

---

# Ein Beitrag zur effizienten Quantifizierung von Parameter- und Modellunsicherheit strukturdynamischer Systeme

---

Zur Erlangung des akademischen Grades Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)  
Genehmigte Dissertation von Robert Feldmann aus Frankfurt am Main  
Tag der Einreichung: 20.06.2022, Tag der Prüfung: 23.08.2022

1. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Tobias Melz
2. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Reiner Anderl  
Darmstadt



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachbereich  
Maschinenbau

Fachgebiet  
Systemzuverlässigkeit,  
Adaptronik und  
Maschinenakustik SAM

Ein Beitrag zur effizienten Quantifizierung von Parameter- und Modellunsicherheit  
strukturdynamischer Systeme

Genehmigte Dissertation von Robert Feldmann

1. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Tobias Melz
2. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Reiner Anderl

Tag der Einreichung: 20.06.2022

Tag der Prüfung: 23.08.2022

Darmstadt

Bitte zitieren Sie dieses Dokument als:

URN: urn:nbn:de:tuda-tuprints-221828

URL: <http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de/id/eprint/22182>

Dieses Dokument wird bereitgestellt von tuprints,

E-Publishing-Service der TU Darmstadt

<http://tuprints.ulb.tu-darmstadt.de>

[tuprints@ulb.tu-darmstadt.de](mailto:tuprints@ulb.tu-darmstadt.de)

Die Veröffentlichung steht unter folgender Creative Commons Lizenz:

Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International

<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

---

# Zusammenfassung

---

Im Zuge der zunehmenden Virtualisierung des industriellen Produktentwicklungsprozesses steigen die Anforderungen an die Vorhersagegenauigkeit von mathematischen Modellen zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens strukturdynamischer Systeme stetig. Gleichzeitig stellen immer kürzere Entwicklungszyklen sowie zunehmende Rückrufaktionen und der damit verbundene wirtschaftliche Schaden die Industrie vor neue Herausforderungen zur Verbesserung der Aussagekraft von Modellen bei der Entscheidungsfindung. Die Betrachtung der den Modellen inhärenten Parameter- und Modellunsicherheit rückt daher immer mehr in den Fokus. Parameterunsicherheit bezieht sich dabei auf den Wert eines Modellparameters und Modellunsicherheit auf den funktionalen Zusammenhang. Mit einer statistischen Modellkalibrierung kann die Parameterunsicherheit verringert und gleichzeitig quantifiziert werden, um die Vorhersagegenauigkeit des Modells zu erhöhen. Methoden zur statistischen Modellkalibrierung setzen dabei wenig rechenintensive Modelle voraus oder nutzen schnellere Ersatzmodelle von komplexeren Modellen, die tausendfach ausgewertet werden können. Neuartige Multi-Fidelity-Methoden bauen auf die systematische Verknüpfung der häufigen Auswertungen eines Low-Fidelity-Modells mit niedriger Genauigkeit und Rechenzeit in Verbindung mit wenigen Auswertungen eines High-Fidelity-Modells mit höherer Genauigkeit und Rechenzeit. Dadurch gelingt die Reduktion der Rechenzeit für eine statistische Modellkalibrierung bei gleichzeitig hoher Genauigkeit der Ergebnisse, wodurch auch rechenintensive Modelle statistisch kalibriert werden können. Allerdings bleibt bei bestehenden Ansätzen die Modellunsicherheit bisher unberücksichtigt, was die Ergebnisse der Kalibrierung verzerrt und wodurch die Parameter ihre physikalische Bedeutung einbüßen. In dieser Arbeit wird eine Multi-Fidelity-Methode zur effizienten statistischen Modellkalibrierung um die Berücksichtigung der Modellunsicherheit erweitert. Das zur Anwendung der Methode benötigte Low-Fidelity-Modell ist eine Kombination aus einem Gaussprozess-basierten und Polynomial Chaos Expansion-basierten Ersatzmodell des High-Fidelity-Modells. Ein solches Low-Fidelity-Modell ist anwendungsneutral und zeichnet sich durch eine hohe Genauigkeit und Möglichkeit zur Adaption aus. Die Erprobung der Methode erfolgt am Beispiel des Demonstrators des SFB 805, der in Anlehnung

---

an ein Flugzeugfahrwerk entworfen wurde und als flexibles Mehrkörpersystem modelliert wird. Mit der entwickelten Methode wird sowohl die dem High-Fidelity-Modell des Demonstrators inhärente Parameter- als auch Modellunsicherheit quantifiziert. Es zeigt sich, dass die Vorhersagegenauigkeit des Modells durch Berücksichtigung der Modellunsicherheit enorm gesteigert werden kann. Die Betrachtung dieses Anwendungsfalls ermöglicht die Übertragung der Methode auf rechenintensive Modelle vergleichbarer strukturdynamische Systeme.

---

# Abstract

---

In the wake of the increasing virtualization of the industrial product development process, the requirements on the predictive accuracy of mathematical models for the description of the dynamic behavior of structural systems are constantly increasing. At the same time, ever shorter development cycles as well as an increasing number of product recalls and the associated economic damage confronts the industry with new challenges to improve the informative value of models in the decision-making process. Therefore, the consideration of the parameter and model uncertainty inherent in the models is increasingly moving into the spotlight. Parameter uncertainty is related to the value of a model parameter and model uncertainty concerns the functional relationship. With a statistical model calibration, the parameter uncertainty can be reduced and quantified at the same time in order to increase the predictive accuracy of the model. Methods for statistical model calibration assume models that are not very computationally intensive or make use of faster surrogate models of more complex models that can be evaluated thousands of times. Novel multi-fidelity methods build upon the combination of frequent evaluations of a low-fidelity model with low accuracy and computation time in combination with few evaluations of a high-fidelity model with higher accuracy and computation time. This leads to a higher efficiency of the statistical model calibration while maintaining a high accuracy of the results, allowing even computationally intensive models to be statistically calibrated. However, existing approaches have so far failed to account for model uncertainty, which biases calibration results and causes parameters to lose their physical meaning. In this thesis, a multi-fidelity method for efficient statistical model calibration is extended to account for model uncertainty. The low-fidelity model required to employ the method is a combination of a Gaussian process-based and polynomial chaos expansion-based surrogate model of the high-fidelity model. Such a low-fidelity model is application neutral and is characterized by high accuracy and possibility of adaptation. The method is tested on the example of the demonstrator of the SFB 805, which was designed with similar specifications and requirements as an air plane landing gear. The demonstrator is modeled as a flexible multi-body system. The developed method is then used to quantify both the parameter and model uncertainty inherent in the high-fidelity model of the demonstrator. It is

---

shown that the predictive capability of the model can be increased greatly by taking model uncertainty into account. The study of this use case allows the method to be applied to computationally intensive models of comparable structural dynamic systems.

---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>Nomenklatur</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation der Arbeit . . . . .	1
1.2 Ansatz und Aufbau der Arbeit . . . . .	3
1.3 Eigene Veröffentlichungen . . . . .	4
<b>2 Stand der Forschung</b>	<b>7</b>
2.1 Klassifikation von Unsicherheit . . . . .	7
2.1.1 Datenunsicherheit . . . . .	8
2.1.2 Modellunsicherheit . . . . .	11
2.2 Quantifizierung der Unsicherheit . . . . .	12
2.2.1 BAYES'SCHE Inferenz . . . . .	13
2.2.2 METROPOLIS-HASTINGS Algorithmus . . . . .	14
2.2.3 Adaptiver METROPOLIS Algorithmus . . . . .	15
2.2.4 Eine Multi-Fidelity-Methode zur statistischen Modellkalibrierung	16
2.2.5 Konvergenzmetriken . . . . .	18
2.2.6 Quantifizierung der Modellunsicherheit . . . . .	20
2.2.7 Sensitivitätsanalyse . . . . .	22
2.2.8 Quantifizierung der Unsicherheit in der Strukturdynamik . . . .	24
2.3 Ersatzmodelle . . . . .	26
2.3.1 Gaussprozesse . . . . .	26
2.3.2 Adaption von Gaussprozessen . . . . .	30
2.3.3 Polynomial Chaos Expansion . . . . .	32
2.4 Grundlagen zur Modellierung und Simulation flexibler Mehrkörpersysteme	32
2.4.1 Floating-Frame-of-Reference-Formalismus . . . . .	33
2.4.2 Finite-Elemente-Diskretisierung . . . . .	35
2.4.3 Kinetische und potentielle Energie flexibler Körper . . . . .	35
2.4.4 Bewegungsgleichungen flexibler und starrer Körper . . . . .	38
2.4.5 Bewegungsgleichungen eines Mehrkörpersystems . . . . .	39

2.4.6	Kopplung der Körper durch Zwangsbedingungen . . . . .	39
2.4.7	Simulation mittels Zeitschrittverfahren . . . . .	40
2.5	Grundlagen zur Balkenmodellierung mit finiten Elementen . . . . .	41
2.5.1	Beschreibung des Balkenelements . . . . .	41
2.5.2	Herleitung der Massen- und Steifigkeitsmatrix . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Methodischer Ansatz</b>	<b>47</b>
3.1	Ein Ansatz zur effizienten Quantifizierung von Parameter- und Modellunsicherheit . . . . .	47
3.2	Adaptives Gaussprozess-basiertes Low-Fidelity-Modell . . . . .	50
3.2.1	Erwartungswertfunktion und Kovarianzfunktion . . . . .	51
3.2.2	Training . . . . .	52
3.2.3	Berechnung von Modellauswertungen . . . . .	54
3.2.4	Adaption . . . . .	54
3.3	Kombinierter Algorithmus . . . . .	57
3.4	Skalierung auf massiv-paralleler Architektur . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Anwendungsbeispiel</b>	<b>63</b>
4.1	Hintergrund . . . . .	63
4.2	Versuchsumgebung und MAFDS . . . . .	64
4.3	Experimentelle Versuche . . . . .	69
4.4	Messgrößen und Systemausgänge . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Modellbildung des High-Fidelity-Modells</b>	<b>75</b>
5.1	Beschreibung der Kinematik . . . . .	75
5.2	Herleitung der Systemmatrizen . . . . .	78
5.2.1	Balkendiskretisierung und Elementmatrizen . . . . .	78
5.2.2	Assemblierung der Finite-Elemente-Matrizen . . . . .	80
5.2.3	Konzentrierte Massen . . . . .	83
5.2.4	Dämpfung der Tragwerke . . . . .	84
5.2.5	Zusammenbau der Systemmatrizen des flexiblen MKS . . . . .	85
5.3	Formulierung von Eingepprägten Kräften . . . . .	87
5.4	Formulierung von Zwangsbedingungen . . . . .	89
5.5	Lösung der Bewegungsgleichungen . . . . .	92
5.5.1	Statische Simulation der Anfangsbedingungen und Zeitintegration	93
5.5.2	Berechnung der Modellausgänge . . . . .	94
<b>6</b>	<b>Quantifizierung der Parameter- und Modellunsicherheit</b>	<b>97</b>
6.1	Vorbereitung und Durchführung der statistischen Modellkalibrierung . .	97
6.1.1	Sensitivitätsanalyse . . . . .	98



6.1.2	Generierung von Initialwerten . . . . .	100
6.1.3	Bestimmung der A-priori-Verteilung . . . . .	102
6.2	Untersuchung der Konvergenz und des Adaptionverhaltens . . . . .	105
6.3	Analyse der A-posteriori-Verteilung . . . . .	111
6.4	Bewertung der A-posteriori Vorhersagegenauigkeit des High-Fidelity-Modells . . . . .	113
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>119</b>
<b>8</b>	<b>Literatur</b>	<b>123</b>



---

# Nomenklatur

---

## Akronyme

2SDAMCMC	Two-Stage Delayed Acceptance MCMC
DAE	Differential-Algebraisches System
FE	Finite Elemente
FEM	Finite-Elemente-Methode
GP	Gaussprozess
HHT- $\alpha$ -Verfahren	HILBER-HUGHES-TAYLOR- $\alpha$ -Verfahren
MAFDS	Modulares Aktives Feder-Dämpfer System
MCMC	Markov-Chain-Monte-Carlo
MKS	Mehrkörpersystem
PCE	Polynomial Chaos Expansion
SFB	Sonderforschungsbereich

## Lateinische Buchstaben

$A$	Querschnittsfläche
$a$	Parameter der Gleichverteilung
$b$	Parameter der Gleichverteilung
$B$	Jacobi-Matrix der Zwangsbedingungen
$c_\delta$	Kovarianzfunktion der Diskrepanzfunktion
$c_{\text{LoFi}}$	Kovarianzfunktion des Low-Fidelity-Modells
$C$	Kovarianzmatrix
$D$	Dämpfungsmatrix
$d$	Dämpfungsparameter
$D$	Dimensionalität der Inputs
$\mathcal{D}_p$	Samples der A-Priori-Verteilung

---

$D_\eta$	Inputs des Trainingsdatensatzes für das Low-Fidelity-Modell
$E$	E-Modul
$E_{\text{LoFi}}$	Approximationsfehler des Low-Fidelity-Modells
$\mathcal{E}$	Exponentialverteilung
$\mathbf{F}$	Vektor der eingprägten Kräfte oder Vektor der Funktionswerte
$F_F$	Fußkraft
$F_D$	Dämpferkraft des Feder-Dämpfer-Systems
$F_K$	Federkraft des Feder-Dämpfer-Systems
$f$	Funktionswert oder Funktion
$\mathbf{f}$	Vektor der Funktionsauswertungen
$G$	Schubmodul
$\mathcal{GP}$	Gaussprozess
$\mathbf{g}$	Vektor der Zwangsbedingungen
$g$	Erdbeschleunigung oder Zwangsbedingung
$\mathbf{H}$	Matrix der Formfunktionen
$h$	Fallhöhe
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
$I$	Flächenträgheitsmoment
$I_{\text{To}}$	Torsionsmoment
$i$	Indexvariable
$J$	Massenträgheitsmoment
$j$	Indexvariable
$\mathbf{K}$	Steifigkeitsmatrix
$K$	Anzahl der Ketten
$k$	Index der Kette oder Steifigkeitsparameter
$\mathbf{L}$	Lokalisierungsoperator
$L$	Likelihood-Funktion
$\ell$	Länge des Balkenelements
$l_{\text{FDS}}$	Länge des Feder-Dämpfer-Systems
$\mathbf{M}$	Massenmatrix
$M$	Anzahl der Messungen
$m_{\text{add}}$	Zusatzgewicht
$m$	Masse oder Index der Messung
$N_B$	Anzahl der <i>Burn-In-Samples</i> der Markovkette
$N_\delta$	Anzahl der zu kalibrierenden Diskrepanzparameter
$N_\eta$	Anzahl der zu kalibrierenden Modellparameter
$N_{\text{el}}$	Anzahl der Finiten Elemente des flexiblen Körpers
$N_K$	Anzahl der Körper des Mehrkörpersystems
$N_S$	Anzahl der Samples der Markovkette
$N_{\text{Sobol}}$	Anzahl der in der Sensitivitätsanalyse betrachteten Modellparameter

---

$N_T$	Anzahl der zum Training verwendeten Samples der Markovkette
$N_t$	Anzahl der Zeitschritte
$N_{uu}$	Anzahl der elastischen Freiheitsgrade eines flexiblen Körpers
$N_y$	Anzahl der Modellausgänge
$n_K$	Index der Körper des Mehrkörpersystems
$n_S$	Index des Samples der Markovkette
$n_y$	Index des Modell- / Systemausgangs
$\mathcal{N}$	Normalverteilung
$P$	Anzahl der zu kalibrierenden Parameter
$p$	Dichtefunktion oder Index der zu kalibrierenden Parameter
$p_0$	Dichtefunktion der A-priori-Verteilung
$Q, Q$	Anzahl der Samples der A-priori-Verteilung ( $Q$ ) oder Körperreferenzpunkt ( $Q$ )
$\mathbf{q}$	Vektor der Freiheitsgrade
$q$	Index der Samples der A-priori-Verteilung
$\mathbf{R}_{tr}$	Kopplungsmatrix zwischen Starrkörperbewegung und elastischer Verformung
$R$	<i>potential scale reduction</i> -Faktor
$\mathbf{r}$	Positionsvektor
$r$	Radius oder Indexvariable
$S_T$	<i>Total-SOBOL-Index</i>
$s$	Indexvariable
$\mathcal{T}$	kinetische Energie
$\mathbf{T}$	Transformationsmatrix
$t_\Delta$	Zeitschrittweite
$t$	Zeit
$u$	Verschiebung in lokale $x$ -Richtung
$\mathbf{u}$	Verschiebungsvektor
$\mathcal{U}$	Gleichverteilung
$V$	Volumen
$\mathcal{V}$	potentielle Energie
$v$	Verschiebung in lokale $y$ -Richtung
$w$	Verschiebung in lokale $z$ -Richtung
$\mathbf{X}$	Input-Matrix oder mehrdimensionale Zufallsvariable
$\mathbf{X}_\eta$	Inputmatrix des Low-Fidelity Modells
$\mathbf{X}_m$	Inputmatrix der Messungen
$\mathcal{X}_m$	Inputs der Messungen
$X$	Zufallsvariable
$\mathbf{x}$	Inputs oder Realisierung der mehrdimensionalen Zufallsvariable $\mathbf{X}$
$x$	Realisierung der Zufallsvariable $X$
$\mathcal{Y}_\eta$	Trainingsdatensatz für das Low-Fidelity-Modell
$\mathcal{Y}_m$	Messdatensatz

---

$y$	Vektor der Messwerte
$y$	Messwert
$z_r$	relative Einfederung zwischen oberen und unteren Tragwerk
$z_u$	Abstand des Gummipuffers zum Boden

## Griechische Buchstaben

$\alpha$	Multiindex der PCE
$\alpha$	Akzeptanzwahrscheinlichkeit des vorgeschlagenen Samples $\theta^*$
$\alpha_N$	NEWMARK Parameter
$\beta_N$	NEWMARK Parameter
$\Gamma$	Diagonalmatrix der Rauigkeitsparameter
$\Gamma_\delta$	Diagonalmatrix der Rauigkeitsparameter der Diskrepanzfunktion
$\Gamma_{\text{LoFi}}$	Diagonalmatrix der Rauigkeitsparameter des Low-Fidelity-Modells
$\gamma$	Rauhigkeitsparameter
$\gamma_\delta$	Rauhigkeitsparameter der Diskrepanzfunktion
$\gamma_{\text{LoFi}}$	Rauhigkeitsparameter des Low-Fidelity-Modells
$\gamma_N$	NEWMARK Parameter
$\delta$	Diskrepanzfunktion
$\delta$	Kronecker-Delta
$\epsilon_c$	Skalierfaktor der Kovarianzmatrix der Vorschlagsverteilung
$\epsilon_r$	Regularisierungsparameter
$\epsilon_1, \epsilon_2$	Schwellwert zur Adaption des Low-Fidelity-Modells
$\epsilon$	Messfehler
$\zeta$	Koeffizienten der PCE
$\eta$	Modellausgang
$\theta$	zu kalibrierende Parameter
$\theta_{\text{LoFi}}$	Hyperparameter des Low-Fidelity-Modells
$\theta_\delta$	Hyperparameter der Diskrepanzfunktion
$\theta_\eta$	Modellparameter
$\theta_{\text{Sobol}}$	in der Sensitivitätsanalyse betrachtete Parameter
$\theta^*$	vorgeschlagenes Sample
$\mu$	Vektor der Auswertungen der Erwartungswertfunktion
$\mu$	Erwartungswertfunktion oder Erwartungswert
$\lambda$	Vektor der LAGRANGE Multiplikatoren
$\lambda$	Parameter der Exponentialverteilung oder Eigenwert
$\rho$	Dichte
$\psi$	Verdrehung

---

$\sigma^2$	Varianz
$\sigma_N$	Normalspannung
$\sigma_f^2$	Signalvarianz
$\sigma_n^2$	Rauschvarianz

## Tiefgestellte Indices

A1	Anbindungsbalkenelement Typ 1
A2	Anbindungsbalkenelement Typ 2
B	Balken
DMS	Dehnungsmessstreifen
el	Element
FDS	Feder-Dämpfer-System
FR	Fallrahmen
HiFi	High-Fidelity
init	initial
LoFi	Low-Fidelity
max	maximal
OT	Oberes Tragwerk
o	oben
opt	optimiert
pred	Vorhersage
stat	statisch
UT	Unteres Tragwerk
u	unten
uu	Bezug auf die elastische Verformung
VK	Verbindungskugel
$x$	$x$ -Richtung
$y$	$y$ -Richtung
$z$	$z$ -Richtung

## Hochgestellte Indices

$\langle \cdot \rangle$	Index des Körpers eines Mehrkörpersystems
$(\cdot)$	Index des Samples der Markovkette

---

## Andere Symbole

$\mathbb{E}$	Erwartungswert
var	Varianz
cov	Kovarianz
$\hat{(\cdot)}$	Bezug auf das Mehrkörpersystem
$\overline{(\cdot)}, \overline{(\cdot)}$	Mittelung
$(\cdot)'$	erste Ableitung in Bezug auf den Ort ( $= d/dx$ )
$(\cdot)''$	zweite Ableitung in Bezug auf den Ort ( $= \frac{d^2}{dx^2}$ )
$\frac{\partial}{\partial x}$	partielle Ableitung in Bezug auf die Koordinate $x$
$(\cdot)$	erste Ableitung in Bezug auf die Zeit ( $= d/dt$ )
$\ddot{(\cdot)}$	zweite Ableitung in Bezug auf die Zeit ( $= \frac{d^2}{dt^2}$ )

---

# 1 Einleitung

---

## 1.1 Motivation der Arbeit

In Deutschland wurden im Jahr 2018 allein 3,5 Millionen Fahrzeuge aufgrund von Sicherheitsmängeln zurückgerufen [47]. Angesichts der gesellschaftlichen und wirtschaftlichen Bedeutung solcher Rückrufaktionen gewinnt die Betrachtung von Unsicherheit im Produktlebenslauf zunehmend an Bedeutung. Eine ursächliche Rolle spielen dabei immer kürzere Entwicklungszyklen, die maßgeblich die Virtualisierung des Produktentwicklungsprozesses antreiben. Mathematische Modelle, von denen in dieser Arbeit ausgegangen wird, nehmen im Zuge der Virtualisierung zur Beschreibung des funktionalen Zusammenhangs von Parametern, Zustandsgrößen und Anfangsbedingungen eine immer größere Bedeutung ein. In der industriellen Praxis ersetzen sie zunehmend die kostspielige Entwicklung von Prototypen. In der rechnergestützten Entwicklung finden Modelle z. B. Anwendung bei der Analyse, Optimierung und Auslegung von Systemen sowie bei der Entscheidungsfindung im Produktentwicklungsprozess. Die steigenden Anforderung an die Vorhersagegenauigkeit von Modellen zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens strukturdynamischer Systeme stellt die Industrie daher vor neue Herausforderungen. Hieraus ergibt sich die Motivation, Unsicherheit insbesondere in den Modellen zu berücksichtigen.

Einen wichtigen wissenschaftlichen Beitrag dazu lieferte der zum 31.03.2021 ausgelaufene Sonderforschungsbereich (SFB) 805 „Beherrschung von Unsicherheit in lasttragenden Systemen des Maschinenbaus“. Forscher unterschiedlicher Disziplinen erarbeiteten technologische und methodische Lösungen, um Unsicherheit in allen Phasen des Produktlebenslaufes, Entwicklung, Produktion und Nutzung, zu beherrschen. Der in Abbildung 1.1 dargestellte Demonstrator des SFB 805 (SFB-Demonstrator) wurde in Anlehnung an einen Versuchsstand zum Test von Flugzeugtragwerken konzipiert und diente als Plattform zur teilprojektübergreifenden Zusammenarbeit zur Untersuchung der Unsicherheit an lasttragenden Systemen. Die Modellierung des SFB-Demonstrators kann beliebig komplex sein und von einem einfachen Zweimassenschwinger-Modell bis hin zu einem rechenintensiven Modell eines flexiblen Mehrkörpersystems (MKS) reichen.



Abbildung 1.1: Demonstrator des SFB 805

Auch die funktionalen Zusammenhänge können durch die Kombination einer Vielzahl an linearen, nichtlinearen, axiomatischen oder empirischen Beziehungen beschrieben werden. Somit herrscht nicht nur Unsicherheit in Bezug auf die Parameter des Modells und damit Parameterunsicherheit<sup>1</sup>, sondern auch Unsicherheit in Bezug auf den funktionalen Zusammenhang und somit Modellunsicherheit. Bei der Quantifizierung der Unsicherheit des SFB-Demonstrators stellen sich somit zwei Herausforderungen, die gleichzeitig die Motivation dieser Arbeit bilden.

- Zum einen wird bei einer statistischen Modellkalibrierung zwar die Parameterunsicherheit quantifiziert, die Modellunsicherheit jedoch zumeist vernachlässigt. Dies kann die Ergebnisse der Kalibrierung jedoch verzerren, wodurch die Parameter ihre physikalische Bedeutung einbüßen und zu Abstimmungsparametern degenerieren. Dies konterkariert jedoch die Notwendigkeit, im Produktentwicklungsprozess anhand von Modellen Rückschlüsse auf das zu entwickelnde System und dessen physikalische Eigenschaften zu ziehen.
- Zum anderen setzen die meisten Methoden zur statistischen Modellkalibrierung wenig rechenintensive Modelle voraus oder nutzen schnellere Ersatzmodelle von komplexeren Modellen, die tausendfach ausgewertet werden können. Komplexe

---

<sup>1</sup>In dieser Arbeit bezieht sich Parameterunsicherheit auf den Wert des Parameters. Die Unsicherheit in Bezug auf die Auswahl geeigneter Parameter fällt unter Modellunsicherheit, siehe Abschnitt 2.1.2.

---

rechenintensive Modelle, wie das eines flexiblen MKS wie der SFB-Demonstrators, können damit nicht effizient behandelt werden.

Zur Lösung dieser Herausforderungen muss daher eine neue Methode entwickelt werden, die die Parameter- und Modellunsicherheit für ein komplexes, rechenintensives strukturdynamisches System effizient quantifiziert. Dies stellt die Voraussetzung dafür dar, um die Unsicherheit des SFB-Demonstrators zu quantifizieren.

## 1.2 Ansatz und Aufbau der Arbeit

Der in dieser Arbeit verfolgte Ansatz baut auf dem Two-Stage Delayed Acceptance MCMC (2SDAMCMC) Algorithmus auf, einer von CHRISTEN und Fox vorgestellten, und von CUI weiterentwickelten, neuartigen Multi-Fidelity-Methode zur statistischen Modellkalibrierung [18, 19]. Die Effizienz von Multi-Fidelity-Methoden begründet sich in der systematischen Verknüpfung der häufigen Auswertungen eines Low-Fidelity-Modells mit niedriger Genauigkeit und Rechenzeit in Verbindung mit wenigen Auswertungen eines High-Fidelity-Modells mit höherer Genauigkeit und Rechenzeit. Dadurch gelingt die Reduktion der Rechenzeit für eine statistische Modellkalibrierung bei gleichzeitig hoher Genauigkeit der Ergebnisse, wodurch auch rechenintensive Modelle komplexer strukturdynamischer Systeme statistisch kalibriert werden können.

Der Modellunsicherheit wird in dieser Arbeit mit einer Diskrepanzfunktion  $\delta$  Rechnung getragen, die von KENNEDY und O'HAGAN eingeführt wurde [49]. Die Diskrepanzfunktion wird mit einem Gaussprozess (GP) modelliert und zusammen mit dem Modell im Rahmen der statistischen Modellkalibrierung kalibriert. Auf diese Weise wird verhindert, dass die Ergebnisse der statistischen Modellkalibrierung durch Vernachlässigung der Modellunsicherheit verzerrt sind und zugleich steigt die Vorhersagegenauigkeit des Modells.

Die Erprobung der Methode erfolgt am Beispiel des SFB-Demonstrators. Als flexibles MKS steht er prototypisch für in der industriellen Praxis vorkommende komplexe strukturdynamische Systeme wie Flugzeugtragwerke, Fahrzeugkarosserien und Roboter. Die Ausführungen in dieser Arbeit, auch zu Aspekten der Implementierung und der Parallelisierbarkeit, ermöglichen die Übertragbarkeit der Methode auf vergleichbare strukturdynamische Systeme.

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

**Kapitel 2** stellt den Stand der Forschung dar, um die in dieser Arbeit entwickelte Methode, sowie deren Erprobung an einem flexiblen MKS nachvollziehen zu können.

---

**Kapitel 3** präsentiert die in dieser Arbeit entwickelte Methode zur effizienten Quantifizierung von Parameter- und Modellunsicherheit sowie die Skalierung auf eine Massiv-Parallele Architektur.

**Kapitel 4** beschreibt als Anwendungsbeispiel den SFB-Demonstrator, an dem die in Kapitel 3 vorgestellte Methode erprobt wird.

**Kapitel 5** präsentiert das Modell des in Kapitel 4 beschriebenen SFB-Demonstrators auf Basis der in Kapitel 2 dargestellten Grundlagen zur Modellierung flexibler MKS.

**Kapitel 6** zeigt die Anwendung der Methode auf das in Kapitel 5 hergeleitete Modell des SFB-Demonstrators. Die Parameter- und Modellunsicherheit wird quantifiziert und die Verbesserung der Vorhersagefähigkeit des Modells durch Berücksichtigung der Modellunsicherheit untersucht.

**Kapitel 7** fasst diese Arbeit zusammen und enthält einen Ausblick auf Themen für zukünftige Forschung.

## 1.3 Eigene Veröffentlichungen

Während der Entstehung dieser Arbeit sind die folgenden eigenen Veröffentlichungen entstanden, deren Inhalte sich mit Aspekten dieser Arbeit überschneiden:

- [1] Robert Feldmann und Roland Platz. „Assessing Model Form Uncertainty for a Suspension Strut using Gaussian Processes“. In: *Proceedings of the 3rd International Conference on Uncertainty Quantification in Computational Sciences and Engineering (UNCECOMP 2019)*. 2019
- [2] Robert Feldmann u. a. „Analyzing Propagation of Model Form Uncertainty for Different Suspension Strut Models“. In: *Model Validation and Uncertainty Quantification, Volume 3*. Hrsg. von Zhu Mao. Conference proceedings of the Society for Experimental Mechanics series. Cham: Springer International Publishing und Imprint: Springer, 2020, S. 255–263. ISBN: 978-3-030-47638-0. DOI: 10.1007/978-3-030-47638-0\_28
- [3] Robert Feldmann u. a. „Recursive Gaussian Processes for Discrepancy Modeling“. In: *Proceedings of ISMA2020 including USD2020 International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics*. Leuven, Belgium, 2020

- 
- [4] Robert Feldmann u. a. „A Detailed Assessment of Model Form Uncertainty in a Load-Carrying Truss Structure“. In: *Model Validation and Uncertainty Quantification, Volume 3*. Hrsg. von Zhu Mao. Conference proceedings of the Society for Experimental Mechanics series. Cham: Springer International Publishing und Imprint: Springer, 2020, S. 303–314. ISBN: 978-3-030-47638-0. DOI: 10.1007/978-3-030-47638-0\_33
- [5] Robert Feldmann u. a. „A Methodology for the Efficient Quantification of Parameter and Model Uncertainty“. In: *Journal of Verification, Validation and Uncertainty Quantification (Zur Veröffentlichung angenommen)* (2022)



---

## 2 Stand der Forschung

---

Methoden zur Unsicherheitsquantifizierung finden in immer mehr Bereichen der Wissenschaft Anwendung, da mit ihnen durch Berücksichtigung der Daten- und Modellunsicherheit ein großes Potential zur Verbesserung der Vorhersagefähigkeit von Modellen einhergeht. In diesem Kapitel wird zunächst der für die in dieser Arbeit entwickelte Methode zur effizienten Quantifizierung von Parameter- und Modellunsicherheit relevante Stand der Forschung präsentiert. Anschließend werden die Grundlagen zur Modellierung von flexiblen MKS präsentiert, um die Erprobung der entwickelten Methode am SFB-Demonstrator, einem flexiblen MKS, nachvollziehen zu können.

In Abschnitt 2.1 wird zunächst die Klassifizierung von Unsicherheit in Daten- und Modellunsicherheit beschrieben. In Abschnitt 2.2 wird die Quantifizierung der in der Datenunsicherheit enthaltenen Parameterunsicherheit mittels einer statistischen Modellkalibrierung thematisiert sowie beschrieben, wie Modellunsicherheit im Zuge einer statistischen Modellkalibrierung berücksichtigt und quantifiziert werden kann. Abschnitt 2.3 stellt mit GP und Polynomial Chaos Expansion (PCE) zwei beliebte Klassen von Ersatzmodellen vor. Die Grundlagen zur Modellierung des in dieser Arbeit betrachteten flexiblen MKS werden in Abschnitt 2.4 behandelt. Die Grundlagen zur Modellierung der flexiblen Körper eines MKS werden in Abschnitt 2.5 beschrieben.

### 2.1 Klassifikation von Unsicherheit

Ein Ausgangspunkt für die Forschung im SFB 805 bildete die Feststellung, dass Unsicherheit in allen Phasen des Produktlebenslaufes, also Entwicklung, Fertigung und Nutzung, auftritt. Die Beherrschung der Unsicherheit über alle Produktlebenslaufphasen war zentrale Zielsetzung des SFB 805 und setzte einen ganzheitlichen Ansatz zur Beschreibung von Unsicherheit voraus [34, 72].

Im Zentrum der Unsicherheitsbetrachtung stehen dabei Modelle, siehe Abbildung 2.1. Der SFB 805 sieht diese als Abbild eines Gegenstandes an, die nur einen Teil der

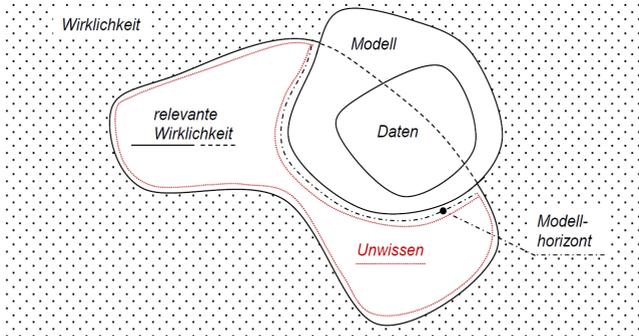


Abbildung 2.1: Betrachtung eines Modells mit Daten als Abbildung der Wirklichkeit [63]

relevanten Wirklichkeit erfassen. Der nicht durch das Modell erfasste Teil der relevanten Wirklichkeit ist das Unwissen. Modellunsicherheit folgt direkt aus Unwissen. Da Modelle Daten enthalten, ist Datenunsicherheit auch eine Folge von Unwissen [78].

Vor diesem Hintergrund wurde im SFB 805 eine Unsicherheitsklassifizierung etabliert, die u. a. zwischen Modell- und Datenunsicherheit unterscheidet [41, 20]. In der Literatur finden sich eine Vielzahl von Unsicherheitsklassifizierungen, die eine ähnliche Einteilungen vornehmen [49, 51, 77]. In den folgenden zwei Abschnitten werden die Begriffe Datenunsicherheit und Modellunsicherheit präzisiert.

