JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Modulusok idempotens reduktjain teljesülő azonosságokról

Szendrei Ágnes
doktori értekezése

SZEGED
1977

TARTALOM

1. BEVEZETÉS

A dolgozatban az egységelemes gyürü feletti unitér modulusok idempotens reduktjain teljesülő azonosságokat vizsgáljuk. Pontosabban, megadjuk bizonyos ilyen modulus-reduktokon teljesülő azonosságok egy-egy bázisát. Az eredmények tárgyalását három fejezetre osztottuk, amelyek közül az első kettő szorosan kapcsolódik egymáshoz, és hátterét S. FAJTLOWICZ és J. MYCIELSKI alábbi eredménye képezi (ld. [2]):

1.1. TÉTEL. Legyen $\mathbb{R}$ a valós számtest és r egy rögzitett valós szám. Tekintsük az $\mathfrak{A}_r = \langle \mathbb{R}; \circ \rangle$ algebrát, ahol $\circ$ jelöli $\mathbb{R}$-en a $rx + (1-r)y$ kétváltozós müveletet. Akkor az

$$x \circ x = x$$

$$(x \circ y) \circ (u \circ v) = (x \circ u) \circ (y \circ v)$$

azonosságok akkor és csak akkor alkotják az $\mathfrak{A}_r$-n teljesülő azonosságok egy bázisát, ha r transzcendens szám.

[2]-ben a szerzők problémaként tüzték ki annak vizsgálatát, hogyan szól tételük analogonja kétváltozós helyett többváltozós $\circ$ müvelet esetén. A dolgozat első fejezetében ennél általánosabban tárgyaljuk ezt a kérdést. Tetszőleges egységelemes kommutativ R gyürü esetén vesszük egy (triviális annullátor ideálu) R-modulus egy $\langle n_0, n_1, \ldots, n_\gamma, \ldots \rangle$ $(\gamma < \alpha)$ tipusu $\mathfrak{M} = \langle M; \{f_\gamma \mid \gamma < \alpha\} \rangle$ reduktját, ahol

$$f_\gamma(x_0, \ldots, x_{n_\gamma - 1}) = \sum_{i < n_\gamma} r_i^\gamma x_i \quad \text{és} \quad \sum_{i < n_\gamma} r_i^\gamma = 1 \quad (\gamma < \alpha).$$

Megadunk egy Σ azonossághalmazt, amely minden ilyen $\mathfrak{M}$ algebrán teljesül, majd pedig egy szükséges és elegendő feltételt adunk meg arra, hogy Σ bázisa legyen az $\mathfrak{M}$-en teljesülő azonosságok halmazának. Eredményünk az $\alpha=1$, $n_0=2$ speciális esetben visszaadja az 1.1. Tételt.

A második fejezetben - az előző rész eredményeire támaszkodva - jellemezzük a végtelen ciklikus csoport teljes idempotens reduktja által generált nem indexelt varietást. Egyben kiadódik a kommutativ gyürük feletti modulusok teljes idempotens reduktjainak müveletklónjait tartalmazó legszükebb heterogén varietás egy azonosságbázisa is.

A dolgozat harmadik részében vizsgált probléma kapcsolatban áll bizonyos korábbi eredményeinkkel. [6]-ban foglalkoztunk azokkal a modulusokkal, amelyeknek az idempotens reduktjai speciális reduktok metszeteként állnak elő és jellemeztük azokat a gyürüket, amelyek felett bármely modulus bármely idempotens reduktja ilyen. (E fejezet során a későbbiekben még kitérünk ezek közül azoknak az eredményeknek az ismertetésére, amelyekre a jelen dolgozatban is szükségünk lesz.) Most ezeket a reduktokat más szempontból vizsgáljuk. Megadjuk mindegyikhez a rajtuk teljesülő azonosságok halmazának egy bázisát, majd szükséges és elegendő feltételt adunk arra, hogy ez az azonosságbázis véges legyen. Rámutatunk az általános tétel alkalmazási lehetőségeire is. [5] fő eredményének felhasználásával rögtön adódik például, hogy egy Abel-csoport egy idempotens reduktján teljesülő azonosságok halmaza mindig véges bázisu. Egy másik következmény az, hogy ha r racionális szám és $r(1-r) \leq 0$, akkor az 1.1. Tételben szereplő $\mathfrak{A}_r$ algebrán teljesülő azonosságok halmaza is véges bázisu. Ez utóbbi részleges válasz egy - ugyancsak S. FAJTLOWICZ és J. MYCIELSKI által [2]-ben felvetett - problémára amely azt kérdezi, hogy milyen feltételek mellett lesz véges bázisa az $\mathfrak{A}_r$-en teljesülő azonosságok halmazának.

A terminológiát, jelöléseket és az alapvető univerzális algebrai alapfogalmakat [3]-ból vettük át. Az egyetlen lényeges eltérés az, hogy jelölésben általában nem teszünk különbséget a müveleti jel illetve annak különböző algebrákban levő realizációi között. Polinomiális müvelet helyett rendszerint müveletet mondunk.

Legfontosabb segédeszközünk a heterogén klón fogalma, amely W. TAYLOR-tól származik. [7]-ben az olyan $\langle\langle A_k \mid 0<k<\omega\rangle;$ $\{C^n_m \mid 0<m,n<\omega\} \cup \{e^n_i \mid i<n<\omega\}\rangle$ heterogén algebrákat nevezi klónnak, ahol

$$C^n_m : A_n \times A^n_m \to A_m,$$

$$e^n_i : \{\emptyset\} \to A_n,$$

és teljesülnek a következő azonosságok:

$$(CL^{(1)}_{p,m,n}) \quad \begin{aligned} &C^p_m(h^p_o\ C^n_m(g^n_o, f^m_o, \ldots, f^m_{n-1}), \ldots, C^n_m(g^n_{p-1}, f^m_o, \ldots, f^m_{n-1})) = \\ &= C^n_m(C^p_n(h^p_o, g^n_o, \ldots, g^n_{p-1}), f^m_o, \ldots, f^m_{n-1}), \quad (0<n,m,p<\omega) \end{aligned}$$

$$(CL^{(2)}_{m,n,i}) \quad C^n_m(e^n_i, f^m_o, \ldots, f^m_{n-1}) = f^m_i, \quad (0<m<\omega,\ i<n<\omega)$$

$$(CL^{(3)}_n) \quad C^n_n(f^n_o, e^n_o, \ldots, e^n_{n-1}) = f^n_o, \quad (0<n<\omega).$$

Az itt felsorolt azonosságok halmazát jelöljük $\mathbb{CL}$-lel. A C^n_m müveleteket szuperpoziciónak, az e^n_i nullaváltozós müveletek által kijelölt elemeket pedig projekcióknak nevezzük. Világos, hogy tetszőleges $\mathfrak{A}$ algebra polinomiális müveleteinek $\langle P^{(n)}(\mathfrak{A}) \mid 0<n<\omega\rangle$ rendszere a müveletek szuperpoziciójára és a projekciókat kiválasztó 0-változós müveletekre a fenti értelemben klónt alkot. Ezt a klónt $\mathfrak{A}$ müveletklónjának fogjuk nevezni. ($\mathfrak{A}$ 0-változós müveleteinek kizárása nem jelenti lényegében az általánosság csorbitását.) Megállapodunk abban, hogy a következőkben $P(\mathfrak{A})=\bigcup(P^{(n)}(\mathfrak{A}) \mid 0<n<\omega)$-t is $\mathfrak{A}$ müveletklónjának tekintjük. Két algebrát ekvivalensnek hivunk, ha klónjaik megegyeznek.

A részalgebra, homomorfizmus, direkt szorzat fogalma heterogén algebrákra szó szerint átvihető. Beszélhetünk heterogén algebrák, speciálisan klónok, varietásairól, és érvényben marad a Birkhoff-tétel (ld. [7]).

Legyen $\mathfrak{A}=\langle A;F\rangle$ tetszőleges algebra. $\mathfrak{A}$ reduktján olyan $\langle A;F'\rangle$ algebrát értünk, amelyre $F'\subseteq P(\mathfrak{A})$ teljesül. Ha F' minden f eleme idempotens, akkor $\langle A,F'\rangle$-t $\mathfrak{A}$ idempotens reduktjának nevezzük. $\mathfrak{A}$-nak azt a reduktját, amelynek müveletklónja $\mathfrak{A}$ összes idempotens müveletéből áll, $\mathfrak{A}$ teljes idempotens reduktjának, azt pedig, amelyiknek müveletklónja csak projekciókat tartalmaz, $\mathfrak{A}$ triviális reduktjának fogjuk nevezni. Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{A}$ reduktjait ekvivalenciától eltekintve egyértelmüen meghatározzák $\mathfrak{A}$ müveletklónjának részklónjai, és viszont.

Univerzális algebrai vizsgálatoknál sokszor előfordul, hogy egy algebrának csak a müveletklónja a lényeges, függetlenül attól, hogy mely müveletek voltak az alapmüveletei. Ilyenkor nem indexelt algebrákról beszélünk. A nem indexelt algebrákat alaphalmazukkal és müveletklónjukkal szokás megadni. S. FAJTLOWICZ [1]-ben részletes áttekintést ad arról, hogy lehet a (gyenge) izomorfizmus, homomorfizmus, szorzat és részstruktura (ő ez utóbbit reduktnak nevezi, de ez nem egyezik meg az általunk használt redukt fogalommal) fogalmát bevezetni a nem indexelt algebrák kategóriájában. Bevezet egy megfelelő azonosság-fogalmat, és rámutat arra, hogy a Birkhoff-tétel nem indexelt algebrák varietásaira is érvényben marad. Az azonosságok alakját figyelembe véve könnyen látható, hogy kölcsönösen egyértelmü megfeleltetés van a nem indexelt algebrák varietásai és a klónok varietásai közt. Nevezetesen, ha $\mathcal{V}$ nem indexelt algebrák egy varietása, akkor a $\mathcal{V}$-beli algebrák müveletklónjai alkotta $C_{\mathcal{V}}$ osztály $\mathbf{I}(C_{\mathcal{V}})$ izomorf lezárja klón-varietás, és forditva, ha $\mathcal{C}$ klón-varietás, akkor az összes olyan $\mathfrak{A}$ algebrák $V_{\mathcal{C}}$ osztálya, ahol $P(\mathfrak{A})\in\mathcal{C}$, nem indexelt varietás. Sőt, mivel bármely absztrakt klón izomorf valamely algebra müveletklónjával, $\mathbf{I}(C_{V_{\mathcal{C}}})=\mathcal{C}$.

Legyen Σ azonosságok egy halmaza, $p_0=p_1$ pedig egy további azonosság. A szokásos $\Sigma\vdash p_0=p_1$ vagy $p_0\overset{\Sigma}{=}p_1$ jelölést használjuk annak kifejezésre, hogy a $p_0=p_1$ azonosság benne van Σ lezártjában. Még egy megállapodás: ha α tetszőleges rendszám, $\underline{\alpha}$-sal fogjuk jelölni a $\{\gamma\mid\gamma<\alpha\}$ halmazt.

Gyürün a továbbiakban mindig asszociativ gyürüt fogunk érteni. Egységelemes gyürü egységelemét mindig 1 fogja jelölni. Z lesz az egész számok gyürüje, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ illetve $\mathbb{R}$ pedig rendre az egész, racionális illetve valós számok halmaza. Legyen α tetszőleges rendszám. Azt mondjuk, hogy az R egységelemes gyürü $I_\gamma(\gamma<\alpha)$ ideáljai páronként relativ primek, ha vagy $\alpha=1$ vagy pedig $\alpha\geq 2$ és mindegyik $I_\gamma(\gamma<\alpha)$ különbözik R-től, továbbá $I_\beta+I_\gamma=R$ teljesül, valahányszor $\beta\neq\gamma$ $(\beta,\gamma<\alpha)$. Ha $\mathcal{J}=\{I_\gamma|\gamma<\alpha\}$ az R gyürü páronként relativ prim ideáljainak egy halmaza, akkor $\Pi_{\mathcal{J}}$-vel jelöljük az $\underline{\alpha}$ halmaz összes olyan π véges particiójának a halmazát, amelyre R-nek a $\bigcap(I_\gamma|\gamma\in B)$ $(B\in\pi)$ ideáljai páronként relativ primek. A π particióhoz tartozó ekvivalencia-relációt ε_π fogja jelölni.

Unitér balmodulus helyett röviden modulust fogunk csak mondani. Legyen R tetszőleges egységelemes gyürü, $\mathfrak{M}$ pedig egy R-modulus. Nyilvánvalóan $\mathfrak{M}$ bármely n-változós müvelete $\langle m_0,\dots,m_{n-1}\rangle\longmapsto r_0m_0+\dots+r_{n-1}m_{n-1}$ alaku, ahol $r_0,\dots,r_{n-1}\in R$. Ezt a müveletet $r_0x_0+\dots+r_{n-1}x_{n-1}|_{\mathfrak{M}}$, vagy röviden $\sum\limits_{i<n}r_ix_i|_{\mathfrak{M}}$ fogja jelölni. Ez a müvelet akkor és csak akkor idempotens, ha $1-\sum\limits_{i<n}r_i$ benne van $\mathfrak{M}$ annulátor ideáljában. Ebből világos, hogy $\mathfrak{M}$ bármely idempotens müvelete előáll $\sum\limits_{j<n}r_jx_j|_{\mathfrak{M}}$ alakban, ahol $\sum\limits_{i<n}r_i=1$ $(r_i\in R,\ i<n)$.

Legyen S az R gyürü egy részgyürüje. $Cl_{\mathfrak{M}}(S)$-sel fogjuk jelölni az

$$s_0x_0+\dots+s_{j-1}x_{j-1}+(1+s_j)x_j+s_{j+1}x_{j+1}+\dots+s_{n-1}x_{n-1}|_{\mathfrak{M}}$$

alaku müveletek alkotta klónt, ahol $j<n<\omega$, $s_i\in S(i<n)$ és $\sum\limits_{i<n}s_i=0$. Speciálisan, $Cl_{\mathfrak{M}}(R)$ éppen $\mathfrak{M}$ teljes idempotens reduktjának müveletklónja, $Cl_{\mathfrak{M}}(\{0\})$ pedig $\mathfrak{M}$ triviális reduktjának a müveletklónja.

Befejezésül idézzük azokat az eredményeket [6]-ból, amelyekre a harmadik fejezetben szükségünk lesz.

1.2. TÉTEL. Tetszőleges R egységelemes gyürüre a következő két állitás ekvivalens:

(i) Bármely R feletti $\mathfrak{M}$ modulus bármely idempotens reduktjának müveletklónja előáll $\bigcap(Cl_{\mathfrak{M}}(S_\gamma)|\gamma<\alpha)$ alakban, ahol mindegyik $S_\gamma(\gamma<\alpha)$ R-nek egy részgyürüje.

(ii) R bármely r eleméhez léteznek olyan $n(>0)$, $a_0,\dots,a_n,b_0,\dots,b_n$ természetes számok, hogy $a_i+b_i\leq\binom{n}{i}$ $(0\leq i\leq n)$ és R-ben

$$\sum_{i\leq n} a_i r^i(1-r)^{n-i}=1,\quad \sum_{i\leq n} b_i r^i(1-r)^{n-i}=r(1-r)$$

teljesül.

1.3. TÉTEL. Az előző tétel ekvivalens feltételeit kielégitő egységelemes gyürük K osztályában benne van az egész számok gyürüje, továbbá minden véges karakterisztikáju gyürü.

Az 1.2. Tétel a következő egyértelmü reprezentációs tétellel egészithető ki:

1.4. TÉTEL. Legyen adott egy $R\in K$ gyürü, $\mathfrak{M}$ pedig legyen egy triviális annullátor ideálu R-modulus. Ekkor $\mathfrak{M}$ bármely idempotens reduktjának müveletklónja egyértelmüen állitható elő $\bigcap(Cl_{\mathfrak{M}}(I_\gamma)|\gamma<\alpha)$ alakban, ahol $\mathcal{J}=\{I_\gamma|\gamma<\alpha\}$ az R részgyürüinek olyan halmaza, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

(a) Mindegyik $I_\gamma(\gamma<\alpha)$ az 1 egységelemmel együtt R-nek ugyanazt az $R_{\mathcal{J}}$ részgyürüjét generálja, és az $I_\gamma(\gamma<\alpha)$ részgyürük páronként relativ prim ideáljai $R_{\mathcal{J}}$-nek.

(b) Bárhogyan is választjuk ki a $\Pi_{\mathcal{J}}$-beli π partícióknak egy-egy B_π blokkját olymódon, hogy ha

$\pi \le \bar{\pi}$, akkor $B_\pi \subseteq B_{\bar{\pi}}$, mindig $\bigcap(B_\pi \mid \pi \in \Pi_{\mathcal{J}}) \ne \emptyset$.

(c) Bármely $\beta(<\alpha)$-ra fennáll a következő egyenlőség:

$$\bigcup\left(\bigcap(I_\gamma \mid \gamma \varepsilon_\pi \beta) \mid \pi \in \Pi_{\mathcal{J}}\right) = I_\beta .$$

Megjegyezzük, hogy ha α véges akkor az (a) feltétel teljesüléséből következik a (b) és (c) feltétel teljesülése, ha viszont α végtelen, akkor (b) és (c) független egymástól és (a)-tól is.

A $\bigcap(\mathrm{Cl}_{\mathfrak{M}}(I_\gamma) \mid \gamma < \alpha)$ alaku klónok egy-egy generátorrendszerét adja meg a következő tétel.

1.5. TÉTEL. Legyen R tetszőleges egységelemes gyürü ($1 \in R$), s tekintsük R-nek egy 1-et tartalmazó R' részgyürüjét. Legyen $\mathcal{J} = \{I_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$ R' páronként relativ prim ideáljainak egy halmaza.

(i) Akkor minden $\Pi_{\mathcal{J}}$-beli π particióhoz létezik R'-ben a π blokkjaival indexelt elemeknek egy olyan i_B^π $(B \in \pi)$ rendszere, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

$$\sum_{B \in \pi} i_B^\pi = 1 \qquad \text{és} \qquad i_B^\pi \in \bigcap(I_\gamma \mid \gamma < \alpha, \gamma \notin B).$$

(ii) Tekintsünk $\Pi_{\mathcal{J}}$-ben egy π és egy $\bar{\pi}$ particiót ugy, hogy $\pi \ge \bar{\pi}$, és vegyünk egy-egy - az (i)-beli feltételeknek eleget tevő - i_B^π $(B \in \pi)$ illetve $i_{\bar{B}}^{\bar{\pi}}$ $(\bar{B} \in \bar{\pi})$ elemrendszert. Akkor π tetszőleges B blokkjára

$$i_B^\pi - \sum_{\bar{B} \subseteq B} i_{\bar{B}}^{\bar{\pi}} \in \bigcap(I_\gamma \mid \gamma < \alpha).$$

(iii) Legyen $\mathfrak{M}$ tetszőleges triviális annullátor ideálu R-modulus. Ekkor akárhogyan rögzitjük az (i)-beli feltételeket kielégitő i_B^π elemeket, a $\bigcap(\mathrm{Cl}_{\mathfrak{M}}(I_\gamma) \mid \gamma < \alpha)$ klónt generálja *bármelyik olyan*

$$\mathrm{Cl}_{\mathfrak{M}}(\bigcap(I_\gamma \mid \gamma<\alpha)) \cup \{\sum_{B\in\pi} i_B^{\pi} x_B|_{\mathfrak{M}} \mid \pi \in H\}$$

halmaz, ahol $H \subseteq \Pi_{\mathcal{J}}$ *és* H *mindegyik* $\Pi_{\mathcal{J}}$*-beli particiónak tartalmazza valamelyik finomitását.*

Itt az (i) állitásból rögtön következik az

1.6. KÖVETKEZMÉNY. *Ha* $\mathcal{J} = \{I_\gamma \mid \gamma<\alpha\}$ *egy* R *egységelemes gyürü páronként relativ prim ideáljainak egy halmaza, akkor* $\Pi_{\mathcal{J}}$ *az* α *halmaz összes particiói halmazának duális ideálja.*

Végül megfogalmazzuk [5] fő eredményét, ami az 1.3. és 1.4. Tétel következményeként is adódik.

1.7. TÉTEL. *Legyen* $\mathcal{G}$ *egy* $n(\geq 0)$ *exponensü Abel-csoport. Akkor* $\mathcal{G}$ *bármely - n=0 esetén bármely triviálistól különböző - idempotens reduktjának müveletklónja egyértelmüen előáll*

$$\bigcap(\mathrm{Cl}_{\mathcal{G}}(p_i) \mid i<m)$$

alakban, ahol $m \geq 0$, $p_0,\dots,p_{m-1}(>1)$ *páronként relativ primek és* n *osztható* $p_0\dots p_{m-1}$*-gyel.*

2. S.FAJTLOWICZ ÉS J.MYCIELSKI EGY TÉTELÉNEK ÁLTALÁNOSITÁSA

Legyen R tetszőleges egységelemes kommutativ gyürü, $\mathfrak{M}$ pedig egy R-modulus. Tekintsük $\mathfrak{M}$-nek egy $\langle M; \{f_\gamma \mid \gamma<\alpha\}\rangle$ idempotens reduktját, ahol f_γ $(\gamma<\alpha)$ aritása $n_\gamma(\geq 1)$. Könnyen látható, hogy ezen teljesülnek a következő azonosságok:

$$(I_0^\gamma) \qquad f_\gamma(x_0,\dots,x_0)=x_0 \qquad (\gamma<\alpha)$$

$$\begin{aligned}(I_{ij}^\gamma) \quad & f_\gamma(f_\gamma(x_0,\dots,x_{n_\gamma-1}),\dots,f_\gamma(x_{in_\gamma},\dots,x_{in_\gamma+n_\gamma-1}),\dots,\\ & f_\gamma(x_{jn_\gamma},\dots,x_{jn_\gamma+n_\gamma-1}),\dots,f_\gamma(x_{(n_\gamma-1)n_\gamma},\dots,x_{(n_\gamma-1)n_\gamma+n_\gamma-1})) =\\ & = f_\gamma(f_\gamma(x_{[0]^*},\dots,x_{[n_\gamma-1]^*}),\dots,f_\gamma(x_{[in_\gamma]^*},\dots,x_{[in_\gamma+n_\gamma-1]^*}),\dots,\\ & f_\gamma(x_{[jn_\gamma]^*},\dots,x_{[jn_\gamma+n_\gamma-1]^*}),\dots,f_\gamma(x_{[(n_\gamma-1)n_\gamma]^*},\dots,x_{[(n_\gamma-1)n_\gamma+n_\gamma-1]^*}))\\ & \qquad (\gamma<\alpha,\ i<j<n_\gamma),\end{aligned}$$

ahol

$$[k]^* = \begin{cases} jn_\gamma+i, & \text{ha} \quad k=in_\gamma+j \\ in_\gamma+j, & \text{ha} \quad k=jn_\gamma+i \\ k, & \text{különben} \end{cases}$$
$$(k<n_\gamma^2)$$

$$\begin{aligned}(A^{\beta\gamma}) \quad & f_\beta(f_\gamma(x_0,\dots,x_{n_\gamma-1}),\dots,f_\gamma(x_{(n_\beta-1)n_\gamma},\dots,x_{(n_\beta-1)n_\gamma+n_\gamma-1})) =\\ & = f_\gamma(f_\beta(x_0,x_{n_\gamma},\dots,x_{(n_\beta-1)n_\gamma}),f_\beta(x_1,x_{n_\gamma+1},\dots,x_{(n_\beta-1)n_\gamma+1}),\dots,\\ & f_\beta(x_{n_\gamma-1},x_{n_\gamma+n_\gamma-1},\dots,x_{(n_\beta-1)n_\gamma+n_\gamma-1}))\\ & \qquad (\beta<\gamma<\alpha).\end{aligned}$$

(I_0^γ) $(\gamma<\alpha)$ illetve $(A^{\beta\gamma})$ $(\beta,\gamma<\alpha)$ az alapmüveletek idempotenciáját illetve felcserélhetőségét kifejező jól ismert azonosságok. Az (I_{ij}^{γ}) $(i<j<n_{\gamma}, \gamma<\alpha)$ azonosság az $n_{\gamma}=2$ esetben egybeesik az $(A^{\gamma\gamma})$ azonossággal, ha azonban $n_{\gamma}\geq 3$, akkor az (I_{ij}^{γ}) $(i<j<n_{\gamma})$ azonosságok együttesen az f_{γ} alapmüveletnek az önmagával való felcserélhetőségnél erősebb tulajdonságát fejezik ki. A sokszor alkalmazott mátrixos jelölésmód segitségével az (I_{ij}^{γ}) azonosság a következő egyszerübb alakba irható:

$$(f_{\gamma}X)f_{\gamma}=(f_{\gamma}X_{ij})f_{\gamma},$$

ahol X az $x_{kn_{\gamma}+l}$ $(k,l<n_{\gamma})$ változókból álló négyzetes mátrix és X_{ij} X-ből a $x_{in_{\gamma}+j}$ illetve $x_{jn_{\gamma}+i}$ elemek felcserélésével keletkezik.

A következőkben szükséges és elegendő feltételt adunk meg arra, hogy a fenti azonosságokból következzék bármelyik $\langle M;\{f_{\gamma}|\gamma<\alpha\}\rangle$-n teljesülő azonosság. Ezt a problémát S. FAJTLOWICZ és J.MYCIELSKI megoldotta [2]-ben abban a speciális esetben, amikor R a valós számtest, $\alpha=1$ és $n_0=2$. A most bizonyitandó tétel speciális esetként magába foglalja az ő eredményüket is. Bizonyitásunk gondolatmenete és módszere erősen támaszkodik a [2]-ben használtakra, lényegében annak általánositása, alkalmas módositása.

2.1. TÉTEL. Legyen R tetszőleges egységelemes kommutativ gyürü, $\langle M;\{f_{\gamma}|\gamma<\alpha\}\rangle$ pedig egy triviális annullátor ideálu $\mathfrak{M}$ R-modulus valamely idempotens reduktja, ahol

$$f_{\gamma}(x_0,\ldots,x_{n_{\gamma}-1}) = \sum_{i<n_{\gamma}} r_i^{\gamma}x_i \qquad \text{és} \qquad \sum_{i<n_{\gamma}} r_i^{\gamma} = 1.$$

Akkor az alábbi két állitás ekvivalens:

(i) Az $\langle M; \{f_\gamma | \gamma<\alpha\}\rangle$-n teljesülő bármely azonosság az (I_0^γ), (I_{ij}^γ), $(A^{\beta\gamma})$ $(\beta<\gamma<\alpha)$ azonosságok következménye.

(ii) Az $\bigcup(\{r_i^\gamma \mid i<n_\gamma-1\} | \gamma<\alpha)$ elemrendszer szabad generátorrendszere az általa generált R-beli kommutativ részgyürünek.

