni 1991-93).
Departament de Lògica, Història i Filosofia de la Ciència.

Contents

Introduction

This dissertation is a contribution to the Model Theory of languages without equality. We study the fragment of first-order logic composed by all the formulas that do not contain the equality symbol. We have coined the word *equality-free logic* for it. The identity relation is for us a logical notion, with a fixed meaning. We have, as it is common practice today, a special symbol for it in first-order languages. Although, at the beginning, it was not the case, the usefulness of this practice for the study of mathematical theories has progressively lead logicians to this way of dealing with equality. As a consequence, investigations have concentrated on full first-order logic and the study of equality-free logic has been neglected. In recent times, research in the areas of Algebraic Logic and Computer Science has attracted the attention on some fragments of equality-free logic. A general study of this logic appears now as necessary. Our purpose is to carry on this study from the point of view of Model Theory.

The main concepts studied in this work are the *Leibniz congruence* and the *relative relation*; both notions play a central role in the model-theoretic study of equality-free logic. In second-order logic we can define the identity relation by means of the following formula

$$\forall P(Px \leftrightarrow Py).$$

This idea has its origin in the Principle of the identity of the indiscernibles of G. W. Leibniz. In contrast with second-order languages, there is no equality-free first-order formula or set of equality-free first-order formulas that defines equality in all structures. Moreover, there are structures in which the identity relation can not be defined by an equality-free first-order formula or set of equality-free first-order formulas, even if you allow the use of parameters from the model. That is, there are different elements in the model that we can not distinguish by means of equality-free first-order formulas. In this situation, the concept of Leibniz congruence or Leibniz equality, as we also usually refer to it, arises in a very natural way. It is said that two elements of a model are related by this congruence when they satisfy exactly the same equality-free atomic formulas with parameters in the model. It is easy to check that two elements related by the Leibniz congruence have this property for all the equality-free formulas. This congruence always exists, and it turns out to be the greatest congruence of the model. Given an structure $\mathfrak{A}$, we denote by $\Omega(\mathfrak{A})$ the Leibniz congruence of $\mathfrak{A}$ and we say that the quotient $\mathfrak{A}/\Omega(\mathfrak{A})$ is the *reduction* of $\mathfrak{A}$. When we make the quotient modulo the Leibniz congruence, we identify the elements that are indistinguishable using equality-free first-order formulas and parameters from the model. So, the Leibniz congruence of the reduction of a model is always the identity. An structure with the property that its Leibniz congruence is the identity is said to be a *reduced* structure. It is easy to see that any reduced structure is isomorphic to its reduction. The importance of reduced structures in equality-free logic comes from the fact that the reduction of a model is a strict homomorphic image of the model. Therefore, the model and its reduction satisfy exactly the same equality-free sentences, see Lemma 1.2. The other main concept studied in this work is the relative relation. It is said that two structures are *relatives* when they have isomorphic reductions. Along this work we will give different characterizations of this relation. Our aim is to point out that it plays the same role in equality-free logic that the isomorphism relation plays in logic with equality.

The actual interest of the Leibniz congruence and the relative relation comes from the work of W. Blok and D. Pigozzi. They introduced the concept of relative relation for the special case of logical matrices in [BP86], and in [BP89] they made an extensive use of what they named the Leibniz congruence. It is a well-known fact, first observed by S. L. Bloom in [Blo75], that to any propositional deductive system we can associate an equality-free strict universal Horn theory. For this reason, in order to study the algebraic aspects of deductive systems, it is useful to learn about the model-theoretic properties of this fragment of equality-free logic. The work of J. Czelakowski takes also an algebraic approach to the Model Theory of equality-free logic, see [Cze80a] and [Cze80b]. The Ph.D. Dissertation of R. Elgueta also goes in this direction, see [Elg94].

The study of equality-free strict universal Horn theories was our first motivation to work in equality-free logic, the last chapter of this dissertation is devoted to it. Nevertheless, we are interested in the whole fragment of first-order logic without equality and we take a classical model-theoretic approach to its study. By using the relative relation, we develope usual tools of Model Theory such as the method of diagrams or back-and-forth systems and we obtain algebraic characterizations of the elementary equivalence in these languages. One of the main contributions of this work is the characterization of first-order sentences that are logically equivalent to an equality-free sentence. In Chapter 4 we prove the following preservation theorem: A first-order sentence is logically equivalent to an equality-free sentence if and only if it is preserved under strict homomorphic images and strict homomorphic counter-images.

The dissertation consists of six chapters. In the first chapter we present notation and preliminary definitions and results. In the second chapter we introduce the notion of Leibniz congruence, of relative relation and of reduced structure. We give examples of reduced structures and we prove a necessary and sufficient condition for a theory to have all its models reduced. In the last section we develope the method of diagrams in order to be applied to equality-free languages.

In the third chapter we give three characterizations of the elementary equivalence in equality-free logic. We introduce partial relative relations in order to define a certain kind of back-and-forth systems. By means of them, we prove a first algebraic characterization of the elementary equivalence relation. Also some more results are obtained for equality-free infinitary languages. A second characterization is obtained using elementary extensions (in the sense of first-order logic with equality) and the relative relation. Finally, we obtain an ultrapower-type characterization, analogous to Keisler-Shelah Theorem for first-order logic with equality. Some constructions similar to the ultraproducts, called ultrafilter-products, are introduced in order to find equivalent statements to this third characterization. This kind of structures seem to be the most natural counterparts to the ultraproduct constructions, when you work in equality-free languages.

Chapter 4 is devoted to preservation and characterization results. In the first section, we give a characterization theorem for elementary classes in equality-free logic. In the second, we study some fragments of this logic: universal, universal-atomic, universal-existential, positive and Horn.

Given an infinite cardinal κ, we introduce in Chapter 5 the notion of equality-free κ-saturated model, L^--κ-saturated for short. That is, a model that satisfies all the 1-types over sets of parameters of power less than κ, with all the formulas in the type that are equality-free. We compare this notion with the usual notions of κ-saturated, κ-universal and κ-homogeneous model. In the last section, using L^--ω-saturated models and the back-and-forth methods introduced in Chapter 3, we present a characterization of the theories that are L^--complete, that is, theories with all their models elementarily equivalent in equality-free logic. We exhibit some theories with the property that there exists an infinite cardinal λ such that for any infinite cardinal $\kappa \geq \lambda$, the theory has not reduced models of power κ. The existence of such theories is guaranteed by the existence of infinite models that are L^--κ-saturated, for any infinite cardinal κ. This last fact is proved in the first section of Chapter 5. We close the chapter with some examples of complete theories (in the usual sense) that are axiomatized by a set of equality-free sentences and we study some of their properties.

The last chapter of this dissertation, as we have mentioned before, is devoted to the study of the equality-free universal Horn fragment of the infinitary languages $L_{\kappa\lambda}$, with κ and λ infinite regular cardinals. We obtain preservation and characterization results, paying special attention to the classes of reduced structures. Using these results we prove interpolation and definability theorems for the fragment.

Unless otherwise stated, all the results are original. Theorems 4.10 and 4.16 were proved independently by R. Elgueta in [Elg94]. Also Theorem 6.1 were proved by him in [Elg94], but only for the special case of equality-free strict universal Horn first-order formulas. The results of Chapter 6 will appear in the paper [DJ] in *The Journal of Symbolic Logic.*

Acknowledgments

I would like to thank R. Jansana for his continuous advise during this work, and for his encouragement that lead me to do research in logic. I would also like to thank E. Casanovas and J. Flum for their contributions to this thesis and for drawing my attention to work in the field of Model Theory. I am also indebted with J. Czelakowski, W. Hodges, D. Pigozzi, J. Truss and with the members of the Logic Seminar of Barcelona, for their valuable comments. Finally, I acknowledge the Philosophy Department of the U.A.B. for its support, Roger Bosch for his suggestions, and L. Pujadas for correcting the English.

Chapter 1

Preliminaries

This chapter contains the notation, the definitions of some of the main concepts of this dissertation and the statements of known results about them. The following notation will be used in this work. From now on L will be a similarity type with at least one relation symbol. We denote by L the set of first-order formulas of type L and by L_0 the set of quantifier-free formulas of L. Given two infinite cardinals κ and λ, we denote by $L_{\kappa\lambda}$ the infinitary language of type L that has κ variables and allows conjunctions of sets of formulas of power less than κ and quantification of sets of variables of power less than λ. $L_{\infty\omega}$ is the infinitary language of type L that has a proper class of variables and allows conjunctions of any set of formulas and quantification of a finite set of variables; we have

$$L_{\infty\omega} = \bigcup_{\kappa \in CN} L_{\kappa\omega},$$

where CN is the class of cardinal numbers. Moreover, $L_{\infty\infty}$ is the infinitary language of type L that has a proper class of variables and allows conjunctions of any set of formulas and quantification of any set of variables; we have

$$L_{\infty\infty} = \bigcup_{\kappa \in CN} L_{\kappa\kappa}.$$

For reference on infinitary languages see [Bar68], [Kei71] and [Dic75].

Given a class Σ of formulas, let us denote by Σ^- the class of equality-free formulas of Σ, that is, the class of all formulas of Σ that do not contain the equality symbol. Given L-structures $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ and a class Σ of formulas, we write $\mathfrak{A} \equiv_{\Sigma} \mathfrak{B}$ and $\mathfrak{A} \equiv_{\Sigma}^{-} \mathfrak{B}$ to mean that $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ satisfy exactly the same sentences of Σ and Σ^-, respectively. In case that Σ is one of the classes $L, L_0, L_{\kappa\lambda}, L_{\infty\omega}, L_{\infty\infty}$, we will abbreviate the expression $\equiv_{\Sigma}^{-}$ using the following symbols: $\equiv$, $\equiv_0$, $\equiv_{\kappa\lambda}$, $\equiv_{\infty\omega}$, $\equiv_{\infty\infty}$, $\equiv^{-}$, $\equiv_{0}^{-}$, $\equiv_{\kappa\lambda}^{-}$, $\equiv_{\infty\omega}^{-}$ and $\equiv_{\infty\infty}^{-}$.

For any L-structure $\mathfrak{A}$ and any set $B \subseteq A$, we denote by $L(B)$ the similarity type obtained from L by adding a new constant symbol for each element of B and we denote by $\mathfrak{A}_B$ the natural expansion of $\mathfrak{A}$ to $L(B)$, where every new constant denotes its corresponding element. For the sake of clarity we use the same symbol for the constant and for the element that is denoted by the constant, with the exceptions of Lemmas 3.26 and 4.19 and Theorem 4.20, where it can lead to confusion. $|A|$ denotes the power of the set A. Given an structure $\mathfrak{A}$, for any $B \subseteq A$, $\langle B \rangle$ denotes the substructure of $\mathfrak{A}$ generated by B. Finally, we abbreviate the expression "if and only if" by "iff".

Now we recall some basic notions and state some facts about them. First, we define the notion of strict homomorphism. This terminology comes from [Cze81]. In [Mon76] these homomorphisms are called two-way homomorphisms and should not be confused with strong homomorphisms in the sense of [CK91].

Definition 1.1 If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are L-structures, we say that a function $h : A \to B$ is a *strict homomorphism* from $\mathfrak{A}$ into $\mathfrak{B}$ if for any constant symbol $c \in L$,

$$h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}},$$

for any n-adic function symbol $f \in L$ and any $a_1, \ldots, a_n \in A$,

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)),$$

and for any n-adic relation symbol $R \in L$ and any $a_1, \ldots, a_n \in A$,

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R^{\mathfrak{A}} \quad \textit{iff} \quad \langle h(a_1), \ldots, h(a_n) \rangle \in R^{\mathfrak{B}}.$$

Now we give a characterization of strict homomorphisms.

Lemma 1.2 *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures and $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ an homomorphism from $\mathfrak{A}$ onto $\mathfrak{B}$. Then the following are equivalent:*

i) *h is a strict homomorphism.*

ii) *For any atomic formula $\phi \in L^-$, $\phi = \phi(x_1, \ldots, x_n)$ and for any sequence $a_1, \ldots, a_n$ of elements of A,*

$$\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_n] \quad \textit{iff} \quad \mathfrak{B} \models \phi[h(a_1), \ldots, h(a_n)].$$

iii) *For any formula $\phi \in L^-$, $\phi = \phi(x_1, \ldots, x_n)$ and for any sequence $a_1, \ldots, a_n$ of elements of A,*

$$\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_n] \quad \textit{iff} \quad \mathfrak{B} \models \phi[h(a_1), \ldots, h(a_n)].$$

iv) *For any formula $\phi \in L^-_{\infty\infty}$, $\phi = \phi(x_\alpha : \alpha < \xi)$ and for any sequence $(a_\alpha : \alpha < \xi)$ of elements of A,*

$$\mathfrak{A} \models \phi[a_\alpha : \alpha < \xi] \quad \textit{iff} \quad \mathfrak{B} \models \phi[h(a_\alpha) : \alpha < \xi].$$

This lemma is a reformulation of a well-known fact and it is easy to prove by induction. Observe that in particular, if there is a strict homomorphism from $\mathfrak{A}$ onto $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ satisfy exactly the same sentences of $L^{-}_{\infty\infty}$.

Given an L-structure $\mathfrak{A}$, a *congruence of* $\mathfrak{A}$ is an equivalence relation θ on A with the property that for any $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots b_n \in A$ such that $\langle a_i, b_i \rangle \in \theta$, for each $i = 1, \dots, n$, for any n-adic function symbol $f \in L$ and any n-adic relation symbol $R \in L$,

$$\langle f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n), f^{\mathfrak{A}}(b_1, \dots, b_n) \rangle \in \theta,$$

and

$$\text{if} \quad \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R^{\mathfrak{A}}, \quad \text{then} \quad \langle b_1, \dots, b_n \rangle \in R^{\mathfrak{A}}.$$

If h is a strict homomorphism from $\mathfrak{A}$ into $\mathfrak{B}$, then its kernel is a congruence of $\mathfrak{A}$. Moreover, if θ is any congruence of $\mathfrak{A}$ we can consider the quotient structure $\mathfrak{A}/\theta$; then the canonical homomorphism from $\mathfrak{A}$ onto $\mathfrak{A}/\theta$ is a strict homomorphism.

The notion of elementary substructure can be generalized to equality-free logic in a natural way.

Definition 1.3 If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are L-structures, we say that $\mathfrak{A}$ is an L^-*-substructure* of $\mathfrak{B}$, in symbols $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$, if $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ and for any $\phi(x_1, \dots, x_n) \in L^-$ and any $a_1, \dots, a_n \in A$,

$$\mathfrak{A} \models \phi\,[a_1, \dots, a_n] \quad \textit{iff} \quad \mathfrak{B} \models \phi\,[a_1, \dots, a_n].$$

If $\mathfrak{A}$ is an L^--substructure of $\mathfrak{B}$, we also say that $\mathfrak{B}$ is an L^--extension of $\mathfrak{A}$.

Given a class K of L-structures we define the following classes of L-structures:

$\mathbf{S}(K)$—the class of all substructures of members of K.

$\mathbf{S}^{\preceq^-}(K)$—the class of all L^--substructures of members of K.

$\mathbf{P}(K)$—the class of all direct products of systems of members of K.

$\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(K)$—the class of all reduced products, over proper

κ-complete filters, of systems of members of K.

$\mathbf{P}_{\mathbf{U}_\kappa}(K)$—the class of all ultraproducts, over proper

κ-complete ultrafilters, of systems of members of K.

$\mathbf{H}(K)$—the class of all homomorphic images

of members of K.

$\mathbf{H}^{-1}(K)$—the class of all homomorphic counter-images of members of K.

$\mathbf{H_S}(K)$—the class of all strict homomorphic images of members of K.

$\mathbf{H_S^{-1}}(K)$—the class of all strict homomorphic counter-images of members of K.

We suppose that every one of the above classes is closed under isomorphic images and that the reduced and direct products are of non-empty systems.

Observe that for any similarity type L and any L-structure $\mathfrak{A}$, $\mathbf{H_S^{-1}}(\mathfrak{A})$ is the class of all the L-structures that are isomorphic to an L-structure obtained in the following way: assign to any $a \in A$ a cardinal number $\mu_a \geq 0$. For any $a \in A$ we choose a set C_a of power μ_a such that for $a \neq a'$, $C_a \cap C_{a'} = \emptyset$. Let $C = \bigcup_{a \in A} C_a$. For any k-adic relation symbol $R \in L$, we define $R^{\mathfrak{C}}$ as follows: for any $a_1, \ldots, a_k \in A$ and any $b_1 \in C_{a_1}, \ldots, b_k \in C_{a_k}$,

$$\langle a_1, \ldots, a_k \rangle \in R^{\mathfrak{A}} \text{ iff } \langle b_1, \ldots, b_k \rangle \in R^{\mathfrak{C}}.$$

For any constant symbol $c \in L$, let $c^{\mathfrak{C}}$ be a chosen element of $C_{c^{\mathfrak{A}}}$. And for any k-adic function symbol $f \in L$, any $a_1, \ldots, a_k \in A$ and any $b_1 \in C_{a_1}, \ldots, b_k \in C_{a_k}$, let $f^{\mathfrak{C}}(b_1, \ldots, b_k)$ be a chosen element of $C_{f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k)}$. If we consider only relational similarity types, given a sequence of cardinals $(\mu_a : a \in A)$ there is, up to isomorphism, only one structure $\mathfrak{C}$ constructed in the way described before; we denote this structure by $\mathfrak{A}(\mu_a : a \in A)$. If for any $a \in A$, $\mu_a = \lambda$, we will denote it by $\mathfrak{A}(\lambda)$.

It is known that given an L-structure $\mathfrak{A}$, we can construct a strict homomorphic counter-image of $\mathfrak{A}$ that has as algebraic reduct an algebra of terms. Let us recall this construction. Unless otherwise stated, from now on enumerations of sets are allowed to have repetitions.

Definition 1.4 Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure. Given an enumeration $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ of A, we define the L-structure $Ter_{\overline{a}}^{\mathfrak{A}}$ in the following way:

- The algebraic reduct of $Ter_{\overline{a}}^{\mathfrak{A}}$ is Ter_{V_I}, that is, the algebra of terms of type L generated by the set $V_I = \{x_i : i \in I\}$.
- In order to define the interpretation of the relation symbols, we define a function $h_0 : V_I \to A$ by:

$$h_0(x_i) = a_i,$$

for any $i \in I$. Then we extend h_0 to an homomorphism h from Ter_{V_I} onto the algebraic reduct of $\mathfrak{A}$. And for any n-adic relation symbol $R \in L$, we define $R^{Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}}}$ as follows: for any $t_1, \ldots, t_n \in Ter_{V_I}$,

$$\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in R^{Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}}} \quad \text{iff} \quad \langle h(t_1), \ldots, h(t_n) \rangle \in R^{\mathfrak{A}}.$$

Lemma 1.5 *Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure and $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ an enumeration of A. Then $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S}(Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}})$.*

Proof. It is clear that the homomorphism h of Definition 1.4 is strict. □

To close the chapter we state a well-known fact about theories axiomatized by a set of equality-free sentences. The proof of this fact uses the terms-structures introduced before. For us a *theory of L* is any set of sentences of L, not necessarily consistent. It is said that a theory is *closed* if it is closed under the consequence relation. Moreover, given a class K of L-structures, *the theory of K*, in symbols $\mathrm{Th}(K)$, is the set of all the sentences of L true in all the structures of K and *the equality-free theory of K*, in symbols $\mathrm{Th}^-(K)$, is the set of all equality-free sentences of $\mathrm{Th}(K)$. In case that $K = \{\mathfrak{A}\}$, we call $\mathrm{Th}(K)$ ($\mathrm{Th}^-(K)$) *the theory of $\mathfrak{A}$* (*the equality-free theory of $\mathfrak{A}$*, respectively) and we denote it by $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ ($\mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$, respectively).

Lemma 1.6 *Let T be a consistent theory of L. If $T \subseteq L^-$, then T has infinite models.*

Proof. Since T is consistent, there is an L-structure $\mathfrak{A}$ such that $\mathfrak{A} \models T$. Let $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ be an enumeration of A with an element of A repeated an infinite number of times, then $Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}}$ is infinite. By Lemma 1.5, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S}(Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}})$ and since $T \subseteq L^-$, by Lemma 1.2, $Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}} \models T$. Therefore, T has infinite models. □

Chapter 2

Basic notions and facts

2.1 Leibniz congruence and reduced structures

In this section we introduce the notions of Leibniz congruence of a structure and of reduced structure. The Leibniz congruence of a structure is its greatest congruence; as it is easy to see it always exists. The notion of Leibniz congruence was considered before, see for example [Mon76], but its name and its actual interest comes from [BP89]. A structure is reduced when its Leibniz congruence is the identity. These two concepts are frequently used in algebraic logic. The notion of reduced structure has also been introduced under other names: irreducible structure in [Zub57] or primitive structure in [Mon76]. In this section we establish some basic model-theoretic properties of reduced structures and give some examples of first-order theories with reduced models. We prove that all the models of a first-order theory are reduced iff this theory defines explicitly the equality symbol, that is, if there is an equality-free formula $\phi(x,y) \in L$ such that $\forall x \forall y\,[x \approx y \leftrightarrow \phi(x,y)]$ is a consequence of the theory.

Let us recall the definition of type over a set of parameters in a model. Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure and B a subset of A. We expand the language adding a new constant symbol for each element of B. Given a cardinal κ, it is said that a set p of formulas of $L(B)$ in the variables $\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ is a *κ-type over B* in $\mathfrak{A}$ if p is consistent with $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_B)$. In addition, p is *complete* if for any formula $\phi \in L(B)$ in the variables $\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$, $\phi \in p$ or $\neg\phi \in p$.

Given a κ-tuple $\overline{a} = (a_\alpha : \alpha \in \kappa)$ of elements of A, the *type of $\overline{a}$ over B* in $\mathfrak{A}$, in symbols $\mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}(\overline{a}/B)$, is the set of all formulas of $L(B)$ in the variables $\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ satisfied by $\overline{a}$. The set $\mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}(\overline{a}/B)$ is a complete *κ-type over B* in $\mathfrak{A}$. By $\mathrm{atp}_{\mathfrak{A}}(\overline{a}/B)$ we denote the set of atomic formulas of $\mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}(\overline{a}/B)$. Now we introduce the corresponding notions for equality-free logic.

Definition 2.1 Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure and B a subset of A. Given a cardinal κ, we say that a set p of formulas of $L^-(B)$ in the variables $\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ is an L^--κ-type over B in $\mathfrak{A}$ if p is consistent with $\mathrm{Th}^-(\mathfrak{A}_B)$. Moreover, we say that p is L^--complete iff for any formula $\phi \in L^-(B)$ in the variables $\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$, $\phi \in p$ or $\neg\phi \in p$.

Observe that for any set p of formulas of $L^-(B)$, p is consistent with $\mathrm{Th}^-(\mathfrak{A}_B)$ iff p is consistent with $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_B)$. Therefore, a set p of formulas of $L^-(B)$ is a L^--κ-type over B in $\mathfrak{A}$ iff p is a κ-type over B in $\mathfrak{A}$ and all the formulas of p are equality-free.

Given a κ-tuple $\overline{a} = (a_\alpha : \alpha \in \kappa)$ of elements of A, the *equality-free type of* $\overline{a}$ *over* B in $\mathfrak{A}$, in symbols $\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}}(\overline{a}/B)$, is the set of all equality-free formulas of $\mathrm{tp}_{\mathfrak{A}}(\overline{a}/B)$. It is easy to see that the set $\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}}(\overline{a}/B)$ is an L^--complete *κ-type over* B in $\mathfrak{A}$. By $\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}}(\overline{a}/B)$ we denote the set of atomic formulas of $\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}}(\overline{a}/B)$ and call it the *equality-free atomic type of* $\overline{a}$ *over* B in $\mathfrak{A}$.

Definition 2.2 Given an L-structure $\mathfrak{A}$, we define the relation $\Omega(\mathfrak{A})$ on $\mathfrak{A}$ as follows:

$$\langle a, b\rangle \in \Omega(\mathfrak{A}) \quad \text{iff} \quad \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}}(a/A) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}}(b/A),$$

for any $a, b \in A$. $\Omega(\mathfrak{A})$ is the greatest congruence relation on $\mathfrak{A}$, that is, every congruence relation on $\mathfrak{A}$ refines it. It is called the *Leibniz congruence* of $\mathfrak{A}$.

We say that a structure is *reduced* if there are no different elements with the same equality-free atomic type over the structure, that is, if its Leibniz congruence is the identity. The quotient structure $\mathfrak{A}/\Omega(\mathfrak{A})$ is reduced and is denoted by $\mathfrak{A}^*$. This structure is called *the reduction of* $\mathfrak{A}$. Observe that from the definition it follows that $\mathfrak{A}^* \cong (\mathfrak{A}^*)^*$. Moreover, it is easy to check that the canonical homomorphism from $\mathfrak{A}$ onto $\mathfrak{A}^*$ is strict.

Lemma 2.3 *Given an L-structure $\mathfrak{A}$, for any $a, b \in A$ the following are equivalent:*

i) $\langle a, b\rangle \in \Omega(\mathfrak{A})$.

ii) *For any* $\phi(x) \in L^-_{\infty\infty}(A)$,

$$\mathfrak{A} \models \phi\,[a] \quad \textit{iff} \quad \mathfrak{A} \models \phi\,[b]\,.$$

Proof. ii) $\Rightarrow$ i) is clear and i) $\Rightarrow$ ii) is proved by induction on ϕ. □

Observe that Lemma 2.3 implies that, given $a, b \in A$,

$$\langle a, b\rangle \in \Omega(\mathfrak{A}) \quad \text{iff} \quad \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}}(a/A) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}}(b/A).$$

Examples of Reduced Structures:

1. Linear orders.

2. The model $({}^{\omega}2, E_n)_{n\in\omega}$, where, for any $n \in \omega$, E_n is an equivalence relation defined by:

$$\langle f, g\rangle \in E_n \quad \text{iff} \quad f \restriction n = g \restriction n,$$

for any $f, g \in {}^{\omega}2$. Observe that for any $f, g \in {}^{\omega}2$, $f = g$ iff for any $n \in \omega$, $\langle f, g\rangle \in E_n$.

3. The random graph, (A, R), that is, the countable graph such that for any finite and disjoint sets X and Y of vertices of A, there is an element $x \notin X \cup Y$ which is adjacent to all vertices in X and no vertice in Y. (A, R) is reduced because by definition, for any two different elements $a, b \in A$, there is an element $c \in A$ different from a and b such that $\langle a, c\rangle \in R$ and $\langle b, c\rangle \notin R$.

There are theories of L with no reduced models. For example the theory of an equivalence relation with infinitely many classes all of them infinite, because in any model of this theory, any two elements in the same equivalence class have the same equality-free atomic type over the model. Observe also that any theory of L axiomatized by a set of equality-free sentences has models that are reduced and models that are non-reduced: for any model $\mathfrak{A}$ of such a theory, since $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{A}^*$ is a reduced model of the theory. Moreover, given an enumeration $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ of A with at least one repetition of an element of A, $Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}}$ is non-reduced and it is a model of the theory because $Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}} \in \mathbf{H}^{-1}_{\mathbf{S}}(\mathfrak{A})$ and consequently, $\mathfrak{A} \equiv^- Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}}$.

Now, we give a sufficient condition for a theory of L to have non-reduced models. First of all, let us remember some definitions. Let T be a theory of L, $\overline{x} = x_1, \ldots, x_n$ a sequence of variables and $p(\overline{x})$ a set of formulas. It is said that a formula $\phi = \phi(\overline{x})$ *isolates* $p(\overline{x})$ in T if $T \models \phi(\overline{x}) \rightarrow p(\overline{x})$. And it is said that $p(\overline{x})$ is *isolated* in T if there is a formula $\phi(\overline{x})$ consistent with T such that $\phi(\overline{x})$ isolates $p(\overline{x})$ in T. Given an L-structure $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ *realizes* $p(\overline{x})$ if there is a n-tuple $\overline{a} = a_1, \ldots, a_n \in A$ such that $\mathfrak{A} \models p[\overline{a}]$. And it is said that $\mathfrak{A}$ *omits* $p(\overline{x})$ if $\mathfrak{A}$ does not realize $p(\overline{x})$. A theory T of L *omits* $p(\overline{x})$ if there is $\mathfrak{A} \models T$ such that $\mathfrak{A}$ omits $p(\overline{x})$.

Observe that for any theory T of L, the reduced models of T are those that omit the set of formulas

$$p_r = \{x \not\approx y\} \cup \{\forall \overline{z}[\phi(x, \overline{z}) \leftrightarrow \phi(y, \overline{z})] : \phi \in L^- \text{ atomic}\}.$$

Therefore, we obtain the following result:

Proposition 2.4 *Let T be a consistent theory of L. If p_r is isolated in T, then some models of T are non-reduced.*

Proof. If p_r is isolated in T, there is a formula $\phi(x,y)$ consistent with T such that $\phi(x,y)$ isolates p_r in T. Clearly any model of $T \cup \{\exists x \exists y \phi(x,y)\}$ is non-reduced. □

We prove that the other direction of Proposition 2.4 holds for finite and relational similarity types. Later we will give an example that shows that in general, even if we restrict to complete theories, the converse does not hold.

Proposition 2.5 *Let L be a finite and relational similarity type and T a consistent theory of L. If some models of T are non-reduced, then p_r is isolated in T.*

Proof. Since L is finite and relational, there are, up to logical equivalence, a finite number of formulas in p_r. We can assume without loss of generality that p_r is finite. Let $\phi(x,y)$ be the conjunction of all the formulas in p_r. Since T has some models that are non-reduced, $\phi(x,y)$ is consistent with T. Clearly $\phi(x,y)$ isolates p_r in T. □

Now we state a version of the classical Omitting types theorem. A proof of this theorem can be found on page 80 of [CK91]. From this theorem we will obtain a sufficient condition for a theory of L to have reduced models, in case that L is countable.

Theorem 2.6 (Omitting types theorem) *Let L be countable and T a consistent theory of L. If $p(\overline{x})$ is non-isolated in T, then T omits $p(\overline{x})$.*

Proposition 2.7 *Let L be countable and T a consistent theory of L. If p_r is non-isolated in T, then some models of T are reduced.*

Proof. By Theorem 2.6. □

Remember that for complete theories the converse of Theorem 2.6 is true. Therefore, for complete theories the converse of Proposition 2.7 is also true. But in general the converse of Proposition 2.7 does not hold: Let $L = \{P_n : n \in \omega\}$, where for any $n \in \omega$, P_n is a monadic relation symbol, and let T be the set of consequences of the following set of sentences:

$$\{\exists x P_n x : n \in \omega\} \cup \{\forall x \neg (P_n x \wedge P_m x) : n, m \in \omega, n \neq m\}.$$

T is consistent and since T is axiomatized by a set of equality-free sentences, by a previous observation, T has some models that are reduced. Let $\phi(x,y) = x \not\approx y \wedge P_0 x \wedge P_0 y$, then $T \models \phi(x,y) \rightarrow p_r$. Therefore, p_r is isolated in T. Thus, the converse of Proposition 2.7 is not true for T.

We give now a counterexample in order to prove the fact we stated before, that is, that in general, even if we restrict to complete theories, the converse of Proposition

2.4 is not true: Let $L = \{P_n : n \in \omega\}$, where for any $n \in \omega$, P_n is a monadic relation symbol and let T' be the theory of the infinite independent properties, that is, the set of consequences of the following set of sentences:

$$\exists x(P_{i_0}x \wedge \ldots \wedge P_{i_n}x \wedge \neg P_{j_0}x \wedge \ldots \wedge \neg P_{j_k}x),$$

for any distinct $i_0, \ldots, i_n, j_0, \ldots, j_k \in \omega$. It is known that T' is consistent and complete. By a previous observation, since T' is axiomatized by a set of equality-free sentences, T' has some models that are non-reduced. But again by that observation, we also have that some models of T' are reduced. Therefore, since T' is complete, by the converse of Proposition 2.7, p_r is non-isolated in T'. Thus, the converse of Proposition 2.4 is not true for T'.

From all these examples we see that if we consider theories with reduced models, p_r is isolated in some of them and non-isolated in others. Now, as a corollary of the following proposition, we will see that for any closed theory T in a countable similarity type, if T has reduced models and p_r is non-isolated in T, then the theory of the reduced models of T is precisely T.

Proposition 2.8 *Let L be countable and T a consistent closed theory of L. Then the following are equivalent:*

i) *p is non-isolated in T.*

ii) $T = \mathrm{Th}(\{\mathfrak{A} \models T : \mathfrak{A}$ *omits* $p\})$.

Proof. See [CF], Proposition 1.3. □

Corollary 2.9 *Let L be countable and T a consistent closed theory of L. Then the following are equivalent:*

i) *p_r is non-isolated in T.*

ii) $T = \mathrm{Th}(\{\mathfrak{A} \models T : \mathfrak{A}$ *is reduced*$\})$.

Proof. By Proposition 2.8. □

Finally, to conclude the section we give a necessary and sufficient condition for a theory of L to have all its models reduced. Given a theory T of L, we say that T *defines explicitly the equality symbol* if there is an equality-free formula $\phi(x, y) \in L$ such that

$$T \models \forall x \forall y\, [x \approx y \leftrightarrow \phi(x, y)]\,.$$

In this case we say that ϕ is a *definition of the equality symbol in T*.

Theorem 2.10 *Let T be a consistent theory of L. Then the following are equivalent:*

i) *T has all its models reduced.*

ii) *T defines explicitly the equality symbol.*

Proof. i) $\Rightarrow$ ii) Let $\Gamma(x, y)$ be the following set of formulas

$$\Gamma(x, y) = \{\forall \bar{z}\, [\psi(x, \bar{z}) \leftrightarrow \psi(y, \bar{z})] : \psi \in L^{-} \text{ atomic}\}.$$

Since all the models of T are reduced,

$$T \cup \Gamma(x, y) \models x \approx y.$$

Therefore, by compactness, there is some finite $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ such that

$$T \cup \Gamma_0(x, y) \models x \approx y.$$

Let $\phi(x, y)$ be the conjunction of all formulas in Γ_0. Then,

$$T \models \forall x \forall y\, [x \approx y \leftrightarrow \phi(x, y)].$$

ii) $\Rightarrow$ i) Let $\mathfrak{A} \models T$. We prove that $\mathfrak{A}$ is reduced. Let $a, a' \in A$ be such that $\langle a, a' \rangle \in \Omega(\mathfrak{A})$, we show that $a = a'$. Let $\phi(x, y)$ be a definition of the equality symbol in T. Since $\mathfrak{A} \models \phi\,[a, a]$, by Lemma 2.3, $\mathfrak{A} \models \phi\,[a, a']$ and thus, $a = a'$. Therefore, $\mathfrak{A}$ is reduced. □

In Theorems 2.11 and 2.12 we give necessary and sufficient conditions for a theory of $L_{\kappa\kappa}$ to have all its models reduced. The proofs are analogous to the proof of Theorem 2.10. In Theorem 2.11, we restrict to the case that κ is strongly compact and we use the κ-compactness Theorem of $L_{\kappa\kappa}$ in the proof. And in Theorem 2.12, we restrict to similarity types such that $|L| < \kappa$, for an uncountable regular cardinal κ. Given a theory T of $L_{\kappa\kappa}$, we say that T *defines explicitly the equality symbol* if there is an equality-free formula $\phi(x, y) \in L_{\kappa\kappa}$ such that

$$T \models \forall x \forall y\, [x \approx y \leftrightarrow \phi(x, y)].$$

In this case, we say that ϕ is a *definition of the equality symbol in T*.

Theorem 2.11 *Let κ be a strongly compact cardinal and T a consistent theory in $L_{\kappa\kappa}$. Then the following are equivalent:*

i) *T has all its models reduced.*

ii) *T defines explicitly the equality symbol.*

Theorem 2.12 *Suppose that κ is an uncountable regular cardinal and $|L| < \kappa$. Given a consistent theory T in $L_{\kappa\kappa}$, the following are equivalent:*

i) *T has all its models reduced.*

ii) $\bigwedge_{\substack{\phi \in L^- \\ \text{atomic}}} \forall \overline{z}\,[\phi(x,\overline{z}) \leftrightarrow \phi(y,\overline{z})]$ *is a definition of the equality symbol in T.*

Proposition 2.13 *Suppose that κ is an uncountable regular cardinal and $|L| < \kappa$. Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be reduced L-structures, then for any infinite regular cardinal $\lambda \leq \kappa$,*

$$\mathfrak{A} \equiv^-_{\kappa\lambda} \mathfrak{B} \quad \textit{iff} \quad \mathfrak{A} \equiv_{\kappa\lambda} \mathfrak{B}.$$

Proof. $\Leftarrow$) is clear. $\Rightarrow$) Suppose that $\mathfrak{A} \equiv^-_{\kappa\lambda} \mathfrak{B}$. Consider the formula

$$\psi(x,y) = \bigwedge_{\substack{\phi \in L^- \\ \text{atomic}}} \forall \overline{z}\,[\phi(x,\overline{z}) \leftrightarrow \phi(y,\overline{z})],$$

which is a formula of $L^-_{\kappa\omega}$ because $|L| < \kappa$. Since $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are reduced,

$$\mathfrak{A} \models \forall x \forall y\,[x \approx y \leftrightarrow \psi(x,y)]$$

and

$$\mathfrak{B} \models \forall x \forall y\,[x \approx y \leftrightarrow \psi(x,y)].$$

Therefore, for any sentence $\sigma \in L_{\kappa\lambda}$, there is a sentence $\sigma' \in L^-_{\kappa\lambda}$ such that

$$\mathfrak{A} \models \sigma \leftrightarrow \sigma'$$

and

$$\mathfrak{B} \models \sigma \leftrightarrow \sigma'.$$

The sentence σ' can be obtained from σ by replacing each appearance of a formula of the form $t_1 \approx t_2$ by an appearance of $\psi(t_1,t_2)$. Therefore, $\mathfrak{A} \equiv_{\kappa\lambda} \mathfrak{B}$. $\square$

Observe that in Proposition 2.13 we can not delete the restriction that $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are reduced: Suppose that κ is an uncountable regular cardinal and $|L| < \kappa$. Then, for any non-reduced L-structure $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \equiv^-_{\infty\infty} \mathfrak{A}^*$ and therefore, $\mathfrak{A} \equiv^-_{\kappa\lambda} \mathfrak{A}^*$. Moreover, we have that $\mathfrak{A} \models \exists x \exists y (x \not\approx y \wedge \psi(x,y))$, where $\psi(x,y)$ is the formula defined in the proof of Proposition 2.13. But $\mathfrak{A}^* \not\models \exists x \exists y (x \not\approx y \wedge \psi(x,y))$, because $\mathfrak{A}^*$ is reduced. Thus, $\mathfrak{A} \not\equiv_{\kappa\lambda} \mathfrak{A}^*$.

Corollary 2.14 *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be reduced L-structures, then*

i) *For any infinite cardinal λ,*

$$\mathfrak{A} \equiv^{-}_{\infty\lambda} \mathfrak{B} \quad \text{iff} \quad \mathfrak{A} \equiv_{\infty\lambda} \mathfrak{B}.$$

ii) $\mathfrak{A} \equiv^{-}_{\infty\infty} \mathfrak{B}$ *iff* $\mathfrak{A} \equiv_{\infty\infty} \mathfrak{B}$.

Proof. By Proposition 2.13. □

Proposition 2.15 *Let L be a finite and relational similarity type and $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ reduced L-structures. Then,*

$$\mathfrak{A} \equiv^{-} \mathfrak{B} \quad \text{iff} \quad \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}.$$

Proof. We use the same kind of proof as the one of Proposition 2.13 together with the fact that for any finite and relational similarity type L, there is a finite set Γ of formulas of the form $\forall \overline{z}\,[\phi(x,\overline{z}) \leftrightarrow \phi(y,\overline{z})]$, where $\phi \in L^{-}$ is atomic, and such that, if $\psi(x,y)$ is the conjunction of all the formulas in Γ, then for any reduced L-structure $\mathfrak{A}$,

$$\mathfrak{A} \models \forall x \forall y\,[x \approx y \leftrightarrow \psi(x,y)]\,. \ \square$$

If we delete the restriction that L is finite and relational, this result in general is not true. We have the following counterexample: Let $L = \{P, f\}$, where P is a monadic relation symbol and f is a monadic function symbol. Consider the L-structure $\mathfrak{A} = (\omega, P^{\mathfrak{A}}, f^{\mathfrak{A}})$, where $P^{\mathfrak{A}} = \{0\}$, $f^{\mathfrak{A}}(0) = 0$ and for any $n \in \omega$, $f^{\mathfrak{A}}(n+1) = n$, and the L-structure $\mathfrak{B} = (\omega \cup \{b\}, P^{\mathfrak{B}}, f^{\mathfrak{B}})$, where $b \notin \omega$, $P^{\mathfrak{B}} = P^{\mathfrak{A}}$ and $f^{\mathfrak{B}} = f^{\mathfrak{A}} \cup \{\langle b, b\rangle\}$. Using the back-and-forth methods introduced in Section 3.1, it is proved in Example 3.11 that $\mathfrak{A} \equiv^{-} \mathfrak{B}$. But $\mathfrak{A} \not\equiv \mathfrak{B}$ because $\mathfrak{A} \not\models \exists x \exists y (x \not\approx y \wedge f(x) \approx x \wedge f(y) \approx y)$ and $\mathfrak{B} \models \exists x \exists y (x \not\approx y \wedge f(x) \approx x \wedge f(y) \approx y)$.

2.2 The relative relation

We now introduce the notion of relative relation, an equivalence relation between structures that will play in languages without equality the same role that the isomorphism relation plays in languages with equality. This notion was introduced by G. Zubieta in [Zub57], using condition iv) of next Proposition 2.17 as the defining one, but only for relational structures, and independently by W. Blok and D. Pigozzi in [BP86], using condition ii) of Proposition 2.17 as the defining one but for the special case of logical matrices. The word "relative" was introduced by the last two authors.

Definition 2.16 Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures. We say that a relation $R \subseteq A \times B$ is a *relative correspondence* between $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ if $\mathrm{dom}(R) = A$, $\mathrm{rg}(R) = B$ and

(1) for any constant $c \in L, c^{\mathfrak{A}} R c^{\mathfrak{B}}$,

(2) for any n-adic function symbol $f \in L$, any $a_1, \ldots, a_n \in A$ and any $b_1, \ldots, b_n \in B$ such that $a_i R b_i$ for each $i = 1, \ldots, n$,

$$f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) R f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n),$$

(3) for any n-adic relation symbol $S \in L$, any $a_1, \ldots, a_n \in A$ and any $b_1, \ldots, b_n \in B$ such that $a_i R b_i$ for each $i = 1, \ldots, n$,

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in S^{\mathfrak{A}} \quad \text{iff} \quad \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \in S^{\mathfrak{B}}.$$

We say that two L-structures $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are *relatives*, in symbols $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, if there is a relative correspondence between them.

The relation of being either a strict homomorphic image or a strict homomorphic counter-image is not in general transitive. Its transitivization is precisely the relative relation, as the following proposition shows. The equivalences between ii), iii), iv) and v) already appear in [BP86] for the special case of logical matrices.