### 2.1.1 Datenunsicherheit

Die Datenunsicherheit betrifft Unsicherheit in den Systemgrößen. Dies könne z. B. die Modellparameter, Eingangsgrößen, Systemanregung oder ein Messsignal sein, oder auch die Anfangs- und Randbedingungen wie sie bei der Modellierung mit Differentialgleichungen vorkommen [69]. In dieser Arbeit steht die für die Vorhersagegenauigkeit von Modellen besonders relevante Parameterunsicherheit im Fokus. Zur Beschreibung der Datenunsicherheit können bei Ungewissheit lediglich geschätzte oder bekannte Intervalle für die Variabilität einer Systemgröße angegeben werden. Demgegenüber ist bei stochastischer Unsicherheit eine Dichtefunktion (*engl.: probability density function*, (pdf)) bekannt oder geschätzt, wie z. B. in Form der (Wahrscheinlichkeits-)Verteilung einer Zufallsvariablen. Zur Beschreibung von Datenunsicherheit werden in dieser Arbeit die in Abbildung 2.2 dargestellten drei Arten von parametrischen Verteilungen verwendet. Die Gleichverteilung und die Exponentialverteilung werden zur Beschreibung der

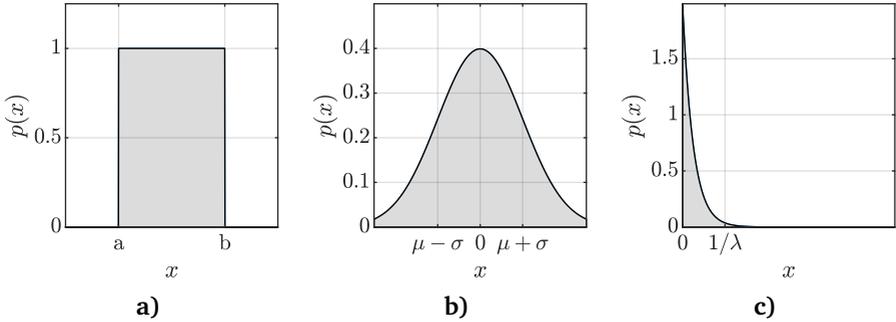


Abbildung 2.2: Dichtefunktion für Verteilungen der Zufallsvariablen  $X$ : (a) Gleichverteilung  $X \sim \mathcal{U}(-0,5, 0,5)$ , (b) Normalverteilung  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , (c) Exponentialverteilung  $X \sim \mathcal{E}(0,5)$

A-priori Unsicherheit der Parameter des Modells und der Diskrepanzfunktion verwendet. Die Normalverteilung ist ein zentrales Werkzeug, das in dieser Arbeit an vielen Stellen Anwendung findet. Des weiteren wird ein Kerndichteschätzer verwendet, der zur Beschreibung der quantifizierten Unsicherheit angewendet wird.

### Kontinuierliche Gleichverteilung

Bei einer Gleichverteilung ist die Zufallsvariable  $X$  gleichmäßig über ihren Träger, also der Bereich, über den die Dichtefunktion ungleich Null ist, verteilt. Sie wird häufig verwendet, wenn nur der Träger einer Zufallsvariable  $X$  bekannt ist [53]. Die Gleichverteilung einer Zufallsvariablen  $X$  wird mit

$$X \sim \mathcal{U}(a, b) \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}, a < b \tag{2.1}$$

ausgedrückt und die beispielhaft in Abbildung 2.2a abgebildete Dichtefunktion ist gegeben durch

$$p(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x) \frac{1}{b-a} \tag{2.2}$$

wobei  $a, b$  die Parameter der Gleichverteilung sind,  $\mathbb{1}$  die Indikatorfunktion und  $x$  eine Realisierung der Zufallsvariable ist [76]. Der Erwartungswert und die Varianz sind

---

gegeben durch

$$\mathbb{E}(X) = \frac{(a+b)}{2}, \quad \text{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (2.3)$$

## Normalverteilung

Die in vielen Bereichen der Wissenschaft allgegenwärtige Normalverteilung einer Zufallsvariablen  $X$  wird ausgedrückt durch

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \quad \text{mit} \quad \mu, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma > 0, \quad (2.4)$$

wobei der Erwartungswert  $\mu$  und die Standardabweichung  $\sigma$  die Parameter der Normalverteilung sind [53]. Die Dichtefunktion ist

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.5)$$

und der Erwartungswert und die Varianz ergeben sich zu

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \quad \text{var}(X) = \sigma^2. \quad (2.6)$$

In Abbildung 2.2b ist die Standardnormalverteilung  $\mathcal{N}(0, 1)$  abgebildet.

Die Normalverteilung (2.4) kann auf den mehrdimensionalen Fall verallgemeinert werden. Für die  $N$ -dimensionalen Zufallsvariable  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$  wird sie ausgedrückt durch

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left( \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\mu}}, \underbrace{\begin{pmatrix} \text{var}(X_1) & \text{cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{cov}(X_1, X_N) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & \text{var}(X_2) & \cdots & \text{cov}(X_2, X_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_N, X_1) & \text{cov}(X_N, X_2) & \cdots & \text{var}(X_N) \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \right) \quad (2.7)$$

wobei  $\boldsymbol{\mu}$  der Vektor der Erwartungswerte und  $\mathbf{C}$  die symmetrische, positiv-definite Kovarianzmatrix ist. Die Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}$  der mehrdimensionalen Normalverteilung steuert die statistische Abhängigkeit und Breite der Randverteilungen der Komponenten

---

ten  $X_1, X_2, \dots, X_N$ . Die entsprechende Dichtefunktion ist gegeben durch

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{C}|}(2\pi)^N} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}. \quad (2.8)$$

## Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung einer Zufallsvariablen  $X$  wird angegeben mit

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda) \quad \text{mit} \quad \lambda > 0 \quad (2.9)$$

wobei  $\lambda$  ihr Parameter ist. Die Dichtefunktion ist

$$p(x) = \mathbb{1}_{[0,\infty)} \lambda e^{-\lambda x} \quad (2.10)$$

und der Erwartungswert und die Varianz sind

$$\mathbb{E}(X) = 1/\lambda, \quad \text{var}(X) = 1/\lambda. \quad (2.11)$$

Für  $\lambda = 0,5$  ist die Exponentialverteilung  $\mathcal{E}(0,5)$  in Abbildung 2.2c gezeigt.

## Kerndichteschätzer

Mit Kerndichteschätzern können auf Basis von Samples  $x_i$  einer Zufallsvariablen  $X$  eine Dichtefunktion geschätzt werden, die keine parametrische Form annimmt [76]. Die Dichtefunktion

$$p_{\text{KDE}}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n k\left(\frac{|x - x_i|}{h}\right) \quad (2.12)$$

wird als gewichtete Linearkombination von  $n$  Kernen  $k$  ausgedrückt, wobei für die Kerne symmetrische, um  $x_i$  zentrierte Dichtefunktionen verwendet werden und die Bandweite  $h$  als Glättungsparameter dient. In dieser Arbeit wird für  $k$  die Dichtefunktion der Normalverteilung gewählt.

### 2.1.2 Modellunsicherheit

Modelle zur Beschreibung des Ein- und Ausgangsverhaltens von Systemen sind allgegenwärtig im Maschinenbau. Modelle basieren auf Annahmen, Vereinfachungen und

---

Abstraktionen und erfassen daher nie alle relevanten physikalischen Zusammenhänge [69]. Anhand von zwei Beispielen wird dies im Folgenden illustriert:

- In der Finite-Elemente (FE) Analyse werden Modellierungsmethoden wie das RAYLEIGH-RITZ-Verfahren verwendet. Diese führt auf eine schwache Lösung, die das Problem beschreibenden partiellen Differentialgleichungen nicht exakt, sondern nur im räumlichen Mittel erfüllt [67]. Mit dieser Approximation geht daher ein Modellfehler einher, der von der räumlichen Diskretisierung abhängt.
- Nichtlineare Effekte treten in vielen technischen Systemen auf, wie z. B. in Mehrkörpersystemen. Um für nichtlineare Systeme eine Regelung auszulegen, muss häufig eine Linearisierung des Systemverhaltens erfolgen. Auch dies führt zu einem Modellfehler.

Diese Beispiele verdeutlichen die Diskrepanz zwischen Modellen und der relevanten Wirklichkeit. Es herrscht Modellunsicherheit, da der funktionale Zusammenhang zwischen Systemgrößen vermutet, unbekannt, unvollständig ist oder nicht beachtet wird [78]. Entsprechend ist die Beschreibung des Systems bzw. das Wissen darüber unzureichend, unvollständig oder vereinfacht im Vergleich zur Wirklichkeit [63]. In Abbildung 2.1 wird dies dadurch verdeutlicht, dass das Modell nur einen Teil der relevanten Wirklichkeit erfasst. Der nicht erfasste Teil wird als Unwissen bezeichnet und grenzt sich vom Modell durch den Modellhorizont ab [78].

## 2.2 Quantifizierung der Unsicherheit

Nachdem in Abschnitt 2.1 bereits die Daten- und Modellunsicherheit definiert wurde, wird in diesem Abschnitt der Stand der Forschung zur Quantifizierung der in der Datenunsicherheit enthaltenen Parameterunsicherheit sowie die Berücksichtigung der Modellunsicherheit beschrieben. BAYES'SCHE Inferenz basiert auf dem Satz von BAYES [12] und erlaubt die Bestimmung der A-posteriori-Verteilung als Wahrscheinlichkeit von Parameterwerten für gegebene Messwerte. Zur statistischen Modellkalibrierung ist BAYES'SCHE Inferenz ein wichtiges Werkzeug, um die Parameterunsicherheit zu quantifizieren und wird in Abschnitt 2.2.1 vorgestellt. In Abschnitt 2.2.2 und Abschnitt 2.2.3 werden mit dem METROPOLIS-HASTINGS- und dem adaptiven METROPOLIS-Algorithmus zwei grundlegende Verfahren zum Sampling der A-posteriori-Verteilung vorgestellt. Mit Multi-Fidelity-Methoden kann die Effizienz solcher Verfahren gesteigert werden, indem genaue und rechenintensive Modelle mit Modellen niedrigerer Genauigkeit und Rechenzeit zur Berechnung der A-posteriori-Verteilung kombiniert werden. Eine solche Methode wird in Abschnitt 2.2.4 beschrieben. Konvergenzmetriken zur Analyse der

---

Ergebnisse einer statistischen Modellkalibrierung werden in Abschnitt 2.2.5 vorgestellt. In Abschnitt 2.2.6 wird beschrieben, wie die Modellunsicherheit im Rahmen der statistischen Modellkalibrierung berücksichtigt wird. Abschnitt 2.2.7 stellt die Grundlagen einer Varianz-basierten Methode zur globalen Sensitivitätsanalyse dar, um die zu kalibrierenden Parameter eines Modells identifizieren zu können. Abschnitt 2.2.8 zeigt weitere Methoden zur Quantifizierung der Unsicherheit und deren bisherige Anwendungen in der Strukturmechanik auf.

## 2.2.1 BAYES'SCHE Inferenz

Zur Modellkalibrierung werden in den Ingenieurwissenschaften vorwiegend deterministische, auf Optimierung eines Fehlermaßes basierende Ansätze verwendet. Zu erwähnen sei hier exemplarisch die umfangreiche Literatur zum Model-Updating von FE-Modellen, siehe z. B. das Buch von FRISWELL [24]. Ein Grundgedanke bei solchen Ansätzen ist, dass durch die Minimierung eines Fehlermaßes über die Variation der Parameter das Modell dazu gebracht wird, die experimentellen Messungen möglichst gut zu repräsentieren. Ein einzelnes ermitteltes Optimum der Parameter kann jedoch nicht als Abbild für die im System vorherrschende Unsicherheit dienen und so können deterministische Ansätze sowohl zur fehlerhaften Validierung von Modellen führen, als auch deren Vorhersagegenauigkeit herabsetzen [46, 55].

Motiviert durch diese Problematik hat sich die BAYES'sche Modellkalibrierung etabliert, bei der die im Vektor  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_P) \in \mathbb{R}^P$  zusammengefassten, zu kalibrierenden  $P$  Parameter als Zufallsvariablen angenommen werden und mit (Wahrscheinlichkeits-)Verteilungen beschrieben werden. Die BAYES'sche Modellkalibrierung basiert auf BAYES'scher Inferenz, bei der die A-posteriori-Verteilung der zu kalibrierenden Parameter  $\boldsymbol{\theta}$  eines Modells aufgrund A-priori-Informationen und zusätzlicher experimenteller Messungen  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$  aktualisiert wird, wobei  $M$  die Anzahl der Messungen ist. Da die Verteilung der Parameter  $p(\boldsymbol{\theta})$  nicht direkt messbar ist, stellt der Satz von BAYES den benötigten Zusammenhang zwischen dem Modell mit seinen Parametern und experimentellen Messungen her, um diese zu ermitteln:

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \frac{L(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) p_0(\boldsymbol{\theta})}{\int_{\mathcal{D}_\theta} L(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) p_0(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta}}. \quad (2.13)$$

Dabei quantifiziert die A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  die Wahrscheinlichkeit eines Parameterwertes  $\boldsymbol{\theta}$  für die Messwerte  $\mathbf{y}$ . Die A-priori-Verteilung  $p_0(\boldsymbol{\theta})$  enthält jegliche A-priori-Informationen zu den Parametern. Dies können z. B. Informationen aus vorherigen Modellen oder Wahrscheinlichkeitsdichten sein, die bei ähnlichen, vorherigen

Untersuchungen ermittelt wurden [76]. Die Likelihood-Funktion  $L(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$  stellt eine Funktion von  $\boldsymbol{\theta}$  dar und quantifiziert die Wahrscheinlichkeit, Messwerte des Systems bei gegebenen Parameterwerten  $\boldsymbol{\theta}$  zu beobachten. Das Integral über den Träger der Parameter  $\mathcal{D}_{\boldsymbol{\theta}}$  im Nenner berechnet die marginale Wahrscheinlichkeit und dient zur Normalisierung.

## 2.2.2 METROPOLIS-HASTINGS Algorithmus

Markovketten-Monte-Carlo-Verfahren (engl.: *Markov-Chain-Monte-Carlo*, MCMC) sind ein weit verbreiteter Ansatz zur Bestimmung der A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  (2.13), der die Berechnung des schwer lösaren Integrals im Nenner in (2.13) umgeht [56, 68]. Die Grundidee von MCMC-Verfahren ist es eine Markovkette  $(\boldsymbol{\theta}^{(0)}, \boldsymbol{\theta}^{(1)}, \boldsymbol{\theta}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{\theta}^{(N_S)})$  der Länge  $N_S$  mit einer stationären Verteilung zu bilden, die der zu bestimmenden A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  (2.13) gleicht. Einer der gängigsten und flexibelsten MCMC-Algorithmen ist der METROPOLIS-HASTINGS-Algorithmus, der in der Entwicklung des Forschungsgebiets der MCMC-Algorithmen eine prägende Rolle einnimmt [16, 50]. Die Markovkette startet mit einem Anfangswert  $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ . Bei jeder Iteration wird ein neuer Zustandskandidat  $\boldsymbol{\theta}^*$  mittels einer Vorschlagsverteilung  $p(\boldsymbol{\theta}^*|\boldsymbol{\theta}^{(n_S)})$  generiert. In der Folge wird der Zustandskandidat mit der Akzeptanzwahrscheinlichkeit

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\theta}^{(n_S)}) = \min \left( 1, \frac{L(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*) p(\boldsymbol{\theta}^{(n_S)}|\boldsymbol{\theta}^*) p_0(\boldsymbol{\theta}^*)}{L(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^{(n_S)}) p(\boldsymbol{\theta}^{(n_S)}|\boldsymbol{\theta}^*) p_0(\boldsymbol{\theta}^{(n_S)})} \right) \quad (2.14)$$

entweder angenommen (i. e.  $\boldsymbol{\theta}^{(n_S+1)} = \boldsymbol{\theta}^*$ ) oder verworfen (i. e.  $\boldsymbol{\theta}^{(n_S+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(n_S)}$ ). Der Ablauf des METROPOLIS-HASTINGS-Algorithmus ist in Abbildung 2.3 dargestellt.

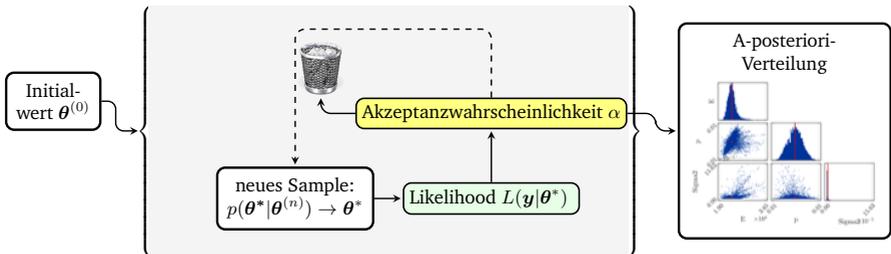


Abbildung 2.3: Ablauf des METROPOLIS-HASTINGS-Algorithmus

Der METROPOLIS-HASTINGS-Algorithmus ist eine Verallgemeinerung des METROPOLIS-Algorithmus, der für die Vorschlagsverteilung  $p(\boldsymbol{\theta}^* | \boldsymbol{\theta}^{(ns)})$  eine Normalverteilung annimmt, siehe Abschnitt 2.1.1. Sowohl der METROPOLIS-HASTINGS-Algorithmus als auch der METROPOLIS-Algorithmus gehören zur Familie der *Random-Walk*-Algorithmen, die für jedes Sample die lokale Umgebung des vorherigen Samples erkunden [68]. Diese Algorithmen laufen Gefahr, bei der Erkundung des Parameterraums in lokalen Maxima der A-posteriori-Verteilung (engl.: *local traps*) hängen zu bleiben. Eine Voraussetzung für eine erfolgreiche Modellkalibrierung ist daher, dass die Vorschlagsverteilung  $p(\boldsymbol{\theta}^* | \boldsymbol{\theta}^{(ns)})$  eine gewisse Ähnlichkeit mit der A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  (2.13) hat. Ist dies nicht der Fall, kann es z. B. sein, dass keine Samples angenommen werden, was typischerweise bei stark korrelierten A-posteriori-Verteilungen auftritt. Der adaptive METROPOLIS-Algorithmus versucht daher die GAUSS'sche Vorschlagsverteilung mit jedem Sample der A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  (2.13) anzunähern [40]. Viele weitere MCMC-Algorithmen gehen als Varianten auf den METROPOLIS-HASTINGS-Algorithmus zurück oder wurden durch die Entwicklung anderer MCMC-Algorithmen inspiriert und in der Forschung meist in Bezug auf eine bestimmte Anwendung kombiniert [16, 37, 50].

### 2.2.3 Adaptiver METROPOLIS Algorithmus

Der in Algorithmus 1 beschriebene adaptive METROPOLIS-Algorithmus [40] erweitert den METROPOLIS-Algorithmus in Bezug auf die Vorschlagsverteilung. Die Vorschlagsverteilung  $p(\boldsymbol{\theta}^* | \boldsymbol{\theta}^{(ns)}) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}^{(ns)}, \mathbf{C})$  wird als Normalverteilung angenommen, wobei als Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}$  die skalierte empirischen Kovarianzmatrix für alle vorangegangenen Samples verwendet wird. Durch Anpassung der Kovarianzmatrix an die vorangegangenen Samples der Markovkette wird die A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$  besser erkundet, was die Konvergenz beschleunigt [16]. Obwohl die resultierende keine Markovkette ist, gilt sie als gute Annäherung an die A-posteriori-Verteilung [40, 76].

Die Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}$  wird als konstante Matrix  $\mathbf{C}_0$  für die ersten  $N_T$  Trainingsamples der Kette angenommen. Diese dienen als Trainingsphase, um genügend Samples zur Berechnung der skalierten empirischen Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}$  zu generieren. Als anfängliche Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}_0$  kann z. B. eine diagonale Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}_0 = \text{diag}\{\epsilon_{c,1}\sigma_1^2, \dots, \epsilon_{c,P}\sigma_P^2\}$  verwendet werden, wobei die  $\epsilon_{c,1}, \dots, \epsilon_{c,P}$  Skalierungsfaktoren und  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_P^2$  die Varianzen der marginalen A-priori-Verteilung der Parameter  $\boldsymbol{\theta}$  sind [82]. Diese Wahl spiegelt die Kovarianzstruktur der A-priori-Verteilung unter der Annahme unabhängiger A-priori-Verteilungen  $p_0(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{p=1}^P p_0(\theta_p)$  wider. Der Skalierungsfaktoren  $\epsilon_{c,1}, \dots, \epsilon_{c,P}$  steuern die Erkundung des Parameterraums, indem ein Gleichgewicht zwischen der Rate der akzeptierten Samples und der Entfernung, die

die Kette innerhalb einer Iteration zurücklegt [76]. Sie können z.B. empirisch oder aus einer vorangehenden statistischen Modellkalibrierung ermittelt werden.

Nach Abschluss der Trainingsphase  $n_S > N_T$  wird die skalierte empirische Kovarianzmatrix  $\bar{C}_{n_S}$  der Kettensamples als Kovarianzmatrix  $C$  in der GAUSS'schen Vorschlagsverteilung  $p(\boldsymbol{\theta}^* | \boldsymbol{\theta}^{(n_S)}) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}^{(n_S)}, C)$  verwendet. Die skalierte empirische Kovarianzmatrix  $\bar{C}_{n_S}$  wird rekursiv mit dem Mittelwert der Samples  $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{n_S}$  berechnet, die beide beim Kettenindex  $n_S = 1$  mit  $\bar{C}_1 = C_0$  und  $\bar{\boldsymbol{\theta}}_1 = \boldsymbol{\theta}^{(0)}$  initialisiert werden. Der Skalierungsfaktor  $s_P$  in Algorithmus 1 ist in [40] durch  $s_P = 2,38^2/P$  gegeben und dient als Designparameter. Um die positive Definitheit der skalierten empirischen Kovarianzmatrix  $\bar{C}_{n_S}$  zu gewährleisten, wird ein konstanter Regularisierungsparameter  $\epsilon_r = 1 \cdot 10^{-6}$  in die Berechnung einbezogen, wobei  $\mathbf{I}_P$  eine Einheitsmatrix der Dimension  $P \times P$  ist.

---

**Algorithmus 1** : Adaption der Kovarianzmatrix der Vorschlagsverteilung  $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{n_S}$

---

```

1:  $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{n_S} = \boldsymbol{\theta}^{(n_S)} + \frac{n_S}{n_S+1}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_{n_S-1} - \boldsymbol{\theta}^{(n_S)})$ 
2:  $\bar{C}_{n_S+1} =$ 
    $\frac{n_S-1}{n_S}\bar{C}_{n_S} + \frac{s_P}{n_S}(n_S\bar{\boldsymbol{\theta}}_{n_S-1}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_{n_S-1})^\top - (n_S+1)\bar{\boldsymbol{\theta}}_{n_S}(\bar{\boldsymbol{\theta}}_{n_S})^\top + \boldsymbol{\theta}^{(n_S)}(\boldsymbol{\theta}^{(n_S)})^\top + \epsilon_r\mathbf{I}_P)$ 
3: if  $n_S > N_T$  then
4:    $C = \bar{C}_{n_S+1}$ 
5: else
6:    $C = C_0$ 
7: end

```

---

## 2.2.4 Eine Multi-Fidelity-Methode zur statistischen Modellkalibrierung

Der METROPOLIS-Algorithmus und der adaptive METROPOLIS Algorithmus bergen das Problem, dass sie aufgrund eines hohen Anteils verworfener Samples ineffizient sind. Seit einigen Jahren rücken daher Multi-Fidelity-Methoden mehr und mehr in den Fokus, da mit ihnen ein Potential zur Rechenzeitverkürzung einhergeht, aufgrund dessen auch für rechenintensive Modelle eine statistische Modellkalibrierung durchgeführt werden kann [62].

In vielen Situationen können für ein strukturdynamisches System mehrere Modelle mit unterschiedlicher Genauigkeit (engl.: *fidelity*) angegeben werden. Modelle in der Strukturdynamik entstehen z. B. oft durch die räumliche Diskretisierung im Rahmen der Finite-Elemente-Methode (FEM) und enthalten typischerweise mehrere Tausend bis hin zu Millionen Freiheitsgrade. Hier können z. B. durch Variation der Diskretisierung

Modelle mit unterschiedlicher Genauigkeit und Rechenzeit angegeben werden. In Annahme eines High-Fidelity-Modells (HiFi) mit hoher Genauigkeit und hoher Rechenzeit können Low-Fidelity-Modelle (LoFi) mit niedrigerer Genauigkeit und typischerweise auch niedrigerer Rechenzeit zudem durch projektionsbasierte Methoden (z. B. Krylov-Unterraum-Methoden) und datengestützte Methoden (z. B. PCE, GP, *Scalable Vector Machines*) erzeugt werden [62]. Nicht zuletzt lassen sich auch durch vereinfachte Modellierung wie z. B. Linearisierungen oder Vernachlässigung von physikalischen Effekten Low-Fidelity-Modelle gewinnen. Das Ziel von Multi-Fidelity-Methoden besteht in der systematischen Kombination der Ergebnisse von Modellen unterschiedlicher Genauigkeit, wobei rechenintensivere Modelle höherer Genauigkeit tendenziell weniger oft ausgewertet werden als weniger rechenintensive Modelle niedriger Genauigkeit. Die Forschung zu Multi-Fidelity-Methoden aus dem Bereich der statistischen Modellkalibrierung ist bisher noch wenig vorangeschritten [22, 62]. Die wenigen relevanten Beiträge zur Anwendung von Multi-Fidelity-Methoden sowie weiteren Ansätzen zur Quantifizierung der Parameterunsicherheit für strukturdynamische Systeme werden in Abschnitt 2.2.8 diskutiert.

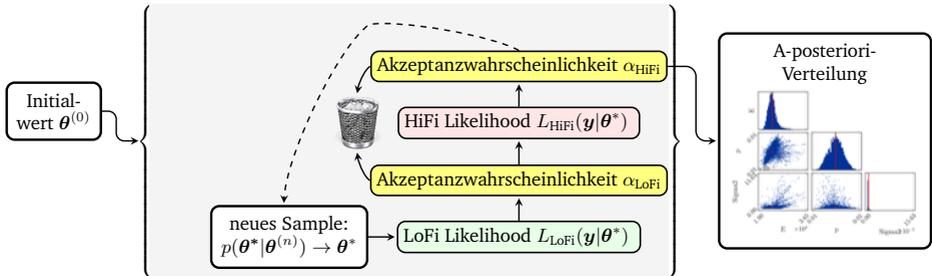


Abbildung 2.4: Ablauf des *Two-Stage Delayed Acceptance MCMC*-Algorithmus

CHRISTEN [18] und FOX [23] führten den *Two-Stage Delayed Acceptance MCMC* (2SDAMCMC) Algorithmus ein, der sich in Grundzügen am METROPOLIS-HASTINGS-Algorithmus orientiert und diesen auf den Multi-Fidelity-Kontext erweitert. Der prinzipielle Ablauf der Kalibrierung ist in Abbildung 2.4 dargestellt und wird im Folgenden erläutert. Ausgegangen wird dabei von einem High-Fidelity-Modell und einem Low-Fidelity-Modell, mit denen jeweils die zwei Likelihood-Funktionen  $L_{HiFi}$  und  $L_{LoFi}$  berechnet werden. Auf Basis eines Initialwerts  $\theta^{(0)}$  wird im ersten Schritt für ein Sample die Likelihood-Funktion  $L_{LoFi}$  für das Low-Fidelity-Modell berechnet, worauf das Sample mit der Wahrscheinlichkeit  $\alpha_{LoFi}$  entweder akzeptiert oder verworfen wird. Im Fall der Annahme wird danach in einem zweiten Schritt die Likelihood-Funktion  $L_{HiFi}$  für das

---

rechenintensive High-Fidelity-Modell bestimmt und das Sample mit der Wahrscheinlichkeit  $\alpha_{\text{HiFi}}$  angenommen oder verworfen. Die für MCMC typische hohe Quote an verworfenen Samples zwischen 50 und 90% (siehe Abschnitt 2.2.5) kann durch diesen zweigeteilten Ansatz reduziert und die Akzeptanzwahrscheinlichkeit  $\alpha_{\text{HiFi}}$  im zweiten Schritt erhöht werden [62, 76]. Dieser zweistufige Ansatz, bei dem Samples vor Berechnung des High-Fidelity-Modells gewissermaßen durch ein Low-Fidelity-Modell gefiltert werden, führt zu einer erheblichen Effizienzsteigerung, wodurch auch rechenintensive Modelle effizient behandelt werden können [62].

Der 2SDAMCMC-Algorithmus wird in den Ingenieurwissenschaften bisher noch wenig angewendet. Die meisten Anwendungen konzentrieren sich auf Modelle zur Simulation von unterirdischen Fließ- und Transportprozessen in den Geowissenschaften [30, 60] sowie Modelle in der Biochemie [31, 32, 70] und der elektrischen Impedanztomographie [11]. Als Weiterentwicklung des 2SDAMCMC-Algorithmus schlägt Cui in [19] ein adaptives projektionsbasiertes Ersatzmodell als Low-Fidelity-Modell vor, dass fortlaufend an die Modellauswertungen des High-Fidelity-Modells adaptiert wird. Auf diese Weise wird die Genauigkeit des Low-Fidelity-Modells fortlaufend verbessert, wodurch sich gleichzeitig die Akzeptanzwahrscheinlichkeit  $\alpha_{\text{HiFi}}$  erhöht. Zudem kombiniert Cui den 2SDAMCMC-Algorithmus mit dem *Grouped-Components-Adaptive-METROPOLIS*-Algorithmus als Variante des in Abschnitt 2.2.3 vorgestellten Adaptiven METROPOLIS-Algorithmus. Sowohl für den ursprünglichen Ansatz von CHRISTEN als auch die Erweiterung um ein adaptives Low-Fidelity-Modell ist die Konvergenz gegen die A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  (2.13) des High-Fidelity-Modells sichergestellt [19].

## 2.2.5 Konvergenzmetriken

Die notwendige Länge einer mit einem MCMC-Algorithmus generierten Kette  $N_S$  ist problemspezifisch und hängt davon ab, ob die Kette konvergiert ist. Konvergenz bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Kette Samples der A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  generiert. Die Konvergenz der Kette kann durch ungünstige Initialwerte  $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$  der Kette verzögert werden. Liegen die Initialwerte  $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$  in Bereichen der A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  mit niedriger Wahrscheinlichkeit, muss sich die Kette zu Beginn erst in Bereiche höherer Wahrscheinlichkeit der A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  iterativ bewegen. Diese  $N_B$  Samples, die zu Beginn noch nicht der A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  folgen, werden als sog. *Burn-In* verworfen und finden keine Verwendung bei der Bestimmung der A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ . Bedingt durch das Fehlen analytischer Konvergenztheorie kann die Konvergenz falsifiziert, im Allgemeinen jedoch nicht verifiziert werden [15, 76]. Jedoch existieren in der Literatur Heuristiken, mit denen die Konvergenz einer mit einem MCMC-Algorithmus generierten Kette analysiert werden kann [82]. Zwei

etablierte Metriken, die in dieser Arbeit Anwendung finden, werden im Folgenden vorgestellt.

## Akzeptanzrate

Um einzuschätzen, ob die Kette die A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  sampelt, bietet die Akzeptanzrate der (in der ersten Stufe) akzeptierten Samples  $\bar{\alpha}_{\text{LoFi}}$  einen guten Anhaltspunkt [76]. SMITH betrachtet eine Akzeptanzrate zwischen 10% und 50% als typisch [76]. Ist die Akzeptanzrate höher, ist dies ein Zeichen, dass die A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  nur unzureichend erkundet wird. Ist sie niedriger, kann dies bedeuten, dass die Kette sich in Bereichen der A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  mit niedriger Wahrscheinlichkeit aufhält [82].

## GELMAN-RUBIN-Metrik

Das Prinzip der GELMAN-RUBIN-Metrik (engl.: *GELMAN-RUBIN-diagnostic*) besteht darin, die Varianz der Samples für jede einzelne Kette zu bestimmen, diese Varianzen zu mitteln und mit der Varianz aller durch die Ketten generierten Samples zu vergleichen [16]. Das Ergebnis der GELMAN-RUBIN-Metrik wird in mit dem sog. *potential scale reduction-Faktor*  $R$  angegeben. Ausgehend von  $k = 1, \dots, K$  Ketten  $(\boldsymbol{\theta}^{(0,k)}, \boldsymbol{\theta}^{(1,k)}, \dots, \boldsymbol{\theta}^{(N_S,k)})$  der gleichen Länge  $N_S$  wird für jede Kette  $k$  die gemittelte Kovarianzmatrix

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{GR},k} = \frac{1}{N_S} \sum_{n_S=0}^{N_S} (\boldsymbol{\theta}^{(n_S,k)} - \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\text{GR},k})(\boldsymbol{\theta}^{(n_S,k)} - \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\text{GR},k})^\top$$

$$\text{mit } \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\text{GR},k} = \frac{1}{N_S + 1} \sum_{n_S=0}^{N_S} \boldsymbol{\theta}^{(n_S,k)} \quad (2.15)$$

ermittelt und diese  $K$  Kovarianzmatrizen anschließend noch einmal gemittelt, sodass sich die Matrix

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{GR},\Sigma,1} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \bar{\mathbf{C}}_{\text{GR},k}, \quad (2.16)$$

ergibt, wobei  $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{\text{GR},k}$  der Mittelwert der Samples einer Kette  $k$  ist. Eine weitere Kovarianzmatrix der Mittelwerte der einzelnen Ketten ergibt sich zu

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{GR},\Sigma,2} = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (\bar{\boldsymbol{\theta}}_{\text{GR},k} - \bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}})(\bar{\boldsymbol{\theta}}_{\text{GR},k} - \bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}})^\top, \quad \text{mit} \quad \bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\text{GR},k}, \quad (2.17)$$

wobei  $\bar{\bar{\boldsymbol{\theta}}}$  der Mittelwert der Samples aller Ketten ist. Der *potential scale reduction*-Faktor bestimmt sich schließlich zu

$$R = \frac{N_S}{N_S + 1} + \left(\frac{K+1}{K}\right)\lambda_1, \quad (2.18)$$

wobei  $\lambda_1$  der größte Eigenwert der symmetrischen, positiv definiten Matrix  $\bar{\mathbf{C}}_{\text{GR},\Sigma,1}^{-1} \bar{\mathbf{C}}_{\text{GR},\Sigma,2}$  ist [82]. Je weiter die Kette konvergiert, desto ähnlicher sollten die stationären Verteilungen der Ketten sein. Der Kennwert  $R$  ist indikativ hierfür und nähert sich mit fortschreitender Konvergenz dem Wert 1 von oben an [16].