A tétel bizonyitását néhány lemmával készitjük elő, előbb azonban bevezetünk néhány jelölést. Az f_γ $(\gamma<\alpha)$ müveleti jelekből és az x_n $(n<\omega)$ változójelekből felépithető termek halmazát jelöljük P-vel. Ha α tetszőleges rendszám, legyen $\overline{\Xi}_\alpha$ az α-nál kisebb rendszámokból álló véges sorozatok halmaza, azaz $\overline{\Xi}_\alpha = \bigcup(\underline{\alpha}^n | n<\omega)$. Ha $\xi_1 \in \underline{\alpha}^n$ és $\xi_2 \in \underline{\alpha}^m$ $(m,n<\omega)$, akkor $\xi_1 * \xi_2$ jelölje a ξ_1 és ξ_2 egymás után irásával keletkező $\underline{\alpha}^{n+m}$-beli sorozatot.

Megállapodunk abban, hogy bármely ξ véges rendszámsorozat esetén ξ' jelöli a ξ-ből az első elem elhagyásával kapott sorozatot, ${}'\xi$ pedig az utolsó elem elhagyásával keletkező sorozatot. Legyen továbbá $\xi'' = (\xi')'$. Szükségünk lesz még a $\overline{\Xi}_\alpha$ halmaz következő részhalmazára:

$$\Xi_\alpha = \{\xi \in \overline{\Xi}_\alpha \mid \xi = \xi_0 * \ldots * \xi_{q-1}, \text{ ahol } q<\omega, \quad \xi_i = \langle\gamma_i, \ldots, \gamma_i\rangle$$
$$\text{és } \gamma_i \neq \gamma_j \text{ ha } i \neq j \ (i,j<q)\}.$$

Most bármely $\overline{\Xi}_\alpha$-beli ξ sorozathoz hozzárendeljük P egy P_ξ részhalmazát az alábbi definicióval. Legyen

$$P_\emptyset = \{x_n | n<\omega\},$$

amelyet a továbbiakban röviden V-vel is jelölünk, s tetszőleges $\xi \in \overline{\Xi}_\alpha$ és $\gamma<\alpha$ esetén legyen

$$P_{<\gamma>*\xi} = \{f_\gamma(p_0,\dots,p_{n_\gamma-1}) \mid p_0,\dots,p_{n_\gamma-1}\in P_\xi\} .$$

A P_ξ-beli termek egyszerüen jellemezhetők egy-egy alkalmas függvénnyel. Legyen $\xi=<\gamma_0,\dots,\gamma_{m-1}>$ $(m<\omega)$. A $g\colon \underline{n}_{\gamma_0}\times\dots\times\underline{n}_{\gamma_{m-1}}\to V$ függvényeket ξ-hez tartozó függvényeknek nevezzük, a ξ-hez tartozó függvények halmazát pedig F_ξ-vel jelöljük. Minden $<\xi,g>$ $(\xi\in\overline{\Xi}_\alpha,\ g\in F_\xi)$ párhoz hozzárendelünk egy $p(\xi,g)$ termet a következő módon. Ha $\xi=\emptyset$, legyen $p(\xi,g)=g(\emptyset)(\in V)$, ha pedig $\xi=<\gamma>*\xi'$, akkor

$$p(\xi,g)=f_\gamma(p(\xi',g_0),\dots,p(\xi',g_{n_\gamma-1})) ,$$

ahol $g_i(\varepsilon)=g(<i>*\varepsilon)$ $(i<n_\gamma)$.

A szemléletesség kedvéért egy egyszerü példán végigkövetjük a $p(\xi,g)$ term definicióját. Legyen $\alpha=2$, $n_0=2$, $n_1=3$, és válasszuk a $\xi=<0,1,0>$ sorozatot, valamint a $g(i,j,k)=x_{|i-j+k|}$ függvényt. Akkor

$$p(\xi,g)=f_0(p(\xi',g_0),p(\xi',g_1)) =$$

$$=f_0(f_1(p(\xi'',g_{00}),p(\xi'',g_{01}),p(\xi'',g_{02})),f_1(p(\xi'',g_{10}),p(\xi'',g_{11}),p(\xi'',g_{12}))) =$$

$$=f_0(f_1(f_0(x_0,x_1),f_0(x_1,x_0),f_0(x_2,x_1)),f_1(f_0(x_1,x_2),f_0(x_0,x_1),f_0(x_1,x_0))).$$

Ezek után világos a

2.2. LEMMA. <u>Tetszőleges</u> $\xi\in\overline{\Xi}_\alpha$ <u>sorozat esetén</u> $p\in P_\xi$ <u>akkor és csak akkor teljesül, ha van olyan</u> $g\in F_\xi$, <u>hogy</u> $p=p(\xi,g)$.

BIZONYITÁS. Az állitás a fenti definiciókra támaszkodva a ξ sorozat hossza szerinti indukcióval formálisan is egyszerüen igazolható.

A következőkben definiálunk minden $\xi(\in \Xi_\alpha)$-ra egy G_ξ permutációcsoportot, és megmutatjuk néhány egyszerű tulajdonságát. Legyen $\xi=\langle\gamma_0,\dots,\gamma_{m-1}\rangle$ $(m<\omega)$, S_ξ pedig az $\underline{n}_{\gamma_0}\times\dots\times\underline{n}_{\gamma_{m-1}}$ halmaz összes permutációinak halmaza. Az identikus permutációt ι-val fogjuk jelölni, az alaphalmaz feltüntetése nélkül; ez azonban nem fog félreértést okozni. Jelölje G_ξ az összes olyan $\pi\in S_\xi$ permutáció halmazát, amelyre tetszőleges $g\in F_\xi$ esetén

$$\Sigma_0=\{(I^\gamma_{ij})|\gamma<\alpha,\ i<j<n_\gamma\}\cup\{(A^{\beta\gamma})|\beta<\gamma<\alpha\}\vdash\ p(\xi,g)=p(\xi,g\pi),$$

azaz, szemléletesen kifejezve, a változók π permutációja az (I^γ_{ij}) illetve $(A^{\beta\gamma})$ azonosságok felhasználásával "megvalósitható".

Legyen először $\xi=\langle\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1}\rangle$ $(\in\underline{\alpha}^m)$ olyan, hogy $\gamma_0=\gamma_1$. Definiáljuk ekkor a $\sigma^\xi_{ij}\in S_\xi$ $(i<j<n_{\gamma_0})$ permutációt a következőképpen

$$\sigma^\xi_{ij}(\langle a,b\rangle*\varepsilon)=\begin{cases}\langle b,a\rangle*\varepsilon, & \text{ha } \{a,b\}=\{i,j\}\\ \langle a,b\rangle*\varepsilon, & \text{különben}\ .\end{cases}$$

2.3. LEMMA. <u>Ha</u> $\xi=\langle\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1}\rangle$ <u>és</u> $\gamma_0=\gamma_1$, <u>akkor tetszőleges</u> $i<j<n_{\gamma_0}$ <u>esetén</u> $\sigma^\xi_{ij}\in G_\xi$.

BIZONYITÁS. Mivel a σ^ξ_{ij} permutáció hatása egy $p\in P_\xi$ termre nem más, mint p i-edik résztermе j-edik résztermének p j-edik részterme i-edik résztermével való felcserélése, az állitás szemléletesen nyilvánvaló az $(I^{\gamma_0}_{ij})$ azonosság miatt. A formális bizonyitás is egyszerü. Definició szerint ugyanis tetszőleges $g\in F_\xi$-re

$$p(\xi,g)=f_{\gamma_0}(f_{\gamma_0}(p(\xi'',g_{00}),\ldots,p(\xi'',g_{0,n_{\gamma_0}-1})),\ldots,f_{\gamma_0}(p(\xi'',g_{n_{\gamma_0}-1,0}),\ldots,p(\xi'',g_{n_{\gamma_0}-1,n_{\gamma_0}-1})))$$

illetve

$$p(\xi,g\sigma^{\xi}_{ij})=f_{\gamma_0}(f_{\gamma_0}(p(\xi'',(g\sigma^{\xi}_{ij})_{00}),\ldots,p(\xi'',(g\sigma^{\xi}_{ij})_{0,n_{\gamma_0}-1})),\ldots$$
$$\ldots,f_{\gamma_0}(p(\xi'',(g\sigma^{\xi}_{ij})_{n_{\gamma_0}-1,0}),\ldots,p(\xi'',(g\sigma^{\xi}_{ij})_{n_{\gamma_0}-1,n_{\gamma_0}-1}))),$$

ahol

$$(g\sigma^{\xi}_{ij})_{k\ell}(\varepsilon)=g\sigma^{\xi}_{ij}(\langle k,\ell\rangle*\varepsilon)=\begin{cases} g_{ji}(\varepsilon), & \text{ha } \langle k,\ell\rangle=\langle i,j\rangle \\ g_{ij}(\varepsilon), & \text{ha } \langle k,\ell\rangle=\langle j,i\rangle \\ g_{k\ell}(\varepsilon), & \text{különben} \end{cases} .$$

Igy

$$(I^{\gamma_0}_{ij}) \vdash p(\xi,g) = p(\xi,g\sigma^{\xi}_{ij}),$$

ami állitásunkat bizonyitja.

Legyen $\xi=\langle\gamma_0,\ldots,\gamma_{m-1}\rangle$ tetszőleges sorozat, $\gamma(<\alpha)$ pedig egy rendszám. Tekintsünk $\pi_i\in S_\xi\ (i<n_\gamma)$ permutációkat és definiáljuk a $\Delta(\pi_i\mid i<n_\gamma)\in S_{\langle\gamma\rangle*\xi}$ permutációt a következőképpen:

$$\Delta(\pi_i\mid i<n_\gamma)(\langle k\rangle*\varepsilon)=\langle k\rangle*\pi_k(\varepsilon) .$$

Világos, hogy $\Delta(\pi_i\mid i<n_\gamma)$ a $p\in P_{\langle\gamma\rangle*\xi}$ termek változóinak azon permutációja, amely a $\pi_i\ (i<n_\gamma)$ permutációk p résztermeire való együttes hatását irja le.

2.4. LEMMA. <u>Legyen</u> $\xi=\langle\gamma_0,\ldots,\gamma_{m-1}\rangle\ (\in\underline{\alpha}^m)$ <u>és</u> $\gamma<\alpha$. <u>Ha</u> $\{\pi_i\mid i<n_\gamma\}\subseteq G_\xi$, <u>akkor</u> $\Delta(\pi_i\mid i<n_\gamma)\in G_{\langle\gamma\rangle*\xi}$.

BIZONYITÁS. Legyen $g \in F_{\langle\gamma\rangle * \xi}$ tetszőleges. A feltevésünkből adódik, hogy

$$\Sigma_0 \vdash p(\xi, g_i) = p(\xi, g_i \pi_i) \qquad (i < n_\gamma),$$

s igy

$$\Sigma_0 \vdash f_\gamma(p(\xi, g_0), \dots, p(\xi, g_{n_\gamma - 1})) = f_\gamma(p(\xi, g_0 \pi_0), \dots, p(\xi, g_{n_\gamma - 1} \pi_{n_\gamma - 1})) .$$

Vegyük észre, hogy a fenti azonosság bal illetve jobb oldalán álló term éppen $p(\langle\gamma\rangle * \xi, g)$ illetve $p(\langle\gamma\rangle * \xi, g(\Delta(\pi_i \mid i < n_\gamma)))$, hiszen

$$g(\Delta(\pi_i \mid i < n_\gamma))_k(\varepsilon) = g(\Delta(\pi_i \mid i < n_\gamma))(\langle k\rangle * \varepsilon) =$$

$$= g(\langle k\rangle * \pi_k(\varepsilon)) = g_k \pi_k(\varepsilon) \qquad (k < n_\gamma).$$

Ezzel a lemma állitását bebizonyitottuk.

Legyen ismét $\xi = \langle\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}\rangle$ $(\in \underline{\alpha}^m)$, és tekintsük az $\underline{m}$ halmaz egy ν permutációját. A $\langle\gamma_{\nu(0)}, \dots, \gamma_{\nu(m-1)}\rangle$ sorozatot jelöljük ξ^ν-vel, $\tilde{\nu}$ pedig legyen az alábbi leképezés:

$$\tilde{\nu} : \underline{n}_{\gamma_0} \times \dots \times \underline{n}_{\gamma_{m-1}} \longrightarrow \underline{n}_{\gamma_{\nu(0)}} \times \dots \times \underline{n}_{\gamma_{\nu(m-1)}}$$

$$\langle\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{m-1}\rangle \longmapsto \langle\varepsilon_{\nu(0)}, \dots, \varepsilon_{\nu(m-1)}\rangle .$$

2.5. LEMMA. <u>Tetszőleges</u> $\xi \in \underline{\alpha}^m$ <u>sorozat</u>, $g \in F_\xi$ <u>függvény és az</u> $\underline{m}$ <u>halmaz bármely</u> ν <u>permutációja esetén</u>

(1) $\quad \{(A^{\beta\gamma}) \mid \beta, \gamma < \alpha\} \vdash p(\xi, g) = p(\xi^\nu, g\tilde{\nu}^{-1})$.

BIZONYITÁS. Elegendő a lemma állitását elemi transzpoziciókra bizonyitani, mivel $(\xi^\nu)^\mu = \xi^{\nu\mu}$ és $\widetilde{\nu\mu} = \tilde{\mu}\tilde{\nu}$, ha ν és

μ az $\underline{m}$ halmaz tetszőleges permutációi.

Legyen tehát a továbbiakban $\nu=(k,k+1)$, g pedig tetszőleges függvény F_ξ-ben. Az állitást m szerinti teljes indukcióval bizonyitjuk. Mivel m=1 esetén az állitás triviális, tegyük fel, hogy m>1 és az állitás m-nél kisebb természetes számokra igaz.

Tekintsük először azt az esetet, amikor k>0. Legyen $\xi=\langle\gamma_0\rangle * \xi'$. Akkor

$$p(\xi,g)=f_{\gamma_0}(p(\xi',g_0),\dots,p(\xi',g_{n_{\gamma_0}-1})),$$

illetve

$$p(\xi^\nu,g\tilde{\nu}^{-1})=f_{\gamma_0}(p((\xi^\nu)',(g\tilde{\nu}^{-1})_0),\dots,p((\xi^\nu)',(g\tilde{\nu}^{-1})_{n_{\gamma_0}-1})).$$

Jelölje ν' az $\{1,\dots,m-1\}$ halmazon a (k,k+1) transzpoziciót. Akkor az utóbbi termben

$$(\xi^\nu)'=\langle\gamma_{\nu(1)},\dots,\gamma_{\nu(m-1)}\rangle=\xi'^{\nu'} \qquad \text{és}$$

(2)

$$(g\tilde{\nu}^{-1})_i(\varepsilon)=(g\tilde{\nu}^{-1})(\langle i\rangle*\varepsilon)=g(\langle i\rangle*\tilde{\nu}'^{-1}(\varepsilon))=g_i\tilde{\nu}'^{-1}(\varepsilon) \qquad (i<n_{\gamma_0}).$$

Az indukciós feltevés miatt viszont

$$\Sigma_0 \vdash p(\xi',g_i)=p(\xi'^{\nu'},g_i\tilde{\nu}'^{-1}) \qquad (i<n_{\gamma_0}),$$

igy (2)-vel való összevetéssel adódik a bizonyitandó állitás.

A k=0 eset maradt hátra. Ekkor

$$p(\xi,g)=f_{\gamma_0}(f_{\gamma_1}(p(\xi'',g_{00}),\dots,p(\xi'',g_{0,n_{\gamma_1}-1})),\dots$$
$$\dots,f_{\gamma_1}(p(\xi'',g_{n_{\gamma_0}-1,0}),\dots,p(\xi'',g_{n_{\gamma_0}-1,n_{\gamma_1}-1}))),$$

illetve

$$p(\xi^{\nu},g^{\tilde{\nu}^{-1}})=f_{\gamma_1}(f_{\gamma_0}(p((\xi^{\nu})'',(g^{\tilde{\nu}^{-1}})_{00}),\ldots,p((\xi^{\nu})'',(g^{\tilde{\nu}^{-1}})_{0,n_{\gamma_0}-1})),\ldots$$

$$\ldots,f_{\gamma_0}(p((\xi^{\nu})'',(g^{\tilde{\nu}^{-1}})_{n_{\gamma_1}-1,0}),\ldots,p((\xi^{\nu})'',(g^{\tilde{\nu}^{-1}})_{n_{\gamma_1}-1,n_{\gamma_0}-1}))).$$

Itt $(\xi^{\nu})''=\langle\gamma_{\nu(2)},\ldots,\gamma_{\nu(m-1)}\rangle=\langle\gamma_2,\ldots,\gamma_{m-1}\rangle=\xi''$ és

$$(g^{\tilde{\nu}^{-1}})_{ij}(\varepsilon)=g^{\tilde{\nu}^{-1}}(\langle i,j\rangle*\varepsilon)=g(\langle j,i\rangle*\varepsilon)=g_{ji}(\varepsilon),$$

tehát

$$(A^{\gamma_0\gamma_1})\vdash p(\xi,g)=p(\xi^{\nu},g^{\tilde{\nu}^{-1}}).$$

Ezzel a lemma bizonyitását befejeztük.

2.6. KÖVETKEZMÉNY. <u>Legyen</u> $\xi=\langle\gamma_0,\ldots,\gamma_{m-1}\rangle\in\underline{\alpha}^m$, <u>és tekintsük az m halmaz egy ν permutációját. Akkor</u>
$\tilde{\nu}^{-1}G_{\xi^{\nu}}\tilde{\nu}=G_{\xi}$.

BIZONYITÁS. Vegyük észre egyrészt azt, hogy ha $\beta<\gamma<\alpha$, akkor $A^{\beta\gamma}\vdash A^{\gamma\beta}$ másrészt pedig a 2.3. Lemma következtében tetszőleges $\gamma<\alpha$ esetén az $S_{\langle\gamma,\gamma\rangle}$ -beli $\widetilde{(0,1)}$ permutációra

$$\widetilde{(0,1)}=\prod(\sigma_{ij}^{\langle\gamma,\gamma\rangle}\mid i<j<n_{\gamma})\in G_{\langle\gamma,\gamma\rangle},$$

és igy $\{(I_{ij}^{\gamma})\mid i<j<n_{\gamma}\}\vdash(A^{\gamma\gamma})$. Ebből következik, hogy (1) helyettesithető az előző lemmában az alábbival:

$$(1)'\qquad \Sigma_0\vdash p(\xi,g)=p(\xi^{\nu},g^{\tilde{\nu}^{-1}}).$$

Ennek többszöri alkalmazásával már közvetlenül folyik az állitásunk.

A fenti három előkészitő lemma felhasználásával jellemozni tudjuk a G_{ξ} $(\xi\in\Xi_{\alpha})$ permutáció-csoportokat. E jellemzéshez szükségünk van néhány elnevezésre és jelölésre. Legyen

$\xi = \langle \gamma_0, \dots, \gamma_{m-1} \rangle \in \overline{\Xi}_\alpha$ $(m>0)$ tetszőleges sorozat. A $\langle \gamma_0, \dots, \gamma_{m-1} \rangle$ halmazt jelöljük $^\urcorner\xi$-vel. Válasszunk ki egy $\gamma \in {}^\urcorner\xi$ elemet és tekintsük azokat az $i_0 < \dots < i_{q-1} (< m)$ indexeket, amelyekre $\gamma_{i_j} = \gamma$ $(j<q)$. Legyen továbbá $\varepsilon = \langle \varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{m-1} \rangle \in \underline{n}_{\gamma_0} \times \dots \times \underline{n}_{\gamma_{m-1}}$. Ekkor ε γ-vetületének fogjuk nevezni és $\varepsilon|_\gamma$-val fogjuk jelölni az $\langle \varepsilon_{i_0}, \dots, \varepsilon_{i_{q-1}} \rangle \in \underline{n}_\gamma^q$ sorozatot.

Tetszőleges $\xi = \langle \gamma_0, \dots, \gamma_{m-1} \rangle$ esetén definiálunk egy $\sim$ ekvivalencia-relációt az $\underline{n}_{\gamma_0} \times \dots \times \underline{n}_{\gamma_{m-1}}$ halmazon a következő módon. Ha $^\urcorner\xi$ egyelemü azaz $^\urcorner\xi = \{\gamma\}$, $\varepsilon \sim \eta$ $(\varepsilon, \eta \in \underline{n}_\gamma^m)$ jelentse azt, hogy az ε és η sorozatban ugyanannyi 0-s, ugyanannyi 1-es, és igy tovább, ugyanannyi $(n_\gamma - 1)$-es van. Az általános esetben $\varepsilon \sim \eta$ $(\varepsilon, \eta \in \underline{n}_{\gamma_0} \times \dots \times \underline{n}_{\gamma_{m-1}})$ akkor és csak akkor álljon fenn, ha bármely $\gamma \in {}^\urcorner\xi$ esetén $\varepsilon|_\gamma \sim \eta|_\gamma$ teljesül.

Legyen $\pi \in S_\xi$ tetszőleges. Azt mondjuk, hogy π $\sim$-tartó, ha bármely $\varepsilon \in \underline{n}_{\gamma_0} \times \dots \times \underline{n}_{\gamma_{m-1}}$ sorozatra $\varepsilon \sim \pi(\varepsilon)$ teljesül.

2.7. LEMMA. <u>Tetszőleges</u> $\xi = \langle \gamma_0, \dots, \gamma_{m-1} \rangle \in \overline{\Xi}_\alpha$ <u>sorozat esetén</u> G_ξ <u>az</u> $\underline{n}_{\gamma_0} \times \dots \times \underline{n}_{\gamma_{m-1}}$ <u>halmaz összes</u> $\sim$<u>-tartó permutációinak halmaza.</u>

BIZONYITÁS. Jelöljük egyelőre H_ξ-vel az $\underline{n}_{\gamma_0} \times \dots \times \underline{n}_{\gamma_{m-1}}$ halmaz összes $\sim$-tartó permutációinak halmazát. A $H_\xi \subseteq G_\xi$ tartalmazás bizonyitása céljából elegendő megmutatni, hogy bármely $\sim$-relációban levő $\varepsilon, \eta (\in \underline{n}_{\gamma_0} \times \dots \times \underline{n}_{\gamma_{m-1}})$ párra az (ε, η) transzpozició benne van G_ξ-ben. A 2.6. Következmény felhasználásával adódik, hogy korlátozódhatunk az olyan G_ξ permutáció-csoportok vizsgálatára, ahol $\xi \in \Xi_\alpha$.

Legyen tehát $\xi = \xi_0 * \ldots * \xi_{q-1}$, ahol $\xi_i = \langle \beta_i, \ldots, \beta_i \rangle \in \underline{\alpha}^{k_i}$ ($k_i > 0$) és $\beta_i \neq \beta_j$ ha $i \neq j$ ($i, j < q$). ξ hosszának nevezzük és $\ell(\xi)$-vel jelöljük a $\sum(k_i \mid i<q)$ természetes számot. $\ell(\xi)$ szerinti teljes indukcióval fogjuk bebizonyitani, hogy ha $\varepsilon \sim \eta$ ($\varepsilon, \eta \in \underline{n}_{\beta_0}^{k_0} \times \ldots \times \underline{n}_{\beta_{q-1}}^{k_{q-1}}$), akkor $(\varepsilon, \eta) \in G_\xi$. Az $\ell(\xi)=0$ illetve $\ell(\xi)=1$ esetben ez nyilvánvaló, hiszen ekkor szükségképpen $\varepsilon = \eta$.

Legyen $\ell(\xi)=2$. Ha $q=2$, akkor $k_0=k_1=1$, s igy $\varepsilon = \eta$. Ha viszont $q=1$ és igy $k_0=2$, akkor vagy ismét $\varepsilon = \eta$, vagy pedig $\varepsilon = \langle i, j \rangle$ és $\eta = \langle j, i \rangle$ teljesül valamely $i, j < n_{\beta_0}$ természetes számokra. Az általánosság megszoritása nélkül feltehető, hogy $i<j$, s igy $(\varepsilon, \eta) = \sigma^\xi_{ij}$. A 2.3. Lemma felhasználásával adódik az állitásunk.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy $\ell(\xi) \geq 3$ és minden olyan $\zeta \in \Xi_\alpha$ sorozatra, amelyre $\ell(\zeta) < \ell(\xi)$, a fenti állitásunk teljesül. Legyen $\varepsilon = \varepsilon_0 * \ldots * \varepsilon_{q-1}$ illetve $\eta = \eta_0 * \ldots * \eta_{q-1}$, ahol $\varepsilon_i, \eta_i \in \underline{n}_{\beta_i}^{k_i}$ ($i<q$) és legyen $\varepsilon_0 = \langle \varepsilon_0^0, \ldots, \varepsilon_{k_0-1}^0 \rangle$ illetve $\eta_0 = \langle \eta_0^0, \ldots, \eta_{k_0-1}^0 \rangle$.

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor $\varepsilon_0^0 = \eta_0^0$. Ekkor az indukciós feltevés miatt $(\varepsilon', \eta') \in G_{\xi'}$. Ezért ha

$$\pi_i = \begin{cases} (\varepsilon', \eta'), & \text{ha} \quad i = \varepsilon_0^0 = \eta_0^0 \\ \iota, & \text{különben} \end{cases} \qquad (i < n_{\beta_0}),$$

akkor a 2.4. Lemma felhasználásával $(\varepsilon, \eta) = \Delta(\pi_i \mid i < n_{\beta_0}) \in G_\xi$, amit bizonyitani kellett.

A továbbiakban feltesszük, hogy $\varepsilon_0^0 \neq \eta_0^0$, s igy speciálisan $k_0 \geq 2$. Legyen először $k_0=2$, s igy $\ell(\xi) \geq 3$ miatt $q \geq 2$. Minthogy $\varepsilon \sim \eta$ és $\varepsilon_0^0 \neq \eta_0^0$, szükségképpen $\eta_0^0 = \varepsilon_1^0$

és $\eta_1^o = \varepsilon_o^o$, továbbá $\varepsilon'' = \varepsilon_1 * \ldots * \varepsilon_{q-1} \sim \eta'' = \eta_1 * \ldots * \eta_{q-1}$. Válasszuk a π_{ij} permutációkat a következőképpen:

$$\pi_{ij} = \begin{cases} (\varepsilon'', \eta''), & \text{ha } \langle i,j\rangle = \langle \eta_o^o, \eta_1^o\rangle \\ \iota & \text{különben} \end{cases} \quad (i,j<n_{\beta_o}).$$

Az indukciós feltevés miatt $\pi_{ij} \in G_{\xi''}$ $(i,j<n_{\beta_o})$, így a 2.4. Lemma kétszeri alkalmazásával adódik, hogy

(3) $$\pi = \Delta(\Delta(\pi_{ij} \mid j<n_{\beta_o}) \mid i<n_{\beta_o}) \in G_\xi .$$

Jelölje ν a következő permutációt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & \ell(\xi)-3 & \ell(\xi)-2 & \ell(\xi)-1 \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & \ell(\xi)-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\tilde{\nu}\pi(\varepsilon) = \varepsilon'' * \langle \varepsilon_o^o, \varepsilon_1^o\rangle \qquad \text{és} \qquad \tilde{\nu}\pi(\eta) = \varepsilon'' * \langle \eta_o^o, \eta_1^o\rangle ,$$

s így az előző bekezdésben bizonyitottak miatt $(\tilde{\nu}\pi(\varepsilon), \tilde{\nu}\pi(\eta)) \in G_{\xi^\nu}$. Vegyük észre, hogy $\pi^{-1}\tilde{\nu}^{-1}(\tilde{\nu}\pi(\varepsilon), \tilde{\nu}\pi(\eta))\tilde{\nu}\pi = (\varepsilon, \eta)$, s így a 2.6. Következmény valamint (3) felhasználásával adódik a bizonyitandó állitás.