Proposition 2.17 *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures. The following are equivalent:*

i) $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$.

ii) *There are $n \in \omega$ and L-structures $\mathfrak{C}_0, \ldots, \mathfrak{C}_n$ such that $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}_0$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}_n$ and for any $i < n$, $\mathfrak{C}_{i+1} \in \mathbf{H_S}(\mathfrak{C}_i)$ or $\mathfrak{C}_{i+1} \in \mathbf{H_S^{-1}}(\mathfrak{C}_i)$.*

iii) $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathbf{H_S}(\mathfrak{C})$, *for some $\mathfrak{C}$.*

iv) $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathbf{H_S^{-1}}(\mathfrak{C})$, *for some $\mathfrak{C}$.*

v) $\mathfrak{A}^* \cong \mathfrak{B}^*$.

vi) *There are enumerations of A and B, $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ and $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ respectively, such that $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$.*

vii) *There are enumerations of A and B, $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ and $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ respectively, such that $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$.*

viii) *There are enumerations of A and B, $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ and $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ respectively, such that $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_{\infty\infty}^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$.*

Proof. viii) $\Rightarrow$ vii) and vii) $\Rightarrow$ vi) are clear and vi) $\Rightarrow$ viii) is proved by induction on the formulas of $L^-_{\infty\infty}$. iii) $\Rightarrow$ ii), v) $\Rightarrow$ iv) and iv) $\Rightarrow$ ii) are also clear.

vi) $\Rightarrow$ v) Suppose that there are enumerations of A and B, $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ and $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ respectively, and such that $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$. We define $h : \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*$ as follows:

$$h([a_i]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [b_i]_{\Omega(\mathfrak{B})},$$

for any $i \in I$. First of all we see that for any term $t(y_1, \ldots, y_n)$ of L and any $i_1, \ldots, i_n, j \in I$,

$$(1) \quad \left[t^{\mathfrak{A}}[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}]\right]_{\Omega(\mathfrak{A})} = [a_j]_{\Omega(\mathfrak{A})} \quad \text{iff} \quad \left[t^{\mathfrak{B}}[b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}]\right]_{\Omega(\mathfrak{B})} = [b_j]_{\Omega(\mathfrak{B})}.$$

Assume that $\left[t^{\mathfrak{A}}[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}]\right]_{\Omega(\mathfrak{A})} = [a_j]_{\Omega(\mathfrak{A})}$ and that

$$\left[t^{\mathfrak{B}}[b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}]\right]_{\Omega(\mathfrak{B})} \neq [b_j]_{\Omega(\mathfrak{B})}.$$

Then, there is a quantifier-free formula $\phi(z, x_1, \ldots, x_m) \in L^-$ (where the variables $z, x_1, \ldots, x_m$ do not occur in t) and a sequence $d_1, \ldots, d_m$ of elements of B such that

$$\mathfrak{B} \models \phi(z, x_1, \ldots, x_m)\left[t^{\mathfrak{B}}[b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}], d_1, \ldots, d_m\right],$$

but

$$\mathfrak{B} \not\models \phi(z, x_1, \ldots, x_m)[b_j, d_1, \ldots, d_m].$$

Then, for any $1 \leq k \leq m$, we choose $j_k \in I$ such that $d_k = b_{j_k}$ in the enumeration $\overline{b}$ of B. Hence,

$$\mathfrak{B} \models \phi(z, x_1, \ldots, x_m)\left[t^{\mathfrak{B}}[b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}], b_{j_1}, \ldots, b_{j_m}\right]$$

but

$$\mathfrak{B} \not\models \phi(z, x_1, \ldots, x_m)[b_j, b_{j_1}, \ldots, b_{j_m}].$$

Let ϕ' be obtained from ϕ by substituting the term t for the variable z. We have

$$\mathfrak{B} \models \phi'(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m)[b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}, b_{j_1}, \ldots, b_{j_m}].$$

Since

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b}),$$

we have

$$\mathfrak{A} \models \phi'(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m)[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}, a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}]$$

and

$$\mathfrak{A} \not\models \phi(z, x_1, \ldots, x_m)[a_j, a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}].$$

But then,

$$\mathfrak{A} \models \phi(z, x_1, \ldots, x_m) \left[t^{\mathfrak{A}} [a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}], a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}\right],$$

which is absurd. Therefore, we conclude that

$$\left[t^{\mathfrak{B}} [b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}]\right]_{\Omega(\mathfrak{B})} = [b_j]_{\Omega(\mathfrak{B})}.$$

Analogously, we can prove the other direction of (1). By (1) we have that h is well-defined and injective. Moreover, since $\overline{b}$ is an enumeration of B, we have that h is surjective. Let us see now that h is a strict homomorphism: for any n-adic relation symbol $R \in L$ and any $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n} \in A$,

$$\begin{array}{lll} \langle [a_{i_1}]_{\Omega(\mathfrak{A})}, \ldots, [a_{i_n}]_{\Omega(\mathfrak{A})} \rangle \in R^{\mathfrak{A}^*} & \text{iff} & \langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_n} \rangle \in R^{\mathfrak{A}} \\ & \text{iff} & \mathfrak{A} \models Rx_1 \ldots x_n [a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}] \\ & \text{iff} & \mathfrak{B} \models Rx_1 \ldots x_n [b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}] \\ & \text{iff} & \langle b_{i_1}, \ldots, b_{i_n} \rangle \in R^{\mathfrak{B}} \\ & \text{iff} & \langle [b_{i_1}]_{\Omega(\mathfrak{B})}, \ldots, [b_{i_n}]_{\Omega(\mathfrak{B})} \rangle \in R^{\mathfrak{B}^*}. \end{array}$$

Suppose now that $f \in L$ is an n-adic function symbol and $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n} \in A$. We have

$$h(f^{\mathfrak{A}^*}([a_{i_1}]_{\Omega(\mathfrak{A})}, \ldots, [a_{i_n}]_{\Omega(\mathfrak{A})})) = h(\left[f^{\mathfrak{A}}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})\right]_{\Omega(\mathfrak{A})}).$$

Let $j \in I$ be such that $f^{\mathfrak{A}}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) = a_j$ in the enumeration $\overline{a}$ of A, then

$$h(\left[f^{\mathfrak{A}}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})\right]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = h([a_j]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [b_j]_{\Omega(\mathfrak{B})},$$

and by (1)

$$[b_j]_{\Omega(\mathfrak{B})} = \left[f^{\mathfrak{B}}(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n})\right]_{\Omega(\mathfrak{B})} = f^{\mathfrak{B}^*}([b_{i_1}]_{\Omega(\mathfrak{B})}, \ldots, [b_{i_n}]_{\Omega(\mathfrak{B})}).$$

In an analogous way we prove that for any constant symbol $c \in L$, $h(c^{\mathfrak{A}^*}) = c^{\mathfrak{B}^*}$. Therefore, we can conclude that h is an isomorphism.

ii) $\Rightarrow$ v) It suffices to show that if $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are L-structures and $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ is a strict homomorphism from $\mathfrak{A}$ onto $\mathfrak{B}$, then $\mathfrak{A}^* \cong \mathfrak{B}^*$. Since h is onto $\mathfrak{B}$, we have that $\overline{a} = (a : a \in A)$ and $\overline{b} = (h(a) : a \in A)$ are enumerations of A and B. And since h is a strict homomorphism, by Lemma 1.2 we obtain that

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

Therefore, by the implication vi) $\Rightarrow$ v) already proved, we conclude that $\mathfrak{A}^* \cong \mathfrak{B}^*$.

vi) $\Rightarrow$ iii) Suppose that there are enumerations of A and B, $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ and $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ respectively, such that $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$. Let $\mathfrak{C} = Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}}$. By Lemma 1.5, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S}(\mathfrak{C})$. Since $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$, the function $f_0 : Var_I \to B$ such that for any $i \in I$, $f_0(x_i) = b_i$, can be extended to a strict homomorphism f from $\mathfrak{C}$ onto $\mathfrak{B}$. Therefore, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathbf{H_S}(\mathfrak{C})$.

i) $\Rightarrow$ vi) Let $R = \{\langle a_i, b_i\rangle : i \in I\}$ be a relative correspondence between $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$. By induction it is easy to prove that for any $\phi(x_1, \dots, x_n) \in L_0^-$ and any $i_1, \dots, i_n \in I$,

$$\mathfrak{A} \models \phi\,[a_{i_1}, \dots, a_{i_n}] \quad \text{iff} \quad \mathfrak{B} \models \phi\,[b_{i_1}, \dots, b_{i_n}]\,.$$

Then $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ and $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ are enumerations of A and B respectively, such that $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$.

v) $\Rightarrow$ i) Assume that $\mathfrak{A}^* \cong \mathfrak{B}^*$ and let $h : \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*$ be an isomorphism. Define the relation $R \subseteq A \times B$ by

$$aRb \quad \text{iff} \quad h([a]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [b]_{\Omega(\mathfrak{B})}\,,$$

for any $a \in A$ and any $b \in B$. It is easy to check that R is a relative correspondence between $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$. □

As an straightforward corollary to Proposition 2.17 we obtain the following result:

Corollary 2.18 *For any class K of L-structures,*

$$\mathbf{H_S}\mathbf{H_S^{-1}}(K) = \mathbf{H_S^{-1}}\mathbf{H_S}(K).$$

Proof. Observe that, by Proposition 2.17, for any two L-structures $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S}\mathbf{H_S^{-1}}(\mathfrak{B})$ iff $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathbf{H_S}(\mathfrak{C})$, for some $\mathfrak{C}$ iff $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \in \mathbf{H_S^{-1}}(\mathfrak{C})$, for some $\mathfrak{C}$ iff $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S^{-1}}\mathbf{H_S}(\mathfrak{B})$. □

The last result of this section shows that, given two L-structures $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$, if we consider sequences of elements $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ and $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ of A and B respectively, that are not necessarily enumerations, then the substructure $\langle\overline{a}\rangle$ of $\mathfrak{A}$ generated by $\overline{a}$ and the substructure $\langle\overline{b}\rangle$ of $\mathfrak{B}$ generated by $\overline{b}$ are relatives.

Corollary 2.19 *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures and $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ and $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ sequences of elements of A and B respectively. Then the following are equivalent:*

i) $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$.

ii) $\langle\overline{a}\rangle^* \cong \langle\overline{b}\rangle^*$ *and there is an isomorphism* $h : \langle\overline{a}\rangle^* \to \langle\overline{b}\rangle^*$ *such that for any* $i \in I$, $h([a_i]_{\Omega(\langle\overline{a}\rangle)}) = [b_i]_{\Omega(\langle\overline{b}\rangle)}$.

iii) $\langle\overline{a}\rangle \sim \langle\overline{b}\rangle$ *and there is a relative correspondence* R *between* $\langle\overline{a}\rangle$ *and* $\langle\overline{b}\rangle$ *such that for any* $i \in I$, a_iRb_i.

Proof. i) $\Rightarrow$ ii) Assume that $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$. Since $\langle \overline{a} \rangle$ is a substructure of $\mathfrak{A}$ and $\langle \overline{b} \rangle$ is a substructure of $\mathfrak{B}$, it is clear that $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\langle \overline{a} \rangle, \overline{a})$ and $(\mathfrak{B}, \overline{b}) \equiv_0^- (\langle \overline{b} \rangle, \overline{b})$. Consequently,

$$(\langle \overline{a} \rangle, \overline{a}) \equiv_0^- (\langle \overline{b} \rangle, \overline{b}).$$

Let Ter be the set of terms of L. We define enumerations $\overline{c}$ and $\overline{d}$, of $\langle \overline{a} \rangle$ and $\langle \overline{b} \rangle$ respectively, by:

$$\overline{c} = \langle t^{\langle \overline{a} \rangle} [a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}] : t(x_1, \ldots, x_n) \in Ter, i_1, \ldots, i_n \in I, n \in \omega \rangle$$

$$\overline{d} = \langle t^{\langle \overline{b} \rangle} [b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}] : t(x_1, \ldots, x_n) \in Ter, i_1, \ldots, i_n \in I, n \in \omega \rangle.$$

Then,

$$(\langle \overline{a} \rangle, \overline{c}) \equiv_0^- (\langle \overline{b} \rangle, \overline{d}),$$

and by the proof of vi) $\Rightarrow$ v) of Proposition 2.17, $\langle \overline{a} \rangle^* \cong \langle \overline{b} \rangle^*$ and there is an isomorphism $h : \langle \overline{a} \rangle^* \to \langle \overline{b} \rangle^*$ such that for any $i \in I$, $h([a_i]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [b_i]_{\Omega(\langle \overline{b} \rangle)}$.

ii) $\Rightarrow$ iii) By the proof of v) $\Rightarrow$ i) of Proposition 2.17.

iii) $\Rightarrow$ i) By the proof of i) $\Rightarrow$ vi) of Proposition 2.17 and the fact that $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\langle \overline{a} \rangle, \overline{a})$ and $(\mathfrak{B}, \overline{b}) \equiv_0^- (\langle \overline{b} \rangle, \overline{b})$. □

2.3 The method of diagrams

The method of diagrams, due to L. A. Henkin and A. Robinson, has proved to be a useful tool for model theory. Nevertheless, if we want to have its advantages working in equality-free logic, we can not use this technique as it stands. In this section we present different propositions that will allow us to work with diagrams. Given an L-structure $\mathfrak{A}$, we define in the natural way, *the equality-free diagram of* $\mathfrak{A}$, in symbols $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$, as the set of all equality-free sentences of the diagram of $\mathfrak{A}$. In an analogous way we define *the equality-free elementary diagram of* $\mathfrak{A}$, *the equality-free positive diagram of* $\mathfrak{A}$ and *the equality-free negative diagram of* $\mathfrak{A}$, that we denote respectively by $\mathsf{eldiag}^-(\mathfrak{A})$, $\mathsf{posdiag}^-(\mathfrak{A})$ and $\mathsf{negdiag}^-(\mathfrak{A})$. For references on the method of diagrams see [CK91] and [Hod93b].

Propositions 2.20, 2.26, 2.27 and 2.28 are counterparts to the classical results on diagrams and will be used later on to obtain preservation theorems. Let us recall some definitions. Given two L-structures $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ and a map $f : A \to B$, we say that a formula $\phi(\overline{x}) \in L$ is *preserved by* f if for every tuple $\overline{a}$ of elements of A, if $\mathfrak{A} \models \phi[\overline{a}]$, then $\mathfrak{B} \models \phi[f(\overline{a})]$. And given a set of formulas $\Phi \subseteq L$, we say that f is a *Φ-map* if f preserves all the formulas in Φ.

Proposition 2.20 *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures. Then the following are equivalent:*

i) *There is an expansion of* $\mathfrak{B}$ *that satisfies* $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$.

ii) *There is a* L_0^-*-map* $h : A \to B$.

iii) *There is an enumeration* $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ *of* A *and a sequence* $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ *of elements of* B *such that*

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

iv) $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{C}$, *for some* $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$.

v) $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S^{-1} H_S S}(\mathfrak{B})$.

vi) $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S H_S^{-1} S}(\mathfrak{B})$.

Proof. Clearly i) $\Leftrightarrow$ ii) $\Leftrightarrow$ iii). By Proposition 2.17 and Corollary 2.18, iv) $\Leftrightarrow$ v) $\Leftrightarrow$ vi) is also clear. iii) $\Rightarrow$ iv) By Corollary 2.19 we have $\langle\overline{a}\rangle \sim \langle\overline{b}\rangle$ and, since $\overline{a}$ is an enumeration of A, $\mathfrak{A} = \langle\overline{a}\rangle$. Therefore, $\mathfrak{A} \sim \langle\overline{b}\rangle$ and $\langle\overline{b}\rangle \subseteq \mathfrak{B}$.

iv) $\Rightarrow$ iii) Since $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{C}$, for some $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$, by Proposition 2.17, there are enumerations of A and C, $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ and $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ respectively, such that $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{C}, \overline{b})$. Therefore, since $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$, $(\mathfrak{C}, \overline{b}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$ and consequently, $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$. $\square$

We will see that for relational similarity types we can improve Proposition 2.20 by seeing that conditions i) $-$ vi) are equivalent to $\mathfrak{A}^* \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}^*$.

Lemma 2.21 *Let* L *be relational. For any* L*-structures* $\mathfrak{A}$ *and* $\mathfrak{B}$, *if* $\mathfrak{A} \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}$, *then* $\mathfrak{A}^* \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}^*$.

Proof. Assume that $\mathfrak{A} \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}$ and let $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ be an embedding. We choose for any equivalence class $x \in \mathfrak{A}^*$ a representative $a_x \in A$. Let X be the set of these representatives. Let $f : \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*$ be defined by:

$$f([a]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [h(a)]_{\Omega(\mathfrak{B})},$$

for any $a \in X$. Since L is relational, it is easy to prove that f is well-defined and it is an embedding. $\square$

Observe that in Lemma 2.21 we can not delete the restriction that L is relational. Let $L = \{R, f\}$, where R is a binary relation symbol and f a monadic function symbol. Consider the L-structure $\mathfrak{A} = (\{a, b\}, \emptyset, f^{\mathfrak{A}})$, where $f^{\mathfrak{A}}(a) = b$ and $f^{\mathfrak{A}}(b) = a$, and the L-structure $\mathfrak{B} = (\{a, b, c\}, R^{\mathfrak{B}}, f^{\mathfrak{B}})$, where $R^{\mathfrak{B}} = \{\langle a, c\rangle\}$ and $f^{\mathfrak{B}} = f^{\mathfrak{A}} \cup \{\langle c, a\rangle\}$. It is easy to check that $\mathfrak{A} \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}$ but $\mathfrak{A}^* \underset{\sim}{\not\subset} \mathfrak{B}^*$.

Corollary 2.22 *Let L be relational. For any L-structures $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ the following are equivalent:*

i) *There is an expansion of $\mathfrak{B}$ that satisfies* $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$.

ii) $\mathfrak{A}^* \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}^*$.

Proof. i) $\Rightarrow$ ii) We see that condition iv) of Proposition 2.20 implies $\mathfrak{A}^* \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}^*$. If $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{C}$, for some $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$, then since L is relational, by Lemma 2.21, $\mathfrak{C}^* \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}^*$. Therefore, $\mathfrak{A}^* \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}^*$.

ii) $\Rightarrow$ i) Asssume that $\mathfrak{A}^* \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}^*$. Let $f : \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*$ be an embedding. For any $a \in A$, we choose an element $b_a \in B$ such that

$$f([a]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [b_a]_{\Omega(\mathfrak{B})} .$$

Then using the fact that $\mathfrak{A}^* \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}^*$ it is easy to check that $(\mathfrak{B}, b_a)_{a \in A}$ satisfies $\mathsf{diag}(\mathfrak{A})$.
□

We introduce now the *Leibniz diagram* of a model. This diagram will allow us to obtain a characterization of when $\mathfrak{A}^* \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}^*$, for two arbitrary L-structures $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$. The definition of Leibniz diagram was first introduced in [Elg94]. Given an L-structure $\mathfrak{A}$, the *Leibniz diagram* of $\mathfrak{A}$, in symbols $\mathsf{Ldiag}(\mathfrak{A})$, is the set $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{A}) \cup \Delta$, where Δ is the set of sentences of $L^-(A)$ of the form

$$\forall \overline{z}\, [\phi(t_1(a_1, \ldots, a_n), \overline{z}) \leftrightarrow \phi(t_2(b_1, \ldots, b_k), \overline{z})]$$

such that

$$t_1^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_n] \equiv t_2^{\mathfrak{A}}[b_1, \ldots, b_k] \quad \mathrm{mod}(\Omega(\mathfrak{A})),$$

where $\phi(x, \overline{z}) \in L^-$ is an atomic formula, $t_1(x_1, \ldots, x_n)$ and $t_2(y_1, \ldots, y_k)$ are terms of L and $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k \in A$.

Proposition 2.23 *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures. Then the following are equivalent:*

i) *There is an expansion of $\mathfrak{B}$ that satisfies* $\mathsf{Ldiag}(\mathfrak{A})$.

ii) $\mathfrak{A}^* \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}^*$.

Proof. i) $\Rightarrow$ ii) Suppose that there is an expansion of $\mathfrak{B}$ that satisfies $\mathsf{Ldiag}(\mathfrak{A})$. Let $\overline{a} = (a : a \in A)$. Then there is a sequence of elements of $\mathfrak{B}$, $\overline{b} = (b_a : a \in A)$, such that

$$(\mathfrak{B}, \overline{b}) \models \mathsf{Ldiag}(\mathfrak{A}).$$

Since $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{A}) \subseteq \mathsf{Ldiag}(\mathfrak{A})$,

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

By Corollary 2.19, there is an isomorphism $f : \mathfrak{A}^* \to \langle\overline{b}\rangle^*$ such that for any $a \in A$, $f([a]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [b_a]_{\Omega(\langle\overline{b}\rangle)}$. Define $g : \langle\overline{b}\rangle^* \to \mathfrak{B}^*$ by:

$$g([c]_{\Omega(\langle\overline{b}\rangle)}) = [c]_{\Omega(\mathfrak{B})},$$

for any $c \in \langle\overline{b}\rangle$. We will show that g is an embedding. We have that g is well-defined: assume that $c, c' \in \langle\overline{b}\rangle$ and $[c]_{\Omega(\langle\overline{b}\rangle)} = [c']_{\Omega(\langle\overline{b}\rangle)}$. Let $b_{a_1}, \ldots, b_{a_n} \in \mathrm{rg}(\overline{b})$ and $t\,(\bar{x})$ and $t'\,(\bar{x})$ terms of L, where $\bar{x} = x_1, \ldots, x_n$, such that

$$t^{\langle\overline{b}\rangle}\,[b_{a_1}, \ldots, b_{a_n}] = c$$

and

$$t'^{\langle\overline{b}\rangle}\,[b_{a_1}, \ldots, b_{a_n}] = c'.$$

Suppose, searching for a contradiction, that $[c]_{\Omega(\mathfrak{B})} \neq [c']_{\Omega(\mathfrak{B})}$. Then there is an equality-free atomic formula $\phi = \phi(y, \bar{w})$ such that

$$\mathfrak{B} \not\models \forall\bar{w}(\phi(y, \bar{w}) \leftrightarrow \phi(y', \bar{w}))\,[c, c'],$$

where y, y' and the variables in $\bar{w}$ are different from the variables in $\bar{x}$. Let ϕ_1 be the formula obtained by substituting in ϕ the term t for the variable y. And let ϕ_2 be the formula obtained by substituting in ϕ the term t' for the variable y'. Then

$$\mathfrak{B} \not\models \forall\bar{w}(\phi_1(\bar{x}, \bar{w}) \leftrightarrow \phi_2(\bar{x}, \bar{w}))\,[b_{a_1}, \ldots, b_{a_n}]. \tag{2.1}$$

Since $[c]_{\Omega(\langle\overline{b}\rangle)} = [c']_{\Omega(\langle\overline{b}\rangle)}$ and $f : \mathfrak{A}^* \to \langle\overline{b}\rangle^*$ is an isomorphism such that for any $a \in A$, $f([a]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [b_a]_{\Omega(\langle\overline{b}\rangle)}$, we have that

$$t^{\mathfrak{A}}\,[a_1, \ldots, a_n] \equiv t'^{\mathfrak{A}}\,[a_1, \ldots, a_n] \quad \mathrm{mod}(\Omega(\mathfrak{A})).$$

Therefore,

$$\mathfrak{A} \models \forall\bar{w}(\phi_1(\bar{x}, \bar{w}) \leftrightarrow \phi_2(\bar{x}, \bar{w}))\,[a_1, \ldots, a_n]$$

and since $(\mathfrak{B}, \overline{b}) \models \mathsf{Ldiag}(\mathfrak{A})$,

$$\mathfrak{B} \models \forall\bar{w}(\phi_1(\bar{x}, \bar{w}) \leftrightarrow \phi_2(\bar{x}, \bar{w}))\,[b_{a_1}, \ldots, b_{a_n}],$$

but this contradicts (2.1). Therefore, we can conclude that g is well-defined. Moreover, g is clearly injective and it is a strict homomorphism because $\langle\overline{b}\rangle \subseteq \mathfrak{B}$. Therefore, $\mathfrak{A}^* \underset{\sim}{\subset} \mathfrak{B}^*$.

ii) $\Rightarrow$ i) Let $f : \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*$ be an embedding. For any $a \in A$, we choose an element $b_a \in B$ such that $f([a]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [b_a]_{\Omega(\mathfrak{B})}$. Then $(\mathfrak{B}, b_a)_{a \in A}$ satisfies $\mathsf{Ldiag}(\mathfrak{A})$. $\square$

We introduce now the *equality-free elementary diagram* of a model. Given two structures $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$, by means of this diagram we will present a characterization of when $\mathfrak{A}^* \precsim^- \mathfrak{B}^*$. Let us see before some preliminary lemmas.

Lemma 2.24 *For any L-structures $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$, if $\mathfrak{A} \precsim^{-} \mathfrak{B}$, then $\mathfrak{A}^* \precsim^{-} \mathfrak{B}^*$.*

Proof. Assume that $\mathfrak{A} \precsim^{-} \mathfrak{B}$ and let $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ be an embedding that preserves all the equality-free formulas. Let $f : \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*$ be defined by:

$$f([a]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [h(a)]_{\Omega(\mathfrak{B})},$$

for any $a \in A$. Since $\mathfrak{A} \precsim^{-} \mathfrak{B}$, it is easy to prove with the usual arguments that given $a, a' \in A$,

$$[a]_{\Omega(\mathfrak{A})} = [a']_{\Omega(\mathfrak{A})} \quad \text{iff} \quad [h(a)]_{\Omega(\mathfrak{B})} = [h(a')]_{\Omega(\mathfrak{B})}.$$

We conclude from this fact that f is well-defined and it is injective. Using the fact that $\mathfrak{A} \precsim^{-} \mathfrak{B}$, it is easy to show that f is an embedding that preserves all the equality-free formulas. □

Lemma 2.25 *For any class K of L-structures,*

i) $\mathbf{S}^{\preceq^-}\mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}(K) \subseteq \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{S}^{\preceq^-}(K)$.

ii) $\mathbf{S}^{\preceq^-}\mathbf{H}_{\mathbf{S}}(K) \subseteq \mathbf{H}_{\mathbf{S}}\mathbf{S}^{\preceq^-}(K)$.

Proof. See [Elg94], Lemma 4.1.2. □

Proposition 2.26 *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures. Then the following are equivalent:*

i) *There is an expansion of $\mathfrak{B}$ that satisfies* $\mathsf{eldiag}^-(\mathfrak{A})$.

ii) *There is a L^--map $h : A \to B$.*

iii) *There is an enumeration of A, $\overline{a} = (a_i : i \in I)$, and a sequence of elements of B, $\overline{b} = (b_i : i \in I)$, such that*

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

iv) $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{C}$, *for some* $\mathfrak{C} \preceq^- \mathfrak{B}$.

v) $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{S}}\mathbf{S}^{\preceq^-}(\mathfrak{B})$.

vi) $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}_{\mathbf{S}}\mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{S}^{\preceq^-}(\mathfrak{B})$.

vii) $\mathfrak{A}^* \precsim^{-} \mathfrak{B}^*$.

Proof. Clearly i) $\Leftrightarrow$ ii) $\Leftrightarrow$ iii). And iv) $\Leftrightarrow$ v) $\Leftrightarrow$ vi) is also clear by Proposition 2.17 and Corollary 2.18.

iv) $\Rightarrow$ iii) Since $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{C}$, for some $\mathfrak{C} \preceq^- \mathfrak{B}$, by Proposition 2.17, there are enumerations of A and C, $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ and $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ respectively, such that $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{C}, \overline{b})$. Therefore, since $\mathfrak{C} \preceq^- \mathfrak{B}$, $(\mathfrak{C}, \overline{b}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$ and consequently, $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$.

iii) $\Rightarrow$ iv) Since $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$, by the proof of i) $\Rightarrow$ ii) of Corollary 2.19, there are enumerations $\overline{c}$ and $\overline{d}$ of $A = \langle \overline{a} \rangle$ and $\langle \overline{b} \rangle$ respectively, such that

$$(\mathfrak{A}, \overline{c}) \equiv_0^- (\langle \overline{b} \rangle, \overline{d})$$

and $\overline{a} \subseteq \overline{c}$ and $\overline{b} \subseteq \overline{d}$. Therefore, by Proposition 2.17,

$$(\mathfrak{A}, \overline{c}) \equiv^- (\langle \overline{b} \rangle, \overline{d})$$

and $\mathfrak{A} \sim \langle \overline{b} \rangle$. Then,

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\langle \overline{b} \rangle, \overline{b})$$

and consequently, since $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$, we have that

$$(\mathfrak{B}, \overline{b}) \equiv^- (\langle \overline{b} \rangle, \overline{b}).$$

Using this last fact it is easy to check that $\langle \overline{b} \rangle \preceq^- \mathfrak{B}$. Thus, $\mathfrak{A} \sim \langle \overline{b} \rangle$ and $\langle \overline{b} \rangle \preceq^- \mathfrak{B}$, so condition iv) holds.

iv) $\Rightarrow$ vii) by Lemma 2.24. vii) $\Rightarrow$ v) Since $\mathfrak{A}^* \precsim^- \mathfrak{B}^*$ implies that $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}^{\preceq^-}\mathbf{H}_\mathbf{S}(\mathfrak{B})$, by Lemma 2.25, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}_\mathbf{S}\mathbf{S}^{\preceq^-}(\mathfrak{B})$. □

We end this section with the *equality-free positive diagram* and the *equality-free negative diagram* of a model.

Proposition 2.27 *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures and* At^- *the set of atomic formulas of L^-. Then the following are equivalent:*

i) *There is an expansion of $\mathfrak{B}$ that satisfies* $\mathsf{posdiag}^-(\mathfrak{A})$.

ii) *There is an* At^-*-map $h : A \to B$.*

iii) $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}_\mathbf{S}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{S}(\mathfrak{B})$.

Proof. i) $\Leftrightarrow$ ii) is clear. ii) $\Rightarrow$ iii) Assume that $h : A \to B$ is an At^--map. Let $\mathfrak{C}$ be the substructure of $\mathfrak{B}$ generated by $h[A]$. Let $\kappa = |A|$ and let $\overline{a} = (a_\alpha : \alpha \in \kappa)$

be an enumeration of A without repetitions. Consider the L-structure $Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}}$ of the Preliminaries and the function $g : V_\kappa \to C$, defined by:

$$g(x_\alpha) = h(a_\alpha),$$

for any $\alpha \in \kappa$. We extend g to an homomorphism g' from Ter_{V_κ} into the algebraic reduct of $\mathfrak{C}$. Since $\mathfrak{C}$ is generated by $h[A]$, g' is onto C. Using the fact that h preserves equality-free atomic formulas it is routine to show that g' is an homomorphism from $Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}}$ onto $\mathfrak{C}$. Therefore, since by Lemma 1.5, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S}(Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}})$, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S H^{-1} S}(\mathfrak{B})$.

iii) $\Rightarrow$ ii) Assume that $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S H^{-1} S}(\mathfrak{B})$. Then there are L-structures $\mathfrak{C}$ and $\mathfrak{D}$ with the following properties: (1) $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{B}$, (2) there is a strict homomorphism f from $\mathfrak{C}$ onto $\mathfrak{A}$ and (3) there is an homomorphism g from $\mathfrak{C}$ onto $\mathfrak{D}$. We choose for any $a \in A$, an element $c_a \in f^{-1}[a]$. Let $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ be defined by: $h(a) = g(c_a)$, for any $a \in A$. So defined h is clearly an At^--map. □

Proposition 2.28 *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures and* Negat$^-$ *the set of negations of atomic formulas of L^-. Then the following are equivalent:*

i) *There is an expansion of $\mathfrak{B}$ that satisfies* $\mathsf{negdiag}^-(\mathfrak{A})$.

ii) *There is a* Negat$^-$*-map $h : A \to B$.*

iii) $\mathfrak{A} \in \mathbf{H H_S^{-1} S}(\mathfrak{B})$.

Proof. Analogous to the proof of Proposition 2.27. □

Chapter 3

Characterizations of $\equiv^-$

3.1 Methods of back-and-forth

In this section we will give a characterization of the relations $\equiv^-$ and $\equiv^-_{\infty\omega}$ using back-and-forth methods. Instead of using partial functions we will use partial relative correspondences. Since our language does not contain the equality symbol, we add new conditions to the usual back-and-forth conditions in order to deal with constant and function symbols. The characterization of elementary equivalence in terms of the existence of a winning strategy in an associated game is due to A. Ehrenfeucht and R. Fraïssé and the characterization of the relation $\equiv_{\infty\omega}$ is due to C. R. Karp; for references see [Bar73] and [EFT84].

First we recall the definitions of partial isomorphism, of ξ-finitely isomorphic structures and of partially isomorphic structures.

Definition 3.1 Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures. A map p is said to be a *partial isomorphism* from $\mathfrak{A}$ into $\mathfrak{B}$ if dom(p)$\subseteq A$, rg(p)$\subseteq B$ and p has the following properties:

- p is injective.
- For any n-adic relation symbol $R \in L$ and any $a_1, \ldots, a_n \in$ dom(p),

$$\langle \mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_n \rangle \in \mathrm{R}^{\mathfrak{A}} \quad \text{iff} \quad \langle \mathrm{p}(\mathrm{a}_1), \ldots, \mathrm{p}(\mathrm{a}_n) \rangle \in \mathrm{R}^{\mathfrak{B}}.$$

- For any n-adic function symbol $f \in L$ and any $a_1, \ldots, a_n, a \in$ dom(p),

$$f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a \quad \text{iff} \quad f^{\mathfrak{B}}(p(a_1), \ldots, p(a_n)) = p(a).$$

- For any constant symbol $c \in L$ and any $a \in \mathrm{dom(p)}$,

$$c^{\mathfrak{A}} = a \quad \text{iff} \quad c^{\mathfrak{B}} = p(a).$$

In the following definition we use ξ, η, ζ to denote ordinals.

Definition 3.2 Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures. $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are said to be *ξ-finitely isomorphic* via $(I_\eta)_{\eta \le \xi}$, in symbols $(I_\eta)_{\eta \le \xi} : \mathfrak{A} \cong_\xi \mathfrak{B}$, iff

i) Every I_η is a non-empty set of partial isomorphisms from $\mathfrak{A}$ into $\mathfrak{B}$ and for any $\eta \le \zeta \le \xi$, $I_\zeta \subseteq I_\eta$.

ii) (Forth condition) For any $\eta{+}1 \le \xi$, any $p \in I_{\eta+1}$ and any $a \in A$ there is $q \in I_\eta$ such that $q \supseteq p$ and $a \in \mathrm{dom}(q)$.

iii) (Back condition) For any $\eta{+}1 \le \xi$, any $p \in I_{\eta+1}$ and any $b \in B$ there is $q \in I_\eta$ such that $q \supseteq p$ and $b \in \mathrm{rg}(q)$.

We write $\mathfrak{A} \cong_\xi \mathfrak{B}$ when there is $(I_\eta)_{\eta \le \xi}$ such that $(I_\eta)_{\eta \le \xi} : \mathfrak{A} \cong_\xi \mathfrak{B}$. And we say that $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are *finitely isomorphic*, in symbols $\mathfrak{A} \cong_f \mathfrak{B}$, when for any $n \in \omega$, $\mathfrak{A} \cong_n \mathfrak{B}$.

Definition 3.3 Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L -structures. $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are said to be *partially isomorphic* via I, in symbols $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, iff

i) I is a non-empty set of partial isomorphisms from $\mathfrak{A}$ into $\mathfrak{B}$.

ii) (Forth condition) For any $p \in I$ and any $a \in A$ there is $q \in I$ such that $q \supseteq p$ and $a \in \mathrm{dom}(q)$.

iii) (Back condition) For any $p \in I$ and any $b \in B$ there is $q \in I$ such that $q \supseteq p$ and $b \in \mathrm{rg}(q)$.

We write $\mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$, when there is I such that $I : \mathfrak{A} \cong_p \mathfrak{B}$.

Now we introduce the concept of partial relative correspondence.

Definition 3.4 Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures. A relation $p \subseteq A \times B$ is said to be *a partial relative correspondence* between $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ iff for any n-adic relation symbol $R \in L$ and any $\langle a_1, b_1\rangle, \ldots, \langle a_n, b_n\rangle \in p$,

$$\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in R^{\mathfrak{A}} \text{ iff } \langle b_1, \ldots, b_n\rangle \in R^{\mathfrak{B}}.$$

Observe that the empty set, any strict homomorphism from $\mathfrak{A}$ into $\mathfrak{B}$ and any relative correspondence between $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are partial relative correspondences.

Lemma 3.5 *Let L be relational, $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ L-structures and $p \subseteq A \times B$. Let $\{\langle a_i, b_i\rangle : i \in I\}$ be an enumeration of p. Then the following are equivalent:*

i) *p is a partial relative correspondence between $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$.*

ii) *p is a relative correspondence between $\langle \mathrm{dom}(p)\rangle$ and $\langle \mathrm{rg}(p)\rangle$.*

iii) $(\mathfrak{A}, a_i)_{i\in I} \equiv_0^- (\mathfrak{B}, b_i)_{i\in I}$.

Proof. iii) $\Rightarrow$ i) and i) $\Rightarrow$ ii) are clear. ii) $\Rightarrow$ iii) By the proof of i) $\Rightarrow$ vi) of Proposition 2.17 using the fact that

$$(\langle \mathrm{dom}(p)\rangle, a_i)_{i\in I} \equiv_0^- (\mathfrak{A}, a_i)_{i\in I}$$

and

$$(\langle \mathrm{rg}(p)\rangle, b_i)_{i\in I} \equiv_0^- (\mathfrak{B}, b_i)_{i\in I}. \ \square$$

We show now that Lemma 3.5 does not hold for non-relational similarity types. Let $\mathcal{Z} = (Z, +, 0, E)$, where $(Z, +, 0)$ is the additive group of the integers and E is defined in the following way:

$$\langle n, m\rangle \in E \quad \text{iff} \quad n - m \text{ is divisible by } 2,$$

for any $n, m \in Z$. Let $p \subseteq Z \times Z$ be defined by:

$$p = \{\langle x, y\rangle \in Z \times Z : x \text{ is even and } y \text{ is odd }\}$$

Clearly, p is a partial relative correspondence. However, $\langle 2, 3\rangle \in p$ but $\langle 2+2, 3+3\rangle \notin p$, therefore, p is not a relative correspondence between $\langle \mathrm{dom}(p)\rangle$ and $\langle \mathrm{rg}(p)\rangle$.

In the following definition we use ξ, η, ζ to denote ordinals.

Definition 3.6 Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures. $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are said to be *ξ-finitely relatives* via $(I_\eta)_{\eta\leq\xi}$, in symbols $(I_\eta)_{\eta\leq\xi} : \mathfrak{A} \sim_\xi \mathfrak{B}$, iff

i) Every I_η is a non-empty set of partial relative correspondences between $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ and for any $\eta \leq \zeta \leq \xi$, $I_\zeta \subseteq I_\eta$.

ii) (Forth condition) For any $\eta+1 \leq \xi$, any $p \in I_{\eta+1}$ and any $a \in A$ there is $q \in I_\eta$ such that $q \supseteq p$ and $a \in \mathrm{dom}(q)$.

iii) (Back condition) For any $\eta+1 \leq \xi$, any $p \in I_{\eta+1}$ and any $b \in B$ there is $q \in I_\eta$ such that $q \supseteq p$ and $b \in \mathrm{rg}(q)$.

iv) For any $\eta+1 \leq \xi$, any $p \in I_{\eta+1}$ and any constant symbol $c \in L$, $p \cup \{\langle c^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{B}}\rangle\} \in I_\eta$.

v) For any $\eta+1 \leq \xi$, any $p \in I_{\eta+1}$, any m-adic function symbol $f \in L$ and any $\langle a_1, b_1\rangle, \ldots, \langle a_m, b_m\rangle \in p$,

$$p \cup \left\{\langle f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m), f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_m)\rangle\right\} \in I_\eta.$$

We write $\mathfrak{A} \sim_\xi \mathfrak{B}$ when there is $(I_\eta)_{\eta\leq\xi}$ such that $(I_\eta)_{\eta\leq\xi} : \mathfrak{A} \sim_\xi \mathfrak{B}$. And we say that $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are *finitely relatives*, in symbols $\mathfrak{A} \sim_f \mathfrak{B}$, when for any $n \in \omega$, $\mathfrak{A} \sim_n \mathfrak{B}$.

We give now a measure of the complexity of a formula of $L^-_{\infty\omega}$. We assign to any $\phi \in L^-_{\infty\omega}$ an ordinal called the nested rank of ϕ.

Definition 3.7 For any term t of L, let $S(t)$ be the set of subterms of t that are not variables. Given a formula of $L^-_{\infty\omega}$ we define by induction the nested rank of ϕ, denoted by $\mathrm{NR}(\phi)$, as follows:

$\mathrm{NR}(Rt_1 \ldots t_n) = \left|\bigcup_{1\leq i\leq n} S(t_i)\right|$
$\mathrm{NR}(\neg\phi) = \mathrm{NR}(\phi)$
$\mathrm{NR}(\bigwedge \Phi) = \sup\{\mathrm{NR}(\phi) : \phi \in \Phi\}$, for any set $\Phi \subseteq L^-_{\infty\omega}$.
$\mathrm{NR}(\exists x\phi) = \mathrm{NR}(\phi) + 1$.

Given $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ L-structures, for any $n \in \omega$, we write

$$\mathfrak{A} \equiv^-_n \mathfrak{B}$$

when $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ satisfy exactly the same sentences of L^- of nested rank $\leq n$.

We will calculate the nested rank of a formula in order to illustrate the definition. Let $L = \{R, f, g\}$, where R is a binary relation symbol and f and g are monadic function symbols. Take

$$\phi = \exists y \forall x \left[Rf(y)f(y) \wedge Rg(x)f(g(x))\right],$$

then $\mathrm{NR}(Rf(y)f(y)) = 1$, $\mathrm{NR}(Rg(x)f(g(x))) = 2$ and $\mathrm{NR}(\phi) = 4$.

Theorem 3.10 characterizes the L^--equivalence relation in terms of the relation $\sim_f$. In the proof we use the notion of nested rank of a formula that we have introduced before.

Lemma 3.8 *Given a finite similarity type L and a finite set V of variables, for any $n \in \omega$ there is, up to logical equivalence, only a finite number of formulas of L^- in the variables of V and of nested rank $\leq n$.*

Proof. Let L be a finite similarity type and V a finite set of variables. Let $Ter_V^0 = V$ and for any $n \in \omega$

$Ter_V^{n+1} = Ter_V^n \cup \{c : c \in L\} \cup \{f(t_1, \dots, t_k) : f \in L \text{ is } k\text{-adic and } t_1, \dots, t_k \in Ter_V^n\}.$

It is clear that Ter_V^n is finite for every $n \in \omega$. An easy induction on the construction of a term t in the variables of V shows that for any $n \in \omega$, if $|S(t)| \leq n$, then $t \in Ter_V^n$. It follows that for any equality-free atomic formula $Rt_1 \dots t_m$ in the variables of V and any $n \in \omega$, if $\mathrm{NR}(Rt_1 \dots t_m) \leq n$, then $t_1, \dots, t_m \in Ter_V^n$. Therefore, there is only a finite number of equality-free atomic formulas in the variables of V of nested rank $\leq n$. Using this fact it is easy to finish the proof by induction on the nested rank. □

Proposition 3.9 *Let L be a finite similarity type and $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ L-structures. Then for any $n \in \omega$,*

$$\mathfrak{A} \equiv_n^- \mathfrak{B} \quad \textit{iff} \quad \mathfrak{A} \sim_n \mathfrak{B}.$$

Proof. $\Rightarrow$) Suppose that $\mathfrak{A} \equiv_n^- \mathfrak{B}$. We define for any $m \leq n$, I_m as the set of all partial relative correspondences p such that there is $k \in \omega$ with $p = \{\langle a_1, b_1 \rangle, \dots, \langle a_k, b_k \rangle\}$ and for any $\phi = \phi(y_1, \dots, y_k) \in L^-$ with $\mathrm{NR}(\phi) \leq m$

$$\mathfrak{A} \models \phi\,[a_1, \dots, a_k] \quad \text{iff} \quad \mathfrak{B} \models \phi\,[b_1, \dots, b_k].$$

Let us see that conditions i)–v) of the definition of $\sim_n$ hold.

i) Since $\mathfrak{A} \equiv_n^- \mathfrak{B}$, we have $\emptyset \in I_m$ and clearly, if $m' \leq m \leq n$, then $I_m \subseteq I_{m'}$.
ii) Let $m + 1 \leq n$, $p \in I_{m+1}$ and $p = \{\langle a_1, b_1 \rangle, \dots, \langle a_k, b_k \rangle\}$. Suppose that $a \in A$. Since L is finite, by Lemma 3.8, there is a finite set X of equality-free formulas in the variables $z, y_1, \dots, y_k$, and of nested rank $\leq m$, such that any equality-free formula in the variables $z, y_1, \dots, y_k$, and of nested rank $\leq m$, is logically equivalent to one formula in this set. Consider now the set $\Phi = \{\psi \in X : \mathfrak{A} \models \psi\,[a, a_1, \dots, a_k]\}$. Then $\mathfrak{A} \models \exists z \bigwedge \Phi\,[a_1, \dots, a_k]$ and since $\mathrm{NR}(\exists z \bigwedge \Phi) \leq m + 1$ and $p \in I_{m+1}$, by the assumption, $\mathfrak{B} \models \exists z \bigwedge \Phi\,[b_1, \dots, b_k]$. Let $b \in B$ be such that $\mathfrak{B} \models \bigwedge \Phi\,[b, b_1, \dots, b_k]$. Thus, clearly $p \cup \{\langle a, b \rangle\} \in I_m$.

iii) is analogous to ii).

The proof of iv) is similar to the proof of v). We prove only this last case. Let $m + 1 \leq n$, $p \in I_{m+1}$, $f \in L$ an l-adic function symbol and $\langle a_1, b_1 \rangle, \dots, \langle a_l, b_l \rangle \in p$. Let $p = \{\langle a_1, b_1 \rangle, \dots, \langle a_l, b_l \rangle, \dots, \langle a_k, b_k \rangle\}$. We will show that for any formula $\phi(y_1, \dots, y_{k+1}) \in L^-$ with $\mathrm{NR}(\phi) \leq m$,

$$\mathfrak{A} \models \phi\left[a_1, \dots, a_k, f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_l)\right] \quad \text{iff} \quad \mathfrak{B} \models \phi\left[b_1, \dots, b_k, f^{\mathfrak{B}}(b_1, \dots, b_l)\right].$$

Assume that $\phi(y_1, \ldots, y_{k+1}) \in L^-$ is a formula with $\mathrm{NR}(\phi) \leq m$, then

$$\mathfrak{A} \models \phi\left[a_1, \ldots, a_k, f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_l)\right] \quad \text{iff} \quad \mathfrak{A} \models \phi'\left[a_1, \ldots, a_k\right],$$

where ϕ' is obtained by substituting in ϕ the term $f(y_1, \ldots, y_l)$ for the variable y_{k+1}. Since $\mathrm{NR}(\phi') \leq m+1$ and $p \in I_{m+1}$,

$$\mathfrak{A} \models \phi'\left[a_1, \ldots, a_k\right] \quad \text{iff} \quad \mathfrak{B} \models \phi'\left[b_1, \ldots, b_k\right].$$

Now,

$$\mathfrak{B} \models \phi'\left[b_1, \ldots, b_k\right] \quad \text{iff} \quad \mathfrak{B} \models \phi\left[b_1, \ldots, b_k, f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_l)\right],$$

and therefore, $p \cup \left\{\langle f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_l), f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_l)\rangle\right\} \in I_m$. Thus, we conclude that $(I_m)_{m \leq n} : \mathfrak{A} \sim_n \mathfrak{B}$.