## 2.2.6 Quantifizierung der Modellunsicherheit

„All Models are wrong, but some are useful“ – dieses Zitat von GEORGE E. P. BOX verdeutlicht, dass die Beschreibung des funktionalen Zusammenhangs aller Modelle unvollkommen ist und ihnen daher Modellunsicherheit innewohnt [14]. Bleibt diese unberücksichtigt, können die Ergebnisse einer Modellkalibrierung verzerrt (engl.: *biased*) sein, wodurch die Parameter ihre physikalische Bedeutung einbüßen. Aus dieser Motivation etablierten KENNEDY und O’HAGAN einen wegweisenden Ansatz zur Modellkalibrierung, bei der  $M$  experimentelle Messungen  $y_m$  aus dem Messdatensatz  $\mathcal{Y}_m = \{(\mathbf{x}_m, y_m) | m = 1, \dots, M\}$  mit der Beziehung

$$y_m = \eta(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta) + \delta(\mathbf{x}_m) + \varepsilon_m \quad (2.19)$$

dargestellt werden. Dabei beschreibt  $\eta(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  das Modell,  $\delta(\mathbf{x}_m)$  eine sog. Diskrepanzfunktion,  $\mathbf{x}_m$  die Inputs und  $\varepsilon_m$  den normalverteilten Messfehler. KENNEDY und O’HAGAN [49] gehörten zu den ersten, die mit einer Diskrepanzfunktion  $\delta(\mathbf{x}_m)$  in (2.19) der Modellunsicherheit bei der Modellkalibrierung Rechnung trugen. Die Diskrepanzfunktion  $\delta(\mathbf{x}_m)$  stellt sicher, dass die physikalischen Modellparameter  $\boldsymbol{\theta}_\eta \in \mathbb{R}^{N_\eta}$  in einer statistisch konsistenten Art und Weise kalibriert werden. Die Genauigkeit der Modellvorhersage wird einerseits durch die statistische Kalibrierung der Modellparameter  $\boldsymbol{\theta}_\eta$  und andererseits durch die Korrektur der Vorhersagen des kalibrierten Modells durch die kalibrierte Diskrepanzfunktion  $\delta(\mathbf{x}_m)$  erhöht [9].

---

Die Diskrepanzfunktion  $\delta(\mathbf{x}_m)$  ist phänomenologischer Natur. Für sie kann in der Regel kein funktionaler Zusammenhang angegeben werden und wird in [49] als GP modelliert. GP sind eine Generalisierung der Gaussverteilung im Funktionenraum und werden oft zur nicht-parametrischen Regression genutzt [65]. In Abschnitt 2.3.1 werden die Grundlagen zu GP beschrieben, die in dieser Arbeit zur Modellierung der Diskrepanzfunktion als auch des Low-Fidelity-Modells in Abschnitt 3.2 verwendet werden. GP werden durch sog. Hyperparameter  $\theta_\delta$  beschrieben, die in der Darstellung (2.19) und in der Literatur häufig nicht explizit angegeben werden. Die gesamten oder ein eine Auswahl der Hyperparameter werden im Rahmen der statistischen Modellkalibrierung mit den Modellparameter  $\theta_\eta$  kalibriert und im Vektor der zu kalibrierenden Parametern zusammengefasst zu  $\theta = (\theta_\eta, \theta_\delta)$ . In der Literatur sind weitere Möglichkeiten zur Modellierung der Diskrepanzfunktion  $\delta(\mathbf{x}_m)$  zu finden, u. a. als Konstante [7], Zufallsvariable [19] oder als analytische Funktion, jedoch bieten diese Ansätze nicht die gleiche Flexibilität wie die in der Forschung etablierte Darstellung als GP und implizieren gleichzeitig starke A-priori-Annahmen an die funktionale Form des Modellfehlers.

Der Ansatz von KENNEDY und O'HAGAN sieht die Verwendung eines GP als Ersatzmodell für  $\eta(\mathbf{x}, \theta_\eta)$  vor. Der GP wird aus Modellauswertungen von  $\eta(\mathbf{x}, \theta_\eta)$  gewonnen. Jedoch ist diese vorgeschlagene Darstellung durch GP bei Modellen  $\eta(\mathbf{x}, \theta_\eta)$  mit z. B. nichtlinearen oder nicht-glatten Zusammenhängen oft nicht geeignet [65]. Dies beeinflusst maßgeblich die Güte des Ersatzmodells, sodass die so erhaltene A-posteriori-Verteilung  $p(\theta|\mathbf{y})$  (2.13) von der wahren A-posteriori-Verteilung abweichen kann.

HIGDON [43] erweiterte den Ansatz von KENNEDY und O'HAGAN auf Probleme mit hochdimensionalen Ausgangsdaten. Der Ansatz von HIGDON wurde im Forschungscode GPM/SA [25] (engl.: *Gaussian Process Model Simulation Analysis*) der Los Alamos National Laboratories implementiert und hat durch seine vielfache Anwendung zur Etablierung des Ansatzes von KENNEDY und O'HAGAN beigetragen.

FELDMANN [1, 4, 5] arbeitete an der Darstellung und Quantifizierung von Modellunsicherheit am Beispiel des SFB-Demonstrators. In [1] stellt FELDMANN eine Methode zur Quantifizierung von Modellunsicherheit vor, bei der die Diskrepanzfunktion  $\delta(\mathbf{x}_m)$  in (2.19) verwendet wird, um eine Modellauswahl bei Vorliegen konkurrierender Modelle vorzunehmen. Die Modellierung der Diskrepanzfunktion als GP erlaubt die Bestimmung von Quantilen, die als Einzahlwert zur Quantifizierung der Modellunsicherheit herangezogen werden können. Am Beispiel eines einfachen Zweimassenschwinger-Modells des SFB-Demonstrators zeigt er in [4] zudem, wie aus den Konfidenzintervallen Rückschlüsse auf konkrete Modellfehler getroffen werden können. Die Darstellung der Diskrepanzfunktion  $\delta(\mathbf{x}_m)$  durch einen GP ist zwar etabliert, wird in der Literatur aufgrund von Problemen bei der Beschreibung komplexer nichtlinearer und nicht-glatter Zusammenhänge jedoch zunehmend hinterfragt. FELDMANN [5] schlägt daher die Darstellung der

---

Diskrepanzfunktion als rekursiven GP vor, der eine hierarchische Kombination von GP ist, siehe Abschnitt 2.3.1. Dabei zeigt er, dass die Vorhersagegenauigkeit des rekursiven GP deutlich höher ist.

BRYNJARSDOTTIR zeigte in [17] anhand eines einfachen akademischen Beispiels, dass die Vernachlässigung der Diskrepanzfunktion  $\delta(\mathbf{x}_m)$  sowohl zu einer verzerrten (engl.: *biased*) A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  (2.13) als auch die Vorhersagegenauigkeit des kalibrierten Modells herabsetzt. Da die Parameter  $\boldsymbol{\theta}_\eta$  und die Diskrepanzfunktion  $\delta(\mathbf{x}_m)$  in gegenseitiger Beziehung (2.19) stehen, kann der Einfluss der Modellunsicherheit bei Vernachlässigung der Diskrepanzfunktion  $\delta(\mathbf{x}_m)$  im Ergebnis der Modellkalibrierung zu Tragen kommen. Dadurch degenerieren physikalische Parameter zu reinen Abstimmungsparametern (engl.: *tuning parameter*) und verlieren ihre Aussagekraft. Dieser Effekt bleibt mit Erhöhung der verwendeten Anzahl an Messungen zur Kalibrierung bestehen. Ebenso verdeutlicht GOLLER in [33] beispielhaft anhand eines inadäquaten Modells, wie dessen Kalibrierung bei Vernachlässigung der Modellunsicherheit komplett scheitern kann. Die resultierenden A-posteriori-Verteilungen  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  (2.13) waren verzerrt und haben keinen Aufschluss über die zu kalibrierenden physikalischen Modellparameter  $\boldsymbol{\theta}_\eta$  geben können. Hierdurch wird unterstrichen, dass eine statistische Modellkalibrierung nicht ohne eine Diskrepanzfunktion  $\delta(\mathbf{x}_m)$  erfolgen sollte.

## 2.2.7 Sensitivitätsanalyse

Ein wichtiger Schritt zur Vorbereitung einer statistischen Modellkalibrierung besteht darin, aus den im Modell vorkommenden Parametern die Parameter  $\boldsymbol{\theta}_\eta$  auszuwählen, die kalibriert werden sollen. Dazu wird eine Sensitivitätsanalyse mit einer Anzahl von  $N_{\text{Sobol}}$ , im Vektor  $\boldsymbol{\theta}_{\text{Sobol}}$  zusammengefassten Parametern des Modells durchgeführt um zu quantifizieren, welche Variation in den Modellausgängen der Variation in den jeweiligen Modellparametern  $\boldsymbol{\theta}_{\text{Sobol}}$  zugerechnet werden kann [76]. Auf diese Weise können ungewichtige Parameter identifiziert und in der folgenden Modellkalibrierung fixiert werden. Die einflussreichen Parameter werden kalibriert und in dem in Abschnitt 2.2.6 eingeführten Vektor der  $N_\eta \leq N_{\text{Sobol}}$  Modellparameter  $\boldsymbol{\theta}_\eta$  zusammengefasst.

Von Relevanz sind hierbei vor allem Methoden zur globalen Sensitivitätsanalyse, bei denen der gesamte Bereich der Parameter untersucht wird [80]. Diese können weiter in auf Regression, Varianz oder Screening basierende Methoden kategorisiert werden [76]. In dieser Arbeit wird die Sensitivitätsanalyse mithilfe der *SOBOL-Indices* durchgeführt. Die Methode gehört zu den gängigsten Varianz-basierten Methoden und ist auch unter ANOVA (ANALYSIS OF VARIANCES) bekannt.

Die Grundidee hierbei ist es, ein Modell  $\eta$  als Expansion in Summanden zunehmender Dimension darzustellen. Die Gesamtvarianz des Modells wird dabei durch die Summe der Varianzen der Summanden beschrieben

$$\eta_{\text{HIFI}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_{\text{Sobol}}) \Big|_{\mathbf{x}=\text{const.}} = f_0 + \sum_{i=1}^{N_{\text{Sobol}}} f_i(\theta_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq N_{\text{Sobol}}} f_{ij}(\theta_i, \theta_j) + \dots, \quad (2.20)$$

wobei  $f_0$  eine Konstante und  $f_i$  und  $f_{ij}$  Funktionen sind und  $\theta_i, \theta_j$  mit  $1, \dots, i, j, \dots, N_{\text{Sobol}}$  die  $N_{\text{Sobol}}$  in der Sensitivitätsanalyse betrachteten Parameter  $\boldsymbol{\theta}_{\text{Sobol}} = (\theta_1, \dots, \theta_{N_{\text{Sobol}}})$  des Modells darstellen [57, 76]. Der deterministische Input  $\mathbf{x}$  wird für die Sensitivitätsanalyse auf einen konstanten Input fixiert. Unter der Annahme gleichverteilter und unabhängiger Parameter  $p(\theta_1) = \mathcal{U}(a_1, b_1), \dots, p(\theta_{N_{\text{Sobol}}}) = \mathcal{U}(a_{N_{\text{Sobol}}}, b_{N_{\text{Sobol}}})$  können die totalen und partiellen Varianzen bis zur zweiten Ordnung ausgedrückt werden durch

$$D = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_{N_{\text{Sobol}}}}^{b_{N_{\text{Sobol}}}} f^2(\boldsymbol{\theta}_{\text{Sobol}}) d\boldsymbol{\theta}_{\text{Sobol}} - f_0^2, \quad (2.21a)$$

$$D_i = \int_{a_i}^{b_i} f_i^2(\theta_i) d\theta_i, \quad (2.21b)$$

$$D_{i,j} = \int_{a_i}^{b_i} \int_{a_j}^{b_j} f_{i,j}^2(\theta_i, \theta_j) d\theta_i d\theta_j. \quad (2.21c)$$

Die Annahme anderer Verteilungen für die Parameter ist ebenso möglich, jedoch liegt das A-Priori Wissen über die Parameter zumeist nur in Form von Intervallen vor und wird daher mit einer Gleichverteilung beschrieben. Die *SOBOL-Indices* erster Ordnung sowie die *Total-SOBOL-Indices* können auf Basis dessen ausgedrückt werden durch

$$S_i = \frac{D_i}{D} \quad S_{i,j} = \frac{D_{i,j}}{D} \quad S_{T,i} = S_i + \sum_{j=1}^{N_{\text{Sobol}}} S_{i,j}. \quad (2.22)$$

Die *SOBOL-Indices* erster Ordnung  $S_i$  spiegeln den Einfluss einzelner Parameter auf den Modellausgang wieder. Die *SOBOL-Indices* zweiter Ordnung  $S_{i,j}$  quantifizieren den Einfluss der Interaktion von zweier Parameter auf den Modellausgang. Der Gesamteffekt eines Parameters auf den Modellausgang wird durch die *Total-SOBOL-Indices*  $S_{T,i}$  beschrieben.

Für die Bestimmung der *SOBOL-Indices* stehen verschiedene MONTE CARLO-basierte Schätzer zur Verfügung. In dieser Arbeit wird der in der MATLAB® Toolbox UQLAB imple-

---

mentierte Schätzer von JANNON verwendet [48, 57]. Bei der Schätzung der *Total-SOBOL-Indices* auf Basis von  $N$  Samples benötigt dieser  $N \cdot (N_{\text{Sobol}} + 2)$  Modellauswertungen, die parallel berechnet werden können. In der Literatur existieren mittlerweile Ansätze, um die Anzahl der Modellauswertungen durch Verwendung eines PCE-basierten [54, 79] oder GP-basierten [54, 58] Ersatzmodells zu reduzieren, worauf hier jedoch nicht weiter eingegangen wird.

## 2.2.8 Quantifizierung der Unsicherheit in der Strukturdynamik

Das Anwendungsgebiet von MCMC-Verfahren als dominante Methode zur Quantifizierung der Parameterunsicherheit erstreckte sich bis 1990 in erster Linie auf die Chemie und die Physik [16]. Nachdem die Methode in der Forschergemeinschaft unter Statistikern ab 1990 bekannter wurde, hat sich das Anwendungsfeld auch auf andere Forschungsgebiete wie der Signalverarbeitung und der Strukturdynamik erweitert [16]. Die Anwendung von MCMC-Verfahren beschränkt sich bisher jedoch auch in der Strukturdynamik bisher überwiegend auf wenig rechenintensive Anwendungen.

Am Beispiel eines Zwei-Freiheitsgrade-Modells eines Gebäudes mit zwei Stockwerken verwendet BECK [13] eine MCMC-Variante, um Parameterbereiche mit hoher Wahrscheinlichkeit in der A-posteriori-Verteilung (2.13) zu bestimmen. WORDEN [83] illustriert am Beispiel eines eindimensionalen Duffing Oszillators und eines hysteretischen Systems des Bouc-Wen-Typs die Vorteile und Leistungsfähigkeit einer statistischen Modellkalibrierung mit dem METROPOLIS-HASTINGS-Algorithmus, der jedoch bereits bei diesen einfachen Ein-Freiheitsgrad-Modellen zu signifikanten Rechenzeiten führt. MUTO [61] führt eine BAYES'sche Modellkalibrierung mittels Transitional MCMC (TMCMC) durch, um die Parameter für hysteretische eindimensionale Gebäudemodelle zu kalibrieren. ANGELIKOPOULOS [8] erweiterte den TMCMC-Algorithmus auf den Multi-Fidelity-Kontext, indem er ein im Verlauf der Kalibrierung adaptiv-lernendes GP-basiertes Ersatzmodell kalibriert. Die Methode demonstriert er an einem Brückenmodell mit 562 Tsd. Freiheitsgraden. GREEN [38] verwendet den METROPOLIS-Algorithmus, um die Parameter verschiedener nichtlinearer Reibungsmodelle eines Ein-Freiheitsgrad-Systems zu kalibrieren. In [36] präsentiert GREEN eine weniger rechenintensive Version des *Simulated Annealing*-Algorithmus, mit dem die Parameter eines Duffing-Oszillators kalibriert werden. GOLLER [33] führt eine statistische Modellkalibrierung mittels TMCMC an größeren Modellen durch. Betrachtet werden hierbei unterschiedliche Modelle eines gewinkelten Kragbalkens, das 2247 Freiheitsgrade umfasst.

YUEN und BECK [85] präsentieren eine im Zeitbereich basierte BAYES'sche Methode zum Update der Modalparameter eines linearen, strukturdynamischen Systems. Die

---

Methode, die ohne MCMC-Sampling auskommt, basiert auf der sequentiellen Maximierung einer analytischen Approximation der A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  (2.13) für die Modalparameter des linearen Systems. AU und YUEN [10, 86] beschreiben Verfahren zur Identifikation im Frequenzbereich mittels einer BAYES'schen Fast-Fourier-Transformation Ansatzes. Die genannten Ansätze sind jedoch nur auf den speziellen Fall von linearen Systemen in der Strukturodynamik anwendbar.

ABS1 [7] beschreibt im Kontext der statistischen Modellkalibrierung eine Multi-Fidelity-Methode, bei der erst ein Low-Fidelity-Modell und anschließend ein High-Fidelity-Modell eines strukturdynamischen Systems kalibriert wird. Als Low-Fidelity-Modell wird ein Ersatzmodell des High-Fidelity-Modells verwendet. Die aus der statistischen Modellkalibrierung mit dem Low-Fidelity-Modell resultierende A-posteriori-Verteilung der Parameter  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  dienen als A-priori-Verteilung  $p_0(\boldsymbol{\theta})$  für die Kalibrierung des High-Fidelity-Modells. Somit soll bewirkt werden, dass der Parameterraum des High-Fidelity-Modells effizienter gesampelt wird. Dieser Ansatz macht zwar die Erkundung des Parameterraums effizienter, allerdings ist die damit verbundene Anwendung von konventionellen MCMC-Algorithmen für rechenintensive Modelle, deren Rechenzeiten im Minuten- bis Stundenbereich liegen, immer noch nicht praktikabel.

*Likelihood-Free-Methoden* sind auf Probleme mit analytisch nicht bestimmbar oder zu rechenintensiven Likelihood-Funktionen zugeschnitten. Bei der sog. *Approximate BAYESIAN Computation* wird die Likelihood-Funktion durch ein weniger rechenintensives Diskrepanzmaß ersetzt [27]. Eine so generierte A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  (2.13) entspricht in der Regel nicht der wirklichen A-posteriori-Verteilung, was die Interpretation der Ergebnisse erschwert und eine sorgfältige Wahl des Diskrepanzmaßes notwendig macht.

Zusammenfassend zeigt sich, dass der Stand der Forschung zur Quantifizierung von Unsicherheit in der Strukturodynamik Potential zur Entwicklung von Methoden offenbart, die auch für komplexe und damit entsprechende rechenintensive strukturdynamische Systeme geeignet sind:

- Die Mehrzahl der verfügbaren MCMC-Algorithmen ist nur für wenig rechenintensive Modelle einsetzbar; komplexe strukturdynamische Modelle können damit nicht effizient statistisch kalibriert werden.
- Viele Ansätze sind anwendungsspezifisch und auf spezielle Problemklassen beschränkt; z. B. können die Ansätze von YUEN [85, 86] und AU [10] nur auf lineare strukturdynamische Systeme angewendet werden.
- *Approximate BAYESIAN Computation* sowie der Ansatz von HIGDON [43] kalibrieren nicht das eigentliche Modell, sodass die so erhaltene A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  (2.13) verzerrt sein kann.

- 
- Die Modellunsicherheit wird bei der statistischen Modellkalibrierung unzureichend berücksichtigt, sodass auch hier die A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  (2.13) verzerrt sein kann, siehe Abschnitt 2.2.6.

Eine geeignete Methode soll demnach das eigentliche Modell und kein Ersatzmodell kalibrieren, effizient genug zur Kalibrierung komplexer und damit entsprechend rechenintensiver Modelle sein und die Modellunsicherheit ausreichend berücksichtigen. Würde die Modellunsicherheit bei der statistischen Modellkalibrierung vernachlässigt, so würden nicht nur physikalische Parameter ihre Bedeutung verlieren und zu Abstimmungsparametern degenerieren, sondern auch die Vorhersagegenauigkeit des Modells herabgesetzt, siehe Abschnitt 2.2.6. Dies bildet die Motivation für die in Kapitel 3 vorgestellte Methode zur effizienten statistischen Quantifizierung von Parameter- und Modellunsicherheit.

## 2.3 Ersatzmodelle

Neben den im vorherigen Abschnitt beschriebenen MCMC-Verfahren werden auch für Sensitivitätsanalysen und Optimierungen Tausende von Modellauswertungen benötigt. Um die Rechenkosten dafür zu senken, können weniger rechenintensive Ersatzmodelle des eigentlich betrachteten Modells verwendet werden. Eine beliebte Klasse von Ersatzmodellen sind datengetriebene Modelle. Diese werden auf Basis eines Trainingsdatensatzes aufgebaut, der aus Ein- und Ausgangsdaten des abzubildenden, als *Black Box* angenommenen Modells besteht [76].

Im Kontext des in Abschnitt 2.2.4 beschriebenen 2SDAMCMC-Algorithmus, kommt in dieser Arbeit als Low-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  mit einem GP und einer PCE eine Kombination aus zwei datengetriebenen Ersatzmodellen zum Einsatz, siehe Abschnitt 3.2. Im Folgenden werden in Abschnitt 2.3.1 die Grundlagen zu GP und in Abschnitt 2.3.2 Möglichkeiten zur Adaption beschrieben. In Abschnitt 2.3.3 folgt eine kurze Einführung zu PCE.

### 2.3.1 Gaussprozesse

Ziel dieses Abschnitts ist eine prägnante Einführung in die Modellierung mit GP. Ein GP ist eine Verallgemeinerung der GAUSS'schen Wahrscheinlichkeitsverteilung im Funktionsraum, da sie eine Verteilung über Funktionen beschreibt [65]. GP werden in dieser Arbeit einerseits zur Modellierung der Diskrepanzfunktion  $\delta(\mathbf{x}_m)$  verwendet, andererseits als Low-Fidelity-Modell im Rahmen des 2SDAMCMC-Algorithmus. Als nichtparametrische

probabilistische Modelle bringen GP die Flexibilität mit sich, Modelle auf Basis von nahezu beliebig vielen Daten zu generieren [65]. Als probabilistische Ersatzmodelle unterscheiden sich GP maßgeblich von deterministischen Ersatzmodellen, da die bei GP auch Aussagen über die Unsicherheit der Modellvorhersage möglich sind. Für eine ausführlichere Einführung in die Theorie der GP sei auf das Buch [65] von RASMUSSEN verwiesen.

Eine anschauliche Erklärung zu GP findet sich in [65]: Man stelle sich eine Funktion  $f$  als einen unendlich langen Funktionsvektor

$$\mathbf{f} = [f(\mathbf{x}_1), \dots, f(\mathbf{x}_N)] \quad (2.23)$$

vor, bei dem jeder Eintrag einen Funktionswert  $f(\mathbf{x})$  von einem Input  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$  darstellt. Dann beschreibt ein GP eine multivariate Normalverteilung über eine beliebige endliche Anzahl dieser Vektoreinträge. Schreibt man eine Anzahl der Inputs  $\mathbf{x}$  in die Inputs-Matrix  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N]$ , so kann der entsprechende Funktionsvektor  $\mathbf{f}$  als multivariate Normalverteilung dargestellt werden

$$\mathbf{f} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{\text{GP}}, \mathbf{X}, \mathbf{X})), \quad \text{bzw.} \quad f(\mathbf{x}) \sim \mathcal{GP}(\mu, c), \quad (2.24)$$

wobei  $\mu$  die Erwartungswertfunktion,  $\boldsymbol{\mu} = (\mu(\mathbf{x}_1), \dots, \mu(\mathbf{x}_N))^\top$  der Vektor der Auswertungen der Erwartungswertfunktion für die in der Inputs-Matrix  $\mathbf{X}$  enthaltenen Inputs und  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{\text{GP}}, \mathbf{X}, \mathbf{X}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  die mit einer Kovarianzfunktion  $c$  aus den Inputs  $[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N]$  und den sog. Hyperparametern<sup>1</sup>  $\boldsymbol{\theta}_{\text{GP}}$  aufgebaute Kovarianzmatrix ist, siehe Abschnitt 2.1.1.

Modellvorhersagen auf Basis des GP lassen sich durch Konditionieren des GP (2.24) auf einen Trainingsdatensatz  $(\mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{f}_{\text{train}})$  treffen, siehe Abbildung 2.5. Der Erwartungswert  $\mu_{\text{pred}}$  und die Varianz  $\sigma_{\text{pred}}^2$  des Funktionswertes  $f$  an einem Punkt  $\mathbf{x}_{\text{pred}}$  ergibt sich

<sup>1</sup>Die Parameter der Kovarianzfunktion  $c$  werden als Hyperparameter bezeichnet, um den nichtparametrischen Charakter von GP zu betonen [65].

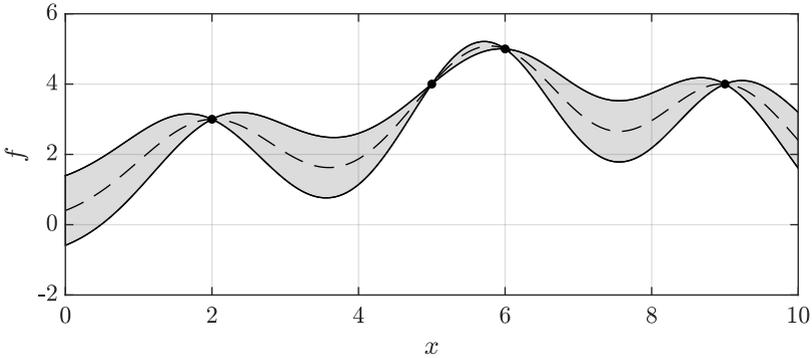


Abbildung 2.5: Vorhersage mithilfe eines GP auf Basis des Trainingsdatensatzes  $(\mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{f}_{\text{train}})$  (●): Erwartungswert  $\mu_{\text{pred}}$  (—) und 95%-Konfidenzintervall der Modellvorhersage  $\mu_{\text{pred}} \pm 1,96\sigma_{\text{pred}}$  (■)

zu [71]

$$\mu_{\text{pred}} = \mu(\mathbf{x}_{\text{pred}}) + \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_{\text{GP}}, \mathbf{x}_{\text{pred}}, \mathbf{X}_{\text{train}}) \left( \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{\text{GP}}, \mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{X}_{\text{train}}) \right)^{-1} (\mathbf{f}_{\text{train}} - \boldsymbol{\mu}_{\text{train}}) \quad (2.25a)$$

$$\sigma_{\text{pred}}^2 = \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_{\text{GP}}, \mathbf{x}_{\text{pred}}, \mathbf{x}_{\text{pred}}) - \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_{\text{GP}}, \mathbf{x}_{\text{pred}}, \mathbf{X}_{\text{train}}) \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{\text{GP}}, \mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{X}_{\text{train}})^{-1} \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_{\text{GP}}, \mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{x}_{\text{pred}}) + \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\mu}_{\text{train}}^\top \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{\text{GP}}, \mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{X}_{\text{train}})^{-1} \boldsymbol{\mu}_{\text{train}} \boldsymbol{\tau} \quad (2.25b)$$

mit

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu}_{\text{train}}^\top \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{\text{GP}}, \mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{X}_{\text{train}})^{-1} \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_{\text{GP}}, \mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{x}_{\text{pred}}) - \mu(\mathbf{x}_{\text{pred}})$$

wobei sich  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_{\text{GP}}, \mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{x}_{\text{pred}})$ ,  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_{\text{GP}}, \mathbf{x}_{\text{pred}}, \mathbf{x}_{\text{pred}})$ ,  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{\text{GP}}, \mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{X}_{\text{train}})$  durch Auswertung der Kovarianzfunktion (2.26) für den Input  $\mathbf{x}_{\text{pred}}$  bzw. die in der Input-Matrix  $\mathbf{X}_{\text{train}}$  enthaltenen Inputs ergibt. Der Vektor  $\boldsymbol{\mu}_{\text{train}}$  resultiert aus der Auswertung der Erwartungswertfunktion für die in der Input-Matrix  $\mathbf{X}_{\text{train}}$  enthaltenen Inputs. Die Modellvorhersage eines GP an einem Punkt  $\mathbf{x}_{\text{pred}}$  ist normalverteilt mit dem Erwartungswert (2.25a) und der Varianz (2.25b).

Die Erwartungswertfunktion  $\mu$  modelliert den Erwartungswert des GP. Sie wird häufig zu null angenommen, kann aber bei Vorliegen von A-priori-Wissens oder zur besseren

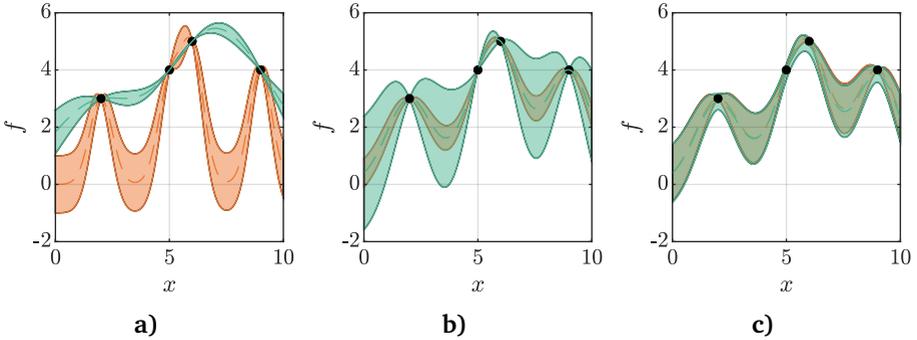


Abbildung 2.6: Einfluss der Hyperparameter  $\sigma_n = 1 \cdot 10^{-6}$ ,  $\sigma_f = 1$  und  $\gamma = 1$  auf das funktionale Verhalten des GP mit Trainingspunkten ( $\bullet$ ): (a) Variation des Rauigkeitsparameters mit  $\gamma = 4$  (—) und  $\gamma = 0,25$  (—) (b) Variation der Signalvarianz mit  $\sigma_f = 0,5$  (—) und  $\sigma_f = 2$  (—) (c) Variation der Rauschvarianz mit  $\sigma_n^2 = 1 \cdot 10^{-12}$  (—) und  $\sigma_n^2 = 0,04$  (—)

Interpretierbarkeit des Modells auch explizit modelliert werden, z. B. als Konstante, Gerade oder lineare Kombination von Basis-Funktionen [65]. Die Kovarianzfunktion setzt Paare von Inputs  $\mathbf{x}_r$  und  $\mathbf{x}_s$  zueinander in Beziehung. Es gibt mehrere mögliche Kovarianzfunktionen, von denen jede bestimmte Arten von Funktionsverhalten modellieren kann. In dieser Arbeit wird die quadratisch-exponentielle Kovarianzfunktion

$$c(\boldsymbol{\theta}_{\text{GP}}, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s) = \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_s)^\top \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_s)\right) + \sigma_n^2 \delta_{kl}, \quad (2.26)$$

verwendet, die in vielen Anwendungsbereichen gängig und für die Modellierung von glattem Funktionsverhalten geeignet ist [65]. Hierbei sind  $\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s$  Inputs und das Kronecker-Delta ist durch  $\delta_{r,s} = 1$  gegeben. Es hat den Wert 1, falls die gleichen Datenpunkte  $r = s$  mit der Kovarianzfunktion berechnet werden, ansonsten ist es 0. Der Einfluss der Hyperparameter der Kovarianzfunktion auf das funktionale Verhalten des GP ist in Abbildung 2.6 für den eindimensionalen Fall dargestellt und wird im Folgenden erläutert.

Eine mögliche Wahl für die Matrix  $\boldsymbol{\Gamma}$  ist  $\boldsymbol{\Gamma} = \text{diag}(\boldsymbol{\gamma})$  mit der  $D \times D$  Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$  und Rauigkeitsparameter  $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \dots, \gamma_D] > 0$  [65]. Sie bestimmen die Glattheit des GP. Je größer ein Rauigkeitsparameter, desto schneller können sich die Funktionswerte bei

Änderung der entsprechenden Komponente des Inputs  $\boldsymbol{x}$  ändern, siehe Abbildung 2.6a. Diese komponentenabhängige, anisotrope Verhalten des GP wird auch als *Automatic Relevance Determination* (ARD) bezeichnet [65]. Die Signalvarianz  $\sigma_f > 0$  (engl.: *signal variance*) bestimmt, wie stark die Funktionswerte  $f$  in (2.23) vom Erwartungswert des GP abweichen. Größere Werte für die Signalvarianz führen zu einem größeren Varianz der Funktionswerte, siehe Abbildung 2.6b. Das Messrauschen wird durch die Rauschvarianz  $\sigma_n^2$  (engl.: *noise variance*) in der Kovarianzfunktion (2.26) berücksichtigt. Es wird als additives, unabhängiges, identisch normalverteiltes Rauschen mit der Varianz  $\sigma_n^2$  angenommen [65]. In Abbildung 2.6c lässt sich erkennen, wie die Rauschvarianz  $\sigma_n^2$  die Unsicherheit der Trainingspunkte beschreibt. Die Rauschvarianz dient zugleich zur Regularisierung der Matrix  $\boldsymbol{C}$ . Durch die Angabe seiner Erwartungswertfunktion und seiner Kovarianzfunktion ist ein GP vollständig definiert [65].

Mit der Kovarianzfunktion (2.26) ergeben sich die Hyperparameter des GP zu  $\boldsymbol{\theta}_{\text{GP}} = [\sigma_n, \sigma_f, \gamma_1, \dots, \gamma_D]$ . Im Rahmen einer Optimierung können sie so bestimmt werden, dass der GP den Trainingsdatensatz  $(\boldsymbol{X}_{\text{train}}, \boldsymbol{f}_{\text{train}})$  möglichst adäquat repräsentiert.

### 2.3.2 Adaption von Gaussprozessen

Die Genauigkeit von GP hängt maßgeblich von der Datenbasis  $(\boldsymbol{X}_{\text{train}}, \boldsymbol{f}_{\text{train}})$  ab, auf die der GP zur Vorhersage (2.25) konditioniert wird. Durch geeignete Adaption kann die Vorhersagegenauigkeit erhöht werden, ohne dass die Datenbasis  $(\boldsymbol{X}_{\text{train}}, \boldsymbol{f}_{\text{train}})$  zu groß wird und die Inversion der Kovarianzmatrix  $\boldsymbol{C}$  in (2.25) zu rechenintensiv. Im Folgenden werden zwei Adaptionskriterien vorgestellt, mit denen ein GP-basiertes Ersatzmodell adaptiert werden kann.

#### Likelihood-basiertes Adaptionskriterium

CUI schlägt im Kontext des 2SDAMCMC-Algorithmus (siehe Abschnitt 2.2.4) ein Adaptionkriterium vor, das auf dem Vergleich der Low-Fidelity-Likelihood  $L_{\text{LoFi}}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta}^*)$  und der High-Fidelity-Likelihood  $L_{\text{HiFi}}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta}^*)$  für ein vorgeschlagenes Sample  $\boldsymbol{\theta}^*$  beruht [19]. Überschreitet der Betrag der Differenz einen vorgegebenen Schwellwert  $\epsilon_1$

$$|L_{\text{HiFi}}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta}^*) - L_{\text{LoFi}}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta}^*)| > \epsilon_1 \quad (2.27)$$

wird das Ersatzmodell adaptiert. Dieses Adaptionkriterium kann immer dann geprüft werden, wenn ein vorgeschlagenes Sample  $\boldsymbol{\theta}^*$  in der ersten Stufe des 2SDAMCMC-Algorithmus akzeptiert wurde und somit sowohl die Low-Fidelity-Likelihood  $L_{\text{LoFi}}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta}^*)$

als auch die High-Fidelity-Likelihood  $L_{\text{HiFi}}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*)$  berechnet wurde, siehe Abbildung 2.4. Der Parameter  $\epsilon_1$  kann so eingestellt werden, dass ein Ausgleich zwischen Approximationsqualität und Berechnungsgeschwindigkeit des GP-basierten Low-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  erreicht wird. Da der Rechenaufwand der Inversion der Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}$  in (2.25a) kubisch mit seiner Größe wächst, sollte die Größe der Datenbasis des GP-basierten Low-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  im Allgemeinen so klein wie möglich sein. CUI wählt  $\epsilon_1 = 1$  um diesen Ausgleich zu erzielen [19]. Der Vorteil dieses Adaptionkriteriums ist, dass es unabhängig von der Wahl des Ersatzmodells ist und neben dem von CUI verwendeten projektionsbasierten Ersatzmodell auch auf GP übertragen werden kann.