Az az eset maradt hátra, amikor $k_o \geq 3$ és $\varepsilon_o^o \neq \eta_o^o$. Az általánosság megszoritása nélkül feltehető, hogy az $\varepsilon_1^o, \ldots, \varepsilon_{k_o-1}^o$ elemek közt van η_o^o-tól különböző, ha ugyanis ez nem teljesül, csak ε és η szerepét kell megcserélni. Legyen

$$\bar{\varepsilon}_o = \langle \bar{\varepsilon}_o^o, \ldots, \bar{\varepsilon}_{k_o-1}^o\rangle \sim \langle \varepsilon_o^o, \ldots, \varepsilon_{k_o-1}^o\rangle, \text{ ahol } \bar{\varepsilon}_o^o = \varepsilon_o^o \text{ és } \bar{\varepsilon}_1^o \neq \eta_o^o$$

továbbá

$\bar{\eta}_0 = \langle \bar{\eta}_0^0, \ldots, \bar{\eta}_{k_0-1}^0 \rangle \sim \langle \eta_0^0, \ldots, \eta_{k_0-1}^0 \rangle$, ahol $\bar{\eta}_0^0 = \eta_0^0$ és $\bar{\eta}_1^0 = \varepsilon_0^0$; különben tetszőlegesek. Tekintsük a következő permutációkat:

$$\pi_i = \begin{cases} (\varepsilon', \bar{\varepsilon}_0' * \varepsilon_1 * \ldots * \varepsilon_{q-1}), & \text{ha } i = \varepsilon_0^0 \\ (\eta', \bar{\eta}_0' * \eta_1 * \ldots * \eta_{q-1}), & \text{ha } i = \eta_0^0 \\ \iota & \text{különben.} \end{cases} \qquad (i < n_{\beta_0})$$

Az indukciós feltevésből következik, hogy $\pi_i \in G_{\xi'}$ $(i < n_{\beta_0})$, igy a 2.4. Lemma miatt $\pi = \Delta(\pi_i \mid i < n_{\beta_0}) \in G_\xi$. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\pi(\varepsilon) = \bar{\varepsilon}_0 * \varepsilon_1 * \ldots * \varepsilon_{q-1} \quad \text{és} \quad \pi(\eta) = \bar{\eta}_0 * \eta_1 * \ldots * \eta_{q-1} .$$

Legyen $\sigma = \sigma^{\xi}_{\varepsilon_0^0 \eta_0^0}$, ha $\varepsilon_0^0 < \eta_0^0$, ill. $\sigma = \sigma^{\xi}_{\eta_0^0 \varepsilon_0^0}$, ha $\varepsilon_0^0 > \eta_0^0$. A 2.3. Lemma miatt $\sigma \in G_\xi$. Vegyük észre, hogy

$$\sigma\pi(\varepsilon) = \pi(\varepsilon) = \bar{\varepsilon}_0 * \varepsilon_1 * \ldots * \varepsilon_{q-1} \quad \text{és} \quad \sigma\pi(\eta) = \langle \varepsilon_0^0, \eta_0^0 \rangle * \bar{\eta}_0'' * \eta_1 * \ldots * \eta_{q-1},$$

és igy a korábban bizonyitottak alapján $(\sigma\pi(\varepsilon), \sigma\pi(\eta)) \in G_\xi$. Akkor viszont $(\varepsilon, \eta) = \pi^{-1}\sigma^{-1}(\sigma\pi(\varepsilon), \sigma\pi(\eta))\sigma\pi \in G_\xi$, s éppen ezt akartuk bizonyitani.

Rátérünk a forditott irányu $G_\xi \subseteq H_\xi$ tartalmazás bizonyitására. Elegendő megadni egy olyan $\langle n_0, \ldots, n_\gamma, \ldots \rangle$ $(\gamma < \alpha)$ tipusu algebrát, amelyen egyrészt teljesülnek a Σ_0-beli azonosságok, másrészt bármely $\xi \in \bar{\Xi}_\alpha$ sorozathoz megadható egy $g \in F_\xi$ függvény ugy, hogy ha $\pi \in S_\xi - H_\xi$, akkor a $p(\xi, g) = p(\xi, g\pi)$ azonosság nem teljesül rajta.

Megmutatjuk, hogy egy alkalmas modulus-redukt eleget tesz a követelményeinknek. Legyen R az $\{ r_i^\gamma \mid \gamma < \alpha, i < n_\gamma \}$ rendszer által szabadon generált szabad kommutativ gyürü és legyen

$$f_\gamma(x_0,\ldots,x_{n_\gamma-1})=\sum_{i<n_\gamma} r_i^\gamma x_i .$$

Az $\mathcal{R}=\langle R;\ \{f_\gamma \mid \gamma<\alpha\}\rangle$ algebrán nyilvánvalóan teljesülnek a Σ_0-beli azonosságok. A 2.6. Következmény alapján a másik követelmény teljesülését ismét elegendő a $\xi\in\boxminus_\alpha$ sorozatokra bizonyitani. Mielőtt ehhez hozzákezdenénk, előrebocsátunk egy hasznos lemmát, amelyben leirjuk a $p(\xi,g)$ $(\xi\in\boxminus_\alpha,\ g\in F_\xi)$ termek alakját modulusreduktokban.

Legyen n tetszőleges természetes szám és $\langle t_0,\ldots,t_{n-1}\rangle\in\underline{\omega}^n$, ahol $\sum_{i<n} t_i=t$. Tekintsük azt az $\eta=\eta_0*\ldots*\eta_{n-1}\in\underline{n}^t$ sorozatot, ahol $\eta_i=\langle i,\ldots,i\rangle\in\underline{n}^{t_i}$. Az η-val $\sim$ relációban levő $\underline{n}^t$-beli sorozatok halmazát jelölje a továbbiakban $E(n,\langle t_0,\ldots,t_{n-1}\rangle)$. Nyilvánvalóan

$$|E(n,\langle t_0,\ldots,t_{n-1}\rangle)|=\frac{n!}{t_0!\ldots t_{n-1}!} .$$

Ha $n_0,\ldots,n_{q-1}$ $(q<\omega)$ tetszőleges természetes számok és $s_i\in\underline{\omega}^{n_i}$ $(i<q)$, akkor $E(n_0,s_0)*\ldots*E(n_{q-1},s_{q-1})$ fogja jelölni az összes olyan $\varepsilon_0*\ldots*\varepsilon_{q-1}$ alaku sorozat halmazát, amelyre $\varepsilon_i\in E(n_i,s_i)$ $(i<q)$.

2.8. LEMMA. <u>Legyen</u> R <u>tetszőleges kommutativ gyürü és legyen</u>

$$f_\gamma(x_0,\ldots,x_{n_\gamma-1})=\sum_{i<n_\gamma} r_i^\gamma x_i \qquad (\gamma<\alpha)$$

<u>ahol</u> $r_i\in R$ <u>tetszőleges. Legyen továbbá</u> $\xi=\xi_0*\ldots*\xi_{q-1}\in\boxminus_\alpha$, <u>ahol</u> $\xi_i=\langle\beta_i,\ldots,\beta_i\rangle\in\underline{\alpha}^{k_i}$, <u>és</u> $\beta_i\neq\beta_j$ <u>ha</u> $i\neq j$ $(i,j<q)$. <u>Akkor bármely</u> $g\in F_\xi$ <u>függvény esetén</u>

$$(4)\qquad p(\xi,g)=\sum_{\ell<\omega}\Big(\sum_{\substack{\sum_{j<n_{\beta_i}} s_{ij}=k_i\\ (i<q)}} a^{(\ell)}_{s_0*\ldots*s_{q-1}}\prod_{i<q}\prod_{j<n_{\beta_i}}(r_j^{\beta_i})^{s_{ij}}\Big)x_\ell ,$$

ahol $s_i=\langle s_{i0},\dots,s_{i,n_{\beta_i}-1}\rangle\in\omega^{n_{\beta_i}}$ és

(5) $$a^{(\ell)}_{s_0*\dots*s_{q-1}}=\big|\{\varepsilon\,|\,\varepsilon\in E(n_0,s_0)*\dots*E(n_{q-1},s_{q-1}) \text{ és } g(\varepsilon)=x_\ell\}\big|.$$

Forditva, ha az $a^{(\ell)}_{s_0*\dots*s_{q-1}}$ természetes számokra fennáll az

$$\sum_{\ell<\omega}a^{(\ell)}_{s_0*\dots*s_{q-1}}=\prod_{i<q}\frac{k_i!}{s_{i0}!\,\dots\,s_{i,n_{\beta_i}-1}!}$$

egyenlőség, valahányszor $\sum_{j<n_{\beta_i}}s_{ij}=k_i$ ($s_{ij}<\omega$, $i<q$), akkor van olyan $g\in F_\xi$ függvény, amelyre (5), és igy (4) is teljesül.

BIZONYITÁS. Az első állitás $\ell(\xi)=\sum_{i<q}k_i$ szerinti indukcióval egyszerüen igazolható, a második állitás pedig az első közvetlen következménye.

Térjünk vissza a 2.7. Lemma bizonyitására. Legyen $\xi=\xi_0*\dots*\xi_{q-1}$, ahol $\xi_i=\langle\beta_i,\dots,\beta_i\rangle\in\underline{\alpha}^{k_i}$, $\beta_i\neq\beta_j$ ha $i\neq j$ $(i,j<q)$, és válasszuk a $g\in F_\xi$ függvényt kölcsönösen egyértelmünek. Akkor a $p(\xi,g)$ term (4)-beli alakjában mindegyik $a^{(\ell)}_{s_0*\dots*s_{q-1}}$ együttható 0 vagy 1, mégpedig $a^{(\ell)}_{s_0*\dots*s_{q-1}}=1$ akkor és csak akkor teljesül, ha a $g(\varepsilon)=x_\ell$ feltételt kielégitő (egyetlen) ε sorozatra $\varepsilon\in E(n_{\beta_0},s_0)*\dots*E(n_{\beta_{q-1}},s_{q-1})$ teljesül. Hasonló érvényes bármely S_ξ-beli π permutáció esetén a $p(\xi,g\pi)$ term (4)-gyel analog előállitásában fellépő $b^{(\ell)}_{s_0*\dots*s_{q-1}}$ együtthatókra is.

Tekintsünk most egy tetszőleges $\pi\in S_\xi-H_\xi$ permutációt. Akkor létezik olyan $\varepsilon\in\underline{n}_{\beta_0}^{k_0}\times\dots\times\underline{n}_{\beta_{q-1}}^{k_{q-1}}$, amelyre $\varepsilon\not\sim\pi^{-1}(\varepsilon)$. Legyen $g(\varepsilon)=x_\ell$ és válasszuk az $s_0*\dots*s_{q-1}$ sorozatot ugy, hogy $\varepsilon \in E(n_{\beta_0}, s_0) * \ldots * E(n_{\beta_{q-1}}, s_{q-1})$. Akkor $g\pi(\pi^{-1}(\varepsilon)) = x_\ell$, de $\pi^{-1}(\varepsilon) \notin E(n_{\beta_0}, s_0) * \ldots * E(n_{\beta_{q-1}}, s_{q-1})$. Igy

$$a^{(\ell)}_{s_0 * \ldots * s_{q-1}} = 1 \quad \text{és} \quad b^{(\ell)}_{s_0 * \ldots * s_{q-1}} = 0,$$

amiből következik, hogy az $\mathfrak{A}$ algebrán nem teljesül a $p(\xi, g) = p(\xi, g\pi)$ azonosság. A lemma állitását ezzel bebizonyitottuk.

Eddig az (I_0^γ) azonosságokat nem használtuk. A következő lemmában egy olyan állitást fogalmazunk meg, amelyből speciálisan adódik, hogy $\langle n_0, \ldots, n_\gamma, \ldots \rangle$ $(\gamma < \alpha)$ tipusu idempotens Abel-féle algebrákban bármely azonosság teljesülése ekvivalens valamely $p(\xi, g_1) = p(\xi, g_2)$ azonosság teljesülésével, ahol $\xi \in \Xi_\alpha$ és $g_1, g_2 \in F_\xi$. A rövidség kedvéért vezessük be a következő jelölést: $\Sigma_1 = \{(I_0^\gamma) \mid \gamma < \alpha\} \cup \{(A^{\beta\gamma}) \mid \beta, \gamma < \alpha\}$.

2.9. LEMMA. <u>Tetszőleges</u> $p_0, \ldots, p_{k-1} \in P$ $(k < \omega)$ <u>termekhez megadható egy</u> $\xi \in \Xi_\alpha$ <u>sorozat és</u> $\bar{p}_0, \ldots, \bar{p}_{k-1} \in P_\xi$ <u>termek ugy hogy</u>

$$\Sigma_1 \vdash p_i = \bar{p}_i \qquad (i < k).$$

BIZONYITÁS. Az állitást a $p_0, \ldots, p_{k-1}$ termekben előforduló müveleti jelek $J(\{p_0, \ldots, p_{k-1}\})$ száma szerinti indukcióval bizonyitjuk. (Minden müveleti jelet annyiszor számolunk, ahányszor előfordul.) Ha ez a szám 0, akkor $p_0, \ldots, p_{k-1} \in P_\emptyset$, igy állitásunk triviálisan teljesül.

Tegyük fel, hogy $J(\{p_0, \ldots, p_{k-1}\}) = n (\geq 1)$ és állitásuk érvényes minden olyan $\{q_0, \ldots, q_\ell\} \subseteq P$ termhalmazra, amelyikre

$J(\{q_0,\dots,q_\ell\})<n$. Az általánosság megszoritása nélkül feltehető, hogy $p_0\in P-P_\emptyset$, és igy

$$p_0=f_\gamma(p_k,\dots,p_{k+n_\gamma-1})$$

valamely $\gamma<\alpha$-ra. A $\{p_1,\dots,p_{k+n_\gamma-1}\}$ halmazra alkalmazható az indukciós feltevés, tehát létezik olyan $\xi\in\Xi_\alpha$ sorozat és olyan $\bar{\bar{p}}_1,\dots,\bar{\bar{p}}_{k+n_\gamma-1}\in P_\xi$ termek, hogy

$$\Sigma_1 \vdash p_i=\bar{\bar{p}}_i \qquad (1\le i<k+n_\gamma).$$

Akkor viszont

$$\Sigma_1 \vdash p_i=f_\gamma(p_i,\dots,p_i)=f_\gamma(\bar{\bar{p}}_i,\dots,\bar{\bar{p}}_i) \qquad (1\le i<k)$$

és

$$\Sigma_1 \vdash p_0=f_\gamma(p_k,\dots,p_{k+n_\gamma-1})=f_\gamma(\bar{\bar{p}}_k,\dots,\bar{\bar{p}}_{k+n_\gamma-1}).$$

Itt a jobb oldalon álló termek már $P_{\langle\gamma\rangle*\xi}$-beliek. A 2.2. és 2.5. Lemma alkalmazásával adódik a bizonyitandó állitás.

2.10. LEMMA. <u>Legyen $\mathcal{R}$ tetszőleges egységelemes kommutativ gyürü, $n(\ge 1)$ illetve k pedig tetszőleges természetes számok. Tekintsük az $\mathcal{R}[y_0,\dots,y_{n-1}]$ polinomgyürü egy</u>

$$u(y_0,\dots,y_{n-1})=\sum_{\substack{\sum t_i=k\\ i<n}} a_{t_0,\dots,t_{n-1}}\, y_0^{t_0}\cdots y_{n-1}^{t_{n-1}}$$

<u>elemét, és legyen</u>

$$v(y_0,\dots,y_{n-2})=u(y_0,\dots,y_{n-2},1-\sum_{i<n-1}y_i)=\sum_{\substack{\sum t_i\le k\\ i<n-1}} b_{t_0,\dots,t_{n-2}}\, y_0^{t_0}\cdots y_{n-2}^{t_{n-2}}.$$

<u>Akkor ha van az $a_{t_0,\dots,t_{n-1}}$ $(\in\mathcal{R})$ együtthatók közt 0-tól különböző, akkor létezik olyan 0-tól különböző $a_{t_0,\dots,t_{n-1}}$ $(\sum_{i<n} t_i=k)$ együttható is, hogy</u>

$$a_{t_o,\ldots,t_{n-1}} = b_{t_o,\ldots,t_{n-2}}.$$

BIZONYITÁS. Tegyük tehát fel, hogy az $a_{t_o,\ldots,t_{n-1}}$ együtthatók közt van 0-tól különböző és ezek közül válasszunk ki egy olyat, amelyikre $\sum_{i<n-1} t_i$ minimális. Legyen ez az együttható $a_{\bar{t}_o,\ldots,\bar{t}_{n-1}}$ ($\neq 0$). Egyszerüen meggondolható, hogy a $v(y_o,\ldots,y_{n-2})$ polinomban $y_o^{\bar{t}_o}\ldots y_{n-2}^{\bar{t}_{n-2}}$ együtthatója éppen $a_{\bar{t}_o,\ldots,\bar{t}_{n-1}}$ lesz, amit bizonyitani akartunk.

2.11. LEMMA. Legyenek $q(\geq 1)$ illetve $n_i(\geq 1)$ $(i<q)$ tetszőleges természetes számok. Tekintsük a $Z[y_o^{(o)},\ldots,y_{n_o-1}^{(o)},y_o^{(1)},\ldots,y_{n_1-1}^{(1)},\ldots,y_o^{(q-1)},\ldots,y_{n_{q-1}-1}^{(q-1)}]$ polinomgyürü egy

$$u(y_o^{(o)},\ldots,y_{n_o-1}^{(o)},\ldots,y_o^{(q-1)},\ldots,y_{n_{q-1}-1}^{(q-1)}) = \sum_{\substack{\sum_{j<n_i} s_{ij}=k_i}} a_{s_o*\ldots*s_{q-1}} \prod_{i<q}\prod_{j<n_i}(y_j^{(i)})^{s_{ij}}$$

elemét, ahol k_i tetszőleges természetes szám és $s_i = \langle s_{io},\ldots,s_{i,n_i-1}\rangle$ $(i<q)$. Legyen

$$v(y_o^{(o)},\ldots,y_{n_o-2}^{(o)},\ldots,y_o^{(q-1)},\ldots,y_{n_{q-1}-2}^{(q-1)}) =$$

$$= u(y_o^{(o)},\ldots,y_{n_o-2}^{(o)},1-\sum_{j<n_o-1} y_j^{(o)},\ldots,y_o^{(q-1)},\ldots,y_{n_{q-1}-2}^{(q-1)},1-\sum_{j<n_{q-1}-1} y_j^{(q-1)}) =$$

$$= \sum_{\substack{\sum_{j<n_i-1} t_{ij}\leq k_i \\ (i<q)}} b_{t_o*\ldots*t_{q-1}} \prod_{i<q}\prod_{j<n_i-1}(y_j^{(i)})^{t_{ij}},$$

ahol $t_i=\langle t_{io},\ldots,t_{i,n_i-2}\rangle$ $(i<q)$. Ha az $a_{s_o*\ldots*s_{q-1}}$ együtthatók közt van 0-tól különböző, akkor létezik olyan 0-tól különböző $a_{s_o*\ldots*s_{q-1}}$ együttható is, amelyre

$$a_{s_o * \ldots * s_{q-1}} = b_{'s_o * \ldots * 's_{q-1}}$$

teljesül. Következésképpen, ha u nem a 0 polinom, akkor v sem az.

BIZONYITÁS. A lemma állitását q szerinti teljes indukcióval bizonyitjuk. A $q=1$ esetben ez nem más, mint a 2.10 Lemma állitása az $\mathcal{R}=Z$ esetben. Legyen most $q(>1)$ tetszőleges természetes szám, és tegyük fel, hogy a 2.11 Lemma állitása érvényes a q-nál kisebb természetes számokra. Tekintsük a fenti 0-tól különböző u illetve a hozzá tartozó v polinomot $Z[y_o^{(o)},\ldots,y_{n_o-1}^{(o)},\ldots,y_o^{(q-2)},\ldots,y_{n_{q-2}-1}^{(q-2)}]$ feletti polinomoknak:

$$u(y_o^{(o)},\ldots,y_{n_o-1}^{(o)},\ldots,y_o^{(q-1)},\ldots,y_{n_{q-1}-1}^{(q-1)}) = \sum_{\sum_{j<n_{q-1}} s_{q-1,j}=k_{q-1}} U_{s_{q-1}} \prod_{j<n_{q-1}} (y_j^{(q-1)})^{s_{q-1,j}}$$

illetve

$$v(y_o^{(o)},\ldots,y_{n_o-2}^{(o)},\ldots,y_o^{(q-1)},\ldots,y_{n_{q-1}-2}^{(q-1)}) =$$

$$= \sum_{\sum_{j<n_{q-1}-1} s_{q-1,j} \le k_{q-1}} V_{s_{q-1}} \prod_{j<n_{q-1}-1} (y_j^{(q-1)})^{s_{q-1,j}} ,$$

ahol

$$U_{s_{q-1}}(y_o^{(o)},\ldots,y_{n_o-1}^{(o)},\ldots,y_o^{(q-2)},\ldots,y_{n_{q-2}-1}^{(q-2)}) =$$

$$= \sum_{\substack{\sum_{j<n_i} s_{ij}=k_i \\ (i<q-1)}} a_{s_o * \ldots * s_{q-2} * s_{q-1}} \prod_{i<q-1} \prod_{j<n_i} (y_j^{(i)})^{s_{ij}}$$

és

$$V_{t_{q-1}}(y_o^{(o)},\ldots,y_{n_o-2}^{(o)},\ldots,y_o^{(q-2)},\ldots,y_{n_{q-2}-2}^{(q-2)}) =$$

$$=\sum_{\substack{\sum_{j<n_i-1} t_{ij}\le k_i\\(i<q-1)}} b_{t_o*\ldots*t_{q-2}*t_{q-1}} \prod_{i<q-1}\prod_{j<n_i-1}(y_j^{(i)})^{t_{ij}}.$$

A 2.10. Lemmát alkalmazzuk az $u(y_o^{(o)},\ldots,y_{n_o-2}^{(o)},1-\sum_{j<n_o-1}y_j^{(o)},\ldots$ $\ldots,y_o^{(q-2)},\ldots,y_{n_{q-2}-2}^{(q-2)},1-\sum_{j<n_{q-2}-1}y_j^{(q-2)},y_o^{(q-1)},\ldots,y_{n_{q-1}-1}^{(q-1)})$ polinomra. Ennek van zérustól különböző együtthatója, mivel az $U_{s_{q-1}}$ polinomok közt van zérustól különböző, és arra alkalmazható az indukciós feltevés. Akkor a 2.10. Lemma felhasználásával adódik olyan s_{q-1} sorozat létezése is, hogy $U_{s_{q-1}}$ nem zérus polinom és

$$U_{s_{q-1}}(y_o^{(o)},\ldots,y_{n_o-2}^{(o)},1-\sum_{j<n_o-1}y_j^{(o)},\ldots,y_o^{(q-2)},\ldots,y_{n_{q-2}-2}^{(q-2)},1-\sum_{j<n_{q-2}-1}y_j^{(q-2)})=$$

$$=V_{s_{q-1}}(y_o^{(o)},\ldots,y_{n_o-2}^{(o)},\ldots,y_o^{(q-2)},\ldots,y_{n_{q-2}-2}^{(q-2)}).$$

Ujra az indukciós feltevés felhasználásával innen már következik a bizonyitandó állitás.

2.12. LEMMA. Legyen R tetszőleges egységelemes kommutativ gyürü, $q(\geq 1)$ és $n_i(\geq 1)$ $(i<q)$ tetszőleges természetes számok. Tekintsük az R gyürünek az $r_j^{(i)}$ $(i<q,\ j<n_i-1)$ elemeit és legyen $r_{n_i-1}^{(i)}=1-\sum_{j<n_i-1}r_j^{(i)}(i<q)$. Tegyük fel továbbá, hogy van a $Z[y_o^{(o)},\ldots,y_{n_o-1}^{(o)},\ldots,y_o^{(q-1)},\ldots,y_{n_{q-1}-1}^{(q-1)}]$ polinomgyürüben olyan triviálistól különböző

$$v(y_o^{(o)},\ldots,y_{n_o-2}^{(o)},\ldots,y_o^{(q-1)},\ldots,y_{n_{q-1}-2}^{(q-1)})=\sum_{\substack{\sum_{j<n_i-1} t_{ij}\le k_i\\(i<q)}} b_{t_o*\ldots*t_{q-1}} \prod_{i<q}\prod_{j<n_i-1}(y_j^{(i)})^{t_{ij}}$$

polinom, hogy R-ben fenáll a

$$v(r_o^{(o)},\dots,r_{n_o-2}^{(o)},\dots,r_o^{(q-1)},\dots,r_{n_{q-1}-2}^{(q-1)}) = 0$$

egyenlőség. Akkor léteznek olyan K_i $(i<q)$ természetes számok és olyan triviálistól különböző

(6) $$U(y_o^{(o)},\dots,y_{n_o-1}^{(o)},\dots,y_o^{(q-1)},\dots,y_{n_{q-1}-1}^{(q-1)}) = \sum_{\sum_{j<n_i} s_{ij}=K_i} A_{s_o*\dots*s_{q-1}} \prod_{i<q} \prod_{j<n_i} (y_j^{(i)})^{s_{ij}}$$

polinom, hogy

(7) $$U(r_o^{(o)},\dots,r_{n_o-1}^{(o)},\dots,r_o^{(q-1)},\dots,r_{n_{q-1}-1}^{(q-1)}) = 0$$

és minden együtthatóra

(8) $$|A_{s_o*\dots*s_{q-1}}| \le \prod_{i<q} \frac{K_i!}{s_{io}!\dots s_{i,n_i-1}!} .$$

BIZONYITÁS. Tegyük fel, hogy a v polinom adott, és tekintsük a következő polinomot:

$$u(y_o^{(o)},\dots,y_{n_o-1}^{(o)},\dots,y_o^{(q-1)},\dots,y_{n_{q-1}-1}^{(q-1)}) =$$

$$= \sum_{\substack{\sum_{j<n_i-1} t_{ij}\le k_i \\ (i<q)}} b_{t_o*\dots*t_{q-1}} \prod_{i<q} \left(\Big(\sum_{j<n_i} y_j^{(i)}\Big)^{k_i-\sum_{j<n_i-1} t_{ij}} \prod_{j<n_i-1} (y_j^{(i)})^{t_{ij}}\right).$$

Nyilvánvalóan

$$u(y_o^{(o)},\dots,y_{n_o-2}^{(o)}, 1-\sum_{j<n_o-1} y_j^{(o)},\dots,y_o^{(q-1)},\dots,y_{n_{q-1}-2}^{(q-1)}, 1-\sum_{j<n_{q-1}-1} y_j^{(q-1)}) =$$

$$= v(y_o^{(o)},\dots,y_{n_o-2}^{(o)},\dots,y_o^{(q-1)},\dots,y_{n_{q-1}-2}^{(q-1)}),$$

s igy u maga is triviálistól különböző polinom. Legyen u normál alakja

$$u(y_0^{(o)},\dots,y_{n_0-1}^{(o)},\dots,y_0^{(q-1)},\dots,y_{n_{q-1}-1}^{(q-1)})=\sum_{\substack{\Sigma t_{ij}=k_i\\ j<n_i}} a_{\tilde{t}_0*\dots*\tilde{t}_{q-1}} \prod_{i<q}\prod_{j<n_i}(y_j^{(i)})^{t_{ij}},$$

az itt fellépő $a_{\tilde{t}_0*\dots*\tilde{t}_{q-1}}$ együtthatók abszolut értékének maximuma pedig A. Válasszuk a $K(\geq 1)$ természetes számot ugy, hogy a $K_i=k_i+Kn_i$ $(i<q)$ természetes számokra teljesüljön a $K_i\geq A$ $(i<q)$ feltétel. Megmutatjuk, hogy az

$$U(y_0^{(o)},\dots,y_{n_0-1},\dots,y_0^{(q-1)},\dots,y_{n_{q-1}-1}^{(q-1)})=\left(\prod_{i<q}\prod_{j<n_i}y_j^{(i)}\right)^K u(y_0^{(o)},\dots,y_{n_0-1}^{(o)},\dots,y_0^{(q-1)},\dots,y_{n_{q-1}-1}^{(q-1)})$$

polinom eleget tesz a követelményeknek. (7) teljesülése abból adódik, hogy az egyenlőség a konstrukció folytán az u polinomra fennáll. A (8) egyenlőtlenség igazolásához vegyük észre, hogy ha az $s_0*\dots*s_{q-1}$ sorozatban valamelyik s_{ij} $(j<n_i, i<q)$ elem 0, akkor az U polinomban $A_{s_0*\dots*s_{q-1}}=0$. Másrészt, ha az $s_0*\dots*s_{q-1}$ sorozat csupa pozitiv elemekből áll, akkor

$$|A_{s_0*\dots*s_{q-1}}|\leq A \quad\leq \prod_{i<q}K_i\ ,$$

igy (8) nyilvánvalóan teljesül. Ezzel a lemma állitását bebizonyitottuk.