$\Leftarrow$) Suppose now that $(I_m)_{m \leq n} : \mathfrak{A} \sim_n \mathfrak{B}$. First we show by induction on m that

$(*)$ If $m \leq n$ and $\phi = Rt_1 \ldots t_l$ is an atomic formula whose free variables are among $x_1, \ldots, x_k$ and whose nested rank is $\leq m$, then for any $p \in I_m$ and any $\langle a_1, b_1\rangle, \ldots, \langle a_k, b_k\rangle \in p$ there is $q \in I_0$ such that $p \subseteq q$ and for any i, $1 \leq i \leq l$, $\langle t_i^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_k], t_i^{\mathfrak{B}}[b_1, \ldots, b_k]\rangle \in q$.

The case $m = 0$ is clear. Suppose inductively that condition $(*)$ holds for m. Let $\phi = Rt_1 \ldots t_l$ with nested rank $\leq m+1 \leq n$, $p \in I_{m+1}$ and $\langle a_1, b_1\rangle, \ldots, \langle a_k, b_k\rangle \in p$. If $\mathrm{NR}(Rt_1 \ldots t_l) = 0$ we are done. So let $\mathrm{NR}(Rt_1 \ldots t_l) \geq 1$. There is a subterm $r = r(x_1, \ldots, x_k)$ of some term t_i of ϕ with $1 \leq i \leq l$, which is either a constant or a term of the form $g(x_{i_1}, \ldots, x_{i_j})$, where g is a j-adic function symbol of L and $i_1, \ldots, i_j \in \{1, \ldots, k\}$. Let y be a new variable that does not occur in ϕ and for every $i, 1 \leq i \leq l$, let t_i' be the term obtained from t_i by substituting the variable y for the term $r(x_1, \ldots, x_k)$. Note that $t_i' = t_i'(x_1, \ldots, x_k, y)$ and that $\phi' = Rt_1' \ldots t_l'$ has nested rank $\leq m$. By conditions iv) and v) of the definition of $\sim_n$,

$$p \cup \left\{\langle r^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_k], r^{\mathfrak{B}}[b_1, \ldots, b_k]\rangle\right\} \in I_m.$$

Therefore, by inductive hypothesis, there is $q \in I_0$ such that

$$p \cup \left\{\langle r^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_k], r^{\mathfrak{B}}[b_1, \ldots, b_k]\rangle\right\} \subseteq q$$

and for any i, $1 \leq i \leq l$,

$$\langle t_i'^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_k, r^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_k]], t_i'^{\mathfrak{B}}[b_1, \ldots, b_k, r^{\mathfrak{B}}[b_1, \ldots, b_k]]\rangle \in q.$$

Then clearly $p \subseteq q$ and for any i, $1 \leq i \leq l$, $\langle t_i^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_k], t_i^{\mathfrak{B}}[b_1, \ldots, b_k]\rangle \in q$. Therefore, condition $(*)$ holds.

Let $m \leq n$. We prove by induction on ϕ that for any formula $\phi(y_1, \ldots, y_k) \in L^-$ of nested rank $\leq m$, any $p \in I_m$ and any $\langle a_1, b_1 \rangle, \ldots, \langle a_k, b_k \rangle \in p$,

$$\mathfrak{A} \models \phi\,[a_1, \ldots, a_k] \quad \text{iff} \quad \mathfrak{B} \models \phi\,[b_1, \ldots, b_k]\,. \tag{3.1}$$

If ϕ is atomic, this is clear by condition $(*)$. The cases $\neg$ and $\wedge$ are immediate. Let $\phi = \exists y \psi$ and suppose inductively that condition (3.1) holds for ψ. If $\mathfrak{A} \models \exists y \psi\,[a_1, \ldots, a_k]$, then there is $a \in A$ such that $\mathfrak{A} \models \psi\,[a, a_1, \ldots, a_k]$. Observe that $m \geq \mathrm{NR}(\exists y \psi) \geq 1$. Now $\mathrm{NR}(\psi) \leq m - 1$. Hence, by ii) of the definition of $\sim_n$, there is $q \in I_{m-1}$ such that $q \supseteq p$ and $a \in \mathrm{dom}(q)$. Let $b \in B$ be such that $\langle a, b \rangle \in q$. By inductive hypothesis, $\mathfrak{B} \models \psi\,[b, b_1, \ldots, b_k]$ and therefore, $\mathfrak{B} \models \exists y \psi\,[b_1, \ldots, b_k]$. The other direction is proved analogously using condition iii) of the definition of $\sim_n$. By condition (3.1) we conclude that $\mathfrak{A} \equiv_n^- \mathfrak{B}$. □

Observe that in the previous proof, when proving that $\mathfrak{A} \sim_n \mathfrak{B}$ implies $\mathfrak{A} \equiv_n^- \mathfrak{B}$, we do not make any use of the fact that L is a finite similarity type. It is also useful to remark that in the proof of $\mathfrak{A} \equiv_n^- \mathfrak{B}$ implies $\mathfrak{A} \sim_n \mathfrak{B}$, we obtain $(I_m)_{m \leq n}$ such that $(I_m)_{m \leq n} : \mathfrak{A} \sim_n \mathfrak{B}$ and for any $m \leq n$ all the partial relative correspondences of I_m are finite.

Theorem 3.10 *Let L be a finite similarity type and $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ L-structures, then*

$$\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B} \quad \textit{iff} \quad \mathfrak{A} \sim_f \mathfrak{B}$$

Proof. By Proposition 3.9. □

Observe that for infinite similarity types, in general it is not true that $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$ implies $\mathfrak{A} \sim_f \mathfrak{B}$:

Example 3.11 Let $L = \{P_n : n \in \omega\}$, where for any $n \in \omega$, P_n is a monadic relation symbol, $\mathfrak{A} = (\omega, P_n^{\mathfrak{A}})$, where for any $n \in \omega$, $P_n^{\mathfrak{A}} = \{m \in \omega : m \geq n\}$ and $\mathfrak{B} = (\omega \cup \{b\}, P_n^{\mathfrak{B}})$, where $b \notin \omega$ and for any $n \in \omega$, $P_n^{\mathfrak{B}} = P_n^{\mathfrak{A}} \cup \{b\}$. Let us see that for every finite $L_0 \subseteq L$, $\mathfrak{A} \restriction L_0 \in \mathbf{H_S}(\mathfrak{B} \restriction L_0)$ and consequently, $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. Suppose that $L_0 \subseteq L$ is finite and let $k \in \omega$ be the greatest number such that $P_k \in L_0$. Let $h : \mathfrak{B} \restriction L_0 \to \mathfrak{A} \restriction L_0$ be defined by: for any $n \in \omega$, $h(n) = n$ and $h(b) = k + 1$. Clearly h is a strict homomorphism. However, there is no partial relative correspondence p such that $b \in \mathrm{rg}(p)$ and therefore, $\mathfrak{A} \not\sim_f \mathfrak{B}$.

Now we give a characterization of the $L^-_{\infty\omega}$-equivalence relation in terms of the relation $\sim_p$.

Definition 3.12 Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L -structures. $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are said to be *partially relatives* via I, in symbols $I : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, iff

i) I is a non-empty set of partial relative correspondences.

ii) (Forth condition) For any $p \in I$ and any $a \in A$ there is $q \in I$ such that $q \supseteq p$ and $a \in \mathrm{dom}(q)$.

iii) (Back condition) For any $p \in I$ and any $b \in B$ there is $q \in I$ such that $q \supseteq p$ and $b \in \mathrm{rg}(q)$.

iv) For any $p \in I$ and any constant symbol $c \in L$, $p \cup \{\langle c^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{B}}\rangle\} \in I$.

v) For any $p \in I$, any m-adic function symbol $f \in L$ and any $\langle a_1, b_1\rangle, \ldots, \langle a_m, b_m\rangle \in p$,

$$p \cup \left\{\langle f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m), f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_m)\rangle\right\} \in I.$$

We write $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$ when there is I such that $I : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.

Theorem 3.13 *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures, then*

$$\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B} \quad \textit{iff} \quad \mathfrak{A} \equiv^-_{\infty\omega} \mathfrak{B}.$$

Proof. $\Rightarrow$) Assume that $I : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$. First we observe that given a finite set of variables $V = \{x_1, \ldots, x_k\}$, using conditions iv) and v) of the definition of $\sim_p$ and the fact that for any $n \in \omega$, Ter^n_V is finite (when Ter^n_V is defined as in the proof of Lemma 3.8), it is easy to show by induction on n that

(**) If $p \in I$ and $\langle a_1, b_1\rangle, \ldots, \langle a_k, b_k\rangle \in p$, then there is $q \in I$ such that $p \subseteq q$ and for any term $t \in Ter^n_V$, $\langle t^{\mathfrak{A}}[a_1, \ldots, a_k], t^{\mathfrak{B}}[b_1, \ldots, b_k]\rangle \in q$.

We prove now by induction on ϕ that for any formula $\phi(x_1, \ldots, x_k) \in L^-_{\infty\omega}$, any $p \in I$ and any $\langle a_1, b_1\rangle, \ldots, \langle a_k, b_k\rangle \in p$,

$$\mathfrak{A} \models \phi\,[a_1, \ldots, a_k] \qquad \text{iff} \qquad \mathfrak{B} \models \phi\,[b_1, \ldots, b_k]\,. \tag{3.2}$$

If ϕ is atomic, condition (3.2) follows from condition (**). The cases $\neg$ and $\bigwedge$ are clear. If $\phi = \exists y \psi$, suppose inductively that condition (3.2) holds for ψ and

$$\mathfrak{A} \models \exists y \psi\,[a_1, \ldots, a_k]\,.$$

Then there is $c \in A$ such that

$$\mathfrak{A} \models \psi\,[c, a_1, \ldots, a_k]\,,$$

and by ii) of the definition of $\sim_p$, there is $q \in I$ such that $q \supseteq p$ and $c \in \mathrm{dom}(q)$. Let $d \in B$ such that $\langle c, d\rangle \in q$. Therefore, by inductive hypothesis,

$$\mathfrak{B} \models \psi\,[d, b_1, \ldots, b_k]$$

and then,

$$\mathfrak{B} \models \exists y\psi\,[b_1, \ldots, b_k]\,.$$

The other direction is proved analogously using condition iii) of the definition of $\sim_p$.

$\Leftarrow$) Suppose now that $\mathfrak{A} \equiv^{-}_{\infty\omega} \mathfrak{B}$. We define I as the set of all partial relative correspondences p such that there is $k \in \omega$ with $p = \{\langle a_1, b_1\rangle, \ldots, \langle a_k, b_k\rangle\}$ and for any $\phi(x_1, \ldots, x_k) \in L^{-}_{\infty\omega}$,

$$\mathfrak{A} \models \phi\,[a_1, \ldots, a_k] \quad \text{iff} \quad \mathfrak{B} \models \phi\,[b_1, \ldots, b_k]\,.$$

Let us see that conditions i)–v) of the definition of $\sim_p$ hold.

i) Since $\mathfrak{A} \equiv^{-}_{\infty\omega} \mathfrak{B}$, $\emptyset \in I$. ii) Let $p \in I$, $p = \{\langle a_1, b_1\rangle, \ldots, \langle a_k, b_k\rangle\}$ and $a \in A$. Suppose, searching for a contradiction, that there is no $b \in B$ such that for any $\phi(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in L^{-}_{\infty\omega}$

$$\mathfrak{A} \models \phi\,[a_1, \ldots, a_k, a] \quad \text{iff} \quad \mathfrak{B} \models \phi\,[b_1, \ldots, b_k, b]\,.$$

For any $b \in B$ we choose a formula $\phi_b(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in L^{-}_{\infty\omega}$ such that

$$\mathfrak{A} \models \phi_b\,[a_1, \ldots, a_k, a]$$

and

$$\mathfrak{B} \not\models \phi_b\,[b_1, \ldots, b_k, b]\,.$$

Consider now the set of all these formulas

$$\Phi = \{\phi_b(x_1, \ldots, x_{k+1}) : b \in B\}\,.$$

Let ψ be the conjunction of all the formulas in Φ. We have that $\psi = \psi(x_1, \ldots, x_{k+1}) \in L^{-}_{\infty\omega}$ and

$$\mathfrak{A} \models \exists x_{k+1}\psi\,[a_1, \ldots, a_k]\,.$$

Since $p \in I$,

$$\mathfrak{B} \models \exists x_{k+1}\psi\,[b_1, \ldots, b_k]\,,$$

which is absurd. Therefore, we can conclude that condition ii) holds. Condition iii) is proved analogously to ii). And, by definition of I, conditions iv) and v) are also satisfied. $\Box$

Observe that in the previous proof, assuming that $\mathfrak{A} \equiv^{-}_{\infty\omega} \mathfrak{B}$ we obtain a set I such that $I : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$ and any partial relative correspondence in I is finite. Let us see now the different relations among the notions of $\sim$, $\sim_p$ and $\sim_f$.

Proposition 3.14 *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures. If $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, then $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.*

Proof. If R is a relative correspondence between $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$, $\{R\} : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$. □

Let us see that the converse of this proposition is not true:

Example 3.15 Let $L = \{E\}$, where E is a binary relation symbol, $\mathfrak{A} = (\omega_1, E^{\mathfrak{A}})$ and $\mathfrak{B} = (\omega, E^{\mathfrak{B}})$, where $E^{\mathfrak{A}}$ and $E^{\mathfrak{B}}$ are the identity on ω_1 and on ω, respectively. Clearly $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are reduced and $\mathfrak{A} \ncong \mathfrak{B}$, therefore $\mathfrak{A} \not\sim \mathfrak{B}$. However $I : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, where

$$I = \{p \subseteq \omega_1 \times \omega\text{: } p \text{ is a finite injective partial map}\}.$$

Proposition 3.16 *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures such that $\mathfrak{A}^*$ and $\mathfrak{B}^*$ are countable, then*

$$\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B} \quad \textit{iff} \quad \mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}.$$

Proof. $\Leftarrow$) is clear by Proposition 3.14. $\Rightarrow$) If $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, by Theorem 3.13, $\mathfrak{A} \equiv^-_{\infty\omega} \mathfrak{B}$. Then $\mathfrak{A}^* \equiv^-_{\infty\omega} \mathfrak{B}^*$ and since $\mathfrak{A}^*$ and $\mathfrak{B}^*$ are reduced, by Corollary 2.14, $\mathfrak{A}^* \equiv_{\infty\omega} \mathfrak{B}^*$. It is a well-known result that any two $L_{\infty\omega}$-equivalent countable structures are isomorphic; therefore, since $\mathfrak{A}^*$ and $\mathfrak{B}^*$ are countable, $\mathfrak{A}^* \cong \mathfrak{B}^*$ and consequently, $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$. □

Corollary 3.17 *If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are countable reduced L-structures, then*

$$\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B} \quad \textit{iff} \quad \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}.$$

Proof. By Proposition 3.16. □

In order to see the relationship between $\sim_p$ and $\sim_\xi$, for a given ordinal ξ, we prove a theorem analogue to Theorem 3.13 for formulas of $L^-_{\infty\omega}$ of nested rank $\leq \xi$. Given $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ L-structures, for any ordinal ξ, we write

$$\mathfrak{A} \equiv^-_{\infty\omega,\xi} \mathfrak{B}$$

when $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ satisfy exactly the same sentences of $L^-_{\infty\omega}$ of nested rank $\leq \xi$.

Theorem 3.18 *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures, then*

$$\mathfrak{A} \sim_\xi \mathfrak{B} \quad \textit{iff} \quad \mathfrak{A} \equiv^-_{\infty\omega,\xi} \mathfrak{B}.$$

Proof. $\Rightarrow$) Assume that $(I_\eta)_{\eta\leq\xi} : \mathfrak{A} \sim_\xi \mathfrak{B}$. Let $\beta \leq \xi$. We prove by induction on ϕ that for any formula $\phi(y_1, \ldots, y_k) \in L^-_{\infty\omega}$ of nested rank $\leq \beta$, any $p \in I_\beta$ and any $\langle a_1, b_1\rangle, \ldots, \langle a_k, b_k\rangle \in p$,

$$\mathfrak{A} \models \phi\,[a_1, \ldots, a_k] \quad \text{iff} \quad \mathfrak{B} \models \phi\,[b_1, \ldots, b_k]\,. \tag{3.3}$$

Suppose that ϕ is atomic. If $\beta \in \omega$, by condition $(*)$ in the proof of Proposition 3.9, it is clear that condition (3.3) holds. And in case that $\beta \geq \omega$, we can use $(*)$ together with the fact that for any $n \in \omega$, $I_\beta \subseteq I_n$.

The cases $\neg$ and $\bigwedge$ are immediate. Let $\phi = \exists y\psi$ and suppose inductively that condition (3.3) holds for ψ. If $\mathfrak{A} \models \exists y\psi\,[a_1, \ldots, a_k]$, then there is $a \in A$ such that $\mathfrak{A} \models \psi\,[a, a_1, \ldots, a_k]$. Observe that $\beta \geq \mathrm{NR}(\exists y\psi) = \mathrm{NR}(\psi) + 1$. Hence, by ii) of the definition of $\sim_\xi$, there is $q \in I_{\beta-1}$ such that $q \supseteq p$ and $a \in \mathrm{dom}(q)$. Let $b \in B$ be such that $\langle a, b\rangle \in q$. By inductive hypothesis, $\mathfrak{B} \models \psi\,[b, b_1, \ldots, b_k]$ and therefore, $\mathfrak{B} \models \exists y\psi\,[b_1, \ldots, b_k]$. The other direction is proved analogously using condition iii) of the definition of $\sim_\xi$. By condition (3.3) we conclude that $\mathfrak{A} \equiv^-_{\infty\omega,\xi} \mathfrak{B}$.

$\Leftarrow$) Suppose that $\mathfrak{A} \equiv^-_{\infty\omega,\xi} \mathfrak{B}$. For any $\beta \leq \xi$, we define I_β as the set of all partial relative correspondences p such that there is $k \in \omega$ with $p = \{\langle a_1, b_1\rangle, \ldots, \langle a_k, b_k\rangle\}$ and for any $\phi(x_1, \ldots, x_k) \in L^-_{\infty\omega}$ with $\mathrm{NR}(\phi) \leq \beta$,

$$\mathfrak{A} \models \phi\,[a_1, \ldots, a_k] \quad \text{iff} \quad \mathfrak{B} \models \phi\,[b_1, \ldots, b_k]\,.$$

It is routine to check that conditions i)–v) of the definition of $\sim_\xi$ hold, using a similar argument to the one given in the direction from right to left in the proof of Theorem 3.13. □

Proposition 3.19 *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures. Then,*

$$\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B} \quad \textit{iff} \quad (\mathfrak{A} \sim_\xi \mathfrak{B},\ \textit{for any ordinal}\ \xi).$$

Proof. $\Rightarrow$) Assume that $I : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$ and let for any $\eta \in \xi$, $I_\eta = I$. Then $(I_\eta)_{\eta\leq\xi} : \mathfrak{A} \sim_\xi \mathfrak{B}$. $\Leftarrow$) Suppose that for any ordinal ξ, $\mathfrak{A} \sim_\xi \mathfrak{B}$. Then by Theorem 3.18, for any ordinal ξ, $\mathfrak{A} \equiv^-_{\infty\omega,\xi} \mathfrak{B}$. Consequently, $\mathfrak{A} \equiv^-_{\infty\omega} \mathfrak{B}$ and, by Theorem 3.13, $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$. □

Corollary 3.20 *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures. If $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, then $\mathfrak{A} \sim_f \mathfrak{B}$.*

Proof. By Proposition 3.19. □

The following counterexample shows that the converse of this corollary is not true:

Example 3.21 Let $L = \{P, f\}$, where P is a monadic relation symbol and f is a monadic function symbol. Consider the L-structure $\mathfrak{A} = (\omega, P^{\mathfrak{A}}, f^{\mathfrak{A}})$, where $P^{\mathfrak{A}} = \{0\}$, $f^{\mathfrak{A}}(0) = 0$ and for any $n \in \omega$, $f^{\mathfrak{A}}(n+1) = n$ and the L-structure $\mathfrak{B} = (\omega \cup \{b\}, P^{\mathfrak{B}}, f^{\mathfrak{B}})$, where $b \notin \omega$, $P^{\mathfrak{B}} = P^{\mathfrak{A}}$ and $f^{\mathfrak{B}} = f^{\mathfrak{A}} \cup \{\langle b, b\rangle\}$. We will see that $\mathfrak{B} \sim_f \mathfrak{A}$. Let for any $m \in \omega$,

$$I_m = \{p : p \subseteq Id_\omega \cup \{\langle b, j+1\rangle : j \geq m\}\}.$$

Clearly for any $n \in \omega$, $(I_m)_{m \leq n}$ satisfies conditions i) – v) of the definition of $\sim_n$. Therefore, $\mathfrak{B} \sim_f \mathfrak{A}$. But $\mathfrak{A} \not\models \exists x (\bigwedge_{n \in \omega} \neg P f^n(x))$ and $\mathfrak{B} \models \exists x (\bigwedge_{n \in \omega} \neg P f^n(x))$. Then $\mathfrak{B} \not\equiv^-_{\infty\omega} \mathfrak{A}$ and hence, by Theorem 3.13, $\mathfrak{A} \not\sim_p \mathfrak{B}$.

Proposition 3.22 *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be finite L-structures, then*

$$\mathfrak{A} \sim_f \mathfrak{B} \quad \textit{iff} \quad \mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}.$$

Proof. $\Leftarrow$) is clear by Proposition 3.14 and Corollary 3.20. $\Rightarrow$) Suppose that $\mathfrak{A} \sim_f \mathfrak{B}$ and let for any $m \in \omega$, $(I^m_n)_{n \leq m} : \mathfrak{A} \sim_m \mathfrak{B}$. For any $n \in \omega$ we define the set I_n in the following way:

$$I_n = \bigcup_{m \geq n} I^m_n.$$

Observe that for any $n, n' \in \omega$, if $n \leq n'$, then $I_{n'} \subseteq I_n$. Since $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are finite, for any $n \in \omega$, there is $p \in I_n$ with $\mathrm{dom}(p) = A$ and $\mathrm{rg}(p) = B$. Moreover, since $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are finite, there is a finite number of partial relative correspondences. Consequently, there is p with $\mathrm{dom}(p) = A$ and $\mathrm{rg}(p) = B$ such that for any $n \in \omega$, $p \in I_n$. Let $p = \{\langle a_i, b_i\rangle : i \in I\}$ be an enumeration of p. Then, by the proof of Proposition 3.9, for any $n \in \omega$,

$$(\mathfrak{A}, a_i)_{i \in I} \equiv^-_n (\mathfrak{B}, b_i)_{i \in I}$$

and therefore,

$$(\mathfrak{A}, a_i)_{i \in I} \equiv^- (\mathfrak{B}, b_i)_{i \in I}.$$

By Proposition 2.17 we can conclude that $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$. □

To end the section we see how back-and-forth systems allow us to obtain a useful characterization of the relation $\equiv^-$ for relational similarity types. In the proof of this result we will use the structures $\mathfrak{A}(\lambda)$ introduced in the Preliminaries.

Lemma 3.23 *Let L be relational and $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ L-structures. Assume that $k \in \omega$ and $p = \{\langle a_0, b_0\rangle, \ldots, \langle a_{k-1}, b_{k-1}\rangle\}$ is a partial relative correspondence $p \subseteq A \times B$. Let $\bar{A} = \langle A_0, \ldots, A_{k-1}\rangle$ and $\bar{B} = \langle B_0, \ldots, B_{k-1}\rangle$ be sequences of infinite subsets of $A(\omega)$ and $B(\omega)$ respectively, with the following properties:*

i) *For any $i \leq k-1$, $A_i \subseteq C_{a_i}$ and $B_i \subseteq C_{b_i}$.*

ii) *For any* $i, j \leq k-1$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ *and* $B_i \cap B_j = \emptyset$.

iii) *For any* $a \in \mathrm{dom}(p)$, $C_a - (A_0 \cup \cdots \cup A_{k-1})$ *is infinite and for any* $b \in \mathrm{rg}(p)$, $C_b - (B_0 \cup \cdots \cup B_{k-1})$ *is infinite.*

Then for any sequence $\bar{f} = \langle f_0, \ldots, f_{k-1} \rangle$ *such that* $f_i : A_i \to B_i$ *is a bijection for any* $i \leq k-1$, *the set*

$$p_{\bar{A},\bar{B},\bar{f}} = \{\langle x, f_i(x) \rangle : x \in A_i, i \leq k-1\}$$

is a partial isomorphism from $\mathfrak{A}(\omega)$ *into* $\mathfrak{B}(\omega)$.

Proof. It is clear by definition of $\mathfrak{A}(\omega)$ and $\mathfrak{B}(\omega)$. □

Theorem 3.24 *Let* L *be relational and* $\mathfrak{A}$ *and* $\mathfrak{B}$ L*-structures. Then the following are equivalent:*

i) $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$.

ii) $\mathfrak{A}(\omega) \equiv \mathfrak{B}(\omega)$.

iii) *For some infinite cardinal* λ, $\mathfrak{A}(\lambda) \equiv \mathfrak{B}(\lambda)$.

iv) *For any infinite cardinal* λ, $\mathfrak{A}(\lambda) \equiv \mathfrak{B}(\lambda)$.

Proof. ii) $\Rightarrow$ iii), iv) $\Rightarrow$ iii) are clear. iii) $\Rightarrow$ i) is clear because for any infinite cardinal λ, $\mathfrak{A}(\lambda) \in \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}(\mathfrak{A})$ and $\mathfrak{B}(\lambda) \in \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}(\mathfrak{B})$. i) $\Rightarrow$ ii) Assume that $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. We will show that, for any finite $L_0 \subseteq L$,

$$(\mathfrak{A}(\omega) \restriction L_0) \cong_f (\mathfrak{B}(\omega) \restriction L_0).$$

Let $L_0 \subseteq L$ be finite, we will prove that for any $n \in \omega$,

$$(\mathfrak{A}(\omega) \restriction L_0) \cong_n (\mathfrak{B}(\omega) \restriction L_0).$$

Let $n \in \omega$, since $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \equiv_n^- \mathfrak{B}$ and therefore, $(\mathfrak{A} \restriction L_0) \equiv_n^- (\mathfrak{B} \restriction L_0)$. Since L_0 is finite, by Proposition 3.9 and the observation that follows its proof, there is $(I_m)_{m \leq n}$ such that

$$(I_m)_{m \leq n} : (\mathfrak{A} \restriction L_0) \sim_n (\mathfrak{B} \restriction L_0),$$

and for any $m \leq n$, I_m is a set of finite partial relative correspondences. Observe that $(\mathfrak{A}(\omega) \restriction L_0) = (\mathfrak{A} \restriction L_0)\ (\omega)$ and $(\mathfrak{B}(\omega) \restriction L_0) = (\mathfrak{B} \restriction L_0)\ (\omega)$; this fact allows us to apply Lemma 3.23. For any $m \leq n$, let Y_m be the set of all partial isomorphisms $p_{\bar{A},\bar{B},\bar{f}}$ from $\mathfrak{A}(\omega) \restriction L_0$ into $\mathfrak{B}(\omega) \restriction L_0$ with the properties stated in Lemma 3.23 and $p \in I_m$. We claim now that

$$(Y_m)_{m \leq n} : (\mathfrak{A}(\omega) \restriction L_0) \cong_n (\mathfrak{B}(\omega) \restriction L_0).$$

It is not difficult to check that for any $m \leq n$, Y_m is non-empty. We prove now that the forth condition of the definition of $\cong_n$ holds; the back condition has an analogous proof. Suppose that $m+1 \leq n$, $p_{\bar{A},\bar{B},\bar{f}} \in Y_{m+1}$ and $x \in A(\omega)$. Let $a \in A$ with $x \in C_a$. If $x \in \mathrm{dom}(p_{\bar{A},\bar{B},\bar{f}})$, then there is nothing to prove, because $p_{\bar{A},\bar{B},\bar{f}} \in Y_{m+1} \subseteq Y_m$. If $x \notin \mathrm{dom}(p_{\bar{A},\bar{B},\bar{f}})$ we distinguish two cases:

Case I: $a \in \mathrm{dom}(p)$. Let $p = \{\langle a_0, b_0\rangle, \ldots, \langle a_{k-1}, b_{k-1}\rangle\}$ and $i \leq k-1$ with $a = a_i$. Then we choose $y \in C_{b_i} - (B_0 \cup \cdots \cup B_{k-1})$ and define $A_i' = A_i \cup \{x\}$, $B_i' = B_i \cup \{y\}$ and $f_i' = f_i \cup \{\langle x, y\rangle\}$. Let

$$\bar{A}' = \langle A_0, \ldots, A_{i-1}, A_i', A_{i+1}, \ldots, A_{k-1}\rangle,$$
$$\bar{B}' = \langle B_0, \ldots, B_{i-1}, B_i', B_{i+1}, \ldots, B_{k-1}\rangle,$$

and

$$\bar{f}' = \langle f_0, \ldots, f_{i-1}, f_i', f_{i+1}, \ldots, f_{k-1}\rangle.$$

Then $p_{\bar{A}',\bar{B}',\bar{f}'} \in Y_{m+1} \subseteq Y_m$, $x \in \mathrm{dom}(p_{\bar{A}',\bar{B}',\bar{f}'})$ and $p_{\bar{A},\bar{B},\bar{f}} \subseteq p_{\bar{A}',\bar{B}',\bar{f}'}$. Therefore, the forth condition is satisfied.

Case II: $a \notin \mathrm{dom}(p)$. Let $p = \{\langle a_0, b_0\rangle, \ldots, \langle a_{k-1}, b_{k-1}\rangle\}$. Since

$$(I_m)_{m\leq n} : (\mathfrak{A} \restriction L_0) \sim_n (\mathfrak{B} \restriction L_0),$$

by the forth condition of the definition of $\sim_n$, there is $q \in I_m$ such that $q \supseteq p$ and $a \in \mathrm{dom}(q)$. Let $q = \{\langle a_0, b_0\rangle, \ldots, \langle a_{k-1}, b_{k-1}\rangle, \ldots, \langle a_l, b_l\rangle\}$ and $j \leq l$ with $a = a_j$. Since $\bar{A}$, $\bar{B}$ and $\bar{f}$ satisfy the properties stated in Lemma 3.23, they can be extended to sequences

$$\bar{A}' = \langle A_0, \ldots, A_{k-1}, \ldots, A_l\rangle,$$
$$\bar{B}' = \langle B_0, \ldots, B_{k-1}, \ldots, B_l\rangle,$$

and

$$\bar{f}' = \langle f_0, \ldots, f_{k-1}, \ldots, f_l\rangle,$$

that also satisfy these properties and $x \in A_j$. Clearly then $p_{\bar{A},\bar{B},\bar{f}} \subseteq q_{\bar{A}',\bar{B}',\bar{f}'}$, $q_{\bar{A}',\bar{B}',\bar{f}'} \in Y_m$ and $x \in \mathrm{dom}(q_{\bar{A}',\bar{B}',\bar{f}'})$. Therefore, the forth condition is also satisfied.

We can conclude that

$$(Y_m)_{m\leq n} : (\mathfrak{A}(\omega) \restriction L_0) \cong_n (\mathfrak{B}(\omega) \restriction L_0).$$

Therefore,

$$(\mathfrak{A}(\omega) \restriction L_0) \cong_f (\mathfrak{B}(\omega) \restriction L_0),$$

for any finite L_0. Consequently, $\mathfrak{A}(\omega) \equiv \mathfrak{B}(\omega)$.

i) $\Rightarrow$ iv) Assume that $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. Since for any infinite cardinal λ, $\mathfrak{A}(\lambda) \in \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}(\mathfrak{A})$ and $\mathfrak{B}(\lambda) \in \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}(\mathfrak{B})$, we have that $\mathfrak{A}(\lambda) \equiv^- \mathfrak{B}(\lambda)$. Therefore, by the implication i) $\Rightarrow$ ii) already proved,

$$(\mathfrak{A}(\lambda))(\omega) \equiv (\mathfrak{B}(\lambda))(\omega).$$

Thus, since $(\mathfrak{A}(\lambda))(\omega) \cong \mathfrak{A}(\lambda)$ and $(\mathfrak{B}(\lambda))(\omega) \cong \mathfrak{B}(\lambda)$, we have that $\mathfrak{A}(\lambda) \equiv \mathfrak{B}(\lambda)$. □

Corollary 3.25 *Let L be relational and $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ L-structures. Then the following are equivalent:*

i) $\mathfrak{A} \equiv^{-} \mathfrak{B}$.

ii) $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{B}'$, *for some* $\mathfrak{A}' \in \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}(\mathfrak{A})$ *and* $\mathfrak{B}' \in \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}(\mathfrak{B})$.

iii) $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{B}'$, *for some* $\mathfrak{A}' \sim \mathfrak{A}$ *and* $\mathfrak{B}' \sim \mathfrak{B}$.

Proof. By Theorem 3.24. □

3.2 Extensions and ultrafilter-powers

There is a well-known characterization of elementary equivalence in terms of ultrapowers due to H. J. Keisler and S. Shelah, according to which, two structures $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are elementarily equivalent iff they have isomorphic ultrapowers. A similar characterization holds for elementary equivalence for equality-free logic if instead of isomorphism of ultrapowers only relativeness of ultrapowers is postulated. In this section we present this result, Theorem 3.32, together with another characterization of the equivalence relation for this logic in terms of elementary extensions, Theorem 3.27.

Some constructions similar to the reduced products, called filter-products, are used to give new versions of Theorem 3.32. The use of this kind of structures is specially interesting because, in relational similarity types, they provide us with an stronger version of the theorem. In this case, we can replace the relative relation by the isomorphism relation in the formulation of the theorem.

The theorems of this section will be applied in the proof of the characterization theorems of Chapter 4. For references on the Keisler-Shelah Theorem see [She71] and [CK91]. We will start with a preliminary result.

Lemma 3.26 *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures and suppose that there are sequences of elements of A and B, $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ and $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ respectively, such that*

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^{-} (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

Then there are $\mathfrak{A}' \succeq \mathfrak{A}$ and sequences $\overline{c} = (a_j : j \in J)$ and $\overline{d} = (b_j : j \in J)$ of elements of A' and B respectively, such that

$$(\mathfrak{A}', \overline{c}) \equiv^{-} (\mathfrak{B}, \overline{d}),$$

$\overline{a} \subseteq \overline{c}$, $\overline{b} \subseteq \overline{d}$ and $\overline{d}$ is an enumeration of B.

Proof. We expand the language introducing new constants classified in the following three disjoint sets

$$C_A = \{c_a : a \in A - \mathrm{rg}(\overline{a})\},\ C_I = \{c_i : i \in I\},\ C_B = \{c_b : b \in B - \mathrm{rg}(\overline{b})\},$$

and we consider the elementary diagram of $\mathfrak{A}$ in this expanded language, that is, the set of all sentences of type $L \cup C_I \cup C_A$ true in $(\mathfrak{A}, \overline{a}, a)_{a \in A - \mathrm{rg}(\overline{a})}$, and the equality-free elementary diagram of $\mathfrak{B}$ in this expanded language, that is, the set of all equality-free sentences of type $L \cup C_I \cup C_B$ true in $(\mathfrak{B}, \overline{b}, b)_{b \in B - \mathrm{rg}(\overline{b})}$. Let Γ be the union of these two diagrams. Since $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$, Γ is consistent. Let

$$\mathfrak{C} = (\mathfrak{A}', c^{\mathfrak{C}})_{c \in C_A \cup C_B \cup C_I}$$

be a model of Γ. We may assume that $c_i^{\mathfrak{C}} = a_i$ for all $i \in I$ and that $c_a^{\mathfrak{C}} = a$ for all $a \in A - \mathrm{rg}(\overline{a})$. Since $\mathfrak{C}$ is a model of the elementary diagram of $\mathfrak{A}$, we have that $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{A}'$. Let $\overline{c} = \overline{a} \cup (c_b^{\mathfrak{C}} : b \in B - \mathrm{rg}(\overline{b}))$ and $\overline{d} = \overline{b} \cup (b : b \in B - \mathrm{rg}(\overline{b}))$. Since $\mathfrak{C}$ is a model of the equality-free elementary diagram of $\mathfrak{B}$,

$$(\mathfrak{A}', \overline{c}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{d}).\ \square$$

Observe that in the previous proof, if $\kappa = \max(|A|, |B|, |L|, \aleph_0)$, by the Löwenheim-Skolem Theorem, we can take $\mathfrak{A}'$ of power $\leq \kappa$. Now we give a characterization of elementary equivalence in equality-free logic using elementary extensions.

Theorem 3.27 *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures. Then the following are equivalent:*

i) $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$.

ii) *There are $\mathfrak{C} \succeq \mathfrak{A}$ and $\mathfrak{D} \succeq \mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{D}$.*

Proof. ii) $\Rightarrow$ i) is clear. i) $\Rightarrow$ ii) Suppose that $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. Using Lemma 3.26 we will define by induction two elementary chains of models $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \omega}$ and $(\mathfrak{B}_n)_{n \in \omega}$ and two chains of sequences $(\overline{a}_n)_{n \in \omega}$ and $(\overline{b}_n)_{n \in \omega}$ such that for any $n \in \omega$,

a) $\overline{a}_n = (a_i : i \in I_n)$ and $\overline{b}_n = (b_i : i \in I_n)$ are sequences of elements of A_n and B_n respectively, such that

$$(\mathfrak{A}_n, \overline{a}_n) \equiv^- (\mathfrak{B}_n, \overline{b}_n).$$

b) $A_n \subseteq \mathrm{rg}(\overline{a}_{n+1})$ and $B_n \subseteq \mathrm{rg}(\overline{b}_{n+1})$.

Let $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}$ and $\overline{a}_0 = \overline{b}_0 = \emptyset$. Since $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$, conditions a) and b) are satisfied. Suppose now inductively that we have defined $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$, $\overline{a}_n$ and $\overline{b}_n$ that satisfy conditions a) and b). Since

$$(\mathfrak{A}_n, \overline{a}_n) \equiv^- (\mathfrak{B}_n, \overline{b}_n),$$

by Lemma 3.26, there is $\mathfrak{A}' \succeq \mathfrak{A}_n$ and sequences $\overline{c} = (a_j : j \in J)$ and $\overline{d} = (b_j : j \in J)$ of A' and B_n respectively, such that

$$(\mathfrak{A}', \overline{c}) \equiv^- (\mathfrak{B}_n, \overline{d}),$$

$\overline{a}_n \subseteq \overline{c}$, $\overline{b}_n \subseteq \overline{d}$ and $\overline{d}$ is an enumeration of B_n. Again, by Lemma 3.26, there is $\mathfrak{B}' \succeq \mathfrak{B}_n$ and sequences $\overline{c}' = (a_j : j \in J')$ and $\overline{d}' = (b_j : j \in J')$ of A' and B' respectively, such that

$$(\mathfrak{A}', \overline{c}') \equiv^- (\mathfrak{B}', \overline{d}'),$$

$\overline{c} \subseteq \overline{c}'$, $\overline{d} \subseteq \overline{d}'$ and $\overline{c}'$ is an enumeration of A'. Let $\mathfrak{A}_{n+1} = \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}_{n+1} = \mathfrak{B}'$, $\overline{a}_{n+1} = \overline{c}'$ and $\overline{b}_{n+1} = \overline{d}'$. So defined, conditions a) and b) are satisfied.

Let $\mathfrak{C} = \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{D} = \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{B}_n$, $\overline{c} = \bigcup_{n\in\omega} \overline{a}_n$ and $\overline{d} = \bigcup_{n\in\omega} \overline{b}_n$. We have that $\mathfrak{C} \succeq \mathfrak{A}$ and $\mathfrak{D} \succeq \mathfrak{B}$. Moreover, $\overline{c}$ and $\overline{d}$ are enumerations of C and D respectively, and

$$(\mathfrak{C}, \overline{c}) \equiv^- (\mathfrak{D}, \overline{d}).$$

By Proposition 2.17, we conclude that $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{D}$. $\square$

Observe that in the previous proof, if $\kappa = \max(|A|, |B|, |L|, \aleph_0)$, by using the remark after Lemma 3.26, we can take $\mathfrak{C}$ and $\mathfrak{D}$ of power $\leq \kappa$.

Corollary 3.28 *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures. Then the following are equivalent:*

i) $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$.

ii) *There are $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{A}$ and $\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{B}$ of power $\leq |L| + \aleph_0$, such that $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{D}$.*

Proof. ii) $\Rightarrow$ i) is clear. i) $\Rightarrow$ ii) Suppose that $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. By the Löwenheim-Skolem Theorem, there are $\mathfrak{C}' \equiv \mathfrak{A}$ and $\mathfrak{D}' \equiv \mathfrak{B}$ of power $\leq |L| + \aleph_0$. Clearly $\mathfrak{C}' \equiv^- \mathfrak{D}'$. Then, by Theorem 3.27 and the observation that follows its proof, there are $\mathfrak{C} \succeq \mathfrak{C}'$ and $\mathfrak{D} \succeq \mathfrak{D}'$ of power $\leq |L| + \aleph_0$, such that $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{D}$. Clearly $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{A}$ and $\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{B}$. $\square$

We present now a characterization of elementary equivalence in equality-free logic using ultrapowers. Let us start with some notation and some preliminary lemmas. If $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ is a family of L-structures, $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ is the direct product of the family and for any filter F over I, $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F$ is the reduced product modulo F. We denote by $\mathfrak{A}^I$ the direct power of $\mathfrak{A}$, and given an ultrafilter U over I, we denote by $\mathfrak{A}^U$ the ultrapower of $\mathfrak{A}$ modulo U.

Lemma 3.29 *Let I be a non-empty set, $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ a family of L-structures and F a filter over I. Then there is a surjective strict homomorphism $h : \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F \to \prod_{i\in I} \mathfrak{A}^*_i/F$.*

Proof. For any $a \in \prod_{i\in I} A_i$ let $a' = \langle [a(i)]_{\Omega(\mathfrak{A}_i)} : i \in I\rangle$. We define

$$h : \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F \to \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i^*/F$$

as follows:

$$h([a]_F) = [a']_F,$$

for any $a \in \prod_{i\in I} A_i$. It is easy to check that h is a surjective strict homomorphism. □

Corollary 3.30 *Let I be a non-empty set, $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ a family of L-structures and F a filter over I. Then*

$$(\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F)^* \cong (\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i^*/F)^*.$$

Proof. By Lemma 3.29. □

Lemma 3.31 *Let J and K be non-empty sets and D and G proper ultrafilters over J and K respectively. Then there is a non-empty set I and a proper ultrafilter U over I such that for any L-structure $\mathfrak{A}$,*

$$\left(\mathfrak{A}^D\right)^G \cong \mathfrak{A}^U.$$

Proof. The proof is analogous to the proof of Lemma 2.22 of [BS81]. □

Theorem 3.32 *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures. Then, $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$ if and only if $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ have relative ultrapowers.*

Proof. $\Leftarrow$) is clear. $\Rightarrow$) Suppose that $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. Then by Theorem 3.27, there are elementary extensions $\mathfrak{A}' \succeq \mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}' \succeq \mathfrak{B}$ such that

$$(\mathfrak{A}')^* \cong (\mathfrak{B}')^*. \tag{3.4}$$

By Keisler-Shelah ultrapowers Theorem for first-order logic with equality, since $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}'$, there is a non-empty set J and a proper ultrafilter D over J such that

$$\mathfrak{A}^D \cong \mathfrak{A}'^D \tag{3.5}$$

Consider now the structure $\mathfrak{B}'^D$. By Corollary 3.30,

$$(\mathfrak{B}'^D)^* \cong ((\mathfrak{B}'^*)^D)^*,$$

therefore, by (3.4),

$$(\mathfrak{B}'^D)^* \cong ((\mathfrak{A}'^*)^D)^*,$$

again by Corollary 3.30,

$$(\mathfrak{B}'^D)^* \cong (\mathfrak{A}'^D)^*$$

and by (3.5),

$$(\mathfrak{B}'^D)^* \cong (\mathfrak{A}^D)^*. \tag{3.6}$$

By Keisler-Shelah ultrapowers Theorem for first-order logic with equality, since $\mathfrak{B}^D \equiv \mathfrak{B}'^D$, there is a non-empty set K and a proper ultrafilter G over K such that

$$\left(\mathfrak{B}^D\right)^G \cong \left(\mathfrak{B}'^D\right)^G \tag{3.7}$$

Consider now the structure $\left(\mathfrak{A}^D\right)^G$, we have by Corollary 3.30,

$$\left(\left(\mathfrak{A}^D\right)^G\right)^* \cong \left(\left(\left(\mathfrak{A}^D\right)^*\right)^G\right)^*$$

therefore, by (3.6),

$$\left(\left(\mathfrak{A}^D\right)^G\right)^* \cong \left(\left(\left(\mathfrak{B}'^D\right)^*\right)^G\right)^*$$

again by Corollary 3.30,

$$\left(\left(\mathfrak{A}^D\right)^G\right)^* \cong \left((\mathfrak{B}'^D)^G\right)^*$$

and by (3.7),

$$\left(\left(\mathfrak{A}^D\right)^G\right)^* \cong \left(\left(\mathfrak{B}^D\right)^G\right)^*.$$

Therefore, by Lemma 3.31, there is a non-empty set I and a proper ultrafilter U over I such that

$$\left(\mathfrak{A}^D\right)^G \cong (\mathfrak{A}^U)$$

and

$$\left(\mathfrak{B}^D\right)^G \cong (\mathfrak{B}^U).$$

Hence, we obtain

$$(\mathfrak{A}^U)^* \cong (\mathfrak{B}^U)^*.$$

Therefore,

$$\mathfrak{A}^U \sim \mathfrak{B}^U. \ \square$$

Theorem 3.33 is an improvement of Theorem 3.32. This result can be obtained following an analogous proof to the one given in Keisler-Shelah Theorem, we only give some hints of the proof.