### Prädikationsunsicherheit-basiertes Adaptionkriterium

Ein weiteres Adaptionkriterium, das von ANGELIKOPOULOS in [8] vorgestellt wurde, macht sich den probabilistischen Charakter der Modellvorhersage von GP-basierten Ersatzmodellen zunutze. Diese Prädikationsunsicherheit drückt sich dadurch aus, dass Modellvorhersage an einem Punkt  $\mathbf{x}_{\text{pred}}$  normalverteilt sind mit dem Erwartungswert  $\mu_{\text{pred}}$  (2.25a) und der Varianz  $\sigma_{\text{pred}}^2$  (2.25b). Für den GP in Abbildung 2.5 mit quadratisch-exponentieller Kovarianzfunktion (2.26) gilt, dass die Vorhersage desto unsicherer und die Varianz  $\sigma_{\text{pred}}^2$  umso größer ist, je weiter der Punkt  $\mathbf{x}_{\text{pred}}$  von den Trainingspunkten, auf die der GP konditioniert wird, entfernt liegt. Auf Basis dieser Überlegung definiert ANGELIKOPOULOS ein Adaptionkriterium, nachdem das Ersatzmodell adaptiert wird, falls der sog. Variationskoeffizient (engl.: *coefficient of variation*) einen Schwellwert  $\epsilon_2$  überschreitet

$$\frac{\sigma_{\text{pred}}}{\mu_{\text{pred}}} > \epsilon_2. \quad (2.28)$$

Auf diese Weise dient die Unsicherheit der Modellvorhersage zur A-priori Abschätzung, ob das GP-basierte Ersatzmodell fähig ist eine genaue Modellvorhersage zu treffen. Der Schwellwert  $\epsilon_2$  bestimmt maßgeblich die Genauigkeitsanforderungen des Ersatzmodells. Ist er zu hoch, wird das Ersatzmodell nur unzureichend verbessert. Ist er zu niedrig, löst das Kriterium aus, obwohl das Ersatzmodell schon ausreichend genau ist. Anders als beim Likelihood-basierten Adaptionkriterium hat dies den Nebeneffekt, dass die benötigten Auswertungen des High-Fidelity-Modells zur Adaption des Low-Fidelity-Modell nicht schon durch Berechnung der High-Fidelity-Likelihood  $L_{\text{HiFi}}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*)$  bereit stehen, sondern erst noch generiert werden müssen. Andererseits können somit Einbrüche der Rate der im ersten Schritt akzeptierten Samples  $\alpha_{\text{HiFi}}$  vermieden werden.

---

### 2.3.3 Polynomial Chaos Expansion

*Polynomial Chaos Expansion*<sup>2</sup> (PCE) ist eine immer beliebtere Methode zur Generierung von Ersatzmodellen. In dieser Arbeit kommt ein PCE-basiertes Ersatzmodell als Erwartungswertfunktion des GP zum Einsatz, auf dem das Low-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  im Kontext des 2SDAMCMC Algorithmus basiert, siehe Abschnitt 3.2. Eine PCE kann als Analogie zu einer FOURIER-Serie verstanden werden, wobei sich bei der PCE das Ersatzmodell nicht aus einer gewichteten Summe von trigonometrischen Funktionen, sondern als gewichtete Summe von multivariaten, orthonormalen Polynomen  $\Psi_\alpha$  ergibt

$$f_{\text{PCE}}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \zeta_\alpha \Psi_\alpha(\mathbf{x}), \quad (2.29)$$

wobei  $\mathbf{x}$  die Inputs darstellen [81]. Dabei sind  $\zeta_\alpha$  die Gewichte bzw. Koeffizienten und  $\alpha$  ein Multiindex. Die Auswahl  $\mathcal{A}$  der in der Approximation verwendeten Polynome und die Koeffizienten werden auf Basis von Trainingsdaten  $(\mathbf{X}_{\text{train}}, \mathbf{f}_{\text{train}})$  mithilfe des *Least-Angle-Regression*-Algorithmus bestimmt. In dieser Arbeit erfolgt Training und Modellauswertung der PCE Ersatzmodelle mit der MATLAB® Toolbox UQLAB [57]. Für eine ausführliche Beschreibung der Grundlagen sei auf die Bücher von GHANEM [29] und XU [84] verwiesen.

## 2.4 Grundlagen zur Modellierung und Simulation flexibler Mehrkörpersysteme

MKS bestehen aus miteinander verbundenen Körpern, die einer Translation und Rotation unterliegen können. Die Körper können starr oder flexibel modelliert werden und durch verschiedene Arten von Gelenken und Verbindungselemente kinematisch eingeschränkt sein [75]. Mit den in den letzten 40 Jahren aus der Forschung hervorgegangenen Methoden und Programmen können Modelle mit hoher Vorhersagegenauigkeit des dynamischen Verhalten von MKS gebildet werden. Bei dem in dieser Arbeit untersuchtem Anwendungsbeispiel, dem in Kapitel 4 vorgestellten SFB-Demonstrator, handelt es sich um ein flexibles MKS, bestehend aus zwei flexiblen und einem starren Körper.

Das Ziel dieses Abschnittes ist es, die Grundlagen zur Modellierung flexibler Mehrkörpersysteme darzustellen, die zum Verständnis der Modellbildung des SFB-Demonstrators

---

<sup>2</sup>In der Literatur hat sich Begriff *Polynomial Chaos Expansion* etabliert, der von der Anwendung der zugrunde liegenden mathematischen Konzepte auf die physikalische Chaostheorie herrührt. Meist sind die mit der Methode behandelten Systeme jedoch nicht chaotisch [76].

als flexibles MKS in Kapitel 5 notwendig sind. Das Modell eines flexiblen MKS mit  $n_K = 1, \dots, N_K$  Körpern kann in Form des Differential-Algebraischen-Gleichungssystems (engl.: *differential-algebraic equation*, DAE) (siehe Abschnitt 2.4.6)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{M}^{(1)} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{M}^{(N_K)} \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{M}}} \ddot{\hat{\mathbf{q}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{K}^{(1)} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{K}^{(N_K)} \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{K}}} \dot{\hat{\mathbf{q}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{F}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{F}^{(N_K)} \end{pmatrix}}_{\hat{\mathbf{F}}} + \mathbf{B}^\top \boldsymbol{\lambda}$$

$$\mathbf{g}(\hat{\mathbf{q}}) = 0$$

dargestellt werden und ist das Ergebnis einer systematischen Abfolge von Modellierungsschritten, die im Folgenden gezeigt werden. Dazu wird zunächst in Abschnitt 2.4.1 der weit etablierte *Floating-Frame-of-Reference-Formalismus* vorgestellt, mit dem die Kinematik eines flexiblen MKS beschrieben wird [66, 75]. In Abschnitt 2.4.2 wird eine FE-Diskretisierung eines flexiblen Körpers angegeben, sodass in Abschnitt 2.4.3 die Massenmatrizen  $\mathbf{M}^{(n_K)}$  und Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}^{(n_K)}$  eines flexiblen Körpers hergeleitet werden können. Damit und mit den eingepprägten Kräften  $\mathbf{F}^{(n_K)}$  eines Körpers werden in Abschnitt 2.4.4 die ungebundenen Bewegungsgleichungen für starre und flexible Körper aufgestellt. In Abschnitt 2.4.5 werden die Massenmatrix  $\hat{\mathbf{M}}$ , Steifigkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{K}}$  und der Vektor der eingepprägten Kräfte  $\hat{\mathbf{F}}$  des flexiblen MKS hergeleitet, sowie der Vektor der Freiheitsgrade  $\hat{\mathbf{q}}$  des flexiblen MKS aufgestellt. In Abschnitt 2.4.6 werden die Zwangsbedingungen  $\mathbf{g}(\hat{\mathbf{q}})$  eingeführt, mit denen die Körper eines MKS mittels JACOBI-Matrix  $\mathbf{B}^\top$  und LAGRANGE-Multiplikatoren  $\boldsymbol{\lambda}$  gekoppelt werden. In Abschnitt 2.4.7 wird abschließend die Simulation mittels eines Zeitschrittverfahren beschrieben. Für eine umfassendere und allgemeinere Herleitung der Bewegungsgleichungen sei auf die Bücher von SHABANA [75] und RIXEN [28] verwiesen, auf denen die vereinfachte Darstellung in diesem Abschnitt basiert.

## 2.4.1 Floating-Frame-of-Reference-Formalismus

Sind die elastischen Verformungen der flexiblen Körper eines flexiblen MKS klein genug um mit Methoden der linearen Elastodynamik analysiert zu werden, können flexible MKS durch den sogenannten *Floating-Frame-of-Reference-Formalismus* modelliert werden [66, 75]. Dieser basiert auf der Definition eines Inertialsystems und der Zuordnung eines Referenzkoordinatensystems (engl.: *floating frame*) zu jedem Körper. Das Referenzkoordinatensystem bestimmt die Lage des Körpers in Bezug auf das Inertialsystem. Die elastische Verformung eines flexiblen Körpers wird in diesem Referenzkoordinaten-

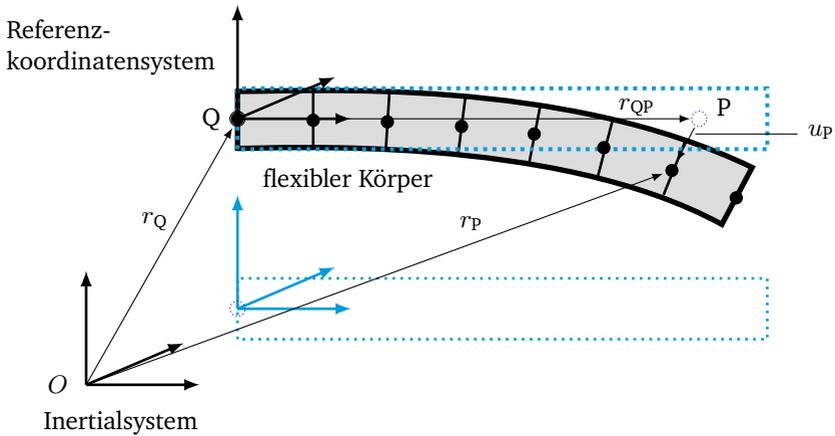


Abbildung 2.7: Veranschaulichung der Kinematik eines verformten, flexiblen Körpers [66]

system mithilfe der FEM modelliert. Analog sind die den finiten Elementen zugehörigen Elementkoordinatensysteme in den jeweiligen Referenzkoordinatensystemen definiert.

Zur eindeutigen Beschreibung der Konfiguration eines flexiblen MKS im Raum in Abhängigkeit von der Zeit wird nun die Kinematik für den Körper eines flexiblen MKS beschrieben. Abbildung 2.7 zeigt beispielhaft das Inertialsystem mit dem Ursprung  $O$  und das Referenzkoordinatensystem mit dem Ursprung am Körperreferenzpunkt  $Q$ , die zur Beschreibung der Position  $r_P$  des Punktes  $P$  eines flexiblen Körpers dienen. Das Referenzkoordinatensystem ist fest mit dem Körper am Körperreferenzpunkt  $Q$  verbunden und bewegt sich mit diesem mit, wenn er seine in Abbildung 2.7 in blau gekennzeichnete Ausgangslage verlässt. Es wird in dieser Arbeit davon ausgegangen, dass der Körper und entsprechend das Referenzkoordinatensystem keine Drehung verrichtet. Der Vektor  $r_Q$  drückt die Lage des Körperreferenzpunktes  $Q$  in Bezug auf das Inertialsystem aus. Der konstante Vektor  $r_{QP}$  beschreibt die Position des Punktes  $P$  im Referenzkoordinatensystem. Die Verschiebung des Punktes  $P$  aufgrund der elastischen Verformung wird mit  $u_P$  ausgedrückt. Der Vektor  $r_P$  kann somit geschrieben werden zu

$$r_P = r_Q + r_{QP} + u_P \quad (2.30)$$

Durch Ableiten nach der Zeit ergibt sich der Ausdruck für die Geschwindigkeit des Punktes P zu

$$\dot{\mathbf{r}}_P = \dot{\mathbf{r}}_Q + \dot{\mathbf{u}}_P. \quad (2.31)$$

## 2.4.2 Finite-Elemente-Diskretisierung

Die elastische Verformung  $\mathbf{u}_P$  des flexiblen Körpers wird mittels eines finiten Elemente Ansatzes approximiert. Dabei wird der Körper in  $N_{el}$  finite Elemente diskretisiert, siehe Abbildung 2.7. Jedes Element ist mit anderen Elementen über Knoten verbunden, deren Verschiebung und Rotation durch translatorische und rotatorische Knotenfreiheitsgrade beschrieben wird. Die Freiheitsgrade aller Knoten eines Elements wird im Vektor der Elementfreiheitsgrade  $\mathbf{q}_{uu,el}$  zusammengefasst. Mit Formfunktionen wird das Verschiebungsfeld innerhalb der finiten Elemente zwischen den Knoten interpoliert

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{H}\mathbf{q}_{uu,el}, \quad (2.32)$$

wobei  $\mathbf{H}$  die Matrix der Formfunktionen darstellt [66, 67]. Abschnitt 2.5 beschreibt die FE-Diskretisierung anhand eines Balkenelements im Detail.

Der Vektor der im Referenzkoordinatensystem dargestellten Freiheitsgrade aller  $N_{el}$  finiten Elemente eines flexiblen Körpers wird in dem Vektor  $\mathbf{q}_{uu}$  zusammengefasst. Die elementspezifische Bool'sche Matrix  $\mathbf{L}_{el}$  dient als Lokalisierungsoperator um die Freiheitsgrade  $\mathbf{q}_{uu,el}$  aus dem Vektor  $\mathbf{q}_{uu}$  für das Element zu extrahieren, auf dessen Gebiet der Punkt P liegt [67]. Mit einer elementspezifischen Drehmatrix  $\mathbf{T}_{el}$  werden die Elementfreiheitsgrade vom Referenzkoordinatensystem in das Elementkoordinatensystem gedreht. Das Verschiebungsfeld am Punkt P kann somit ausgedrückt werden durch

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{H}\mathbf{T}_{el}\mathbf{L}_{el}\mathbf{q}_{uu}. \quad (2.33)$$

## 2.4.3 Kinetische und potentielle Energie flexibler Körper

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen eines flexiblen Körpers mittels der LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art müssen zunächst Ausdrücke für die kinetische und potentielle Energie hergeleitet werden. Die kinetische Energie eines flexiblen Körpers lässt sich angeben mit

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{r}}_P \cdot \dot{\mathbf{r}}_P \rho_P dV \quad (2.34)$$

wobei  $V$  das Volumen des flexiblen Körpers und  $\dot{\mathbf{r}}_P$  die Geschwindigkeit des Punktes P (2.31) darstellt. Einsetzen des Ausdrucks (2.31) für die Geschwindigkeit eines Punktes P des flexiblen Körpers erlaubt die Aufspaltung der kinetischen Energie in folgende drei Komponenten

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} m_Q \dot{\mathbf{r}}_Q^\top \cdot \dot{\mathbf{r}}_Q \quad (2.35a)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{u}}_P^\top \cdot \dot{\mathbf{u}}_P \rho_P dV \quad (2.35b)$$

$$+ \dot{\mathbf{r}}_Q^\top \cdot \int_V \dot{\mathbf{u}}_P \rho_P dV. \quad (2.35c)$$

Die Komponenten (2.35a) und (2.35b) entsprechen jeweils der kinetische Energie aufgrund der Starrkörperbewegung und der elastischen Verformung, wobei  $m_Q$  der Masse des Körpers entspricht. Die Komponente (2.35c) beschreibt die Kopplung der kinetischen Energie zwischen Starrkörperbewegung und elastischer Verformung. Im Folgenden werden aus (2.35) die Massenmatrix  $\mathbf{M}_{uu}$ , die Kopplungsmatrix  $\mathbf{R}_{tr}$  sowie die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{uu}$  des flexiblen Körpers allgemein hergeleitet, um anschließend die Massenmatrix  $\mathbf{M}$  und Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  eines flexiblen Körpers aufzustellen.

## Massenmatrix

Zur Herleitung der Massenmatrix  $\mathbf{M}_{uu}$  wird zunächst in die zweite Komponente (2.35b) die zeitlichen Ableitung des Verschiebungsvektors (2.33) eingesetzt. Nach der Umformung der Integration über das Volumen des flexiblen Körpers in eine Summe der Integrale über das Volumen  $V_{el}$  der  $N_{el}$  im flexiblen Körper enthaltenen finiten Elemente ergibt sich der folgende Ausdruck

$$\frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{u}}_P^\top \dot{\mathbf{u}}_P dV = \sum_{i=0}^{N_{el}} \frac{1}{2} \int_{V_{el}} \dot{\mathbf{q}}_{uu}^\top \mathbf{L}_{el,i}^\top \mathbf{T}_{el,i}^\top \mathbf{H}^\top \mathbf{H} \mathbf{T}_{el,i} \mathbf{L}_{el,i} \rho_P \dot{\mathbf{q}}_{uu} dV \quad (2.36a)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_{uu}^\top \sum_{i=0}^{N_{el}} \underbrace{\mathbf{L}_{el,i}^\top \mathbf{T}_{el,i}^\top \int_{V_{el}} \mathbf{H}^\top \mathbf{H} \rho_P dV \mathbf{T}_{el,i} \mathbf{L}_{el,i}}_{\mathbf{M}_{uu,el}} \dot{\mathbf{q}}_{uu} \quad (2.36b)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{M}_{uu}}$$

wobei nach einer Umformung  $\mathbf{M}_{uu,el}$  die Elementmassenmatrix und  $\mathbf{M}_{uu}$  die Massenmatrix darstellen.

Die dritte Komponente (2.35c) kann durch Definition einer Kopplungsmatrix  $\mathbf{R}_{tr}$  so umgeformt werden, dass gilt

$$\dot{\mathbf{r}}_Q^\top \int_V \dot{\mathbf{u}}_p \rho_p dV = \dot{\mathbf{r}}_Q^\top \mathbf{R}_{tr}^\top \mathbf{M}_{uu} \dot{\mathbf{q}}_{uu}. \quad (2.37)$$

Die Kopplungsmatrix  $\mathbf{R}_{tr}$  enthält in ihren Spalten die translatorischen normierten Starrkörpermoden [66].

### Steifigkeitsmatrix

Die Steifigkeitsmatrix ergibt sich aus der Assemblierung der Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{uu,el}$ , die sich je nach gewähltem Elementtyp unterscheidet

$$\mathcal{V} = \mathbf{q}_{uu}^\top \underbrace{\sum_{i=0}^{N_{el}} \mathbf{L}_{el,i}^\top \mathbf{T}_{el,i}^\top \mathbf{K}_{uu,el} \mathbf{T}_{el,i} \mathbf{L}_{el,i}}_{\mathbf{K}_{uu}} \mathbf{q}_{uu}. \quad (2.38)$$

In Abschnitt 2.5 wird die Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{uu,el}$  eines Balkenelements hergeleitet.

### Matrixdarstellung

Insgesamt hat ein flexibler Körper drei Freiheitsgrade  $\mathbf{r}_Q$  zur Beschreibung seiner Position und  $N_{uu}$  Freiheitsgrade  $\mathbf{q}_{uu}$  zur Beschreibung der elastischen Verformung. Zumeist fällt der Körperreferenzpunkt Q mit einem Knoten aus der FE-Diskretisierung zusammen [66]. Daher müssen die Freiheitsgrade dieses Knotens aus dem Vektor der Freiheitsgrade  $\mathbf{q}_{uu}$  durch Multiplikation mit der Bool'schen Matrix  $\mathbf{L}_q$  entfernt werden, was einer Fixierung der Struktur auf den Körperreferenzpunkt Q entspricht [66]. Die  $N_{uu}$  Freiheitsgrade  $\mathbf{q}$  des flexiblen Körpers ergeben sich somit zu

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_Q \\ \mathbf{L}_q \mathbf{q}_{uu} \end{pmatrix} \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}_Q \\ \mathbf{L}_q \dot{\mathbf{q}}_{uu} \end{pmatrix} \quad \ddot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_Q \\ \mathbf{L}_q \ddot{\mathbf{q}}_{uu} \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Die Ausdrücke für die potentielle Energie (2.35a), (2.36b) und (2.37) sowie die kinetische Energie (2.38) können somit in folgende Matrixdarstellung überführt werden:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^\top \underbrace{\begin{pmatrix} m_Q \mathbf{I}_3 & \mathbf{R}_{tr}^\top M_{uu} \mathbf{L}_q^\top \\ \mathbf{L}_q M_{uu} \mathbf{R}_{tr} & \mathbf{L}_q M_{uu} \mathbf{L}_q^\top \end{pmatrix}}_M \dot{\mathbf{q}}, \quad \mathcal{V} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^\top \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_q \mathbf{K}_{uu} \mathbf{L}_q^\top \end{pmatrix}}_K \mathbf{q} \quad (2.40)$$

wobei  $M$  die Massenmatrix und  $K$  die Steifigkeitsmatrix eines flexiblen Körpers darstellt.

#### 2.4.4 Bewegungsgleichungen flexibler und starrer Körper

Einsetzen der Ausdrücke für die kinetische Energie und die potentielle Energie (2.40) in die LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{F} = 0 \quad (2.41)$$

liefert die Bewegungsgleichungen für den flexiblen Körper

$$M \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (2.42)$$

wobei sich der Vektor der eingprägten Kräfte

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{f}_{uu} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

aus der Resultierenden der externen Kräfte  $\mathbf{f}$  und den generalisierten Kräften  $\mathbf{f}_{uu}$  des FE-Modells zusammensetzt [66]. Die Kräfte im Vektor  $\mathbf{F}$  können nichtlineare Ausdrücke in Abhängigkeit von den Freiheitsgraden  $\mathbf{q}$  enthalten. Aufgrund der Annahme nichtrotierender Körper spielen Corioliskräfte und Zentrifugalkräfte keine Rolle. Die Bewegungsgleichungen für den flexiblen Körper (2.42) sind für den dämpfungsfreien Fall angegeben. Die Dämpfung des flexiblen Körpers kann wie z. B. bei der Modellierung des SFB-Demonstrators in Abschnitt 5.2.4 durch viskose Dämpfung berücksichtigt werden. Für den Fall eines starren Körpers entfallen die Freiheitsgrade aufgrund der FE-Diskretisierung und die Bewegungsgleichungen (2.42) vereinfacht sich zu

$$m_Q \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}, \quad (2.44)$$

wobei hier der Vektor der Freiheitsgrade  $\mathbf{q} = \mathbf{r}_Q$  (siehe Abbildung 2.7) der Position des Körperreferenzpunktes Q entspricht.

## 2.4.5 Bewegungsgleichungen eines Mehrkörpersystems

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen in den vorangegangenen Abschnitten haben sich auf einen Körper  $n_K$  eines flexiblen MKS bezogen und gelten analog für die  $N_K$  Körper eines flexiblen MKS. Zur Unterscheidung der Freiheitsgrade  $\mathbf{q}$ , Massenmatrix  $\mathbf{M}$ , Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  und eingepprägten Kräfte  $\mathbf{F}$  der einzelnen Körper werden diese mit dem hochgestellten Index  $(\cdot)^{\langle n_K \rangle}$  mit  $n_K = 1, \dots, N_K$  versehen. Der Vektor der Freiheitsgrade des flexiblen MKS  $\hat{\mathbf{q}}$  und dessen Ableitungen kann somit angegeben werden mit

$$\hat{\mathbf{q}} = (\mathbf{q}^{\langle 1 \rangle}, \dots, \mathbf{q}^{\langle N_K \rangle})^\top, \quad \ddot{\hat{\mathbf{q}}} = (\ddot{\mathbf{q}}^{\langle 1 \rangle}, \dots, \ddot{\mathbf{q}}^{\langle N_K \rangle})^\top. \quad (2.45)$$

Auf Basis dessen werden die ungebundenen Bewegungsgleichungen des flexiblen MKS in Blockform geschrieben

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\hat{\mathbf{q}}} + \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{F}} \quad (2.46)$$

wobei die Systemmatrizen  $\hat{\mathbf{M}}$ ,  $\hat{\mathbf{K}}$  und der Vektor  $\hat{\mathbf{F}}$  gegeben sind durch

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^{\langle 1 \rangle} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{M}^{\langle N_K \rangle} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^{\langle 1 \rangle} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{K}^{\langle N_K \rangle} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{\langle 1 \rangle} \\ \vdots \\ \mathbf{F}^{\langle N_K \rangle} \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

## 2.4.6 Kopplung der Körper durch Zwangsbedingungen

In den ungebundenen Bewegungsgleichungen des flexiblen MKS in Blockform (2.46) ist das dynamische Verhalten der einzelnen Körper noch unabhängig voneinander. Reale Mehrkörpersysteme sind z. B. über Gelenke oder Führungen miteinander verbunden, oder sind z. B. über ein Festlager mit der Umgebung verbunden. Mathematisch kann dies z. B. durch Zwangsbedingungen

$$g(\hat{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad [g(\mathbf{q}^{\langle r \rangle}, \mathbf{q}^{\langle s \rangle})]_{j' \text{te Zeile}} = 0. \quad (2.48)$$

ausgedrückt werden, wobei  $j = 1, \dots, J$  den Index der Zwangsbedingungen darstellt und die Indices  $1, \dots, r, s, \dots, N_K$  die Körper eines flexiblen MKS bezeichnen [66]. Als holonome Zwangsbedingung setzt (2.48) die Lagekoordinaten in Beziehung und ist zudem skleronom, da sie keine explizite Funktion der Zeit ist. Daneben gibt es weitere

Arten wie rheonome, also explizit zeitabhängige Zwangsbedingungen, die in dieser Arbeit nicht von Relevanz sind.

Die Zwangsbedingungen (2.48) verursachen Reaktionskräfte, deren Richtung durch die Jacobi-Matrix  $\mathbf{B}$  von  $\mathbf{g}(\hat{\mathbf{q}})$  bezüglich des Vektors der Freiheitsgrade des Mehrkörpersystems  $\hat{\mathbf{q}}$  gegeben ist. Die Amplitude der Reaktionskräfte werden durch den LAGRANGE-Multiplikator  $\boldsymbol{\lambda}$  beschrieben [66, 75]. Auf Basis von (2.46) können die gekoppelten Bewegungsgleichungen mit den Zwangsbedingungen als DAE geschrieben werden zu

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\hat{\mathbf{q}}} + \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{F}} + \mathbf{B}^\top \boldsymbol{\lambda} \quad (2.49a)$$

$$\mathbf{g}(\hat{\mathbf{q}}) = 0 \quad (2.49b)$$

mit der Jacobi-Matrix

$$\mathbf{B}^\top = \frac{\partial \mathbf{g}^\top}{\partial \hat{\mathbf{q}}}. \quad (2.50)$$

## 2.4.7 Simulation mittels Zeitschrittverfahren

Um das dynamische Verhalten eines MKS zu analysieren, wird häufig die transiente Lösung des DAE (2.49) betrachtet [28]. Diese erfolgt mit dem NEWMARK Verfahren, das in der Strukturdynamik der Standard zur zeitlichen Integration von Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung ist und die Basis für weitere Verfahren zur Lösung spezieller Problemstellung bildet. Ausgehend von einem Anfangszustand  $\hat{\mathbf{q}}_0$ ,  $\dot{\hat{\mathbf{q}}}_0$  basiert dieses Verfahren auf Berechnung der Vektoren der Freiheitsgrade  $\hat{\mathbf{q}}_{i+1}$  und deren zeitliche Ableitung  $\dot{\hat{\mathbf{q}}}_{i+1}$  für einen Zeitschritt  $i = 0, 1, 2, \dots$  mittels der auf einer abgeschnittenen Taylor Reihe basierenden Approximation

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_{i+1} = \dot{\hat{\mathbf{q}}}_i + (1 - \gamma_N)t_\Delta \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_n \quad (2.51a)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_{i+1} = \hat{\mathbf{q}}_i + t_\Delta \dot{\hat{\mathbf{q}}}_i + (0,5 - \beta_N)t_\Delta^2 \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_n, \quad (2.51b)$$

wobei  $t_\Delta$  die Zeitschrittweite und  $\gamma_N$  und  $\beta_N$  NEWMARK-Parameter sind. Die Stabilität und Genauigkeit des Verfahrens hängt vom gewählten Zeitschritt und den gewählten NEWMARK-Parametern ab [66, 67].

Das HILBER-HUGHES-TAYLOR- $\alpha$ -Verfahren (HHT- $\alpha$ -Verfahren) ist eine Anpassung des NEWMARK-Verfahrens an nichtlineare DAE [44]. Es hat besondere Stabilitätseigenschaften bei gleichzeitig hoher Genauigkeit. Ausgehend von der Prädikation (2.51) werden die Residuen des mittels des weiteren NEWMARK-Parameters  $\alpha_N$  gewichteten DAE (2.49) berechnet. Solange diese einen Grenzwert überschreiten, wird wiederholt die notwendige Korrektur der Lösung des Zeitschritts, den Freiheitsgraden  $\hat{\mathbf{q}}_{i+1}$ , ihrer Ableitung  $\dot{\hat{\mathbf{q}}}_{i+1}$

---

und den LAGRANGE-Multiplikatoren  $\lambda_{i+1}$ , ermittelt und das Residuum neu berechnet. Die Korrektur ergibt sich aus der iterativen Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems, das die Jacobi-Matrix des Residuums und die berechneten Residuen in Beziehung setzt. Wird der Newmark-Parameter  $\alpha_N$  in einem bestimmten Bereich und  $\beta_N$  und  $\gamma_N$  in einer bestimmten Beziehung zu  $\alpha_N$  gewählt, ist das Verfahren bedingungslos stabil und erreicht eine Genauigkeit zweiter Ordnung [44, 66]. Eine umfassende Beschreibung des Verfahrens findet sich in [66].

## 2.5 Grundlagen zur Balkenmodellierung mit finiten Elementen

Für die Modellierung der elastischen Verformung von flexiblen Körpern stehen eine Vielzahl an finiten Elementen zur Verfügung. Für die Modellierung des SFB-Demonstrators in dieser Arbeit werden Balkenelemente verwendet. Die Beschreibung des dynamischen Verhaltens erfolgt mithilfe der Elementmassen-  $M_{uu,el}$  und Elementsteifigkeitsmatrix  $K_{uu,el}$ . Im Vorgriff wurden diese schon in Abschnitt 2.4.3 allgemein definiert und zum Aufstellen der Bewegungsgleichungen eines flexiblen MKS verwendet; in diesem Abschnitt werden sie für ein Balkenelement hergeleitet. In Abschnitt 2.5.1 wird zunächst das Balkenelement definiert und die Matrix der Formfunktionen  $H$  zur Interpolation der Verschiebung zwischen den Knoten eines Balkenelements angegeben. Durch Einsetzen der Formfunktionen in die Ausdrücke für die potentielle und kinetische Energie ergeben sich in Abschnitt 2.5.2 die gesuchte Elementmassen-  $M_{uu,el}$  und Elementsteifigkeitsmatrix  $K_{uu,el}$ .

### 2.5.1 Beschreibung des Balkenelements

Abbildung 2.8 zeigt ein dreidimensionales Balkenelement der Länge  $\ell$ , der Dichte  $\rho$ , dem E-Modul  $E$  und dem Schubmodul  $G$ . Der Querschnitt ist kreisförmig mit dem Radius  $r$ , der Fläche  $A$ , dem Flächenträgheitsmoment  $I$  und dem Torsionsmoment  $I_{T0}$ . Die  $x$ -Achse des Elementkoordinatensystems liegt in der neutralen Faser des Balkens. Der Querschnitt und die Materialeigenschaften des Balkenelements sind konstant und es werden die Bernoulli Annahmen für Balkenbiegung angenommen, d. h. die elastische Verformungen sind klein, die Schubspannung wird vernachlässigt und es kommt zu keiner Verwölbung des Balkenquerschnitts. Das Balkenelement hat zwei Knoten mit jeweils sechs Freiheitsgraden. Die translatorischen Freiheitsgrade  $u, v, w$  beschreiben die Verschiebungen des Balkens in  $x, y$  und  $z$ -Richtung. Die rotatorischen Freiheitsgrade  $\psi_x,$

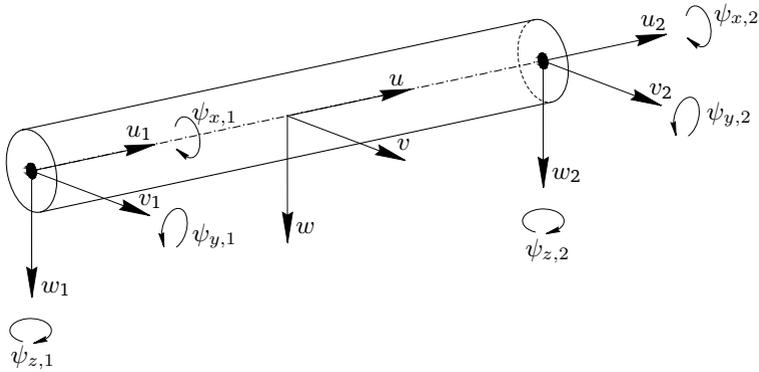


Abbildung 2.8: Dreidimensionales Balkenelement mit Knotenfreiheitsgraden [67]

$\psi_y$  und  $\psi_z$  geben die Verdrehung um die  $x$ ,  $y$  und  $z$ -Achse an, wobei die Verdrehungen  $\psi_y$  und  $\psi_z$  mit den Verschiebungen über die Beziehung

$$\psi_z = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \psi_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.52)$$

verknüpft sind. Der Vektor der Freiheitsgrade des Balkenelements lässt sich angeben zu

$$\mathbf{q}_{\text{uu,el}} = \left( u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \psi_{x,1} \quad \psi_{y,1} \quad \psi_{z,1} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \psi_{x,2} \quad \psi_{y,2} \quad \psi_{z,2} \right)^T. \quad (2.53)$$

Die Interpolation des Verschiebungsfeldes  $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$  zwischen den beiden Knoten des in Abbildung 2.8 abgebildeten Balkenelements erfolgt mittels Formfunktionen. Entsprechend des RAYLEIGH-RITZ-Verfahrens werden diese mit den Elementfreiheitsgraden multipliziert und ergeben so die gesuchte Verschiebung

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{H}(x) \mathbf{q}_{\text{uu,el}}. \quad (2.54)$$

Die Formfunktionen müssen einen stetigen Verlauf der Verschiebung und Verdrehung über das Balkenelement garantieren und sind damit zumindest linear. Anhand der getroffenen Annahmen (2.52) lässt sich erkennen, dass zudem die Ableitungen der Formfunktion für die Verschiebungen  $v$  und  $w$  stetig sein müssen. Die Matrix der

Formfunktionen ergibt sich somit zu [75]

$$\mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{x}{\ell}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\left(\frac{x}{\ell}\right) + 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{x}{\ell}\right)^3\right)\ell \\ 0 & \left(\left(\frac{x}{\ell}\right) - 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{x}{\ell}\right)^3\right)\ell & 0 \\ \left(\frac{x}{\ell}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{x}{\ell}\right)^3\right)\ell \\ 0 & \left(-\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{x}{\ell}\right)^3\right)\ell & 0 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

Die Ableitung des Verschiebungsfeldes nach der Ortskoordinate  $x$  und der Zeit  $t$  ergibt sich entsprechend durch

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \mathbf{H}(x)\dot{\mathbf{q}}_{\text{uu,el}}, \quad \mathbf{u}' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \mathbf{H}'(x)\mathbf{q}_{\text{uu,el}}, \quad \mathbf{u}'' = \begin{pmatrix} u'' \\ v'' \\ w'' \end{pmatrix} = \mathbf{H}''(x)\mathbf{q}_{\text{uu,el}}, \quad (2.56)$$

womit im folgenden Abschnitt die Massen- und Steifigkeitsmatrix hergeleitet werden.