Mostmár rátérhetünk a fő tétel bizonyitására. A rövidség kedvéért legyen $\Sigma=\{(I_0^{\gamma})|\gamma<\alpha\}\cup\{(I_{ij}^{\gamma})|\gamma<\alpha, i<j<n_{\gamma}\}\cup\{(A^{\beta\gamma})|\beta<\gamma<\alpha\}$. Nyilvánvalóan $\Sigma_0\subseteq\Sigma$, a 2.6. Következmény bizonyitásánál pedig láttuk, hogy $\Sigma\vdash\Sigma_1$.

A 2.1. TÉTEL BIZONYITÁSA. Tegyük fel először, hogy (ii) teljesül. A 2.9. Lemma miatt elegendő az $\langle M;\{f_\gamma|\gamma<\alpha\}\rangle$ algebrán teljesülő $p(\xi,g)=p(\xi,h)$ ($\xi\in\Xi_\alpha$, $g,h\in F_\xi$) alaku azonosságokról belátni, hogy Σ-ból levezethetőek. Tegyük tehát fel, hogy az $\langle M;\{f_\gamma|\gamma<\alpha\}\rangle$ algebrán teljesül a

$$(9)\qquad p(\xi,g)=p(\xi,h)\qquad (\xi\in\Xi_\alpha,\ g,h\in F_\xi)$$

azonosság. Legyen $\xi=\xi_0*\ldots*\xi_{q-1}$, ahol $\xi_i=\langle\beta_i,\ldots,\beta_i\rangle\in\underline{\alpha}^{k_i}$ ($i<q$) és $\beta_i\neq\beta_j$ ha $i\neq j$ ($i,j<q$). Legyenek továbbá $p(\xi,g)$ illetve $p(\xi,h)$ (4)-beli előállitásában fellépő együtthatók rendre

$$(10)\qquad a^{(\ell)}_{s_0*\ldots*s_{q-1}}\quad\text{illetve}\quad d^{(\ell)}_{s_0*\ldots*s_{q-1}}\ .$$

A (ii) feltétel teljesülése miatt R-nek az $\{r_j^{\beta_i}\,|\,i<q,\ j<n_{\beta_i}-1\}\cup\{1\}$ halmaz által generált részgyürüje izomorf a $Z[y_0^{(0)},\ldots,y^{(0)}_{n_{\beta_0}-2},\ldots,y_0^{(q-1)},\ldots,y^{(q-1)}_{n_{\beta_{q-1}}-2}]$ polinomgyürüvel. Igy a 2.11 Lemma felhasználásával a (9) azonosság teljesüléséből következik, hogy a (10)-beli együtthatók rendre megegyeznek, azaz - a 2.8. Lemma alkalmazásával - bármely $s_0*\ldots*s_{q-1}$ sorozatra

$$\left|\{\varepsilon\,|\,\varepsilon\in E(n_{\beta_0},s_0)*\ldots*E(n_{\beta_{q-1}},s_{q-1}),g(\varepsilon)=x_\ell\}\right| =$$

$$=\left|\{\varepsilon\,|\,\varepsilon\in E(n_{\beta_0},s_0)*\ldots*E(n_{\beta_{q-1}},s_{q-1}),h(\varepsilon)=x_\ell\}\right|$$

teljesül. Létezik tehát olyan $\sim$-tartó $\pi\in S_\xi$ permutáció, hogy $h=g\pi$. Akkor viszont a 2.7. Lemma folytán

$$\sum \vdash p(\xi,g)=p(\xi,h),$$

amit bizonyitani akartunk.

Forditva, tegyük fel, hogy (ii) nem teljesül, azaz léteznek olyan páronként különböző $\beta_0,\dots,\beta_{q-1}<\alpha$ rendszámok és olyan nemtriviális $v\in Z[y_0^{(o)},\dots,y_{n_0-2}^{(o)},\dots,y_0^{(q-1)},\dots,y_{n_{q-1}-2}^{(q-1)}]$ polinom, hogy

$$v(r_0^{\beta_0},\dots,r_{n_0-2}^{\beta_0},\dots,r_0^{\beta_{q-1}},\dots,r_{n_{q-1}-2}^{\beta_{q-1}}) = 0.$$

Akkor a 2.12. Lemma miatt van olyan (6)-ban leirt alaku nemtriviális U polinom, amelyre a (7) és (8) feltételek teljesülnek. Legyen $\xi=\xi_0*\dots*\xi_{q-1}$, ahol $\xi_i=\langle\beta_i,\dots,\beta_i\rangle\in\underline{\alpha}^{K_i}$ és válasszuk az $\{x_0,x_1\}$ értékkészletü $g,h\in F_\xi$ függvényeket ugy, hogy bármely $s_0*\dots*s_{q-1}$ sorozatra teljesüljön

$$|\{\varepsilon\,|\,\varepsilon\in E(n_{\beta_0},s_0)*\dots*E(n_{\beta_{q-1}},s_{q-1}),g(\varepsilon)=x_0\}| = \begin{cases} A_{s_0*\dots*s_{q-1}}, & \text{ha } A_{s_0*\dots*s_{q-1}}\geq 0\\ 0, & \text{különben}\end{cases}$$

és

$$|\{\varepsilon\,|\,\varepsilon\in E(n_{\beta_0},s_0)*\dots*E(n_{\beta_{q-1}},s_{q-1}),h(\varepsilon)=x_0\}| = \begin{cases} -A_{s_0*\dots*s_{q-1}}, & \text{ha } A_{s_0*\dots*s_{q-1}}<0\\ 0, & \text{különben.}\end{cases}$$

Ilyen függvények (8) miatt nyilván léteznek, (7) illetve a 2.8. Lemma következtében pedig a

$$p(\xi,g) = p(\xi,h)$$

azonosság teljesül az $\langle M;\{f_\gamma \mid \gamma<\alpha\}\rangle$ algebrán. Nem teljesül viszont a fentiek miatt egyetlen olyan idempotens modulus-redukton sem, amely a (ii) feltételt kielégiti. Igy

$$\Sigma \not\vdash p(\xi,g)=p(\xi,h),$$

és ezzel a tétel állitását bebizonyitottuk.

3. A VÉGTELEN CIKLIKUS CSOPORT TELJES IDEMPOTENS REDUKTJA ÁLTAL GENERÁLT NEM INDEXELT VARIETÁS JELLEMZÉSE AZONOSSÁGOKKAL

Az előző részben láttuk, hogy ha R egy egységelemes kommutativ gyürü, akkor bármely R-modulus bármely $\langle M; \{f_\gamma | \gamma<\alpha\}\rangle$ idempotens reduktján teljesülnek az (I_0^γ), (I_{ij}^γ) és $(A^{\beta\gamma})$ $(\beta<\gamma<\alpha,\ i<j<n_\gamma)$ azonosságok. [1] jelöléseit használva ez azt jelenti, hogy bármely ilyen algebra benne van az

$$(NI_0) \qquad \forall_n \ \forall_{f\in A_n} \ f(x,\ldots x) = x\ ;$$

$$(NI_{ij}^n) \qquad \forall_{f\in A_n} \ (fX)f = (fX_{ij})f \ , \qquad (i<j<n);$$

$$(NA) \qquad \forall_n \ \forall_m \ \forall_{f\in A_n} \ \forall_{g\in A_m} \ (fY)g=f(Yg)$$

azonosságokkal jellemzett $\mathfrak{V}$ nem indexelt varietásban, ahol X az $x_{kn+\ell}$ $(k,\ell<n)$ változójelekből álló $n\times n$-es mátrix, X_{ij} ugy keletkezik X-ből, hogy benne x_{in+j}-t illetve x_{jn+i}-t felcseréljük, Y pedig az $x_{kn+\ell}$ $(k<m, \ell<n)$ változójelekből álló $m\times n$ tipusu mátrix.

Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{V}$-t generálja a végtelen ciklikus csoport teljes idempotens reduktja, vagy ami ezzel ekvivalens, a végtelen ciklikus csoport teljes idempotens reduktjának müveletklónja által generált heterogén varietás egy azonosságbázisa a következő:

a $\mathbb{CL}$-beli azonosságok, továbbá

$$(SI^n_o) \qquad c^n_1(f^n_o, e^1_o, \dots, e^1_o) = e^1_o \ ;$$

$$\begin{aligned}(SI^n_{ij}) \qquad & c^n_{n^2}(f^n_o, c^n_{n^2}(f^n_o, e^{n^2}_o, \dots, e^{n^2}_{n-1}), \dots \\ & \dots, c^n_{n^2}(f^n_o, e^{n^2}_{(n-1)n}, \dots, e^{n^2}_{(n-1)n+n-1})) = \\ & = c^n_{n^2}(f^n_o, c^n_{n^2}(f^n_o, e^{n^2}_{[o]^*}, \dots, e^{n^2}_{[n-1]^*}), \dots \\ & \dots, c^n_{n^2}(f^n_o, e^{n^2}_{[(n-1)n]^*}, \dots, e^{n^2}_{[(n-1)n+n-1]^*})) \\ & \qquad\qquad (i<j<n) \ ,\end{aligned}$$

ahol

$$[k]^* = \begin{cases} jn+i, & \text{ha } k=in+j \\ in+j, & \text{ha } k=jn+i \\ k, & \text{különben} \end{cases} \qquad (k<n^2) \quad ;$$

$$\begin{aligned}(SA^{m,n}) \qquad & c^m_{mn}(f^m_o, c^n_{mn}(f^n_1, e^{mn}_o, \dots, e^{mn}_{n-1}), \dots \\ & \dots, c^n_{mn}(f^n_1, e^{mn}_{(m-1)n}, \dots, e^{mn}_{(m-1)n+n-1})) = \\ & = c^n_{mn}(f^n_1, c^m_{mn}(f^m_o, e^{mn}_o, \dots, e^{mn}_{(m-1)n}), \dots \\ & \dots, c^m_{mn}(f^m_o, e^{mn}_{n-1}, \dots, e^{mn}_{(m-1)n+n-1})) \\ & \qquad\qquad (0<m,n<\omega).\end{aligned}$$

Ugyanolyan gondolatmenettel haladunk, mint az előző részben, ezért a bizonyitás gondolatmenetét csak vázoljuk. Ismét szükség van néhány jelölésre. Legyen $\mathbb{P}$ most az f^k_i $(i,k<\omega, k\geq 1)$ változójelekből és e^n_i $(i<n<\omega)$, c^n_m $(m,n<\omega)$

müveleti jelekből felépithető heterogén termek halmaza. Jelölje $\mathbb{P}^{(n)}$ $(n<\omega)$ azon $\mathbb{P}$-beli termek halmazát, amelyek az n indexü alaphalmazba képező heterogén müveleteket reprezentálnak. Legyen $\{f_i^k | i,k<\omega, k\geq 1\}=H$. Tetszőleges $\xi\in\bigcup(H^m | m<\omega)$ sorozathoz és n természetes számhoz hozzárendeljük $\mathbb{P}^{(n)}$ egy $\mathbb{P}_\xi^{(n)}$ részhalmazát a következő módon. Ha $\xi=\emptyset$, $\mathbb{P}_\xi^{(n)}=\{e_i^n | i<n\}$, ha pedig $\xi=\langle f_i^k\rangle * \xi'$, akkor

$$\mathbb{P}_\xi^{(n)}=\{c_n^k(f_i^k, p_0, \dots, p_{k-1}) \mid p_j\in\mathbb{P}_{\xi'}^{(n)} \quad (j<k)\}.$$

A $\mathbb{P}_\xi^{(n)}$-beli termek egy-egy függvénnyel jellemezhetők. Legyen $\xi=\langle f_{i_0}^k, \dots, f_{i_{m-1}}^k\rangle$, s jelölje $\mathbb{F}_\xi^{(n)}$ a $\underline{k}_0\times\dots\times\underline{k}_{m-1}$ halmaznak az $\{e_i^n | i<n\}$-be való leképezéseinek halmazát. Minden $\langle\xi, g\rangle$ $(g\in\mathbb{F}_\xi^{(n)})$ párra definiálunk egy $p(\xi,g)\in\mathbb{P}^{(n)}$ termet az alábbi módon. Ha $\xi=\emptyset$, legyen $p(\xi,g)=g(\emptyset)\in\{e_i^n | i<n\}$, ha pedig $\xi=\langle f_i^k\rangle*\xi'$, akkor

$$p(\xi,g)=c_n^k(f_i^k, p(\xi',g_0), \dots, p(\xi',g_{k-1})) \quad ,$$

ahol

$$g_j(\varepsilon)=g(\langle j\rangle*\varepsilon) \qquad (j<k).$$

Érvényes a 2.2. Lemma következő analogonja:

3.1. LEMMA. <u>Tetszőleges</u> $\xi\in\bigcup(H^m | m<\omega)$ <u>sorozat és</u> $n(\geq 1)$ <u>természetes szám esetén</u> $p\in\mathbb{P}_\xi^{(n)}$ <u>akkor és csak akkor teljesül, ha van olyan</u> $g\in\mathbb{F}_\xi^{(n)}$, <u>hogy</u> $p=p(\xi,g)$.

Legyen $\xi=\langle f_{i_0}^{k_0}, \dots, f_{i_{m-1}}^{k_{m-1}}\rangle\in\bigcup(H^m | m<\omega)$ és jelölje S_ξ a $\underline{k}_0\times\dots\times\underline{k}_{m-1}$ halmaz összes permutációinak halmazát. A G_ξ permutációcsoportot definiáljuk ugy, hogy $\pi\in G_\xi$ akkor és csak akkor teljesüljön, ha $\pi\in S_\xi$ és tetszőleges n természetes szám, illetve $g\in\mathbb{F}_\xi^{(n)}$ függvény esetén

$$\mathfrak{CL}\cup\{(SI_{ij}^n)\mid i<j<n<\omega\}\cup\{(SA^{m,n})\mid 0<m,n<\omega\}\vdash \mathbb{p}(\xi,g)=\mathbb{p}(\xi,g\pi).$$

A 2.3. - 2.5. Lemma valamint 2.6. Következmény analogonjai érvényesek maradnak és igy bebizonyitható a 2.7. Lemmához hasonló

3.2. LEMMA. <u>Tetszőleges</u> $\xi\in\bigcup(H^m\mid m<\omega)$ <u>sorozat esetén</u> G_ξ <u>az összes</u> S_ξ<u>-beli</u> $\sim$<u>-tartó permutáció halmaza</u>.

Definiáljuk az $\bigcup(H^m\mid m<\omega)$ egy részhalmazát a következőképpen:

$$\Xi=\{\xi\mid\xi=\xi_0*\ldots*\xi_{q-1}\in\bigcup(H^m\mid m<\omega)\ \text{és}$$

$$\xi_j=\langle f_{i_j}^{k_j},\ldots,f_{i_j}^{k_j}\rangle\ (j<q,\ f_{i_j}^{k_j}\in H),f_{i_j}^{k_j}\neq f_{i_\ell}^{k_\ell}\ \text{ha } j\neq\ell\}$$

A 2.9. Lemma gondolatmenetéhez hasonlóan igazolható a következő állitás:

3.3. LEMMA. <u>Tetszőleges</u> $\mathbb{p}_0,\ldots,\mathbb{p}_{k-1}\in\mathbb{P}^{(n)}$ $(k<\omega)$ <u>termekhez megadható egy</u> $\xi\in\Xi$ <u>sorozat és</u> $\overline{\mathbb{p}}_0,\ldots,\overline{\mathbb{p}}_{k-1}\in\mathbb{P}^{(n)}$ <u>termek ugy, hogy</u>

$$\mathfrak{CL}\cup\{(SI_0^n)\mid 0<n<\omega\}\cup\{(SA^{m,n})\mid 0<m,n<\omega\}\vdash\mathbb{p}_i=\overline{\mathbb{p}}_i\quad(i<k).$$

Ennyi előkészités után be tudjuk bizonyitani a fent emlitett tételt:

3.4. TÉTEL. <u>A végtelen ciklikus csoport teljes idempotens reduktjának müveletklónja a klón definiáló azonosságai valamint az</u> (SI_0^n), (SI_{ij}^n) <u>és</u> $(SA^{m,n})$ $(0<m,n<\omega,\ i<j<n)$

azonosságok által jellemzett hetrogén varietást generálja.

BIZONYITÁS. Jelöljük az egészek additiv csoportja teljes idempotens reduktjának müveletklónját $\mathcal{C}$-vel. Azt kell igazolni, hogy bármely $\mathcal{C}$-n teljesülő azonosság levezethető a tételben mondott azonosságokból. Vegyünk egy $\mathcal{C}$-n teljesülő $\mathbb{P}_0=\mathbb{P}_1$ azonosságot. A 3.3. Lemma miatt feltehető, hogy $\mathbb{P}_0,\mathbb{P}_1\in\mathbb{P}_\xi^{(n)}$ áll fenn valamely n természetes számra és $\xi=\xi_0*\ldots*\xi_{q-1}\in\Xi$ sorozatra, ahol $\xi_j=\langle f_{i_j}^{n_j},\ldots,f_{i_j}^{n_j}\rangle\in H^{k_j}$ és $f_{i_j}^{n_j}\neq f_{i_\ell}^{n_\ell}$ ha $j\neq\ell$. A 3.1. Lemma felhasználásával nyerjük, hogy

$\mathbb{P}_0=\mathbb{P}(\xi,g)$ és $\mathbb{P}_1=(\xi,h)$, ahol g és h alkalmas $\mathbb{F}_\xi^{(n)}$-beli függvények. Legyen $\{f_\gamma=\sum_{i<n_\gamma} r_i^\gamma x_i\,|\,\gamma<\alpha\}$ a $\mathcal{C}$ elemeinek egy jólrendezése, ahol f_γ aritása n_γ, $r_i^\gamma\in\mathbb{Z}$ és $\sum_{i<n_\gamma} r_i^\gamma=1$ ($\gamma<\alpha$, $i<n_\gamma$). A $\mathbb{P}_0=\mathbb{P}_1$ azonosság teljesülése $\mathcal{C}$-n azt jelenti, hogy bármely aritástartó $\Phi\colon H\longrightarrow\underline{\alpha}$ függvény esetén a

$$\text{(11)}\qquad p({}^\Phi\xi,\chi g)=p({}^\Phi\xi,\chi h)$$

azonosság teljesül a $\langle\mathbb{Z};\mathcal{C}\rangle$ algebrán. Itt

$${}^\Phi\xi={}^\Phi\xi_0*\ldots*{}^\Phi\xi_{q-1},\quad\text{ahol}\quad {}^\Phi\xi_j=\langle\Phi(f_{i_j}^{n_j}),\ldots,\Phi(f_{i_j}^{n_j})\rangle\in\underline{\alpha}^{k_j}$$

és $\chi(e_i^n)=x_i$ ($i<n<\omega$). A (11) bal illetve jobb oldalán levő termek (4)-beli előállitásában fellépő együtthatók legyenek

$$\text{(12)}\qquad a^{(\ell)}_{s_0*\ldots*s_{q-1}}\qquad\text{illetve}\qquad d^{(\ell)}_{s_0*\ldots*s_{q-1}}.$$

Ezek függetlenek a Φ függvénytől (v.ö. (5)). A 2.11. Lemma felhasználásával - abból a tényből, hogy az egészek Z gyürüje generálja a kommutativ gyürük varietását - következik, hogy (12)-ben a megfelelő együtthatók páronként megegyeznek. Akkor viszont (5) figyelembe vételével könnyen látható, hogy van olyan $\sim$-tartó $\pi \in S_\xi$ permutáció, hogy $h=g\pi$. (Felhasználtuk közben, hogy rögzitett n-re χ kölcsönösen egyértelmü.) Igy a 3.2. Lemma miatt $\pi \in G_\xi$, s ezzel állitásunkat bebizonyitottuk.

4. UNITÉR MODULUSOK BIZONYOS IDEMPOTENS REDUKTJAIN TELJESÜLŐ AZONOSSÁGOK HALMAZÁNAK EGY BÁZISA

Legyen R tetszőleges egységelemes gyürü, $\mathfrak{M}$ pedig egy triviális annullátor ideálu R-modulus. Ezeket rögzitsük le a továbbiakban. Megjegyezzük, hogy a triviális annullátor ideál feltételezése nem jelenti lényegében az általánosság megszoritását (v.ö. [6], Lemma I.2.) Ebben a fejezetben megadjuk az $\mathfrak{M}$ modulus $\langle M; \cap(Cl_{\mathfrak{M}}(S_\gamma)|\gamma<\alpha)\rangle$ alaku idempotens reduktjain teljesülő azonosságok halmazának egy-egy bázisát, és néhány ezzel kapcsolatos kérdést vizsgálunk.

Vegyük észre először, hogy érvényes a következő -az 1.4. Tételnél erősebb - állitás is:

4.1. LEMMA. *Legyen R tetszőleges egységelemes gyürü, $\mathfrak{M}$ pedig egy triviális annullátor ideálu R-modulus. Tekintsük a $Cl_{\mathfrak{M}}(R)$ klón egy $\cap(Cl_{\mathfrak{M}}(S_\gamma)|\gamma<\alpha)$ részklónját, ahol S_γ $(\gamma<\alpha)$ az R részgyürüje. Akkor létezik pontosan egy olyan R részgyürüiből álló $\mathcal{J}=\{I_\delta|\delta<\beta\}$ halmaz, amelyre*

$$\cap(Cl_{\mathfrak{M}}(S_\gamma)|\gamma<\alpha) = \cap(Cl_{\mathfrak{M}}(I_\delta)|\delta<\beta),$$

és amely eleget tesz az 1.4. Tétel (a)-(c) feltételeinek.

BIZONYITÁS. Legyen $C=\cap(Cl_{\mathfrak{M}}(S_\gamma)|\gamma<\alpha)$ és jelölje R_C a C-beli müveletek együtthatói által generált részgyürüt R-ben. Legyen továbbá $J_\gamma=S_\gamma\cap R_C$ $(\gamma<\alpha)$. Megmutatjuk, hogy bármely $\gamma(<\alpha)$ rendszámra J_γ az R 1 egységelemével együtt generálja R_C-t. Valóban, bármely C-beli müvelet együtthatói legfeljebb egy kivétellel J_γ-beliek, s igy mivel az együtthatók összege 1, az összes együttható benne van R-nek a $J_\gamma \cup \{1\}$ által generált részgyürüjében. Ebből speciálisan az is adódik, hogy J_γ $(\gamma<\alpha)$ ideálja R_C-nek. Igy

$$C = \bigcap (Cl_{\mathfrak{M}}(I) \mid I \text{ ideálja } R_C\text{-nek}, C \leq Cl_{\mathfrak{M}}(I)).$$

Ezek után a [6]-beli I.14. illetve I.15. Lemma bizonyitása szó szerint megismételhető, igy a 4.1. Lemma állitását bebizonyitottuk.

A 4.1. Lemma figyelembe vételével a [6]-beli II.7. Tétel bizonyitása módositható ugy, hogy a következő erősebb állitás bizonyitásául is szolgáljon:

4.2. LEMMA. *Legyen* R *tetszőleges egységelemes gyürü,* $\mathfrak{M}$ *pedig egy triviális annullátor ideálu* R*-modulus. Tekintsük a* $Cl_{\mathfrak{M}}(R)$ *klón egy* $\bigcap(Cl_{\mathfrak{M}}(I_\gamma) \mid \gamma<\alpha)$ *részklónját, ahol* R *részgyürüinek az* $\mathfrak{I}=\{I_\gamma \mid \gamma<\alpha\}$ *halmaza eleget tesz az* (a)-(c) *feltételeknek. Akkor a* $\bigcap(Cl_{\mathfrak{M}}(I_\gamma) \mid \gamma<\alpha)$ *klón akkor és csak akkor generálható végesen, ha* α *véges és* $\bigcap(I_\gamma \mid \gamma<\alpha)$ *az* R *végesen generált részgyürüje*.

Az 1.5. Tétel harmadik állitása, továbbá a [6]-beli I.7. Lemma alapján megadhatjuk a $\bigcap(Cl_{\mathfrak{M}}(I_\gamma) \mid \gamma<\alpha)$ alaku klónok egy-egy generátor rendszerét, speciálisan végesen generálható klónok esetén véges generátorrendszerét.

4.3. LEMMA. *Legyen* R *tetszőleges egységelemes gyürü,* $\mathfrak{M}$ *pedig egy triviális annullátor ideálu* R*-modulus. Tekintsük a* $Cl_{\mathfrak{M}}(R)$ *klón egy* $\bigcap(Cl_{\mathfrak{M}}(I_\gamma) \mid \gamma<\alpha)$ *részklónját, ahol* R

<u>részgyürüinek az</u> $\mathcal{J}=\{I_\gamma \mid \gamma<\alpha\}$ <u>halmaza eleget tesz az</u> (a)-(c) <u>feltételeknek. Akkor a</u> $\bigcap(Cl_{\mathfrak{M}}(I_\gamma) \mid \gamma<\alpha)$ <u>klón egy generátorrendszere a</u>

$$\{1x+ty+(-t)z|_{\mathfrak{M}} \mid t\in T\} \cup \{\sum_{B\in\pi} i_B^{\pi} x_B|_{\mathfrak{M}} \mid \pi\in H\}$$

<u>halmaz, ahol</u> T <u>a</u> $\bigcap(I_\gamma \mid \gamma<\alpha)$ <u>gyürü egy generátorrendszere,</u> H <u>pedig</u> $\Pi_{\mathcal{J}}$ <u>egy olyan részhalmaza, amely minden</u> $\Pi_{\mathcal{J}}$<u>-beli</u> π <u>particiónak tartalmazza valamelyik finomitását.</u>

E generátorrendszer elemeit fogjuk az $\langle M; \bigcap(Cl_{\mathfrak{M}}(I_\gamma) \mid \gamma<\alpha)\rangle$ algebra alapmüveleteinek tekinteni. $\alpha=1$ esetén $H=\emptyset$ lesz, véges $\alpha(\geq 2)$ esetén H-nak az egyelemü blokkokból álló particiót tartalmazó egyelemü halmazt fogjuk választani, mig végtelen α esetén H a $\Pi_{\mathcal{J}}$ halmaz lesz.