Theorem 3.33 *If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are L-structures, the following are equivalent:*

i) $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$.

ii) $\mathfrak{A}^U \sim \mathfrak{B}^U$, *for some proper ultrafilter* U *over a set of power* $\leq 2^{|A|+|B|+\omega}$.

Hints of the Proof. Let $\kappa = 2^{|A|+|B|+\omega}$. Then, $|A|^\kappa, |B|^\kappa \leq 2^\kappa$. We may assume that $|L| + \aleph_0 \leq \kappa$. In the proof of the analogous result for first-order languages with equality in [?], under the hypothesis that $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ it is shown that there are enumerations $(a_i : i < 2^\kappa)$ and $(b_i : i < 2^\kappa)$ of ${}^\kappa A$ and ${}^\kappa B$ respectively, and a proper ultrafilter U over κ such that for any first-order formula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ and any $i_1 < \cdots < i_n < 2^\kappa$,

$$\{j < \kappa : \mathfrak{A} \models \phi[a_{i_1}(j), \ldots, a_{i_n}(j)]\} \in U \text{ iff } \{j < \kappa : \mathfrak{B} \models \phi[b_{i_1}(j), \ldots, b_{i_n}(j)]\} \in U.$$

The very same proof works for an equality-free ϕ under the sole hypothesis that $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. In the case of a language with equality the conclusion is

$$(\mathfrak{A}^U, ([a_i]_U)_{i<2^\kappa}) \equiv (\mathfrak{B}^U, ([b_i]_U)_{i<2^\kappa})$$

and therefore, $\mathfrak{A}^U \cong \mathfrak{B}^U$. In the case of an equality-free language we may conclude that

$$(\mathfrak{A}^U, ([a_i]_U)_{i<2^\kappa}) \equiv^- (\mathfrak{B}^U, ([b_i]_U)_{i<2^\kappa})$$

and, by Proposition 2.17, that $\mathfrak{A}^U \sim \mathfrak{B}^U$. □

Notice that, by Proposition 2.17, Theorem 3.32 can be rephrased as follows:

$$\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B} \quad \text{iff} \quad (\mathfrak{A}^U)^* \cong (\mathfrak{B}^U)^*,$$

for some proper ultrafilter U over a set of power $\leq 2^{|A|+|B|+\omega}$. The composition of the ultrapower operation with the reduction operation is a quotient of the direct product and we may consider it as a single operation. This quotient operation is what actually plays the role in equality-free logic that the ultrapower operation plays in Keisler-Shelah Theorem.

In equality-free logic the reduced product, the ultraproduct and the ultrapower operators are not the most natural ones because there is no need to consider quotients modulo the relation associated to the filter. We now introduce some operators that play in equality-free logic the same role that reduced products, ultraproducts and ultrapowers play in logic with equality. They have been considered, for example, by J. Monk [Mon76] and W. Blok and D. Pigozzi [BP92], but to our view their role in equality-free logic has not been stressed enough.

Definition 3.34 Let I be a non-empty set, $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ a family of L-structures and F a filter over I. We define the *filter-product* of the family $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ modulo F, that we denote by $\prod_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i$, as follows:

- The domain of $\prod_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i$ is $\prod_{i\in I} A_i$.
- For any constant $c \in L$, $c^{\prod_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i} = \langle c^{\mathfrak{A}_i} : i \in I\rangle$.
- For any n-adic function symbol $f \in L$ and any $a_1, \dots, a_n \in \prod_{i\in I} A_i$,

$$f^{\prod_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i}(a_1, \dots, a_n) = \langle f^{\mathfrak{A}_i}(a_1(i), \dots, a_n(i) : i \in I\rangle.$$

- For any n-adic relation symbol $R \in L$ and any $a_1, \dots, a_n \in \prod_{i\in I} A_i$,

$$\langle a_1, \dots, a_n\rangle \in R^{\prod_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i} \text{ iff } \left\{i \in I : \langle a_1(i), \dots, a_n(i)\rangle \in R^{\mathfrak{A}_i}\right\} \in F.$$

Given an ultrafilter U over I, we say that $\prod_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i$ is the *ultrafilter-product* of the family $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ modulo U, and in case that, for any $i \in I$, $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$, we say that $\prod^U \mathfrak{A}$ is the *ultrafilter-power* of $\mathfrak{A}$.

Note that the relation $\sim_F$ defined on $\prod_{i\in I} A_i$ by:

$$a \sim_F b \text{ iff } \{i \in I : a(i) = b(i)\} \in F,$$

for any $a, b \in \prod_{i\in I} A_i$, is a congruence relation of $\prod_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i$ and the reduced product $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F$ is precisely the quotient $\prod_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i/\!\sim_F$. Therefore, $\prod_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i \in \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}(\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F)$ and so $\prod_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i$ and $\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F$ are relatives. This shows, in particular, that ultraproducts are not necessary in equality-free logic and allows us to rephrase Theorem 3.32 in the following way:

Theorem 3.35 *If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are L-structures, the following are equivalent:*

i) $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$.

ii) $\prod^U \mathfrak{A} \sim \prod^U \mathfrak{B}$, *for some proper ultrafilter U over a set of power $\leq 2^{|A|+|B|+\omega}$.*

Proof. By Theorem 3.33. □

We now state some easy facts about the new constructions. Next proposition is the version of Loś theorem for equality-free logic and the ultrafilter-product construction, and its proof is straightforward.

Proposition 3.36 *Let I be a non-empty set, $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ a family of L-structures and U an ultrafilter over I. Then for any $a_1, \dots, a_n \in \prod_{i\in I} A_i$ and any formula $\phi(x_1, \dots, x_n) \in L^-$,*

$$\prod_{i\in I}^U \mathfrak{A}_i \models \phi[a_1, \dots, a_n] \text{ iff } \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \phi[a_1(i), \dots, a_n(i)]\} \in U.$$

Observe that from de previous proposition follows that if U is an ultrafilter over I, the map $h(a) = \langle a : i \in I \rangle$ is an isomorphism from $\mathfrak{A}$ onto an L^--substructure of $\prod^U \mathfrak{A}$.

The next example shows that in Theorem 3.35 we can not replace the relative relation by the isomorphism relation, that is, it shows that it is not true in general that $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$ implies that there is a proper ultrafilter U such that $\prod^U \mathfrak{A} \cong \prod^U \mathfrak{B}$.

Example 3.37 Let L be any similarity type with one monadic relation symbol P, one monadic function symbol f (and possibly more function symbols but no more relation symbols). Let $\mathfrak{A} = (\{0,1\}, P^{\mathfrak{A}}, f^{\mathfrak{A}}, \ldots)$ and $\mathfrak{B} = (\{0,1\}, P^{\mathfrak{B}}, f^{\mathfrak{B}}, \ldots)$ be two L-structures with $P^{\mathfrak{A}} = P^{\mathfrak{B}} = \{0,1\}$, $f^{\mathfrak{A}} = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}$ and $f^{\mathfrak{B}} = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle\}$. Clearly, $\mathfrak{A}^* \cong \mathfrak{B}^*$ and therefore, $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. But there is no proper ultrafilter U such that $\prod^U \mathfrak{A} \cong \prod^U \mathfrak{B}$, because $\prod^U \mathfrak{A} \models \forall x f(x) \approx x$ and $\prod^U \mathfrak{B} \not\models \forall x f(x) \approx x$.

Now we see that for relational similarity types and structures with at least two elements, we can indeed replace in Theorem 3.35 the relative relation by the isomorphism one.

Lemma 3.38 *Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure with at least two elements, I a non-empty set and U an ultrafilter over I. Then for any $a \in A^I$, $|U| \le |[a]_U|$.*

Proof. Let $a \in A^I$. We fix two distinct elements $c, d \in A$ and define for any $X \in U$ an element $a_X \in A^I$ in the following way:

$$a_X(i) = \begin{cases} a(i), & \text{if } i \in X \\ c, & \text{if } i \notin X \text{ and } a(i) \neq c \\ d, & \text{if } i \notin X \text{ and } a(i) = c, \end{cases}$$

for any $i \in I$. Clearly $\{i \in I : a_X(i) = a(i)\} = X \in U$. Moreover, for any $X, Y \in U$, if $X \neq Y$ we have that $a_X \neq a_Y$. Therefore, we conclude that $|U| \le |[a]_U|$. □

Notice that in Lemma 3.38, if $|A| < |I|$, then $|U| = |[a]_U|$.

Lemma 3.39 *Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure with at least two elements, I a non-empty set and U an ultrafilter over I. Then for any $a \in A^I$, $|U| \le \left|[a]_{\Omega(\prod^U \mathfrak{A})}\right|$.*

Proof. Since the relation $\sim_U$ in A^I, defined as before, is a congruence relation of $\prod^U \mathfrak{A}$ and the Leibniz congruence $\Omega(\prod^U \mathfrak{A})$ is the greatest one, by Lemma 3.38 we have that $|U| \le |[a]_U| \le \left|[a]_{\Omega(\prod^U \mathfrak{A})}\right|$. □

Observe that as before, if $|A| < |I|$, then $|U| = \left|[a]_{\Omega(\prod^U \mathfrak{A})}\right|$.

Theorem 3.40 *Let L be a relational similarity type and $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ two L-structures with at least two elements. The following are equivalent:*

i) $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$.

ii) $\prod^U \mathfrak{A} \cong \prod^U \mathfrak{B}$, *for some proper ultrafilter U over a set of power $\leq 2^{|A|+|B|+\omega}$.*

Proof. ii) $\Rightarrow$ i) is clear. i) $\Rightarrow$ ii) Suppose that $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. By the proof of Theorem 3.33 and by Theorem 3.35, $\prod^U \mathfrak{A} \sim \prod^U \mathfrak{B}$, for some proper ultrafilter U over a set I of power $= 2^{|A|+|B|+\omega}$. Then, by Lemma 3.39 and the remark that follows its proof, we have that for any $a \in A^I$ and for any $b \in B^I$,

$$(*) \qquad \left|[a]_{\Omega(\prod^U \mathfrak{A})}\right| = |U| = \left|[b]_{\Omega(\prod^U \mathfrak{B})}\right|.$$

Now since $(\prod^U \mathfrak{A})^* \cong (\prod^U \mathfrak{B})^*$, let h be an isomorphism between these structures. With its help and using condition $(*)$ we obtain enumerations without repetitions of A^I and B^I, $\bar{a} = (a_j : j \in J)$ and $\bar{b} = (b_j : j \in J)$ respectively, such that

$$(\prod^U \mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv^- (\prod^U \mathfrak{B}, \bar{b}).$$

Since L is relational, the map sending a_j to b_j is an isomorphism from $\prod^U \mathfrak{A}$ onto $\prod^U \mathfrak{B}$. □

Lemma 3.41 *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures. If $\mathfrak{A}$ is a one-element structure and $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$, then $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}^*$.*

Proof. Clearly $\mathfrak{A}$ is reduced and since $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$, it is easy to check that the map $h : B \to A$ defined by: $h(b) = a$, for any $b \in B$, is a strict homomorphism from $\mathfrak{B}$ onto $\mathfrak{A}$. □

Corollary 3.42 *Let L be relational and let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures. Then $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$ if and only if one of the following three cases holds:*

i) $\prod^U \mathfrak{A} \cong \prod^U \mathfrak{B}$, *for some proper ultrafilter U over a set of power $\leq 2^{|A|+|B|+\omega}$.*

ii) $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}^*$.

iii) $\mathfrak{A}^* \cong \mathfrak{B}$.

Proof. Each one of conditions i), ii) and iii) implies $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. Now, if $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$ and both structures have at least two elements, condition i) follows from Theorem 3.40, and in case that one of the two structures has only one element, by Lemma 3.41, either condition ii) or condition iii) holds. □

To conclude the section, since $\prod^U \mathfrak{A} \in \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}(\mathfrak{A}^U)$, we can obtain the following result for relational similarity types:

Proposition 3.43 *Let L be relational, $\mathfrak{A}$ an L-structure with at least two elements, I a non-empty set such that $|A| < |I|$ and U a proper ultrafilter over I. Then,*

$$\prod^U \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}^U(2^{|I|}).$$

Proof. By Lemma 3.38 and the remark that follows its proof, since $|A| < |I|$, $|U| = |[a]_U|$. Then we can define for any equivalence class $x \in A^U$, a bijective map $f_x : x \to C_x$ (remember the definition of $\mathfrak{A}(\lambda)$ of the Preliminaries). Now we define $h : \prod^U A \to A^U(2^{|I|})$ by: $h(a) = f_x(a)$, for any $a \in A^I$, where $a \in x$. It is easy to check that h is an isomorphism. □

Corollary 3.44 *Let L be relational and $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ two L-structures with at least two elements. Then the following are equivalent:*

i) $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$.

ii) $\mathfrak{A}^U(2^{|I|}) \cong \mathfrak{B}^U(2^{|I|})$, *for some proper ultrafilter U over a set I of power $\leq 2^{|A|+|B|+\omega}$.*

Proof. By Theorem 3.40 and Proposition 3.43. □

Chapter 4

Preservation and characterization theorems

4.1 Elementary classes in equality-free logic

From the Keisler-Shelah Theorem on isomorphic ultrapowers follows that a class K of structures is *elementary* iff K is closed under ultraproducts, isomorphic copies and the complement of K is closed under ultrapowers. In this section we apply this result together with Theorem 3.27 to prove that the elementary classes in equality-free logic are the elementary classes (in the usual sense) that are closed under $\mathbf{H_S}$ and $\mathbf{H_S^{-1}}$, see Theorem 4.1. This provides us with an algebraic characterization for L^--elementary classes.

Elementary classes can be characterized in other ways, as the classes closed under elementary substructures, ultraproducts and isomorphic copies, see Theorem 2.16 in Chapter V of [BS81], or as the classes closed under ultraproducts and elementary equivalence, see Theorem 4.1.12 of [CK91]. Similar arguments can be carried out to obtain the corresponding results for equality-free logic, see Theorem 4.2.1 of [Elg94]. But none of these characterizations are purely algebraic. We consider specially important an algebraic characterization, because it has as a consequence a preservation theorem for equality-free sentences in which does not appear unnatural operators, from the point of view of the usual mathematical practice, such as the operator $\mathbf{S}^{\preceq^-}$. It is well-known that an equality-free sentence is preserved under $\mathbf{H_S}$ and $\mathbf{H_S^{-1}}$. Here we prove the converse in Corollary 4.2: a first-order sentence which is preserved under $\mathbf{H_S}$ and $\mathbf{H_S^{-1}}$ is logically equivalent to an equality-free sentence. We consider this result one of the main contributions of this doctoral dissertation.

Theorem 4.1 *Let K be a class of L-structures. The following are equivalent:*

i) *K is axiomatizable by a set of equality-free sentences.*

ii) *K is closed under ultraproducts, $\mathbf{H_S}$ and $\mathbf{H_S^{-1}}$ and for any L-structure $\mathfrak{A}$ the following holds: if some ultrapower of $\mathfrak{A}$ lies in K, then $\mathfrak{A} \in K$.*

Proof. i) $\Rightarrow$ ii) is clear. ii) $\Rightarrow$ i) We will show that if $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^-(K)$, then $\mathfrak{A} \in K$. Suppose that $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^-(K)$. Since $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^-(K)$, for any $\sigma \in \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ there is $\mathfrak{B}_\sigma \in K$ such that $\mathfrak{B}_\sigma \models \sigma$. Let $I = \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ and consider, for any $\sigma \in \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$, the set $J_\sigma = \{\beta \in I : \beta \models \sigma\}$. Since $J = \{J_\sigma : \sigma \in I\}$ has the finite intersection property, it can be extended to a proper ultrafilter U over I. Let $\mathfrak{B} = \prod_{\sigma \in I} \mathfrak{B}_\sigma / U$. Observe that $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. Since K is closed under ultraproducts, $\mathfrak{B} \in K$. By Theorem 3.27, there are $\mathfrak{C} \succeq \mathfrak{A}$ and $\mathfrak{D} \succeq \mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{D}$. Therefore, by Proposition 2.17, $\mathfrak{C}^* \cong \mathfrak{D}^*$. By the assumption K is closed under ultraproducts, isomorphic copies and the complement of K is closed under ultrapowers, then K is an elementary class. Therefore, since $\mathfrak{B} \in K$ and $\mathfrak{D} \succeq \mathfrak{B}$, we have $\mathfrak{D} \in K$. Since K is closed under $\mathbf{H_S}$, $\mathfrak{D}^* \in K$. Consequently, $\mathfrak{C}^* \in K$ and since K is closed under $\mathbf{H_S^{-1}}$, $\mathfrak{C} \in K$. Since $\mathfrak{C} \succeq \mathfrak{A}$, we conclude that $\mathfrak{A} \in K$. □

Corollary 4.2 *Let $T \cup \{\sigma\}$ be a set of sentences of L. Then:*

i) *T is axiomatizable by a set of equality-free sentences iff T is preserved under $\mathbf{H_S}$ and $\mathbf{H_S^{-1}}$.*

ii) *σ is logically equivalent to an equality-free sentence iff σ is preserved under $\mathbf{H_S}$ and $\mathbf{H_S^{-1}}$.*

Proof. i) The implication from left to right is clear. In order to prove the other implication note that, since T is a set of first-order sentences, $\mathrm{Mod}(T)$ is closed under ultraproducts and if some ultrapower of $\mathfrak{A}$ lies in $\mathrm{Mod}(T)$, $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(T)$. Moreover, since T is preserved under $\mathbf{H_S}$ and $\mathbf{H_S^{-1}}$, $\mathrm{Mod}(T)$ is closed under $\mathbf{H_S}$ and $\mathbf{H_S^{-1}}$. By Theorem 4.1, T can be axiomatized by a set of equality-free sentences.

ii) The implication from left to right is clear. We prove the other implication. By i) there is a set of equality-free sentences Γ such that $\mathrm{Mod}(\Gamma) = \mathrm{Mod}(\sigma)$. By compactness, there is a finite $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ such that $\Gamma_0 \models \sigma$. Then σ is logically equivalent to $\bigwedge \Gamma_0$. □

Using ultrafilter-products and ultrafilter-powers we can rephrase Theorem 4.1 in the following way:

Theorem 4.3 *Let K be a class of L-structures. The following are equivalent:*

i) *K is axiomatizable by a set of equality-free sentences.*

ii) *K is closed under ultrafilter-products,* $\mathbf{H_S}$ *and* $\mathbf{H_S^{-1}}$ *and for any L-structure* $\mathfrak{A}$ *the following holds: if some ultrafilter-power of* $\mathfrak{A}$ *lies in* K*, then* $\mathfrak{A} \in K$.

Proof. By Theorem 4.1. □

Theorem 3.40 allows us to obtain a new characterization of elementary classes in equality-free logic, although restricted to relational similarity types.

Theorem 4.4 *Let L be a relational similarity type and K a class of L-structures. Then the following are equivalent:*

i) *K is axiomatizable by a set of equality-free sentences.*

ii) a) *K is closed under ultrafilter-products and isomorphic images.*
   b) *For any L-structure* $\mathfrak{A}$*, if some ultrafilter-power of* $\mathfrak{A}$ *lies in* K*, then* $\mathfrak{A} \in K$.
   c) *For any one-element L-structure* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \in K$ *iff there is* $\mathfrak{B} \in \mathbf{H_S^{-1}}(\mathfrak{A})$ *such that* $\mathfrak{B} \in K$ *and* $|B| \geq 2$.

Proof. That i) implies conditions a) and b) of ii) is clear. It also implies condition c), because K is closed under $\mathbf{H_S^{-1}}$ and $\mathbf{H_S}$. Now assume that ii) holds. By reasoning as in the proof of Theorem 4.1 but now using an ultrafilter-product instead of an ultraproduct, it is sufficient to show that $\mathfrak{A} \in K$ under the assumption that $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$ for some $\mathfrak{B} \in K$. If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ have at least two elements, this follows from Theorem 3.40. If $\mathfrak{A}$ is a one-element structure and $\mathfrak{B}$ is not, by Lemma 3.41, $\mathfrak{B} \in \mathbf{H_S^{-1}}(\mathfrak{A})$ and then, by condition c) of the assumption, we get $\mathfrak{A} \in K$. Now, if $\mathfrak{B}$ is a one-element structure and $\mathfrak{A}$ is not, since $\mathfrak{B} \in K$, there is, by c), $\mathfrak{C} \in K$ with at least two elements such that $\mathfrak{C} \in \mathbf{H_S^{-1}}(\mathfrak{B})$. But then $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{C}$ and we argue as in the first case. To conclude, note that if both structures are one-element structures, being equality-free equivalent, they must be isomorphic. □

The following examples show that condition c) in Theorem 4.4 can not be eliminated.

Example 4.5 Let $L = \{P\}$, where P is a monadic relation symbol. Let K_1 be the class of all one-element L-structures and let K_2 be the class of all L-structures having at least two elements. K_1 and K_2 are not axiomatizable by a set of equality-free sentences and they satisfy conditions a) and b) of Theorem 4.4. K_1 does not satisfy the implication from left to right in condition c) and K_2 does not satisfy the implication from right to left in that condition.

Finally, using the $\mathfrak{A}(\lambda)$ structures introduced in the Preliminaries, we will give other characterizations of elementary classes in L^- for relational similarity types.

Theorem 4.6 *Let L be a relational similarity type and K a class of L-structures. The following are equivalent:*

i) *K is axiomatizable by a set of equality-free sentences.*

ii) a) *K is closed under ultraproducts and isomorphic images, and for any L-structure $\mathfrak{A}$, if some ultrapower of $\mathfrak{A}$ lies in K, then $\mathfrak{A} \in K$.*

   b) *For any L-structure $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \in K$ iff $\mathfrak{A}(\omega) \in K$.*

Proof. That i) implies conditions a) and b) of ii) is clear because $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{A}(\omega)$. Assume that ii) holds. By reasoning as in the proof of Theorem 4.1, it is sufficient to show that $\mathfrak{A} \in K$ under the assumption that $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$ for some $\mathfrak{B} \in K$. Since $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$, by Theorem 3.24, $\mathfrak{A}(\omega) \equiv \mathfrak{B}(\omega)$ and, by the Keisler-Shelah ultrapowers Theorem for logic with equality, $(\mathfrak{A}(\omega))^U \cong (\mathfrak{B}(\omega))^U$, for some proper ultrafilter U. By b), since $\mathfrak{B} \in K$, $\mathfrak{B}(\omega) \in K$ and by a), $(\mathfrak{B}(\omega))^U \in K$. Therefore, by a), $(\mathfrak{A}(\omega))^U \in K$ and, by a) again, $\mathfrak{A}(\omega) \in K$. Finally, by b), $\mathfrak{A} \in K$. □

Theorem 4.6 can be rephrased as follows:

Theorem 4.7 *Let L be a relational similarity type and K a class of L-structures. The following are equivalent:*

i) *K is axiomatizable by a set of equality-free sentences.*

ii) *K is an elementary class such that for any L-structure $\mathfrak{A}$,*

$$\mathfrak{A} \in K \quad \textit{iff} \quad \mathfrak{A}(\omega) \in K.$$

Proof. By Theorem 4.6. □

We use now the $\mathfrak{A}(\omega)$ structures and ultrafilter-products together to give a last characterization of elementary classes in equality-free logic, in relational similarity types.

Theorem 4.8 *Let L be a relational similarity type and K a class of L-structures. The following are equivalent:*

i) *K is axiomatizable by a set of equality-free sentences.*

ii) a) *K is closed under ultrafilter-products and isomorphic images, and for any L-structure $\mathfrak{A}$, if some ultrafilter-power of $\mathfrak{A}$ lies in K, then $\mathfrak{A} \in K$.*

b) *For any L-structure* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \in K$ *iff* $\mathfrak{A}(\omega) \in K$.

Proof. That i) implies conditions a) and b) of ii) is clear because $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{A}(\omega)$. Assume that ii) holds. By reasoning as in the proof of Theorem 4.1, but now using an ultrafilter-product instead of an ultraproduct, it is sufficient to show that $\mathfrak{A} \in K$ under the assumption that $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$ for some $\mathfrak{B} \in K$. Since $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}(\omega) \equiv^- \mathfrak{B}(\omega)$ and, by Theorem 3.40, $\prod^U \mathfrak{A}(\omega) \cong \prod^U \mathfrak{B}(\omega)$, for some proper ultrafilter U. Therefore, by b), since $\mathfrak{B} \in K$, $\mathfrak{B}(\omega) \in K$ and by a), $\prod^U \mathfrak{B}(\omega) \in K$. Therefore, by a), $\prod^U \mathfrak{A}(\omega) \in K$ and, by a) again, $\mathfrak{A}(\omega) \in K$. Finally, by b), $\mathfrak{A} \in K$. □

We can draw the following consequence from our characterization theorem for elementary classes in L^-, in relational similarity types:

Corollary 4.9 *Let L be a relational similarity type and let $T \cup \{\sigma\}$ be a set of sentences of L. Then:*

i) *T is axiomatizable by a set of equality-free sentences iff for any L-structure $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models T$ iff $\mathfrak{A}(\omega) \models T$.*

ii) *σ is logically equivalent to an equality-free sentence iff for any L-structure $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \models \sigma$ iff $\mathfrak{A}(\omega) \models \sigma$.*

Proof. The proof is analogous to the proof of Corollary 4.2 but using Theorem 4.7 instead of Theorem 4.1. □

4.2 Some fragments of L^-

In this section we study characterization and preservation theorems for the following fragments of equality-free first-order logic: universal, universal-atomic, universal-existential, positive and Horn. For references see [BS81], [CK91] and [Hod93b].

In [Bir35] G. Birkhoff proved that the classes of algebras defined by identities are precisely those which are closed under **H**, **S** and **P**. Here we obtain an analogue to this theorem for equality-free logic. It is said that $\phi \in L$ is a *universal-atomic formula* if $\phi = \forall \bar{x} \psi$, for some atomic formula ψ. Given a class K of L-structures we denote by $\mathrm{Th}^{\mathrm{At}^-}(K)$ the set

$$\mathrm{Th}^{\mathrm{At}^-}(K) = \{\sigma \in \mathrm{Th}^-(K) : \sigma \text{ is universal-atomic}\}.$$

We say that an structure is *trivial* if it is a one-element structure in which the interpretations of the relation symbols are non-empty. Observe that in every trivial structure all the universal-atomic sentences are true.

Lemma 4.10 *If $\mathfrak{A}$ is a trivial L-structure, then for every L-structure $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}(\mathfrak{B})$.*

Proof. It is easy to check that the map $h : B \to A$ defined by:

$$h(b) = a,$$

for every $b \in B$, is an homomorphism. □

Theorem 4.11 *Let K be a class of L-structures. The following are equivalent:*

i) *K is axiomatizable by a set of equality-free universal-atomic sentences.*

ii) *K is closed under $\mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{S}$ and $\mathbf{P}$ and contains a trivial structure.*

iii) *$K = \mathbf{H}\mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{P}(M)$, for some class M of L-structures that contains a trivial structure.*

Proof. i) $\Rightarrow$ ii) and ii) $\Rightarrow$ iii) are clear. iii) $\Rightarrow$ i) Assume that $K = \mathbf{H}\mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{P}(M)$, for some class M of L-structures that contains a trivial structure. We will show that, for every L-structure $\mathfrak{A}$, if $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^{\mathrm{At}^-}(M)$, then $\mathfrak{A} \in K$. Suppose that $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^{\mathrm{At}^-}(M)$ and let $T = \mathsf{negdiag}^-(\mathfrak{A})$. We can distinguish two cases. Case I: $T = \emptyset$. In this case $\mathfrak{A}^*$ is a trivial structure. Since all the trivial structures are isomorphic, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}(\mathfrak{A}^*)$ and M contains a trivial structure, we have that $\mathfrak{A} \in K$.

Case II: $T \neq \emptyset$. For every $\neg\phi \in T$, if the constants which occur in $\neg\phi$ are among $a_1, \ldots, a_n$, since $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^{\mathrm{At}^-}(M)$, there is $\mathfrak{B} \in M$ such that $\mathfrak{B} \models \exists x_1 \ldots x_n \neg\phi'$, where ϕ' is obtained from ϕ by substituting for each $1 \leq i \leq n$, the variable x_i for the constant a_i. We choose, for every $\neg\phi \in T$, $\mathfrak{B}_{\neg\phi} \in M$ and $b_1^{\neg\phi}, \ldots, b_n^{\neg\phi} \in B_{\neg\phi}$ such that

$$\mathfrak{B}_{\neg\phi} \models \neg\phi' \left[b_1^{\neg\phi}, \ldots, b_n^{\neg\phi}\right].$$

Let $\mathfrak{B} = \prod_{\neg\phi \in T} \mathfrak{B}_{\neg\phi}$. We define, for every $a \in A$, an element $\hat{a} \in B$ by:

$$\hat{a}(\neg\phi) = \begin{cases} b_i^{\neg\phi}, & \text{if } a \in \{a_1, \ldots, a_n\} \text{ and } a = a_i, \\ \text{arbitrary}, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

for every $\neg\phi \in T$. We have that $(\mathfrak{B}, \hat{a})_{a \in A}$ is an expansion of $\mathfrak{B}$ that satisfies $\mathsf{negdiag}^-(\mathfrak{A})$. Therefore, by Proposition 2.28, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}\mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{S}(\mathfrak{B})$. Since $\mathfrak{B} \in \mathbf{P}(M)$ and $K = \mathbf{H}\mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{P}(M)$, $\mathfrak{A} \in K$. □

Corollary 4.12 *Let T be a consistent set of sentences of L and σ a consistent sentence of L such that $\not\models \sigma$. Then:*

i) *T is axiomatizable by a set of equality-free universal-atomic sentences iff T is preserved under $\mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{S}$ and $\mathbf{P}$.*

ii) *σ is logically equivalent to a finite conjunction of equality-free universal-atomic sentences iff σ is preserved under $\mathbf{H_S^{-1}}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{S}$ and $\mathbf{P}$.*

Proof. By Theorem 4.11 using a proof analogous to the proof of Corollary 4.2. □

Trivially we can find a consistent sentence σ such that $\not\models \sigma$, σ is preserved under $\mathbf{H_S^{-1}}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{S}$ and $\mathbf{P}$, but σ is not logically equivalent to any equality-free universal-atomic sentence. Let $L = \{P, Q\}$, where P and Q are monadic relation symbols, and $\sigma = \forall x Px \wedge \forall x Qx$.

The characterization theorem for the positive fragment of first-order logic with equality is due to R.C. Lyndon, see [Lyn59]. Now we obtain a version of it for equality-free languages. We shall consider now only formulas built up from atomic and negation of atomic formulas using only the connectives $\wedge$, $\vee$ and the quantifiers $\forall$, $\exists$.

Given a symbol s (s can belong to L or s can be the identity symbol) and a formula ϕ of L, we say that s occurs *positively* in ϕ iff s has an occurrence in ϕ, which is not within the scope of a negation symbol. And we say that s occurs *negatively* in ϕ iff s has an occurrence in ϕ, which is within the scope of a negation symbol.

Given a formula $\phi \in L$, let $Rel(\phi)$ ($Fun(\phi)$) be the set of relation (function) symbols of L that occur in ϕ, and let $Rel^+(\phi)$ ($Rel^-(\phi)$) be the set of symbols of $Rel(\phi)$ that occur positively (negatively) in ϕ.

In [Mot84] we can find the following extended version of Lyndon's interpolation theorem, due to A. Oberschelp and T. Fujiwara.

Theorem 4.13 *Suppose that ϕ and ψ are sentences of L such that $\phi \models \psi$, $\not\models \neg\phi$ and $\not\models \psi$. Then there is a sentence θ of L such that:*

i) *$\phi \models \theta$ and $\theta \models \psi$.*

ii) *$Rel^+(\theta) \subseteq Rel^+(\phi) \cap Rel^+(\psi)$ and $Rel^-(\theta) \subseteq Rel^-(\phi) \cap Rel^-(\psi)$.*

iii) *$Fun(\theta) \subseteq Fun(\phi) \cap Fun(\psi)$.*

iv) *If θ has at least one positive (negative) occurrence of the identity symbol, then ϕ (ψ) has at least one positive (negative) occurrence of the identity symbol.*

We say that $\phi \in L$ is a *positive formula* if ϕ is built up from atomic formulas using only the connectives $\wedge$, $\vee$ and the quantifiers $\forall$, $\exists$. Let us recall the characterization theorem for the positive fragment of logic with equality:

Theorem 4.14 *If K is a class of L-structures, the following are equivalent:*

i) *K is axiomatizable by a set of positive sentences.*

ii) *K is closed under $\mathbf{P_U}$, $\mathbf{H}$ and for every L-structure $\mathfrak{A}$, if some ultrapower of $\mathfrak{A}$ lies in K, then $\mathfrak{A} \in K$.*

Now we prove its version for equality-free logic.

Theorem 4.15 *If K is a non-empty class of L-structures, the following are equivalent:*

i) *K is axiomatizable by a set of equality-free positive sentences.*

ii) *K is closed under $\mathbf{P_U}$, $\mathbf{H}$ and $\mathbf{H_S^{-1}}$ and for every L-structure $\mathfrak{A}$, if some ultrapower of $\mathfrak{A}$ lies in K, then $\mathfrak{A} \in K$.*

Proof. i) $\Rightarrow$ ii) is clear. ii) $\Rightarrow$ i) Since K is closed under $\mathbf{H}$, K is also closed under $\mathbf{H_S}$. Therefore, by ii) and Theorem 4.1, K is axiomatizable by a set Γ of equality-free sentences. Moreover, by ii) and Theorem 4.14, K is axiomatizable by a set Σ of positive sentences (possibly with equality). Since $\Gamma \models \Sigma$, for every $\sigma \in \Sigma$ such that $\not\models \sigma$ we can choose $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$ such that

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \sigma.$$

Let $\alpha_\sigma = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$; we have that $\alpha_\sigma \models \sigma$ and α_σ is an equality-free sentence. Furthermore, $\not\models \neg\alpha_\sigma$, because K is non-empty. Therefore, there is a sentence $\theta_\sigma \in L$ that satisfies conditions i) – iv) of Theorem 4.13. Observe that, by condition iv), since in α_σ does not occur the identity symbol, in θ_σ the equality symbol does not occur positively. Moreover, since σ is positive, in θ_σ the equality symbol does not occur negatively. Then we can conclude that θ_σ is an equality-free sentence and by condition ii), since σ is positive,

$$Rel^-(\theta_\sigma) \subseteq Rel^-(\alpha_\sigma) \cap Rel^-(\sigma) = Rel^-(\alpha_\sigma) \cap \emptyset = \emptyset.$$

Then θ_σ is a positive sentence. Thus, $\{\theta_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ is a set of equality-free positive sentences that axiomatizes K. $\square$

Corollary 4.16 *Let T be a consistent set of sentences of L and σ a consistent sentence of L. Then:*

i) *T is axiomatizable by a set of equality-free positive sentences iff T is preserved under $\mathbf{H_S^{-1}}$ and $\mathbf{H}$.*

ii) *σ is logically equivalent to an equality-free positive sentence iff σ is preserved under $\mathbf{H_S^{-1}}$ and $\mathbf{H}$.*

Proof. By Theorem 4.15 using a proof analogous to the proof of Corollary 4.2 and the fact that any finite conjunction of positive sentences is a positive sentence. $\square$

In [Tar54], A. Tarski gave a characterization theorem for the universal fragment of first-order logic with equality. In [Los55], J. Łoś gave a generalization of it. We obtain now an analogue for equality-free logic. It is said that $\phi \in L$ is a *universal formula* if $\phi = \forall\overline{x}\psi$, for some quantifier-free formula ψ. Given a class K of L-structures we denote by $\mathrm{Th}^{\forall^-}(K)$ the set

$$\mathrm{Th}^{\forall^-}(K) = \{\sigma \in \mathrm{Th}^-(K) : \sigma \text{ is universal}\}.$$

Theorem 4.17 *Let K be a class of L-structures. The following are equivalent:*

i) *K is axiomatizable by a set of equality-free universal sentences.*

ii) *K is closed under $\mathbf{H_S^{-1}}$, $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{S}$ and $\mathbf{P_U}$.*

iii) *$K = \mathbf{H_S^{-1}H_SSP_U}(M)$, for some class M of L-structures.*

Proof. i) $\Rightarrow$ ii) and ii) $\Rightarrow$ iii) are clear. iii) $\Rightarrow$ i) Assume that $K = \mathbf{H_S^{-1}H_SSP_U}(M)$, for some class M of L-structures. We will show that, for every L-structure $\mathfrak{A}$, if $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^{\forall^-}(M)$, then $\mathfrak{A} \in K$. Suppose that $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^{\forall^-}(M)$ and let $T = \mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$. For every finite $\Gamma \subseteq T$, if the constants which occur in the sentences of Γ are among $a_1, \dots, a_n$, since $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^{\forall^-}(K)$, there is $\mathfrak{B} \in M$ such that $\mathfrak{B} \models \exists x_1 \dots x_n \bigwedge \Gamma'$, where Γ' is obtained from Γ by substituting for each $1 \leq i \leq n$, the variable x_i for the constant a_i. We choose, for every finite $\Gamma \subseteq T$, $\mathfrak{B}_\Gamma \in M$ and $b_1^\Gamma, \dots, b_n^\Gamma \in B_\Gamma$ such that

$$\mathfrak{B}_\Gamma \models \bigwedge \Gamma' \left[b_1^\Gamma, \dots, b_n^\Gamma\right].$$

Let $I = \{\Gamma \subseteq T : \Gamma \text{ finite}\}$ and for every $\Gamma \in I$, $J_\Gamma = \{\Delta \in I : \Gamma \subseteq \Delta\}$. Since $J = \{J_\Gamma : \Gamma \in I\}$ has the finite intersection property, it can be extended to a proper ultrafilter U over I. Let $\mathfrak{B} = \prod_{\Gamma \in I} \mathfrak{B}_\Gamma / U$, clearly $\mathfrak{B} \in \mathbf{P_U}(M)$. We define, for every $a \in A$, an element $\hat{a} \in \prod_{\Gamma \in I} B_\Gamma$ by:

$$\hat{a}(\Gamma) = \begin{cases} b_i^\Gamma, & \text{if } a \in \{a_1, \dots, a_n\} \text{ and } a = a_i, \\ \text{arbitrary}, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

for every $\Gamma \in I$. Then $(\mathfrak{B}, [\hat{a}]_U)_{a \in A}$ is an expansion of $\mathfrak{B}$ that satisfies $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$. Therefore, by Proposition 2.20, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S^{-1}H_SS}(\mathfrak{B})$. Since $\mathfrak{B} \in \mathbf{P_U}(M)$ and $K = \mathbf{H_S^{-1}H_SSP_U}(M)$, $\mathfrak{A} \in K$. $\square$

Corollary 4.18 *Let $T \cup \{\sigma\}$ be a set of sentences of L. Then:*

i) *T is axiomatizable by a set of equality-free universal sentences iff T is preserved under $\mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}$, $\mathbf{H}_{\mathbf{S}}$ and $\mathbf{S}$.*

ii) *σ is logically equivalent to an equality-free universal sentence iff σ is preserved under $\mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}$, $\mathbf{H}_{\mathbf{S}}$ and $\mathbf{S}$.*

Proof. By Theorem 4.17 using a proof analogous to the proof of Corollary 4.2 and the fact that any finite conjunction of universal sentences is logically equivalent to a universal sentence. □

Theories preserved by unions of chains were characterized by J. Łoś and R. Suszko in [LS55], C. C. Chang improved this result in [Cha59]. Let us give an analogous theorem for equality-free logic. It is said that $\phi \in L$ is a *universal-existential formula* if $\phi = \forall\overline{y}\exists\overline{x}\psi$, for some quantifier-free formula ψ. Given a class K of L-structures, we denote by $\mathrm{Th}^{\forall\exists^-}(K)$ the set

$$\mathrm{Th}^{\forall\exists^-}(K) = \{\sigma \in \mathrm{Th}^-(K) : \sigma \text{ is universal-existential}\}\,.$$

Given an L-structure $\mathfrak{A}$, we expand the language by adding a new constant symbol for each element of A. We denote by $\mathsf{univdiag}^-(\mathfrak{A})$ the following set of sentences in the expanded language

$$\mathsf{univdiag}^-(\mathfrak{A}) = \{\sigma \in L^-(A) : \sigma \text{ is a universal sentence and } \mathfrak{A}_A \models \sigma\}\,.$$

Lemma 4.19 *Suppose that $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are L-structures such that any equality-free universal-existential sentence true in $\mathfrak{B}$ is also true in $\mathfrak{A}$. Then there are L-structures $\mathfrak{C}$ and $\mathfrak{D}$ such that:*

i) $\mathfrak{A}^* \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{D}^*$.

ii) $\mathfrak{A}^* \preceq^- \mathfrak{D}^*$.

iii) $\mathfrak{B} \equiv^- \mathfrak{C}$.

Proof. We expand the language introducing a set $C_A = \{c_a : a \in A\}$ of new constant symbols and we consider the set $\Gamma = \mathrm{Th}^-(\mathfrak{B}) \cup \mathsf{univdiag}^-(\mathfrak{A})$ of sentences in the expanded language. First we show that Γ is consistent. Otherwise, since any conjunction of universal formulas is logically equivalent to an universal sentence, there will be a formula $\forall\overline{x}\psi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_l}) \in \mathsf{univdiag}^-(\mathfrak{A})$ such that

$$\mathrm{Th}^-(\mathfrak{B}) \models \neg\forall\overline{x}\psi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_l})$$

where $c_{a_1}, \ldots, c_{a_l}$ are all the new constants that occur in $\neg\forall\overline{x}\psi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_l})$. Since the constants $c_{a_1}, \ldots, c_{a_l}$ do not occur in the sentences of $\mathrm{Th}^-(\mathfrak{B})$, if $y_1, \ldots, y_l$ are variables that do not occur in $\forall\overline{x}\psi(c_{a_1},\ldots,c_{a_l})$ and we substitute for every $i=1,\ldots,l$ the variable y_i for the constant c_{a_i},

$$\mathrm{Th}^-(\mathfrak{B}) \models \forall y_1 \ldots y_l \exists\overline{x}\neg\psi$$

and then,

$$\mathfrak{B} \models \forall y_1 \ldots y_l \exists\overline{x}\neg\psi.$$

By assumption, any equality-free universal-existential sentence true in $\mathfrak{B}$ is also true in $\mathfrak{A}$. Consequently,

$$\mathfrak{A} \models \forall y_1 \ldots y_l \exists\overline{x}\neg\psi,$$

which is absurd, because $\forall\overline{x}\psi(c_{a_1},\ldots,c_{a_l}) \in \mathsf{univdiag}^-(\mathfrak{A})$.