## 2.5.2 Herleitung der Massen- und Steifigkeitsmatrix

Auf Basis der Bernoulli Annahmen kann die durch Verformung im Balken gespeicherte potentielle Energie angegeben werden zu

$$\mathcal{V}_{\text{el}} = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + EA \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + GI_{\text{To}} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (2.57)$$

Die ersten beiden Terme geben hierbei die potentielle Energie aufgrund von Biegung um die  $y$ - und  $z$ -Achse an, der dritte und vierte Term entsprechen der potentiellen Energie aufgrund von Dehnung und Torsion, wobei lineare verwölbungsfreie Torsion angenommen wird [67].

## Steifigkeitsmatrix

Die Approximation der Verschiebung (2.56) wird in den Ausdruck für die potentielle Energie (2.57) eingesetzt und die Integration über das Balkenelement durchgeführt. Daraus ergibt sich die folgende Matrixdarstellung

$$\mathcal{V}_{\text{el}} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_{\text{uu,el}}^\top \mathbf{K}_{\text{uu,el}} \mathbf{q}_{\text{uu,el}}, \quad (2.58)$$

wobei  $\mathbf{K}_{\text{uu,el}}$  die Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{\text{uu,el}} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_\perp}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_\perp}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{4EI}{\ell} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{2EI}{\ell} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_\perp}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_\perp}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{2EI}{\ell} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{4EI}{\ell} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{\ell} \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

darstellt.

## Massenmatrix

Die kinetische Energie des Balkenelements lässt sich durch

$$\mathcal{T}_{\text{el}} = \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx \quad (2.60)$$

ausdrücken, wobei die Energie aufgrund der Rotation um die  $x$ -Achse vernachlässigt wurden. Einsetzen der zeitlichen Ableitung der Approximation des Verschiebungsfeldes (2.56) und Integration über das Balkenelement liefert die Matrixdarstellung

$$\mathcal{T}_{\text{el}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_{\text{uu,el}}^\top \mathbf{M}_{\text{uu,el}} \dot{\mathbf{q}}_{\text{uu,el}}, \quad (2.61)$$

wobei  $\mathbf{M}_{\text{uu,el}}$  die Massenmatrix

$$\mathbf{M}_{\text{uu,el}} = \rho A \ell \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{35} & 0 & 0 & 0 & \frac{11\ell}{210} & 0 & \frac{9}{70} & 0 & 0 & 0 & -\frac{13\ell}{420} \\ 0 & 0 & \frac{13}{35} & 0 & -\frac{11\ell}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{70} & 0 & \frac{13\ell}{420} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r^2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{11\ell}{210} & 0 & \frac{\ell^2}{105} & 0 & 0 & 0 & -\frac{13\ell}{420} & 0 & -\frac{\ell^2}{140} & 0 \\ 0 & \frac{11\ell}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{\ell^2}{105} & 0 & \frac{13\ell}{420} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\ell^2}{140} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{70} & 0 & 0 & 0 & \frac{13\ell}{420} & 0 & \frac{13}{35} & 0 & 0 & 0 & -\frac{11\ell}{210} \\ 0 & 0 & \frac{9}{70} & 0 & -\frac{13\ell}{420} & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{35} & 0 & \frac{11\ell}{210} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r^2}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13\ell}{420} & 0 & -\frac{\ell^2}{140} & 0 & 0 & 0 & \frac{11\ell}{210} & 0 & \frac{\ell^2}{105} & 0 \\ 0 & -\frac{13\ell}{420} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\ell^2}{140} & 0 & -\frac{11\ell}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{\ell^2}{105} \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

darstellt. Anwenden der LAGRANGE-Gleichungen 2. Art auf die potentielle (2.58) und kinetische Energie (2.61) für die Elementfreiheitsgrade  $\mathbf{q}_{\text{uu,el}}$  ergibt die Gleichung zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens des Balkenelements

$$\mathbf{M}_{\text{uu,el}} \ddot{\mathbf{q}}_{\text{uu,el}} + \mathbf{K}_{\text{uu,el}} \mathbf{q}_{\text{uu,el}} = 0. \quad (2.63)$$

## Berechnung von Normalspannungen

Die im Bereich eines finiten Balkenelements auftretende Normalspannungen  $\sigma_N$  werden berechnet mit

$$\sigma_N = E \frac{\partial u}{\partial x} = E [\mathbf{H}]'_1 \cdot \text{Zeile } \mathbf{q}_{\text{uu,el}} = E (u_2 - u_1). \quad (2.64)$$

Der Zusammenhang wird zur Berechnung der Modellausgänge des in Kapitel 4 vorgestellten und in Kapitel 5 modellierten SFB-Demonstrators verwendet.



---

## 3 Methodischer Ansatz

---

In diesem Kapitel wird eine effiziente Methode zur statistischen Modellkalibrierung von rechenintensiven Modellen komplexer strukturdynamischer Systeme unter Berücksichtigung der Modellunsicherheit entwickelt. Der in Abschnitt 2.2.4 vorgestellte 2SDAMCMC-Algorithmus ist ein anwendungsneutraler, effizienter Ansatz zur statistischen Modellkalibrierung des eigentlichen Modells und bildet daher die Basis der Methode. In Abschnitt 3.1 wird dieser Ansatz nun um die Kalibrierung einer Diskrepanzfunktion erweitert, um Einfluss der Modellunsicherheit Rechnung zu tragen und so die physikalische Bedeutung der Parameter zu erhalten. In Abschnitt 3.2 wird das GP-basierte Low-Fidelity-Modell hergeleitet. Abschnitt 3.3 fasst die Komponenten der Methode in einem Algorithmus zusammen und Abschnitt 3.4 beschreibt die Parallelisierung der Methodik auf einer massiv-parallelen Architektur.

### 3.1 Ein Ansatz zur effizienten Quantifizierung von Parameter- und Modellunsicherheit

Als Ausgangspunkt dient der in Abschnitt 2.2.4 beschriebene und in [18, 23] vorgestellte 2SDAMCMC-Algorithmus, basierend auf der Kombination eines High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  und eines Low-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$ . Mit dieser Multi-Fidelity-Methode werden mit der Genauigkeit des High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  und der Schnelligkeit des Low-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  die jeweiligen Vorteile der Modelle ausgenutzt, mit dem Ziel einer effizienten statistischen Kalibrierung der Modellparameter  $\boldsymbol{\theta}_\eta$  des rechenintensiven High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$ . Der grundlegende Ablauf des 2SDAMCMC-Algorithmus ist in Abbildung 2.4 dargestellt.

Die Effizienz des Algorithmus beruht auf einer Filterung der vorgeschlagenen Samples  $\boldsymbol{\theta}^*$ . Dabei wird zunächst die auf dem Low-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  basierende Likelihood-Funktion  $L_{\text{LoFi}}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*)$  ausgewertet. Erst bei Annahme des Samples  $\boldsymbol{\theta}^*$  mit

der berechneten Akzeptanzwahrscheinlichkeit  $\alpha_{\text{LoFi}}$  wird die auf dem rechenintensiven High-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  basierende Likelihood-Funktion  $L_{\text{HiFi}}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*)$  und die Akzeptanzwahrscheinlichkeit  $\alpha_{\text{HiFi}}$  berechnet, mit der das Sample für die A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  (2.13) entweder angenommen oder verworfen wird, siehe Abschnitt 2.2.4.

Gängige Formulierungen für die Likelihood-Funktion  $L(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$  in (2.13) nehmen die Abweichung zwischen dem berechneten Modellausgang  $\eta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  und der Messung  $y$  als normalverteilten Messfehler  $\varepsilon$  an. Zur Berücksichtigung der Modellunsicherheit muss jedoch die Formulierung beider Likelihood-Funktionen  $L_{\text{HiFi}}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*)$  und  $L_{\text{LoFi}}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*)$  entsprechend des Ansatzes von KENNEDY und O'HAGAN (2.19) um die Kalibrierung einer Diskrepanzfunktion  $\delta(\mathbf{x}_m)$  erweitert werden, siehe Abschnitt 2.2.6. Die Diskrepanzfunktion  $\delta(\mathbf{x}_m)$  modelliert die Diskrepanz zwischen dem zu kalibrierenden High-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  und den Messungen  $\mathbf{y}$  des realen Systems mit dem Ziel einer unverzerrten A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  (2.13) der Modellparameter des High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$ . Der notwendige Zusammenhang für die Formulierung der auf dem rechenintensiven High-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  basierenden Likelihood-Funktion  $L_{\text{HiFi}}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*)$  und der auf dem Low-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  basierenden Likelihood-Funktion  $L_{\text{LoFi}}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*)$  wird somit folgendermaßen dargestellt

$$y_m = \eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta) + \delta(\mathbf{x}_m) + \varepsilon. \quad (3.1a)$$

$$y_m = \eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta) + E_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta) + \delta(\mathbf{x}_m) + \varepsilon \quad (3.1b)$$

wobei  $E_{\text{LoFi}}$  den Approximationsfehler des Low-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  bezeichnet.

Um die Diskrepanzfunktion  $\delta(\mathbf{x}_m)$  und den Messfehler  $\varepsilon_m$  in (2.19) zu beschreiben, wird ein GP mit quadratischer exponentieller Kovarianzfunktion angenommen. Die Erwartungswertfunktion wird zu Null angenommen. Da die Diskrepanzfunktion  $\delta(\mathbf{x}_m)$  phänomenologischer Natur ist, fehlt in der Regel das A-priori Wissen um eine komplexere Erwartungswertfunktion angeben zu können. Gleichung (2.19) wird nun für das Low-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  und das High-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  umgeschrieben, so dass die Diskrepanzfunktion  $\delta(\mathbf{x}_m)$  und der Messfehler  $\varepsilon_m$  wie folgt ausgedrückt werden können

$$\begin{aligned} y_m - \eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta) &= \delta(\mathbf{x}_m) + \varepsilon_m \sim \mathcal{GP}(0, c_\delta(\boldsymbol{\theta}_\delta, \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m'})) \\ y_m - (\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta) + E_{\text{LoFi}}) &= \delta(\mathbf{x}_m) + \varepsilon_m \sim \mathcal{GP}(0, c_\delta(\boldsymbol{\theta}_\delta, \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m'})), \end{aligned} \quad (3.2)$$

wobei die quadratisch-exponentielle Kovarianzfunktion durch

$$c_\delta(\boldsymbol{\theta}_\delta, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s) = \sigma_{f,\delta}^2 \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_s)^\top \boldsymbol{\Gamma}_\delta (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_s)\right) + \sigma_{n,\delta}^2 \delta_{r,s}, \quad r, s = 1, \dots, M \quad (3.3)$$

gegeben ist, siehe (2.26). Die Matrix  $\boldsymbol{\Gamma}_\delta$  wird zu  $\boldsymbol{\Gamma}_\delta = \text{diag}(\boldsymbol{\gamma}_\delta)$  gesetzt, siehe Abschnitt 2.3.1. Die Diskrepanz-Rauheitsparameter  $\boldsymbol{\gamma}_\delta = (\gamma_{\delta,1}, \dots, \gamma_{\delta,D})$ , die Diskrepanz-Rauschvarianz  $\sigma_{n,\delta}^2$  und die Diskrepanz-Signalvarianz  $\sigma_{f,\delta}^2$  bilden die Diskrepanz-Hyperparameter  $\boldsymbol{\theta}_\delta = (\sigma_{n,\delta}^2, \sigma_{f,\delta}^2, \boldsymbol{\gamma}_\delta)$ , die den zur Modellierung der Diskrepanzfunktion  $\delta(\mathbf{x}_m)$  verwendeten GP definieren.

Unter Vernachlässigung des Approximationsfehlers des Low-Fidelity-Modells  $E_{\text{LoFi}} \rightarrow 0$  kann (3.2) umgeschrieben werden zu

$$\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}_{\text{HiFi}}(\boldsymbol{\theta}_\eta) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_\delta, \mathbf{X}_m, \mathbf{X}_m)) \quad (3.4a)$$

$$\mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}_{\text{LoFi}}(\boldsymbol{\theta}_\eta) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_\delta, \mathbf{X}_m, \mathbf{X}_m)), \quad (3.4b)$$

wobei  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_M)^\top$  der Vektor der Messungen (2.19) ist und  $\boldsymbol{\eta}_{\text{HiFi}}(\boldsymbol{\theta}_\eta) = (\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\theta}_\eta), \dots, \eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_M, \boldsymbol{\theta}_\eta))^\top$  und  $\boldsymbol{\eta}_{\text{LoFi}}(\boldsymbol{\theta}_\eta) = (\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\theta}_\eta), \dots, \eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_M, \boldsymbol{\theta}_\eta))^\top$  die Vektoren der High-Fidelity-Modellauswertungen und Low-Fidelity-Modellauswertungen sind. Die Matrix  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_\delta, \mathbf{X}_m, \mathbf{X}_m)$  wird analog wie in Abschnitt 2.3.1 unter Verwendung der Kovarianzfunktion (3.3) durch paarweise Auswertung aller in der Matrix  $\mathbf{X}_m = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M)^\top$  zusammengefassten Inputs  $\mathbf{x}_m$  aufgebaut.

Die Likelihoods für das High-Fidelity-Modell  $L_{\text{HiFi}}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*)$  und für das Low-Fidelity-Modell  $L_{\text{LoFi}}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*)$ , die für den in Abschnitt 2.2.4 vorgestellten 2SDAMCMC-Algorithmus verwendet werden, können dann als bedingte Normalverteilung, siehe Abschnitt 2.1.1, angegeben werden

$$L_{\text{HiFi}}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*) = \mathcal{N}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\eta}_{\text{HiFi}}(\boldsymbol{\theta}_\eta^*), \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_\delta^*, \mathbf{X}_m, \mathbf{X}_m)) \quad (3.5a)$$

$$L_{\text{LoFi}}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*) = \mathcal{N}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\eta}_{\text{LoFi}}(\boldsymbol{\theta}_\eta^*), \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_\delta^*, \mathbf{X}_m, \mathbf{X}_m)) \quad (3.5b)$$

wobei das vorgeschlagene Sample durch  $\boldsymbol{\theta}^* = (\boldsymbol{\theta}_\eta^*, \boldsymbol{\theta}_\delta^*)$  gegeben ist. Je ähnlicher die Likelihoods für das High-Fidelity-Modell  $L_{\text{HiFi}}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*)$  und für das Low-Fidelity-Modell  $L_{\text{LoFi}}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*)$ , desto effizienter ist das Sampling durch den 2SDAMCMC-Algorithmus, der in Abschnitt 2.2.4 vorgestellt und in Abbildung 2.4 dargestellt ist. Dies erfordert eine gute Approximation des High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  durch das Low-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  und damit einen kleinen Approximationsfehler des Low-Fidelity-Modells  $E_{\text{LoFi}}$ . Hierzu wird das Low-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  fortlaufend adaptiert, siehe Abschnitt 3.2.4.

Für den Fall, dass mehrere unterschiedliche Modellausgänge gleichzeitig kalibriert werden, müssen die Ausdrücke für die Likelihood (3.5) entsprechend erweitert werden. Bei  $N_y$  Modellausgängen  $\eta_{\text{HiFi},1}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta), \dots, \eta_{\text{HiFi},N_y}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  ergeben sich entsprechend  $N_y$  Vektoren  $\boldsymbol{\eta}_{\text{HiFi},1}(\boldsymbol{\theta}_\eta), \dots, \boldsymbol{\eta}_{\text{HiFi},N_y}(\boldsymbol{\theta}_\eta)$  und  $N_y$  Vektoren  $\boldsymbol{\eta}_{\text{LoFi},1}(\boldsymbol{\theta}_\eta), \dots, \boldsymbol{\eta}_{\text{LoFi},N_y}(\boldsymbol{\theta}_\eta)$  mit den entsprechenden High-Fidelity-Modellauswertungen und den entsprechenden Low-Fidelity-Modellauswertungen, sowie  $N_y$  Vektoren mit den entsprechenden Messungen  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{N_y}$ . Die Likelihood (3.5) erweitert sich somit zu

$$L_{\text{HiFi}}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{N_y} | \boldsymbol{\theta}^*) = \prod_{n_y=1}^{N_y} \mathcal{N}(\mathbf{y}_{n_y} | \boldsymbol{\eta}_{\text{HiFi},n_y}(\boldsymbol{\theta}_\eta^*), \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{\delta,n_y}^*, \mathbf{X}_m, \mathbf{X}_m)) \quad (3.6a)$$

$$L_{\text{LoFi}}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{N_y} | \boldsymbol{\theta}^*) = \prod_{n_y=1}^{N_y} \mathcal{N}(\mathbf{y}_{n_y} | \boldsymbol{\eta}_{\text{LoFi},n_y}(\boldsymbol{\theta}_\eta^*), \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{\delta,n_y}^*, \mathbf{X}_m, \mathbf{X}_m)), \quad (3.6b)$$

wobei für jeden Ausgang eine eigene Diskrepanzfunktion  $\delta_{n_y}(\mathbf{x}_m)$  mit eigenem Satz an Diskrepanz-Hyperparameter  $\boldsymbol{\theta}_{\delta,n_y}$  definiert wird und sich das vorgeschlagene Sample erweitert zu  $\boldsymbol{\theta}^* = (\boldsymbol{\theta}_\eta^*, \boldsymbol{\theta}_{\delta,1}^*, \dots, \boldsymbol{\theta}_{\delta,N_y}^*)$ .

## 3.2 Adaptives Gaussprozess-basiertes Low-Fidelity-Modell

Das Low-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  basiert auf dem Erwartungswert eines GP als adaptives Ersatzmodell des High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$ . Entsprechend zu (2.25a) kann es angegeben werden mit

$$\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta) = \mathbb{E}(\mathcal{GP}(\mu_{\text{PCE}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta), c_{\text{LoFi}}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi}}, (\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta), (\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)')), \quad (3.7)$$

wobei (3.7) das Ersatzmodell für einen Ausgang des High-Fidelity-Modells darstellt. Werden mehrere Ausgänge gleichzeitig kalibriert, so muss für jeden der  $N_y$  Modellausgänge des High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi},1}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta), \dots, \eta_{\text{HiFi},N_y}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  ein eigenes Ersatzmodell  $\eta_{\text{LoFi},1}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta), \dots, \eta_{\text{LoFi},N_y}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  hergeleitet werden.

Eine Anforderung an das Low-Fidelity-Modell (3.7) ist ein möglichst geringer Approximationsfehler  $E_{\text{LoFi}}$ . Wenn der Approximationsfehler des Low-Fidelity-Modells  $E_{\text{LoFi}}$  zu groß ist, kann dieser nicht mehr vernachlässigt werden und wird durch die Diskrepanzfunktion  $\delta(\mathbf{x}_m)$  in (3.1) des High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  kompensiert. Allerdings werden dadurch im zweiten Schritt des 2SDAMCMC-Algorithmus (siehe

---

Abschnitt 2.2.4) mehr Samples verworfen, was es zu vermeiden gilt. Die Verwendung eines möglichst genauen Low-Fidelity-Modells ist daher wichtig für eine effiziente Kalibrierung der Diskrepanzfunktion  $\delta(\mathbf{x}_m)$  und stellt eine Motivation für die Adaption des Low-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  dar. In diesem Abschnitt wird ein adaptives GP-basiertes Low-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  vorgestellt, das den Approximationsfehler des Low-Fidelity-Modells  $E_{\text{LoFi}}$  im Verlauf der statistischen Modellkalibrierung reduziert.

Im Folgenden wird der Aufbau des Low-Fidelity-Modells (3.7) näher erläutert. Zunächst wird die Erwartungswertfunktion  $\mu_{\text{PCE}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  und die Kovarianzfunktion in Abschnitt 3.2.1 erklärt. In Abschnitt 3.2.2 wird das Training des Low-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  und in Abschnitt 3.2.3 die Berechnung der Modellausgänge präsentiert. Auf die Adaption des Low-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  wird in Abschnitt 3.2.4 eingegangen.

### 3.2.1 Erwartungswertfunktion und Kovarianzfunktion

Als Erwartungswertfunktion  $\mu_{\text{PCE}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  des GP (3.7) wird in dieser Arbeit ein PCE-basiertes Ersatzmodell des High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  generiert. Die Verwendung eines PCE-basierten Ersatzmodells als Erwartungswertfunktion eines GP geht auf SCHÖBI zurück, der mit der Kombination beider Methoden die jeweiligen Vorteile der guten globalen Approximation der PCE mit der guten lokalen Approximation des GP verknüpft [74]. Im Gegensatz zur reinen Verwendung eines PCE-basierten Ersatzmodell bietet die Kombination mit einem GP den Vorteil, dass das Ersatzmodell im Nachhinein unkompliziert mit dem in Abschnitt 3.2.4 beschriebenen Algorithmus adaptiert werden kann. Das Training des PCE-basierten Ersatzmodells wird in Abschnitt 3.2.2 thematisiert.

Als Kovarianzfunktion des GP (3.7) wird die quadratisch-exponentielle Kovarianzfunktion (2.26) zur Modellierung von glattem Funktionsverhaltens verwendet. Eine andere Wahl der Kovarianzfunktion kann durch Vorwissen über das funktionale Verhalten des High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  motiviert werden. Da es das Ziel ist, das High-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  an den gemessenen Inputs  $\mathbf{x}_m$  mit der Dimensionalität  $D$  und Modellparametern  $\boldsymbol{\theta}_\eta$  mit Modellparameterdimensionalität  $N_\eta$  zu approximieren, wird ebenso die Kovarianzfunktion sowohl für die Inputs  $\mathbf{x}_m$  und die Modellparameter  $\boldsymbol{\theta}_\eta$  ausgewertet. Der Einfachheit halber werden im Folgenden die Inputs  $\mathbf{x}_m$  und Modellparameter  $\boldsymbol{\theta}_\eta$  als Paare  $(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  zusammengefasst und als

GP-Inputs bezeichnet. Die Kovarianzfunktion kann also geschrieben werden zu

$$c_{\text{LoFi}}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi}}, (\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta), (\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)') = \sigma_{\text{f,LoFi}}^2 \exp\left(-\frac{1}{2}((\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta) - (\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)')^\top \boldsymbol{\Gamma}_{\text{LoFi}}((\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta) - (\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)')\right) \quad (3.8)$$

wobei  $(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  und  $(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)'$  Paare von GP-Inputs sind. Die Parameter der Kovarianzfunktion sind im Vektor der Low-Fidelity-Hyperparameter  $\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi}} = (\sigma_{\text{f,LoFi}}^2, \boldsymbol{\gamma}_{\text{LoFi}})$  zusammengefasst. Sie umfassen die Low-Fidelity-Signalvarianz  $\sigma_{\text{f,LoFi}}^2$  und die  $N_\eta + D$  Low-Fidelity-Rauhigkeitsparameter  $\boldsymbol{\gamma}_{\text{LoFi}} = (\gamma_{\text{LoFi},1}, \dots, \gamma_{\text{LoFi},(N_\eta+D)})$  die in der Matrix  $\boldsymbol{\Gamma}_{\text{LoFi}} = \text{diag}(\boldsymbol{\gamma}_{\text{LoFi}})$  enthalten sind, siehe Abschnitt 2.3.1.

### 3.2.2 Training

In diesem Abschnitt wird zunächst ein initialer Low-Fidelity-Trainingsdatensatz  $\mathcal{Y}_{\eta,\text{init}}$  bestimmt, der zum einen zum Training der PCE-basierte Erwartungswertfunktion  $\mu_{\text{PCE}}$  verwendet wird und zum anderen zur Bestimmung der Low-Fidelity-Hyperparameter  $\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi}}$  benötigt wird.

Um eine gute Annäherung an das High-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  durch das Low-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  zu erreichen, muss der initiale Low-Fidelity-Trainingsdatensatz  $\mathcal{Y}_{\eta,\text{init}}$  sowohl die Inputs  $\mathcal{X}_m = \{\mathbf{x}_m | m = 1, \dots, M\}$  als auch genügend Samples der A-priori-Verteilung  $p_0(\boldsymbol{\theta}_\eta)$  der Modellparameter enthalten. Nur so wird ein ausreichend dichter Trainingsdatensatz generiert, der möglichst genaue Auswertungen des Low-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  für neue Modellparameterwerte  $\boldsymbol{\theta}_\eta$  ermöglicht, die nicht im initialen Low-Fidelity-Trainingsdatensatz enthalten sind. Da zur Berechnung der Likelihoods  $L_{\text{LoFi}}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*)$  und  $L_{\text{HiFi}}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*)$ , siehe (3.5), das Low Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  und das High-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  nur für die Inputs  $\mathbf{x}_m$  ausgewertet werden, muss der Trainingsdatensatz ebenso nur die Inputs  $\mathbf{x}_m$  umfassen. Daher wird der initiale Low-Fidelity-Trainingsdatensatz  $\mathcal{Y}_{\eta,\text{init}}$  durch Auswertung des High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  für das kartesische Produkt aus der Menge der Inputs  $\mathcal{X}_m$  und einer Anzahl von  $Q$  Samples aus der A-priori-Verteilung  $\mathcal{D}_p = \{\boldsymbol{\theta}_{\eta,q} | q = 1, \dots, Q\}$  gewonnen, sodass  $\mathcal{D}_\eta = \mathcal{X}_m \times \mathcal{D}_p$  und  $\mathcal{Y}_{\eta,\text{init}} = \{((\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta), \eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)) | (\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta) \in \mathcal{D}_\eta\}$ . Die erforderliche Anzahl der A-priori-Samples  $Q$  ist problemspezifisch und hängt von der Anzahl der Modellparameter  $N_\eta$  und der Form der A-priori-Verteilung  $p_0(\boldsymbol{\theta}_\eta)$  ab. Für die folgenden Überlegungen wird der initiale Low-Fidelity-Trainingsdatensatz umgeschrieben zu  $\mathcal{Y}_{\eta,\text{init}} = (\mathbf{X}_{\eta,\text{init}}, \boldsymbol{\eta}_{\text{HiFi,init}})$ . Die Matrix  $\mathbf{X}_{\eta,\text{init}}$  ist dann eine  $(D + N_\eta) \times (Q \cdot M)$ -Matrix und enthält Paare aus Inputs  $\mathbf{x}_m$  und Samples  $\boldsymbol{\theta}_{\eta,q}$  der A-priori-Verteilung  $p_0(\boldsymbol{\theta}_\eta)$ .

---

Der Vektor  $\boldsymbol{\eta}_{\text{HiFi,init}}$  hat die Länge  $Q \cdot M$  und enthält die jeweiligen High-Fidelity-Modellauswertungen.

Unter Verwendung des initialen Low-Fidelity-Trainingsdatensatzes  $\mathcal{Y}_{\eta,\text{init}}$  wird so zunächst das PCE-basierte Ersatzmodell (2.29) des High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  generiert, das als Erwartungswertfunktion  $\mu_{\text{PCE}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  dient, siehe Abschnitt 2.3.3. Die Auswertungen der PCE-basierten Erwartungswertfunktion für die in der Matrix  $\mathbf{X}_{\eta,\text{init}}$  enthalten Eingänge  $(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_{\eta,q})$  des High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  werden in den Vektor  $\boldsymbol{\mu}_{\text{init}}$  mit der Länge  $Q \cdot M$  geschrieben. Anschließend werden die Low-Fidelity-Hyperparameter  $\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi}} = (\sigma_f^2, \gamma_{\text{LoFi}})$  optimiert. Die Optimierung erfolgt mit dem in der MATLAB® Toolbox UQLAB implementierten hybriden genetischen Algorithmus (HGA) [52].

Für den Fall, dass mehrere unterschiedliche Modellausgänge gleichzeitig kalibriert werden, wird für jeden der  $N_y$  Modellausgänge ein separates Ersatzmodell  $\eta_{\text{LoFi},n_y}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  mit einer eigenen PCE-basierten Erwartungswertfunktion  $\mu_{\text{PCE},n_y}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  generiert. Daher müssen auch  $N_y$  Low-Fidelity-Trainingsdatensätze  $\mathcal{Y}_{\eta,\text{init},n_y}$  generiert werden, die zum Training verwendet werden.

### 3.2.3 Berechnung von Modellauswertungen

Nachdem die optimalen Low-Fidelity-Hyperparameter  $\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi,opt}}$  berechnet wurden, wird das initiale Low-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi,init}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  bestimmt. Dazu wird der GP auf den initialen Low-Fidelity-Trainingsdatensatz  $\mathcal{Y}_{\eta,\text{init}} = (\mathbf{X}_{\eta,\text{init}}, \boldsymbol{\eta}_{\text{HiFi,init}})$  konditioniert und dessen Erwartungswert und Varianz an der Stelle neuer GP-Inputs  $(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta^*)$  berechnet, wobei  $\boldsymbol{\theta}_\eta^*$  die Modellparameter eines vorgeschlagenen Samples  $\boldsymbol{\theta}^*$  enthält, siehe Abschnitt 2.3.1:

$$\eta_{\text{LoFi,init}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta^*) = \mu_{\text{PCE}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}^*) + \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi,opt}}, (\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta^*), \mathbf{X}_{\eta,\text{init}}) \left( \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi,opt}}, \mathbf{X}_{\eta,\text{init}}, \mathbf{X}_{\eta,\text{init}}) + \sigma_{\text{n,LoFi}}^2 \mathbf{I} \right)^{-1} (\boldsymbol{\eta}_{\text{HiFi,init}} - \boldsymbol{\mu}_{\text{init}}). \quad (3.9a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{LoFi,init}}^2(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta^*) &= \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi,opt}}, (\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta^*), (\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta^*)) - \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi,opt}}, (\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta^*), \mathbf{X}_{\eta,\text{init}}) \\ &\quad \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi,opt}}, \mathbf{X}_{\eta,\text{init}}, \mathbf{X}_{\eta,\text{init}})^{-1} \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi,opt}}, \mathbf{X}_{\eta,\text{init}}, (\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta^*)) + \\ &\quad \tau \boldsymbol{\mu}_{\text{init}}^\top \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi,opt}}, \mathbf{X}_{\eta,\text{init}}, \mathbf{X}_{\eta,\text{init}})^{-1} \boldsymbol{\mu}_{\text{init}} \tau \\ &\text{mit} \\ \tau &= \boldsymbol{\mu}_{\text{init}}^\top \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi,opt}}, \mathbf{X}_{\eta,\text{init}}, \mathbf{X}_{\eta,\text{init}})^{-1} \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi,opt}}, \mathbf{X}_{\eta,\text{init}}, (\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta^*)) - \\ &\quad \mu_{\text{PCE}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}^*) \end{aligned} \quad (3.9b)$$

Dabei werden  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi,opt}}, (\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta^*))$ ,  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi,opt}}, (\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta^*), \mathbf{X}_{\eta,\text{init}})$  und  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi,opt}}, \mathbf{X}_{\eta,\text{init}}, \mathbf{X}_{\eta,\text{init}})$  unter Verwendung der Kovarianzfunktion (3.8) durch paarweise Auswertung der GP-Inputs  $(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta^*)$  bzw. der in der Matrix  $\mathbf{X}_{\eta,\text{init}}$  zusammengefassten GP-Inputs aufgebaut. Die Matrix  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi,opt}}, \mathbf{X}_{\eta,\text{init}}, \mathbf{X}_{\eta,\text{init}})$  wird analog gebildet. Die Matrix  $\mathbf{I}$  ist eine Einheitsmatrix geeigneter Dimension und verhindert Singularitätsprobleme aufgrund der Inversion der Matrix  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi,opt}}, \mathbf{X}_{\eta,\text{init}}, \mathbf{X}_{\eta,\text{init}})$ . Die Low-Fidelity-Rauschvarianz  $\sigma_{\text{n,LoFi}}^2$  dient hier nicht zur Darstellung von Messrauschen sondern lediglich als Regularisierungsparameter und wird auf  $\sigma_{\text{n,LoFi}}^2 = 1 \cdot 10^{-12}$  gesetzt.

### 3.2.4 Adaption

Mit dem Verlauf der durch den 2SDAMCMC-Algorithmus generierten Kette wächst die Anzahl an Auswertungen des High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  fortlaufend. Grundsätzlich könnten all diese Auswertungen als Trainingsdatensatz, auf den der GP (3.7) konditioniert wird, benutzt werden, was sich positiv auf den Vorhersagefehler  $E_{\text{LoFi}}$  des Low-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  in (3.1b) auswirken würde. Allerdings führt dies

bei sehr hohen Datenmengen auch zu einer entsprechend großen Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}$  in (3.9a), die für jede Auswertung des Low-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  berechnungsintensiv invertiert werden muss. Zum Ausgleich dieses Konflikts wird das Low-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  nur selektiv adaptiert, was im Folgenden erläutert wird.

Da der initiale Low-Fidelity-Trainingsdatensatz  $\mathcal{Y}_{\eta, \text{init}}$  durch Sampling der A-priori-Verteilung  $p_0(\boldsymbol{\theta}_\eta)$  gewonnen wird, sollte das initiale Low-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi}, \text{init}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  das High-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  in der Anfangsphase der Kette ausreichend gut approximieren. Je mehr die Kette nach Durchlaufen des *Burn-In* gegen die A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  konvergiert, desto besser sollte die Approximation des High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  durch das initiale Low-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi}, \text{init}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  werden, damit die Filterung der vorgeschlagenen Samples  $\boldsymbol{\theta}^*$  durch den 2SDAMCMC-Algorithmus möglichst effektiv ist. Daher wird eine Adaptionsstrategie verwendet, um dem initialen Low-Fidelity-Trainingsdatensatz  $\mathcal{Y}_{\eta, \text{init}} = (\mathbf{X}_{\eta, \text{init}}, \boldsymbol{\eta}_{\text{HiFi}, \text{init}})$  Datenpunkte hinzuzufügen, so dass ein angepasster Low-Fidelity-Trainingsdatensatz  $\mathcal{Y}_\eta = (\mathbf{X}_\eta, \boldsymbol{\eta}_{\text{HiFi}})$  entsteht. Mit (2.25) und dem angepassten Low-Fidelity-Trainingsdatensatz  $\mathcal{Y}_\eta$  kann das Low-Fidelity-Modell dann wie folgt ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} \eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta^*) &= \mu_{\text{PCE}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta^*) + \\ &\quad \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi}, \text{opt}}, (\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta^*), \mathbf{X}_\eta) \left( \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi}, \text{opt}}, \mathbf{X}_\eta, \mathbf{X}_\eta) + \sigma_{\text{n, LoFi}}^2 \mathbf{I} \right)^{-1} (\boldsymbol{\eta}_{\text{HiFi}} - \boldsymbol{\mu}) \end{aligned} \quad (3.10a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{LoFi}}^2(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta^*) &= \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi}, \text{opt}}, (\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta^*), (\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta^*)) - \\ &\quad \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi}, \text{opt}}, (\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta^*), \mathbf{X}_\eta) \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi}, \text{opt}}, \mathbf{X}_\eta, \mathbf{X}_\eta)^{-1} \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi}, \text{opt}}, \mathbf{X}_\eta, (\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta^*)) + \\ &\quad \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi}, \text{opt}}, \mathbf{X}_\eta, \mathbf{X}_\eta)^{-1} \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\tau} \\ &\quad \text{mit} \\ &\quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi}, \text{opt}}, \mathbf{X}_\eta, \mathbf{X}_\eta)^{-1} \mathbf{c}(\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi}, \text{opt}}, \mathbf{X}_\eta, (\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta^*)) - \\ &\quad \mu_{\text{PCE}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta^*), \end{aligned} \quad (3.10b)$$

wobei im Vektor  $\boldsymbol{\mu}$  die Auswertungen der PCE-basierten Erwartungswertfunktion  $\mu_{\text{PCE}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  für alle im adaptierten Low-Fidelity-Trainingsdatensätze enthaltenen

Inputs  $\mathbf{X}_\eta$  enthalten sind. Die Adaptionstrategie zielt darauf ab, den Approximationsfehler  $E_{\text{LoFi}}$  zwischen dem Low-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  und dem High-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  in relevanten Bereichen zu minimieren, d. h. bei Modellparameterwerten, bei denen die Kette konvergiert und das Low-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  häufig ausgewertet wird.