Először az $\alpha=1$ esettel foglalkozunk. Legyen $I_0=S$ az R tetszőleges részgyürüje és jelölje $\mathfrak{M}_S$ az $\langle M; \{g_\kappa \mid \kappa<\nu\}\rangle$ algebrát, ahol

$$g_\kappa(x,y,z)=1x+s_\kappa y+(-s_\kappa)z \qquad (\kappa<\nu)$$

és $\{s_\kappa \mid \kappa<\nu\}$ az S részgyürü egy generátorrendszere. Állapodjunk meg abban, hogy ha $1\in S$, akkor $s_0=1$. A 4.3. Lemma miatt $\mathfrak{M}_S$ ekvivalens az $\langle M;\ Cl_{\mathfrak{M}}(S)\rangle$ algebrával.

Legyen $\{a_0,a_1,\ldots,a_\kappa,\ldots\}$ egy ν tipusu jólrendezett halmaz. Jelölje $A(a_0,a_1,\ldots,a_\kappa,\ldots)$ vagy röviden A az $\{a_\kappa \mid \kappa<\nu\}$ által szabadon generált abszolut szabad $\langle 2,2,1,0\rangle$ tipusu algebrát (ahol a müveleti jelek rendre $+,\cdot,-$ illetve 0), $F(a_0,a_1,\ldots,a_\kappa,\ldots)$ vagy röviden F pedig az $\{a_\kappa \mid \kappa<\nu\}$ által szabadon generált abszolut szabad gyürüt. Az $a_\kappa \mapsto s_\kappa$ $(\kappa<\nu)$ megfeleltetés F-re való folytatásával keletkező $\varphi\colon F\to S$ gyürühomomorfizmus magja legyen az I ideál, s tegyük fel, hogy

$\{e_\lambda | \lambda<\mu\}$ az I ideál egy generátorrendszere.

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathfrak{M}_S$-en teljesülnek a következő azonosságok:

$$(I_\kappa) \qquad g_\kappa(x_0,x_1,x_1)=x_0 \qquad (\kappa<\nu)$$

$$(II_{\iota,\kappa}) \quad g_\iota(g_\kappa(x_0,x_1,x_2),x_3,x_4)=g_\kappa(g_\iota(x_0,x_3,x_4),x_1,x_2) \quad (\iota,\kappa<\nu)$$

$$(III_{\iota,\kappa}) \quad g_\iota(x_0,g_\kappa(x_1,x_2,x_3),g_\kappa(x_4,x_5,x_6)) =$$

$$=g_\iota(x_0,g_\kappa(x_1,x_2,x_5),g_\kappa(x_4,x_3,x_6)) =$$

$$=g_\iota(x_0,g_\kappa(x_1,x_6,x_3),g_\kappa(x_4,x_5,x_2)) \qquad (\iota,\kappa<\nu)$$

$$(IV_\kappa) \quad g_\kappa(g_\kappa(x_0,x_1,x_2),x_3,x_4)=g_\kappa(g_\kappa(x_0,x_3,x_2),x_1,x_4) \quad (\kappa<\nu),$$

amiből $(II_{\kappa,\kappa})$ alapján az is következik, hogy

$$(13) \quad g_\kappa(g_\kappa(x_0,x_1,x_2),x_3,x_4)=g_\kappa(g_\kappa(x_0,x_1,x_4),x_3,x_2), \quad (\kappa<\nu).$$

Az itt felsorolt azonosságokból álló halmazt jelölje Σ_0. Ha $1\in S$, akkor $\mathfrak{M}_S$-en teljesül az

$$(I_0^*) \qquad g_0(x_0,x_1,x_2)=g_0(x_1,x_0,x_2)$$

azonosság is.

Minden $w\in A(a_0,a_1,\ldots,a_\kappa,\ldots)$ szóhoz hozzárendelünk egy három változós p_w termet a következő definicióval:

$$p_0(x,y,z)=x$$

$$p_{a_\kappa}(x,y,z)=g_\kappa(x,y,z) \qquad (\kappa<\nu)$$

$$p_{w_1+w_2}(x,y,z)=p_{w_1}(p_{w_2}(x,y,z),y,z)$$

$$p_{w_1w_2}(x,y,z)=p_{w_1}(x,p_{w_2}(x,y,z),x)$$

$$p_{-w}(x,y,z)=p_w(x,z,y).$$

Vezessük be A alaphalmazán a következő $\sim$ relációt:

$w_1 \sim w_2$ akkor és csak akkor, ha $\Sigma_0 \vdash p_{w_1}(x,y,z)=p_{w_2}(x,y,z)$.

4.4. LEMMA. A-n a $\sim$ reláció kongruencia és $A/\sim \cong F$.

A lemma bizonyitásának előkészitéséül megmutatjuk, hogy Σ_0-ból levezethetőek az (I)-(IV) azonosságokkal analóg azonosságok a p_w termekre is.

1. ÁLLITÁS. Tetszőleges $w \in A$-ra

$$\Sigma_0 \vdash p_w(x,y,y)=x.$$

2. ÁLLITÁS. Tetszőleges $w_1,w_2,w_3 \in A$ szavakra érvényesek a következő term-egyenlőségek:

$$p_{(w_1+w_2)+w_3}(x,y,z)=p_{w_1+(w_2+w_3)}(x,y,z)$$

$$p_{(w_1w_2)w_3}(x,y,z) = p_{w_1(w_2w_3)}(x,y,z)$$

$$p_{-(-w_1)}(x,y,z)=p_{w_1}(x,y,z)$$

$$p_{-(w_1+w_2)}(x,y,z)=p_{(-w_1)+(-w_2)}(x,y,z).$$

Mindkét állitás a p_w termek definiciója alapján közvetlenül igazolható. Vezessük be a következő jelöléseket:

$X_n=\{a_{\kappa_0}\ldots a_{\kappa_{n-1}} \mid \kappa_i<\nu,\ i<n\}$ $(0<n<\omega)$, $X=\bigcup(X_n \mid 0<n<\omega)$, $Y=X\cup\{-w \mid w\in X\}$.

3. ÁLLITÁS. Bármely $v,w\in Y$ szavak esetén

$$\begin{aligned}&\Sigma_0 \vdash p_v(x_0,p_w(x_1,x_2,x_3),p_w(x_4,x_5,x_6))=\\ (14)\qquad &=p_v(x_0,p_w(x_1,x_2,x_5),p_w(x_4,x_3,x_6))=\\ &=p_v(x_0,p_w(x_1,x_6,x_3),p_w(x_4,x_5,x_2)).\end{aligned}$$

BIZONYITÁS. Ha $v=a_\iota$ és $w=a_\kappa$ $(\iota,\kappa<\nu)$, akkor állitásunk $(\mathrm{III}_{\iota,\kappa})\in\Sigma_0$ miatt nyilvánvaló. Legyen továbbra is $v=a_\iota$ és $w=a_\kappa u$ $(u\in X)$, s tegyük fel, hogy (14) tetszőleges a_λ $(\lambda<\nu)$, u párra teljesül. Akkor $p_{a_\kappa u}$ definiciója illetve az 1.Állitás miatt, továbbá a (III) azonosságok és az indukciós feltevés többszöri felhasználásával adódik, hogy

$$p_{a_\iota}(x_0,p_{a_\kappa u}(x_1,x_2,x_3),p_{a_\kappa u}(x_4,x_5,x_6))=$$

$$=p_{a_\iota}(x_0,p_{a_\kappa}(x_1,p_u(x_1,x_2,x_3),p_u(x_1,x_1,x_1)),p_{a_\kappa}(x_4,p_u(x_4,x_5,x_6),p_u(x_4,x_4,x_4)))\overset{\Sigma_0}{=}$$

$$=p_{a_\iota}(x_0,p_{a_\kappa}(x_1,p_u(x_1,x_2,x_1),p_u(x_1,x_3,x_1)),p_{a_\kappa}(x_4,p_u(x_4,x_5,x_4),p_u(x_4,x_6,x_4)))\overset{(\mathrm{III})}{=}$$

$$=p_{a_\iota}(x_0,p_{a_\kappa}(x_1,p_u(x_1,x_2,x_1),p_u(x_4,x_5,x_4)),p_{a_\kappa}(x_4,p_u(x_1,x_3,x_1),p_u(x_4,x_6,x_4)))\overset{\Sigma_0}{=}$$

$$=p_{a_\iota}(x_0,p_{a_\kappa}(x_1,p_u(x_1,x_2,x_5),p_u(x_4,x_1,x_4)),p_{a_\kappa}(x_4,p_u(x_1,x_4,x_1),p_u(x_4,x_6,x_3)))\overset{(\mathrm{III})}{=}$$

$$=p_{a_\iota}(x_0,p_{a_\kappa}(x_1,p_u(x_1,x_2,x_5),p_u(x_1,x_4,x_1)),p_{a_\kappa}(x_4,p_u(x_4,x_1,x_4),p_u(x_4,x_6,x_3)))\overset{\Sigma_0}{=}$$

$$=p_{a_\iota}(x_0,p_{a_\kappa}(x_1,p_u(x_1,x_2,x_5),p_u(x_1,x_4,x_1)),p_{a_\kappa}(x_4,p_u(x_4,x_3,x_6),p_u(x_4,x_4,x_1)))\overset{(\mathrm{III})}{=}$$

$$=p_{a_\iota}(x_0,p_{a_\kappa}(x_1,p_u(x_1,x_2,x_5),p_u(x_4,x_3,x_6)),p_{a_\kappa}(x_4,p_u(x_1,x_4,x_1),p_u(x_4,x_4,x_1)))\overset{\Sigma_0}{=}$$

$$=p_{a_\iota}(x_0,p_{a_\kappa}(x_1,p_u(x_1,x_2,x_5),p_u(x_4,x_3,x_6)),p_{a_\kappa}(x_4,p_u(x_1,x_4,x_4),p_u(x_4,x_1,x_1)))\overset{(\mathrm{III})}{=}$$

$$p_{a_\iota}(x_0,p_{a_\kappa}(x_1,p_u(x_1,x_2,x_5),x_1),p_{a_\kappa}(x_4,p_u(x_4,x_3,x_6),x_4))=$$

$$p_{a_\iota}(x_0,p_{a_\kappa u}(x_1,x_2,x_5),p_{a_\kappa u}(x_4,x_3,x_6)).$$

A másik azonosság levezethetősége hasonlóan igazolható, igy beláttuk, hogy (14) teljesül minden olyan $v,w\in X$ párra, ahol $v\in\{a_\kappa|\kappa<\nu\}$. Tegyük fel most, hogy (14) érvényes az $u,w\in X$ párra és $v=a_\iota u$. Akkor

$$\begin{aligned} & p_v(x_0,p_w(x_1,x_2,x_3),p_w(x_4,x_5,x_6)= \\ =\ & p_{a_\iota}(x_0,p_u(x_0,p_w(x_1,x_2,x_3),p_w(x_4,x_5,x_6)),x_0) \overset{\Sigma_o}{=} \\ =\ & p_{a_\iota}(x_0,p_u(x_0,p_w(x_1,x_2,x_5),p_w(x_4,x_3,x_6)),x_0) = \\ =\ & p_v(x_0,p_w(x_1,x_2,x_5),p_w(x_4,x_3,x_6)), \end{aligned}$$

és hasonlóan igazolható (14) a másik azonosságra is. Végül, ha $v\in Y-X$ vagy $w\in Y-X$, akkor (14) teljesülése közvetlenül adódik abból, hogy teljesül a $|v|,|w|$ párra, ahol

$$|v| = \begin{cases} v & \text{ha } v\in X \\ -v & \text{ha } v\in Y-X. \end{cases}$$

4. ÁLLITÁS. <u>Tetszőleges</u> $v,w\in Y$ <u>szavakra</u>

$$\begin{aligned} \Sigma_o \vdash p_{vw}(x,y,z)=p_v(x,x,p_w(x,z,y)) & = \\ =p_v(x,p_w(x,y,x),p_w(x,z,x)) & = \\ =p_v(x,p_w(x,x,z),p_w(x,x,y)). & \end{aligned}$$

BIZONYITÁS. Az 1. és 3. Állitás felhasználásával közvetlenül igazolható az állitás.

5. ÁLLITÁS. <u>Ha</u> $v,w\in X$ <u>akkor</u>

$$\Sigma_o \vdash p_{vw}(x,y,z)=p_{(-v)(-w)}(x,y,z)$$

$$\Sigma_o \vdash p_{-vw}(x,y,z)=p_{v(-w)}(x,y,z)=p_{(-v)w}(x,y,z).$$

BIZONYITÁS. A 4. Állitás felhasználásával

$$p_{(-v)(-w)}(x,y,z)=p_{(-v)}(x,p_{(-w)}(x,y,z),x)=$$
$$=p_v(x,x,p_w(x,z,y)) \overset{\Sigma_o}{=} p_{vw}(x,y,z).$$

Közvetlenül p_{-vw} illetve $p_{v(-w)}$ definiciója alapján látható, hogy $p_{-vw}=p_{v(-w)}$. Innen pedig a 2. Állitás figyelembe vételével

$$p_{-vw}=p_{v(-w)} \overset{\Sigma_o}{=} p_{(-v)w} ,$$

ezzel állitásunkat bebizonyitottuk.

6. ÁLLITÁS. Ha $v,w \in Y$, akkor

$$\Sigma_o \vdash p_w(p_v(x_0,x_1,x_2),x_3,x_4)=p_v(p_w(x_0,x_3,x_4),x_1,x_2).$$

BIZONYITÁS. Hasonló gondolatmenettel haladunk, mint a 3. Állitás bizonyitásakor. Legyen először $v=a_\kappa$ $(\kappa<\nu)$. Ha $w=a_\iota$ $(\iota<\nu)$, akkor állitásunk nyilvánvaló. Tegyük fel most, hogy állitásunk $v=a_\kappa$ és $w=u(\in X)$ esetén teljesül, s mutassuk meg, hogy akkor a $v=a_\kappa$, $w=a_\iota u$ párra is teljesül. Valóban,

$$p_w(p_{a_\kappa}(x_0,x_1,x_2),x_3,x_4) =$$
$$=p_{a_\iota}(p_{a_\kappa}(x_0,x_1,x_2),p_u(p_{a_\kappa}(x_0,x_1,x_2),x_3,x_4),p_{a_\kappa}(x_0,x_1,x_2)) \overset{\Sigma_o}{=}$$
$$= p_{a_\iota}(p_{a_\kappa}(x_0,x_1,x_2),p_{a_\kappa}(p_u(x_0,x_3,x_4),x_1,x_2),p_{a_\kappa}(x_0,x_1,x_2)) \overset{(III),(I)}{=}$$

$$=p_{a_\iota}(p_{a_\kappa}(x_o,x_1,x_2),p_u(x_o,x_3,x_4),x_o) \overset{(II)}{=}$$

$$=p_{a_\kappa}(p_{a_\iota}(x_o,p_u(x_o,x_3,x_4),x_o),x_1,x_2)=p_{a_\kappa}(p_w(x_o,x_3,x_4),x_1,x_2),$$

amit bizonyitani akartunk. Tegyük most fel, hogy állitásunk az $u,w(\in X)$ párra igaz, s bizonyitsuk teljesülését a $v=a_\kappa u,w$ $(\kappa<\nu)$ párra:

$$p_w(p_v(x_o,x_1,x_2),x_3,x_4)=p_w(p_{a_\kappa}(x_o,p_u(x_o,x_1,x_2),x_o),x_3,x_4) \overset{\Sigma_o}{=}$$

$$=p_{a_\kappa}(p_w(x_o,x_3,x_4),p_u(x_o,x_1,x_2),x_o) \overset{\Sigma_o(1.)}{=}$$

$$=p_{a_\kappa}(p_w(x_o,x_3,x_4),p_w(p_u(x_o,x_1,x_2),x_3,x_3),p_w(x_o,x_4,x_4)) \overset{\Sigma_o(3.)}{=}$$

$$=p_{a_\kappa}(p_w(x_o,x_3,x_4),p_w(p_u(x_o,x_1,x_2),x_3,x_4),p_w(x_o,x_3,x_4)) \overset{\Sigma_o}{=}$$

$$=p_{a_\kappa}(p_w(x_o,x_3,x_4),p_u(p_w(x_o,x_3,x_4),x_1,x_2),p_w(x_o,x_3,x_4)) =$$

$$=p_v(p_w(x_o,x_3,x_4),x_1,x_2).$$

Az állitást igy beláttuk tetszőleges $v,w\in X$ párra, ahonnan a p_w termek definiciója felhasználásával egyszerüen adódik tetszőleges $v,w\in Y$ párra is.

A 6. Állitás fontos speciális esete:

7. ÁLLITÁS. <u>Ha</u> $w_1,w_2\in Y$, <u>akkor</u>

$$\Sigma_o \vdash p_{w_1+w_2}(x,y,z)=p_{w_2+w_1}(x,y,z).$$

8. ÁLLITÁS. <u>Bármely</u> $v\in Y$ <u>szó esetén</u>

$$\Sigma_o \vdash p_v(p_v(x_o,x_1,x_2),x_3,x_4)=p_v(p_v(x_o,x_3,x_2),x_1,x_4)=p_v(p_v(x_o,x_1,x_4),x_3,x_2).$$

BIZONYITÁS. A 6. Állitás miatt elegendő az első azonosság levezethetőségét bizonyitani. Most is szoritkozhatunk a $v\in X$ esetre. Ha $v=a_\kappa(\kappa<\nu)$, akkor állitásunk triviális. Tegyük fel, hogy $v=a_\kappa u$ $(\kappa<\nu)$, $u\in X$ és u-ra az állitás érvényes. Akkor

$$p_v(p_v(x_o,x_1,x_2),x_3,x_4) =$$

$$=p_{a_\kappa}(p_v(x_o,x_1,x_2),p_u(p_v(x_o,x_1,x_2),x_3,x_4),p_v(x_o,x_1,x_2)) \overset{\Sigma_o(6.)}{=}$$

$$=p_{a_\kappa}(p_v(x_o,x_1,x_2),p_v(p_u(x_o,x_3,x_4),x_1,x_2),p_v(x_o,x_1,x_2)) \overset{\Sigma_o(3.,1.)}{=}$$

$$=p_{a_\kappa}(p_v(x_o,x_1,x_2),p_u(x_o,x_3,x_4),x_o) \overset{\Sigma_o(4.)}{=}$$

$$=p_{a_\kappa}(p_{a_\kappa}(x_o,x_o,p_u(x_o,x_2,x_1)),p_u(x_o,x_3,x_4),x_o) \overset{(IV),(II),(I)}{=}$$

$$=p_{a_\kappa}(x_o,p_u(x_o,x_3,x_4),p_u(x_o,x_2,x_1)) \,,$$

és hasonlóan

$$p_v(p_v(x_o,x_3,x_2),x_1,x_4) = p_{a_\kappa}(x_o,p_u(x_o,x_1,x_4),p_u(x_o,x_2,x_3)) \,.$$

Innen a 3. Állitás felhasználásával nyerhető a

$$p_v(p_v(x_o,x_1,x_2),x_3,x_4) \overset{\Sigma_o}{=} p_v(p_v(x_o,x_3,x_2),x_1,x_4)$$

összefüggés, s éppen ezt akartuk bizonyitani.

Mielőtt megfogalmazzuk a 3. Állitás egy általánositását, ujabb termeket definiálunk. Legyen $0<k<\omega$, $\underline{v} = \langle v_o,\dots,v_{k-1}\rangle \in A^k$. Tetszőleges $\underline{v}\in A^k$ szóvektorokhoz hozzárendelünk egy $2k+1$ változós $p_{\underline{v}}$ termet az alábbi definicióval:

$$p_{\langle v_o\rangle}(x_o,x_1,x_2) = p_{v_o}(x_o,x_1,x_2),$$

és ha $\underline{v}\in A^k$, $v_k\in A$, akkor

$$p_{\underline{v}*\langle v_k\rangle}(x_o,x_1,x_2,\dots,x_{2k+1},x_{2k+2}) = p_{v_k}(p_{\underline{v}}(x_o,\dots,x_{2k}),x_{2k+1},x_{2k+2}) \quad (k<\omega).$$

9. ÁLLITÁS. Legyen $0<n<\omega$ és $0<k_j<\omega$ $(j<n)$. Tekintsünk továbbá tetszőleges $\underline{w}\in Y^n$ illetve $\underline{v}_j\in Y^{k_j}$ $(j<n)$ szóvektorokat. Akkor tetszőleges $j(<n)$ és $i(<k_j)$-re

$$\Sigma_o \vdash p_{\underline{w}}(x_o, p_{\underline{v}_o}(x_o^o, x_1^o, \dots, x_{2k_o}^o), p_{\underline{v}_o}(\bar{x}_o^o, \bar{x}_1^o, \dots, \bar{x}_{2k_o}^o), \dots$$

$$\dots, p_{\underline{v}_{n-1}}(x_o^{n-1}, \dots, x_{2k_{n-1}}^{n-1}), p_{\underline{v}_{n-1}}(\bar{x}_o^{n-1}, \dots, \bar{x}_{2k_{n-1}}^{n-1})) =$$

$$= p_{\underline{w}}(x_o, p_{\underline{v}_o}([x_o^o]^*, [x_1^o]^*, \dots, [x_{2k_o}^o]^*), p_{\underline{v}_o}([\bar{x}_o^o]^*, \dots, [\bar{x}_{2k_o}^o]^*), \dots$$

$$\dots, p_{\underline{v}_{n-1}}([x_o^{n-1}]^*, \dots, [x_{2k_{n-1}}^{n-1}]^*), p_{\underline{v}_{n-1}}([\bar{x}_o^{n-1}]^*, \dots, [\bar{x}_{2k_{n-1}}^{n-1}]^*)) =$$

$$= p_{\underline{w}}(x_o, p_{\underline{v}_o}([x_o^o]_*, [x_1^o]_*, \dots [x_{2k_o}^o]_*), p_{\underline{v}_o}([\bar{x}_o^o]_*, \dots, [\bar{x}_{2k_o}^o]_*), \dots$$

$$\dots, p_{\underline{v}_{n-1}}([x_o^{n-1}]_*, \dots, [x_{2k_{n-1}}^{n-1}]_*), p_{\underline{v}_{n-1}}([\bar{x}_o^{n-1}]_*, \dots, [\bar{x}_{2k_{n-1}}^{n-1}]_*)),$$

<u>ahol</u>

$$[x_m^\ell]^* = \begin{cases} \bar{x}_{m+1}^\ell, & \underline{\text{ha}} \quad \ell=j,\ m=2i+1 \\ x_m^\ell, & \underline{\text{különben}} \end{cases},$$

$$[\bar{x}_m^\ell]^* = \begin{cases} x_{m-1}^\ell, & \underline{\text{ha}} \quad \ell=j,\ m=2i+2 \\ \bar{x}_m^\ell, & \underline{\text{különben}} \end{cases}$$

<u>és</u>

$$[x_m^\ell]_* = \begin{cases} \bar{x}_{m-1}^\ell, & \underline{\text{ha}} \quad \ell=j,\ m=2i+2 \\ x_m^\ell, & \underline{\text{különben}} \end{cases},$$

$$[\bar{x}_m^\ell]_* = \begin{cases} x_{m+1}^\ell, & \underline{\text{ha}} \quad \ell=j,\ m=2i+1 \\ x_m^\ell, & \underline{\text{különben}} \end{cases}.$$

BIZONYITÁS. Ha $j=n-1$ és $i=k_{n-1}-1$, akkor állításunk közvetlenül adódik a 3. Állitásból. A többi eset pedig erre visszavezethető a 6. Állitás többszöri alkalmazásával.

Jelölje a továbbiakban W azon A-beli elemek halmazát, amelyek Y-beli elemekből a "+" müvelet véges sokszori alkalmazásával előállithatók. A 0 kitüntetett elem is tartozzon W-hez. A 2. Állitás miatt nem fog félreértést okozni, ha a zárójelezéstől eltekintünk a W-beli elemekhez rendelt termek jelölésében.

Az előző állitásból a

$$(15)\qquad p_{\langle v_0,\dots,v_{k-1}\rangle}(x,y,z,y,z,\dots,y,z)=p_{\sum\limits_{i<k} v_i}(x,y,z)$$

$$(v_i\in A\ ,\ i<k<\omega)$$

egyenlőség figyelembe vételével egyszerüen adódik a

10. ÁLLITÁS. A 3. Állitás tetszőleges $v,w\in W$ szavak esetén is érvényes.

11. ÁLLITÁS. Legyen $w\in Y$ és $u_i\in Y$ $(i<n<\omega)$. Akkor

$$\Sigma_0 \vdash p_{w\sum\limits_{i<n} u_i}(x,y,z)=p_{\sum\limits_{i<n} wu_i}(x,y,z).$$

BIZONYITÁS. n szerinti teljes indukciót alkalmazunk. Ha $n=1$, állitásunk triviális. Tegyük fel, hogy állitásunk $n-1$-re igaz és legyen $v=u_0$, $u=\sum\limits_{0<i<n} u_i$. Akkor

$$p_{w(v+u)}(x,y,z)=p_w(x,p_v(p_u(x,y,z),y,z),x)\overset{\Sigma_0(1.)}{=}$$

$$=p_w(x,p_v(p_u(x,y,z),y,z),p_v(x,z,z))\overset{\Sigma_0(3.,1.)}{=}$$

$$=p_w(x,p_u(x,y,z),p_v(x,z,y)).$$

Másrészt viszont, minthogy az indukciós feltevés alapján

$$(16) \qquad p_{wu}(x,y,z) \overset{\Sigma_0}{=} p_{\sum\limits_{0<i<n} wu_i}(x,y,z),$$

a 7. Állitás miatt

$$p_{wv+wu}(x,y,z) \overset{\Sigma_0}{=} p_{wu+wv}(x,y,z),$$

s igy

$$p_{wv+wu}(x,y,z) \overset{\Sigma_0}{=} p_{wu}(p_{wu}(x,y,z),y,z) =$$

$$= p_w(p_{wv}(x,y,z),p_u(p_{wv}(x,y,z),y,z),p_{wv}(x,y,z)),$$

ahol ismét (16) és a 7. Állitás miatt

$$p_u(p_{wv}(x,y,z),y,z) \overset{\Sigma_0}{=} p_{wv}(p_u(x,y,z),y,z).$$

Tehát

$$p_{wv+wu}(x,y,z) \overset{\Sigma_0}{=}$$

$$= p_w(p_{wv}(x,y,z),p_{wv}(p_u(x,y,z),y,z),p_{wv}(x,y,z)) \overset{\Sigma_0(3.,1.)}{=}$$

$$= p_w(p_{wv}(x,y,z),p_u(x,y,z),x) \overset{\Sigma_0(4.)}{=}$$

$$= p_w(p_w(x,x,p_v(x,z,y)),p_u(x,y,z),x) \overset{\Sigma_0(8.,1.)}{=}$$

$$= p_w(x,p_u(x,y,z),p_v(x,z,y)),$$

és igy nyilvánvalóan

$$p_{w(v+u)}(x,y,z) \overset{\Sigma_0}{=} p_{wv+wu}(x,y,z),$$

ahonnan (16) felhasználásával adódik a bizonyitandó állitás.