Let $(\mathfrak{B}', c^{\mathfrak{B}'})_{c\in C_A}$ be a model of Γ. We have that $\mathfrak{B} \equiv^- \mathfrak{B}'$. Now we expand the language further by adding a set

$$C_{B'} = \left\{c_b : b \in B' - \left\{c^{\mathfrak{B}'} : c \in C_A\right\}\right\}$$

of new constant symbols disjoint from $C_A \cup L$. Consider $\mathsf{eldiag}^-(\mathfrak{A})$, the equality-free elementary diagram of $\mathfrak{A}$ in the expanded language $L \cup C_A$ and $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{B}')$, the equality-free diagram of $\mathfrak{B}'$ in the expanded language $L \cup C_A \cup C_{B'}$. Let Σ be the union of these two diagrams. We show that Σ is consistent. Otherwise, there will be formulas

$$\phi_1(c_{b_1},\ldots,c_{b_k}),\ldots,\phi_n(c_{b_1},\ldots,c_{b_k}) \in \mathsf{diag}^-(\mathfrak{B}'),$$

with $b_1,\ldots,b_k \in B' - \left\{c^{\mathfrak{B}'} : c \in C_A\right\}$ and such that

$$\mathsf{eldiag}^-(\mathfrak{A}) \models \neg\phi_1 \vee \ldots \vee \neg\phi_n(c_{b_1},\ldots,c_{b_k}),$$

where $c_{b_1},\ldots,c_{b_k}$ are all the new constants that occur in the formula $\neg\phi_1 \vee \ldots \vee \neg\phi_n(c_{b_1},\ldots,c_{b_k})$. Since the constants $c_{b_1},\ldots,c_{b_k}$ do not occur in the sentences of $\mathsf{eldiag}^-(\mathfrak{A})$, if $y_1,\ldots,y_k$ are variables that do not occur in $\neg\phi_1 \vee \ldots \vee \neg\phi_n(c_{b_1},\ldots,c_{b_k})$ and we substitute for every $i=1,\ldots,k$ the variable y_i for the constant c_{b_i},

$$\mathsf{eldiag}^-(\mathfrak{A}) \models \forall y_1 \ldots y_k(\neg\phi_1 \vee \ldots \vee \neg\phi_n)$$

and then

$$(\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \models \forall y_1 \ldots y_k(\neg\phi_1 \vee \ldots \vee \neg\phi_n).$$

Since $(\mathfrak{B}', c^{\mathfrak{B}'})_{c\in C_A}$ is a model of $\mathsf{univdiag}^-(\mathfrak{A})$,

$$(\mathfrak{B}', c^{\mathfrak{B}'})_{c\in C_A} \models \forall y_1 \ldots y_k(\neg\phi_1 \vee \ldots \vee \neg\phi_n),$$

which is absurd, because

$$\phi_1(c_{b_1},\ldots,c_{b_k}),\ldots,\phi_n(c_{b_1},\ldots,c_{b_k}) \in \mathsf{diag}^-(\mathfrak{B}').$$

Let $(\mathfrak{D}, c^{\mathfrak{D}})_{c \in C_A \cup C_{B'}}$ be a model of Σ. On the one hand, since $(\mathfrak{D}, c^{\mathfrak{D}})_{c \in C_A \cup C_{B'}}$ is a model of $\mathsf{eldiag}^-(\mathfrak{A})$, by Proposition 2.26, $\mathfrak{A}^* \precsim^- \mathfrak{D}^*$ and using the usual arguments, it is easy to check that the map $h : \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{D}^*$ defined by:

$$h([a]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = \left[c_a^{\mathfrak{D}}\right]_{\Omega(\mathfrak{D})},$$

for every $a \in A$, is an embedding that preserves equality-free formulas. We may assume without loss of generality that

$$[a]_{\Omega(\mathfrak{A})} = \left[c_a^{\mathfrak{D}}\right]_{\Omega(\mathfrak{D})},$$

for every $a \in A$. Let $\mathfrak{C}$ be the substructure of $\mathfrak{D}^*$ generated by the set

$$\left\{\left[c^{\mathfrak{D}}\right]_{\Omega(\mathfrak{D})} : c \in C_A \cup C_{B'}\right\}.$$

Then we have that $\mathfrak{A}^* \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{D}^*$ and $\mathfrak{A}^* \preceq^- \mathfrak{D}^*$.

On the other hand, since all the sentences in $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{B}')$ are equality-free,

$$(\mathfrak{D}^*, \left[c^{\mathfrak{D}}\right]_{\Omega(\mathfrak{D})})_{c \in C_A \cup C_{B'}}$$

is also a model of $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{B}')$. Thus, by the proof of iii) $\Rightarrow$ iv) in Proposition 2.20, $\mathfrak{B}' \sim \mathfrak{C}$ and consequently, $\mathfrak{B} \equiv^- \mathfrak{C}$. So defined, the models $\mathfrak{C}$ and $\mathfrak{D}$ satisfy the required conditions. □

Given a class K of structures, it is said that a subset $X \subseteq K$ is an *upward directed subset* if for every two structures $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in X$ there is an structure $\mathfrak{C} \in X$ such that $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$. And it is said that K is *closed under unions of upward directed subsets* if for every upward directed subset $X \subseteq K$, $\bigcup X \in K$.

Theorem 4.20 *If K is a class of L-structures, the following are equivalent:*

i) *K is axiomatizable by a set of equality-free universal-existential sentences.*

ii) *K is closed under $\mathbf{P_U}$, $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{H_S^{-1}}$ and unions of upward directed subsets and for every L-structure $\mathfrak{A}$, if some ultrapower of $\mathfrak{A}$ lies in K, then $\mathfrak{A} \in K$.*

iii) *K is closed under $\mathbf{P_U}$, $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{H}_S^{-1}$ and unions of countable chains and for every L-structure $\mathfrak{A}$, if some ultrapower of $\mathfrak{A}$ lies in K, then $\mathfrak{A} \in K$.*

iv) *K is closed under $\mathbf{P_U}$, $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{H_S^{-1}}$ and unions of chains and for every L-structure $\mathfrak{A}$, if some ultrapower of $\mathfrak{A}$ lies in K, then $\mathfrak{A} \in K$.*

Proof. i) $\Rightarrow$ ii), i) $\Rightarrow$ iii), ii) $\Rightarrow$ iii), iv) $\Rightarrow$ iii) and i) $\Rightarrow$ iv) are clear. iii) $\Rightarrow$ i) Since K is closed under $\mathbf{P_U}$, $\mathbf{H_S}$ and $\mathbf{H_S^{-1}}$ and the complement of K is closed under ultrapowers, by Theorem 4.1, K is axiomatizable by a set T of equality-free sentences. We prove that, for every L-structure $\mathfrak{A}$, if $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^{\forall\exists^-}(K)$, then $\mathfrak{A} \models T$ and consequently, $\mathfrak{A} \in K$. Assume that $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^{\forall\exists^-}(K)$.

First, we show that there is an L-structure $\mathfrak{B} \in K$ such that any equality-free universal-existential sentence true in $\mathfrak{B}$ is also true in $\mathfrak{A}$. We expand the language introducing a set $C_A = \{c_a : a \in A\}$ of new constant symbols and we consider the set $\Gamma = T \cup \mathsf{univdiag}^-(\mathfrak{A})$ of sentences in the expanded language. We prove that Γ is consistent. On the contrary, since any conjunction of universal formulas is logically equivalent to an universal sentence, there will be a formula $\forall\overline{x}\psi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_l}) \in \mathsf{univdiag}^-(\mathfrak{A})$ such that

$$T \models \neg\forall\overline{x}\psi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_l})$$

where $c_{a_1}, \ldots, c_{a_l}$ are all the new constants that occur in $\neg\forall\overline{x}\psi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_l})$. Since the constants $c_{a_1}, \ldots, c_{a_l}$ do not occur in the sentences of T, if $y_1, \ldots, y_l$ are variables that do not occur in $\neg\forall\overline{x}\psi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_l})$ and we substitute for every $i = 1, \ldots, l$ the variable y_i for the constant c_{a_i},

$$T \models \forall y_1 \ldots y_l \exists\overline{x}\neg\psi.$$

But then,

$$\forall y_1 \ldots y_l \exists\overline{x}\neg\psi \in \mathrm{Th}^{\forall\exists^-}(K)$$

and since $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^{\forall\exists^-}(K)$,

$$\mathfrak{A} \models \forall y_1 \ldots y_l \exists\overline{x}\neg\psi,$$

which is absurd, because $\forall\overline{x}\psi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_l}) \in \mathsf{univdiag}^-(\mathfrak{A})$. Thus, we conclude that Γ is consistent.

Let $(\mathfrak{B}, c^{\mathfrak{B}})_{c \in C_A}$ be a model of Γ. Let us see that any equality-free universal-existential sentence true in $\mathfrak{B}$ is also true in $\mathfrak{A}$. Suppose that $\forall\overline{x}\exists\overline{y}\psi$ is an equality-free universal-existential sentence true in $\mathfrak{B}$. If $\mathfrak{A} \not\models \forall\overline{x}\exists\overline{y}\psi$, there will be $a_1, \ldots, a_l \in A$ such that $\mathfrak{A} \models \forall\overline{y}\neg\psi\,[a_1, \ldots, a_l]$ and then, $\forall\overline{y}\neg\psi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_l}) \in \mathsf{univdiag}^-(\mathfrak{A})$. This is absurd because $(\mathfrak{B}, c^{\mathfrak{B}})_{c \in C_A}$ is a model of $\mathsf{univdiag}^-(\mathfrak{A})$.

Now we define by induction two sequences of models, $(\mathfrak{A}_n : n \in \omega)$ and $(\mathfrak{C}_{n+1} : n \in \omega)$ with the following properties: for every $n \in \omega$,

a) Any equality-free universal-existential sentence true in $\mathfrak{B}$ is also true in $\mathfrak{A}_n$.

b) $\mathfrak{A}_n^* \subseteq \mathfrak{C}_{n+1} \subseteq \mathfrak{A}_{n+1}^*$.

c) $\mathfrak{A}_n^* \preceq^- \mathfrak{A}_{n+1}^*$.

d) $\mathfrak{B} \equiv^- \mathfrak{C}_{n+1}$.

Let $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$ and apply Lemma 4.19 to obtain $\mathfrak{A}_1$ and $\mathfrak{C}_1$. Let $n > 0$ and suppose inductively that we have defined $\mathfrak{A}_n$ and $\mathfrak{C}_n$ that satisfy conditions a) – d). We can apply again Lemma 4.19 to obtain $\mathfrak{A}_{n+1}$ and $\mathfrak{C}_{n+1}$. Now let $\mathfrak{C} = \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{C}_{n+1} = \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{A}^*_n$. Since $\mathfrak{B} \models T$ and for every $n \in \omega$, $\mathfrak{B} \equiv^- \mathfrak{C}_{n+1}$, we have that for every $n \in \omega$, $\mathfrak{C}_{n+1} \models T$. Therefore, since by assumption, K is closed under unions of countable chains, $\mathfrak{C} \models T$. And since $\mathfrak{A}^*_n \preceq^- \mathfrak{A}^*_{n+1}$, for every $n \in \omega$, we have that $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}^*_0 \preceq^- \mathfrak{C}$. Then, since T is a set of equality-free sentences, $\mathfrak{A}^* \models T$ and consequently, $\mathfrak{A} \models T$. $\Box$

Corollary 4.21 *Let $T \cup \{\sigma\}$ be a set of sentences of L. Then:*

i) *T is axiomatizable by a set of equality-free universal-existential sentences iff T is preserved under $\mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}$ and $\mathbf{H}_{\mathbf{S}}$ and unions of chains.*

ii) *σ is logically equivalent to an equality-free universal-existential sentence iff σ is preserved under $\mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}$ and $\mathbf{H}_{\mathbf{S}}$ and unions of chains.*

Proof. By Theorem 4.20 using a proof analogous to the proof of Corollary 4.2 and the fact that any finite conjunction of universal-existential sentences is logically equivalent to one universal-existential sentence. $\Box$

Finally, let us prove a preservation theorem for the Horn fragment of L^-. H. J. Keisler proved the preservation theorem for Horn sentences (in the case with equality) using the continuum hypothesis, see [Kei65], and then F. Galvin eliminated this hypothesis, see [Gal70]. There are two more proofs of this theorem, one was obtained by R. Mansfield, using boolean-valued models, see [Man72]. The other is due to S. Shelah, see [She71]; he indicates that the theorem could be obtained by the technique he introduced to prove that two elementary equivalent models have isomorphic ultrapowers. Our proof follows the main lines of Keisler and Galvin proof. Using the same kind of proof of Mansfield it is possible to obtain a preservation theorem for theories in general, not only for sentences, see [Dell]. Now, let us recall the definition of Horn formula:

It is said that a formula $\phi \in L$ is a *basic Horn formula* if ϕ is a disjunction of formulas

$$\chi_1 \vee \ldots \vee \chi_n$$

where at most one of the formulas χ_i is atomic, the rest being negations of atomic formulas. A *Horn formula* $\phi \in L$ is built up from basic Horn formulas by means of the connective $\wedge$ and the quantifiers $\forall, \exists$.

Lemma 4.22 *Let $\mathfrak{B}$ be an L-structure, I a non-empty set and $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ a family of L-structures. The following are equivalent:*

i) $\mathfrak{B} \sim \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F$, *for some proper filter F over I.*

ii) $\mathfrak{B} \sim \prod_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i$, *for some proper filter* F *over* I.

iii) *There are enumerations of* $\prod_{i\in I} A_i$ *and* B, $\overline{a} = (a_j : j \in J)$ *and* $\overline{b} = (b_j : j \in J)$ *respectively, such that for any basic Horn formula* $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in L^-$ *and any* $a_{j_1}, \ldots, a_{j_n} \in \prod_{i\in I} A_i$, *if for every* $i \in I$

$$\mathfrak{A}_i \models \phi\left[a_{j_1}(i), \ldots, a_{j_n}(i)\right],$$

then,

$$\mathfrak{B} \models \phi\left[b_{j_1}, \ldots, b_{j_n}\right].$$

Proof. i) $\Leftrightarrow$ ii) is clear. ii) $\Rightarrow$ iii) Assume that $\mathfrak{B} \sim \prod_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i$. By Proposition 2.17, there are enumerations of $\prod_{i\in I} A_i$ and B, $\overline{a} = (a_j : j \in J)$ and $\overline{b} = (b_j : j \in J)$ respectively, such that

$$(\prod\nolimits_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

Suppose that $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ is a basic Horn formula of L^- and $a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}$ elements of $\prod_{i\in I} A_i$ such that for every $i \in I$

$$\mathfrak{A}_i \models \phi\left[a_{j_1}(i), \ldots, a_{j_n}(i)\right].$$

Then, since ϕ is a Horn formula,

$$\prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i/F \models \phi\left[[a_{j_1}]_F, \ldots, [a_{j_n}]_F\right],$$

and since ϕ is equality-free,

$$\prod\nolimits_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i \models \phi\left[a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}\right].$$

Therefore,

$$\mathfrak{B} \models \phi\left[b_{j_1}, \ldots, b_{j_n}\right].$$

Thus, condition iii) holds.

iii) $\Rightarrow$ ii) Suppose that there are enumerations of $\prod_{i\in I} A_i$ and B, $\overline{a} = (a_j : j \in J)$ and $\overline{b} = (b_j : j \in J)$ respectively, such that condition iii) holds. Given a sequence $\overline{d} = a_{j_1}, \ldots, a_{j_n} \in \prod_{i\in I} A_i$, we will denote by $\overline{d}(i)$ the sequence $a_{j_1}(i), \ldots, a_{j_n}(i)$ and by $b_{\overline{d}}$ the corresponding sequence of B, $b_{j_1}, \ldots, b_{j_n}$. Now we define for any $n \in \omega$, any sequence $\overline{d} = a_{j_1}, \ldots, a_{j_n} \in \prod_{i\in I} A_i$ and any equality-free atomic formula $\phi = \phi(x_1, \ldots, x_n)$, the set

$$S_{\phi\overline{d}} = \left\{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \phi\left[\overline{d}(i)\right]\right\}$$

and the set $R = \left\{S_{\phi\overline{d}} : \mathfrak{B} \models \phi\left[\overline{b_{\overline{d}}}\right]\right\}$. We can distinguish two cases. Case I: $R = \emptyset$. In this case, let $F = \{I\}$. It is easy to check that

$$(\prod\nolimits_{i\in I}^F \mathfrak{A}_i, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

Case II: $R \neq \emptyset$. Observe that R has the finite intersection property: suppose that $S_{\phi_1 \overline{d}_1}, \ldots, S_{\phi_k \overline{d}_k} \in R$ and assume that for any $i \neq j$, $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k$, the set of variables that occur in ϕ_i and the set of variables that occur in ϕ_j are disjoint. Then,

$$\mathfrak{B} \models \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k \left[\overline{b}_{\overline{d}_1}, \ldots, \overline{b}_{\overline{d}_k}\right].$$

Suppose also, searching for a contradiction, that $S_{\phi_1 \overline{d}_1} \cap \ldots \cap S_{\phi_k \overline{d}_k} = \emptyset$. Then, for any $i \in I$,

$$\mathfrak{A}_i \models \neg\phi_1 \vee \ldots \vee \neg\phi_k \left[\overline{d}_1(i), \ldots, \overline{d}_k(i)\right].$$

And since $\neg\phi_1 \vee \ldots \vee \neg\phi_k$ is an equality-free basic Horn formula, by iii),

$$\mathfrak{B} \models \neg\phi_1 \vee \ldots \vee \neg\phi_k \left[\overline{b}_{\overline{d}_1}, \ldots, \overline{b}_{\overline{d}_k}\right],$$

which is absurd. Hence we can conclude that R has the finite intersection property.

Let now F be the filter over I generated by R. Since R has the finite intersection property, F is proper. We show that

$$(\prod\nolimits_{i \in I}^{F} \mathfrak{A}_i, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

Let $\psi = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ be an equality-free atomic formula and $\overline{c} = a_{j_1}, \ldots, a_{j_n} \in \prod_{i \in I} A_i$. Suppose that

$$\prod\nolimits_{i \in I}^{F} \mathfrak{A}_i \models \psi\left[\overline{c}\right].$$

Then,

$$X = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \models \psi\left[\overline{c}(i)\right]\} \in F$$

and consequently, since F is the filter over I generated by R, there are $S_{\phi_1 \overline{d}_1}, \ldots, S_{\phi_k \overline{d}_k} \in R$ such that

$$X \supseteq S_{\phi_1 \overline{d}_1} \cap \ldots \cap S_{\phi_k \overline{d}_k}.$$

Assume that for any $i \neq j$, $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k$, the set of variables that occur in ϕ_i and the set of variables that occur in ϕ_j are disjoint. Then, for any $i \in I$,

$$\mathfrak{A}_i \models \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k \to \psi \left[\overline{d}_1(i), \ldots, \overline{d}_k(i), \overline{c}(i)\right].$$

On the one hand, since $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k \to \psi$ is equivalent to an equality-free basic Horn formula and condition iii) holds,

$$\mathfrak{B} \models \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k \to \psi \left[\overline{b}_{\overline{d}_1}, \ldots, \overline{b}_{\overline{d}_k}, \overline{b}_{\overline{c}}\right].$$

And on the other hand, since $S_{\phi_1 \overline{d}_1}, \ldots, S_{\phi_k \overline{d}_k} \in R$,

$$\mathfrak{B} \models \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k \left[\overline{b}_{\overline{d}_1}, \ldots, \overline{b}_{\overline{d}_k}\right].$$

Hence, $\mathfrak{B} \models \psi\left[\overline{b_{\overline{c}}}\right]$. Conversely, if $\mathfrak{B} \models \psi\left[\overline{b_{\overline{c}}}\right]$, then $S_{\psi\overline{c}} \in R \subseteq F$. And since ψ is an equality-free atomic formula,

$$\prod\nolimits_{i\in I}^{F} \mathfrak{A}_i \models \psi\left[\overline{c}\right].$$

Hence, we can conclude that

$$(\prod\nolimits_{i\in I}^{F} \mathfrak{A}_i, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

By Proposition 2.17, $\mathfrak{B} \sim \prod_{i\in I}^{F} \mathfrak{A}_i$. □

Let us now introduce some notation. Given an infinite cardinal κ and a set I of power κ, the expression "for almost all $i \in I$" will mean "for all but fewer than κ elements of I". If we assume that $2^\kappa = \kappa^+$, the next proposition gives us a sufficient condition for a saturated structure of power κ^+ to be relative to a reduced product of some set of structures. We will use this fact later on to prove the desired preservation theorem.

Proposition 4.23 ($2^\kappa = \kappa^+$) *Assume that $|L| + \aleph_0 \leq \kappa$. Let $\mathfrak{B}$ be a saturated L-structure of power κ^+, I a set of power κ and $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ a family of L-structures of power $\leq \kappa^+$. Suppose that for any Horn sentence $\sigma \in L^-$, if for almost all $i \in I$*

$$\mathfrak{A}_i \models \sigma,$$

then

$$\mathfrak{B} \models \sigma.$$

Hence, $\mathfrak{B} \in \mathbf{H_S^{-1}H_SP_R}(\{\mathfrak{A}_i : i \in I\})$.

Proof. Let $\mathfrak{A} = \prod_{i\in I} \mathfrak{A}_i$. Since $2^\kappa = \kappa^+$, we have that $|A| \leq \kappa^+$. Let $(a'_\xi : \xi \in \kappa^+)$ and $(b'_\xi : \xi \in \kappa^+)$ be enumerations of A and B respectively. By transfinite induction we define two enumerations, $(a_\xi : \xi \in \kappa^+)$ and $(b_\xi : \xi \in \kappa^+)$, of A and B respectively, such that for any $\nu \in \kappa^+$, $(a_\xi : \xi \in \nu)$ and $(b_\xi : \xi \in \nu)$ satisfy the following condition: for any Horn formula $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in L^-$, any $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \nu$ and any $a_{\xi_1}, \ldots, a_{\xi_n} \in A$,

$$\begin{array}{l} \text{if for almost all } i \in I, \mathfrak{A}_i \models \phi\left[a_{\xi_1}(i), \ldots, a_{\xi_n}(i)\right], \\ \text{then } \mathfrak{B} \models \phi\left[b_{\xi_1}, \ldots, b_{\xi_n}\right]. \end{array} \tag{4.1}$$

Suppose inductively that we have defined $(a_\xi : \xi \in \nu)$ and $(b_\xi : \xi \in \nu)$ such that satisfy condition (4.1). We can distinguish two cases: case $\nu = \mu + 2k$ and case $\nu = \mu + 2k + 1$, where μ is a limit or 0, and $k \in \omega$.

Case $\nu = \mu + 2k$. Let $a_\nu = a'_{\mu+k}$. Let p be the set of all the formulas $\phi(x, b_{\xi_1}, \ldots, b_{\xi_n}) \in L(B)$ such that $\phi(x, y_1, \ldots, y_n) \in L$ is an equality-free Horn formula, $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \nu$ and for almost all $i \in I$,

$$\mathfrak{A}_i \models \phi\left[a_\nu(i), a_{\xi_1}(i), \ldots, a_{\xi_n}(i)\right].$$

If $\phi(x, b_{\xi_1}, \ldots, b_{\xi_n}) \in p$, then for almost all $i \in I$,

$$\mathfrak{A}_i \models \exists x\phi\,[a_{\xi_1}(i), \ldots, a_{\xi_n}(i)]\,.$$

Therefore, as the set of Horn formulas of L^- is closed under $\exists$, by inductive hypothesis,

$$\mathfrak{B} \models \exists x\phi\,[b_{\xi_1}, \ldots, b_{\xi_n}]\,.$$

And since the set of Horn formulas of L^- is closed under $\wedge$, p is a 1-type over the set $\{b_\xi : \xi \in \nu\}$ in $\mathfrak{B}$. Consequently, since $\mathfrak{B}$ is saturated, $\mathfrak{B}$ satisfies p. Let b_ν be such a realization of p.

Case $\nu = \mu + 2k + 1$. Let $b_\nu = b'_{\mu+k}$. Let q be the set of all the formulas $\phi(x, a_{\xi_1}, \ldots, a_{\xi_n}) \in L(A)$ such that $\phi(x, y_1, \ldots, y_n) \in L$ is an equality-free Horn formula, $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \nu$ and

$$\mathfrak{B} \models \neg\phi\,[b_\nu, b_{\xi_1}, \ldots, b_{\xi_n}]\,.$$

For any equality-free Horn formula $\phi(x, y_1, \ldots, y_n) \in L$, if $\mathfrak{B} \models \neg\phi\,[b_\nu, b_{\xi_1}, \ldots, b_{\xi_n}]$, then $\mathfrak{B} \models \neg\forall x\phi\,[b_{\xi_1}, \ldots, b_{\xi_n}]$. We define for any $\phi = \phi(x, a_{\xi_1}, \ldots, a_{\xi_n}) \in q$ the set

$$I_\phi = \{i \in I : \mathfrak{A}_i \not\models \forall x\phi\,[a_{\xi_1}(i), \ldots, a_{\xi_n}(i)]\}\,.$$

Since the set of Horn formulas of L^- is closed under $\forall$, by inductive hypothesis, $|I_\phi| = \kappa$. Therefore, by Lemma 6.1.6. of [CK91], since $|q| \leq \kappa$, there is $(J_\phi : \phi \in q)$ such that:

a) for any $\phi \in q$, $J_\phi \subseteq I_\phi$ and $|J_\phi| = \kappa$.

b) for any $\phi, \phi' \in q$, if $\phi \neq \phi'$ then $J_\phi \cap J_{\phi'} = \emptyset$.

We now define $a_\nu \in A$ in the following way:

$$a_\nu(i) = \begin{cases} a_\nu(i) \in A_i \text{ such that } \mathfrak{A}_i \models \neg\phi\,[a_\nu(i), a_{\xi_1}(i), \ldots, a_{\xi_n}(i)]\,, & \text{if } i \in J_\phi, \\ \text{arbitrary}, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

for any $i \in I$.

Once we have finished the construction, $(a_\xi : \xi \in \kappa^+)$ and $(b_\xi : \xi \in \kappa^+)$ have the desired property: for any $\nu \in \kappa^+$, $(a_\xi : \xi \in \nu)$ and $(b_\xi : \xi \in \nu)$ satisfy condition (4.1). Therefore, these enumerations satisfy also condition iii) of Lemma 4.22. Hence we can conclude that $\mathfrak{B} \in \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}_\mathbf{S}\mathbf{P}_\mathbf{R}(\{\mathfrak{A}_i : i \in I\})$. $\square$

Now, assuming the continuum hypothesis, we will prove the preservation theorem for Horn sentences. Later we will show how to eliminate this strong hypothesis.

Theorem 4.24 $(2^\omega = \aleph_1)$ *For any sentence $\sigma \in L$, the following are equivalent:*

i) *σ is preserved under* $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{H_S^{-1}}$ *and* $\mathbf{P_R}$.

ii) *σ is logically equivalent to an equality-free Horn sentence.*

Proof. ii) $\Rightarrow$ i) is clear. i) $\Rightarrow$ ii) Suppose that σ is preserved under $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{H_S^{-1}}$and $\mathbf{P_R}$. We can assume that L is finite (we consider only the symbols that occur in σ). If σ is inconsistent it is clear. Otherwise, let Σ be the following set of sentences

$$\Sigma = \{\psi \in L^- : \psi \text{ is a Horn sentence and } \models \sigma \to \psi\}.$$

Clearly $\Sigma \neq \emptyset$. We prove that there is $\psi \in \Sigma$ such that $\models \psi \to \sigma$. By compactness, since Σ is closed under $\wedge$, it is enough to show that $\Sigma \models \sigma$. Since σ is preserved under $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{H_S^{-1}}$, by Corollary 4.2, σ is logically equivalent to an equality-free sentence. Therefore, in order to prove that $\Sigma \models \sigma$, since any finite model is equivalent in equality-free logic to an infinite model, it suffices to show that, for any infinite L-structure $\mathfrak{A}$, if $\mathfrak{A} \models \Sigma$, then $\mathfrak{A} \models \sigma$. Moreover, since L is finite, by the Löwenheim-Skolem Theorem, we can restrict ourselves to infinite countable models. Suppose that $\mathfrak{A}$ is an infinite countable L-structure such that $\mathfrak{A} \models \Sigma$. We will show that $\mathfrak{A} \models \sigma$. Let $\mathfrak{B}$ be an elementary extension of $\mathfrak{A}$ of power $\aleph_1$ and saturated. Since L is finite and $|A| < 2^\omega = \aleph_1$, the existence of such extension is guaranteed by Lemma 5.1.4 of [CK91].

Let now Ψ be the set

$$\Psi = \{\psi \in L^- : \psi \text{ is a Horn sentence and } \neg\psi \wedge \sigma \text{ is consistent}\}.$$

Clearly $\Psi \neq \emptyset$. We choose, for any $\psi \in \Psi$ a countable model $\mathfrak{A}_\psi$ of $\neg\psi \wedge \sigma$. Let $I = \omega \times \Psi$ and for any $i = \langle n, \psi\rangle \in I$, $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_\psi$. Now we show that for any Horn sentence $\psi \in L^-$, if for almost all $i \in I$, $\mathfrak{A}_i \models \psi$, then $\mathfrak{B} \models \psi$. Suppose that $\psi \in L^-$ is a Horn sentence such that for almost all $i \in I, \mathfrak{A}_i \models \psi$. Then $\psi \notin \Psi$, otherwise for any $n \in \omega$ and any $i = \langle n, \psi\rangle \in I$, $\mathfrak{A}_i \models \neg\psi$, contradicting the fact that for almost all $i \in I$, $\mathfrak{A}_i \models \psi$. Therefore, $\psi \in \Sigma$ and since $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \models \Sigma$ and consequently $\mathfrak{B} \models \psi$. Hence, by Proposition 4.23, $\mathfrak{B} \in \mathbf{H_S^{-1}H_SP_R}(\{\mathfrak{A}_i : i \in I\})$. Since σ is preserved under $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{H_S^{-1}}$and $\mathbf{P_R}$ and for any $i \in I$, $\mathfrak{A}_i \models \sigma$, $\mathfrak{B} \models \sigma$ and thus, $\mathfrak{A} \models \sigma$. We can conclude that $\Sigma \models \sigma$. Then, σ is logically equivalent to an equality-free Horn sentence. □

Now, let us eliminate the continuum hypothesis of Theorem 4.24. We assume that L is finite and we assign suitable Gödel numbers to the symbols and expressions of L. For a definition of arithmetical predicate and arithmetical statement and a reference to find the following theorems see Chapter 6.2. of [CK91].

Theorem 4.25 (Gödel) *Let Γ be an arithmetical statement,*

$$\text{If } ZF + CH \vdash \Gamma, \text{ then } ZF \vdash \Gamma.$$

Observe that the predicates "σ is an equality-free sentence of L" and "σ is an equality-free Horn sentence of L" are recursive and the predicate "σ is logically equivalent to an equality-free Horn sentence of L" is arithmetical.

Lemma 4.26 *The predicate "σ is preserved under $\mathbf{H_S}$ and $\mathbf{H_S^{-1}}$" is arithmetical.*

Proof. By Corollary 4.2, because the predicate "σ is an equality-free sentence of L" is recursive. □

Theorem 4.27 (Galvin) *The predicate "σ is preserved under $\mathbf{P_R}$" is arithmetical.*

Corollary 4.28 *The predicate "σ is preserved under $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{H_S^{-1}}$ and $\mathbf{P_R}$" is arithmetical.*

Proof. By Lemma 4.26 and Theorem 4.27. □

Corollary 4.29 *The statement "σ is logically equivalent to an equality-free Horn sentence of L if and only if σ is preserved under $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{H_S^{-1}}$ and $\mathbf{P_R}$" is arithmetical.*

Theorem 4.30 *For any sentence $\sigma \in L$, the following are equivalent:*

i) *σ is preserved under $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{H_S^{-1}}$ and $\mathbf{P_R}$.*

ii) *σ is logically equivalent to an equality-free Horn sentence.*

Proof. By Corollary 4.29 and Theorems 4.24 and 4.25. □

Chapter 5

Equality-free saturated models

5.1 Characterizations

This chapter is devoted to the study of equality-free saturated models. In this section we introduce the concept of equality-free saturated model (L^--saturated for short) and we prove, among other things, that L^--saturation is preserved by the relative relation, see Corollary 5.7, and the existence of infinite models $\mathfrak{A}$, which are L^--$|A|^+$-saturated, see Example 5.12. From this last fact it follows that L^--saturated models have a different behaviour than usual saturated models.

In the next section we see the relationship of the concept of L^--saturated model with the usual notions of homogeneous and universal model. Using the L^--ω-saturated models of a theory and the methods of back-and-forth introduced before, in the last section of this chapter we will give criteria for a theory to be L^--complete, to have quantifier elimination for L^- and for being L^--$\aleph_0$-categorical. The notion of saturated model was first introduced by M. Morley and R. Vaught in [MV62], as a special case of some structures in R. Jónsson's papers [Jon56] and [Jon60]. For more references on saturated models see [CK91], [Hod93b] and [Poi85].

First, we recall the notion of equality-free type over a set of parameters in a model, introduced in Section 2.2. Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure and D a subset of A. Given a cardinal κ, we say that a set p of formulas of $L^-(D)$ in the variables $\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ is an *L^--κ-type over D* in $\mathfrak{A}$ if p is consistent with $\mathrm{Th}^-(\mathfrak{A}_D)$. Moreover, we say that p is *L^--complete* if for any formula $\phi \in L^-(D)$ in the variables $\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$, $\phi \in p$ or $\neg\phi \in p$. We say that a κ-tuple $\overline{a} = (a_\alpha : \alpha \in \kappa)$ of elements of A *realizes* p if

$$\mathfrak{A}_D \models \phi[a_\alpha : \alpha \in \kappa],$$

for any $\phi \in p$, and we say that $\mathfrak{A}$ *omits* p if there is no κ-tuple in A realizing p. Finally, we say that an *L^--κ-type over D* in $\mathfrak{A}$ is realized in $\mathfrak{A}$ if there is κ-tuple of elements of

A that realizes p.

Observe that, for any set p of formulas of $L^-(D)$, p is consistent with $\mathrm{Th}^-(\mathfrak{A}_D)$ iff p is consistent with $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_D)$. Therefore, a set p of formulas of $L^-(D)$ is an L^--κ-type over D in $\mathfrak{A}$ iff p is a κ-type over D in $\mathfrak{A}$ and all the formulas of p are equality-free.

Definition 5.1 Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures and $r \subseteq A \times B$ a relation. For any formula $\phi \in L(\mathrm{dom}(r))$, $\phi = \phi(\bar{x}, a_1, \ldots, a_n)$, let Σ^r_ϕ be the following set of formulas of $L(\mathrm{rg}(r))$:

$$\{\phi(\bar{x}, b_1, \ldots, b_n) \in L(\mathrm{rg}(r)) : \textit{for every } i \in \{1, \ldots, n\},\ \langle a_i, b_i\rangle \in r\},$$

where $\phi(\bar{x}, b_1, \ldots, b_n)$ is obtained from ϕ by substituting b_i for a_i, for every $i \in \{1, \ldots, n\}$. Given a set p of formulas of $L(\mathrm{dom}(r))$, let $p^r = \bigcup_{\phi \in p} \Sigma^r_\phi$.

In particular, if $\mathfrak{A}$ is an L-structure, D a subset of A and p a set of formulas of $L^-(D)$, we denote by p^* the set p^r, where $r \subseteq A \times A^*$ is the relation defined by:

$$r = \left\{\langle d, [d]_{\Omega(\mathfrak{A})}\rangle : d \in D\right\}.$$

And we denote by D^* the set $\left\{[d]_{\Omega(\mathfrak{A})} : d \in D\right\}$.

Lemma 5.2 *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures, $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ and $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ sequences of elements of A and B respectively, and $r = \{\langle a_i, b_i\rangle : i \in I\}$. Assume that $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$. Then, for any cardinal κ and any set p of formulas of $L^-(\mathrm{dom}(r))$ in the variables $\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$,*

i) *p is an L^--κ-type over $\mathrm{dom}(r)$ in $\mathfrak{A}$ iff p^r is an L^--κ-type over $\mathrm{rg}(r)$ in $\mathfrak{B}$.*

ii) *If p is L^--complete, then p^r is L^--complete.*

Proof. We only prove the direction $\Rightarrow$) of i), the other direction and ii) are proved using analogous arguments. Assume that p is an L^--κ-type over $\mathrm{dom}(r)$ in $\mathfrak{A}$. Assume also, searching for a contradiction, that p^r is not consistent with $\mathrm{Th}^-(\mathfrak{B}_{\mathrm{rg}(r)})$. Then, there are $\phi_1, \ldots, \phi_k \in L^-$, $\phi_l = \phi_l(\bar{x}, y_1, \ldots, y_n)$, for every $l \in \{1, \ldots, k\}$, and elements $l_1, \ldots, l_n \in I$ such that $\phi_l(\bar{x}, a_{l_1}, \ldots, a_{l_n}) \in p$, for every $l \in 1, \ldots, k$, and

$$\mathrm{Th}^-(\mathfrak{B}_{\mathrm{rg}(r)}) \models \bigvee_{1 \leq l \leq k} \neg\phi_l(\bar{x}, b_{l_1}, \ldots, b_{l_n}),$$

then

$$\mathfrak{B} \models \bigvee_{1 \leq l \leq k} \neg\phi_l\,[b_{l_1}, \ldots, b_{l_n}].$$

Since $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv^{-} (\mathfrak{B}, \bar{b})$,

$$\mathfrak{A} \models \bigvee_{1 \leq l \leq k} \neg\phi_l \left[a_{l_1}, \ldots, a_{l_n}\right],$$

which is absurd because, by assumption, p is consistent with $\mathrm{Th}^{-}(\mathfrak{A}_{\mathrm{dom}(r)})$. $\square$

Next lemma gives us a characterization of L^{-}- complete types:

Lemma 5.3 *Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure, D a subset of A and κ a cardinal. For any set p of formulas of $L^{-}(D)$ in the variables $\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$, the following are equivalent:*

i) *p is an L^{-}-complete L^{-}-κ-type over D in $\mathfrak{A}$.*

ii) *There is $\mathfrak{A}'$ such that $D \subseteq A'$ and $\mathfrak{A}'_D \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A}_D)$ and there is a sequence $\overline{m} = (m_\alpha : \alpha \in \kappa)$ of elements of A' such that $p = \mathrm{tp}^{-}_{\mathfrak{A}'}(\overline{m}/D)$.*

iii) *There is $\mathfrak{A}'$ such that $D \subseteq A'$ and $\mathfrak{A}'_D \models \mathrm{Th}^{-}(\mathfrak{A}_D)$ and there is a sequence $\overline{m} = (m_\alpha : \alpha \in \kappa)$ of elements of A' such that $p = \mathrm{tp}^{-}_{\mathfrak{A}'}(\overline{m}/D)$.*

iv) *There is $\mathfrak{A}'$ such that $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{A}'$ and there is a sequence $\overline{m} = (m_\alpha : \alpha \in \kappa)$ of elements of A' such that $p = \mathrm{tp}^{-}_{\mathfrak{A}'}(\overline{m}/D)$.*

v) *There is $\mathfrak{A}'$ such that $\mathfrak{A} \preceq^{-} \mathfrak{A}'$ and there is a sequence $\overline{m} = (m_\alpha : \alpha \in \kappa)$ of elements of A' such that $p = \mathrm{tp}^{-}_{\mathfrak{A}'}(\overline{m}/D)$.*

Proof. ii) $\Rightarrow$ iii), iii) $\Rightarrow$ i), iv) $\Rightarrow$ v) and v) $\Rightarrow$ i) are clear. i) $\Rightarrow$ ii) is easy to prove using the fact that p is consistent with $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_D)$. i) $\Rightarrow$ iv) We use the fact that p is consistent with $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_A)$. The proof of this fact is straightforward. $\square$

Observe that in ii) and iii) of Lemma 5.3, we can take $\mathfrak{A}'$ such that $|A'| \leq \max(|D|, |L|, \aleph_0)$. And in iv) and v) we can take $\mathfrak{A}'$ such that $|A'| \leq \max(|A|, |L|, \aleph_0)$.

If we consider reduced structures, we can obtain the following version of Lemma 5.3:

Corollary 5.4 *Let $\mathfrak{A}$ be a reduced L-structure, D a subset of A and κ a cardinal. For any set p of formulas of $L^{-}(D)$ in the variables $\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$, the following are equivalent:*

i) *p is an L^{-}-complete L^{-}-κ-type over D in $\mathfrak{A}$.*

ii) *There is a reduced L-structure $\mathfrak{A}'$ such that $\mathfrak{A} \preceq^{-} \mathfrak{A}'$ and there is a sequence $\overline{m} = (m_\alpha : \alpha \in \kappa)$ of elements of A' such that $p = \mathrm{tp}^{-}_{\mathfrak{A}'}(\overline{m}/D)$.*

Proof. ii) $\Rightarrow$ i) is clear. i) $\Rightarrow$ ii) Since p is an L^--complete L^--κ-type over D in $\mathfrak{A}$, by Lemma 5.3, there is $\mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$ and a sequence $\bar{l} = (l_\alpha : \alpha \in \kappa)$ of elements of B such that $p = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(\bar{l}/D)$. Then, using an analogous proof to the proof of Lemma 2.24, it is easy to check that $\mathfrak{A}^* \precsim^- \mathfrak{B}^*$ and the map $j : \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{B}^*$ defined by:

$$j([a]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [a]_{\Omega(\mathfrak{B})},$$

for any $a \in A$, is an embedding that preserves all the equality-free formulas. If $\bar{k} = ([l_\alpha]_{\Omega(\mathfrak{B})} : \alpha \in \kappa)$, clearly $p^* = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}^*}(\bar{k}/D^*)$. Since $\mathfrak{A}$ is reduced there is an isomorphism $f : (\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \to (\mathfrak{A}^*, [a]_{\Omega(\mathfrak{A})})_{a\in A}$. Thus $j \circ f : (\mathfrak{A}, a)_{a\in A} \to (\mathfrak{B}^*, [a]_{\Omega(\mathfrak{B})})_{a\in A}$ is an embedding. Therefore, we can find an L-structure $\mathfrak{A}'$ such that $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{A}'$ and an isomorphism $h : (\mathfrak{A}', a)_{a\in A} \to (\mathfrak{B}^*, [a]_{\Omega(\mathfrak{B})})_{a\in A}$ such that $h \restriction A = j \circ f$. Let $\overline{m} = (h^{-1}([l_\alpha]_{\Omega(\mathfrak{B})}) : \alpha \in \kappa)$. Clearly $p = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}'}(\overline{m}/D)$ and since $\mathfrak{B}^*$ is reduced, $\mathfrak{A}'$ is also reduced. $\square$

Now we introduce the main concept of this section: equality-free saturated models.

Definition 5.5 Given an L-structure $\mathfrak{A}$ and a cardinal κ, we say that $\mathfrak{A}$ is L^--κ-saturated iff for any $D \subseteq A$ with $|D| < \kappa$, $\mathfrak{A}$ realizes every L^--1-type over D in $\mathfrak{A}$. And we say that $\mathfrak{A}$ is *L^--saturated* iff $\mathfrak{A}$ is L^--$|A|$-saturated.

Since any L^--κ-type can be extended to an L^--complete L^--κ-type, a model $\mathfrak{A}$ is L^--κ-saturated if for any $D \subseteq A$ with $|D| < \kappa$, $\mathfrak{A}$ realizes every L^--complete L^--1-type over D in $\mathfrak{A}$. Now we show that the relative relation preserves the L^--saturation of models:

Proposition 5.6 *Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure and κ a cardinal. Then, $\mathfrak{A}$ is L^--κ-saturated iff $\mathfrak{A}^*$ is L^--κ-saturated.*

Proof. $\Leftarrow$) Assume that $\mathfrak{A}^*$ is L^--κ-saturated. Let E be a subset of A of power less than κ and p an L^--1-type over E in $\mathfrak{A}$. Then, by Lemma 5.2, p^* is an L^--1-type over E^* in $\mathfrak{A}^*$. Since $\mathfrak{A}^*$ is L^--κ-saturated and $|E^*| < \kappa$, there is an element $x \in A^*$ that realizes p^*. Let $a \in A$ be a member of the equivalence class x. Clearly a is a realization of p in $\mathfrak{A}$.

$\Rightarrow$) Assume that $\mathfrak{A}$ is L^--κ-saturated. Let E be a subset of A^* of power less than κ and p an L^--1-type over E in $\mathfrak{A}^*$. We choose for any equivalence class $e \in E$ a representative $a_e \in e$. Let $D = \{a_e : e \in E\}$. For any formula $\phi \in p$, $\phi = \phi(\bar{x}, e_1, \ldots, e_n)$, let ϕ' be the formula of $L(D)$ obtained from ϕ by substituting a_{e_i} for e_i, for $i = 1, \ldots, n$. Let $q = \{\phi' : \phi \in p\}$, clearly $q^* = p$. By Lemma 5.2, q is an L^--1-type over D in $\mathfrak{A}$. Since $\mathfrak{A}$ is L^--κ-saturated and $|D| < \kappa$, there is an element $a \in A$ that realizes q. Then $[a]_{\Omega(\mathfrak{A})}$ is clearly a realization of p in $\mathfrak{A}^*$. $\square$

Corollary 5.7 *Let κ be a cardinal and $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ L-structures such that $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$. Then, $\mathfrak{A}$ is L^--κ-saturated iff $\mathfrak{B}$ is L^--κ-saturated.*

Proof. Assume that $\mathfrak{A}$ is L^--κ-saturated. By Proposition 5.6, $\mathfrak{A}^*$ is L^--κ-saturated. Since $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, by Proposition 2.17, $\mathfrak{A}^* \cong \mathfrak{B}^*$. Therefore, $\mathfrak{B}^*$ is L^--κ-saturated, and again by Proposition 5.6, $\mathfrak{B}$ is L^--κ-saturated. The other direction is analogous. □

Now we state some facts without proof. The proof of these statements is analogous to the proof in the case of logic with equality.

Facts:

(1) Given a cardinal κ, if $\mathfrak{A}$ is L^--κ-saturated, then for any $D \subseteq A$ with $|D| < \kappa$, $\mathfrak{A}$ realizes every L^--κ-type over D in $\mathfrak{A}$.

(3) Given a cardinal κ, any model has an L^--extension that is L^--κ-saturated.

(4) Any finite model is L^--κ-saturated, for any cardinal κ.

(5) Any two L^--equivalent L^--saturated models of the same power are relatives.

Observe that, from Fact (4) it follows that two reduced models of the same power that are L^--equivalent and L^--saturated are isomorphic. This is not true in general, to see it consider the following counterexample:

Example 5.8 Let E be a binary relation symbol and $\mathfrak{A} = (\omega_1, E^{\mathfrak{A}})$, where $E^{\mathfrak{A}}$ is the identity on ω_1. It is easy to check that $\mathfrak{A}$ is saturated. Since any L^--κ-type is a κ-type, any κ-saturated model is L^--κ-saturated. Hence, $\mathfrak{A}$ is L^--saturated and since $\mathfrak{A}(\omega) \sim \mathfrak{A}$ (where $\mathfrak{A}(\omega)$ is the structure defined in the Preliminaries), by Corollary 5.7, $\mathfrak{A}(\omega)$ is L^--saturated. $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{A}(\omega)$ have the same power, are L^--equivalent and L^--saturated, but clearly they are not isomorphic.