In dieser Arbeit kommen zwei Adaptionskriterien zum Einsatz. Zum einen wird das in Abschnitt 2.3.2 beschriebene Likelihood-basierte Kriterium angewandt [19]. Algorithmus 2 beschreibt die Adaption des vom Low-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  (3.10a) verwendeten Low-Fidelity-Trainingsdatensatzes  $\mathcal{Y}_\eta$ . Zu Beginn wird der in (3.10a) verwendete Datensatz auf  $\mathcal{Y}_\eta = \mathcal{Y}_{\eta, \text{init}}$  gesetzt, so dass (3.9a) bis zur ersten Adaption und danach (3.10a) gilt.

---

**Algorithmus 2** : Likelihood-basierte Adaption des Low-Fidelity-Trainingsdatensatzes  $\mathcal{Y}_\eta$

---

```

1: if  $|L_{\text{HiFi}}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*) - L_{\text{LoFi}}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*)| > \epsilon_1$  then
2:    $\mathcal{Y}_\eta = \{\mathcal{Y}_\eta, ((\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\theta}_\eta^*), \eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\theta}_\eta^*)), \dots, ((\mathbf{x}_M, \boldsymbol{\theta}_\eta^*), \eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_M, \boldsymbol{\theta}_\eta^*))\}$ 
3: end

```

---

Das zweite Adaptionskriterium basiert auf dem in Abschnitt 2.3.2 vorgestellten Prädikationsunsicherheit-basiertem Kriterium [8]. Der Schwellwert  $\epsilon_2$  kann z. B. empirisch bestimmt oder so eingestellt werden, dass die Modellvorhersage des Low-Fidelity-Modells eine bestimmte Unsicherheit nicht überschreiten darf. In dieser Arbeit werden zur Bestimmung von  $\epsilon_2$  ähnlich wie bei der Generierung des initialen Low-Fidelity-Trainingsdatensatzes  $\mathcal{Y}_{\eta, \text{init}}$  eine hohe Anzahl ( $> 1 \cdot 10^6$ ) an Test-Inputs  $(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  generiert. Für diese wird das Low-Fidelity-Modell ausgewertet, das Verhältnis  $\frac{\sigma_{\text{LoFi}}}{\mu_{\text{LoFi}}}$  (siehe (3.10)) bestimmt und mithilfe eines Kerndichteschätzers, siehe Abschnitt 2.1.1, eine Verteilung gebildet. Der Schwellwert  $\epsilon_2$  wird dann so eingestellt, dass das Verhältnis  $\frac{\sigma_{\text{LoFi}}}{\mu_{\text{LoFi}}}$  für 99% der Test-Inputs unter dem Schwellwert  $\epsilon_2$  liegt.

---

**Algorithmus 3** : Prädikationsunsicherheit-basierte Adaption des Low-Fidelity-Trainingsdatensatzes  $\mathcal{Y}_\eta$

---

```

1: if  $\sigma_{\text{LoFi}}/\sigma_{\text{LoFi}, \text{max}} > \epsilon_2$  then
2:    $\mathcal{Y}_\eta = \{\mathcal{Y}_\eta, ((\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\theta}_\eta^*), \eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\theta}_\eta^*)), \dots, ((\mathbf{x}_M, \boldsymbol{\theta}_\eta^*), \eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_M, \boldsymbol{\theta}_\eta^*))\}$ 
3: end

```

---

---

### 3.3 Kombiniertes Algorithmus

Der in [18] vorgestellt und in Abschnitt 2.2.4 präsentierte 2SDAMCMC-Algorithmus bildet die Basis für die hier vorgestellte Methode zur effizienten Quantifizierung von Parameter- und Modellunsicherheit. In Kombination mit dem in Abschnitt 2.2.2 präsentierten adaptiven METROPOLIS Algorithmus und dem in Abschnitt 3.2 präsentierten Ersatzmodell ergibt sich die in Algorithmus 4 dargestellte Methode.

Der 2SDAMCMC-Algorithmus sorgt für Berechnungseffizienz, indem er vorgeschlagene Samples  $\theta^*$  unter Verwendung eines Low-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \theta_\eta)$  in der ersten Stufe (rot hervorgehoben) und eines High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \theta_\eta)$  in der zweiten Stufe (blau hervorgehoben) filtert, siehe Abbildung 2.4. Die Likelihoods  $L_{\text{HiFi}}(\mathbf{y}|\theta^*)$  und  $L_{\text{LoFi}}(\mathbf{y}|\theta^*)$  (3.5), die auf dem Low-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \theta_\eta)$  und dem High-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_m, \theta_\eta)$  basieren und die Diskrepanzfunktion  $\delta(\mathbf{x}_m)$  zur Berücksichtigung der Modellunsicherheit enthalten, werden in den Zeilen 6 und 13 von Algorithmus 4 bestimmt. Die Anpassung der Vorschlags-Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}$ , wie in Abschnitt 2.2.2 gezeigt und in Algorithmus 1 implementiert, erhöht die statistische Effizienz der Methode, siehe Zeilen 10 und 21 von Algorithmus 4. Das GP-basierte adaptive Low-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \theta_\eta)$ , wie es in Abschnitt 3.2 vorgestellt wurde, wird in Zeile 2 initialisiert, und die Adaption erfolgt in Zeile 21 gemäß Algorithmus 2.

---

### Algorithmus 4 : Methode zur effizienten Quantifizierung der Parameter- und Modellunsicherheit

---

- 1: Setze Initialwert der Kalibrierung  $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$
- 2: Initialisierung des GP-basierten Low-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$ : Generierung des initialen Low-Fidelity-Trainingdatensatzes  $\mathcal{Y}_{\eta, \text{init}}$  durch Sampling der A-priori-Verteilung  $p_0(\boldsymbol{\theta}_\eta)$  und Bestimmung der optimalen Low-Fidelity-Hyperparameter  $\boldsymbol{\theta}_{\text{LoFi, opt}}$
- 3: Setzen der initialen Vorschlags-Kovarianzmatrix  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_0$
- 4: **for**  $n_S = 1, \dots, N_S$  **do**
- 5:     Generierung von Samples  $\boldsymbol{\theta}^*$  mit der Vorschlagsverteilung  $p(\boldsymbol{\theta}^* | \boldsymbol{\theta}^{(n_S)}) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}^{(n_S)}, \mathbf{C})$
- 6:     Berechnung der Akzeptanzwahrscheinlichkeit **Erste Stufe**

$$\alpha_{\text{LoFi}}(\boldsymbol{\theta}^{(n_S)}, \boldsymbol{\theta}^*) = \min \left( 1, \frac{L_{\text{LoFi}}(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}^*) p_0(\boldsymbol{\theta}^*)}{L_{\text{LoFi}}(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}^{(n_S-1)}) p_0(\boldsymbol{\theta}^{(n_S-1)})} \right)$$

- 7:     Bestimmung  $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$
- 8:     **if**  $u > \alpha_{\text{LoFi}}(\boldsymbol{\theta}^{(n_S)}, \boldsymbol{\theta}^*)$  **then**
- 9:          $\boldsymbol{\theta}^{(n_S)} = \boldsymbol{\theta}^{(n_S-1)}$
- 10:         Adaption der Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}$  der Vorschlagsverteilung ( $\rightarrow$  Algorithmus 1)
- 11:         **continue**
- 12:     **end**

- 13:     Berechnung der Akzeptanzwahrscheinlichkeit **Zweite Stufe**

$$\alpha_{\text{HiFi}}(\boldsymbol{\theta}^{(n_S)}, \boldsymbol{\theta}^*) = \min \left( 1, \frac{\alpha_{\text{LoFi}}(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\theta}^{(n_S)}) L_{\text{HiFi}}(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}^*) p_0(\boldsymbol{\theta}^*)}{\alpha_{\text{LoFi}}(\boldsymbol{\theta}^{(n_S)}, \boldsymbol{\theta}^*) L_{\text{HiFi}}(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}^{(n_S-1)}) p_0(\boldsymbol{\theta}^{(n_S-1)})} \right)$$

- 14:     Bestimme  $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$
  - 15:     **if**  $u > \alpha_{\text{HiFi}}(\boldsymbol{\theta}^{(n_S)}, \boldsymbol{\theta}^*)$  **then**
  - 16:          $\boldsymbol{\theta}^{(n_S)} = \boldsymbol{\theta}^{(n_S-1)}$ ;
  - 17:     **else**
  - 18:          $\boldsymbol{\theta}^{(n_S)} = \boldsymbol{\theta}^*$ ;
  - 19:     **end**
  - 20:     Adaption der Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}$  ( $\rightarrow$  Algorithmus 1)
  - 21:     Adaption des Low-Fidelity-Trainingdatensatzes  $\mathcal{Y}_\eta$  des GP-basierten Low-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{LoFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  ( $\rightarrow$  Algorithmus 2 und Algorithmus 3)
  - 22: **end for**
-

---

## 3.4 Skalierung auf massiv-paralleler Architektur

Paralleles Rechnen kann die Berechnung eines Problems enorm beschleunigen, indem Berechnungsaufgaben aufgeteilt und parallel berechnet werden. Die Effizienz von Algorithmus 4 lässt sich weiter steigern, indem die Berechnung auf einer massiv-parallelen Architektur, wie z. B. einem High-Performance Cluster, erfolgt<sup>1</sup>. Die statistische Modellkalibrierung mittels Algorithmus 4 bietet zwei Möglichkeiten der Parallelisierung, die im Folgenden gezeigt werden und in die in dieser Arbeit angewendet werden.

Die erste Möglichkeit der Parallelisierung besteht darin, mit Algorithmus 4 nicht nur eine Kette zu generieren, sondern  $k = 1, \dots, K$  Ketten, siehe Abbildung 3.1. Sobald eine Kette nach dem *Burn-In*, siehe Abschnitt 2.2.5, ihren stationären Zustand erreicht hat, werden Samples der A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  generiert. Mit mehreren parallelen Ketten wird die A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  dann schneller gesampelt. Zudem sind Samples unterschiedlicher Ketten weniger stark korreliert als Samples der gleichen Kette, was die Konvergenz beschleunigt [76]. Die parallelen Ketten können zudem an unterschiedlichen Initialwerten  $\boldsymbol{\theta}_0$  gestartet werden. Dies kann dabei helfen multimodale A-posteriori-Verteilungen  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  besser zu erfassen [16]. Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass bei der Generierung mehrerer paralleler Ketten mit Algorithmus 4 nur ein einziges adaptives GP-basiertes Low-Fidelity-Modell benötigt wird, das mit Algorithmus 2 adaptiert wird.

Allerdings muss bei mehreren Ketten auch der *Burn-In* jeder der Ketten verworfen werden. Bei einem festen Rechenbudget sinkt zudem mit der Anzahl an parallelen Ketten auch die Anzahl der Samples pro Kette, sodass die A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$  unter Umständen nur unvollständig gesampelt wird, da die Kette nicht den stationären Zustand erreicht. Bei mehreren parallelen Ketten sollte daher die Konvergenz der Ketten entsprechend Abschnitt 2.2.5 sichergestellt werden. In der Literatur herrscht bislang Uneinigkeit darüber, wie hoch der Vorteil der Parallelisierung wiegt [16]. In jedem Fall hat ein solche Parallelisierung den Vorteil, dass die Ergebnisse der statistischen Modellkalibrierung nach einer kürzeren Wartezeit vorliegen, als wenn nur eine Kette generiert würde.

Die zweite Möglichkeit der Parallelisierung besteht in der parallelen Auswertung der High-Fidelity-Likelihood  $L_{\text{HiFi}}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*)$  (3.5a). Zu deren Berechnung muss das High-Fidelity-Modell für das vorgeschlagene Sample  $\boldsymbol{\theta}^*$  und für alle  $M$  Inputs  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_M$  berechnet werden. Diese  $M$  Berechnungen des High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\theta}_\eta^*), \dots, \eta_{\text{HiFi}}(\mathbf{x}_M, \boldsymbol{\theta}_\eta^*)$  können parallelisiert werden. Abbildung 3.2 zeigt

---

<sup>1</sup>Die Berechnungen in dieser Arbeit wurden auf dem Lichtenberg Cluster der TU Darmstadt durchgeführt.

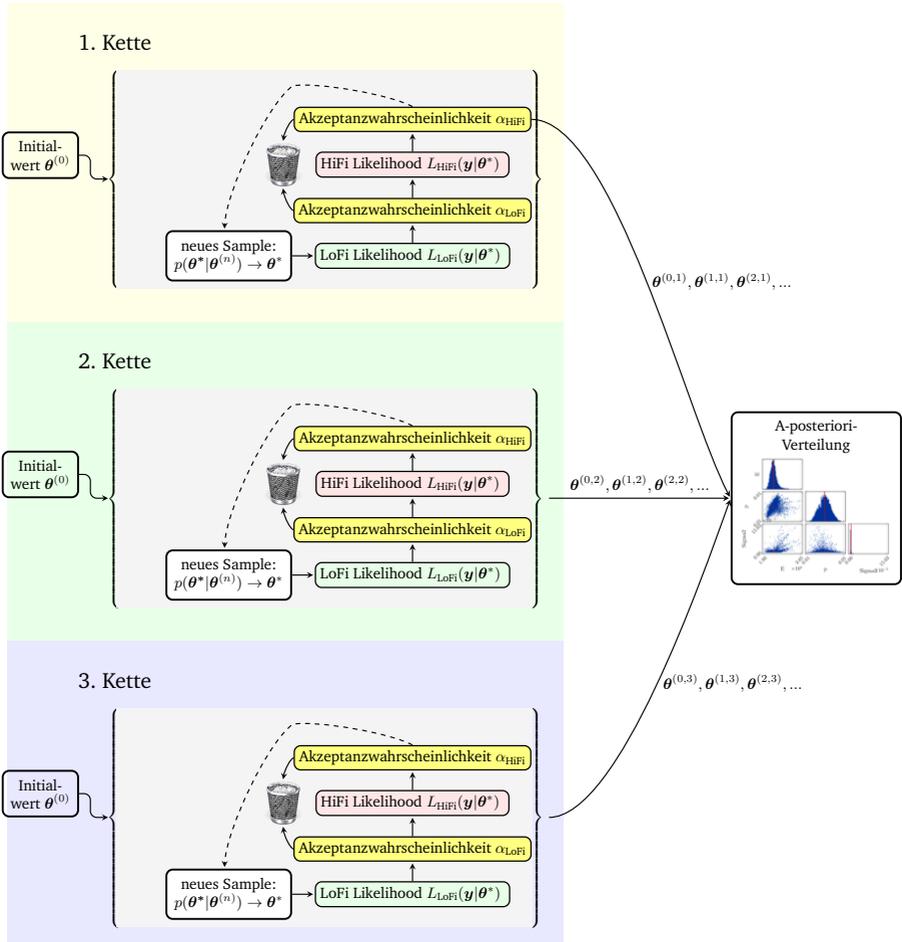


Abbildung 3.1: Statistische Modellkalibrierung mittels  $K = 3$  paralleler Ketten

---

die Umsetzung mit MATLAB®<sup>2</sup>. Die statistische Modellkalibrierung entsprechend Algorithmus 4 läuft auf einem sogenannten *Client*. Für jede Berechnung der High-Fidelity-Likelihood  $L_{\text{HiFi}}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*)$  werden die benötigten Modellberechnungen auf einen sogenannten *Parallel Pool* durchgeführt. Ein *Scheduler* verteilt die benötigten Berechnungen des High-Fidelity-Modells auf die *Matlab Worker*, die die Modellberechnung auf einem Rechenkern durchführen. Die Modellauswertungen werden an den *Client* zurückgeschickt und die High-Fidelity-Likelihood  $L_{\text{HiFi}}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*)$  berechnet. Da die Berechnung der High-Fidelity-Likelihood  $L_{\text{HiFi}}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}^*)$  den überwiegenden Teil der Rechenzeit in Anspruch nimmt, entspricht der potentielle Faktor der Beschleunigung in etwa der Anzahl der Messungen,  $M$ . Natürlich ist die reale Beschleunigung kleiner, da nur ein Teil von Algorithmus 4 parallelisiert wird und die Kommunikation zwischen *Client* und MATLAB® *Worker* zusätzliche Zeit in Anspruch nimmt.

---

<sup>2</sup>Da sowohl die Kalibrierung, als auch das High-Fidelity-Modell in MATLAB® implementiert wurden, wird die Parallelisierung anhand des von der MATLAB® Parallel Computing Toolbox zur Verfügung gestellten Frameworks veranschaulicht. Das Konzept ist jedoch auf andere Programmiersprachen und Programmierumgebungen übertragbar.

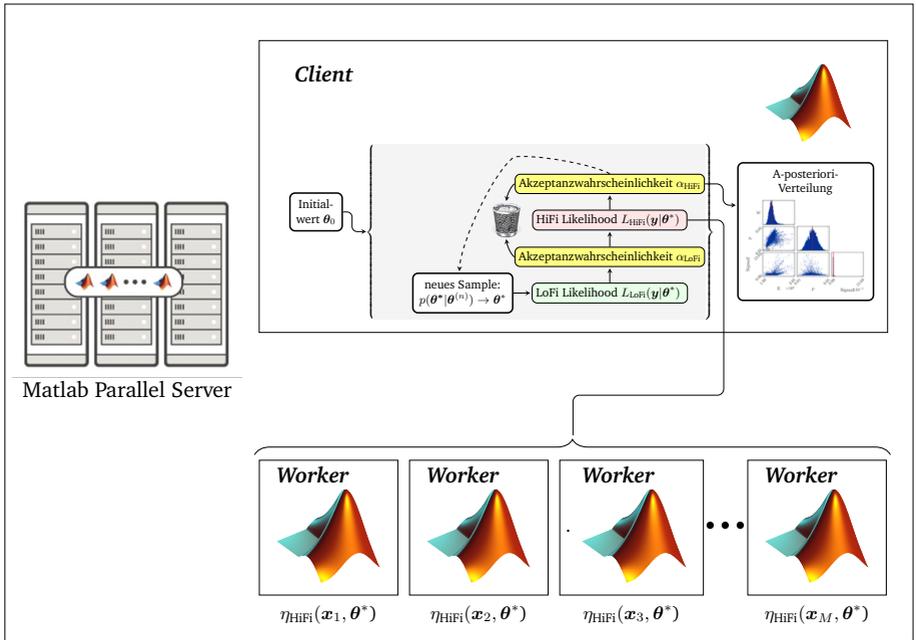


Abbildung 3.2: Parallele Auswertung der High-Fidelity-Likelihood (Bildquelle: <https://de.mathworks.com/products/matlab-parallel-server.html>)

---

## 4 Anwendungsbeispiel

---

In diesem Kapitel wird als Anwendungsbeispiel der SFB-Demonstrator vorgestellt, an dem die in Kapitel 3 vorgestellte Methode in Kapitel 6 erprobt wird. Nach der Motivation zur Konzipierung des SFB-Demonstrators in Abschnitt 4.1 folgt in Abschnitt 4.2 eine Systembeschreibung. Anschließend werden in Abschnitt 4.3 die experimentellen Tests des SFB-Demonstrators beschrieben und die Systemeingänge angegeben. In Abschnitt 4.4 werden die Messgrößen, der Messaufbau und die Systemausgänge präsentiert.

### 4.1 Hintergrund

Der SFB-Demonstrator ist im Rahmen der teilprojektübergreifenden Zusammenarbeit während der ersten und zweiten Förderperiode entstanden, in der sich die numerischen und experimentellen Untersuchungen auf lasttragende Systeme akademischen Charakters wie einem Dreibein [59, 64] bezogen [78]. Diese Arbeiten mündeten in die Konzipierung des SFB-Demonstrators, der den Teilprojekten des SFB eine realitätsnahe Plattform zur Erprobung von Methoden und Technologien zur Beherrschung von Unsicherheit bereitstellt. Das wissenschaftliche Ziel besteht in der Beherrschung von Unsicherheit am SFB-Demonstrator, sodass Sicherheitsbeiwerte zwischen Belastbarkeit und Belastung gegenüber herkömmlicher Bauweise ähnlicher lasttragender Strukturen minimiert, Überdimensionierung vermieden und trotzdem mindestens gleiche Belastungen ertragen werden können [78].

Flugzeugfahrwerke stehen modellhaft für den Konflikt zwischen der durch hohe Sicherheitsbeiwerte und Unkenntnis der Unsicherheit bedingten Überdimensionierung von Bauteilen und dem immer wichtiger werdenden Leichtbaugedanken [78]. Als sicherheitskritische, lasttragende Systeme müssen Flugzeugfahrwerke extreme Belastungen abfedern und gleichzeitig hohe Ansprüche an die Systemzuverlässigkeit erfüllen. Dies inspirierte die Entwicklung des SFB-Demonstrators mit ähnlichen Anforderungen wie die eines Prüfstandes für Flugzeugfahrwerke, jedoch ohne den Anspruch, mit dem

---

SFB-Demonstrator vorhandene industrielle und produktorientierte Prüfstände von kommerziellen Flugzeugfahrwerken sowie Flugzeugfahrwerke selbst zu ersetzen [73, 78]. Vielmehr sollen die am SFB-Demonstrator gewonnenen wissenschaftlichen Erkenntnisse zur Beherrschung von Unsicherheit in lasttragenden Systemen auf eine Vielzahl anderer Systeme übertragen werden können [73].

Zur Beherrschung der Unsicherheit sind im SFB 805 technologische und methodische Ansätze verfolgt worden. Zum einen wurden verschiedene semi-aktive und aktive Technologien entwickelt, die modular in den SFB-Demonstrator integriert und getestet werden können [26, 34, 72]. Die einem Flugzeugtragwerk nachempfundene Hauptkomponente wurde aus diesem Grund als Modulares Aktives Feder-Dämpfer-System (MAFDS) bezeichnet und unter Patent DE 10 2014 106 858.A1 patentiert [21]. In dieser Arbeit wird ein methodischer Ansatz zur Beherrschung der Unsicherheit verfolgt, um die Vorhersagegenauigkeit von Modellen lasttragender Strukturen durch Berücksichtigung deren Parameter- als auch Modellunsicherheit zu steigern.

## 4.2 Versuchsumgebung und MAFDS

Der SFB-Demonstrator dient zur experimentellen Erprobung des MAFDS. Das dynamische Verhalten wird mit Fallversuchen untersucht, bei denen das MAFDS impulsartige Belastungen erfährt. In Abbildung 4.1 ist ein Ausschnitt des SFB-Demonstrators mit Versuchsumgebung und MAFDS (Nr. 13) gezeigt. Die Komponenten des SFB-Demonstrators sind in Tabelle 4.1 aufgelistet. Die Versuchsumgebung besteht aus einer 3,3 Tonnen schweren Aufspannplatte (Nr. 9) und acht Luftfedern, die eine Schwingisolierung gegenüber dem Boden realisieren. Auf der Aufspannplatte ist ein Lastrahmen in Portalbauweise befestigt, der aus 16 Trägern besteht. Auf der Innenseite der vier vertikalen Träger ist jeweils eine Führungsschiene (Nr. 7) befestigt. Sowohl am Heberahmen (Nr. 12) als auch am Fallrahmen (FR) (Nr. 11) sind Parallelführungen (Nr. 6) zur dissipationsarmen vertikalen Bewegung an den Führungsschienen (Nr. 7) befestigt. Das MAFDS (Nr. 13) ist mit Festlagern (Nr. 10) am Fallrahmen gelagert, der wiederum über einen Auslösemechanismus mit dem Heberahmen (Nr. 12) gekoppelt ist. Durch einen Hebemechanismus kann die vertikale Position des Heberahmens und damit die Fallhöhe  $h$  des MAFDS variiert werden.

Die Komponenten des MAFDS umfassen ein oberes (OT) (Nr. 1) und ein unteres Tragwerk (UT) (Nr. 2). Beide Tragwerke sind momentenfrei mit einem Feder-Dämpfer-System (Nr. 4) verbunden. Gelenkmodule (Nr. 3) ermöglichen einerseits eine relative Verschiebung der Tragwerke in vertikaler  $z$ -Richtung und blockieren andererseits eine relative Verschiebung der Tragwerke in horizontaler  $x$ - und  $y$ -Richtung. Am unteren

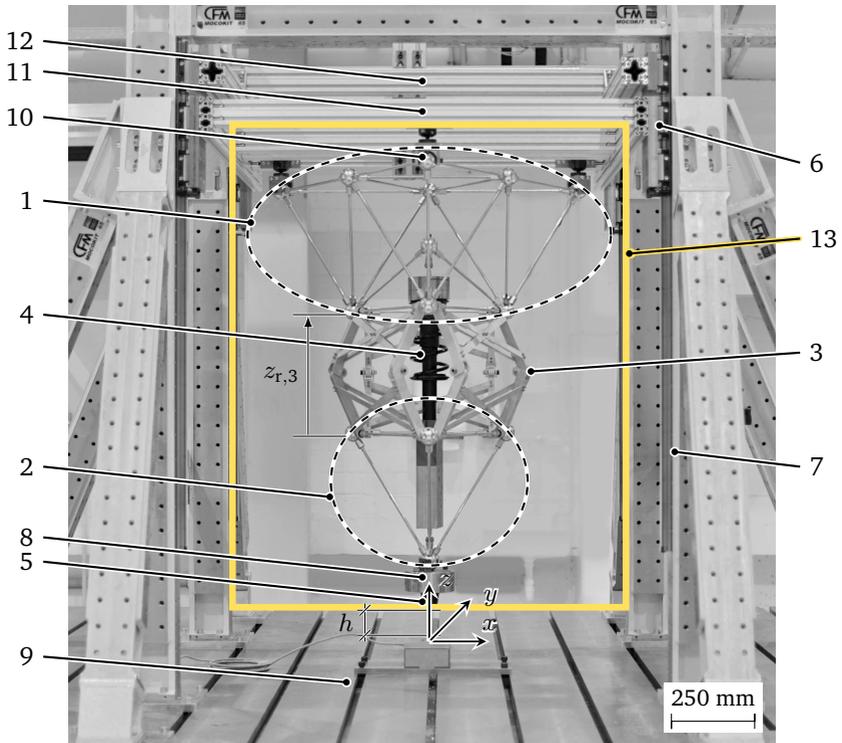


Abbildung 4.1: SFB-Demonstrator mit Versuchsumgebung und MAFDS (Nr. 13)

Tragwerk ist eine Zusatzmasse (Nr. 8) und ein elastischer Gummipuffer (Nr. 5) befestigt. Diese sollen mit ihrer Masse und Steifigkeit die dynamischen Eigenschaften des Reifens eines Flugzeugtragwerks nachbilden und die Stoßenergie während eines Fallversuches in die Struktur einleiten [73].

Tabelle 4.1: Komponenten des in Abbildung 4.1 dargestellten SFB-Demonstrators

Nr.	Beschreibung	Typ
1	Oberes Tragwerk	–
2	Unteres Tragwerk	–
3	Gelenkmodule	–
4	Feder-Dämpfer-System	Volkswagen Federbein 8K0.413.031.CA
5	Gummipuffer	Continental Schwingmetall 3915251000
6	Parallelführungen	Bosch Rexroth R18513222X
7	Schienen	Bosch Rexroth R180536361
8	Zusatzmasse	–
9	Schwingfundament	CFM Schiller
10	Festlager	Zimmer Group KGST60
11	Fallrahmen	item® Profile
12	Heberahmen	item® Profile

Das obere Tragwerk (siehe Abbildung 4.2a) besteht aus vier Tetraeder-Modulen und das untere Tragwerk (siehe Abbildung 4.2b) besteht aus einem Tetraeder-Modul. Jedes Tetraeder-Modul besteht aus sechs schlanken Aluminium-Balken mit starrer Balkenlagerung, die an je vier Verbindungskugeln gelagert sind. In Abbildung 4.3 ist die Balkenlagerung mit Verbindungskugel und Teil eines Balkens gezeigt sowie die dazugehörigen Komponenten in Tabelle 4.2 aufgelistet. Die Verbindungskugeln aus Aluminium sind hohl und haben 18 verteilte Gewindebohrungen mit Durchmesser M10.

Die Verbindung der Balken mit den Verbindungskugeln ist über ein Verbindungsstück, eine Balkenhülse und eine Überwurfhülse aus Stahl realisiert, siehe Abbildung 4.3. Die Enden der Balken mit Rundquerschnitt (Nr. 5) sind jeweils an beiden Enden mit einem M6 Gewinde mit den Balkenhülsen (Nr. 3) verbunden. Die Überwurfhülsen (Nr. 4) werden über die Balkenhülsen gesteckt und auf das Verbindungsstück (Nr. 2) geschraubt werden. Die Verbindungsstücke werden ihrerseits mittels M10 Gewinde mit den Verbindungskugeln (Nr. 1) verbunden. Die Materialien der Komponenten der Tetraedermodule

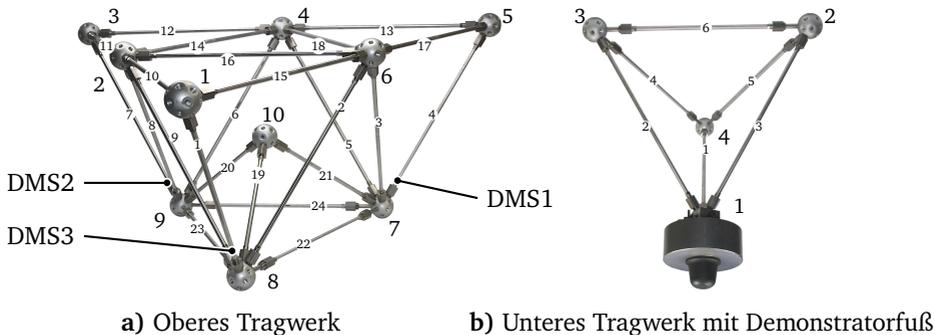


Abbildung 4.2: Tragwerke des MAFDS mit Nummerierung der Verbindungskugeln und Balken

sind in Tabelle 4.2 zusammengefasst.

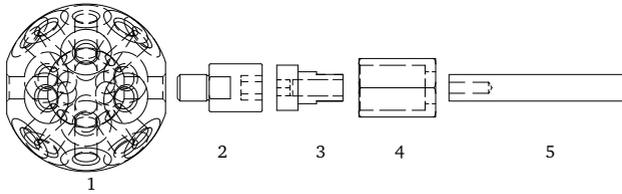
Tabelle 4.2: Komponenten der Tragwerke

Nr.	Beschreibung	Typ / Material
1	Verbindungskugel mit Bohrungen M10	SYMA®4860, Aluminium
2	Verbindungsstück M10 auf M18	Stahl St37, rostfrei
3	Balkenhülse Innengewinde M4	Stahl St37, rostfrei
4	Überwurfhülse mit Innengewinde M18	Stahl St37, rostfrei
5	Balken mit Gewinde M4	Aluminium EN AW - 7075 T651

Das Feder-Dämpfer-System des MAFDS, siehe Abbildung 4.4, bestimmt maßgeblich die dynamischen Eigenschaften des MAFDS in vertikaler Richtung. Es besteht aus einem McPherson Federbein eines Mittelklassefahrzeugs und konstruierten massiven Aufnehmern zur Befestigung an den Tragwerken [42], siehe Abbildung 4.1. Die Feder des Feder-Dämpfer-Systems ist durch einen verstellbaren Anschlag vorgespannt. Der Anschlag verhindert zudem eine negative Auslenkung des Feder-Dämpfer-Systems bei Belastung auf Zug. Ein dunkelbrauner Anschlagpuffer aus Schaumstoff bremst große Auslenkungen des Feder-Dämpfer-Systems ab und verhindert die Kollision von Komponenten des Federbeins.



a) Realer Balken mit Anbindungen an die Verbindungskugeln



b) Konstruktive Realisierung der Balken mit Anbindung an die Verbindungskugeln mit den Komponenten aus Tabelle 4.2

Abbildung 4.3: Balken mit Anbindung an die Verbindungskugeln des Tragwerks



Abbildung 4.4: Feder-Dämpfer-System bestehend aus dem Federbein und den Anbindungen an das obere Tragwerk und untere Tragwerk

---

## 4.3 Experimentelle Versuche

Zur Untersuchung des dynamischen Verhaltens des MAFDS in Abbildung 4.1 werden dynamische Falltests durchgeführt. Dazu wird der Heberahmen (Nr. 12) mithilfe des Hebemechanismus soweit angehoben, bis ein Abstand  $h$  zwischen dem Auftreffpunkt und dem Demonstratorfuß (Nr. 5) erreicht ist, siehe Abbildung 4.1. Aus dieser Fallhöhe  $h$  wird der MAFDS mitsamt des Fallrahmens (Nr. 11) über den Auslösemechanismus vom Heberahmen (Nr. 12) getrennt und fallen gelassen. Zusatzgewichte  $m_{\text{add}}$  können dem Fallrahmen hinzugefügt werden, um die Belastungen des MAFDS zu variieren. Die  $D = 2$  variablen Inputs der experimentellen Versuche sind somit die Fallhöhe  $h$  und das Zusatzgewicht  $m_{\text{add}}$ . Sie werden im Vektor der Inputs

$$\mathbf{x}_m = (h, m_{\text{add}})^\top \quad (4.1)$$

zusammengefasst. Tabelle 4.3 enthält die Inputs  $\mathbf{x}_m$  für die durchgeführten Falltests, die auch die Grundlage für vorherige Untersuchungen waren [2, 1, 3]. Für die 36 Messpunkte als Kombination aus Fallhöhe  $h$  und Zusatzgewicht  $m_{\text{add}}$  wurden jeweils fünf Messwiederholungen durchgeführt, sodass eine Gesamtzahl von 180 Messungen resultiert.