12. ÁLLITÁS. <u>Legyen</u> $v\in W$ <u>és</u> $w_i\in Y$ $(i<n)$. <u>Akkor</u>

$$\Sigma_0 \vdash p_{(\sum_{i<n} w_i)v}(x,y,z)=p_{\sum_{i<n} w_i v}(x,y,z)$$

BIZONYITÁS. Ismét n szerinti indukcióval bizonyitjuk az állitást. Az $n=1$ esetben az állitás triviális. Tegyük fel, hogy $n\geq 2$ és $(n-1)$-re az állitás igaz. Legyen $w=\sum_{i<n-1} w_i$ és $u=w_{n-1}$. Akkor definició szerint

$$p_{(w+u)v}(x,y,z)=p_w(p_u(x,p_v(x,y,z),x),p_v(x,y,z),x) =$$

$$=p_w(p_{uv}(x,y,z),p_v(x,y,z),x),$$

illetve

$$p_{wv+uv}(x,y,z)=p_w(p_{uv}(x,y,z),p_v(p_{uv}(x,y,z),y,z),p_{uv}(x,y,z)) .$$

Ha $v=0$, az állitás innen egyszerüen adódik, ellenkező esetben a 11. Állitás miatt

$$p_{uv}(x,y,z) \overset{\Sigma_0}{=} p_{\sum_{i<k} uv_i}(x,y,z), \tag{17}$$

ahol $v=\sum_{i<k} v_i$, $v_i \in Y$ $(i<k)$, ezért a 7. Állitás felhasználásával

$$p_v(p_{uv}(x,y,z),y,z) \overset{\Sigma_0}{=} p_{uv}(p_v(x,y,z),y,z).$$

Akkor viszont

$$p_{wv+uv}(x,y,z) \overset{\Sigma_0}{=} p_w(p_{uv}(x,y,z), p_{uv}(p_v(x,y,z),y,z),p_{uv}(x,y,z)) ,$$

ahonnan ujra csak (17) illetve a 10. Állitás figyelembe vételével nyerjük, hogy

$$p_{wv+uv}(x,y,z) \overset{\Sigma_0}{=} p_w(p_{uv}(x,y,z),p_v(x,y,z),x).$$

Beláttuk ezzel, hogy

$$p_{(w+u)v}(x,y,z) \overset{\Sigma_0}{=} p_{wv+uv}(x,y,z),$$

ahonnan az indukciós feltevés felhasználásával rögtön adódik a bizonyitandó állitás.

A 4.4. LEMMA BIZONYITÁSA. Az, hogy A-n a $\sim$ reláció kongruencia, nyilvánvaló. A 2., 5., 11. és 12. Állitás alapján igazolható, hogy minden $\sim$-osztály tartalmaz W-beli elemet. Ebből pedig rendre az 1., 2., 7., 8. illetve 11., 12. Állitás felhasználásával adódik, hogy $A/\sim$ a $+,-,0$ müveletekre nézve Abel-csoport illetve a szorzás disztributiv az összeadásra. A szorzás asszociativitása a 2. Állitás következménye.

Az $A/\sim \cong F$ izomorfia abból adódik, hogy az $\varphi=\langle F;\{g_\kappa \mid \kappa<\nu\}\rangle$ algebrán, ahol

$$g_\kappa(x,y,z)= x+a_\kappa y+(-a_\kappa)z,$$

teljesülnek a $\sum_0$-beli azonosságok, és tetszőleges $v,w\in A$ elemekre a $p_w(x,y,z)=p_v(x,y,z)$ azonosság akkor és csak akkor teljesül φ-en, ha a $w=v$ egyenlőség fennáll F-ben.

Vegyük az F gyürünek mint A faktorstrukturájának egy W-be eső reprezentánsrendszerét. Legyen $v\in F$ reprezentánsa $v'\in W$, speciálisan $a'_\kappa=a_\kappa$ $(\kappa<\nu)$. Minden $v\in F$ elemhez hozzárendelünk egy három változós q_v termet a következőképpen:

$$q_v(x,y,z)=p_{v'}(x,y,z).$$

Minden $\underline{v}=\langle v_0,\dots,v_{n-1}\rangle\in F^n$ vektorhoz is rendelünk a korábbiakkal analóg módon egy-egy 2n+1 változós termet:

$$q_{\underline{v}}(x_0,x_1,\dots,x_{2n})=p_{\underline{v}'}(x_0,\dots,x_{2n}),$$

ahol $\underline{v}'=\langle v'_0,\ldots,v'_{n-1}\rangle$. Jelölje Q az összes $q_{\underline{v}}(x_{i_0},x_{i_1},\ldots,x_{i_{2n}})$ alaku termek halmazát, ahol $\underline{v}\in F^n$ $(0<n<\omega)$. Q-nak a Q_0 részhalmazát alkossák ezek közül azok a $q_{\underline{v}}(x_{i_0},x_{i_1},\ldots,x_{i_{2n}})$ termek, ahol $\sum_{i<n} v_i=0$, $i_{2k}=0$ $(0<k\leq n)$ és $i_1<i_3<\ldots<i_{2n-1}$.

4.5. LEMMA. <u>A</u> $g_\kappa(\kappa<\nu)$ <u>müveleti jelekből felépithető bármely</u> p <u>termhez található olyan</u> $\bar{p}\in Q_0$ <u>term, amelyre</u> $\sum_0\vdash p=\bar{p}$.

Most is néhány - a korábbiakhoz hasonló - állitást igazolunk a lemma bizonyitása előtt. Megjegyezzük azonban először, hogy a korábbi állitások közül az 1. és 10. Állitás akkor is igaz marad, ha benne a $p_w(w\in W)$ termeket $q_w(w\in F)$-fel helyettesitjük.

13. ÁLLITÁS. <u>Legyen</u> $0<n<\omega$ és $\underline{w}=\langle w_0,\ldots,w_{n-1}\rangle\in F^n$. <u>Akkor az</u> <u>n</u> <u>halmaz tetszőleges</u> π <u>permutációjára</u>

$$\sum\nolimits_0\vdash q_{\underline{w}}(x_0,y_0,z_0,\ldots,y_{n-1},z_{n-1})=q_{\pi\underline{w}}(x_0,y_{\pi(0)},z_{\pi(0)},\ldots,y_{\pi(n-1)},z_{\pi(n-1)}),$$

<u>ahol</u> $\pi\underline{w}=\langle w_{\pi(0)},\ldots,w_{\pi(n-1)}\rangle$.

BIZONYITÁS. Elegendő az állitást elemi transzpoziciókra bizonyitani. Ekkor pedig csak azt kell megmutatni, hogy tetszőleges $u,v\in W$-re

$$\sum\nolimits_0\vdash p_u(p_v(x_0,x_1,x_2),x_3,x_4)=p_v(p_u(x_0,x_3,x_4),x_1,x_2);$$

azaz, ha $u=\sum_{i<k} u_i$ és $v=\sum_{j<m} v_j$ $(u_i,v_j\in Y,\ i<k,\ j<m)$, akkor

$$\sum\nolimits_0\vdash p_{\underline{u}*\underline{v}}(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_1,x_2,x_3,x_4,\ldots,x_3,x_4)=$$

$$=p_{\underline{v}*\underline{u}}(x_0,x_3,x_4,\ldots,x_3,x_4,x_1,x_2,\ldots,x_1,x_2),$$

ahol $\underline{u}=\langle u_0,\ldots,u_{k-1}\rangle$, $\underline{v}=\langle v_0,\ldots,v_{m-1}\rangle$. Ez pedig a 6. Állitás többszöri alkalmazásával könnyen látható.

14. ÁLLITÁS. Legyen $0<n<\omega$ és $\underline{w}=\langle w_0,\ldots,w_{n-1}\rangle$. Tegyük fel, hogy $w_i=w_j$ $(i<j<n)$ és τ jelölje az (i,j) transzpoziciót. Akkor

$$\Sigma_0 \vdash q_{\underline{w}}(x_0,y_0,z_0,\ldots,y_{n-1},z_{n-1}) =$$
$$=q_{\underline{w}}(x_0,y_{\tau(0)},z_0,\ldots,y_{\tau(n-1)},z_{n-1})=$$
$$=q_{\underline{w}}(x_0,y_0,z_{\tau(0)},\ldots,y_{n-1},z_{\tau(n-1)})=$$

BIZONYITÁS. Az előző állitás alapján elegendő itt csak az első azonosság levezethetőségét bizonyitani. Sőt, az is feltehető, hogy $j=i+1=n-1$, s igy állitásunk adódik a következőből: bármely $w\in F$-re

$$\Sigma_0\vdash q_w(q_w(x_0,x_1,x_2),x_3,x_4)=q_w(q_w(x_0,x_3,x_2),x_1,x_4).$$

Ehhez azt kell belátni, hogy a 8. Állitás bármely $v\in W$ szóra is igaz, ami adódik a 6. és 8. Állitás alábbi következményéből: bármely $\underline{u}=\langle u_0,\ldots,u_{k-1}\rangle\in Y^k$-ra, ha $u_i=u_j$ $(i,j<k)$ és τ jelöli az (i,j) transzpoziciót, akkor

$$\Sigma_0\vdash p_{\underline{u}}(x_0,y_0,z_0,\ldots,y_{k-1},z_{k-1})=p_{\underline{u}}(x_0,y_{\tau(0)},z_0,\ldots,y_{\tau(k-1)},z_{k-1}).$$

15. ÁLLITÁS. Ha $u,v\in F$, akkor

$$\Sigma_0 \vdash q_{uv}(x,y,z)=q_u(x,x,q_v(x,z,y)).$$

BIZONYITÁS. A 4.4. Lemma és az 1. Állitás miatt

$$q_{uv}(x,y,z) \overset{\Sigma_0}{=} q_u(x,q_v(x,y,z),q_v(x,x,x)) ,$$

s igy a 10. Állitás felhasználásával

$$q_{uv}(x,y,z) \overset{\Sigma_0}{=} q_u(x,q_v(x,x,x),q_v(x,z,y)) \overset{\Sigma_0(1.)}{=}$$

$$=q_u(x,x,q_v(x,z,y)) .$$

16. ÁLLITÁS. Tetszőleges $u,v,w \in F$ elemekre teljesül, hogy

$$\Sigma_0 \vdash q_u(x_0,q_v(x_1,x_2,x_3),q_w(x_4,x_5,x_6)) =$$

$$=q_{uw}(q_{uv}(q_u(x_0,x_1,x_4),x_2,x_3),x_6,x_5).$$

BIZONYITÁS. A q_t $(t \in F)$ termek definiciója miatt a jobb oldalon álló q termre fennáll a következő:

$$q \overset{\Sigma_0}{=} q_u(q_{uv}(q_u(x_0,x_1,x_4),x_2,x_3),$$

$$q_w(q_{uv}(q_u(x_0,x_1,x_4),x_2,x_3),x_6,x_5),q_{uv}(q_u(x_0,x_1,x_4),x_2,x_3)) .$$

Vegyük figyelembe, hogy a 13. Állitás alapján

$$q_w(q_{uv}(q_u(x_0,x_1,x_4),x_2,x_3),x_6,x_5) \overset{\Sigma_0}{=}$$

$$= q_{uv}(q_w(q_u(x_0,x_1,x_4),x_6,x_5),x_2,x_3),$$

s igy a 10. illetve 1. Állitás felhasználásával adódik, hogy

$$q \overset{\Sigma_0}{=} q_u(q_{uv}(q_u(x_0,x_1,x_4),x_2,x_3),$$

$$q_w(q_u(x_0,x_1,x_4),x_6,x_5),q_u(x_0,x_1,x_4)) .$$

Ezt a gondolatmenetet még egyszer megismételve nyerjük, hogy

$$q \overset{\Sigma_0}{=} q_u(q_{uv}(q_u(x_o,x_1,x_4),x_2,x_3),q_w(x_o,x_6,x_5),x_o) \overset{\Sigma_0(15.)}{=}$$

$$= q_u(q_u(q_u(x_o,x_1,x_4),q_u(x_o,x_1,x_4),q_v(q_u(x_o,x_1,x_4),x_3,x_2)),$$

$$q_w(x_o,x_6,x_5),x_o).$$

A 13. Állitásból következik, hogy

$$q_v(q_u(x_o,x_1,x_4),x_3,x_2) \overset{\Sigma_0}{=} q_u(q_v(x_o,x_3,x_2),x_1,x_4),$$

s igy ujra csak a 10. és 1. Állitás alkalmazásával kapjuk, hogy

$$q \overset{\Sigma_0}{=} q_u(q_u(q_u(x_o,x_1,x_4),x_o,q_v(x_o,x_3,x_2)),q_w(x_o,x_6,x_5),x_o).$$

A 14. Állitás következtében a $q_v(x_o,x_3,x_2)$ illetve x_o term "felcserélhető", s igy az 1. Állitást is figyelembe véve

$$q \overset{\Sigma_0}{=} q_u(q_u(x_o,x_1,x_4),q_w(x_o,x_6,x_5),q_v(x_o,x_3,x_2)) \overset{\Sigma_0(14.,1.)}{=}$$

$$= q_u(q_u(x_o,q_w(x_o,x_6,x_5),q_w(x_4,x_4,x_4)),$$

$$q_v(x_1,x_1,x_1),q_v(x_o,x_3,x_2)) \overset{\Sigma_0(10.)}{=}$$

$$= q_u(q_u(x_o,q_w(x_o,x_4,x_4),q_w(x_4,x_5,x_6)),$$

$$q_v(x_1,x_2,x_3),q_v(x_o,x_1,x_1)) \overset{\Sigma_0(1.)}{=}$$

$$= q_u(q_u(x_o,x_o,q_w(x_4,x_5,x_6)),q_v(x_1,x_2,x_3),x_o) \overset{\Sigma_0(14.,1.)}{=}$$

$$= q_u(x_o,q_v(x_1,x_2,x_3),q_w(x_4,x_5,x_6)),$$

ezzel állitásunkat bebizonyitottuk.

17. ÁLLITÁS. <u>Legyen</u> $w \in F$, $\underline{v} \in F^m$ <u>és</u> $\underline{u} \in F^n$ $(0<m,n<\omega)$. <u>Akkor</u>

$$\Sigma_0 \vdash q_w(x_o,q_{\underline{v}}(x\ ,y_1,z_1,\dots,y_m,z_m),q_{\underline{u}}(\bar{x},\bar{y}_1,\bar{z}_1,\dots,\bar{y}_n,\bar{z}_n)) =$$

$$= q_{\langle w\rangle * \underline{wv} * \underline{wu}}(x_o, x, \bar{x}, y_1, z_1, \ldots, y_m, z_m, \bar{z}_1, \bar{y}_1, \ldots, \bar{z}_n, \bar{y}_n)) ,$$

ahol $\underline{wu} = \langle wu_1, \ldots, wu_n \rangle$, ha $\underline{u} = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$, és $\underline{wv}$ jelentése hasonló.

BIZONYITÁS. Az 1. Állitás miatt elegendő az m=n esetet vizsgálni. Ekkor az állitás n szerinti indukcióval igazolható a 16. illetve 13. Állitás felhasználásával.

18. ÁLLITÁS. Legyen $\underline{w} = \langle w_o, \ldots, w_{n-1} \rangle \in F^n$ $(0<n<\omega)$ és $\underline{w}^* = \langle w_o, -w_o, \ldots, w_{n-1}, -w_{n-1} \rangle$. Akkor

$$\Sigma_o \vdash q_{\underline{w}}(x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}) = q_{\underline{w}^*}(x_1, x_2, x_o, x_3, x_o, \ldots, x_{2n+1}, x_o) .$$

BIZONYITÁS. Elegendő az n=1 esetben igazolni az állitást, onnan már indukcióval nyilvánvalóan adódik tetszőleges n természetes száma is. Azt kell tehát megmutatni, hogy ha $w \in F$, akkor

$$\Sigma_o \vdash q_w(x_1, x_2, x_3) = q_{-w}(q_w(x_1, x_2, x_o), x_3, x_o) .$$

Ez a következőképpen igazolható:

$$q_{-w}(q_w(x_1, x_2, x_o), x_3, x_o) \overset{\Sigma_o}{=}$$

$$= q_w(q_w(x_1, x_2, x_o), x_o, x_3) \overset{\Sigma_o(14.,1.)}{=} q_w(x_1, x_2, x_3) .$$

A 4.5. LEMMA BIZONYITÁSA. A 17. Állitásból következik, hogy a g_κ $(\kappa<\nu)$ müveleti jelekből felépithető bármely p termhez létezik olyan $p' \in Q$ term, hogy $\Sigma_o \vdash p = p'$. A 18. Állitás alapján pedig ebből már adódik olyan $p'' = q_{\underline{w}}(x_{i_o}, x_{i_1}, x_o, x_{i_2}, x_o, \ldots, x_{i_n}, x_o) \in Q$ term létezése, hogy

$\underline{w}=\langle w_0,\dots,w_{n-1}\rangle\in F^n$, $\sum_{i<n} w_i=0$ és $\Sigma_0 \vdash p=p''$. A 13. Állitás alapján feltehető, hogy $\langle i_1,\dots,i_n\rangle=\jmath_0 * \dots * \jmath_{m-1}$, ahol $\jmath_k=\langle j_k,\dots,j_k\rangle\in\omega^{n_k}$ $(k<m)$ és $\sum_{k<m} n_k=n$, továbbá $j_0<j_1<\dots<j_{m-1}$.
Akkor

$$v_k = \sum_{i=1+\sum_{j=1}^{k-1} n_j}^{\sum_{j=1}^{k} n_j} w_i \qquad (k<m)$$

és $\underline{v}=\langle v_0,\dots,v_{m-1}\rangle$ választással teljesül, hogy

$$\Sigma_0 \vdash p=q_{\underline{v}}(x_{i_0},x_{j_0},x_0,\dots,x_{j_{m-1}},x_0),$$

és a jobb oldalon álló term benne van Q_0-ban.

Korábban megállapitottuk, hogy az $\mathfrak{M}_S$ algebrán teljesülnek az (I)-(IV) azonosságok. Az azóta bevezetett jelölések birtokában mostmár megadhatjuk az $\mathfrak{M}_S$-en teljesülő azonosságok halmazának egy bázisát. Az eddig felsorolt azonosságokon kivül nyilvánvalóan teljesülnek $\mathfrak{M}_S$-en a következő azonosságok is:

(V_λ) $\qquad q_{e_\lambda}(x,y,z)=x \qquad (\lambda<\mu).$

Jelöljük a továbbiakban Σ_1-gyel a $\Sigma_0 \cup \{(V_\lambda)\,|\,\lambda<\mu\}$ azonosság-halmazt.

4.6. TÉTEL. <u>Legyen</u> R <u>tetszőleges egységelemes gyürü</u>, S <u>pedig</u> R <u>részgyürüje</u>. <u>Attól függően, hogy</u> $1\notin S$ <u>illetve</u> $1\in S$, Σ_1 <u>illetve</u> $\Sigma_1\cup\{(I_0^*)\}$ <u>bázisa az</u> $\mathfrak{M}_S$ <u>algebrán teljesülő azonosságok halmazának</u>.

A tétel bizonyitása előtt még egy lemmát bizonyitunk.

4.7. LEMMA. <u>Legyen</u>

$$J_0=\{w \mid w\in F,\ \Sigma_1 \vdash q_w(x,y,z)=x\},$$

$$J=\{w-w' \mid w,w'\in F,\ \Sigma_1 \vdash q_w(x,y,x)=q_{w'}(x,y,x)\}$$

és

$$J_1=\{w-w' \mid w,w'\in F, \Sigma_1 \cup \{(I_0^*)\} \vdash q_w(x,y,x)=q_{w'}(x,y,x)\}.$$

Akkor mindhárom halmaz az F *gyürü ideálja, nevezetesen* $J_0=J$ *az* F *gyürü* $\{e_\lambda \mid \lambda<\mu\}$ *által generált ideálja,* J_1 *pedig az* F *gyürü*

(18) $$\{e_\lambda \mid \lambda<\mu\} \cup \{a_0a_\kappa-a_\kappa,\ a_\kappa a_0-a_\kappa \mid \kappa<\nu\}$$

által generált ideálja.

BIZONYITÁS. Az első állitás könnyen ellenőrizhető. Megmutatjuk például, hogy J ideálja F-nek. (J_1-re a bizonyitás szó szerint megismételhető, J_0 esetén is hasonló, de egyszerübb.) Legyen $w-w'$, $v-v'\in J$ és $u\in F$. Akkor

$$q_{w+v}(x,y,x) \overset{\Sigma_0}{=} q_w(q_v(x,y,x),y,x) \overset{\Sigma_1}{=} q_w(q_{v'}(x,y,x),y,x) \overset{\Sigma_0(6.)}{=}$$

$$=q_{v'}(q_w(x,y,x),y,x) \overset{\Sigma_1}{=} q_{v'}(q_{w'}(x,y,x),y,x) \overset{\Sigma_0}{=} q_{w'+v'}(x,y,x)$$

és

$$q_{uw}(x,y,x) \overset{\Sigma_0}{=} q_u(x,q_w(x,y,x),x) \overset{\Sigma_1}{=}$$

$$=q_u(x,q_{w'}(x,y,x),x) \overset{\Sigma_0}{=} q_{uw'}(x,y,x),$$

$$q_{wu}(x,y,x) \overset{\Sigma_0}{=} q_w(x,q_u(x,y,x),x) \overset{\Sigma_1}{=}$$

$$q_{w'}(x,q_u(x,y,x),x) \overset{\Sigma_0}{=} q_{w'u}(x,y,x),$$

amit igazolni akartunk. Nyilvánvaló, hogy

$$\{e_\lambda \mid \lambda<\mu\} \subseteq J_0 \subseteq J \subseteq J_1.$$

Jelöljük I'-vel F-nek az $\{e_\lambda|\lambda<\mu\}$ által generált ideálját, F^1-gyel pedig F legszűkebb egységelemes bővitését. Világos, hogy I' ideálja F^1-nek is. Tekintsük az F^1/I' gyürü mint F^1-modulus következő reduktját: $\mathfrak{A}=\langle F^1/I';\{g_\kappa|\kappa<\nu\}\rangle$, ahol $g_\kappa(x,y,z)=1x+a_\kappa y+(-a_\kappa)z$. Akkor $\mathfrak{A}$-n teljesül Σ_1, továbbá valamely $w,w'\in F$ elemekre a $g_w(x,y,x)=g_{w'}(x,y,x)$ azonosság akkor és csak akkor teljesül, ha $w-w'\in I'$. Ebből adódik, hogy $J\subseteq I'$, s igy a J_0 és J ideálokra vonatkozó állitásunkat bebizonyitottuk.

Jelölje J' F-nek a (18) alatti halmaz által generált ideálját. A $J'\subseteq J_1$ tartalmazás következik J_1 eddig megállapitott tulajdonságaiból, továbbá abból, hogy ha $\kappa<\nu$, akkor

$$q_{a_0 a_\kappa}(x,y,x) \overset{\Sigma_0}{=} q_{a_0}(x,q_{a_\kappa}(x,y,x),x) \overset{(I_0^*)}{=}$$
$$=q_{a_0}(q_{a_\kappa}(x,y,x),x,x) \overset{\Sigma_0(1.)}{=} q_{a_\kappa}(x,y,x),$$

és hasonlóan

$$q_{a_\kappa a_0}(x,y,x) \overset{\Sigma_0}{=} q_{a_\kappa}(x,q_{a_0}(x,y,x),x) \overset{(I_0^*),(I_0)}{=} q_{a_\kappa}(x,y,x).$$

A $J_1\subseteq J'$ tartalmazás bizonyitása céljából tekintsük az F/J' gyürüt. Ez nyilván egységelemes gyürü $(1=a_0)$. Vegyük az F/J' gyürü mint F/J'-modulus $\mathfrak{B}=\langle F/J',\{g_\kappa|\kappa<\nu\}\rangle$ idempotens reduktját, ahol $g_\kappa(x,y,z)=1x+a_\kappa y+(-a_\kappa)z$. Akkor $\mathfrak{B}$-n teljesül $\Sigma_1\cup\{(I_0^*)\}$, továbbá a $q_w(x,y,x)=q_{w'}(x,y,x)$ azonosság pontosan akkor teljesül $\mathfrak{B}$-n, ha $w-w'\in J'$. Ezzel a lemma állitását bebizonyitottuk.

A 4.6. TÉTEL BIZONYITÁSA. Legyen $\Psi=\Sigma_1$ illetve $\Psi=\Sigma_1\cup\{(I_0^*)\}$ attól függően, hogy $1\notin S$ illetve $1\in S$. A 4.5. Lemma következtében elegendő megmutatni, hogy Ψ-ből levezethető minden olyan $\mathfrak{M}_S$-en teljesülő $p_1=p_2$ azonosság, ahol $p_1,p_2\in Q_o$. Tegyük tehát fel, hogy $\underline{w}=\langle w_o,\dots,w_{m-1}\rangle\in F^m$, $\underline{v}=\langle v_o,\dots,v_{n-1}\rangle\in F^n$ $(0<m,n<\omega)$, $\sum\limits_{i<m}w_i=\sum\limits_{i<n}v_i=0$ és $\mathfrak{M}_S$-en teljesül a

$$q_{\underline{w}}(x_{i_o},x_{i_1},x_o,\dots,x_{i_m},x_o)=$$
$$=q_{\underline{v}}(x_{j_o},x_{j_1},x_o,\dots,x_{j_n},x_o)$$

azonosság, ahol $i_1<\dots<i_m$ és $j_1<\dots<j_n$. Az általánosság megszoritása nélkül feltehető, hogy $m=n$ és $i_k=j_k$ $(0<k\le n)$, hiszen $\Sigma_o\vdash q_o(x,y,z)=x$. A

$$q_{\underline{w}}(x_{i_o},x_{i_1},x_o,\dots,x_{i_m},x_o)=q_{\underline{v}}(x_{j_o},x_{i_1},x_o,\dots,x_{i_m},x_o)$$

azonosság teljesülése $\mathfrak{M}_S$-en azt jelenti, hogy $\mathfrak{M}_S$-en fennáll az

$$(19)\qquad x_{i_o}+\sum_{k<m}\varphi(w_k)x_{i_{k+1}}|_{\mathfrak{M}}=x_{j_o}+\sum_{k<m}\varphi(v_k)x_{i_{k+1}}|_{\mathfrak{M}}$$

egyenlőség.