We made use in the previous counterexample of the fact that any saturated model is L^--saturated. But the converse in general is not true, we will see some counterexamples later. First let us see that, for reduced structures and finite and relational similarity types, the two concepts coincide:

Proposition 5.9 *Let L be a finite and relational similarity type and $\mathfrak{A}$ a reduced L-structure. Then, $\mathfrak{A}$ is L^--saturated iff $\mathfrak{A}$ is saturated.*

Proof. $\Leftarrow$) is clear. $\Rightarrow$) Suppose that $\mathfrak{A}$ is L^--saturated. Let D be a subset of A with $|D| < |A|$ and p an 1-type over D in $\mathfrak{A}$. Since L is finite and relational and $\mathfrak{A}$ is reduced, there is a finite set Γ of formulas of the form $\forall \overline{z}\, [\phi(x, \overline{z}) \leftrightarrow \phi(y, \overline{z})]$, where $\phi \in L^-$ is atomic, such that, if $\psi(x, y)$ is the conjunction of all the formulas in Γ, then

$$\mathfrak{A} \models \forall x \forall y\, [x \approx y \leftrightarrow \psi(x, y)]\,.$$

For any formula $\phi \in L(D)$, let $\phi' \in L^-(D)$ be the formula obtained from ϕ by replacing each appearance of a formula of the form $t_1 \approx t_2$ by an appearance of $\psi(t_1, t_2)$. Let $p' = \{\phi' : \phi \in p\}$. It is easy to check that p' is an L^--1-type over D in $\mathfrak{A}$. Since $\mathfrak{A}$ is L^--saturated, there is a realization of p', $a \in A$. Clearly, a is also a realization of p. □

The following examples show that we can not delete the restrictions of Proposition 5.9:

Example 5.10 We can not delete the restriction that L is relational in Proposition 5.9. Let $L = \{P, f\}$, where P is a monadic relation symbol and f is a monadic function symbol. Consider the L-structure $\mathfrak{B} = (\omega \cup \{b\}, P^{\mathfrak{B}}, f^{\mathfrak{B}})$, where $b \notin \omega$, $P^{\mathfrak{B}} = \{0\}$, $f^{\mathfrak{B}}(0) = 0$, $f^{\mathfrak{B}}(b) = b$ and for any $n \in \omega$, $f^{\mathfrak{B}}(n+1) = n$. Clearly $\mathfrak{B}$ is reduced. We show that $\mathfrak{B}$ is L^--saturated but it is not saturated. Let D be a subset of B with $|D| < |B|$ and p an L^--complete L^--1-type over D in $\mathfrak{B}$. Since $\mathfrak{B}$ is reduced, by Corollary 5.4, there are a reduced L-structure $\mathfrak{A}$ and an element $a \in A$ such that $\mathfrak{B} \preceq^- \mathfrak{A}$ and $p = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}}(a/D)$. Consider now the set $p_0 = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}}(a/A)$. All the formulas of p_0 are of the form $Pf^n x$, for some $n \in \omega$. Let Y be the set

$$Y = \{n \in \omega : Pf^n x \in p_0\}.$$

If $Y = \emptyset$,

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}}(b/A) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}}(a/A)$$

and then, since $\mathfrak{A}$ is reduced, $b = a$. Hence, p is realized in $\mathfrak{B}$. If $Y \neq \emptyset$, since $\forall x(Px \rightarrow Pfx) \in \mathrm{Th}^-(\mathfrak{B})$, given $n \in Y$, for any $m \geq n$, $m \in Y$. Let $k \in \omega$ be the minimum of Y, then

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}}(k/A) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}}(a/A),$$

and since $\mathfrak{A}$ is reduced, $k = a$. Hence, p is realized in $\mathfrak{B}$. Moreover, we have that $\mathfrak{B}$ is not saturated because the following 1-type is not realized in $\mathfrak{B}$:

$$p = \{x \not\approx b\} \cup \{\neg Pf^n x : n \in \omega\}.$$

Example 5.11 We can not delete the restriction that the model is reduced in Proposition 5.9. Let $\mathfrak{A}(\omega)$ be as in the Example 5.8. There we showed that $\mathfrak{A}(\omega)$ is L^--saturated. If we keep in mind the construction of $\mathfrak{A}(\omega)$ by means of the sets C_a of the Preliminaries, it is easy to check that $\mathfrak{A}(\omega)$ is not saturated because it does not satisfy the following 1-type:

$$\{x \not\approx a : a \in C_0\} \cup \{Exa : a \in C_0\}.$$

Example 5.12 We can not delete the restriction that L is finite in Proposition 5.9. Let $L = \{P_n : n \in \omega\}$, where for any $n \in \omega$, P_n is a monadic relation symbol and $\mathfrak{A} = (P(\omega), P_n^{\mathfrak{A}})_{n\in\omega}$, where for any $X \in P(\omega)$,

$$X \in P_n^{\mathfrak{A}} \quad \text{iff} \quad n \in X.$$

Clearly $\mathfrak{A}$ is reduced. First we show that $\mathfrak{A}$ is L^--saturated. In fact, we prove more than that, we show that $\mathfrak{A}$ is L^--$|A|^+$-saturated. Let D be a subset of A and p an L^--complete L^--1-type over D in $\mathfrak{A}$. Since $\mathfrak{A}$ is reduced, by Corollary 5.4, there are a reduced L-structure $\mathfrak{A}'$ and an element $a \in A'$ such that $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{A}'$ and $p = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}'}(a/D)$. Consider now the set $p_0 = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}'}(a/A')$. All the formulas of p_0 are of the form $P_n x$, for some $n \in \omega$. Let Y be the set

$$Y = \{n \in \omega : P_n x \in p_0\}.$$

Observe that $Y \in A$ and

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}'}(Y/A') = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}'}(a/A').$$

Therefore, since $\mathfrak{A}'$ is reduced, $Y = a$. Hence, p is realized in $\mathfrak{A}$. We conclude that $\mathfrak{A}$ is L^--$|A|^+$-saturated. However, $\mathfrak{A}$ is not saturated because the following 2-type is not realized in $\mathfrak{A}$

$$p = \{x \not\approx y\} \cup \{P_n x \leftrightarrow P_n y : n \in \omega\}.$$

The existence of L^--$|A|^+$-saturated models, like model $\mathfrak{A}$ in Example 5.12 let us see a property of L^--saturation that usual saturation do not share. An infinite structure $\mathfrak{A}$ can never be $|A|^+$-saturated because the following type can not be realized in $\mathfrak{A}$:

$$p = \{x \not\approx a : a \in A\}.$$

Now we give a characterization of L-structures $\mathfrak{A}$ that are L^--$|A|^+$-saturated. We obtain the following result: $\mathfrak{A}$ is L^--$|A|^+$-saturated iff any L^--extension of $\mathfrak{A}$ is relative of $\mathfrak{A}$. Later we will see that, if $\mathfrak{A}$ is L^--$|A|^+$-saturated, intuitively speaking, $\mathfrak{A}^*$ is the greatest reduced model of $\mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$. First, let us prove the following lemmas:

Lemma 5.13 *Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be L-structures. Suppose that $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$, $a \in A$ and $b \in B$. If $\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(a/A)$, then $\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(a/B)$.*

Proof. Suppose that $\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(a/A)$. Then, since for any equality-free atomic formula $\phi(x, \bar{z}) \in L$,

$$\forall \bar{z}(\phi(a, \bar{z}) \leftrightarrow \phi(y, \bar{z})) \in \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(a/A),$$

we have for any equality-free atomic formula $\phi(x, \bar{z}) \in L$,

$$\forall \bar{z}(\phi(a, \bar{z}) \leftrightarrow \phi(y, \bar{z})) \in \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A),$$

and thus,

$$B \models \forall \bar{z}(\phi(x, \bar{z}) \leftrightarrow \phi(y, \bar{z}))\,[a, b].$$

Therefore,

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(a/B). \ \square$$

Observe that in Lemma 5.13, if in addition $\mathfrak{B}$ is reduced and $\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(a/A)$, then $a = b$.

Lemma 5.14 *Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure. If $\mathfrak{A}$ is L^--$|A|^+$-saturated, then for any $\mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$ and any $b, b' \in B$, the following are equivalent:*

i) $\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b'/A)$.

ii) $\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b'/A)$.

iii) $\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b'/B)$.

iv) $\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b'/B)$.

Proof. iii) $\Rightarrow$ iv) and iv) $\Rightarrow$ i) are clear. i) $\Rightarrow$ ii) Suppose that $\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b'/A)$. Let $p = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A)$ and $p' = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b'/A)$. Since $\mathfrak{A}$ is L^--$|A|^+$-saturated and $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$, there are $a, a' \in A$ such that a is a realization of p and a' is a realization of p'. Therefore,

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(a/A) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b'/A) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(a'/A),$$

and since $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$,

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}}(a/A) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{A}}(a'/A).$$

Thus,

$$\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}}(a/A) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}}(a'/A)$$

and again since $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$,

$$\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(a/A) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(a'/A).$$

Consequently,

$$\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(a/A) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(a'/A) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b'/A).$$

ii) $\Rightarrow$ iii) Suppose that $p = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b'/A)$. Since $\mathfrak{A}$ is L^--$|A|^+$-saturated and $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$, there is $a \in A$ such that a is a realization of p. Therefore,

$$\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(a/A) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b'/A).$$

Then, by Lemma 5.13,

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(a/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b'/B). \ \square$$

Proposition 5.15 *Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure. The following are equivalent:*

i) *$\mathfrak{A}$ is L^--$|A|^+$-saturated.*

ii) *For any $\mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$ and any $b \in B$ there is $a \in A$ such that*

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(a/B).$$

iii) *For any $\mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$, the map $h : A^* \to B^*$ defined by:*

$$h([a]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [a]_{\Omega(\mathfrak{B})},$$

for any $a \in A$, is an isomorphism.

iv) *For any $\mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{A}$.*

v) *For any $\mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{A}$.*

Proof. iii) $\Rightarrow$ iv) and iv) $\Rightarrow$ v) are clear. i) $\Rightarrow$ ii) Let $\mathfrak{B}$ be such that $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$ and $b \in B$, consider $p = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/A)$. By i), since $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$ there is an element $a \in A$ such that a is a realization of p. Therefore, by Lemma 5.13,

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(a/B).$$

ii) $\Rightarrow$ iii) Let $\mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$. By ii), for any $b \in B - A$, we can choose $a_b \in A$ such that

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(a_b/B).$$

For any $b \in A$, let $a_b = b$. Then $(a_b : b \in B)$ and $(b : b \in B)$ are enumerations of A and B respectively, such that

$$(\mathfrak{A}, a_b)_{b \in B} \equiv^-_0 (\mathfrak{B}, b)_{b \in B}.$$

By the proof of vi) $\Rightarrow$ v) of Proposition 2.17, the map $h : A^* \to B^*$ defined by:

$$h([a_b]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [b]_{\Omega(\mathfrak{B})},$$

for any $b \in B$, is an isomorphism. But since $a_b \in [b]_{\Omega(\mathfrak{B})}$, for any $b \in B$, we have that $h' : A^* \to B^*$ defined by:

$$h'([a]_{\Omega(\mathfrak{A})}) = [a]_{\Omega(\mathfrak{B})},$$

for any $a \in A$, is an isomorphism.

v) $\Rightarrow$ i) Let $\mathfrak{B}$ be an L-structure such that $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$ and $\mathfrak{B}$ is $|A|^+$-saturated. Then $\mathfrak{B}$ is L^--$|A|^+$-saturated. By iv), $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{A}$ and by Proposition 5.6, $\mathfrak{A}$ is L^--$|A|^+$-saturated. □

Now we give another characterization of L^--$|A|^+$-saturated models:

Proposition 5.16 *Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure. The following are equivalent:*

i) $\mathfrak{A}$ *is* L^--$|A|^+$*-saturated.*

ii) $\mathfrak{A}$ *is* L^--ω*-saturated and for any* $\mathfrak{B}$ *such that* $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$ *and any* $b \in B$ *there is a finite* $E \subseteq A$ *such that for any* $c \in B$,

$$\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/E) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(c/E) \quad \textit{iff} \quad \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(c/B).$$

iii) *There is an infinite cardinal* $\kappa \leq |A|$ *such that* $\mathfrak{A}$ *is* L^--κ*-saturated and for any* $\mathfrak{B}$ *such that* $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$ *and any* $b \in B$ *there is* $E \subseteq A$ *with* $|E| < \kappa$ *such that for any* $c \in B$,

$$\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/E) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(c/E) \quad \textit{iff} \quad \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(c/B).$$

Proof. ii) $\Rightarrow$ iii) is clear. i) $\Rightarrow$ ii) If $\mathfrak{A}$ is L^--$|A|^+$-saturated, then $\mathfrak{A}$ is L^--ω-saturated. Let $\mathfrak{B}$ be such that $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$ and $b \in B$. Since $\mathfrak{A}$ is L^--$|A|^+$-saturated, by Proposition 5.15, there is $a \in A$ such that

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(a/B)$$

and therefore,

$$\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(a/B).$$

Let $E = \{a\}$ and suppose that $c \in B$. If

$$\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/E) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(c/E),$$

then, for any equality-free atomic formula $\phi(x, \bar{z}) \in L$, since

$$\forall \bar{z}(\phi(a, \bar{z}) \leftrightarrow \phi(y, \bar{z})) \in \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/E)$$

we have that

$$\forall \bar{z}(\phi(a, \bar{z}) \leftrightarrow \phi(y, \bar{z})) \in \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(c/E),$$

and then,

$$B \models \forall \bar{z}(\phi(x, \bar{z}) \leftrightarrow \phi(y, \bar{z}))\,[a, c]\,.$$

Consequently,

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(c/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(a/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B).$$

Conversely, if

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(c/B),$$

then

$$\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(c/B),$$

and thus,

$$\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/E) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(c/E).$$

iii) $\Rightarrow$ i) Let p be an L^--1-type over $D \subseteq A$ in $\mathfrak{A}$. Assume that p is L^--complete. By Lemma 5.3 there is $\mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$ and $b \in B$ such that $p = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/D)$. By iii), there is $E \subseteq A$ with $|E| < \kappa \leq |A|$ such that for any $c \in B$,

$$\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/E) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(c/E) \quad \text{iff} \quad \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(c/B).$$

Let $q = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/E)$. Since $\mathfrak{A}$ is L^--κ-saturated and $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$, there is an element $a \in A$ such that a is a realization of q. Therefore,

$$\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/E) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(a/E),$$

and then, by assumption,

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(a/B),$$

consequently,

$$\mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(b/D) = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(a/D)$$

and a is a realization of p. Then, we can conclude that $\mathfrak{A}$ is L^--$|A|^+$-saturated. □

We end this section with an example of application of Proposition 5.16.

Lemma 5.17 *Let L be a similarity type such that the arity of all the symbols in L is ≤ 1. Then, any L^--ω-saturated structure $\mathfrak{A}$ is L^--$|A|^+$-saturated.*

Proof. Observe that, in case that the arity of all the symbols in L is ≤ 1, for any L-structure $\mathfrak{B}$, the following holds:

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/\emptyset) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(c/\emptyset) \quad \text{iff} \quad \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(c/B).$$

for any $b, c \in B$. Consequently, by Proposition 5.16, for any L-structure $\mathfrak{A}$, if $\mathfrak{A}$ is L^--ω-saturated, then $\mathfrak{A}$ is L^--$|A|^+$-saturated. □

5.2 L^--universal and L^--homogeneous models

In [MV62] M. Morley and R. Vaught introduced the concept of universal and of homogeneous models, adapting some notions in R. Jónsson's papers [Jon56] and [Jon60]. The concept of strongly homogeneous model is due to S. Shelah, see [She78]. In this section we introduce the parallel concepts, L^--universal, L^--homogeneous and strongly L^--homogeneous models, for equality-free logic. We see that the relative relation preserves L^--universality, L^--homogeneity and strong L^--homogeneity of models.

In Corollary 5.33 we characterize the L^--saturated models in terms of L^--universal and L^--homogeneous models. Finally, we examine the relationship of these concepts with the corresponding usual ones for logic with equality. In particular, we prove in Proposition 5.39 that any strongly L^--homogeneous and reduced structure is strongly homogeneous and that the converse is not true.

Let us remember the definition of universal model. Given an L-structure $\mathfrak{A}$ and a cardinal κ, it is said that $\mathfrak{A}$ is *κ-universal* iff for any L-structure $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ with $|B| < \kappa$, there is an elementary embedding $f : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$. A structure $\mathfrak{A}$ is *universal* if it is $|A|^+$-universal. We define the corresponding notion for equality-free logic.

Definition 5.18 *Given an L-structure $\mathfrak{A}$ and a cardinal κ, we say that $\mathfrak{A}$ is* L^--κ-universal *iff for any L-structure $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ with $|B| < \kappa$, there is a L^--map $f : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$. And we say that $\mathfrak{A}$ is* L^--universal *if it is L^--$|A|^+$-universal.*

Proposition 5.19 *Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure and κ a cardinal. The following are equivalent:*

i) *$\mathfrak{A}$ is L^--κ-universal.*

ii) *For any $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ with $|B| < \kappa$, there is an expansion of $\mathfrak{A}$ that satisfies* $\mathsf{eldiag}^-(\mathfrak{B})$.

iii) *For any $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ with $|B| < \kappa$, there is an enumeration of B, $\bar{b} = (b_i : i \in I)$, and a sequence of elements of A, $\bar{a} = (a_i : i \in I)$, such that*

$$(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \bar{b}).$$

iv) *For any $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ with $|B| < \kappa$, $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{C}$, for some $\mathfrak{C} \preceq^- \mathfrak{A}$.*

v) *For any $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ with $|B| < \kappa$, $\mathfrak{B} \in \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}_\mathbf{S}\mathbf{S}^{\preceq^-}(\mathfrak{A})$.*

vi) *For any $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ with $|B| < \kappa$, $\mathfrak{B} \in \mathbf{H}_\mathbf{S}\mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}^{\preceq^-}(\mathfrak{A})$.*

vii) *For any $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ with $|B| < \kappa$, $\mathfrak{B}^* \precsim^- \mathfrak{A}^*$.*

Proof. By Proposition 2.26. □

Observe that, in case that L is relational, any L^--map is a strict homomorphism. Therefore, in this case, an L-structure $\mathfrak{A}$ is L^--κ-universal iff for any L-structure $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ with $|B| < \kappa$, there is a strict homomorphism $f : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$.

Now we see that the relative relation preserves the L^--universality of models.

Proposition 5.20 *Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure and κ a cardinal. Then, $\mathfrak{A}$ is L^--κ-universal iff $\mathfrak{A}^*$ is L^--κ-universal.*

Proof. $\Rightarrow$) Suppose that $\mathfrak{A}$ is L^--κ-universal. Let $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A}^*)$ with $|B| < \kappa$. Then $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ and since $\mathfrak{A}$ is L^--κ-universal, by Proposition 5.19, $\mathfrak{B}^* \precsim^- \mathfrak{A}^*$. And since $(\mathfrak{A}^*)^* \cong \mathfrak{A}^*$, we have that $\mathfrak{B}^* \precsim^- (\mathfrak{A}^*)^*$. We can conclude, by Proposition 5.19, that $\mathfrak{A}^*$ is L^--κ-universal. The proof of the other direction is analogous. $\square$

Corollary 5.21 *Let κ be a cardinal and $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ L-structures such that $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$. Then, $\mathfrak{A}$ is L^--κ-universal iff $\mathfrak{B}$ is L^--κ-universal.*

Proof. By Proposition 5.20. $\square$

Let us see the relationship between the notions of L^--saturated and L^--universal model.

Proposition 5.22 *Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure and κ a cardinal. If $\mathfrak{A}$ is L^--κ-saturated, then $\mathfrak{A}$ is L^--κ^+-universal.*

Proof. Assume that $\mathfrak{A}$ is L^--κ-saturated and let $\mathfrak{B}$ be an L-structure such that $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ and $|B| = \lambda \leq \kappa$. Let $\bar{b} = (b_\alpha : \alpha \in \lambda)$ be an enumeration of B without repetitions and $p = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{B}}(\bar{b}/\emptyset)$. Since $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$, p is an L^--λ-type over $\emptyset$ in $\mathfrak{A}$. Therefore, since $\lambda \leq \kappa$ and $\mathfrak{A}$ is L^--κ-saturated, p is realized in $\mathfrak{A}$. Let $\bar{a} = (a_\alpha : \alpha \in \lambda)$ be a realization of p in $\mathfrak{A}$. Then,

$$(\mathfrak{A}, \bar{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \bar{b}).$$

Therefore, by Proposition 5.19, $\mathfrak{A}$ is L^--κ^+-universal. $\square$

Corollary 5.23 *Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure. If $\mathfrak{A}$ is L^--saturated, then $\mathfrak{A}$ is L^--universal.*

Proof. By Proposition 5.22. $\square$

Observe that, for some similarity types, it is possible to have structures which are L^--κ-universal, for every cardinal κ. Let $\mathfrak{A}$ be as in Example 5.12, since $\mathfrak{A}$ is L^--$|A|^+$-saturated, $\mathfrak{A}$ is L^--κ-saturated, for every cardinal κ. Then, by Proposition 5.22, $\mathfrak{A}$ is L^--κ-universal, for every cardinal κ. In these cases, by Proposition 5.19 vii), we can say, intuitively speaking, that $\mathfrak{A}^*$ is the greatest reduced model of $\mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$.

Now we will see the relationship between the notion of L^--universal model and the usual notion of universal model.

Proposition 5.24 *Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure such that* $\max(|L|, \aleph_0) \leq |A|$. *If $\mathfrak{A}$ is universal, then $\mathfrak{A}$ is L^--universal.*

Proof. Suppose that $\mathfrak{B} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ and $|B| \leq |A|$. By the remark after Proposition 3.27, since $\max(|L|, \aleph_0) \leq |A|$, there are L-structures $\mathfrak{C} \succeq \mathfrak{A}$ and $\mathfrak{D} \succeq \mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{D}$ and $\max(|C|, |D|) \leq |A|$. By Lemma 2.24, $\mathfrak{B}^* \precsim^- \mathfrak{D}^*$ and since $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}^* \precsim^- \mathfrak{C}^*$. Since $\mathfrak{C} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$, $|C| \leq |A|$ and $\mathfrak{A}$ is universal we obtain that $\mathfrak{C} \precsim \mathfrak{A}$. Therefore, by Lemma 2.24, $\mathfrak{C}^* \precsim^- \mathfrak{A}^*$ and then $\mathfrak{B}^* \precsim^- \mathfrak{A}^*$. We conclude that $\mathfrak{A}$ is L^--universal. □

We show that the converse of Corollary 5.23 is not true.

Example 5.25 Let $\mathfrak{A}$ be the model obtained by substituting every element in $\eta + 1$ (where η is the order type of the rationals) for a copy of the integers with its usual strict order. It is known that this model is universal but it is not saturated. By Proposition 5.24, $\mathfrak{A}$ is L^--universal and by Proposition 5.9, since L is finite and relational and $\mathfrak{A}$ is reduced we have that $\mathfrak{A}$ is not L^--saturated.

Observe also that the converse of Proposition 5.24 is not true. Let $\mathfrak{B}$ be as in Example 5.10. There, we proved that $\mathfrak{B}$ is L^--saturated. Then, by Corollary 5.23, $\mathfrak{B}$ is L^--universal. Let us see that $\mathfrak{B}$ is not universal. Consider the 1-type

$$p = \{x \not\approx b\} \cup \{\neg P f^n x : n \in \omega\},$$

p is not realized in $\mathfrak{B}$. Let $\mathfrak{A}$ be an elementary extension of $\mathfrak{B}$ such that $|B| = |A|$ and p is realized in $\mathfrak{A}$, it is a known fact that such an extension exists. Clearly $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{B})$ and $\mathfrak{A} \not\precsim \mathfrak{B}$. Thus, $\mathfrak{B}$ is not universal.

Now we introduce the notions of L^--homogeneous and strongly L^--homogeneous model. We show the relationship of these concepts with the usual notions of homogeneous and strongly homogeneous and also with the notion of L^--saturated model, introduced before. Let us recall the definition of homogeneous model. Given an L-structure $\mathfrak{A}$ and a cardinal κ, $\mathfrak{A}$ is *κ-homogeneous* iff for any two sequences $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ and $\overline{a}' = (a'_i : i \in I)$ of elements of A such that $|I| < \kappa$ and

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv (\mathfrak{A}, \overline{a}'),$$

it happens that for any $d \in A$ there is $d' \in A$ such that

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}, d) \equiv (\mathfrak{A}, \overline{a}', d').$$

A structure $\mathfrak{A}$ is *homogeneous* if it is $|A|$-homogeneous. Now we introduce the corresponding notion for equality-free logic.

Definition 5.26 Given an L-structure $\mathfrak{A}$ and a cardinal κ, we say that $\mathfrak{A}$ is L^--κ-*homogeneous* iff for any two sequences $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ and $\overline{a}' = (a'_i : i \in I)$ of elements of A such that $|I| < \kappa$ and

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}'),$$

it happens that for any $d \in A$ there is $d' \in A$ such that

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}, d) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}', d').$$

We say that $\mathfrak{A}$ is L^--homogeneous if it is L^--$|A|$-homogeneous.

Now we see that the relative relation preserves the L^--homogeneity of models.

Proposition 5.27 *Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure and κ a cardinal. Then $\mathfrak{A}$ is L^--κ-homogeneous iff $\mathfrak{A}^*$ is L^--κ-homogeneous.*

Proof. $\Rightarrow$) Suppose that $\mathfrak{A}$ is L^--κ-homogeneous and let $\overline{e} = (e_k : k \in K)$ and $\overline{e}' = (e'_k : k \in K)$ be sequences of elements of A^* such that $|K| < \kappa$ and

$$(\mathfrak{A}^*, \overline{e}) \equiv^- (\mathfrak{A}^*, \overline{e}').$$

Let $d \in A^*$. We choose for any equivalence class $x \in A^*$, a representative $a_x \in A$. Consider now the corresponding sequences $\overline{a}_e = (a_{e_k} : k \in K)$ and $\overline{a}_{e'} = (a_{e'_k} : k \in K)$ of elements of A, we have that

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}_e) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}_{e'}).$$

Since $\mathfrak{A}$ is L^--κ-homogeneous and $a_d \in A$, there is $a' \in A$ such that

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}_e, a_d) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}_{e'}, a'),$$

therefore,

$$(\mathfrak{A}^*, \overline{e}, d) \equiv^- (\mathfrak{A}^*, \overline{e}', [a']_{\Omega(\mathfrak{A})}).$$

We can conclude that $\mathfrak{A}^*$ is L^--κ-homogeneous. The proof of the other direction is analogous. $\square$

Corollary 5.28 *Let κ be a cardinal and $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ L-structures such that $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$. Then, $\mathfrak{A}$ is L^--κ-homogeneous iff $\mathfrak{B}$ is L^--κ-homogeneous.*

Proof. By Proposition 5.27. $\square$

Let us see the relationship between the concepts of L^--saturated and L^--homogeneous.

Proposition 5.29 *Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure and κ a cardinal. If $\mathfrak{A}$ is L^--κ-saturated, then $\mathfrak{A}$ is L^--κ-homogeneous.*

Proof. Suppose that $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ and $\overline{a}' = (a'_i : i \in I)$ are sequences of elements of A such that

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}')$$

and $|I| < \kappa$. Let $r = \{\langle a_i, a'_i \rangle : i \in I\}$. Given an element $d \in A$, consider the type $p = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}}(d/\mathrm{dom}(r))$. Since $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}')$, by Lemma 5.2, p^r is an L^--1-type over $\mathrm{rg}(r)$ in $\mathfrak{A}$. Since $\mathfrak{A}$ is L^--κ-saturated, there is a realization $d' \in A$ of p^r. Then,

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}, d) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}', d'). \ \Box$$

Corollary 5.30 *Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure. If $\mathfrak{A}$ is L^--saturated, then $\mathfrak{A}$ is L^--homogeneous.*

Proof. By Proposition 5.29. $\Box$

The following example shows that the converse of Corollary 5.30 is not true:

Example 5.31 Let $\mathfrak{A} = (\omega, <, n)_{n\in\omega}$, where $<$ is the usual strict order in ω. $\mathfrak{A}$ is L^--homogeneous because if $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ and $\overline{a}' = (a'_i : i \in I)$ are two sequences of elements of A such that

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}'),$$

it is easy to check that for any $i \in I$, $a_i = a'_i$, and thus, for any $d \in A$,

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}, d) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}', d).$$

But $\mathfrak{A}$ is not L^--saturated, because the following L^--1-type is not realized in $\mathfrak{A}$

$$\{n < x : n \in \omega\}.$$

Now we give a characterization of L^--saturated models in terms of L^--homogeneous and L^--universal models.

Proposition 5.32 *Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure and κ a cardinal with* $\max(|L|, \aleph_0) \leq \kappa$. *Then $\mathfrak{A}$ is L^--κ-saturated iff $\mathfrak{A}$ is L^--κ-homogeneous and L^--κ^+-universal.*

Proof. $\Rightarrow$) By Propositions 5.22 and 5.29. $\Leftarrow$) Suppose that $\mathfrak{A}$ is L^--κ-homogeneous and L^--κ^+-universal. Let D be a subset of A with $|D| < \kappa$ and p an L^--complete L^--1-type over D in $\mathfrak{A}$. By Lemma 5.3 and the remark that follows it, since $\max(|L|, \aleph_0) \leq \kappa$, there is $\mathfrak{A}'$ such that $D \subseteq A'$, $\mathfrak{A}'_D \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A}_D)$ and $|A'| \leq \kappa$, and there is $b \in A'$ such that $p = \mathrm{tp}^-_{\mathfrak{A}'}(b/D)$. Since $|A'| \leq \kappa$, $\mathfrak{A}' \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A})$ and $\mathfrak{A}$ is L^--κ^+-universal, by Proposition 5.19, there is an enumeration of A', $\overline{a}' = (a'_i : i \in I)$, and a sequence of elements of A, $\overline{a} = (a_i : i \in I)$, such that

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{A}', \overline{a}').$$

Let $b = a'_l$ in the enumeration $\overline{a}'$ of A', $\overline{d}' = (a'_{i_j} : j \in J)$ an enumeration of D without repetitions such that $\overline{d}' \subseteq \overline{a}'$, and let $\overline{d} = (a_{i_j} : j \in J)$ be the corresponding elements in the enumeration $\overline{a}$ of A. Then,

$$(\mathfrak{A}, \overline{d}, a_l) \equiv^- (\mathfrak{A}', \overline{d}', a'_l), \tag{5.1}$$

and therefore, since $D \subseteq A'$ and $\mathfrak{A}'_D \models \mathrm{Th}^-(\mathfrak{A}_D)$,

$$(\mathfrak{A}, \overline{d}') \equiv^- (\mathfrak{A}', \overline{d}').$$

Then, by (5.1),

$$(\mathfrak{A}, \overline{d}') \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{d}).$$

Hence, since $\mathfrak{A}$ is L^--κ-homogeneous, $|J| < \kappa$ and $a_l \in A$, there is $e \in A$ such that

$$(\mathfrak{A}, \overline{d}', e) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{d}, a_l),$$

and then, by (5.1),

$$(\mathfrak{A}, \overline{d}', e) \equiv^- (\mathfrak{A}', \overline{d}', a'_l).$$

Thus, e is a realization of p in $\mathfrak{A}$. We can conclude that $\mathfrak{A}$ is L^--κ-saturated. □

Observe that in the previous proposition, if $\max(|L|, \aleph_0) < \kappa$ we only need $\mathfrak{A}$ to be L^--κ-universal.

Corollary 5.33 *Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure with $\max(|L|, \aleph_0) \leq |A|$. Then $\mathfrak{A}$ is L^- saturated iff $\mathfrak{A}$ is L^--homogeneous and L^--universal.*

Proof. By Proposition 5.32. □

Let us recall the definition of strongly homogeneous model. Given an L-structure $\mathfrak{A}$ and a cardinal κ, $\mathfrak{A}$ is *strongly κ-homogeneous* iff for any two sequences $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ and $\overline{a}' = (a'_i : i \in I)$ of elements of A such that $|I| < \kappa$ and

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv (\mathfrak{A}, \overline{a}'),$$

there are enumerations $\overline{d} = (d_j : j \in J)$ and $\overline{d}' = (d'_j : j \in J)$ of A such that

$$(\mathfrak{A}, \overline{d}) \equiv (\mathfrak{A}, \overline{d}')$$

and $\overline{a} \subseteq \overline{d}$ and $\overline{a}' \subseteq \overline{d}'$. A structure $\mathfrak{A}$ is *strongly homogeneous* if it is strongly $|A|$-homogeneous.

Observe that if we have a model $\mathfrak{A}$ and enumerations $\overline{d} = (d_j : j \in J)$ and $\overline{d}' = (d'_j : j \in J)$ of A such that

$$(\mathfrak{A}, \overline{d}) \equiv (\mathfrak{A}, \overline{d}'),$$

the map $h : A \to A$ defined by: $h(d_j) = d'_j$, for any $j \in J$, is an automorphism. Now we introduce the corresponding notion for equality-free logic.

Definition 5.34 Given an L-structure $\mathfrak{A}$ and a cardinal κ, we say that $\mathfrak{A}$ is strongly L^--κ-homogeneous iff for any two sequences $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ and $\overline{a}' = (a'_i : i \in I)$ of elements of A such that $|I| < \kappa$ and

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}'),$$

there are enumerations $\overline{d} = (d_j : j \in J)$ and $\overline{d}' = (d'_j : j \in J)$ of A such that

$$(\mathfrak{A}, \overline{d}) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{d}')$$

and $\overline{a} \subseteq \overline{d}$ and $\overline{a}' \subseteq \overline{d}'$. We say that $\mathfrak{A}$ is strongly L^--homogeneous if it is strongly L^--$|A|$-homogeneous.

Observe that if we have a model $\mathfrak{A}$ and enumerations $\overline{d} = (d_j : j \in J)$ and $\overline{d}' = (d'_j : j \in J)$ of A such that

$$(\mathfrak{A}, \overline{d}) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{d}'),$$

the relation $R = \left\{\langle d_j, d'_j\rangle : j \in J\right\}$ is a relative correspondence.

We have that strong L^--homogeneity is preserved by the relative relation.

Proposition 5.35 *Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure and κ a cardinal. Then, $\mathfrak{A}$ is strongly L^--κ-homogeneous iff $\mathfrak{A}^*$ is strongly L^--κ-homogeneous.*

Proof. Following the same kind of arguments used in the proof of Proposition 5.27. □

Corollary 5.36 *Let κ be a cardinal and $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ L-structures such that $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$. Then, $\mathfrak{A}$ is strongly L^--κ-homogeneous iff $\mathfrak{B}$ is strongly L^--κ-homogeneous.*

Proof. By Proposition 5.35. □

Observe that, by definition, any strongly L^--κ-homogeneous model is L^--κ-homogeneous, but the converse is not true. Let $\mathfrak{A} = \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\eta}$, where $\boldsymbol{\lambda}$ is the order type of the reals and $\boldsymbol{\eta}$ is the order type of the rationals. Since the similarity type is finite and relational and $\mathfrak{A}$ is reduced, by Proposition 2.15, for any two sequences $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ and $\overline{a}' = (a'_i : i \in I)$ of elements of A,

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}') \quad \text{iff} \quad (\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv (\mathfrak{A}, \overline{a}'). \tag{5.2}$$

It is known that this model is ω-homogeneous but not strongly ω-homogeneous. Using this fact and (5.2) it is easy to check that $\mathfrak{A}$ is L^--ω-homogeneous but not strongly L^--ω-homogeneous.

Proposition 5.37 *Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure. Then, $\mathfrak{A}$ is strongly L^--homogeneous iff $\mathfrak{A}$ is L^--homogeneous.*

Proof. By the same kind of arguments of the analogous result for strongly homogeneous models.

Now let us see the relationship between the concepts of L^--saturated and strongly L^--homogeneous.

Corollary 5.38 *Let $\mathfrak{A}$ be an L-structure. If $\mathfrak{A}$ is L^--saturated, then $\mathfrak{A}$ is strongly L^--homogeneous.*

Proof. By Corollary 5.30 and Proposition 5.37. □

Observe that the converse of Corollary 5.38 is not true, the structure $\mathfrak{A}$ in Example 5.31 is L^--homogeneous and consequently, strongly L^--homogeneous, but it is not L^--saturated.

Finally we see the relationship among the concepts of L^--homogeneous, strongly L^--homogeneous and the corresponding notions in logic with equality, paying special attention to reduced structures.

Proposition 5.39 *Let $\mathfrak{A}$ be a reduced L-structure. If $\mathfrak{A}$ is strongly L^--homogeneous, then $\mathfrak{A}$ is strongly homogeneous.*

Proof. Suppose that $\mathfrak{A}$ is reduced and strongly L^--homogeneous and $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ and $\overline{a}' = (a'_i : i \in I)$ are two sequences of elements of A such that $|I| < |A|$ and

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv (\mathfrak{A}, \overline{a}').$$

Then,

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}'),$$

and since $\mathfrak{A}$ is strongly L^--homogeneous, there are enumerations $\overline{d} = (d_j : j \in J)$ and $\overline{d}' = (d'_j : j \in J)$ of A, such that

$$(\mathfrak{A}, \overline{d}) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{d}')$$

and $\overline{a} \subseteq \overline{d}$ and $\overline{a}' \subseteq \overline{d}'$. But since $\mathfrak{A}$ is reduced, by the proof of vi) $\Rightarrow$ v) of Proposition 2.17, there is an automorphism $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ such that, for any $j \in J$, $f(d_j) = d'_j$. Therefore,

$$(\mathfrak{A}, \overline{d}) \equiv (\mathfrak{A}, \overline{d}').$$

Consequently, $\mathfrak{A}$ is strongly homogeneous. □

Corollary 5.40 *Let $\mathfrak{A}$ be a reduced L-structure. If $\mathfrak{A}$ is L^--homogeneous, then $\mathfrak{A}$ is homogeneous.*

Proof. By Proposition 5.39, because any L^--homogeneous structure is strongly L^--homogeneous and any strongly homogeneous structure is homogeneous. □

Corollary 5.41 *Let $\mathfrak{A}$ be a reduced L-structure. If $\mathfrak{A}$ is L^--saturated, then $\mathfrak{A}$ is strongly homogeneous.*

Proof. By Corollary 5.38 and Proposition 5.39. □

Observe that in Proposition 5.39 we can not delete the restriction that $\mathfrak{A}$ is reduced:

Example 5.42 Let $L = \{E\}$, where E is a binary relation symbol and $\mathfrak{A} = (\omega_1 + \omega, E^{\mathfrak{A}})$, where $E^{\mathfrak{A}}$ is the equivalence relation defined by: $\langle \alpha, \beta \rangle \in E^{\mathfrak{A}}$ iff either ($\alpha \leq \omega_1$ and $\beta \leq \omega_1$) or ($\alpha > \omega_1$ and $\beta > \omega_1$), for any $\alpha, \beta \in \omega_1 + \omega$. It is easy to check that $\mathfrak{A}$ is non-reduced and that $\mathfrak{A}^*$ is finite. Then, $\mathfrak{A}^*$ is L^--saturated and consequently, by Corollary 5.7, $\mathfrak{A}$ is L^--saturated. Then, by Corollary 5.38, $\mathfrak{A}$ is strongly L^--homogeneous. But $\mathfrak{A}$ is not strongly homogeneous: take $\alpha \leq \omega_1$ and $\beta > \omega_1$ and I the set of all finite partial isomorphisms p such that $p(\alpha) = \beta$. It is easy to see that $I : (\mathfrak{A}, \alpha) \cong_p (\mathfrak{A}, \beta)$. Therefore,

$$(\mathfrak{A}, \alpha) \equiv (\mathfrak{A}, \beta).$$

But, since the equivalence classes of α and β are of different power, there is no automorphism $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ such that $h(\alpha) = \beta$.

Observe also that the converse of Proposition 5.39 is not true:

Example 5.43 Let $L = \{P, E, f\}$, where P is a monadic relation symbol, E a binary relation symbol and f a monadic function symbol. Let $\mathfrak{A} = (A, P^{\mathfrak{A}}, E^{\mathfrak{A}}, f^{\mathfrak{A}})$, where $A = M \cup M' \cup \{b\}$, $M = \{a_n : n \in \omega\}$, $M' = \{a'_n : n \in \omega\}$, $b \notin M \cup M'$ and $M \cap M' = \emptyset$. Let $P^{\mathfrak{A}} = \{a_0, a'_0\}$ and for any $n \in \omega$, $f^{\mathfrak{A}}(a_{n+1}) = a_n$, $f^{\mathfrak{A}}(a_0) = a_0$, $f^{\mathfrak{A}}(a'_{n+1}) = a'_n$, $f^{\mathfrak{A}}(a'_0) = a'_0$ and $f^{\mathfrak{A}}(b) = b$. Finally, let

$$E^{\mathfrak{A}} = [(M' \cup \{b\}) \times (M' \cup \{b\})] \cup [M \times M].$$

Clearly $\mathfrak{A}$ is reduced. Observe that $\mathfrak{A}$ is strongly homogeneous: suppose that $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ and $\overline{a}' = (a'_i : i \in I)$ are sequences of elements of A such that

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv (\mathfrak{A}, \overline{a}').$$

It is easy to check that, in this case, for any $i \in I$, $a_i = a'_i$, therefore the identity is the desired automorphism. But $\mathfrak{A}$ is not strongly L^--homogeneous. In order to show this we prove that

$$(\mathfrak{A}, a_0) \sim_f (\mathfrak{A}, a'_0).$$

Let $n \in \omega$, we show that

$$(\mathfrak{A}, a_0) \sim_n (\mathfrak{A}, a'_0).$$

Let $X = \{\langle a_i, a'_i\rangle : i \in \omega\} \cup \{\langle a'_i, a_i\rangle : i \in \omega\}$ and for any $l \in \omega$, let

$$Y_l = X \cup \{\langle b, a_{k+1}\rangle, \langle a_{k+1}, b\rangle : k \geq l\}.$$

Now, for any $m \leq n$, let

$$I_m = \{p \cup \{\langle a_0, a'_0\rangle\} : p \subseteq Y_l, \ \textit{for some } l \geq m\}.$$

Clearly $(I_m)_{m \leq n}$ satisfies conditions i) $-$ v) of the definition of $\sim_n$. Therefore,

$$(\mathfrak{A}, a_0) \sim_f (\mathfrak{A}, a'_0).$$

Consequently,

$$(\mathfrak{A}, a_0) \equiv^- (\mathfrak{A}, a'_0),$$

but there is not $d \in A$ such that

$$(\mathfrak{A}, a_0, d) \equiv^- (\mathfrak{A}, a'_0, b).$$

We conclude that $\mathfrak{A}$ is not L^--homogeneous. Therefore, $\mathfrak{A}$ is not strongly L^--homogeneous.

Notice that, since the structure $\mathfrak{A}$ of the previous counterexample is homogeneous but not L^--homogeneous, we have that the converse of Corollary 5.40 is not true.

5.3 L^--complete theories

Theories axiomatized by a set of equality-free sentences were characterized in Chapter 4. In this section we study some properties of this kind of theories, see Propositions 5.44, 5.45 and 5.46. We introduce the notions of L^--complete and of L^--$\aleph_0$-categorical theory and we develope the technique of elimination of quantifiers for L^-. By using L^--ω-saturated models and the methods of back-and-forth introduced before, we present characterizations of this concepts, see Propositions 5.48, 5.52, 5.56 and 5.59. We end the section with the study of some theories that are complete and axiomatized by a set of equality-free sentences. For references on the method of elimination of quantifiers and on categoricity of theories see [CK91], [Hod93b] and [Poi85].

In the following propositions, we consider two characteristics of consistent theories axiomatized by a set of equality-free sentences. First: if they have only infinite models, then they are not κ-categorical, for any infinite cardinal κ, and second: if the similarity type is either finite and relational or contains function symbols, they are not complete.

Proposition 5.44 *If T is a set of equality-free sentences with only infinite models, then for any infinite cardinal κ, T is not κ-categorical.*

Proof. Let κ be an infinite cardinal such that there is a model $\mathfrak{A}$ of T of power κ. We show that there is a model $\mathfrak{B}$ of T of power κ such that $\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{B}$. In order to prove that $\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{B}$, we will distinguish two cases, in both cases we use the following fact:

Fact: If $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ is an isomorphism from $\mathfrak{A}$ onto $\mathfrak{B}$, for any $a \in A$, the restriction of h to $[a]_{\Omega(\mathfrak{A})}$ is a bijection between $[a]_{\Omega(\mathfrak{A})}$ and $[h(a)]_{\Omega(\mathfrak{B})}$.

Case I: For any $a \in A$, $\left|[a]_{\Omega(\mathfrak{A})}\right| = \kappa$. Let $\mathfrak{B}$ be any structure obtained from $\mathfrak{A}^*$ in the way defined in the Preliminaries, by means of the sequence of cardinals $(\mu_b : b \in A)$ defined by: for any $b \in A$,

$$\mu_b = \begin{cases} \kappa, & \text{if } b = a_0, \\ 1, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where a_0 is a fixed element of A. Then $\mathfrak{B} \in \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}(\mathfrak{A}^*)$ and since T is axiomatized by a set of equality-free sentences and $\mathfrak{A} \models T$, $\mathfrak{B} \models T$. It is clear that $\mathfrak{B}$ has power κ and using the fact stated above it is easy to see that $\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{B}$.