Zur statistischen Modellkalibrierung werden nicht alle 36, sondern nur  $M = 20$  Messpunkte verwendet. In Abbildung 4.5 sind die Messpunkte rot gekennzeichnet, die zur Kalibrierung verwendet wurden. Die Verwendung von nur einem Teil der Messpunkte hat den Vorteil, dass die Kalibrierung weniger rechenintensiv ist, da zur Berechnung der High-Fidelity-Likelihood (3.5a) weniger Modellauswertungen des High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HIFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  benötigt werden und somit die benötigte Rechenkapazität auf dem Lichtenberg Cluster überschaubar bleibt.

Tabelle 4.3: Kombination der variablen Inputs  $\mathbf{x}_m = (h, m_{\text{add}})$  bestehend aus Fallhöhe  $h$  und Zusatzmasse  $m_{\text{add}}$  sowie die sich daraus ergebende Anzahl von Fallversuchen

$m_{\text{add}}$ in kg	$h$ in m	Anzahl an Falltests
0	0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09	$9 \times 5$
10	0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07	$7 \times 5$
20	0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06	$6 \times 5$
40	0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05	$5 \times 5$
60	0.01, 0.02, 0.03, 0.04	$4 \times 5$
80	0.01, 0.02, 0.03	$3 \times 5$
100	0.01, 0.02	$2 \times 5$

$M = 180$

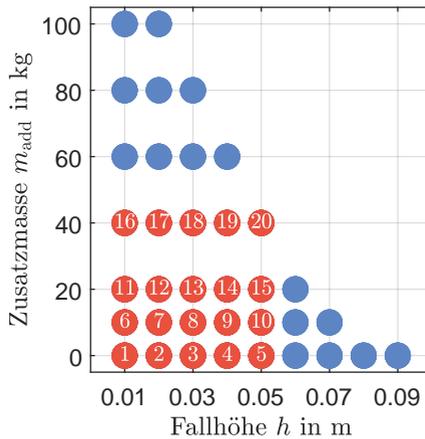


Abbildung 4.5: Zur Verfügung stehende Messpunkte (● und ●) und zur statistischen Modellkalibrierung verwendete  $M = 20$  Messpunkte (●)

---

## 4.4 Messgrößen und Systemausgänge

Mit der in Kapitel 3 vorgestellten Methode sollen die Parameter- und Modellunsicherheit des MAFDS effizient quantifiziert werden, um die Vorhersagefähigkeit des in Kapitel 5 hergeleiteten Modells für die kalibrierten, den Systemausgängen entsprechenden Modellausgänge zu erhöhen. Dazu ist es notwendig, Systemausgänge zu wählen, die sowohl das statische als auch das dynamische Verhalten des MAFDS möglichst umfassend repräsentieren. Gleichzeitig soll in den Systemausgängen Redundanz vermieden werden, sodass die Kalibrierung nicht zu Gunsten einer Gruppe von redundanten Systemausgängen verzerrt wird. Im Folgenden werden zunächst die betrachteten Messgrößen beschrieben, der Messaufbau zu ihrer Messung und schließlich die Systemausgänge definiert.

### Messgrößen

Zur Erfassung der Starrkörperdynamik des MAFDS ist es sinnvoll, die relative Einfederung zwischen oberem und unterem Tragwerk des MAFDS zu betrachten, siehe Abbildung 4.1. Sie ist eine wichtige Messgröße zur Beschreibung des Zustands des Feder-Dämpfer-Systems und lässt Rückschlüsse auf den Kraftfluss zwischen oberem und unterem Tragwerk zu. In den eigenen Veröffentlichungen hat sich die Einfederung als Modell- und Systemausgang bereits bewährt [1, 4, 5].

In Anbetracht der in Abschnitt 4.1 erwähnten Ähnlichkeit des MAFDS mit einem Flugzeugfahrwerk ist es zudem von Interesse, versagensrelevante Messgrößen zu betrachten, um z. B. zu hohe Belastungen vorhersagen zu können. Da in den äußeren Balken des oberen Tragwerks (Nr. 1, 4, 7 in Abbildung 4.2a) besonders hohe Belastungen auftreten, sind die auftretenden Normalspannungen in diesen drei Balken für die Kalibrierung relevant.

### Messaufbau

Zur Erfassung der o. g. Messgrößen, relative Einfederung und Normalspannung, werden in dieser Arbeit die Messsignale von drei Wegsensoren und mehreren Dehnmessstreifen (DMS) verwendet.

Als Wegsensoren wurden lineare Differentialtransformatoren verwendet. Diese sind jeweils an den drei unteren Verbindungskugeln des oberen Tragwerks (Nr. 7, 8, 9 in Abbildung 4.2a) und den drei oberen Verbindungskugeln des unteren Tragwerks (Nr. 2, 3, 4

in Abbildung 4.2b) befestigt und messen die relative Einfederung  $z_{r,1}$ ,  $z_{r,2}$  und  $z_{r,3}$  zwischen oberem und unterem Tragwerk. Zur Veranschaulichung ist in Abbildung 4.1 exemplarisch die gemessene Auslenkung  $z_{r,3}$  zwischen oberem und unterem Tragwerk eingezeichnet. Die Auslenkung der Tragwerke in hängendem Zustand entspricht  $z_{r,\cdot} = 0$ . Eine positive Auslenkung ist nicht möglich, da ein Anschlag im Feder-Dämpfer-System dessen Auslenkung infolge einer Zugkraft verhindert.

Jeweils vier DMS sind an den äußeren drei Balken des oberen Tragwerks im Abstand von 75 mm zum Mittelpunkt der Verbindungskugel befestigt, siehe Abbildung 4.2a. Davon sind jeweils zwei als WHEATSTON'sche Viertelbrücken verschaltet und messen die Normalspannungen  $\sigma_{N,OT,1}$ ,  $\sigma_{N,OT,4}$  und  $\sigma_{N,OT,7}$  der Balken. Vor Start der Messung wird ein Brückenabgleich durchgeführt, sodass  $\sigma_{N,OT,\cdot} = 0$  der statischen Normalspannung des MAFDS in hängendem Zustand entspricht.

Die Messung erfolgt mithilfe des modularen Messdatenerfassungssystems CRONOSflex der Firma imc®. An eine Basiseinheit sind ein Brückenmessverstärker und ein Differenzmessverstärker angeschlossen, an die die DMS und die Wegsensoren angeschlossen sind. Die Basiseinheit ist mit einem PC verbunden, auf dem die Verarbeitung und Speicherung der Daten mit imc® STUDIO erfolgt. Der Start der Messung wird über den Auslösemechanismus getriggert und die betrachtete Messdauer beträgt 2 s. Die Abtastrate des Messdatenerfassungssystems beträgt  $f_s = 5000$  Hz und alle Signale werden mittels eines BUTTERWORTH-Filters 8. Ordnung mit der Grenzfrequenz  $f_c = 50$  Hz gefiltert.

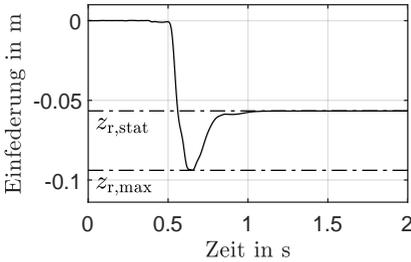
## Systemausgänge

Durch die Symmetrie des MAFDS werden die Messsignale der drei Wegsensoren als auch für die drei aus den Viertelbrücken ermittelten Normalspannungen als redundant angenommen. Diese Signale werden nicht separat betrachtet sondern gemittelt. Die gemittelte Einfederung und die gemittelte Normalspannung ergeben sich zu

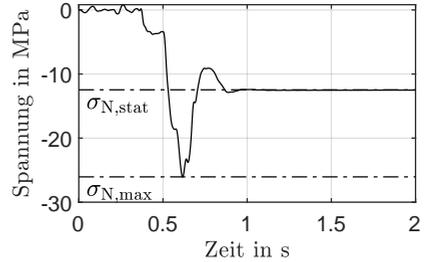
$$\bar{z}_r = \frac{1}{3} (z_{r,1} + z_{r,2} + z_{r,3}) \quad \bar{\sigma}_N = \frac{1}{3} (\sigma_{N,OT,1} + \sigma_{N,OT,4} + \sigma_{N,OT,7}). \quad (4.2)$$

Auf dieser Basis werden zwei statische und zwei dynamische, also  $N_y = 4$  Systemausgänge definiert. Diese entsprechen den absoluten Maxima  $z_{r,max}$  (Index  $n_y = 3$ ),  $\sigma_{N,max}$  (Index  $n_y = 1$ ) und den ausgeschwungenen, statischen Werten  $z_{r,stat}$  (Index  $n_y = 4$ ),  $\sigma_{N,stat}$  (Index  $n_y = 2$ ) der Kurvenverläufe der gemittelten Einfederung  $\bar{z}_r$  und der gemittelten Normalspannung  $\bar{\sigma}_N$ , siehe Abbildung 4.6a und Abbildung 4.6b.

Die Systemausgänge für die  $20 \cdot 5 = 100$  in Abbildung 4.5 angegebenen Messungen der zur Kalibrierung verwendeten Messpunkte werden jeweils für die 5 zu einem der



a) Gemittelte Messung der Einfederung  $\bar{z}_r$  (—) mit maximaler absoluter Einfederung  $z_{r,max}$  und statischer Einfederung  $z_{r,stat}$



b) Gemittelte Messung der Normalspannung  $\bar{\sigma}_N$  (—) mit maximaler absoluter Normalspannung  $\sigma_{N,max}$  und statischer Normalspannung  $\sigma_{N,stat}$

Abbildung 4.6: Gemessene Systemausgänge  $z_{r,stat}$ ,  $z_{r,max}$ ,  $\sigma_{N,stat}$  und  $\sigma_{N,max}$  für einen Fallversuch mit Input  $\mathbf{x} = (0,06 \text{ m}, 20 \text{ kg})^\top$

$M = 20$  getesteten Inputs  $\mathbf{x}_m$  zugehörigen Messwiederholungen gemittelt, sodass sich  $M = 20$  (gemittelte) Messungen ergeben. Die gemittelten Messungen sind in den Vektoren  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{N_y}$  enthalten und werden zur Berechnung der Likelihood (3.6) benötigt.

**Bemerkung 1** Die Verwendung von 100 und mehr Messungen zur Kalibrierung würde zu Problemen bei der Berechnung der Likelihood (3.6) führen, da es dabei zu arithmetischem Überlauf bei der Bestimmung der Determinante der sich ergebenden  $100 \times 100$  Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}$  kommt, die durch Berücksichtigung der Modellunsicherheit vollbesetzt ist. Durch die Mittelung der Messungen reduziert sich die Dimension der Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}$  auf  $20 \times 20$  und es kommt zu keinen numerischen Problemen.



---

# 5 Modellbildung des High-Fidelity-Modells

---

In diesem Kapitel wird das High-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{HIFi}}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta})$  zu dem in Kapitel 4 vorgestellten Anwendungsbeispiel, dem SFB-Demonstrator, hergeleitet. Die Basis hierfür bilden die in Abschnitt 2.4 und Abschnitt 2.5 beschriebenen Grundlagen zur Modellierung flexibler Mehrkörpersysteme mit dem Floating-Frame-of-Reference Formalismus und zur Balkenmodellierung mit finiten Elementen. Zunächst wird dazu in Abschnitt 5.1 die Kinematik der Körper des SFB-Demonstrators beschrieben. Anschließend erfolgt in Abschnitt 5.2 die Herleitung der FE-Matrizen zur Beschreibung des dynamischen Systemverhaltens des oberen und unteren Tragwerks. In Abschnitt 5.3 werden die eingepprägten Kräfte und in Abschnitt 5.4 die Zwangsbedingungen hergeleitet. Auf Basis der vorherigen Abschnitte werden in Abschnitt 5.5 die gekoppelten Bewegungsgleichungen formuliert und deren Lösung mit einem Zeitschrittverfahren beschrieben. Schließlich wird die Berechnung der Modellausgängen gezeigt, die den in Abschnitt 4.4 eingeführten Systemausgängen entsprechen.

## 5.1 Beschreibung der Kinematik

Der in Kapitel 4 vorgestellte SFB-Demonstrator wird als flexibles MKS mit drei Körpern angenommen. Das obere Tragwerk und das untere Tragwerk werden dabei als flexible Körper angenommen. Das obere Tragwerk ist an dem als starrer Körper angenommenen Fallrahmen fest gelagert. Die Parallelführungen des Fallrahmens beschränken dessen Bewegung auf die vertikale  $z$ -Richtung, siehe Abschnitt 4.2. Durch die Gelenkmodule kann das untere Tragwerk zum oberen Tragwerk nur eine vertikale Translation ausführen. Insgesamt besteht die Starrkörperbewegung der drei Körper des flexiblen MKS somit nur aus einer Translation.

In Abbildung 5.1 sind das Inertialsystem und die drei Referenzkoordinatensysteme eingezeichnet. Der Ursprung  $O_1$  des Inertialsystems befindet sich am Auftreffpunkt des

---

Demonstratorfußes. Es ist so orientiert, dass die positive  $z$ -Achse in vertikale Richtung nach oben und die positive  $y$ -Achse in die Bildebene hinein zeigt. Die beiden Referenzkoordinatensysteme des oberen und unteren Tragwerks sind gleich orientiert. Ihre Ursprünge  $Q_{OT}$  und  $Q_{UT}$  als Körperreferenzpunkte befinden sich jeweils in der Mitte der Verbindungskugeln 10 des oberen Tragwerks und 1 des unteren Tragwerks, siehe Abbildung 4.2. Das Referenzkoordinatensystem des Fallrahmens hat die gleiche Orientierung wie die anderen Referenzkoordinatensysteme. Der Körperreferenzpunkt  $Q_{FR}$  als Koordinatenursprung des Körperreferenzsystems liegt im Mittelpunkt der Verbindungskugel 3 des oberen Tragwerks, siehe Abbildung 4.2. Die Lage der Körperreferenzpunkte wird im Inertialsystem jeweils mit  $r_Q^{(OT)}$ ,  $r_Q^{(UT)}$  und  $r_Q^{(FR)}$  angegeben. Alle anderen Vektoren werden in den jeweiligen Referenzkoordinatensystemen angegeben, weshalb auf die Angabe des Koordinatensystem bei der Vektornotation im Folgenden verzichtet wird.

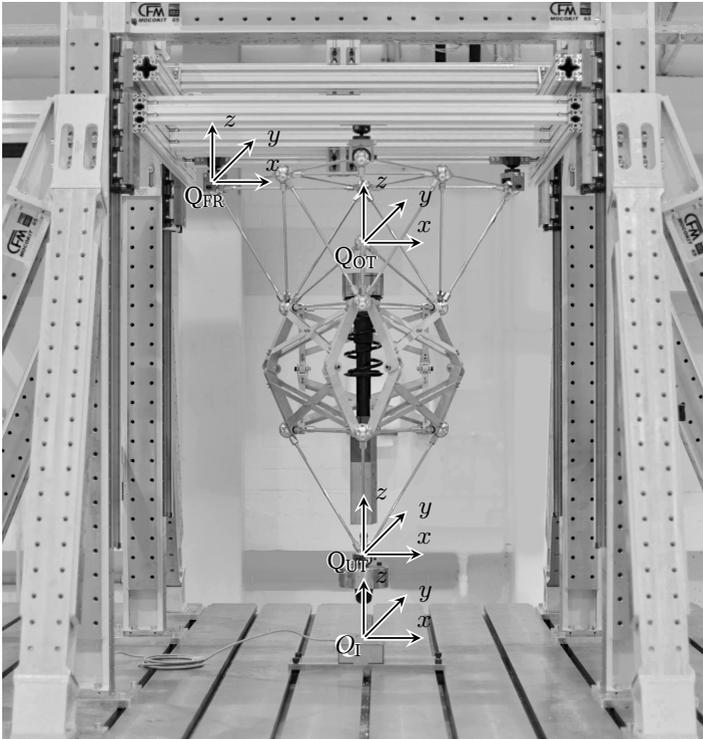


Abbildung 5.1: SFB-Demonstrator mit Inertialsystem (I) und Referenzkoordinatensystemen des Fallrahmens (FR), des oberen Tragwerks (OT) und unteren Tragwerks (UT)

---

## 5.2 Herleitung der Systemmatrizen

Bezogen auf die jeweiligen Referenzkoordinatensysteme werden im diesem Abschnitt zunächst die Massen- Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix der drei Körper des flexiblen MKS bestimmt, um anschließend zu den Systemmatrizen des flexiblen MKS zusammengesetzt zu werden. Dazu wird in Abschnitt 5.2.1 zunächst die Diskretisierung der Tragwerke durch Balkenelemente beschrieben und in Abschnitt 5.2.2 die Assemblierung der Elementmatrizen zu den Massen- und Steifigkeitsmatrizen der Tragwerke gezeigt. Auf die Berücksichtigung der als starr angenommenen Komponenten des flexiblen MKS als konzentrierte Massen wird in Abschnitt 5.2.3 eingegangen und die Modellierung der Dämpfung der Tragwerke wird in Abschnitt 5.2.4 dargestellt. In Abschnitt 5.2.5 werden schließlich die Systemmatrizen des flexiblen MKS aufgebaut.

### 5.2.1 Balkendiskretisierung und Elementmatrizen

Beide Tragwerke bestehen aus den in Abbildung 4.3 gezeigten und in Tabelle 4.2 aufgelisteten Komponenten, die in diesem Abschnitt mit den in Abschnitt 2.5 vorgestellten Balkenelementen in Anlehnung an [45] modelliert werden. Abbildung 5.2 stellt die Diskretisierung eines Balkens mit Anbindung dar, wie er in den Tragwerken verbaut ist. Folgende Annahmen werden dabei getroffen.

- Es gelten die BERNOULLI-Annahmen für Balkenbiegung, [39].
- Die Verbindungskugeln werden als konzentrierte Massen angenommen.
- Die Steifigkeit der Verbindungskugel wird mithilfe eines Balkenelements (A1 in Abbildung 5.2) dargestellt.
- Die Anbindung der Balken an die Verbindungskugel mittels Verbindungsstück, Balkenhülse und Überwurfhülse an die Verbindungskugeln wird mit zwei Balkenelementen (A2 in Abbildung 5.2) modelliert.
- Die Balken werden in  $N_B = 2$  Balkenelementen (B in Abbildung 5.2) diskretisiert.
- Jeder Knoten hat sechs Freiheitsgrade.

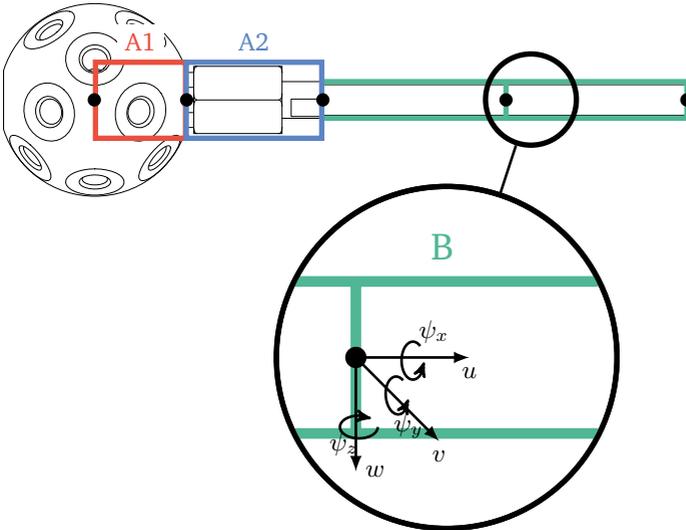


Abbildung 5.2: Diskretisierung eines Balkens mit Anbindung durch drei Typen von Balkenelementen, die über Knoten (●) miteinander verbunden sind: Anbindungsbalkenelement A1 (□), Anbindungsbalkenelement A2 (□), Balkenelement B (□)

Es kommen drei Arten von Balkenelementen zum Einsatz, die den jeweiligen Balkenabschnitt charakterisieren und sich in ihrer Parametrierung unterscheiden. Sie sind über Knoten miteinander verbunden, an denen drei Verschiebungsfreiheitsgrade  $u$ ,  $v$ ,  $w$  und drei Verdrehfreiheitsgrade  $\psi_x$ ,  $\psi_y$ ,  $\psi_z$  definiert sind, siehe Abbildung 5.2. Die Knoten, die im Mittelpunkt der Verbindungskugeln liegen, werden als Hauptknoten bezeichnet und entsprechend der Verbindungskugeln in Abbildung 4.2 nummeriert.

### Anbindungsbalkenelement A1

Das Anbindungsbalkenelement A1 bildet die Steifigkeit der Verbindungskugeln ab. In Abbildung 5.2 ist es rot gekennzeichnet und erstreckt sich vom Mittelpunkt bis zum äußeren Umfang der Verbindungskugel. Es wird mit einem Balkenelement der Länge  $\ell_{A1}$  modelliert. Die Elementsteifigkeitsmatrix von Anbindungsbalkenelement A1,  $\mathbf{K}_{el,A1}$ ,

ergibt sich aus der in Abschnitt 2.5 hergeleiteten Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{\text{uu,el}}$  (2.59) durch Einsetzen der für das finite Element in Tabelle 5.1 gegebenen Größen  $E_{A1}$ ,  $\ell_{A1}$ ,  $G_{A1}$ , bzw.  $A_{A1} = \pi r_{A1}^2$  und  $I_{A1} = \pi r_{A1}^4/4$ . Die Trägheit der Verbindungskugeln wird jeweils als konzentrierte Masse in den Hauptknoten berücksichtigt, siehe Abschnitt 5.2.3.

## Anbindungsbalkenelement A2

Das Anbindungsbalkenelement A2 modelliert die Anbindung des Balkens an die Verbindungskugel mit Verbindungsstück, Balkenhülse und Überwurfhülse mit einem Balkenelement der Länge  $\ell_{A2}$ , das in Abbildung 5.2 blau gekennzeichnet ist. Die Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{\text{el,A2}}$  und Elementmassenmatrix  $\mathbf{M}_{\text{el,A2}}$  von Anbindungsbalkenelement A2 ergibt sich analog wie für Anbindungsbalkenelement A1 aus der in Abschnitt 2.5 hergeleiteten Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{\text{uu,el}}$  (2.59) und Elementmassenmatrix  $\mathbf{M}_{\text{uu,el}}$  (2.62) durch Einsetzen der für das Element in Tabelle 5.1 gegebenen Größen.

## Balkenelement B

Der Balkenabschnitt zwischen den zwei Anbindungsbalkenelementen A2 wird mit  $N_B = 2$  Balkenelementen modelliert, die in Abbildung 5.2 grün gekennzeichnet sind. Auch die Elementsteifigkeitsmatrix und Elementmassenmatrix von Balkenelement B  $\mathbf{K}_{\text{el,B}}$  und  $\mathbf{M}_{\text{el,B}}$  ergeben sich analog zum vorherigen Elementtyp aus der in Abschnitt 2.5 hergeleiteten Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{\text{uu,el}}$  (2.59) und Elementmassenmatrix  $\mathbf{M}_{\text{uu,el}}$  (2.62) durch Einsetzen der für das finite Element in Tabelle 5.1 gegebenen Größen. In den beiden Tragwerken sind Balken mit zwei unterschiedlichen Längen verbaut. Die Balken 22, 23 und 24 des oberen Tragwerks und die Balken 4, 5 und 6 sind kürzer als die restlichen Balken, siehe Abbildung 4.2. Daher sind in Tabelle 5.1 zwei Werte für die Elementlänge  $\ell_B$  aufgelistet.

## 5.2.2 Assemblierung der Finite-Elemente-Matrizen

Aus der in Abschnitt 5.2.1 vorgestellten Diskretisierung resultieren die Massenmatrizen  $\mathbf{M}_{\text{uu}}^{(\text{OT})}$ ,  $\mathbf{M}_{\text{uu}}^{(\text{UT})}$  und Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}_{\text{uu}}^{(\text{OT})}$ ,  $\mathbf{K}_{\text{uu}}^{(\text{UT})}$  des oberen und unteren Tragwerks. Sie ergeben sich durch Transformation und Zusammensetzen der zwei Elementmassenmatrizen  $\mathbf{M}_{\text{el,A2}}$ ,  $\mathbf{M}_{\text{el,B}}$  und der drei Elementsteifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}_{\text{el,A1}}$ ,  $\mathbf{K}_{\text{el,A2}}$ ,  $\mathbf{K}_{\text{el,B}}$  der Elementtypen A1, A2 und B entsprechend der Assemblierung (2.36b) und

(2.38) unter Verwendung der entsprechenden elementspezifischen Transformationsmatrizen und Lokalisierungsoperatoren. Die entsprechenden Vektoren der Freiheitsgrade sind  $\mathbf{q}_{\text{uu}}^{(\text{OT})}$  und  $\mathbf{q}_{\text{uu}}^{(\text{UT})}$ .

**Bemerkung 2** Eine statistische Modellkalibrierung erfordert die wiederholte Auswertung eines Modells für unterschiedliche Werte der Parameter. Von der Rechenzeit des High-Fidelity-Modells entfallen 6,5 % auf die Assemblierung der Massenmatrizen  $\mathbf{M}_{\text{uu}}^{(\text{OT})}$   $\mathbf{M}_{\text{uu}}^{(\text{UT})}$  und Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}_{\text{uu}}^{(\text{OT})}$   $\mathbf{K}_{\text{uu}}^{(\text{UT})}$  des oberen und unteren Tragwerks und 93,5 % auf die Simulation des flexiblen MKS. Der Anteil der Assemblierung an der Rechenzeit kann auf 0,31 % reduziert werden, indem die Massen- und Steifigkeitsmatrizen des oberen und unteren Tragwerks als Summanden aus Produkten von Parametern aus Tabelle 5.1 und Teilmatrizen ausgedrückt werden. Für das obere Tragwerk lässt sich die Steifigkeitsmatrix z. B. wie folgt schreiben

$$\mathbf{K}_{\text{uu}}^{(\text{OT})} = E_{A1} A_{A1} \mathbf{K}_{\text{uu},A1,ZD}^{(\text{OT})} + E_{A2} A_{A2} \mathbf{K}_{\text{uu},A2,ZD}^{(\text{OT})} + E_B A_B \mathbf{K}_{\text{uu},B,ZD}^{(\text{OT})} \quad (5.1a)$$

$$+ E_{A1} I_{A1} \mathbf{K}_{\text{uu},A1,Bi}^{(\text{OT})} + E_{A2} I_{A2} \mathbf{K}_{\text{uu},A2,Bi}^{(\text{OT})} + E_B I_B \mathbf{K}_{\text{uu},B,Bi}^{(\text{OT})} \quad (5.1b)$$

$$+ G_{A1} I_{T,A1} \mathbf{K}_{\text{uu},A1,To}^{(\text{OT})} + G_{A2} I_{T,A2} \mathbf{K}_{\text{uu},A2,To}^{(\text{OT})} + G_B I_{T,B} \mathbf{K}_{\text{uu},B,To}^{(\text{OT})} \quad (5.1c)$$

Hierbei stehen die ersten drei Terme (5.1a) die Anteile aufgrund der Dehnsteifigkeit (Zug-Druck, ZD), der vierte, fünfte und sechste Term (5.1b) beschreiben die Anteile aufgrund der Biegesteifigkeit (Bi) und die letzten drei Terme (5.1c) sind die Anteile aufgrund der Torsionssteifigkeit (To). Analog lässt sich beispielhaft die Massenmatrix des oberen Tragwerks zerlegen

$$\mathbf{M}_{\text{uu}}^{(\text{OT})} = \rho_{A2} A_{A2} \mathbf{M}_{\text{uu},A2,\text{trans}} + \rho_B A_B \mathbf{M}_{\text{uu},B,\text{trans}} \quad (5.2a)$$

$$+ \frac{1}{8} \rho_{A2} A_{A2} d_{A2}^2 \mathbf{M}_{\text{uu},A2,\text{rot}} + \frac{1}{8} \rho_B A_B d_B^2 \mathbf{M}_{\text{uu},B,\text{rot}}. \quad (5.2b)$$

wobei die ersten zwei Terme (5.2a) die Anteile der translatorischen Trägheit und die letzten beiden Terme (5.2b) die Anteile der rotatorischen Trägheit darstellen. Wenn sich Diskretisierung des oberen und unteren Tragwerks nicht ändert, bleiben auch die Matrizen in (5.1) und (5.2) konstant und müssen nicht neu aufgebaut werden. Die Steifigkeits- und Massenmatrizen des oberen und unteren Tragwerks können somit effizient für neue Parameterwerte aufgebaut werden.

Die in Abschnitt 5.1 definierten Freiheitsgrade  $\mathbf{r}_Q^{(\text{OT})}$  und  $\mathbf{r}_Q^{(\text{UT})}$  zur Beschreibung der Starrkörperbewegung des oberen und unteren Tragwerks werden wie in Abschnitt 2.4.3

beschrieben mit den Bool'schen Matrizen  $\mathbf{L}_q^{(OT)}$ ,  $\mathbf{L}_q^{(UT)}$  aus dem Vektor der Freiheitsgrade  $\mathbf{q}_{uu}^{(OT)}$  und  $\mathbf{q}_{uu}^{(UT)}$  eliminiert, um Redundanzen zu verhindern. Somit ergeben sich die Vektoren der Freiheitsgrade des oberen und unteren Tragwerks zu

$$\mathbf{q}^{(UT)} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_Q^{(UT)} \\ \mathbf{L}_q^{(UT)} \mathbf{q}_{uu}^{(UT)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}^{(OT)} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_Q^{(OT)} \\ \mathbf{L}_q^{(OT)} \mathbf{q}_{uu}^{(OT)} \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

Die Freiheitsgrade des Fallrahmens als starrer Körper sind gegeben durch

$$\mathbf{q}^{(FR)} = \mathbf{r}_Q^{(FR)}. \quad (5.4)$$

Die den Freiheitsgraden (5.3) entsprechenden Massen- und Steifigkeitsmatrizen des oberen und unteren Tragwerks ergeben sich entsprechend (2.40) zu

$$\mathbf{M}^{(OT)} = \begin{pmatrix} m_Q^{(OT)} \mathbf{I}_3 & \mathbf{R}_{tr}^{(OT)\top} \mathbf{M}_{uu}^{(OT)} \mathbf{L}_q^{(OT)\top} \\ \mathbf{L}_q^{(OT)} \mathbf{M}_{uu}^{(OT)} \mathbf{R}_{tr}^{(OT)} & \mathbf{L}_q^{(OT)} \mathbf{M}_{uu}^{(OT)} \mathbf{L}_q^{(OT)\top} \end{pmatrix}, \quad (5.5a)$$

$$\mathbf{M}^{(UT)} = \begin{pmatrix} m_Q^{(UT)} \mathbf{I}_3 & \mathbf{R}_{tr}^{(UT)\top} \mathbf{M}_{uu}^{(UT)} \mathbf{L}_q^{(UT)\top} \\ \mathbf{L}_q^{(UT)} \mathbf{M}_{uu}^{(UT)} \mathbf{R}_{tr}^{(UT)} & \mathbf{L}_q^{(UT)} \mathbf{M}_{uu}^{(UT)} \mathbf{L}_q^{(UT)\top} \end{pmatrix}, \quad (5.5b)$$

$$\mathbf{K}^{(OT)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_q^{(OT)} \mathbf{K}_{uu}^{(OT)} \mathbf{L}_q^{(OT)\top} \end{pmatrix}, \quad (5.5c)$$

$$\mathbf{K}^{(UT)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_q^{(UT)} \mathbf{K}_{uu}^{(UT)} \mathbf{L}_q^{(UT)\top} \end{pmatrix}, \quad (5.5d)$$

wobei  $\mathbf{R}_{tr}^{(OT)}$  und  $\mathbf{R}_{tr}^{(UT)}$  die Kopplungsmatrizen für das obere und untere Tragwerk sind, siehe (2.37), und  $m_Q^{(OT)}$  und  $m_Q^{(UT)}$  die Massen des oberen und unteren Tragwerks sind und in Tabelle 5.1 gegeben sind. Die Massenmatrix des Fallrahmens zu den Freiheitsgraden (5.4) ergibt sich entsprechend (2.44) zu

$$\mathbf{M}^{(FR)} = (m_Q^{(FR)} + m_{add}) \mathbf{I}_3, \quad (5.6)$$

wobei  $\mathbf{I}_3$  eine Einheitsmatrix der Dimension  $3 \times 3$  ist und die Masse des Fallrahmens  $m_Q^{(FR)}$  in Tabelle 5.1 gegeben ist. Zu der Masse des Fallrahmens wird die Masse des variablen Zusatzgewichtes  $m_{add}$  addiert, das dem Fallrahmen hinzugefügt werden kann und als Modelleingang dient, siehe Abschnitt 4.3.

---

### 5.2.3 Konzentrierte Massen

In den Massenmatrizen  $M^{(OT)}$ ,  $M^{(UT)}$  und  $M^{(FR)}$  sind die Trägheit der Verbindungskugeln, des Feder-Dämpfer-Systems, des Demonstratorfuß und der Gelenkmodule nicht berücksichtigt. Die Trägheit der Gelenkmodule ist aufgrund ihrer komplexen Kinematik schwer zu modellieren und wird daher vernachlässigt. Zur Berücksichtigung der Trägheiten der Verbindungskugeln, des Feder-Dämpfer-Systems und des Demonstratorfußes werden konzentrierte Massen modelliert, die mit den flexiblen Körpern an der Position eines Knotens der FE-Diskretisierung verbunden sind. Im Folgenden werden die dazu nötigen Massenmatrizen definiert, die zusammen mit den Massenmatrizen  $M^{(OT)}$ ,  $M^{(UT)}$  und  $M^{(FR)}$  des oberen und unteren Tragwerks und des Fallrahmens zur Massenmatrix des flexiblen MKS,  $\hat{M}$ , assembliert werden.

#### Verbindungskugeln

Die Trägheit der 14 Verbindungskugeln (VK) wird beschrieben durch die Massenmatrix

$$M_{VK} = \text{diag}(m_{VK}, m_{VK}, m_{VK}, J_{VK}, J_{VK}, J_{VK}) \quad (5.7)$$

wobei  $m_{VK}$  der Masse einer Verbindungskugeln und  $J_{VK}$  dem Massenträgheitsmoment einer Verbindungskugel entspricht, siehe Tabelle 5.1. Mit den Lokalisierungsoperatoren  $L_{VK,i}, i = 1, \dots, 14$  wird die Massenmatrix  $M_{VK}$  (5.7) an die Stellen im Vektor der Freiheitsgrade  $\hat{q}$  des flexiblen MKS (5.12) assembliert, die den Freiheitsgraden der 14 Hauptknoten entsprechen.

#### Feder-Dämpfer-System

Das Feder-Dämpfer-System wird idealisiert betrachtet als zwei konzentrierte Massen, die durch eine masselose Feder und einen masselosen Dämpfer verbunden sind. Die Aufteilung der Masse des Feder-Dämpfer-Systems zwischen oberer und unterer konzentrierter Masse wird im Verhältnis von 0,3 zu 0,7 angenommen, wobei die Masse des Feder-Dämpfer-Systems in Tabelle 5.1 gegeben ist. Für die zwei Massenmatrizen für den oberen und unteren Teil des Feder-Dämpfer-Systems gilt somit

$$M_{FDS,o} = 0,3 m_{FDS} \text{diag}(1, 1, 1, 0, 0, 0), \quad (5.8a)$$

$$M_{FDS,u} = 0,7 m_{FDS} \text{diag}(1, 1, 1, 0, 0, 0). \quad (5.8b)$$

Da aufgrund der kinematischen Eigenschaften des MAFDS keine Drehung des Feder-Dämpfer-Systems erfolgt, werden die Massenträgheitsmomente des Feder-Dämpfer-Systems vernachlässigt. Das Feder-Dämpfer-System ist an den Hauptknoten 10 des oberen Tragwerk und 1 des unteren Tragwerks momentenfrei gelagert, siehe Abbildung 4.1. Mit den Lokalisierungsoperatoren  $\mathbf{L}_{\text{FDS,o}}$ ,  $\mathbf{L}_{\text{FDS,u}}$  werden die Massenmatrizen  $\mathbf{M}_{\text{FDS,o}}$ ,  $\mathbf{M}_{\text{FDS,u}}$  an die Stellen im Vektor der Freiheitsgrade  $\hat{\mathbf{q}}$  des flexiblen (5.12) assembliert, die den Freiheitsgraden dieser Hauptknoten entspricht.