Tegyük fel először, hogy $1\notin S$. Akkor (19)-ből adódik, hogy $i_o=j_o$, ellenkező esetben ugyanis x_{i_o} együtthatója a jobb oldalon S-beli, a bal oldalon pedig nem S-beli. Ha viszont $1\in S$, akkor az (I_o^*) $(\in\Psi)$ azonosság miatt feltehető, hogy $i_o=j_o$. Ekkor ugyanis

$$q_{\underline{v}}(x_{j_o},x_{j_1},x_o,\dots,x_{j_n},x_o)\overset{\Sigma_o(1.)}{=}$$
$$=q_{\underline{v}}(q_{a_o}(x_{j_o},x_{i_o},x_{i_o}),x_{j_1},x_o,\dots,x_{j_n},x_o)\overset{(I_o^*)}{=}$$
$$=q_{\underline{v}}(q_{a_o}(x_{i_o},x_{j_o},x_{i_o}),x_{j_1},x_o,\dots,x_{j_o},x_o),$$

és a legutóbbi termre alkalmazható a 18. Állitás.

Annak igazolása van tehát hátra, hogy a

$$q_{\underline{w}}(x_{i_0},x_{i_1},x_0,\dots,x_{i_m},x_0)=q_{\underline{v}}(x_{i_0},x_{i_1},x_0,\dots,x_{i_m},x_0)$$

azonosság levezethető Σ_1-ből feltéve, hogy S-ben fennállnak a

$$\varphi(w_k)=\varphi(v_k) \qquad (k<m)$$

egyenlőségek, azaz v_k-w_k $(k<m)$ benne van F $\{e_\lambda \mid \lambda<\mu\}$ által generált I ideáljában. A 4.7. Lemma következtében

$$\Sigma_1 \vdash q_{\underline{v}-\underline{w}}(x,x_{i_1},x_0,\dots,x_{i_m},x_0)=x,$$

ahol $x\in\{x_n \mid 0<n<\omega\}-\{x_{i_{k+1}} \mid k<m\}$. Igy

$$q_{\underline{w}}(x_{i_0},x_{i_1},x_0,\dots,x_{i_m},x_0) \overset{\Sigma_1}{=}$$

$$= q_{\underline{v}-\underline{w}}(q_{\underline{w}}(x_{i_0},x_{i_1},x_0,\dots,x_{i_m},x_0),x_{i_1},x_0,\dots,x_{i_m},x_0) \overset{\Sigma_0(13.)}{=}$$

$$=q_{\langle v_0-w_0,w_0,\dots,v_{m-1}-w_{m-1},w_{m-1}\rangle}(x_{i_0},x_{i_1},x_0,x_{i_1},x_0,\dots,x_{i_m},x_0,x_{i_m},x_0) \overset{\Sigma_0}{=}$$

$$=q_{\underline{v}}(x_{i_0},x_{i_1},x_0,\dots,x_{i_m},x_0),$$

s ezzel a tétel állitását bebizonyitottuk.

Rátérünk az $\langle M;\bigcap(Cl_{\mathfrak{M}}(I_\gamma) \mid \gamma<\alpha)\rangle$ algebra azonosságainak vizsgálatára, ahol $\alpha(\geq 2)$ tetszőleges rendszám, $\mathfrak{J}=\{I_\gamma \mid \gamma<\alpha\}$ elemei pedig eleget tesznek az 1.4.Tétel (a)-(c) feltételeinek.

Legyen $S=\bigcap(I_\gamma \mid \gamma<\alpha)$, s válasszuk ki S egy $\{s_\kappa \mid \kappa<\nu\}$ generátorrendszerét. Nyilvánvalóan $\alpha\geq 2$ esetén $1\notin S$. A korábban bevezetett többi jelölést szintén megtartjuk. Ezen kivül minden $\pi\in H$ partició blokkjait $|\pi|$-nél kisebb természetes számokkal megindexeljük pl. ugy, hogy $i<j$ akkor és csak akkor teljesüljön, ha a B_i blokkban levő legkisebb rendszám kisebb,

mint a B_j-ben levő. A 4.3. Lemma következtében ez az algebra ekvivalens az $\mathfrak{M}_j=\langle M; \{g_\kappa | \kappa<\nu\}\cup\{f_\pi | \pi\in H\}\rangle$ algebrával, ahol

$$f_\pi(x_0,\dots,x_{|\pi|-1})=\sum_{j<|\pi|} i^\pi_{B_j} x_j \,|_{\mathfrak{M}} \qquad (\pi\in H)$$

és

$$g_\kappa(x_0,x_1,x_2)=1x_0+s_\kappa x_1+(-s_\kappa)x_2 \,|_{\mathfrak{M}} \qquad (\kappa<\nu).$$

Emlékeztetünk arra a megállapodásunkra, hogy végtelen α esetén $H=\prod_j$, véges α esetén pedig H egyelemü. $\mathfrak{M}_j$-n nyilvánvalóan teljesülnek az (I)-(V) azonosságok. Megadunk most további $\mathfrak{M}_j$-n teljesülő azonosságokat.

Az (a) feltételből következik, hogy tetszőleges $\pi\in H$, $j<|\pi|$ és $\kappa<\nu$ esetén $i^\pi_{B_j}s_\kappa$, $s_\kappa i^\pi_{B_j}\in S$. Válasszunk egy-egy olyan F - beli elemet, amelynek a természetes homomorfizmusnál ezek az elemek felelnek meg, s jelöljük ezeket $\chi^\pi_j a_\kappa$-val illetve $a_\kappa\chi^\pi_j$-vel.

$\mathfrak{M}_j$-n teljesülnek a következő azonosságok:

$$(\mathrm{VI}^\pi_{\langle\kappa_0,\dots,\kappa_{|\pi|-1}\rangle}) \quad f_\pi(g_{\kappa_0}(x_0,y_0,z_0),\dots,g_{\kappa_{|\pi|-1}}(x_{|\pi|-1},y_{|\pi|-1},z_{|\pi|-1}))=$$

$$=q_{\langle\chi^\pi_0 a_{\kappa_0},\dots,\chi^\pi_{|\pi|-1}a_{\kappa_{|\pi|-1}}\rangle}(f_\pi(x_0,\dots,x_{|\pi|-1}),y_0,z_0,\dots,y_{|\pi|-1},z_{|\pi|-1})$$

$$(\pi\in H,\ \kappa_i<\nu,\ i<|\pi|);$$

$$(\mathrm{VII}^\pi_\kappa) \quad g_\kappa(x,f_\pi(y_0,\dots,y_{|\pi|-1}),f_\pi(z_0,\dots,z_{|\pi|-1}))=$$

$$=q_{\langle a_\kappa\chi^\pi_0,\dots,a_\kappa\chi^\pi_{|\pi|-1}\rangle}(x,y_0,z_0,\dots,y_{|\pi|-1},z_{|\pi|-1})$$

$$(\pi\in H,\ \kappa<\nu).$$

Vegyük észre továbbá, hogy ha $\pi\in H$ és $j\neq k$ $(j,k<|\pi|)$, akkor az 1.5. Tétel (i) miatt $i^\pi_j i^\pi_k\in S$. Legyen $u^\pi_{jk}\in F$ olyan, hogy az $F \to S$ természetes homomorfizmus melletti képe éppen $i_j^{\pi} i_k^{\pi}$. Akkor $\mathfrak{M}_j$-n teljesül a következő azonosság is:

$$(\mathrm{VIII}^{\pi}) \qquad f_{\pi}(f_{\pi}(x_{00},\dots,x_{0,|\pi|-1}),\dots,f_{\pi}(x_{|\pi|-1,0},\dots,x_{|\pi|-1,|\pi|-1})) =$$

$$=q_{\underline{u}}(f_{\pi}(x_{00},\dots,x_{|\pi|-1,|\pi|-1}),x_{01},x_{00},x_{02},x_{00},\dots,x_{0,|\pi|-1},x_{00},$$

$$x_{10},x_{11},x_{12},x_{11},\dots,x_{1,|\pi|-1},x_{11},\dots$$

$$\dots,x_{|\pi|-1,0},x_{|\pi|-1,|\pi|-1},\dots,x_{|\pi|-1,|\pi|-2},x_{|\pi|-1,|\pi|-1}),$$

ahol $\underline{u}=\langle u_{01}^{\pi},\dots,u_{0,|\pi|-1}^{\pi},u_{10}^{\pi},u_{12}^{\pi},\dots,u_{1,|\pi|-1}^{\pi},\dots,u_{|\pi|-1,0}^{\pi},\dots,u_{|\pi|-1,|\pi|-2}^{\pi}\rangle$

$(\pi \in H)$.

Legyen τ az egyblokku partició. Nyilvánvalóan $\mathfrak{M}_j$-n teljesül a

$$(\mathrm{IX}) \qquad f_{\tau}(x_0)=x_0$$

azonosság. Véges α esetén (IX) alatt az

$$f_{\pi}(x_0,\dots,x_0)=x_0 \qquad (\pi \in H)$$

azonosság értendő.

Még egy azonossághalmaz van hátra, amely azonban csak végtelen α esetén nem üres. Legyen $\pi,\bar{\pi} \in H$, $|\pi|=n$, $|\bar{\pi}|=m$ és tegyük fel, hogy $\pi > \bar{\pi}$. Definiálunk egy $\zeta_{\pi}^{\bar{\pi}}: \underline{m} \to \underline{n}$ függvényt, mégpedig ugy, hogy ha $i<m$, $\zeta_{\pi}^{\bar{\pi}}(i)<n$ legyen az a szám, amelyre $\bar{B}_i \subseteq B_{\zeta_{\pi}^{\bar{\pi}}(i)}$ teljesül, ahol $\bar{B}_i \in \bar{\pi}$ és $B_{\zeta_{\pi}^{\bar{\pi}}(i)} \in \pi$. Az 1.5. Tétel (ii) állításának felhasználásával tudjuk továbbá, hogy tetszőleges $j<n$-re

$$(20) \qquad i_{B_j}^{\pi} - \sum_{\substack{k<m \\ \zeta_{\pi}^{\bar{\pi}}(k)=j}} i_{\bar{B}_k}^{\bar{\pi}} \in S.$$

Ha tehát kiválasztunk minden $j<n$-re F-ből egy $v_j^{\pi,\bar\pi}$ elemet ugy, hogy annak az $F\to S$ természetes homomorfizmusnál a képe a (20)-beli elem, akkor $\mathfrak{M}_j$-n teljesül a következő azonosság is:

$$(X_\pi^{\bar\pi})\qquad f_\pi(x_0,\dots,x_{|\pi|-1}) =$$

$$q_{\underline{v}}(f_{\bar\pi}(x_{\zeta_\pi^{\bar\pi}(0)},\dots,x_{\zeta_\pi^{\bar\pi}(|\bar\pi|-1)}),x_0,x_0,x_1,x_0,\dots,x_{|\pi|-1},x_0),$$

ahol $\underline{v}=\langle v_0^{\pi,\bar\pi},\dots,v_{|\pi|-1}^{\pi,\bar\pi}\rangle$.

Mivel S-ben teljesül a

$$\sum_{j<n}\Big(i_{B_j}^{\pi}-\sum_{\substack{k<m\\ \zeta_\pi^{\bar\pi}(k)=j}} i_{\bar B_k}^{\bar\pi}\Big)=0$$

egyenlőség, feltehető, hogy a $v_j^{\pi,\bar\pi}$ $(j<|\pi|)$ elemeket ugy választottuk, hogy F-ben fennáll a $\sum_{j<|\pi|} v_j^{\pi,\bar\pi}=0$ egyenlőség.

Jelölje P a $g_\kappa(\kappa<\nu)$ és $f_\pi(\pi\in H)$ müveleti jelekből felépithető termek halmazát. P_0 legyen az összes olyan

$$q_{\underline{w}}(f_\pi(x_{i_0},\dots,x_{i_{|\pi|-1}}),x_{j_1},x_0,\dots,x_{j_n},x_0)$$

alaku termek halmaza, ahol $\underline{w}\in F^n$ és $q_{\underline{w}}(x_{j_0},x_{j_1},x_0,\dots,x_{j_n},x_0)\in Q_0$.

Σ-val jelöljük Σ_1 valamint a (VI)-(X) alatt felsorolt azonosságհalmazok unióját.

Érvényes a 4.5. Lemma következő általánositása:

4.8. LEMMA. <u>Bármely</u> $p\in P$ <u>termhez megadható olyan</u> $\bar p\in P_0$ <u>term, hogy</u> $\Sigma\vdash p=\bar p$.

Most is először három állitást bizonyitunk, előljáróban azonban megjegyezzük, hogy a (IX), (X) és (I) azonosság következményeként végtelen α esetén is minden $\pi \in H$-ra teljesül, hogy

$$\Sigma \vdash f_\pi(x_0,\ldots,x_0)=x_0 \qquad (\pi \in H). \tag{21}$$

Korábban definiáltuk a $\chi_j^\pi a_\kappa$ és $a_\kappa \chi_j^\pi$ ($\in F$) elemeket. A definiciót most kiterjesztjük F-re ugy, hogy $\chi_j^\pi(\ )$ illetve $(\ )\chi_j^\pi$ F egy-egy additiv bal illetve jobb transzlációja legyen. Ha $w=a_{\kappa_0}\ldots a_{\kappa_{n-1}} \in X$ $(1<n<\omega)$, akkor legyen

$$\chi_j^\pi w=(\chi_j^\pi a_{\kappa_0})(a_{\kappa_1}\ldots a_{\kappa_{n-1}}) \text{ és } w\chi_j^\pi=(a_{\kappa_0}\ldots a_{\kappa_{n-2}})(a_{\kappa_{n-1}}\chi_j^\pi).$$

Ha $w=-v$ és $v\in X$, akkor

$$\chi_j^\pi w=-(\chi_j^\pi v) \qquad \text{és} \qquad w\chi_j^\pi=-(v\chi_j^\pi),$$

végül ha $w=\sum_{i<m} w_i$, $w_i \in Y$ $(i<m<\omega)$, akkor

$$\chi_j^\pi w=\sum_{i<m}\chi_j^\pi w_i \qquad \text{és} \qquad w\chi_j^\pi=\sum_{i<m} w_i\chi_j^\pi .$$

Megállapodunk továbbá abban, hogy

$$\chi_j^\pi 0=0\chi_j^\pi=0.$$

19. ÁLLITÁS. <u>Legyen</u> $\pi\in H$ <u>és</u> $|\pi|=n$. <u>Akkor tetszőleges</u> $w_i\in Y\cup\{0\}$ $(i<n)$ <u>elemekre</u>

$$\begin{aligned}\Sigma \vdash f_\pi(q_{w_0}(x_0,y_0,z_0),\ldots,q_{w_{n-1}}(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1})) &= \\ =q_{\langle\chi_0^\pi w_0,\ldots,\chi_{n-1}^\pi w_{n-1}\rangle}(f_\pi(x_0,\ldots,x_{n-1}),y_0,z_0,\ldots,y_{n-1},z_{n-1}).&\end{aligned} \tag{22}$$

BIZONYITÁS. Az állitást elegendő arra az esetre bizonyitani, amikor $w_i \in X$ $(i<n)$. Legyen ℓ_i $(i<n)$ a w_i tényezőinek száma és $\ell = \sum_{i<n} \ell_i$. Az állitást ℓ szerinti indukcióval bizonyitjuk. Ha $\ell = n$, állitásunk a (VI) azonosság alapján nyilvánvaló. Legyen $n<N<\omega$ és tegyük fel, hogy (22) teljesül, valahányszor $\ell<N$. Válasszuk a $w_i \in X$ $(i<n)$ szavakat ugy, hogy $\sum_{i<n} \ell_i = N$ teljesüljön. Tegyük fel például, hogy $\ell_0 > 1$ és $w_0 = w_0' a_\kappa$ $(\kappa<\nu,\ w_0' \in X)$. Akkor az indukciós feltevés miatt

$$f_\pi(q_{w_0}(x_0,y_0,z_0),\dots,q_{w_{n-1}}(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1})) \overset{\Sigma}{=}$$

$$= q_{\langle \chi_0^\pi w_0', \chi_1^\pi w_1, \dots, \chi_{n-1}^\pi w_{n-1}\rangle}(f_\pi(x_0,x_1,\dots,x_{n-1}),$$

$$q_{a_\kappa}(x_0,y_0,z_0),x_0,y_1,z_1,\dots,y_{n-1},z_{n-1}) \overset{\Sigma_0(13.,1.)}{=}$$

$$= q_{\chi_0^\pi w_0'}(q_{\underline{w}}(f_\pi(x_0,x_1,\dots,x_{n-1}),y_1,z_1,\dots,y_{n-1},z_{n-1}),$$

$$q_{a_\kappa}(x_0,y_0,z_0),q_{a_\kappa}(x_0,x_0,x_0)) \overset{\Sigma_0(16.,1.)}{=}$$

$$= q_{(\chi_0^\pi w_0')a_\kappa}(q_{\underline{w}}(f_\pi(x_0,x_1,\dots,x_{n-1}),y_1,z_1,\dots,y_{n-1},z_{n-1}),y_0,z_0) \overset{\Sigma_0(13.,2.)}{=}$$

$$= q_{\langle \chi_0^\pi w_0\rangle * \underline{w}}(f_\pi(x_0,\dots,x_{n-1}),y_0,z_0,\dots,y_{n-1},z_{n-1}),$$

ahol $\underline{w} = \langle \chi_1^\pi w_1,\dots,\chi_{n-1}^\pi w_{n-1}\rangle$. Az állitás bizonyitását befejeztük.

20. ÁLLITÁS. <u>Legyen</u> $\pi \in H$, $|\pi| = n$, <u>és tekintsünk tetszőleges</u> $\underline{w}_i = \langle w_{i0},\dots,w_{i,k_i-1}\rangle \in (Y \cup \{0\})^{k_i}$ $(i<n,\ 0<k_i<\omega)$ <u>sorozatokat</u>. <u>Akkor</u>

$$\Sigma \vdash f_\pi(q_{\underline{w}_0}(x_0,y_{00},z_{00},\dots,y_{0,k_0-1},z_{0,k_0-1}),\dots$$

$$\dots,q_{\underline{w}_{n-1}}(x_{n-1},y_{n-1,0},z_{n-1,0},\dots,y_{n-1,k_{n-1}-1},z_{n-1,k_{n-1}-1})) =$$

$$=q_{\chi_o^\pi \underline{w}_o * \dots * \chi_{n-1}^\pi \underline{w}_{n-1}}(f_\pi(x_o,\dots,x_{n-1}),y_{oo},z_{oo},\dots,y_{o,k_o-1},z_{p,k_o-1},$$

$$\dots,y_{n-1,o},z_{n-1,o},\dots,y_{n-1,k_{n-1}-1},z_{n-1,k_{n-1}-1}),$$

<u>ahol</u> $\chi_i^\pi \underline{w}_i=\langle \chi_i^\pi w_{io},\dots,\chi_i^\pi w_{i,k_i-1}\rangle$.

BIZONYITÁS. Az általánosság megszoritása nélkül feltehető, hogy $k_o=\dots=k_{n-1}=k$, s ezután k szerinti teljes indukcióval bizonyitható az állitás a 19. illetve 13. Állitásra támaszkodva.

(15) figyelembe vételével a 20. Állitásból azonnal adódik a

21. ÁLLITÁS. <u>A 20. és igy speciálisan a 19. Állitásban is</u> $Y\cup\{0\}$ <u>helyett mindenütt</u> F <u>irható</u>.

A 4.8. LEMMA BIZONYITÁSA. A p term "rangja" szerinti indukcióval belátható, hogy létezik olyan $\pi\in H$ partició és olyan $\underline{w}\in F^n$ $(0<n<\omega)$ sorozat, hogy

$$(23)\quad \Sigma\vdash p=q_{\underline{w}}(f_\pi(x_{j_o},\dots,x_{j_{|\pi|-1}}),x_{k_1},x_{k_2},\dots,x_{k_{2n-1}},x_{k_{2n}}),$$

majd innen a 4.5. Lemma felhasználásával közvetlenül adódik a lemma állitása.

(23) bizonyitását csak vázoljuk. Először is vegyük észre, hogy ha adott véges sok olyan alaku term, mint a (23)-beli azonosság jobb oldalán álló term, akkor az 1.6. Következmény valamint a (X) azonosságok miatt feltehető, hogy mindegyikban ugyanahhoz a $\pi(\in H)$ particióhoz tartozó f_π müveleti jel szerepel.

A (IX) azonosság illetve az 1. Állitás felhasználásával adódik, hogy (23) érvényes a $p\in\{x_i \mid i<\omega\}$ termekre. Ha a p termben a legkülső müveleti jel valamelyik g_κ $(\kappa<\nu)$, akkor

(23) igazolásához az indukciós feltevésen kivül a 17. Állitást, majd pedig a (VII) azonosságot kell felhasználni, ha pedig p-ben a legkülső müveleti jel valamelyik f_π $(\pi \in H)$, akkor az indukciós feltevés alkalmazása után - az előzőekben tett észrevétel figyelembe vételével - elérjük, hogy minden fellépő $f_\pi(\pi \in H)$ müveleti jelben ugyanaz a π partició szerepeljen, majd felhasználjuk a 21. Állitást, s végül alkalmazzuk a (VIII) azonosságot.

A 4.6. Tétel analogonja a következő:

4.9. TÉTEL. <u>Legyen</u> R <u>tetszőleges egységelemes gyürü,</u> $\mathcal{J}=\{I_\gamma \mid \gamma<\alpha\}$ <u>pedig</u> R <u>részgyürüinek olyan legalább két elemü halmaza, amely eleget tesz az 1.4. Tétel</u> (a)-(c) <u>feltételeinek. Akkor</u> Σ <u>bázisa az</u> $\mathfrak{M}_\mathcal{J}$ <u>algebrán teljesülő azonosságok halmazának</u>.

BIZONYITÁS. A 4.8. Lemma valamint az 1.6. Következmény és a (X) azonosságok miatt elegendő igazolni, hogy az $\mathfrak{M}_\mathcal{J}$-n teljesülő

$$q_{\underline{w}}(f_\pi(x_{j_0},\dots,x_{j_{|\pi|-1}}),x_{k_0},x_0,x_{k_1},x_0,\dots,x_{k_{n-1}},x_0)=$$

(24)

$$=q_{\underline{w}'}(f_\pi(x_{j'_0},\dots,x_{j'_{|\pi|-1}}),x_{k_0},x_0,\dots,x_{k_{n-1}},x_0)$$

alaku azonosságok levezethetők Σ-ból, ahol $\underline{w}=\langle w_0,\dots,w_{n-1}\rangle$, $\underline{w}'=\langle w'_0,\dots,w'_{n-1}\rangle \in F^n$ és mindkét term P_0-beli. (24) teljesülése $\mathfrak{M}_\mathcal{J}$-n azt jelenti, hogy az $\mathfrak{M}$ moduluson fennáll a

$$\sum_{m<|\pi|} i^\pi_{B_m} x_{j_m} + \sum_{m<n} \varphi(w_m) x_{k_m}\Big|_{\mathfrak{M}} = \sum_{m<|\pi|} i^\pi_{B_m} x_{j'_m} + \sum_{m<n} \varphi(w'_m) x_{k_m}\Big|_{\mathfrak{M}}$$

egyenlőség. Mivel $\varphi(w_m), \varphi(w'_m) \in \bigcap(I_\gamma|\gamma<\alpha)$, bármely $j<\omega$ természetes számra

$$\sum_{\substack{m<|\pi| \\ j_m=j}} i^{\pi}_{B_m} - \sum_{\substack{m<|\pi| \\ j'_m=j}} i^{\pi}_{B_m} \in \bigcap(I_\gamma|\gamma<\alpha),$$

s igy szükségképpen $j_m=j'_m$ teljesül minden $m<|\pi|$-re. Akkor viszont bármely $m<n$ esetén $\varphi(w_m)=\varphi(w'_m)$ érvényes $\bigcap(I_\gamma|\gamma<\alpha)=S$-ben, igy (24) levezethetősége következik a 4.6. Tételből.

A 4.9. Tétel első alkalmazásaként szükséges és elegendő feltételt adunk meg arra, hogy egy $\mathfrak{M}_J$ algebrának véges azonosságbázisa legyen. Érvényes a következő tétel:

4.10. TÉTEL. Legyen R tetszőleges egységelemes gyürü, $J=\{I_\gamma|\gamma<\alpha\}$ pedig R részgyürüinek egy olyan halmaza, amely eleget tesz az 1.4. Tétel (a)-(c) feltételeinek. Akkor $\mathfrak{M}_J$-nek pontosan akkor van véges azonosságbázisa, ha α véges és $\bigcap(I_\gamma|\gamma<\alpha)$ végesen prezentált gyürü. Ekkor a 4.6. illetve 4.9. Tételben megadott azonosságbázis véges.

A tétel bizonyitása előtt megjegyezzük, hogy ebből a szempontból az $\mathfrak{M}_J$ algebrák lényegében nem játszanak kitüntetett szerepet a velük ekvivalens algebrák között. Elegendő megemliteni a következő tényeket:

4.11. LEMMA. Legyen $\mathfrak{A}=\langle A;F\rangle$ tetszőleges algebra.

(i) Ha $\mathfrak{A}$ idempotens és Id$(\mathfrak{A})$ véges bázisu, akkor F véges.

(ii) Ha $\mathfrak{A}'=\langle A,F'\rangle$ <u>$\mathfrak{A}$-val ekvivalens algebra és</u> F,F' <u>véges, akkor</u> $Id(\mathfrak{A})$ <u>pontosan akkor véges bázisu, ha</u> $Id(\mathfrak{A}')$ <u>véges bázisu.</u>

Az első állitás nyilvánvaló, a második az azonosságok elméletében jól ismert tény. (V.ö. [4], Sections 1.5., 1.6.)

A 4.10. TÉTEL BIZONYITÁSA. A megadott feltétel elegendősége a 4.6. és 4.9. Tétel alapján nyilvánvaló. Forditva, tegyük fel, hogy $Id(\mathfrak{M}_J)$ véges bázisu. Akkor kiválasztható $Id(\mathfrak{M}_J)$ általunk megadott bázisának egy Φ véges részhalmaza ugy, hogy Φ is bázisa $Id(\mathfrak{M}_J)$-nek. Másrészt, a 4.11.Lemma (i) állitása valamint a 4.2. Lemma miatt α és ν szükségképpen véges. Speciálisan $H(\subseteq \Pi_J)$ választható az üres halmaznak illetve egyelemünek, attól függően, hogy $\alpha=1$ illetve $2\leq\alpha<\omega$. Ugyancsak α és ν végessége miatt feltehető, hogy Φ tartalmazza az összes azonosságot, amely $Id(\mathfrak{M}_J)$-nek a 4.6. illetve 4.9. Tételben megadott azonosságbázisában van, kivéve az (V_λ) $(\lambda<\mu)$ azonosságokat, amelyek közül csak véges sokat tartalmaz.

Minthogy $\mathfrak{M}_J$-n a $q_w(x,y,x)=q_{w'}(x,y,x)$ azonosság pontosan akkor teljesül, ha $w-w'$ benne van az $F\to\bigcap(I_\gamma\,|\,\gamma<\alpha)$ természetes homomorfizmus magjában, a tétel bizonyitásával készen vagyunk, ha megmutatjuk, hogy

$$\{w-w'\,|\,w,w'\in F,\ \Phi\vdash q_w(x,y,x)=q_{w'}(x,y,x)\}$$

az F gyürü végesen generált ideálja. Ha $\alpha=1$, ez rögtön adódik a 4.7. Lemmából, hiszen Φ "ugyanolyan azonossághalmaz", mint Σ_1 illetve $\Sigma_1\cup\{(I_0^*)\}$ - attól függően, hogy $1\notin I_0$

vagy $1\in 1_0$.