Case II: There is $a \in A$ such that $\left|[a]_{\Omega(\mathfrak{A})}\right| < \kappa$. In this case let $\mathfrak{B}$ be any structure obtained from $\mathfrak{A}$ in the way defined in the Preliminaries, by means of the sequence of cardinals $(\mu_b : b \in A)$ defined as follows:

$$\mu_b = \begin{cases} \kappa, & \text{if } \left|[b]_{\Omega(\mathfrak{A})}\right| < \kappa, \\ 1, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

for any $b \in A$. Arguing as in case I, it is proved that $\mathfrak{B}$ is a model of T of power κ non-isomorphic to $\mathfrak{A}$. □

Proposition 5.45 *If L is finite and relational, then there is no complete consistent theory axiomatized by a set of equality-free sentences.*

Proof. Suppose, searching for a contradiction, that L is finite and relational and there is a complete consistent theory T axiomatized by a set of equality-free sentences of L. Since L is finite and relational there is a finite set Γ of formulas of the form $\forall\overline{z}\,[\phi(x,\overline{z}) \leftrightarrow \phi(y,\overline{z})]$, where $\phi \in L^-$ is atomic, and such that any formula of this form, in the variables x,y, is logically equivalent to one of this set. Let $\psi(x,y)$ be the conjunction of all the formulas in Γ. Let σ be the sentence $\forall x\forall y(x \approx y \leftrightarrow \psi(x,y))$. Since T is complete, either $T \models \sigma$ or $T \models \neg\sigma$. Therefore, either all the models of T are reduced or all the models of T are non-reduced, which is absurd, because by assumption T is axiomatized by a set of equality-free sentences. $\Box$

Proposition 5.46 *If L has function symbols, then there is no complete consistent theory axiomatized by a set of equality-free sentences.*

Proof. Suppose, searching for a contradiction, that L contains at least one function symbol, f, of arity, say n, and there is a complete consistent theory T axiomatized by a set of equality-free sentences of L. First, observe that for any model $\mathfrak{A}$ of T and any enumeration $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ of A, $Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}}$ is a model of T, where $Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}}$ is structure defined in the Preliminaries. Since $Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}}$ is a structure of terms,

$$Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}} \models \forall x_1 \dots x_n \forall y_1 \dots y_n (f(x_1,\dots,x_n) \approx f(y_1,\dots,y_n) \rightarrow \bigwedge_{1\leq i\leq n} x_i \approx y_i),$$

and

$$Ter^{\mathfrak{A}}_{\overline{a}} \models \forall x_1 \dots x_n \quad f(x_1,\dots,x_n) \not\approx x_1.$$

Therefore, since T is complete,

$$T \models \forall x_1 \dots x_n \forall y_1 \dots y_n (f(x_1,\dots,x_n) \approx f(y_1,\dots,y_n) \rightarrow \bigwedge_{1\leq i\leq n} x_i \approx y_i)$$

and

$$T \models \forall x_1 \dots x_n \quad f(x_1,\dots,x_n) \not\approx x_1.$$

Now assume that $\mathfrak{A}$ is a model of T and let $\mathfrak{B}$ be any structure obtained from $\mathfrak{A}$ in the way defined in the Preliminaries by means of the sequence of cardinals $(\mu_b : b \in A)$ defined by: for any $b \in A$,

$$\mu_b = \begin{cases} 2, & \text{if } b = a, \\ 1, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where a is a fixed element of A. Clearly $\mathfrak{B} \in \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}(\mathfrak{A})$ and since T is axiomatized by a set of equality-free sentences, $\mathfrak{B} \models T$. But observe that $f^{\mathfrak{A}}(a,\dots,a) \neq a$, because

$$T \models \forall x_1 \dots x_n \quad f(x_1,\dots,x_n) \not\approx x_1.$$

Then, if d and e are the two elements of C_a, by definition of $\mathfrak{B}$, $f^{\mathfrak{B}}(d,\ldots,d) \in C_{f^{\mathfrak{A}}(a,\ldots,a)}$, $f^{\mathfrak{B}}(e,\ldots,e) \in C_{f^{\mathfrak{A}}(a,\ldots,a)}$ and $\left|C_{f^{\mathfrak{A}}(a,\ldots,a)}\right| = 1$. Thus, $f^{\mathfrak{B}}(d,\ldots,d) = f^{\mathfrak{B}}(e,\ldots,e)$, which is absurd because $\mathfrak{B}$ is a model of T and

$$T \models \forall x_1 \ldots x_n \forall y_1 \ldots y_n (f(x_1,\ldots,x_n) \approx f(y_1,\ldots,y_n) \to \bigwedge_{1\leq i\leq n} x_i \approx y_i). \ \square$$

Now we introduce the notion of L^--complete theory. We say that a theory T is *L^--complete* iff for any sentence $\sigma \in L^-$, $T \models \sigma$ or $T \models \neg\sigma$. In order to present a characterization of L^--complete theories, we introduce some notation and we prove some basic facts about L^--ω-saturated models. Given two L-structures $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ and sequences $\overline{a} = (a_i : i \in I)$ and $\overline{b} = (b_i : i \in I)$ of elements of A and B respectively, let us denote now by $(\overline{a}, \overline{b})$ the relation $r \subseteq A \times B$ defined by:

$$r = \{\langle a_i, b_i\rangle : i \in I\}.$$

And given a cardinal κ, a set $D \subseteq A$ and an L^--κ-type p over D in $\mathfrak{A}$, we denote by $p^{(\overline{a},\overline{b})}$ the type p^r of Definition 5.1. Finally we define the following sets:

$$I_0 = \left\{(\overline{a}, \overline{b}) : (\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b}),\ \overline{a}, \overline{b} \text{ finite}\right\}$$

and

$$I_1 = \left\{(\overline{a}, \overline{b}) : (\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b}),\ \overline{a}, \overline{b} \text{ finite}\right\}.$$

Observe that the elements of I_0 and I_1 are partial relative correspondences. In case that $\mathfrak{A} \equiv_0^- \mathfrak{B}$, we have that $\emptyset \in I_0$ and in case that $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$, we have that $\emptyset \in I_1$.

Lemma 5.47 *For any L^--ω-saturated models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$, the following are equivalent:*

i) $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$.

ii) $I_1 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.

iii) $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.

iv) $\mathfrak{A} \sim_f \mathfrak{B}$.

Proof. ii) $\Rightarrow$ iii), iii) $\Rightarrow$ iv) and iv) $\Rightarrow$ i) are clear. i $\Rightarrow$ ii) Assume that $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. Let us see that I_1 satisfies conditions i) – v) of the definition of $\sim_p$. Since $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$, $\emptyset \in I_1$ and thus, condition i) holds. Let $\overline{a} = (a_i : i \in J)$ and $\overline{b} = (b_i : i \in J)$ be finite sequences such that $(\overline{a}, \overline{b}) \in I_1$ and $c \in A$. Let p be the equality-free type of c over $\{a_i : i \in J\}$ in $\mathfrak{A}$. Since $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$, $p^{(\overline{a},\overline{b})}$ is an L^--1-type over $\{b_i : i \in J\}$ in $\mathfrak{B}$.

And since $\mathfrak{B}$ is L^--ω-saturated, there is $d \in B$ which realizes $p^{(\overline{a},\overline{b})}$. Hence $(\overline{a}c, \overline{b}d) \in I_1$ and therefore, condition ii) holds. In an analogous way, one can show that condition iii) holds. Conditions iv) and v) are clearly satisfied. Therefore, $I_1 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$. □

Observe that for arbitrary L-structures, Lemma 5.47 is not true, remember the L-structures $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of Example 3.6, we proved there that $\mathfrak{A} \sim_f \mathfrak{B}$ but $\mathfrak{A} \not\sim_p \mathfrak{B}$.

L^--ω-saturated models will provide us with a characterization of the L^--completeness of a theory:

Proposition 5.48 *For any theory T of L, the following are equivalent:*

i) *T is L^--complete.*

ii) *For any L^--ω-saturated models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of T, $I_1 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.*

iii) *For any L^--ω-saturated models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of T, $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.*

iv) *For any L^--ω-saturated models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of T, $\mathfrak{A} \sim_f \mathfrak{B}$.*

Proof. ii) $\Rightarrow$ iii) and iii) $\Rightarrow$ iv) are clear. i) $\Rightarrow$ ii) Suppose that $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are L^--ω-saturated models of T. Since T is L^--complete, $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. Then, by Lemma 5.47, $I_1 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.

iv) $\Rightarrow$ i) We show that for any two models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of T, $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. Let $\mathfrak{A}' \succeq \mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}' \succeq \mathfrak{B}$ be ω-saturated extensions. Therefore, $\mathfrak{A}'$ and $\mathfrak{B}'$ are L^--ω-saturated models of T. Then, by iv), $\mathfrak{A}' \sim_f \mathfrak{B}'$ and consequently, $\mathfrak{A}' \equiv^- \mathfrak{B}'$. Hence $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. □

Now we study the concept of quantifier elimination for L^-. Given a theory T of L, we say that T *has quantifier elimination for* L^- iff for any formula $\phi(\overline{x}) \in L^-$ there is a formula $\phi'(\overline{x}) \in L_0^-$ such that

$$T \models \phi \leftrightarrow \phi'. \tag{5.3}$$

And we say that T *has quantifier elimination for non-sentences of* L^- if condition (5.3) holds only for non-sentences. We give, first, a semantic characterization of the L^--complete theories that have quantifier elimination for L^- and later an algebraic characterization by using L^--ω-saturated models and back-and-forth methods.

Lemma 5.49 *Let T be a theory of L and Φ a set of formulas of L^- such that:*

i) *any atomic formula of L^- is in Φ,*

ii) *Φ is closed under boolean combinations,*

iii) *for any formula* $\phi(\overline{x}, y) \in \Phi$, $\exists y\phi(\overline{x}, y)$ *is equivalent, modulo* T, *to a formula* $\psi(\overline{x}) \in \Phi$.

Then, for any formula $\phi(\overline{x}) \in L^-$ *there is a formula* $\phi'(\overline{x}) \in \Phi$ *such that*

$$T \models \phi \leftrightarrow \phi'.$$

Proof. By induction on the complexity of ϕ. □

Observe that if we require in condition iii) of Lemma 5.49 that $\exists y\phi(\overline{x}, y)$ has at least one free variable, then Lemma 5.49 holds if we require also that $\phi(\overline{x})$ has at least one free variable. Now, let us introduce some notation. Given $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ L-structures, $\mathfrak{A} \Rrightarrow_1^- \mathfrak{B}$ will mean that any equality-free existential sentence true in $\mathfrak{A}$ is also true in $\mathfrak{B}$.

Lemma 5.50 *Let* L *be a similarity type with at least one constant symbol. For any theory* T *of* L *the following are equivalent:*

i) T *has quantifier elimination for* L^-.

ii) *For any* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \models T$ *and any finite sequences* $\overline{a} \in A, \overline{b} \in B$,

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b}) \Rightarrow (\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

iii) *For any* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \models T$ *and any finite sequences* $\overline{a} \in A, \overline{b} \in B$,

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b}) \Rightarrow (\mathfrak{A}, \overline{a}) \Rrightarrow_1^- (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

Proof. i) $\Rightarrow$ ii) and ii) $\Rightarrow$ iii) are clear. iii) $\Rightarrow$ i) Clearly if Φ is the set of all quantifier-free formulas of L^-, then Φ satisfies conditions i) and ii) of Lemma 5.49. Let us see that condition iii) also holds. Suppose that $\exists y\phi(\overline{x}, y) \in L^-$ where $\phi(\overline{x}, y) \in \Phi$. If $T \cup \{\exists y\phi(\overline{x}, y)\}$ is inconsistent is clear. Otherwise, let Γ be the following set

$$\Gamma = \{\psi(\overline{x}) \in \Phi : T \cup \{\exists y\phi(\overline{x}, y)\} \models \psi(\overline{x})\}.$$

We will see that $T \cup \Gamma \models \exists y\phi(\overline{x}, y)$. Suppose, searching for a contradiction, that there is a model $\mathfrak{A} \models T$ such that for some $\overline{a} \in A$, $\mathfrak{A} \models \Gamma[\overline{a}]$ and $\mathfrak{A} \not\models \exists y\phi(\overline{x}, y)[\overline{a}]$. We expand the language by adding new constants for the elements of $\overline{a}$. Consider now the set Δ defined by

$$\Delta = \{\sigma(\overline{a}) : \sigma(\overline{x}) \in \Phi \text{ and } (\mathfrak{A}, \overline{a}) \models \sigma(\overline{a})\}. \tag{5.4}$$

We have that $T \cup \Delta \cup \{\exists y\phi(\overline{a}, y)\}$ is consistent, otherwise let $\sigma_1(\overline{a}), \ldots, \sigma_n(\overline{a}) \in \Delta$ be such that

$$T \cup \{\exists y\phi(\overline{a}, y)\} \models \neg\sigma_1(\overline{a}) \vee \ldots \vee \neg\sigma_n(\overline{a}),$$

then, since the new constants do not occur in T,

$$T \cup \{\exists y \phi(\overline{x}, y)\} \models \neg\sigma_1(\overline{x}) \vee \ldots \vee \neg\sigma_n(\overline{x}),$$

and therefore, by definition of Γ, we will have $\neg\sigma_1(\overline{x}) \vee \ldots \vee \neg\sigma_n(\overline{x}) \in \Gamma$ which is absurd because $\mathfrak{A} \models \Gamma[\overline{a}]$. Thus, $T \cup \Delta \cup \{\exists y \phi(\overline{a}, y)\}$ is consistent. Let $(\mathfrak{B}, \overline{b}) \models T \cup \Delta \cup \{\exists y \phi(\overline{a}, y)\}$. We have that

$$(\mathfrak{B}, \overline{b}) \equiv_0^- (\mathfrak{A}, \overline{a}).$$

Then, by iii)

$$(\mathfrak{B}, \overline{b}) \Rrightarrow_1^- (\mathfrak{A}, \overline{a}).$$

Therefore, since

$$\mathfrak{B} \models \exists y \phi(\overline{x}, y) \left[\overline{b}\right],$$

we obtain

$$\mathfrak{A} \models \exists y \phi(\overline{x}, y) [\overline{a}],$$

which is absurd. Hence $T \cup \Gamma \models \exists y \phi(\overline{x}, y)$ and consequently, there is $\psi(\overline{x}) \in \Phi$ such that

$$T \models \psi(\overline{x}) \leftrightarrow \exists y \phi(\overline{x}, y).$$

Thus, by Lemma 5.49, we conclude that T has quantifier elimination for L^-. □

Observe that in conditions ii) and iii) of Lemma 5.50 we allow the sequences $\overline{a}$ and $\overline{b}$ to be empty. Let us restate the Lemma for non-sentences:

Lemma 5.51 *For any theory T of L the following are equivalent:*

i) *T has quantifier elimination for non-sentences of L^-.*

ii) *For any $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \models T$ and any non-empty finite sequences $\overline{a} \in A, \overline{b} \in B$,*

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b}) \Rightarrow (\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

iii) *For any $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} \models T$ and any non-empty finite sequences $\overline{a} \in A, \overline{b} \in B$,*

$$(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b}) \Rightarrow (\mathfrak{A}, \overline{a}) \Rrightarrow_1^- (\mathfrak{B}, \overline{b}).$$

Proof. Analogous to the proof of Lemma 5.50 by using the observation after Lemma 5.49. □

Proposition 5.52 *Let L be a similarity type with at least one constant symbol. For any theory T of L the following are equivalent:*

i) *T is L^--complete and has quantifier elimination for L^-.*

ii) *For any L^--ω-saturated models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of T, $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.*

Proof. i) $\Rightarrow$ ii) Suppose that $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are L^--ω-saturated models of T. Since T is L^--complete, by Proposition 5.48, $I_1 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$. And since T has quantifier elimination for L^-, by Lemma 5.50, $I_0 = I_1$. Therefore, $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.

ii) $\Rightarrow$ i) Assume that for any L^--ω-saturated models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of T, $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$. Then, by Proposition 5.48, T is L^--complete. Suppose now that $\mathfrak{A}'$ and $\mathfrak{B}'$ are models of T and $\overline{a} \in A'$ and $\overline{b} \in B'$ are finite sequences such that

$$(\mathfrak{B}', \overline{b}) \equiv_0^- (\mathfrak{A}', \overline{a}).$$

We will see that

$$(\mathfrak{B}', \overline{b}) \equiv^- (\mathfrak{A}', \overline{a}).$$

Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be ω-saturated structures such that $\mathfrak{A} \succeq \mathfrak{A}'$ and $\mathfrak{B} \succeq \mathfrak{B}'$. Then,

$$(\mathfrak{B}, \overline{b}) \equiv_0^- (\mathfrak{A}, \overline{a})$$

and we have that $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are L^--ω-saturated models of T. Therefore, by ii), $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$. Hence, by the proof of Theorem 3.13, we have

$$(\mathfrak{B}, \overline{b}) \equiv_{\infty\omega}^- (\mathfrak{A}, \overline{a}),$$

and then

$$(\mathfrak{B}, \overline{b}) \equiv^- (\mathfrak{A}, \overline{a}).$$

Thus,

$$(\mathfrak{B}', \overline{b}) \equiv^- (\mathfrak{A}', \overline{a}).$$

Consequently, by Lemma 5.50, T has quantifier elimination for L^-. $\square$

Now we can restate Proposition 5.51 for non-sentences:

Proposition 5.53 *For any theory T of L the following are equivalent:*

i) *T is L^--complete and has quantifier elimination for non-sentences of L^-.*

ii) *For any L^--ω-saturated models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of T, $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.*

Proof. Analogous to the proof of Proposition 5.52 by using Lemma 5.51. $\square$

We now introduce the notion of L^--κ-categorical theory. Let T be a set of sentences of L^- and κ a cardinal, we say that T is *L^--κ-categorical* iff T has, up to isomorphism, at most one reduced model of power κ. As we have seen in Proposition 5.44, for any theory $T \subseteq L^-$ with only infinite models, T is not κ-categorical, for any infinite cardinal κ. Nevertheless, since for any $T \subseteq L^-$, $\mathrm{Mod}(T) = \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}(\mathrm{Mod}^*(T))$, where $\mathrm{Mod}^*(T)$ is the class of all reduced models of T, in order to study the models of T is important to know how many reduced structures of each power there are. There are theories that have only one reduced model in some cardinal κ and there are theories that have no reduced models in some cardinal κ. Observe that this last assertion does not contradict the Löwenheim-Skolem Theorem. For example, if we consider the equality-free theory of a model $\mathfrak{A}$, which is L^--$|A|^+$-saturated, there is a cardinal κ such that for any cardinal $\lambda \geq \kappa$ there are no reduced models of this theory of power λ.

Proposition 5.54 *Let T be a set of sentences of L^-. If for any two models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of T, $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, then T is L^--complete and L^--$\aleph_0$-categorical.*

Proof. On the one hand, since for any L^--ω-saturated models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of T, $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, by Proposition 5.48, T is L^--complete. On the other hand, since for any countable reduced models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of T, $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, by Corollary 3.17, for any countable reduced models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of T, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Therefore, T is L^--$\aleph_0$-categorical. □

The next proposition gives us a characterization of theories that are L^--complete and L^--$\aleph_0$-categorical, when L is countable. First, we prove the following lemma:

Lemma 5.55 *Let L be countable and T a set of sentences of L^-. If T is L^--$\aleph_0$-categorical, then T is L^--complete.*

Proof. Suppose that T is L^--$\aleph_0$-categorical. Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be models of T. Since L is countable, by the Löwenheim-Skolem theorem, there are countable L-structures $\mathfrak{A}'$ and $\mathfrak{B}'$ such that $\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}' \equiv \mathfrak{B}$. Then $\mathfrak{A}'$ and $\mathfrak{B}'$ are countable models of T and therefore, since T is L^--$\aleph_0$-categorical and $T \subseteq L^-$, $\mathfrak{A}'^*$ and $\mathfrak{B}'^*$ are isomorphic models of T. Clearly then $\mathfrak{A}' \equiv^- \mathfrak{B}'$ and therefore, $\mathfrak{A} \equiv^- \mathfrak{B}$. We conclude that T is L^--complete. □

Proposition 5.56 *Let L be countable. For any set T of sentences of L^- the following statements are equivalent:*

i) *T is L^--complete and L^--$\aleph_0$-categorical.*

ii) *For any countable models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of T, $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.*

Proof. i) $\Rightarrow$ ii) Suppose that T is L^--complete and L^--$\aleph_0$-categorical. Let $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ be countable models of T. Since $T \subseteq L^-$, $\mathfrak{A}^*$ and $\mathfrak{B}^*$ are models of T. Therefore, since T is L^--$\aleph_0$-categorical, $\mathfrak{A}^* \cong \mathfrak{B}^*$. Then $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ and consequently, $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.

ii) $\Rightarrow$ i) Assume that for any countable models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of T, $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$. Then, by Corollary 3.17, for any countable reduced models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of T, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Hence, T is L^--$\aleph_0$-categorical and by Lemma 5.55, since L is countable, T is L^--complete. $\Box$

Now we study theories that have these three properties: they admit quantifier elimination for L^- and they are L^--complete and L^--$\aleph_0$-categorical.

Proposition 5.57 *Let L be any similarity type with at least one constant symbol and T a set of sentences of L^-. If for any models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of T, $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, then T is L^--complete, L^--$\aleph_0$-categorical and has quantifier elimination for L^-.*

Proof. Since for any L^--ω-saturated models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of T, $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, by Proposition 5.52, T is L^--complete and has quantifier elimination for L^-. Given two countable reduced models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of T, $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$. Then, by Corollary 3.17, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Therefore, T is also L^--$\aleph_0$-categorical. $\Box$

Proposition 5.57 can be restated for non-sentences in the following way:

Proposition 5.58 *Let T be a set of sentences of L^-. If for any models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of T, $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, then T is L^--complete, L^--$\aleph_0$-categorical and has quantifier elimination for non-sentences of L^-.*

Proof. The proof is analogous to the proof of Proposition 5.57 using Proposition 5.53. $\Box$

Proposition 5.59 *Let L be countable and with at least one constant symbol and let T be a set of sentences of L^-. If for any countable models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of T, $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, then T is L^--complete, L^--$\aleph_0$-categorical and has quantifier elimination for L^-.*

Proof. Since for any countable models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of T, $\mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, by Proposition 5.56, T is L^--complete and L^--$\aleph_0$-categorical. Suppose now that $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ and there are finite sequences $\overline{a} \in A$ and $\overline{b} \in B$ such that $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv_0^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$. Let us see that $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$. Since L is countable, by the Löwenheim-Skolem Theorem, there are countable L-structures $(\mathfrak{A}', \overline{a}')$ and $(\mathfrak{B}', \overline{b}')$ such that $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv (\mathfrak{A}', \overline{a}')$ and $(\mathfrak{B}, \overline{b}) \equiv (\mathfrak{B}', \overline{b}')$. Then, $\mathfrak{A}'$ and $\mathfrak{B}'$ are models of T and $(\mathfrak{A}', \overline{a}') \equiv_0^- (\mathfrak{B}', \overline{b}')$. Hence $(\overline{a}', \overline{b}') \in I_0$, and since $I_0 : \mathfrak{A}' \sim_p \mathfrak{B}'$, by the proof of Theorem 3.13, $(\mathfrak{A}', \overline{a}') \equiv^- (\mathfrak{B}', \overline{b}')$ and then $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \equiv^- (\mathfrak{B}, \overline{b})$. We can conclude, by Proposition 5.50, that T has quantifier elimination for L^-. $\Box$

We restate Proposition 5.59 for non-sentences:

Proposition 5.60 *Let L be countable and let T be a set of sentences of L^-. If for any countable models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of T, $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$, then T is L^--complete, L^--$\aleph_0$-categorical and has quantifier elimination for non-sentences of L^-.*

Proof. The proof is analogous to the proof of Proposition 5.59 using Proposition 5.51. □

To close the section we study some examples of complete consistent theories axiomatized by a set of equality-free sentences. All the examples are of infinite and relational similarity types because, as we have proved in Propositions 5.45 and 5.46, there are not complete consistent theories axiomatized by a set of sentences of L^-, if L is either finite and relational or contains function symbols.

Example 5.61 Let $L = \{R_n : n \in \omega\}$, where for any $n \in \omega$, R_n is a binary relation symbol. Consider the L-structure $\mathfrak{A} = ({}^{\omega}2, R_n^{\mathfrak{A}})_{n\in\omega}$, where for any $n \in \omega$, $R_n^{\mathfrak{A}}$ is the equivalence relation defined by:

$$\langle f, g\rangle \in R_n^{\mathfrak{A}} \quad \text{iff} \quad f \restriction n = g \restriction n,$$

for any $f, g \in^{\omega} 2$. Let $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$, it is known that T is complete and that it is axiomatized by the following set of equality-free sentences:

$1_{(n)}$ "R_n is an equivalence relation".
$2_{(n)}$ "R_n has exactly 2^n equivalence classes".
$3_{(n)}$ $\forall x \forall y (R_{n+1}xy \rightarrow R_nxy)$.
$4_{(n)}$ $\forall x \exists y (R_nxy \wedge \neg R_{n+1}xy)$.

Since T has only infinite models, by Proposition 5.44, for any infinite cardinal κ, T is not κ-categorical. Nevertheless, T is L^--$\aleph_0$-categorical. We now prove this property together with the fact that T has quantifier elimination for non-sentences of L^-. By Proposition 5.60, it is enough to prove that for any countable models $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ of T, $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$.

Assume that $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are countable models of T. Since $\emptyset \in I_0$, condition i) of the definition of $\sim_p$ is satisfied. Let us see now that I_0 satisfies condition ii). Suppose that $\overline{c} = (c_i : i \leq k)$ and $\overline{d} = (d_i : i \leq k)$ are finite sequences of elements of A and B respectively, such that $(\overline{c}, \overline{d}) \in I_0$ and $a \in A$. We can distinguish two cases:

Case I: There is $i \leq k$ such that for all $n \in \omega$, $\langle c_i, a\rangle \in R_n^{\mathfrak{A}}$. Then, we choose $b = d_i$.

Case II: For all $i \leq k$ there is $n \in \omega$ such that $\langle c_i, a\rangle \notin R_n^{\mathfrak{A}}$. Then, there is a maximum $m \in \omega$ with the property that there is $i \leq k$ such that $\langle c_i, a\rangle \in R_m^{\mathfrak{A}}$. By the axioms, if $i, j \leq k$ and $\langle c_i, a\rangle \in R_m^{\mathfrak{A}}$ and $\langle c_j, a\rangle \in R_m^{\mathfrak{A}}$, then $\langle c_i, c_j\rangle \in R_{m+1}^{\mathfrak{A}}$. We fix

$i_0 \leq k$ such that $\langle c_{i_0}, a\rangle \in R_m^{\mathfrak{A}}$. Since $\forall x \exists y(R_m xy \wedge \neg R_{m+1}xy)$ is an axiom of T, we can choose $b \in B$ such that

$$\mathfrak{B} \models R_m xy \wedge \neg R_{m+1} xy\, [d_{i_0}, b]\,.$$

By election of b, in both cases we have that $(\bar{c}a, \bar{d}b) \in I_0$. Clearly condition ii) is satisfied. Condition iii) is proved analogously. We conclude that $I_0 : \mathfrak{A} \sim_p \mathfrak{B}$. Therefore, by Proposition 5.60, T has quantifier elimination for non-sentences of L^- and it is L^--$\aleph_0$-categorical.

Up to isomorphism, the only reduced countable model of T is the substructure of $\mathfrak{A}$ that has as domain the set

$$C = \{f \in^{\omega} 2 : \exists n \in \omega \forall m \geq n, f(m) = 0\}\,.$$

$\mathfrak{A}$ is the greatest reduced model of this theory. In order to prove that, we see that $\mathfrak{A}$ is L^--$|A|^+$-saturated. By Proposition 5.15, it is enough to show that for any L-structure $\mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$ and any $b \in B$, there is $g \in^{\omega} 2$ such that

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(g/B).$$

Suppose that $\mathfrak{A} \preceq^- \mathfrak{B}$ and $b \in B$. Since for any $n \in \omega$ there are exactly 2^n equivalence classes in the partition by the relation $R_n^{\mathfrak{B}}$, for any $n \in \omega$ there is $f_n \in^{\omega} 2$ such that $\langle f_n, b\rangle \in R_n^{\mathfrak{B}}$. Then, consider the function $g \in^{\omega} 2$ defined as follows: for any $n \in \omega$, $g(n) = f_n(n)$. Clearly, for any $n \in \omega$, $\langle g, b\rangle \in R_n^{\mathfrak{B}}$ and therefore,

$$\mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(b/B) = \mathrm{atp}^-_{\mathfrak{B}}(g/B).$$

Example 5.62 Let L be as in Example 5.61. Consider the L-structure $\mathfrak{B} = ({}^{\omega}\omega, R_n^{\mathfrak{B}})_{n\in\omega}$, where for any $n \in \omega$, $R_n^{\mathfrak{B}}$ is the equivalence relation defined by:

$$\langle f, g\rangle \in R_n^{\mathfrak{B}} \quad \text{iff} \quad f \restriction n = g \restriction n,$$

for any $f, g \in^{\omega} \omega$. Let $T' = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$, it is known that T' is complete and that it is axiomatized by the following set of equality-free sentences:

1	$\forall x \forall y R_0 xy$.
$2_{(n)}$	"R_n is an equivalence relation".
$3_{(n)}$	$\forall x \forall y (R_{n+1}xy \to R_n xy)$.
$4_{(n)(m)}$	$\forall x \exists y_0 \dots y_m (\bigwedge_{i\leq m} R_n x y_i \wedge \bigwedge_{i\leq m} \neg R_{n+1} x y_i \wedge \bigwedge_{\substack{i,j\leq m\\ i\neq j}} \neg R_{n+1} y_j y_i)$.

Since T' has only infinite models, by Proposition 5.44, for any infinite cardinal κ, T' is not κ-categorical. Nevertheless, following the same kind of arguments given in

Example 5.61, it can be shown that it is L^--$\aleph_0$-categorical and has quantifier elimination for non-sentences of L^-. Up to isomorphism, the only reduced countable model of T' is the substructure of $\mathfrak{B}$ that has as domain the set

$$D = \{f \in^{\omega} \omega : \exists n \in \omega \forall m \geq n, f(m) = 0\}.$$

We see now that there is no model $\mathfrak{A}$ of T' which is L^--$|A|^+$-saturated. Assume that $\mathfrak{A}$ is a model of T' and X the set of all equivalence classes of $R_1^{\mathfrak{A}}$. For any $x \in X$ we choose a representative $a_x \in A$. Consider the following L^--1-type over $\{a_x : x \in X\}$ in $\mathfrak{A}$,

$$p = \{\neg R_1 y a_x : x \in X\}.$$

Clearly, p is not realized in $\mathfrak{A}$.

Example 5.63 Let $L = \{P_n : n \in \omega\}$, where for any $n \in \omega$, P_n is a monadic relation symbol. Consider the L-structure $\mathfrak{A} = (P(\omega), P_n^{\mathfrak{A}})_{n \in \omega}$ of Example 5.12. Let $T'' = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. It is known that T'' is complete and that it is axiomatized by the following set of equality-free sentences:

$$\exists x (P_{i_0} x \wedge \ldots \wedge P_{i_n} x \wedge \neg P_{j_0} x \wedge \ldots \wedge \neg P_{j_k} x),$$

for any distinct $i_0, \ldots, i_n, j_0, \ldots, j_k \in \omega$

Since T'' has only infinite models, by Proposition 5.44, for any infinite cardinal κ, T'' is not κ-categorical. We prove now that T'' is not L^--$\aleph_0$-categorical: let $\mathfrak{B}$ be the substructure of $\mathfrak{A}$ that has as domain $P_\omega(\omega)$, the collection of all finite sets of natural numbers and let $\mathfrak{C}$ be the substructure of $\mathfrak{A}$ that has as domain $P_\omega(\omega) \cup \{\omega\}$. Clearly, these two models are countable, reduced and $\mathfrak{B} \not\cong \mathfrak{C}$.

It is easy to show that for any L^--ω-saturated models $\mathfrak{C}$ and $\mathfrak{B}$ of T, $I_0 : \mathfrak{C} \sim_p \mathfrak{B}$. Then, by Proposition 5.53, T has quantifier elimination for non-sentences of L^-. Since the arity of all the symbols in L is ≤ 1, by Lemma 5.17, any L^--ω-saturated model of this theory is L^--κ-saturated, for any cardinal κ. In particular, as we have shown in the Example 5.12, $\mathfrak{A}$ is L^--$|A|^+$-saturated. $\mathfrak{A}$ is then the greatest reduced model of this theory.

Chapter 6

Infinitary equality-free universal Horn Logic

6.1 Preservation and characterization theorems

In this chapter we mainly study preservation and characterization theorems for two fragments of the infinitary languages $L^{-}_{\kappa\kappa}$, with κ regular: the universal Horn fragment and the universal strict Horn fragment and we obtain some joint consistency, interpolation and definability theorems. The universal Horn fragment of first-order logic (with equality) has been extensively studied; for references see [McN77], [Hod93a] and [Hod93b]. But the equality-free universal Horn fragment, used frequently in logic programming, has received much less attention from the model theoretic point of view. Nevertheless, in the field of universal algebraic logic we can find a theorem that properly translated is a preservation result for the strict universal Horn fragment of infinitary equality-free languages that, apart from function symbols, have only a unary relation symbol. This theorem is due to J. Czelakowski; see [Cze80a], Theorem 6.1, and [Cze80b], Theorem 5.1. This theorem and other results from algebraic logic were the start point of our work.

From now on κ will be an infinite regular cardinal. Let us recall what a universal Horn formula is. A formula ϕ of $L_{\kappa\kappa}$ is a *basic Horn formula* provided that ϕ is a disjunction of less than κ formulas, at most one of which is atomic and all the others are negations of atomic formulas. A basic Horn formula is *strict* if exactly one of its disjuncts is atomic. A *universal Horn formula* ϕ of $L_{\kappa\kappa}$ is a formula of the form:

$$\forall \{x_\xi : \xi < \mu\} \bigwedge_{\rho<\nu} \psi_\rho$$

where $\nu, \mu < \kappa$, and for any $\rho < \nu$, ψ_ρ is a basic Horn formula. When for any $\rho < \nu, \psi_\rho$ is a strict basic Horn formula, it is said that ϕ is a *strict universal Horn formula.* Given a class K of L-structures, the *universal Horn theory of K in $L^-_{\kappa\kappa}$* is the set:

$$\{\sigma \in L^-_{\kappa\kappa} : \sigma \text{ is a universal Horn sentence and for any } \mathfrak{D} \in K,\ \mathfrak{D} \models \sigma\}.$$

In order to prove the next theorem let us recall that a filter over a non-empty set I is *κ-complete* if it is closed under intersections of less than κ elements. It is well-known that if I is a non-empty set, κ an infinite regular cardinal and J a set of subsets of I that has the κ-intersection property (i.e. the intersection of less than κ elements of J is non-empty), then there exists a κ-complete proper filter F over I which contains J. We will also use the fact that given a class of structures M, $\mathbf{P}_{\mathbf{R}\kappa}\mathbf{P}_{\mathbf{R}\kappa}(M) \subseteq \mathbf{P}_{\mathbf{R}\kappa}(M)$. This fact can be easily proved using the same kind of arguments of the proof of Lemma 2.22 on page 216 of [BS81].

Theorem 6.1 *For any class K of L-structures the following are equivalent:*

i) *K is axiomatizable by a set of universal Horn sentences of $L^-_{\kappa\kappa}$.*

ii) *K is closed under $\mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}$, $\mathbf{H}_\mathbf{S}$, $\mathbf{S}$ and $\mathbf{P}_{\mathbf{R}\kappa}$.*

iii) *$K = \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}_\mathbf{S}\mathbf{S}\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(M)$, for some class M of L-structures.*

Proof. i) $\Rightarrow$ ii) and ii) $\Rightarrow$ iii) are easily checked. iii) $\Rightarrow$ i) Suppose that $K = \mathbf{H}_\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}_\mathbf{S}\mathbf{S}\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(M)$, for some class M of L-structures. Let T be the universal Horn theory of M in $L^-_{\kappa\kappa}$ and $\mathfrak{A}$ a model of T. We will prove that $\mathfrak{A} \in K$. We expand the language by adding a new constant symbol for each element of A. Consider the $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$ in this expanded language. For any $\Gamma \subseteq \mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$, if the new constants that occur in the sentences of Γ are in $\{a_\xi : \xi < \mu\}$, we choose a set of new variables $\{x_\xi : \xi < \mu\}$ and we denote by Γ' the set $\{\phi' : \phi \in \Gamma\}$, where for any $\phi \in \Gamma$, ϕ' is the formula obtained from ϕ by substituting, for each $\xi < \mu$ the variable x_ξ for the constant a_ξ.

Given a set $\Gamma \subseteq \mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$ with $|\Gamma| < \kappa$, we consider the sentence $\sigma = \exists\{x_\xi : \xi < \mu\}\bigwedge\Gamma'$. We claim that there exists $\mathfrak{D} \in \mathbf{P}(M)$ such that $\mathfrak{D} \models \sigma$. To prove that claim we suppose the contrary and search for a contradiction. To do so we distinguish two cases:

Case I: There is at most one sentence in Γ which is a negation of an atomic sentence. In this case, $\neg\sigma$ is logically equivalent to a universal Horn sentence $\gamma \in L^-_{\kappa\kappa}$. We have supposed that for any $\mathfrak{D} \in \mathbf{P}(M)$, $\mathfrak{D} \models \neg\sigma$ and, in particular, for any $\mathfrak{D} \in M$, $\mathfrak{D} \models \neg\sigma$, so $\gamma \in T$. But this is impossible because $\mathfrak{A} \models T$ and $\mathfrak{A} \models \sigma$.

Case II: There is more than one sentence in Γ that is a negation of an atomic sentence. In that case, let $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ be the set of all atomic sentences of Γ and $\{\psi_\nu : \nu < \lambda\}$ an enumeration of all sentences of Γ which are negations of atomic sentences. For any $\nu < \lambda$, let σ_ν be the sentence

$$\sigma_\nu = \exists\{x_\xi : \xi < \mu\}(\bigwedge\Gamma'_0 \wedge \psi'_\nu),$$

Observe that $\neg\sigma_\nu$ is logically equivalent to a universal Horn sentence of $L^-_{\kappa\kappa}$ and by an analogous argument to the one given in Case I, we can obtain $\mathfrak{D} \in M$ such that $\mathfrak{D} \models \sigma_\nu$. We choose for any $\nu < \lambda$, $\mathfrak{D}_\nu \in M$ and elements of D_ν, $\{d^\nu_\xi : \xi < \mu\}$, such that $\mathfrak{D}_\nu \models (\bigwedge \Gamma'_0 \wedge \psi'_\nu)[d^\nu_\xi : \xi < \mu]$. Consider now the structure $\prod_{\nu<\lambda} \mathfrak{D}_\nu$ and define, for any $\xi < \mu$, an element $d_\xi \in \prod_{\nu<\lambda} D_\nu$ as follows:

$$d_\xi(\nu) = d^\nu_\xi$$

for any $\nu < \lambda$. Then $\prod_{\nu<\lambda} \mathfrak{D}_\nu \models \bigwedge \Gamma' [d_\xi : \xi < \mu]$ and $\prod_{\nu<\lambda} \mathfrak{D}_\nu \in \mathbf{P}(M)$, which is impossible because we have supposed just the contrary.

Now, to prove the theorem, let $I = \{\Gamma \subseteq \mathsf{diag}^-(\mathfrak{A}) : |\Gamma| < \kappa\}$. Using the claim just proved, we choose for any $\Gamma \in I$, $\mathfrak{D}_\Gamma \in \mathbf{P}(M)$ and elements $\{d^\Gamma_\xi : \xi < \mu\}$ of D_Γ such that $\mathfrak{D}_\Gamma \models \bigwedge \Gamma'[d^\Gamma_\xi : \xi < \mu]$. For any $\Gamma \in I$, let $J_\Gamma = \{\Delta \in I : \Gamma \subseteq \Delta\}$ and $J = \{J_\Gamma : \Gamma \in I\}$. Since κ is regular, it is easy to see that J has the κ-intersection property. Thus, J can be extended to a κ-complete proper filter F over I. Now we construct the reduced product $\mathfrak{D} = \prod_{\Gamma\in I} \mathfrak{D}_\Gamma / F$. Observe that $\mathfrak{D} \in \mathbf{P}_{\mathbf{R}\kappa}\mathbf{P}(M)$. Let us define, for any $a \in A$, an element $\hat{a} \in \prod_{\Gamma \in I} D_\Gamma$ by:

$$\hat{a}(\Gamma) = \begin{cases} d^\Gamma_{\xi_0}, & \text{if } a \in \{a_\xi : \xi < \mu\} \text{ and } a = a_{\xi_0}, \\ \text{arbitrary}, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

for any $\Gamma \in I$. Then, for any $\psi \in \mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$,

$$J_{\{\psi\}} \subseteq \{\Delta \in I : \mathfrak{D}_\Delta \models \psi'[d^\Delta_\xi : \xi < \mu]\ \} \in F,$$

so for any atomic formula $\phi \in L^-_{\kappa\kappa}$ and any $a_1, \ldots, a_n \in A$,

$$\mathfrak{A} \models \phi[a_1, \ldots, a_n] \text{ iff } \mathfrak{D} \models \phi\,[[\widehat{a}_1]_F, \ldots,\ [\widehat{a}_n]_F]\,.$$

Thus $(\mathfrak{D}, [\hat{a}]_F)_{a\in A}$ is an expansion of $\mathfrak{D}$ that satisfies $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$. Therefore, by Proposition 2.20, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S^{-1}H_S S P_{R_\kappa} P}(M)$ and since

$$\mathbf{P_{R\kappa}P}(M) \subseteq \mathbf{P_{R\kappa}P_{R\kappa}}(M) \subseteq \mathbf{P_{R\kappa}}(M),$$

we can conclude that $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S^{-1}H_S S P_{R_\kappa}}(M) = K$. □

Corollary 6.2 *For any set T of sentences of $L_{\kappa\kappa}$ the following are equivalent:*

i) *T is axiomatizable by a set of universal Horn sentences of $L^-_{\kappa\kappa}$.*

ii) *T is preserved under $\mathbf{H_S^{-1}}$, $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{S}$ and $\mathbf{P_{R\kappa}}$.*

Proof. By Theorem 6.1. □

Corollary 6.3 *Let κ be either ω or a strongly compact cardinal. For any sentence $\sigma \in L_{\kappa\kappa}$, σ is preserved under $\mathbf{H_S^{-1}}$, $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{S}$ and $\mathbf{P_{R_\kappa}}$ iff σ is equivalent to a universal Horn sentence of $L^-_{\kappa\kappa}$.*

Proof. By Corollary 6.2 using the usual arguments together with the fact that, if $\kappa = \omega$ or κ is strongly compact, then for any set $\Gamma \cup \{\phi\}$ of sentences of $L_{\kappa\kappa}$, if $\Gamma \models \phi$, then there is $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ with $|\Gamma_0| < \kappa$ such that $\Gamma_0 \models \phi$. $\square$

We now claim that given two infinite regular cardinals λ and μ such that $\lambda < \kappa$ and $\mu \leq \kappa$, the following is not true: for any class K of L-structures,

> K is axiomatizable by a set of universal Horn sentences of $L^-_{\kappa\lambda}$ iff $K = \mathbf{H_S^{-1}H_SSP_{R_\mu}}(M)$, for some class M of L-structures.

In order to prove our claim, let us introduce some notation and prove the next proposition. A *universal* formula of $L_{\kappa\lambda}$ is a formula of the form:

$$\forall \{x_\xi : \xi < \mu\} \psi,$$

where ψ is a quantifier-free formula of $L_{\kappa\lambda}$. And an *existential* formula of $L_{\kappa\kappa}$ is a formula of the form:

$$\exists \{x_\xi : \xi < \mu\} \psi,$$

where ψ is a quantifier-free formula of $L_{\kappa\lambda}$. Given two L-structures, $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$, by $\mathfrak{A} \equiv^-_{\forall_{\kappa\lambda}} \mathfrak{B}$ we mean that $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ satisfy exactly the same universal sentences of $L^-_{\kappa\lambda}$ and by $\mathfrak{A} \equiv^-_{\exists_{\kappa\lambda}} \mathfrak{B}$ that $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ satisfy exactly the same existential sentences of $L^-_{\kappa\lambda}$.