A $2\leq\alpha<\omega$ esetben is egy a 4.7. Lemmához hasonló állitásra van szükségünk, a gondolatmenetet azonban kicsit finomitani kell. Vegyük észre, hogy $\mathfrak{M}_j$-n teljesülnek a

$$(XI_i)\qquad f_\pi(\underbrace{x,\dots,x,f_\pi(y,\dots,y,\overset{i}{x},y,\dots,y),x,\dots,x}_{i}) =$$

$$=f_\pi(f_\pi(x,\dots,x,\overset{i}{y},x,\dots,x),\dots,f_\pi(x,\dots,x,\overset{i}{y},x,\dots,x),\overset{i}{x},$$

$$f_\pi(x,\dots,x,\overset{i}{y},x,\dots,x),\dots,f_\pi(x,\dots,x,\overset{i}{y},x,\dots,x))$$

$$i<|\pi|\qquad (\pi\in H)$$

azonosságok. Jelöljük ezek halmazát Ψ-vel. Nyilvánvalóan $\Phi\cup\Psi$ is véges bázisa $\mathfrak{M}_j$-nek. Vegyük észre, hogy Φ "ugyanolyan azonossághalmaz", mint véges ν és egyelemü H esetén a korábban vizsgált Σ, igy elegendő az alábbi lemmát bebizonyitani:

4.12. LEMMA. *Legyen*

$$J=\{w-w' \mid w,w'\in F,\ \Sigma\cup\Psi \vdash q_w(x,y,x)=q_{w'}(x,y,x)\}.$$

Tegyük fel, hogy ν *véges,* $H=\{\pi\}$ *és* $|\pi|=n$. *Akkor* J *az* F *gyürü*

$$(25)\qquad \{d,\chi_i^\pi d,\ d\chi_j^\pi,\ (\chi_i^\pi d)\chi_j^\pi \mid i,j<n\ ,\ d\in D\}$$

által generált ideálja, ahol

$$D=\{a_\kappa(\chi_j^\pi a_\lambda)-(a_\kappa\chi_j^\pi)a_\lambda \mid \kappa,\lambda<\nu,\ j<n\}\cup$$

$$\cup\{\chi_i^\pi(a_\kappa\chi_j^\pi)-(\chi_i^\pi a_\kappa)\chi_j^\pi \mid \kappa<\nu,\ i,j<n\}\cup$$

$$\cup\{u^{\pi}_{ij}a_{\kappa}-\chi^{\pi}_{i}(\chi^{\pi}_{j}a_{\kappa})\mid \kappa<\nu,\ i,j<n,\ i\neq j\}\cup$$

$$\cup\{(a_{\kappa}\chi^{\pi}_{i})\chi^{\pi}_{j}-a_{\kappa}u^{\pi}_{ij}\mid \kappa<\nu,\ i,j<n,\ i\neq j\}\cup$$

$$\cup\{u^{\pi}_{ij}\chi^{\pi}_{k}-\chi^{\pi}_{i}u^{\pi}_{jk}\mid i,j,k<n,\ i\neq j,\ j\neq k\}\cup$$

$$\cup\{\sum_{i<n}\chi^{\pi}_{i}a_{\kappa}-a_{\kappa}\mid \kappa<\nu\}\cup$$

$$\cup\{\sum_{i<n}a_{\kappa}\chi^{\pi}_{i}-a_{\kappa}\mid \kappa<\nu\}\cup$$

$$\cup\{\sum_{\substack{j<n\\ j\neq i}}(u^{\pi}_{ij}-u^{\pi}_{ji})\mid i<n\}\cup\{e_{\lambda}\mid \lambda<\mu\}.$$

A lemma bizonyitása előtt célszerü egy állitást igazolni. Megjegyezzük, hogy itt Σ tetszőleges, a 4.12. Lemmában tett végességi kikötéseket nem használjuk.

22. ÁLLITÁS. <u>Legyen</u> $\pi\in H$ <u>és</u> $|\pi|=n$. <u>Akkor bármely</u> $w\in F$ <u>elem esetén</u>

$$(26)\qquad \Sigma\vdash q_w(x,f_{\pi}(y_0,\dots,y_{n-1}),f_{\pi}(z_0,\dots,z_{n-1}))=$$

$$=q_{\langle w\chi^{\pi}_{0},\dots,w\chi^{\pi}_{n-1}\rangle}(x,y_0,z_0,\dots,y_{n-1},z_{n-1}).$$

BIZONYITÁS. Ugyanugy, mint a 19.-21. Állitások bizonyitásánál, elegendő az állitást X-beli w elemekre igazolni. Ha $w=a_{\kappa}$ $(\kappa<\nu)$, akkor (26) következik a (VII^{π}_{κ}) azonosságból. Legyen most $w=va_{\kappa}$, ahol $v\in X$. Akkor

$$q_w(x,f_{\pi}(y_0,\dots,y_{n-1}),f_{\pi}(z_0,\dots,z_{n-1}))\overset{\Sigma_0}{=}$$

$$=q_v(x,q_{a_{\kappa}}(x,f_{\pi}(y_0,\dots,y_{n-1}),f_{\pi}(z_0,\dots,z_{n-1})),x)\overset{(VII)}{=}$$

$$=q_v(x,q_{\langle a_\kappa\chi_0^\pi,\ldots,a_\kappa\chi_{n-1}^\pi\rangle}(x,y_0,z_0,\ldots,y_{n-1},z_{n-1}),x)\overset{\Sigma_0(17.)}{=}$$

$$=q_{\langle v(a_\kappa\chi_0^\pi),\ldots,v(a_\kappa\chi_{n-1}^\pi)\rangle}(x,y_0,z_0,\ldots,y_{n-1},z_{n-1}),$$

amiből következik (26), hiszen χ_i^π $(i<n)$ jobb transzláció.

A 4.12. LEMMA BIZONYITÁSA. Tegyük fel, hogy a lemma feltételei teljesülnek. Mivel $H=\{\pi\}$, a π indexet az f_π müveleti jel, az u_{ij}^π elemek illetve a χ_j^π transzlációk jelöléséből elhagyjuk. A (25) alatti halmaz által generált ideált jelölje J'.

A $J\supseteq J'$ tartalmazás bizonyitása céljából megmutatjuk, hogy J az F gyürü D-t tartalmazó és a χ_j $(j<n)$ bal és jobb transzlációkra zárt ideálja. Ugyanugy mint a 4.7. Lemma bizonyitásakor, látható, hogy J valóban F ideálja. A 21. valamint 22. Állitásból következik, hogy J zárt a transzlációkra, ha ugyanis $j<n$ és $w-w'\in J$, akkor

$$q_{\chi_j w}(x,y,x)\overset{\Sigma(21.,1.)}{=}f(x,\ldots,x,\underset{j}{q_w(x,y,x)},x,\ldots,x)\overset{\Sigma}{=}$$

$$=f(x,\ldots,x,q_{w'}(x,y,x),x,\ldots,x)\overset{\Sigma(21.,1.)}{=}q_{\chi_j w'}(x,y,x)$$

és

$$q_{w\chi_j}(x,y,x)\overset{\Sigma(22.,1.)}{=}q_w(x,f(x,\ldots,x,\underset{j}{y},x,\ldots,x),x)=$$

$$=q_{w'}(x,f(x,\ldots,x,y,x,\ldots,x),x)\overset{\Sigma(22.,1.)}{=}q_{w'\chi_j}(x,y,x).$$

Végül azt kell megmutatni, hogy $D\subseteq J$. A D-t definiáló kilenc részhalmaz bármelyikébe tartozó $w-w'$ elem esetén a gondolatmenet ugyanaz: megadunk egy t termet és belátjuk, hogy $t\overset{\Sigma\cup\Psi}{=}q_w(x,y,x)$ és $t\overset{\Sigma\cup\Psi}{=}q_{w'}(x,y,x)$.

1) $\kappa,\lambda<\nu$, $j<n$

$$g_\kappa(x,f(x,\dots,x,g_\lambda(\overbrace{x,y,x}^{\delta}),x,\dots,x),x) \overset{\Sigma}{=}$$

$$= \begin{cases} q_{(a_\kappa\chi_j)a_\lambda}(x,y,x) \\ q_{a_\kappa(\chi_j a_\lambda)}(x,y,x) \end{cases}$$

A bizonyitás lépései: fent: (21) és (VII) azonosság

lent: 1. Állitás, (VI) azonosság, (21).

2) $\kappa<\nu$, $i,j<n$

$$f(x,\dots,x,g_\kappa(\overbrace{x,f(x,\dots,x,\underset{\delta}{y},x,\dots,x),x}^{i}),x,\dots,x) \overset{\Sigma}{=}$$

$$= \begin{cases} q_{(\chi_i a_\kappa)\chi_j}(x,y,x) \\ q_{\chi_i(a_\kappa\chi_j)}(x,y,x) \end{cases}$$

Fent: 1. Állitás, (VI),(21), 22. Állitás. Lent: (21), (VII), 1. és 21. Állitás.

3) $\kappa<\nu$, $i,j<n$, $i\neq j$

$$f(x,\dots,x,\overbrace{f(x,\dots,x,g_\kappa(\underbrace{x,y,x}_{\delta}),x,\dots,x)}^{i},x,\dots,x) \overset{\Sigma}{=}$$

$$= \begin{cases} q_{u_{ij}a_\kappa}(x,y,x) \\ q_{\chi_i(\chi_j\, a_\kappa)}(x,y,x) \end{cases}$$

Fent: (21), (VIII), 1. Állitás. Lent: 1. Állitás,(VI), 21. Állitás.

4) $\kappa<\nu$, $i,j<n$, $i\neq j$

$$g_\kappa(x,f(x,\dots,x,\overbrace{f(x,\dots,x,\underset{\delta}{y},x,\dots,x)}^{i},x,\dots,x),x) \overset{\Sigma}{=}$$

$$= \begin{cases} q_{a_\kappa u_{ij}}(x,y,x) \\ q_{(a_\kappa\chi_i)\chi_j}(x,y,x) \end{cases}$$

Fent: (21), (VIII), 1. Állitás. Lent: (21), (VII), 1. és 22. Állitás.

5) $i,j,k<n,\ i\neq j,\ j\neq k$

$$f(x,\dots,x,\underbrace{f(x,\dots,x,\overbrace{f(x,\dots,x,\overset{k}{y},x,\dots,x)}^{j},x,\dots,x)}_{i},x,\dots,x) \overset{\Sigma}{=}$$

$$= \begin{cases} q_{u_{ij}\chi_k}(x,y,x) \\ q_{\chi_i u_{jk}}(x,y,x) \end{cases}$$

Fent: (21), (VIII), 1. Állitás, 22. Állitás. Lent: (21), (VIII), 1. Állitás, 21. Állitás.

6) $\kappa<\nu$

$$f(g_\kappa(x,y,x),\dots,g_\kappa(x,y,x)) \overset{\Sigma}{=} \begin{cases} g_\kappa(x,y,x)=q_{a_\kappa}(x,y,x) \\ q_{\sum_{i<n}\chi_i a}(x,y,x) \end{cases}$$

Fent: (21). Lent: (VI).

7) $\kappa<\nu$

$$g_\kappa(x,f(y,\dots,y),f(x,\dots,x)) \overset{\Sigma}{=} \begin{cases} g_\kappa(x,y,x)=q_{a_\kappa}(x,y,x) \\ q_{\sum_{i<n} a_\kappa\chi_i}(x,y,x) \end{cases}$$

Fent: (21). Lent: (VII).

8) $i<n$

$$f(x,\dots,x,\underbrace{f(y,\dots y,\overset{i}{x},y,\dots,y)}_{i},x,\dots,x) \overset{\Sigma\cup\Psi}{=}$$

$$= \begin{cases} q_{\sum_{j\neq i} u_{ij}}(x,y,x) \\ q_{\sum_{j\neq i} u_{ji}}(x,y,x) \end{cases}$$

Fent: (21), (VIII), 1. Állitás. Lent: (XI), (21), (VIII), 1. Állitás.

9) $\lambda<\mu$

$$q_{e_\lambda}(x,y,x) \overset{\Sigma}{=} x = q_0(x,y,x)$$

teljesül (V) következtében.

A $J\subseteq J'$ tartalmazás bizonyitása céljából definiálunk egy egységelemes R gyürüt, majd - R-et mint R-modulust $\mathcal{R}$-rel jelölve - megadjuk $\mathcal{R}$ egy $\hat{\mathcal{R}}=\langle R;\ \{g_\kappa|\kappa<\nu\}\cup\{f\}\rangle$ idempotens reduktját ugy, hogy $\hat{\mathcal{R}}$-on teljesülnek a $\Sigma\cup\Psi$-beli azonosságok, továbbá valamely $w,w'\in F$ elemekre a

$$q_w(x,y,x)=q_{w'}(x,y,x)$$

azonosság pontosan akkor teljesül $\hat{\mathcal{R}}$-on, ha $w-w'\in J'$.

Felhasználva, hogy a χ_j $(j<n)$ bal illetve jobb transzlációk additivak, könnyen látható, hogy bármely $w,w'\in F$ elemekre és $i,j<n$ természetes számokra

(27) $\qquad \chi_i(w\chi_j)-(\chi_i w)\chi_j\in J'$;

(28) $\qquad \chi_i(\chi_j w)-u_{ij}w\in J'$, $\qquad (w\chi_i)\chi_j-wu_{ij}\in J'$ $\qquad (i\neq j)$;

(29) $\qquad \sum\limits_{i<n}\chi_i w-w\in J'$, $\qquad \sum\limits_{i<n}w\chi_i-w\in J'$;

(30) $\qquad (w\chi_j)w'-w(\chi_j w')\in J'$.

Ezek segitségével megmutatható, hogy a J' ideál zárt a χ_j $(j<n)$ bal illetve jobb transzlációkra. Elegendő igazolni, hogy a J' ideál bármely (25) alatti generáló elemének χ_k melletti képe J'-ben van. Legyen $d\in D$ és $i,j,k<n$. Akkor $d\chi_k, (\chi_i d)\chi_k\in J'$, továbbá (28) és (29) miatt, ha $w=d$ vagy $w=\chi_i d$, akkor

$$(w\chi_j)\chi_k = \begin{cases} wu_{jk}+((w\chi_j)\chi_k-wu_{jk}), & \text{ha } k\neq j \\ (\sum\limits_{k<n}(w\chi_j)\chi_k-w\chi_j)+w\chi_j-\sum\limits_{\substack{\ell<n\\ \ell\neq j}}(w\chi_j)\chi_\ell, & \text{ha } k=j \end{cases}$$

is benne van J'-ben. Ezzel állitásunkat a χ_k jobb transzlációra igazoltuk. Másrészt nyilván $\chi_k d\in J'$ és (27) alapján

$$\chi_k(d\chi_j)=(\chi_k d)\chi_j+(\chi_k(d\chi_j)-(\chi_k d)\chi_j)\in J',$$

továbbá (28) és (29) miatt

$$\chi_k(\chi_i d) = \begin{cases} u_{ki}d+(\chi_k(\chi_i d)-u_{ki}d), & \text{ha } k\neq i \\ (\sum\limits_{k<n}\chi_k(\chi_i d)-\chi_i d)+\chi_i d-\sum\limits_{\substack{k<n\\ k\neq i}}\chi_k(\chi_i d), & \text{ha } k=i \end{cases}$$

is benne van J'-ben. Ha $k\neq i$, akkor (27) szerint

$$\chi_k((\chi_i d)\chi_j)-(\chi_k(\chi_i d))\chi_j\in J',$$

$$(\chi_k(\chi_i d))\chi_j = (u_{ki}d)\chi_j+(\chi_k(\chi_i d)-u_{ki}d)\chi_j,$$

és itt $(u_{ki}d)\chi_j=u_{ki}(d\chi_j)\in J'$. Vegyük észre továbbá, hogy ha $d=\sum_\ell a_{\kappa_\ell}d_\ell$ $(d_\ell\in Y\cup\{\emptyset\})$, akkor

$$(\chi_k(\chi_i d)-u_{ki}d)\chi_j=\sum_\ell((\chi_k(\chi_i a_{\kappa_\ell})-u_{ki}a_{\kappa_\ell})d_\ell)\chi_j\in J',$$

hiszen minden tag J'-ben van, akár $d_\ell\in Y$, akár $d_\ell=\emptyset$. Igy, ha

$k\neq i$ $(k,i<n)$, akkor $\chi_k((\chi_i d)\chi_j)\in J'$. Ha viszont $k=i$, akkor (29) felhasználásával

$$\chi_i((\chi_i d)\chi_j)=(\sum_{k<n}\chi_k((\chi_i d)\chi_j)-(\chi_i d)\chi_j)+(\chi_i d)\chi_j-$$
$$-\sum_{\substack{k<n\\k\neq i}}\chi_k((\chi_i d)\chi_j)\in J'.$$

Tekintsük az F/J' faktorgyürüt. A fentiek miatt F/J'-n definiálhatók a χ_j $(j<n)$ additiv bal illetve jobb transzlációk. (27)-(30) következtében F/J'-ben teljesülnek tetszőleges w,w' elemekre és $i,j<n$ természtes számokra a

$$(\chi_i w)\chi_j = \chi_i(w\chi_j),$$

$$(31)\qquad \chi_i(\chi_j w) = u_{ij}w, \qquad (w\chi_i)\chi_j = wu_{ij} \qquad (i\neq j),$$

$$\sum_{i<n}\chi_i\, w=w, \qquad \sum_{i<n} w\chi_i = w,$$

$$(w\chi_j)w' = w(\chi_j w')$$

egyenlőségek. J' definiciójából nyilvánvaló, hogy ha $i,j,k<n$, $i\neq j$, $j\neq k$, akkor

$$(32)\qquad u_{ij}\chi_k=\chi_i u_{jk} \qquad \text{és} \qquad \sum_{\substack{j<n\\j\neq i}} u_{ij} = \sum_{\substack{j<n\\j\neq i}} u_{ji}$$

is fennáll F/J'-ben.

Ezek után definiáljuk az R gyürüt az $(F/J')\times Z^n$ alaphalmazon. Az összeadást komponensenként végezzük, a szorzást pedig az alábbi módon definiáljuk: tetszőleges $\langle w,k_0,\dots,k_{n-1}\rangle,\langle w',k'_0,\dots,k'_{n-1}\rangle$ elemekre

$$\langle w,k_0,\dots,k_{n-1}\rangle\langle w',k'_0,\dots,k'_{n-1}\rangle =$$

$$=\langle ww'+\sum_{i<n}k_i\chi_i w'+\sum_{i<n}k'_i w\chi_i+\sum_{\substack{i,j<n\\ i\neq j}}k_i k'_j u_{ij}-\sum_{\substack{i,j<n\\ i\neq j}}k_i k'_i u_{ij},k_0k'_0,\dots,k_{n-1}k'_{n-1}\rangle$$

A (31),(32) alatti egyenlőségek biztositják, hogy az igy definiált szorzás asszociativ, az összeadásra disztributiv és $\langle 0,1,\dots,1\rangle$ az R gyürü egységeleme. Az

$$S=\{\langle w,0,\dots,0\rangle \mid w\in F/J'\}$$

részhalmaz az R gyürü F/J'-vel izomorf ideálja. A

$$b_i=\langle 0,0,\dots\underbrace{1}_{i+1},\dots,0\rangle \qquad (i<n)$$

jelölést alkalmazva az $\hat{\mathcal{R}}$ modulus-redukt alapmüveleteit a következőképpen definiáljuk:

$$f(x_0,\dots,x_{n-1})=\sum_{i<n}b_i x_i$$

$$g_\kappa(x_0,x_1,x_2)=1x_0+a_\kappa x_1+(-a_\kappa)x_2.$$

Ekkor $\hat{\mathcal{R}}=\mathcal{R}_{\mathcal{J}}$, ahol $\mathcal{J}=\{I_j \mid j<n\}$ és

$$I_j=\{\langle w,k_0,\dots,k_{n-1}\rangle \mid k_j=0\} \qquad (j<n)$$

az R ideálja. $\mathcal{J}$-re teljesülnek az 1.4. Tétel (a)-(c) feltételei és nyilvánvalóan $S=\bigcap(I_j \mid j<n)$. Innen közvetlenül látható, hogy $\hat{\mathcal{R}}$-on teljesülnek a $\Sigma\cup\Psi$-beli azonosságok, másrészt pedig a

$$q_w(x,y,x)=q_{w'}(x,y,x)$$

azonosság csak akkor áll fenn, ha $w-w'\in J'$. Ezzel a lemma állitását bebizonyitottuk.

Befejezésül speciális strukturákra alkalmazzuk a 4.10. Tétel eredményeit. Az 1.7. és 4.10. Tétel, valamint a 4.3. és 4.11. Lemma (ii) felhasználásával közvetlenül adódik a

4.13. TÉTEL. <u>Egy Abel-csoport bármely idempotens reduktja véges sok alapmüvelettel definiálható, és a rajta teljesülő azonosságok halmaza véges bázisu.</u>

Hasonlóan, csak az 1.7. Tétel helyett az 1.3. és 1.4. Tételt alkalmazva kapjuk a következő tételt.

4.14. TÉTEL. <u>Egy egységelemes véges gyürü feletti unitér modulus bármely idempotens reduktja véges sok alapmüvelettel definiálható, és a rajta teljesülő azonosságok halmaza véges bázisu.</u>

Az utolsó eredmény az első fejezetben definiált $\mathfrak{A}_p$ algebrán teljesülő azonosságokra vonatkozik. S. FAJTLOWICZ és J. MYCIELSKI [2]-ben tüzte ki azt a problémát, hogy jellemezzük azokat az $r \in \mathbb{R}$ algebrai számokat, amelyekre $\mathrm{Id}(\mathfrak{A}_r)$ véges bázisu. Egy elegendő feltételt adunk meg a következő tételben.

4.15. TÉTEL. <u>Ha</u> r <u>a</u> $(0,1)$ <u>intervallumon kivül eső racionális szám, akkor</u> $\mathrm{Id}(\mathfrak{A}_r)$ <u>véges bázisu.</u>

BIZONYITÁS. Az általánosság megszoritása nélkül feltehető, hogy $r=\frac{p}{p-q}$, ahol $p>q>0$ egészek, és p és q relativ primek. Igy $1-r=-\frac{q}{p-q}$. $\mathfrak{A}_r$ müveletklónját jelöljük C-vel és legyen

$$H_C=\{t \mid t\in\mathbb{R}\ ,\ \ 1x+ty+(-t)z\in C\}.$$

Legyen továbbá

$$I_0 = \left\{ \frac{p}{(p-q)^k} \cdot m \;\middle|\; k,m \in \mathbb{Z},\ k \geq 0 \right\},$$

$$I_1 = \left\{ \frac{q}{(p-q)^k} \cdot m \;\middle|\; k,m \in \mathbb{Z},\ k \geq 0 \right\},$$

azaz a racionális számtest $\frac{p}{p-q}$ illetve $-\frac{q}{p-q}$ által generált részgyürüje. Akkor

$$I_0 \cap I_1 = \left\{ \frac{pq}{(p-q)^k} \cdot m \;\middle|\; k,m \in \mathbb{Z},\ k \geq 0 \right\},$$

a racionális számtest $\frac{pq}{p-q}$ által generált részgyürüje.

Mivel $rx+(1-r)y \in Cl(I_0) \cap Cl(I_1)$, nyilvánvalóan $C \subseteq Cl(I_0) \cap Cl(I_1)$, és igy $H_C \subseteq I_0 \cap I_1$. A forditott irányu $H_C \supseteq I_0 \cap I_1$ tartalmazás is igaz. Mivel p és q relativ primek és $\frac{pq}{p-q}$ az $I_0 \cap I_1$ generáló eleme, ehhez elegendő megmutatni, hogy van olyan $n(\geq 2)$ természetes szám, hogy

$$\text{(33)} \qquad \frac{p^{n-1}q}{(p-q)^n}\ ,\ \frac{pq^{n-1}}{(p-q)^n} \in H_C\ .$$

Vegyük észre, hogy tetszőleges n természetes számra C-ben benne van a következő müvelet:

$$\text{(34)} \quad \sum_{i<n} r^{n-1}(1-r)x_i + \sum_{j<\frac{n(n-1)}{2}} r^{n-2}(1-r)^2 y_j + \Big(1 - \sum_{i<n}\big(r^{n-1}(1-r)+r(1-r)^{n-1}\big) -$$
$$- \sum_{j<\frac{n(n-1)}{2}} \big(r^{n-2}(1-r)^2 + r^2(1-r)^{n-2}\big)\Big) z +$$
$$+ \sum_{j<\frac{n(n-1)}{2}} r^2(1-r)^{n-2} y'_j + \sum_{i<n} r(1-r)^{n-1} x'_i\,.$$

Mivel $qr+p(1-r)=0$,

$$(q-1)r^{n-1}(1-r)+p\,r^{n-2}(1-r)^2 = -r^{n-1}(1-r)$$

és

$$(p-1)r(1-r)^{n-1}+qr^2(1-r)^{n-2}=-r(1-r)^{n-1},$$

igy a (34) alatti müveletből változók egybeejtésével megkapható az

$$1x+r^{n-1}(1-r)y+(-r^{n-1}(1-r))\,z$$

illetve

$$1x+r(1-r)^{n-1}y+(-r(1-r)^{n-1})z$$

müvelet, feltéve természtesen, hogy $n\geq p,q$. Ezzel (33)-at igazoltuk.

Azt kaptuk tehát, hogy $H_C=I_0\cap I_1$, és igy az 1.5. Tétel (iii) állitása alapján adódik, hogy $C=Cl(I_0)\cap Cl(I_1)$. Könnyen látható, hogy $I_0\cap I_1$ végesen prezentált, s igy a 4.10. Tétel valamint a 4.11. Lemma (ii) felhasználásával adódik az állitásunk.

IRODALOM

[1] S.FAJTLOWICZ, Birkhoff's Theorem in the Category of Non-indexed Algebras, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. 17(1969), 273-275.

[2] S.FAJTLOWICZ, J.MYCIELSKI, On convex linear forms, Algebra Universalis 4(1974), 244-249.

[3] G.GRÄTZER, Universal Algebra, Van Nostrand, Princeton, 1968.

[4] DON PIGOZZI, Equational logic and equational theories of algebras, Purdue University, 1975.

[5] Á.SZENDREI, Idempotent reducts of abelian groups, Acta Sci. Math. (Szeged) 38(1976), 171-182.

[6] Á.SZENDREI, On the idempotent reducts of modules I.-II., Studia Sci. Math. Hungar., megjelenés alatt

[7] W.TAYLOR, Characterizing Mal'cev conditions, Algebra Universalis 3(1973), 351-397.

Köszönetet mondok Dr. Csákány Béla egyetemi tanárnak az értekezésem elkészitése során mind a probléma felvetése, mind pedig a dolgozat megirása terén nyujtott sokoldalu segitségéért.