Proposition 6.4 *Let λ and κ be infinite regular cardinals and L a relational similarity type with $|L| < \lambda \leq \kappa$. For any L-structures $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ the following are equivalent:*

i) $\mathfrak{A} \equiv^-_{\forall_{\kappa\lambda}} \mathfrak{B}$.

ii) $\mathfrak{A} \equiv^-_{\exists_{\kappa\lambda}} \mathfrak{B}$.

iii) a) *For any $\gamma < \lambda$ and any sequence $\bar{a} = (a_\zeta : \zeta \in \gamma)$ of elements of A there is a sequence $\bar{b} = (b_\zeta : \zeta \in \gamma)$ of elements of B such that $(\bar{a}, \bar{b})$ is a partial relative correspondence between $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$.*

  b) *For any $\gamma < \lambda$ and any sequence $\bar{b} = (b_\zeta : \zeta \in \gamma)$ of elements of B there is a sequence $\bar{a} = (a_\zeta : \zeta \in \gamma)$ of elements of A such that $(\bar{a}, \bar{b})$ is a partial relative correspondence between $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$.*

Proof. i) $\Leftrightarrow$ ii) is clear. ii) $\Rightarrow$ iii) Suppose that $\mathfrak{A} \equiv_{\exists^-_{\kappa\lambda}} \mathfrak{B}$. We prove only a), because the proof of b) is analogous. Let $\gamma < \lambda$, $\bar{a} = (a_\zeta : \zeta \in \gamma)$ a sequence of elements of A and Γ the set of all atomic and negations of atomic equality-free formulas in the variables $(x_\zeta : \zeta \in \gamma)$ that are satisfied by $\bar{a}$. Consider the conjunction $\bigwedge \Gamma$ of all formulas in Γ. Since L is relational, $\gamma < \lambda$ and $|L| < \lambda$, $\bigwedge \Gamma \in L^-_{\kappa\lambda}$. Moreover, $\exists \{x_\zeta : \zeta \in \gamma\} \bigwedge \Gamma$ is an existential sentence of $L^-_{\kappa\lambda}$ such that $\mathfrak{A} \models \exists \{x_\zeta : \zeta \in \gamma\} \bigwedge \Gamma$. Then, since we have assumed $\mathfrak{A} \equiv_{\exists^-_{\kappa\lambda}} \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \models \exists \{x_\zeta : \zeta \in \gamma\} \bigwedge \Gamma$. Let $\bar{b} = (b_\zeta : \zeta \in \gamma)$ be a sequence of elements of B such that $\mathfrak{B} \models \bigwedge \Gamma [b_\zeta : \zeta \in \gamma]$. It is easy to see that $(\bar{a}, \bar{b})$ is a partial relative correspondence between $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$.

iii) $\Rightarrow$ ii) Assume now that condition iii) holds. Let $\sigma = \exists \{x_\zeta : \zeta \in \gamma\} \phi$ be an existential sentence of $L^-_{\kappa\lambda}$ such that $\mathfrak{A} \models \sigma$. Clearly $\gamma \in \lambda$. Let $\bar{a} = (a_\zeta : \zeta \in \gamma)$ be a sequence of elements of A, such that $\mathfrak{A} \models \phi [a_\zeta : \zeta \in \gamma]$. By condition iii) a) there is a sequence $\bar{b} = (b_\zeta : \zeta \in \gamma)$ of elements of B such that $(\bar{a}, \bar{b})$ is a partial relative correspondence between $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$. Since L is relational, by Lemma 3.5, we have that $\mathfrak{B} \models \phi [b_\zeta : \zeta \in \gamma]$, so we have that $\mathfrak{B} \models \sigma$. By an analogous argument we can show that, if $\mathfrak{B} \models \sigma$ and σ is an existential sentence of $L^-_{\kappa\lambda}$, then $\mathfrak{A} \models \sigma$. Therefore, $\mathfrak{A} \equiv_{\exists^-_{\kappa\lambda}} \mathfrak{B}$. $\square$

Proposition 6.4 is not true for arbitrary similarity types. Let $L = \{P, f\}$ where P is a monadic relation symbol and f a monadic function symbol. Consider the L-structure $\mathfrak{A} = (\{0,1\}, P^{\mathfrak{A}}, f^{\mathfrak{A}})$, where $P^{\mathfrak{A}} = \{0\}$, $f^{\mathfrak{A}}(0) = 0$ and $f^{\mathfrak{A}}(1) = 0$ and the L-structure $\mathfrak{B} = (\{0,1\}, P^{\mathfrak{B}}, f^{\mathfrak{B}})$, where $P^{\mathfrak{B}} = \{0\}$, $f^{\mathfrak{B}}(0) = 1$ and $f^{\mathfrak{B}}(1) = 0$. Clearly $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ satisfy condition iii) of Proposition 6.4 but $\mathfrak{A} \models \forall x P f x$ and $\mathfrak{B} \not\models \forall x P f x$. Thus, they do not satisfy the same equality-free universal sentences.

Now we give a proof of our claim using Proposition 6.4. We can distinguish two cases. Case I: $\lambda < \mu$. Take $L = \{R\}$, where R is a binary relation symbol. Let $\mathfrak{A} = (\lambda + 1, <)$, where $<$ is the usual well-ordering of the ordinal $\lambda + 1$ and let $\mathfrak{B}$ be the substructure of $\mathfrak{A}$ with domain λ. Using Proposition 6.4 it is easy to check that $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ satisfy exactly the same universal sentences of $L^-_{\kappa\lambda}$ and, therefore, they satisfy exactly the same universal Horn sentences of $L^-_{\kappa\lambda}$. But clearly they do not satisfy the same universal Horn sentences of $L^-_{\mu\mu}$, because the sentence

$$\forall \{x_\xi : \xi \leq \lambda\} \bigvee_{\rho < \xi \leq \lambda} \neg R x_\rho x_\xi$$

is true in $\mathfrak{B}$ but not in $\mathfrak{A}$. Therefore, $K = \mathbf{H}^{-1}_{\mathbf{S}} \mathbf{H}_{\mathbf{S}} \mathbf{S} \mathbf{P}_{\mathbf{R}_\mu}(M)$ is not axiomatizable by a set of universal Horn sentences of $L^-_{\kappa\lambda}$.

Case II: $\lambda \geq \mu$. We can find a class that is axiomatizable by a set of universal Horn sentences of $L^-_{\kappa\lambda}$ and it is not axiomatizable by a set of universal Horn sentences of $L^-_{\mu\mu}$. Take $L = \{P_\xi : \xi \in \mu\}$, where for each $\xi \in \mu$, P_ξ is a monadic relation symbol.

Consider the following sentence of $L^-_{\kappa\lambda}$,

$$\sigma = \forall x \bigvee_{\xi \in \mu} \neg P_\xi x.$$

Let $\mathfrak{A} = (\mu, P^{\mathfrak{A}}_\xi)_{\xi\in\mu}$, where for any $\xi \in \mu$, $P^{\mathfrak{A}}_\xi = \{\alpha \in \mu : \xi \le \alpha\}$, and $\mathfrak{B} = (\mu + 1, P^{\mathfrak{B}}_\xi)_{\xi\in\mu}$, where for any $\xi \in \mu$, $P^{\mathfrak{B}}_\xi = \{\alpha \in \mu + 1 : \xi \le \alpha\}$. Using Proposition 6.4, it is easy to check that for any $L_0 \subseteq L$ with $|L_0| < \mu$, $\mathfrak{A} \restriction L_0$ and $\mathfrak{B} \restriction L_0$ satisfy exactly the same universal sentences of the infinitary language $(L_0)^-_{\mu\mu}$. Hence $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ satisfy exactly the same universal sentences of $L^-_{\mu\mu}$ and therefore, they satisfy the same universal Horn sentences of $L^-_{\mu\mu}$. If $\mathrm{Mod}(\sigma)$ were axiomatizable by a set of universal Horn sentences of $L^-_{\mu\mu}$, we would have $\mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}(\sigma)$, because $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}(\sigma)$, but it is clear that $\mathfrak{B} \notin \mathrm{Mod}(\sigma)$. Thus, the class $\mathrm{Mod}(\sigma)$ is the class we are looking for. □

Now, as a consequence of Theorem 6.1 we obtain the characterization theorem for the strict universal Horn fragment. Remember that a *trivial structure* is a one-element structure in which the interpretations of the relation symbols are non-empty and therefore, in which any universal-atomic sentence is true.

Corollary 6.5 *For any class K of L-structures the following are equivalent:*

i) *K is axiomatizable by a set of strict universal Horn sentences of $L^-_{\kappa\kappa}$.*

ii) *K is closed under $\mathbf{H}^{-1}_{\mathbf{S}}, \mathbf{H}_{\mathbf{S}}, \mathbf{S}$ and $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}$ and contains a trivial structure.*

iii) *$K = \mathbf{H}^{-1}_{\mathbf{S}}\mathbf{H}_{\mathbf{S}}\mathbf{S}\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(M)$, for some class M that contains a trivial structure.*

Proof. By Theorem 6.1, using the fact that in a trivial structure any strict universal Horn sentence of $L^-_{\kappa\kappa}$ is true and any universal Horn sentence of $L^-_{\kappa\kappa}$ that is not strict is false. □

In the next theorem we improve the characterization Theorem 6.1 for $L^-_{\kappa\kappa}$ when κ is either ω or strongly compact, in terms of $\mathbf{H}^{-1}_{\mathbf{S}}$, $\mathbf{H}_{\mathbf{S}}$, $\mathbf{P}$ and $\mathbf{P}_{\mathbf{U}_\kappa}$. In the proof we use the fact that given a class of structures M, if κ is either ω or strongly compact, then $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(M) \subseteq \mathbf{SPP}_{\mathbf{U}_\kappa}(M)$. This fact can be easily proved using the same kind of arguments of the proof of Lemma 2.22 on page 216 of [BS81].

Theorem 6.6 *Let κ be either ω or strongly compact. If K is a class of L-structures the following are equivalent:*

i) *K is axiomatizable by a set of (strict) universal Horn sentences of $L^-_{\kappa\kappa}$.*

ii) *K is closed under* $\mathbf{H_S^{-1}}, \mathbf{H_S}, \mathbf{S}, \mathbf{P}$ *and* $\mathbf{P_{U_\kappa}}$ *(and contains a trivial structure).*

iii) $K = \mathbf{H_S^{-1}H_SSPP_{U_\kappa}}(M)$, *for some class M (that contains a trivial structure).*

Proof. We just prove the non-strict case. The strict case is obtained from it in the same way as Corollary 6.5 has been obtained from Theorem 6.1. i) $\Rightarrow$ ii) and ii) $\Rightarrow$ iii) are easily checked. iii) $\Rightarrow$ i) Suppose that $K = \mathbf{H_S^{-1}H_SSPP_{U_\kappa}}(M)$, for some class M. Since

$$\mathbf{PP_{U_\kappa}}(M) \subseteq \mathbf{P_{R_\kappa}P_{R_\kappa}}(M) \subseteq \mathbf{P_{R_\kappa}}(M),$$

then

$$K = \mathbf{H_S^{-1}H_SSPP_{U_\kappa}}(M) \subseteq \mathbf{H_S^{-1}H_SSP_{R_\kappa}}(M).$$

And since κ is either ω or strongly compact,

$$\mathbf{P_{R_\kappa}}(M) \subseteq \mathbf{SPP_{U_\kappa}}(M).$$

Therefore,

$$\mathbf{H_S^{-1}H_SSP_{R_\kappa}}(M) \subseteq \mathbf{H_S^{-1}H_SSPP_{U_\kappa}}(M) = K.$$

Thus,

$$K = \mathbf{H_S^{-1}H_SSP_{R_\kappa}}(M).$$

By Theorem 6.1 we conclude that K is axiomatizable by a set of universal Horn sentences of $L^-_{\kappa\kappa}$. $\square$

Now we will prove a theorem similar to Theorem 6.1 but for the infinitary language $L^-_{\infty\infty}$. The characterization can be obtained in terms of the operators $\mathbf{S}$, $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{H_S^{-1}}$ and $\mathbf{P}$, thus dispensing with the reduced products, but at the price of considering theories that are proper classes.

Theorem 6.7 *For any class K of L-structures the following are equivalent:*

i) *K is axiomatizable by a class of (strict) universal Horn sentences of $L^-_{\infty\infty}$.*

ii) *K is closed under* $\mathbf{H_S^{-1}}$, $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{S}$ *and* $\mathbf{P}$ *(and contains a trivial structure).*

iii) $K = \mathbf{H_S^{-1}H_SSP}(M)$, *for some class M (that contains a trivial structure).*

Proof. We just prove the non-strict case. The strict case is obtained from it in the same way as Corollary 6.5 has been obtained from Theorem 6.1. i) $\Rightarrow$ ii) and ii) $\Rightarrow$ iii) are clear. To prove that iii) $\Rightarrow$ i), suppose that $K = \mathbf{H_S^{-1}H_SSP}(M)$, for some class M. Let T be the universal Horn theory of M in $L^-_{\infty\infty}$, that is, the class of all universal Horn sentences of $L^-_{\infty\infty}$ true in every structure of M. We show that for any L-structure $\mathfrak{A}$, if $\mathfrak{A} \models T$, then $\mathfrak{A} \in K$. Suppose that $\mathfrak{A} \models T$. We expand the language adding a new constant symbol for each element of A. Let $|A| = \lambda$ and $\{a_\xi : \xi < \lambda\}$ be an enumeration of the new constants. Consider the $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$ in this expanded language. Let $\{x_\xi : \xi < \lambda\}$ be a set of new variables and Γ' the set obtained from $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$ by substituting, in any sentence of $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$, for any $\xi < \lambda$, the variable x_ξ for the constant a_ξ. Then, arguing like in the proof of Theorem 6.1, it can be obtained a $\mathfrak{D} \in \mathbf{P}(M)$ such that $\mathfrak{D} \models \exists\{x_\xi : \xi < \lambda\} \bigwedge \Gamma'$. Choose a set $\{d_\xi : \xi < \lambda\}$ of elements of D such that $\mathfrak{D} \models \bigwedge \Gamma' [d_\xi : \xi < \lambda]$. Then $(\mathfrak{D}, d_\xi)_{\xi<\lambda}$ is an expansion of $\mathfrak{D}$ that satisfies $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{A})$. Therefore, by Proposition 2.20, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H_S^{-1}H_S SP}(M) = K$. $\Box$

Now let us prove a characterization theorem using, instead of reduced products, the operation of direct product and the notion of κ-local class of structures. Given an infinite cardinal κ, a class K of structures is *κ-local* if any structure with the property that all its substructures generated by less than κ elements belong to K also belongs to K.

Theorem 6.8 *Let κ be a regular infinite cardinal $> \omega$ and assume that $|L| < \kappa$. For every class K of L-structures the following are equivalent:*

i) *K is axiomatizable by a set of (strict) universal Horn sentences of $L^-_{\kappa\kappa}$.*

ii) *K is κ-local and it is closed under $\mathbf{H_S^{-1}}$, $\mathbf{H_S}$, $\mathbf{S}$ and $\mathbf{P}$ (and contains a trivial structure).*

Proof. We just prove the non-strict case. The strict case is obtained from it in the same way as Corollary 6.5 has been obtained from Theorem 6.1. i) $\Rightarrow$ ii) is easy because any universal Horn sentence of $L_{\kappa\kappa}$ false in one structure it is false in a substructure of it generated by less than κ elements. ii) $\Rightarrow$ i) Let T be the universal Horn theory of K in $L^-_{\kappa\kappa}$ and $\mathfrak{A}$ a model of T. We will see that $\mathfrak{A} \in K$. Since K is κ-local we only have to prove that every substructure of $\mathfrak{A}$ generated by less than κ elements belongs to K. Let $\mathfrak{B}$ be a substructure of $\mathfrak{A}$ generated by less than κ elements. Since κ is an infinite regular cardinal, $\kappa > \omega$ and $|L| < \kappa$, we have that $|B| < \kappa$. Then $\mathsf{diag}^-(\mathfrak{B})$ is a set of power less than κ and we can argue as in the proof of Theorem 6.7 to conclude that $\mathfrak{B} \in \mathbf{H_S^{-1}H_S SP}(M) = K$. $\Box$

6.2 Equality-free reduced universal Horn classes

Now we study characterization theorems for the classes of reduced structures that are the reduced models of some universal Horn theory in $L^-_{\kappa\kappa}$. Since for any structure we have its reduction, we can consider for any operator O that transforms a class of structures K into another one $O(K)$, the corresponding operator O^* that transforms the class of structures K into the class of the structures isomorphic to some reduction of a member of $O(K)$. We will call these operators with a star *reduction operators*, and call O^* *the reduction of* O. The reduction operators were first considered in [BP92]. We will prove a theorem that characterizes when a class of reduced structures is the class of the reduced models of a universal Horn theory in $L^-_{\kappa\kappa}$. This theorem follows easily from previous results and Lemma 6.10 which studies the behaviour of some reduction operators. Its formulation is just like the one of the corresponding theorem for the full $L_{\kappa\kappa}$ (with equality) except that the operators $\mathbf{S}$ and $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}$ are replaced by their reductions.

Definition 6.9 For every class K of L-structures let K^* be the following class:

$$K^* = \{\mathfrak{B} : \text{ there is } \mathfrak{A} \in K \text{ such that } \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}^*\}.$$

And, for every operator $\mathbf{O}$, $\mathbf{O}^*$ is the operator such that for any class K of L-structures

$$\mathbf{O}^*(K) = (\mathbf{O}(K))^*.$$

The next lemma studies the behaviour of the reduction operators.

Lemma 6.10 *For every class K of L-structures and any operator $\mathbf{O} \in \{\mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}, \mathbf{P}_{\mathbf{U}_\kappa}\}$ the following holds:*

i) $\mathbf{H}^{-1*}(K^*) \subseteq K^*$.

ii) $\mathbf{H}^*(K^*) \subseteq K^*$.

iii) $\mathbf{O}^*(K) \subseteq \mathbf{O}^*(K^*)$.

Proof. i) Suppose that $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}^{-1*}(K^*)$. Let $\mathfrak{B} \in \mathbf{H}^{-1}(K^*)$ such that $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}^*$ and let h be a strict homomorphism from $\mathfrak{B}$ onto some $\mathfrak{C} \in K^*$. Then $\mathfrak{B}^* \cong \mathfrak{C}$. Therefore, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{C}$. Hence, $\mathfrak{A} \in K^*$. The proof of ii) is similar.

iii) We prove first the case where $\mathbf{O}$ is $\mathbf{S}$. Suppose that $\mathfrak{A} \in \mathbf{S}^*(K)$. Let $\mathfrak{B} \in K$ and $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{C}^*$. Let g^*_B be the canonical homomorphism from $\mathfrak{B}$ onto $\mathfrak{B}^*$. Then $\mathfrak{D} = g^*_B[\mathfrak{C}]$ is a substructure of $\mathfrak{B}^*$, so $\mathfrak{D} \in \mathbf{S}(K^*)$. Since $\mathfrak{C}^* \cong \mathfrak{D}^*$, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{D}^*$. Therefore, $\mathfrak{A} \in \mathbf{S}^*(K^*)$.

Now we prove the case where $\mathbf{O}$ is $\mathbf{P}_{\mathbf{U}_\kappa}$. Suppose that $\mathfrak{A} \in \mathbf{P}^*_{\mathbf{U}_\kappa}(K)$. Let $\mathfrak{B} \in \mathbf{P}_{\mathbf{U}_\kappa}(K)$ be such that $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}^*$ and let $\{\mathfrak{B}_i : i \in I\} \subseteq K$ be a family of L-structures and U a κ-complete proper ultrafilter over a non-empty set I such that $\mathfrak{B} = \prod_{i\in I} \mathfrak{B}_i/U$. Let $\mathfrak{C} = \prod_{i\in I} \mathfrak{B}^*_i/U$. Then, if for each $i \in I$, $g^*_{B_i}$ is the canonical homomorphism from $\mathfrak{B}_i$ onto $\mathfrak{B}^*_i$, we define for each $f \in \prod_{i\in I} B_i$, $f' \in \prod_{i\in I} B^*_i$ by:

$$f'(i) = g^*_{B_i}(f(i))$$

for each $i \in I$. Then we define the function $h : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ by:

$$h([f]_U) = [f']_U$$

for each $f \in \prod_{i \in I} B_i$. Since the canonical homomorphisms $g^*_{B_i}$ are strict, it is straightforward to check that this definition is independent of the representatives chosen and that it is a strict homomorphism from $\mathfrak{B}$ onto $\mathfrak{C}$. Therefore, $\mathfrak{B}^* \cong \mathfrak{C}^*$. Since $\{\mathfrak{B}^*_i : i \in I\} \subseteq K^*$, $\mathfrak{B}^* \in \mathbf{P}^*_{\mathbf{U}_\kappa}(K^*)$. Then we conclude that $\mathfrak{A} \in \mathbf{P}^*_{\mathbf{U}_\kappa}(K^*)$.

The proof for the remaining cases is similar to the last one given. □

Now we prove the promised theorem and the corresponding version when κ is strongly compact or ω.

Theorem 6.11 *For any class K of reduced L-structures the following are equivalent:*

i) *K is the class of reduced models of a universal Horn theory of $L^-_{\kappa\kappa}$.*

ii) *K is closed under $\mathbf{S}^*$ and $\mathbf{P}^*_{\mathbf{R}_\kappa}$.*

iii) *$K = \mathbf{S}^*\mathbf{P}^*_{\mathbf{R}_\kappa}(M)$, for some class M of L-structures.*

Proof. i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) is easy. iii) $\Rightarrow$ i) Let T be the universal Horn theory of M in $L^-_{\kappa\kappa}$. If $\mathfrak{A}$ is a reduced model of T, then, by the proof of Theorem 6.1, we have that $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}^{-1}_{\mathbf{S}}\mathbf{H}_{\mathbf{S}}\mathbf{S}\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(M)$. Therefore, since $\mathfrak{A}$ is reduced, $\mathfrak{A} \in \mathbf{S}^*\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(M)$ and by Lemma 6.10 iii) we have that $\mathfrak{A} \in K$. □

Theorem 6.12 *If κ is either a strongly compact cardinal or ω, then for any class K of reduced L-structures the following are equivalent:*

i) *K is the class of reduced models of a universal Horn theory of $L^-_{\kappa\kappa}$.*

ii) *K is closed under $\mathbf{S}^*$, $\mathbf{P}^*$ and $\mathbf{P}^*_{\mathbf{U}\kappa}$.*

iii) *$K = \mathbf{S}^*\mathbf{P}^*\mathbf{P}^*_{\mathbf{U}_\kappa}(M)$, for some class M of L-structures.*

Proof. As the proof of Theorem 6.11, but using Theorem 6.6 instead of Theorem 6.1. □

In the same way we can prove the following:

Theorem 6.13 *For any class K of reduced L-structures the following are equivalent:*

i) *K is the class of reduced models of a class of universal Horn sentences of $L^-_{\infty\infty}$.*

ii) *K is closed under* $\mathbf{S}^*$ *and* $\mathbf{P}^*$.

iii) $K = \mathbf{S}^*\mathbf{P}^*(M)$, *for some class M of L-structures.*

Proof. As the proof of Theorem 6.11, but using Theorem 6.7 instead of Theorem 6.1. □

We can also obtain from these results the corresponding results for the case of strict universal Horn sentences by adding that the classes contain a trivial structure.

Now we will give a proof of the well-known theorem that characterizes the class of models of the universal Horn theory in $L_{\kappa\kappa}$ (with equality) of a given class of structures. And with an analogous argument we can obtain the corresponding theorem for languages with equality to Theorem 6.13 substituting the operators $\mathbf{S}^*$ and $\mathbf{P}^*$ for the operators $\mathbf{S}$ and $\mathbf{P}$.

Theorem 6.14 *Let L be any similarity type. Then for any class K of L-structures the following are equivalent:*

i) *K is axiomatizable by a set of universal Horn sentences of $L_{\kappa\kappa}$.*

ii) *K is closed under* $\mathbf{S}$ *and* $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}$.

iii) $K = \mathbf{S}\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(M)$, *for some class M of L-structures.*

Proof. i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) is easy. iii) $\Rightarrow$ i) Let T be the universal Horn theory of M in $L_{\kappa\kappa}$ (with equality). We expand the similarity type L with a new binary relation symbol E and substitute the binary relation symbol E for the equality symbol in every sentence in T. Let us call the resulting theory T'. Given an L-structure $\mathfrak{A}$, let $\mathfrak{A}^E$ be the structure of type $L \cup \{E\}$, $\langle \mathfrak{A}, E^{\mathfrak{A}^E} \rangle$, where $E^{\mathfrak{A}^E}$ is the identity on the domain A of $\mathfrak{A}$. Obviously for any L-structure $\mathfrak{A}$ the $L \cup \{E\}$-structure $\mathfrak{A}^E$ is reduced. Now we consider the class of $L \cup \{E\}$-structures $M' = \{\mathfrak{A}^E : \mathfrak{A} \in M\}$. Obviously the universal Horn theory of the class M' in the language $L^-_{\kappa\kappa}$ of type $L \cup \{E\}$, is precisely the theory T'.

To prove what we want, let $\mathfrak{A}$ be an L-structure that is a model of T, we will show that $\mathfrak{A} \in K$. Clearly $\mathfrak{A}^E$ is a reduced model of T'. Therefore, by the proof of Theorem 6.11 we have that $\mathfrak{A}^E \in \mathbf{S}^*\mathbf{P}^*_{\mathbf{R}_\kappa}(M')$. Let $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{C}$ be $L \cup \{E\}$-structures such that $\mathfrak{A}^E \cong \mathfrak{C}^*$, $\mathfrak{C}$ is a substructure of $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{B}$ is the reduction of some reduced product, by a κ-complete proper filter, of some non-empty system of structures in M'. Since the interpretation of E is the identity in every structure in M', the interpretation of E in every reduced product of elements of M' must be the identity. Therefore all these reduced products are reduced structures. Hence $E^{\mathfrak{B}}$ is the identity and so is $E^{\mathfrak{C}}$. Hence $\mathfrak{C}$ is reduced and so $\mathfrak{A}^E \cong \mathfrak{C}$. Therefore $E^{\mathfrak{A}^E}$ is the identity. Hence, as is easily seen, $\mathfrak{A} \in \mathbf{S}\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(M)$. □

6.3 Interpolation and definability

We will use the previous results to obtain a joint consistency theorem, Theorem 6.17, an interpolation theorem, Theorem 6.18, and a definability theorem, Theorem 6.19. In order to prove the joint consistency theorem we first state the compactness theorem for the Horn fragment of the infinitary language $L_{\kappa\kappa}$, see [HS81], Lemma 2.

Theorem 6.15 (Compactness) *Let Γ be a set of Horn sentences of $L_{\kappa\kappa}$. If every $\Delta \subseteq \Gamma$ with $|\Delta| < \kappa$ has a model, then Γ has a model.*

Corollary 6.16 *Let $\Gamma \cup \{\sigma\}$ be a set of universal Horn sentences of $L_{\kappa\kappa}$. If $\Gamma \models \sigma$, then there is $\Delta \subseteq \Gamma$ such that $|\Delta| < \kappa$ and $\Delta \models \sigma$.*

Proof. Let $\sigma = \forall\{x_\xi : \xi < \lambda\}(\bigwedge_{\rho<\mu} \psi_\rho \to \phi)$, with $\mu < \kappa$. Let $\bar{c} = (c_\xi : \xi < \lambda)$ be a sequence of new constant symbols. If $\Gamma \models \sigma$, then $\Gamma \models \bigwedge_{\rho<\mu} \psi_\rho(\bar{c}) \to \phi(\bar{c})$. Thus $\Gamma \cup \{\psi_\rho(\bar{c}) : \rho < \mu\} \cup \{\neg\phi(\bar{c})\}$ has no model. Since the $\psi_\rho(\bar{c})$'s and $\neg\phi(\bar{c})$ are trivially equality-free universal Horn sentences of the expanded language, Theorem 6.15 applies and we can conclude that there is some subset Γ' of Γ with $|\Gamma'| < \kappa$ such that $\Gamma' \cup \{\psi_\rho(\bar{c}) : \rho < \mu\} \models \phi(\bar{c})$ and hence $\Gamma' \models \sigma$. If σ is of the form $\forall\{x_\xi : \xi < \lambda\} \bigvee_{\rho<\mu} \neg\psi_\rho$ the argument is analogous. □

Let now L_0 and L_1 be similarity types with the same function and constant symbols and with at least one relation symbol in common. Let for $i = 0, 1$, $L^i_{\kappa\kappa}$ be the infinitary language of type L_i.

Theorem 6.17 *For any sets $\Gamma_0 \subseteq L^0_{\kappa\kappa}$ and $\Gamma_1 \subseteq L^1_{\kappa\kappa}$ of equality-free universal Horn sentences, the following are equivalent:*

i) *$\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ is unsatisfiable.*

ii) *There is an equality-free universal Horn sentence $\theta \in L^0_{\kappa\kappa} \cap L^1_{\kappa\kappa}$ such that $\Gamma_0 \models \theta$ and $\Gamma_1 \models \neg\theta$.*

Proof. ii) $\Rightarrow$ i) is clear. i) $\Rightarrow$ ii) Suppose that $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ is unsatisfiable. For $i = 0, 1$, let K_i be the following class

$$K_i = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \text{ is the reduct to } L_0 \cap L_1 \text{ of some } \mathfrak{B} \in \mathrm{Mod}(\Gamma_i)\}$$

We show that K_0 is closed under $\mathbf{S}$ and $\mathbf{P_{R_\kappa}}$. On the one hand, if $\mathfrak{B}' \in K_0$ and $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{B}'$, then there is an L_0-structure $\mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{B} \models \Gamma_0$ and $\mathfrak{B}$ is an expansion of $\mathfrak{B}'$. Since $L_0 \cap L_1$ contains all the function and constant symbols of L_0, there is $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{A}$ is an expansion of $\mathfrak{A}'$. Since Γ_0 is a set of universal sentences,

$\mathfrak{A} \models \Gamma_0$ and therefore, $\mathfrak{A}' \in K_0$. Thus K_0 is closed under $\mathbf{S}$. On the other hand, as a consequence of the Expansion Theorem in [CK91] (Theorem 4.1.8), we have that K_0 is closed under $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}$.

Consider the class $K = \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{S}}\mathbf{S}\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(K_0)$. Since K_0 is closed under $\mathbf{S}$ and $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}$, $K = \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{S}}(K_0)$. We claim now that $K \cap K_1 = \emptyset$. Suppose, searching for a contradiction, that there is an $L_0 \cap L_1$-structure $\mathfrak{B}' \in K \cap K_1$. Since $\mathfrak{B}' \in K$, there is $\mathfrak{A}' \in K_0$ such that $\mathfrak{B}' \in \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{S}}(\mathfrak{A}')$. By Proposition 2.17, $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}' \in \mathbf{H}_{\mathbf{S}}(\mathfrak{C}')$, for some $\mathfrak{C}'$. Let $h : \mathfrak{C}' \twoheadrightarrow \mathfrak{A}'$ and $g : \mathfrak{C}' \twoheadrightarrow \mathfrak{B}'$ be surjective strict homomorphisms. Since $\mathfrak{A}' \in K_0$, there is an L_0-structure $\mathfrak{A}$ such that $\mathfrak{A} \models \Gamma_0$ and $\mathfrak{A}$ is an expansion of $\mathfrak{A}'$. And since $\mathfrak{B}' \in K_1$, there is an L_1-structure $\mathfrak{B}$ such that $\mathfrak{B} \models \Gamma_1$ and $\mathfrak{B}$ is an expansion of $\mathfrak{B}'$. Now we define an $L_0 \cup L_1$-structure $\mathfrak{C}$ that is an expansion of $\mathfrak{C}'$ as follows:

- For any n-adic relation symbol $R \in L_0 - (L_0 \cap L_1)$ and any $c_1, \ldots, c_n \in C'$,

$$\langle c_1, \ldots, c_n \rangle \in R^{\mathfrak{C}} \quad \text{iff} \quad \langle h(c_1), \ldots, h(c_n) \rangle \in R^{\mathfrak{A}}.$$

- For any n-adic relation symbol $R \in L_1 - (L_0 \cap L_1)$ and any $c_1, \ldots, c_n \in C'$,

$$\langle c_1, \ldots, c_n \rangle \in R^{\mathfrak{B}} \quad \text{iff} \quad \langle g(c_1), \ldots, g(c_n) \rangle \in R^{\mathfrak{B}}.$$

Observe that so defined since L_0 and L_1 have the same function and constant symbols, $\mathfrak{A} \in \mathbf{H}_{\mathbf{S}}(\mathfrak{C} \restriction L_0)$ and $\mathfrak{B} \in \mathbf{H}_{\mathbf{S}}(\mathfrak{C} \restriction L_1)$. But since Γ_0 and Γ_1 are sets of equality-free sentences and $\mathfrak{A} \models \Gamma_0$ and $\mathfrak{B} \models \Gamma_1$, we have that $\mathfrak{C} \models \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, which is absurd because $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ is unsatisfiable. Thus, we can conclude that $K \cap K_1 = \emptyset$.

Since $K = \mathbf{H}_{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{S}}\mathbf{S}\mathbf{P}_{\mathbf{R}_\kappa}(K_0)$, by Theorem 6.1, K is axiomatizable by a set Δ of equality-free universal Horn sentences of $L^0_{\kappa\kappa} \cap L^1_{\kappa\kappa}$. Since $K_0 \subseteq K$, $\Gamma_0 \models \Delta$ and since $K \cap K_1 = \emptyset$, $\Gamma_1 \cup \Delta$ is unsatisfiable. By Theorem 6.15, there is $\Delta_0 \subseteq \Delta$ with $|\Delta_0| < \kappa$ such that $\Gamma_1 \cup \Delta_0$ is unsatisfiable. Let θ be the conjunction of all the sentences in Δ_0. Clearly $\theta \in L^0_{\kappa\kappa} \cap L^1_{\kappa\kappa}$ and θ is equivalent to an equality-free universal Horn sentence such that $\Gamma_0 \models \theta$ and $\Gamma_1 \models \neg\theta$. Therefore, condition ii) holds. □

Theorem 6.18 *For any universal Horn sentences $\phi_0, \phi_1 \in L^-_{\kappa\kappa}$ such that $\phi_0 \models \neg\phi_1$ and they have at least a relation symbol in common, there is a universal Horn sentence $\theta \in L^-_{\kappa\kappa}$ such that:*

i) *$\phi_0 \models \theta$ and $\theta \models \neg\phi_1$,*

ii) *For any relation symbol $R \in L$, if R occurs in θ, then R occurs in both ϕ_0 and ϕ_1.*

Proof. Let L' be the set of function and constant symbols of L. For $i = 0, 1$, let L'_i be the set of relation symbols that occur in ϕ_i and $L_i = L' \cup L'_i$. Then, L_0 and L_1 have the same function and constant symbols and $\{\phi_0\} \cup \{\phi_1\}$ is unsatisfiable. Therefore, by Theorem 6.17, we have the desired sentence that satisfies i) and ii). $\square$

We have a counterexample that shows that the following clause:

($\diamondsuit$) Every symbol of L that occurs in θ occurs in both ϕ_0 and ϕ_1

cannot be substituted for clause ii) in Theorem 6.18. Let $L = \{<, f\}$, where $<$ is a binary relation symbol and f a monadic function symbol. Let ϕ_0 be the conjunction of the following sentences:

$$\begin{array}{ll} (1) & \forall x(\neg x < x) \\ (2) & \forall x(x < f(x)) \\ (3) & \forall x \forall y \forall z(x < y \wedge y < z \rightarrow x < z) \end{array}$$

and $\phi_1 = \forall x \forall y \forall z(x < z \rightarrow y < z)$. Clearly ϕ_0 and ϕ_1 are equivalent to equality-free universal Horn sentences and $\phi_0 \models \neg\phi_1$. But there is no equality-free universal Horn sentence that satisfies i) and ($\diamondsuit$). Suppose, searching for a contradiction, that such a sentence exists, say θ. The similarity type of θ would be $\{<\}$, because of ($\diamondsuit$), and every model of θ would have more than one element, since by i), $\theta \models \neg\phi_1$. Let $\mathfrak{A}$ be a model of θ of similarity type $\{<\}$ and $a \in A$ arbitrary. If $\mathfrak{A}'$ is the substructure of $\mathfrak{A}$ generated by $\{a\}$, $\mathfrak{A}'$ has only one element in its domain and $\mathfrak{A}' \models \theta$, because θ is a universal sentence, which is absurd.

Theorem 6.19 *Let L be an arbitrary similarity type with a relation symbol R and such that $L - \{R\}$ has at least one relation symbol. For any set Γ of universal Horn sentences of $L^-_{\kappa\kappa}$ the following are equivalent:*

i) *Γ implicitly defines R (that is, if $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models \Gamma$ and the reducts of $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ to $L - \{R\}$ are the same, then $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$).*

ii) *There is a universal Horn formula $\phi(\overline{x}) \in L^-_{\kappa\kappa}$ such that ϕ is an explicit definition of R with respect to Γ (that is, $\Gamma \models \forall\overline{x}(\phi(\overline{x}) \leftrightarrow R\overline{x})$) and all the symbols of ϕ belong to $L - \{R\}$).*

Proof. ii) $\Rightarrow$ i) is clear. ii) $\Rightarrow$ i) Let n be the arity of R. Suppose that Γ implicitly defines R. Let R' be a new n-adic relation symbol and $c_1, \ldots, c_n$ new constants. Let Γ' be the set obtained from Γ by substituting in any sentence of Γ the symbol R' for the symbol R. So we have

$$\Gamma \cup \Gamma' \models \forall x_1 \ldots x_n(Rx_1 \ldots x_n \leftrightarrow R'x_1 \ldots x_n),$$

because Γ implicitly defines R. Then,

$$\Gamma \cup \Gamma' \models Rc_1 \ldots c_n \rightarrow R'c_1 \ldots c_n.$$

By Corollary 6.16, there are $\Sigma \subseteq \Gamma$ and $\Sigma' \subseteq \Gamma'$ with $|\Sigma| < \kappa$ and $|\Sigma'| < \kappa$ such that

$$\Sigma \cup \Sigma' \models Rc_1 \ldots c_n \to R'c_1 \ldots c_n.$$

Moreover, we can find Σ and Σ' such that Σ' is obtained from Σ by substituting R' for R in every sentence of Σ. Observe that $\bigwedge \Sigma$ and $\bigwedge \Sigma'$ are equivalent to equality-free universal Horn sentences. So we have

$$\bigwedge \Sigma \wedge Rc_1 \ldots c_n \models \bigwedge \Sigma' \to R'c_1 \ldots c_n.$$

The sentence $\bigwedge \Sigma' \to R'c_1 \ldots c_n$ is equivalent to the negation of an equality-free universal Horn sentence. Therefore, by Theorem 6.18, there is an equality-free universal Horn sentence $\phi = \phi(x_1, \ldots, x_n)$, $\phi \in L^-_{\kappa\kappa}$, with relation symbols contained in $L - \{R\}$ such that

$$\bigwedge \Sigma \wedge Rc_1 \ldots c_n \models \phi(c_1, \ldots, c_n) \tag{6.1}$$

and

$$\phi(c_1, \ldots, c_n) \models \bigwedge \Sigma' \to R'c_1 \ldots c_n.$$

Since the symbols R and R' do not occur in ϕ,

$$\phi(c_1, \ldots, c_n) \models \bigwedge \Sigma \to Rc_1 \ldots c_n. \tag{6.2}$$

Moreover, by (6.1),

$$\bigwedge \Sigma \models Rc_1 \ldots c_n \to \phi(c_1, \ldots, c_n)$$

and by (6.2),

$$\bigwedge \Sigma \models \phi(c_1, \ldots, c_n) \to Rc_1 \ldots c_n.$$

Since the new constants do not occur in $\bigwedge \Sigma$,

$$\bigwedge \Sigma \models \forall x_1 \ldots x_n (\phi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow Rx_1 \ldots x_n)$$

and consequently,

$$\Gamma \models \forall x_1 \ldots x_n (\phi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow Rx_1 \ldots x_n).$$

We can conclude that ϕ is an explicit definition of R with respect to Γ. $\square$

Bibliography

[Bar68] BARWISE, J. *The syntax and semantics of infinitary languages*. Springer-Verlag, 1968. Lecture Notes in Mathematics, 72.

[Bar73] BARWISE, J. "Back and forth through infinitary logic". In: MORLEY, M. (ED.) *Studies in Model Theory,* 8. Mathematical Association of America, 1973.

[Bir35] BIRKHOFF, G. "On the structure of abstract algebras". *Proc. Camb. Phil. Soc.,* 31, (1935): 433-454.

[Blo75] BLOOM, S. L. "Some theorems on structural consequence operations". *Studia Logica,* 34, (1975): 1-9.

[BP86] BLOK, W.; PIGOZZI, D. "Protoalgebraic logics". *Studia Logica,* 45, (1986): 337-369.

[BP89] BLOK, W.; PIGOZZI, D. *Algebraizable logics*. 1989. Mem. Amer. Math. Soc., 396.

[BP92] BLOK, W.; PIGOZZI, D. "Algebraic semantics for universal Horn logic without equality". In: ROMANOWSKA, A.; SMITH, J. D. H. (EDS.) *Universal Algebra and Quasigroups*. Heldermann Verlag, 1992.

[BS81] BURRIS, S.; SANKAPPANAVAR, H. P. *A course in universal algebra*. New York: Springer-Verlag, 1981.

[CF] CASANOVAS, E.; FARRE, R. "Omitting types in incomplete theories". To appear in *The Journal of Symbolic Logic*.

[Cha59] CHANG, C. C. "On unions of chains of models". *Proc. Amer. Math. Soc.,* 10, (1959): 120-127.

[CK91] CHANG, C. C.; KEISLER, J. *Model theory*. 3rd. ed. 1991. Amsterdam: North-Holland. Studies in Logic and the Fundations of Mathematics, 73.

[Cze80a] CZELAKOWSKI, J. *Model-theoretic methods in metodology of propositional calculi.* 1980. The Polish Academy of Sciences Institute of Philosophy and Sociology.

[Cze80b] CZELAKOWSKI, J. "Reduced products of logical matrices". *Studia Logica,* 39, (1980): 19-43.

[Cze81] CZELAKOWSKI, J. "Equivalential logics I". *Studia Logica,* 40, (1981): 227-236.

[Dell] DELLUNDE, P. *Boolean-valued models and logic without equality.* Preprint.

[DJ] DELLUNDE, P.; JANSANA R. "Some characterization theorems for infinitary universal Horn logic without equality". To appear in *The Journal of Symbolic Logic.*

[Dic75] DICKMANN, A. M. *Large infinitary languages.* 1975. Amsterdam: North-Holland. Studies in Logic and the Fundations of Mathematics, 83.

[EFT84] EBBINGHAUS, H. D.; FLUM, J.; THOMAS, W. *Mathematical Logic.* Berlin: Springer-Verlag, 1984.

[Elg94] ELGUETA, R. "Algebraic model theory for languages without equality". Universitat de Barcelona. 1994. Ph.D. thesis.

[Gal70] GALVIN, F. "Horn sentences". *Ann. Math. Logic,* 1, (1970): 389-422.

[Hod93a] HODGES, W. "Logical features of Horn clauses". In: GABBAY, D. M.; HOGGER, C. J. (EDS.) *Handbook of Logic in Artificial intelligence and Logic programming.* Springer-Verlag, 1993.

[Hod93b] HODGES, W. *Model Theory.* Cambridge University Press, 1993.

[HS81] HODGES, W.; SHELAH, S. "Infinite games and reduced products". *Ann. Math. Logic,* 20, (1981): 77-108.

[Jon56] JONSSON, B. "Universal relational systems". *Math. Scand.,* 4, (1956): 193-208.

[Jon60] JONSSON, B. "Homogeneous universal relational systems". *Math. Scand.,* 8, (1960): 137-142.

[Kei65] KEISLER, H. J. "Reduced products and Horn classes". *Trans. Amer. Math. Soc.,* 117, (1965): 307-328.

[Kei71] KEISLER, H. J. *Model theory for infinitary logic.* 1971. Amsterdam: North-Holland.

[Los55] Łos, J. "On the extending of models I". *Fundamenta Math.*, 42, (1955): 38-54.

[LS55] Łos, J.; Suszko, R. "On the extending of models II". *Fundamenta Math.*, 44, (1955): 52-60.

[Lyn59] Lyndon, R. C. "An interpolation theorem in the predicate calculus". *Pacific J. Math.*, 9, (1959): 129-142.

[Man72] Mansfield, R. "Horn classes and reduced direct products". *Trans. Amer. Math. Soc.*, 172, (1972): 279-286.

[McN77] McNulty, G. F. "Fragments of first order logic I: Universal Horn logic ". *J. Symbolic Logic*, 42, (1977): 221-237.

[Mon76] Monk, J. D. *Mathematical Logic.* New York: Springer-Verlag, 1976.

[Mot84] Motohashi, N. "Equality and Lyndon's interpolation theorem ". *J. Symbolic Logic*, 49, (1984): 123-128.

[MV62] Morley, M.; Vaught, R. "Homogeneous universal models". *Math. Scand.*, 11, (1962): 37-57.

[Poi85] Poizat, B. *Cours de Théorie des Modèles.* Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, 1985.

[She71] Shelah, S. "Every two elementarily equivalent models have isomorphic ultrapowers". *Israel J. Math.*, 10, (1971): 224-233.

[She78] Shelah, S. *Classification theory and the number of non-isomorphic models.* 1978. Amsterdam: North-Holland.

[Tar54] Tarski, A. "Contributions to the theory of models". *Indag. Math.*, 16, (1954): 582-588.

[Zub57] Zubieta, G. "Clases aritméticas definidas sin igualdad". *Boletín de la Sociedad Matemática Mejicana*, 2, (1957): 45-53.