## Demonstratorfuß

Zur Berücksichtigung der Trägheit des in Abbildung 4.2b gezeigten Demonstratorfuß wird die Massenmatrix

$$\mathbf{M}_{\text{F}} = m_{\text{F}} \text{diag}(1, 1, 1, 0, 0, 0) \quad (5.9)$$

definiert, wobei auch hier wieder Massenträgheitsmomente vernachlässigt werden. Die Masse des Demonstratorfuß  $m_{\text{F}}$  ist in Tabelle 5.1 gegeben. Der Demonstratorfuß ist am Hauptknoten 1 des unteren Tragwerks angebracht. Die Massenmatrix  $\mathbf{M}_{\text{F}}$  wird daher, wie auch das Feder-Dämpfer-System, mit dem Lokalisierungsoperator  $\mathbf{L}_{\text{FDS,u}}$  assembliert.

## 5.2.4 Dämpfung der Tragwerke

Die Dämpfung hat einen maßgeblichen Einfluss auf das dynamische Verhalten von strukturdynamischen Systemen. Die Modellierung von Dämpfung als komplexes nichtlineares Phänomen resultiert in einer Vielzahl an möglichen Modellen, wie z. B. viskose Dämpfung, hysteresebehaftete Dämpfung oder visko-elastische Dämpfung [37]. Da keine A-Priori Information zum Dämpfungsverhalten der Tragwerke vorliegt, wird in dieser Arbeit von viskoser Dämpfung der Tragwerke ausgegangen, da sie den simpelsten Ansatz darstellt. Auch wenn dieses Dämpfungsmodell nicht auf physikalischen Annahmen beruht, ist es bei vielen Anwendungen mit geringer Dämpfung ausreichend genau [67]. In Annahme von RAYLEIGH-Dämpfung ergibt sich die Dämpfungsmatrix für das obere und untere Tragwerk als Linearkombination aus der Massenmatrix und der Steifigkeitsmatrix zu

$$\mathbf{D}^{(\text{OT})} = \alpha_{\text{D}} \mathbf{M}^{(\text{OT})} + \beta_{\text{D}} \mathbf{K}^{(\text{OT})} \quad (5.10a)$$

$$\mathbf{D}^{(\text{UT})} = \alpha_{\text{D}} \mathbf{M}^{(\text{UT})} + \beta_{\text{D}} \mathbf{K}^{(\text{UT})}, \quad (5.10b)$$

wobei  $\alpha_{\text{D}}$  und  $\beta_{\text{D}}$  Dämpfungsparameter sind.

## 5.2.5 Zusammenbau der Systemmatrizen des flexiblen MKS

Die in Abschnitt 5.2.2 aufgestellten Massenmatrizen  $\mathbf{M}^{(OT)}$  und  $\mathbf{M}^{(UT)}$  des oberen und unteren Tragwerks, siehe (5.5), der Massenmatrix des Fallrahmens  $\mathbf{M}^{(FR)}$  (5.6) und den in Abschnitt 5.2.3 definierten Massenmatrizen zur Beschreibung der konzentrierten Massen  $\mathbf{M}_{VK}$ ,  $\mathbf{M}_{FDS,o}$ ,  $\mathbf{M}_{FDS,u}$  und  $\mathbf{M}_F$  werden entsprechend (2.47) in Blockform geschrieben und ergeben die Massenmatrix des flexiblen MKS

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^{(OT)} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^{(UT)} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}^{(FR)} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{14} \mathbf{L}_{VK,i}^\top \mathbf{M}_{VK} \mathbf{L}_{VK,i} \quad (5.11)$$

$$+ \mathbf{L}_{FDS,o}^\top \mathbf{M}_{FDS,o} \mathbf{L}_{FDS,o} + \mathbf{L}_{FDS,u}^\top \mathbf{M}_{FDS,u} \mathbf{L}_{FDS,u} + \mathbf{L}_{FDS,u}^\top \mathbf{M}_F \mathbf{L}_{FDS,u}.$$

wobei die Freiheitsgrade des flexiblen MKS durch

$$\hat{\mathbf{q}} = (\mathbf{q}^{(OT)}, \quad \mathbf{q}^{(UT)}, \quad \mathbf{q}^{(FR)})^\top \quad (5.12)$$

gegeben sind und die Lokalisierungsoperatoren  $\mathbf{L}_{VK,i_{VK}}$ ,  $\mathbf{L}_{FDS,o}$ ,  $\mathbf{L}_{FDS,u}$  in Abschnitt 5.2.3 definiert wurden. Die Steifigkeitsmatrix und Dämpfungsmatrix des flexiblen MKS ergeben sich analog zu

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^{(OT)} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^{(UT)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^{(OT)} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^{(OT)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Tabelle 5.1: Nominelle Parameterwerte für die Modellierung des MAFDS als flexibles Mehrkörpersystem

Parameter	Symbol	Wert	Einheit
<b>Anbindungsbalkenelement A1</b>			
E-Modul	$E_{A1}$	210	GPa
Schubmodul	$G_{A1}$	78,358	GPa
Elementlänge	$\ell_{A1}$	$30 \cdot 10^{-3}$	m
Elementradius	$r_{A1}$	$11,750 \cdot 10^{-3}$	m
<b>Anbindungsbalkenelement A2</b>			
E-Modul	$E_{A2}$	210	GPa
Schubmodul	$G_{A2}$	78,358	GPa
Elementlänge	$\ell_{A2}$	$44,500 \cdot 10^{-3}$	m
Elementradius	$r_{A2}$	$11,750 \cdot 10^{-3}$	m
Dichte	$\rho_{A2}$	7800	kg/m <sup>3</sup>
<b>Balkenelement B</b>			
E-Modul	$E_B$	71,800	GPa
Schubmodul	$G_B$	26,791	GPa
Elementlänge	$\ell_B$	0,200 / 0,102	m
Elementradius	$r_B$	$5 \cdot 10^{-3}$	m
Dichte	$\rho_B$	2813	kg/m <sup>3</sup>
<b>Verbindungskugel</b>			
Masse	$m_{VK}$	0,268	kg
Massenträgheitsmoment	$J_{VK}$	115,638	kg mm <sup>2</sup>
<b>Feder-Dämpfer-System</b>			
Masse	$m_{FDS}$	32,938	kg
Steifigkeitsparameter	$k_{FDS,0}$	-150	N
	$k_{FDS,1}$	$3,888 \cdot 10^4$	N/m
Dämpfungsparameter	$d_{FDS,11}$	$3,503 \cdot 10^3$	Ns/m
	$d_{FDS,21}$	$2,588 \cdot 10^3$	Ns/m
<b>Demonstratorfuß</b>			
Masse	$m_F$	3,124	kg
Steifigkeitsparameter	$k_{F,1}$	$-1,132 \cdot 10^7$	N/m <sup>2</sup>
	$k_{F,2}$	$1,299 \cdot 10^4$	N/m
Länge	$l_{FDS}$	1,024	m
<b>Körpermassen</b>			
Oberes Tragwerk	$m_Q^{(OT)}$	11,978	kg
Unteres Tragwerk	$m_Q^{(UT)}$	3,429	kg
Fallrahmen	$m_Q^{(FR)}$	120,650	kg

## 5.3 Formulierung von Eingepägten Kräften

Zum Aufstellen der ungebundenen Bewegungsgleichungen des flexiblen MKS entsprechend (2.46) muss neben der Massenmatrix  $\hat{M}$  und der Steifigkeitsmatrix  $\hat{K}$  der Vektor der eingepägte Kräfte  $\hat{F}$  definiert werden. Dieser setzt sich zusammen aus Beiträgen der Gewichtskraft  $\hat{F}_g$  sowie des Feder-Dämpfer-Systems  $\hat{F}_{FDS}$  und der Fußkraft  $\hat{F}_F$ , die von den Freiheitsgraden des flexiblen MKS  $\hat{q}$  abhängig sind.  $\hat{F}$  ergibt sich damit zu

$$\hat{F} = \hat{F}_g + \hat{F}_{FDS}(\hat{q}) + \hat{F}_F(\hat{q}). \quad (5.14)$$

### Gewichtskraft

Die Gewichtskraft  $\hat{F}_g$  wirkt auf alle modellierten Massen des flexiblen MKS. Die von Null verschiedenen Elemente von  $\hat{F}_g$  befinden sich an den Stellen, an denen der Vektor der Freiheitsgrade  $\hat{q}$  (5.12) translatorische Freiheitsgrade in  $z$ -Richtung enthält, siehe Abbildung 5.1. Die Bool'sche Matrix  $L_z$ , die in ihrer Länge dem Vektor der Freiheitsgrade  $\hat{q}$  entspricht, ist an diesen Stellen 1, ansonsten 0. Der Vektor der Gewichtskraft kann somit dargestellt werden durch

$$\hat{F}_g = -g\hat{M}L_z, \quad (5.15)$$

wobei  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  für die Erdbeschleunigung steht.

### Feder-Dämpfer Kraft

Die durch das Feder-Dämpfer-System erzeugte Kraft  $F_{FDS}$  wirkt in vertikaler Richtung am Hauptknoten 10 des oberen Tragwerks und Hauptknoten 1 des unteren Tragwerks in entgegengesetzte Richtung

$$\hat{F}_{FDS}(\hat{q}) = F_{FDS}(\hat{q}) [\mathbf{L}_{FDS,o}]_{3, \text{Zeile}}^\top - F_{FDS}(\hat{q}) [\mathbf{L}_{FDS,u}]_{3, \text{Zeile}}^\top \quad (5.16)$$

wobei  $\mathbf{L}_{FDS,o}$ ,  $\mathbf{L}_{FDS,u}$  die Lokalisierungsoperatoren aus (5.11) sind. Die Feder-Dämpfer-Kraft ergibt sich aus der Summe der Federkraft  $F_K$  und der Dämpferkraft  $F_D$

$$F_{FDS}(\hat{q}) = F_K(z_r) + F_D(\dot{z}_r) \quad (5.17a)$$

$$\text{mit } z_r = [\mathbf{L}_{FDS,o}]_{3, \text{Zeile}} \hat{q} - [\mathbf{L}_{FDS,u}]_{3, \text{Zeile}} \hat{q} - l_{FDS} \quad (5.17b)$$

$$\dot{z}_r = [\mathbf{L}_{FDS,o}]_{3, \text{Zeile}} \dot{\hat{q}} - [\mathbf{L}_{FDS,u}]_{3, \text{Zeile}} \dot{\hat{q}} \quad (5.17c)$$

und hängt von der relativen Einfederung  $z_r$  und der Relativgeschwindigkeit  $\dot{z}_r$  ab. Die relative Einfederung  $z_r$  wird wie in Abbildung 4.1 exemplarisch dargestellt zwischen den Hauptknoten 7, 8, 9 des oberen und den Hauptknoten 2, 3, 4 des unteren Tragwerks ermittelt. Sie hat ihren Nullpunkt bei der in Tabelle 5.1 angegebenen maximal möglichen Auslenkung  $l_{\text{FDS}}$  des Feder-Dämpfer-Systems, siehe Abschnitt 4.4.

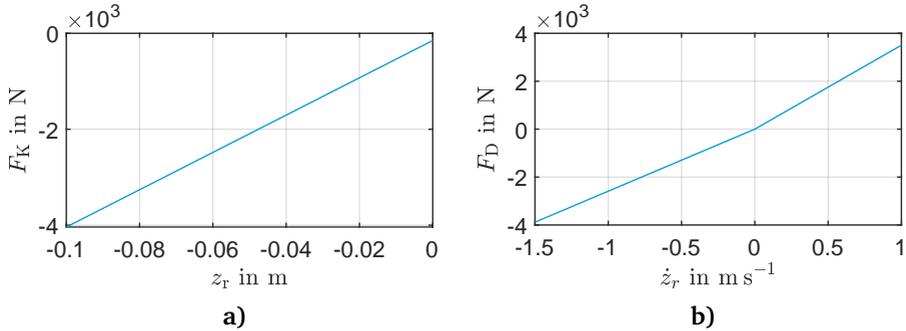


Abbildung 5.3: Regressionsmodelle des Feder-Dämpfer-Systems, a) Federkraft  $F_K$  (5.18), b) Dämpferkraft  $F_D$  (5.19)

Auf Basis von quasistatischen Druckversuchen in einer servo-hydraulischen Prüfmaschine zur Charakterisierung von Federbeinen (Hydropulser) sowie der Messdaten, die im Rahmen der in Abschnitt 4.3 beschriebenen Fallversuche generiert wurden, wurden Regressionsmodelle für die Dämpfung und die Steifigkeit des Feder-Dämpfer-Systems ermittelt. Das lineare Regressionsmodell für die Federkraft ergibt sich zu

$$F_K(z_r) = k_{\text{FDS},1} z_r + k_{\text{FDS},0}. \quad (5.18)$$

Die Parameter  $k_{\text{FDS},0}$ ,  $k_{\text{FDS},1}$  sind in Tabelle 5.1 gegeben. Der Parameter  $k_{\text{FDS},1}$  wurde mittels eines Kleinst-Quadrate-Ansatzes optimiert. Der Parameter  $k_{\text{FDS},0}$  wurde empirisch bestimmt und entspricht dabei der Vorspannung des Feder-Dämpfer-Systems. In Abbildung 5.3a ist das Regressionsmodell für die Federkraft (5.18) abgebildet.

Das in Abbildung 5.3b abgebildete lineare Dämpfungsmodell für das Feder-Dämpfer-System ergibt sich zu

$$F_D(\dot{z}_r) = \begin{cases} d_{\text{FDS},11} \dot{z}_r & \dot{z}_r \geq 0 \\ d_{\text{FDS},21} \dot{z}_r & \dot{z}_r < 0 \end{cases}, \quad (5.19)$$

wobei die Parameter  $d_{\text{FDS},11}$ ,  $d_{\text{FDS},21}$  in Tabelle 5.1 gegeben sind und ebenso mittels eines Kleinst-Quadrate-Ansatzes optimiert wurden.

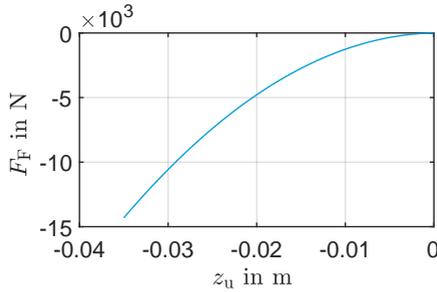


Abbildung 5.4: Federkraft  $F_F$  des Gummipuffers (5.21)

## Fußkraft

Durch den in Abbildung 4.1 und Abbildung 4.2b dargestellten Demonstratorfuß mit Gummipuffer wird bei den Fallversuchen die Kraft des Aufpralls in das MAFDS eingeleitet. Die Fußkraft  $F_F$  wirkt am Hauptknoten 1 des unteren Tragwerks

$$\hat{\mathbf{F}}_F(\hat{\mathbf{q}}) = -F_F(z_u) [\mathbf{L}_{\text{FDS,u}}]_{3, \text{Zeile}}^\top \quad (5.20a)$$

$$\text{mit } z_u = [\mathbf{L}_{\text{FDS,u}}]_{3, \text{Zeile}} \hat{\mathbf{q}} \quad (5.20b)$$

wobei  $\mathbf{L}_{\text{FDS,u}}$  der Lokalisierungsoperator aus (5.11) ist und  $z_u$  den Abstand vom Gummipuffer zum Boden darstellt. Der Gummipuffer wird als auf Druck belastete Feder modelliert. Dämpfungseffekte werden vernachlässigt. Auf Basis der vom Hersteller zur Verfügung gestellten Messdaten wurde für die Federkraft das Regressionsmodell

$$F_F(z_u) = \begin{cases} k_{F,1} z_u^2 + k_{F,2} z_u & z_u < 0 \\ 0 & z_u \geq 0 \end{cases}, \quad (5.21)$$

ermittelt. Die Parameter  $k_{F,1}$  und  $k_{F,2}$  wurden mit einem Kleinst-Quadrate-Ansatzes optimiert und sind in Tabelle 5.1 gegeben.

## 5.4 Formulierung von Zwangsbedingungen

Mit der Herleitung der Massen- und Steifigkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{M}}$  und  $\hat{\mathbf{K}}$  in Abschnitt 5.2 und der eingprägten Kräfte  $\hat{\mathbf{F}}$  des flexiblen MKS in Abschnitt 5.3 können die ungebundenen Bewegungsgleichungen entsprechend (2.46) aufgestellt werden. Zur Beschreibung von

erzwungenen Kraftflüssen im flexiblen MKS werden im Folgenden die im flexiblen MKS auftretenden 28 Zwangsbedingungen entsprechend (2.48) aufgestellt. Alle hier modellierten Zwangsbedingungen sind holonom, d. h. sie sind lageabhängig. Sie hängen linear vom Vektor der Freiheitsgrade des flexiblen MKS  $\hat{\mathbf{q}}$  ab und können daher auch in der Matrixform

$$\mathbf{g}(\hat{\mathbf{q}}) = \mathbf{G}_1 \hat{\mathbf{q}} + \mathbf{g}_0 = \mathbf{0} \quad (5.22)$$

geschrieben werden. Die Matrix  $\mathbf{G}_1 = (\mathbf{L}_{g,1}^\top, \dots, \mathbf{L}_{g,27}^\top)^\top$  enthält die entsprechenden Lokalisierungsoperatoren und der Vektor  $\mathbf{g}_0 = (g_{0,1}, \dots, g_{0,27})^\top$  enthält Konstanten.

### Führung des Fallrahmens

Der in Abbildung 4.1 dargestellte Fallrahmen kann aufgrund der Vertikalführung an den Schienen keine Translation in  ${}_1x$  und  ${}_1y$  Richtung ausführen. Entsprechend müssen die  $x$ - und  $y$ -Komponente der Freiheitsgrade des Fallrahmens (5.4)  $\mathbf{q}^{(\text{FR})}$  Null sein.

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = [\mathbf{q}^{(\text{FR})}]_{1. \text{ und } 2. \text{ Zeile}} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{g,1} \\ \mathbf{L}_{g,2} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (5.23)$$

wobei mit den Lokalisierungsoperatoren  $\mathbf{L}_{g,1}$ ,  $\mathbf{L}_{g,2}$  die entsprechenden Freiheitsgrade des Fallrahmens  $\mathbf{q}^{(\text{FR})}$  (5.4) aus dem Vektor der Freiheitsgrade des flexiblen MKS  $\hat{\mathbf{q}}$  extrahiert werden.

### Verbindung des oberen Tragwerks mit dem Fallrahmen

Das in Abbildung 4.2a abgebildete obere Tragwerk ist an den Hauptknoten 1, 3 und 5 am Fallrahmen fest gelagert. Die drei Hauptknoten können dementsprechend keine Translation und keine Drehung gegenüber dem Fallrahmen ausführen. Für den Hauptknoten 1 ergibt sich die Zwangsbedingung durch Gleichsetzen der Position des Hauptknotens 1 und des Fallrahmens zu

$$\begin{pmatrix} g_3 \\ g_4 \\ g_5 \end{pmatrix} = \mathbf{r}_Q^{(\text{OT})} + \mathbf{r}_{Q,\text{HK1}}^{(\text{OT})} + \mathbf{q}_{\text{trans, HK1}}^{(\text{OT})} - \mathbf{r}_Q^{(\text{FR})} - \mathbf{r}_{Q,\text{HK1}}^{(\text{FR})} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{g,3} \\ \mathbf{L}_{g,4} \\ \mathbf{L}_{g,5} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} g_{0,3} \\ g_{0,4} \\ g_{0,5} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.24)$$

Die Position des Hauptknoten 1 setzt sich zusammen aus der Position des Körperreferenzpunktes  $Q_{\text{OT}}$  des oberen Tragwerks  $\mathbf{r}_Q^{(\text{OT})}$ , des konstanten Vektors vom Körperrefe-

renzpunkt  $Q_{OT}$  des oberen Tragwerks zum Hauptknoten 1  $\mathbf{r}_{Q, HK1}^{(OT)}$ , und der elastischen Verschiebung des Hauptknotens 1  $\mathbf{q}_{\text{trans}, HK1}^{(OT)}$ . Die Position des Fallrahmens ergibt sich aus der Position des Körperreferenzpunktes  $Q_{FR}$  des Fallrahmens,  $\mathbf{r}_Q^{(FR)}$ , und des konstanten Vektors vom Körperreferenzpunkt  $Q_{FR}$  des Fallrahmens zum Hauptknoten 1  $\mathbf{r}_{Q, HK1}^{(FR)}$ . Die Zwangsbedingungen  $g_6, g_7, g_8$  und  $g_9, g_{10}, g_{11}$ , für die Hauptknoten 3 und 5 werden analog zu (5.24) gebildet, wobei für Hauptknoten 3 der Verbindungsvektor  $\mathbf{r}_{Q, HK3}^{(FR)}$  entfällt, da der Körperreferenzpunkt  $Q_{FR}$  des Fallrahmens mit dem Hauptknoten 3 übereinstimmt.

Die Blockierung der Drehfreiheitsgrade der Hauptknoten 1, 3 und 5 durch die Festlagerung des oberen Tragwerks kann exemplarisch für Hauptknoten 1 durch die Zwangsbedingung

$$\begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{13} \\ g_{14} \end{pmatrix} = \mathbf{q}_{\text{rot}, HK1}^{(OT)} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{g,12} \\ \mathbf{L}_{g,13} \\ \mathbf{L}_{g,14} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{q}} = 0 \quad (5.25)$$

ausgedrückt werden, wobei  $\mathbf{q}_{\text{rot}, HK1}^{(OT)}$  die Verdrehung des Hauptknotens 1 darstellt. Die Zwangsbedingungen  $g_{15}, g_{16}, g_{17}$  und  $g_{18}, g_{19}, g_{20}$  für die Blockierung der Drehfreiheitsgrade der Hauptknoten 3 und 5 können analog zu (5.25) angeschrieben werden.

## Verbindung des oberen und unteren Tragwerks

Das in Abbildung 4.1 sowie in Abbildung 4.2 dargestellte obere und untere Tragwerk sind durch die Gelenkmodule so miteinander verbunden, dass sie sich nur vertikal relativ zueinander bewegen können. Die Hauptknoten 7, 8 und 9 des oberen Tragwerks und 2, 3 und 4 des unteren Tragwerks können jeweils keine relative Translation in vertikaler Richtung zueinander ausführen. Die entsprechenden Zwangsbedingungen lassen sich analog zu (5.24) für die Hauptknotens 7 des oberen Tragwerks mit Hauptknoten 2 des unteren Tragwerks mit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \end{pmatrix} &= \left[ \mathbf{r}_Q^{(OT)} + \mathbf{r}_{Q, HK7}^{(OT)} + \mathbf{q}_{\text{trans}, HK7}^{(OT)} - \mathbf{r}_Q^{(UT)} - \mathbf{r}_{Q, HK2}^{(UT)} - \mathbf{q}_{\text{trans}, HK2}^{(UT)} \right]_{1. \text{ und } 2. \text{ Zeile}} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{g,21} \\ \mathbf{L}_{g,22} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{q}} + \begin{pmatrix} g_{0,3} \\ g_{0,4} \\ g_{0,5} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.26)$$

angeben. Die Zwangsbedingungen  $g_{23}, g_{24}, g_{25}, g_{26}$  zur Kopplung der Hauptknoten 3 und 4 des unteren Tragwerks sowie 8 und 9 des oberen Tragwerks ergeben sich analog

zu (5.26).

### Vorspannung des Feder-Dämpfer-Systems

Die Vorspannung der Feder des in Abbildung 4.4 abgebildeten Feder-Dämpfer-System muss mit einer Zwangsbedingung ausgedrückt werden, um das Ausfedern über den Anschlag hinaus zu verhindern. Die Zwangsbedingung

$$\begin{aligned}
 g_{27} &= \left[ \mathbf{r}_Q^{(OT)} + \mathbf{r}_{Q,HK10}^{(OT)} + \mathbf{q}_{\text{trans},HK10}^{(OT)} - \mathbf{r}_Q^{(UT)} - \mathbf{r}_{Q,HK1}^{(UT)} - \mathbf{q}_{\text{trans},HK1}^{(UT)} \right]_{3. \text{ Zeile}} - l_{\text{FDS}} \\
 &= \mathbf{L}_{g,27} \hat{\mathbf{q}} + g_{0,27} = 0
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

blockiert eine Ein- und Ausfederung des Feder-Dämpfer-Systems. Die Vektoren  $\mathbf{r}_{Q,HK10}^{(OT)}$  und  $\mathbf{r}_{Q,HK1}^{(UT)}$  sind Null, da die Referenzkoordinatensysteme ihren Ursprung in den jeweiligen Hauptknoten haben. Die mit (5.27) verbundene Zwangskraft ist real jedoch nur präsent, solange das vorgespannte Feder-Dämpfer-System nicht einfedert. Dementsprechend darf die Zwangsbedingung nur dann aktiv sein, wenn die Zwangskraft eine Ausfederung über den Anschlag hinaus verhindert. Diesem Umstand wird mit einer Schaltbedingung im Solver Rechnung getragen, was im Folgenden nicht weiter detailliert wird.

### Blockierung des Fallrahmens

Zu Beginn der Fallversuche befindet sich das MAFDS im statischen hängenden Zustand. Die vertikale Position des Fallrahmens  $\mathbf{r}_Q^{(FR)}$  wird dafür mit einer Zwangsbedingung so eingestellt, dass sich die Fallhöhe  $h$  des MAFDS ergibt, siehe Abbildung 4.1.

$$\begin{aligned}
 g_{28} &= \left[ \mathbf{r}_Q^{(FR)} \right]_{3. \text{ Zeile}} = \text{const.} \\
 &= \mathbf{L}_{g,28} \hat{\mathbf{q}} + g_{0,28} = 0
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

## 5.5 Lösung der Bewegungsgleichungen

Mit Herleitung der Massenmatrix  $\hat{\mathbf{M}}$ , Steifigkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{K}}$  und Dämpfungsmatrix  $\hat{\mathbf{D}}$  in Abschnitt 5.2, der Definition der eingepprägten Kräfte  $\hat{\mathbf{F}}(\hat{\mathbf{q}})$  in Abschnitt 5.3 und der

Zwangsbedingungen  $g(\hat{q})$  in Abschnitt 5.4 sind die gekoppelten Bewegungsgleichungen als DAE entsprechend (2.49)

$$\hat{M}\hat{q}'' + \hat{D}\hat{q}' + \hat{K}\hat{q} = \hat{F}(\hat{q}) + \mathbf{B}^\top \lambda \quad (5.29a)$$

$$g(\hat{q}) = 0 \quad (5.29b)$$

mit der Jacobi-Matrix

$$\mathbf{B}^\top = \frac{\partial g^\top}{\partial \hat{q}}. \quad (5.30)$$

gegeben. Im Folgenden wird beschrieben, wie das flexible MKS (5.29) mit dem in Abschnitt 2.4.7 vorgestellten HHT- $\alpha$ -Verfahren simuliert wird und die den in Abschnitt 4.4 beschriebenen Systemausgängen entsprechenden Modellausgänge berechnet werden.

## 5.5.1 Statische Simulation der Anfangsbedingungen und Zeitintegration

Damit die DAE (2.49) mit dem in Abschnitt 2.4.7 vorgestellten HHT- $\alpha$ -Verfahren simuliert werden kann, müssen zunächst Anfangsbedingungen bestimmt werden. Wie in Abschnitt 4.3 beschrieben, befindet sich das MAFDS zu Beginn eines Fallversuches in hängendem Zustand und erfährt eine statische Belastung aufgrund seines Eigengewichts. Dies wird mit der Zwangsbedingung  $g_{28}$  sichergestellt, siehe Abschnitt 5.4. Daher muss zunächst die statische Lösung  $\hat{q}_0$  des flexiblen MKS berechnet werden. Diese ergeben sich neben den LAGRANGE Multiplikatoren  $\lambda_0$  durch Lösung der um die Trägheits- und Dämpfungskräfte gekürzten, gekoppelten Bewegungsgleichungen (2.49)

$$\hat{K}\hat{q} - \hat{F}(\hat{q}_0) - \mathbf{B}^\top \lambda_0 = 0 \quad (5.31a)$$

$$g(\hat{q}_0) = 0, \quad (5.31b)$$

wobei die eingepprägten Kräfte  $\hat{F}(\hat{q})$  von den Freiheitsgraden des flexiblen MKS  $\hat{q}$  abhängig sind. Das Gleichungssystem wird mit dem in MATLAB® implementierten Trust-Region-Verfahren gelöst. Als Startwert für die Optimierung werden lediglich die Positionen der drei Körper vorgegeben, die aus der Fallhöhe  $h$  des MAFDS resultieren. Die elastischen Freiheitsgrade werden zu Null gesetzt.

Die so ermittelte statische Lösung  $\hat{q}_0$  dient als Startwerte für die Simulation mit dem in Abschnitt 2.4.7 vorgestellten HHT- $\alpha$ -Verfahren. Die Zeitschrittbreite wird zu  $t_\Delta = 1 \cdot 10^{-3}$  s gewählt und die NEWMARK-Parameter werden zu  $\alpha_N = 0,25$ ,  $\beta_N = 0,3906$  und  $\gamma_N = 0,75$  gesetzt. Die Simulation startet bei  $t_0 = 0$  und bricht automatisch nach

$N_t$  Zeitschritten ab, sobald die Einfederung  $z_r$  ihren statischen Wert erreicht. Für die statische Simulation wird die in Abschnitt 5.4 definierte Zwangsbedingung  $g_{28}$  zur Fixierung des Fallrahmens deaktiviert.

**Bemerkung 3** Bei der Zeitintegration des Systems mit dem HHT- $\alpha$ -Verfahren sind in jedem Zeitschritt eine Vielzahl an Matrixmultiplikationen und die Lösung eines linearen Gleichungssystems notwendig. Die hierfür benötigte Rechenzeit kann reduziert werden, indem die Matrizen  $\hat{M}$ ,  $\hat{D}$ ,  $\hat{K}$  in (5.29) in dünnbesetzte Matrizen umgewandelt werden. In MATLAB® erfolgt dies mit dem sparse-Befehl. Die Rechenzeit für die Zeitintegration des Modells des SFB-Demonstrators konnte so halbiert werden. Zudem reduzierte sich die Speicherauslastung auf ein Viertel, wovon insbesondere die Datenübertragung zwischen den MATLAB® Workern und Client profitiert, siehe Abbildung 3.2.

Eine weitere Möglichkeit zur Beschleunigung der Rechendauer besteht in der Simulation des Modells mittels Grafikprozessoren (engl.: Graphics Process Unit (GPU)). In dieser Arbeit kommen GPUs zur Simulation des Modells jedoch nicht zum Einsatz.

## 5.5.2 Berechnung der Modellausgänge

Aus der Simulation resultieren die für die Zeitschritte  $t_0, t_1, \dots, t_{N_t}$  simulierten Vektoren der Freiheitsgrade  $[\hat{q}_0, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_{N_t}]$ . Für jeden Vektor werden die Verläufe der in Abschnitt 4.4 beschriebenen Systemausgänge auf Basis der simulierten Verschiebungsvektoren  $[\hat{q}_0, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_{N_t}]$  für die Zeitschritte berechnet.

Der Zeitverlauf der simulierten Einfederung des Feder-Dämpfer-Systems ergibt sich durch

$$z_r = ([L_{FDS,o}]_{3,\text{Zeile}} - [L_{FDS,u}]_{3,\text{Zeile}}) ([\hat{q}_0, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_{N_t}] - \hat{q}_0) \quad (5.32)$$

wobei  $L_{FDS,o}$ ,  $L_{FDS,u}$  die Lokalisierungsoperatoren aus (5.2.3) sind. Die simulierte Einfederung wird zudem so tariert, dass der Verlauf nicht mit der Einfederung im hängenden Zustand sondern bei 0 m beginnt.

Der Zeitverlauf der simulierten gemittelten Normalspannung in den Balken ergibt sich entsprechend (2.64) zu

$$\bar{\sigma}_n = E(u_2 - u_1) = E([L_{DMS}]_{7,\text{Zeile}} - [L_{DMS}]_{1,\text{Zeile}}) ([\hat{q}_0, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_{N_t}] - \hat{q}_0) \quad (5.33)$$

wobei der Lokalisierungsoperator  $L_{DMS}$  die Freiheitsgrade des finiten Elements aus dem Vektor der Freiheitsgrade des flexiblen MKS extrahiert, in dessen Bereich einer der DMS im Experiment appliziert sind. Aufgrund der Symmetrie sind die berechneten Normalspannungen in allen drei mit DMS versehenen Balken gleich und es bedarf nicht

---

der für die Messungen durchgeführten Mittelung der in den drei Balken gemessenen Normalspannung (4.2). Auch die simulierte gemittelte Normalspannung ist so tariert, dass der Verlauf nicht mit der statischen Normalspannung im hängenden Zustand sondern bei 0 Pa beginnt.

Auf Basis der Verläufe von (5.32) und (5.33) können entsprechend zur Darstellung in Abbildung 4.6 die den  $N_y = 4$  in Abschnitt 4.4 definierten Systemausgängen ( $\sigma_{N,\max}$ ,  $\sigma_{N,\text{stat}}$ ,  $z_{r,\max}$  und  $z_{r,\text{stat}}$ ) entsprechenden Modellausgänge,  $\eta_{\text{HiFi},1}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta), \dots, \eta_{\text{HiFi},N_y}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$ , angegeben werden. Die Inputs  $\mathbf{x}_m$  des High-Fidelity-Modells wurden in Abschnitt 4.3 definiert und die zu kalibrierenden Modellparameter  $\boldsymbol{\theta}_\eta$  werden im Rahmen einer Sensitivitätsanalyse in Abschnitt 6.1.1 bestimmt.



---

# 6 Quantifizierung der Parameter- und Modellunsicherheit

---

In diesem Kapitel wird die in Kapitel 3 vorgestellte und in Algorithmus 4 zusammengefasste Methode zur effizienten Quantifizierung der Parameter- und Modellunsicherheit angewendet. Als Anwendungsbeispiel dient der in Kapitel 4 präsentierte, und in Kapitel 5 modellierte SFB-Demonstrator. Zunächst werden in Abschnitt 6.1 die notwendigen Schritte zur Vorbereitung der statistischen Modellkalibrierung durchlaufen. Nach erfolgter Kalibrierung wird in Abschnitt 6.2 das Konvergenz- und des Adaptionverhalten von Algorithmus 4 und in Abschnitt 6.3 die A-posteriori-Verteilung untersucht. In Abschnitt 6.4 wird die aufgrund der Kalibrierung erreichte Steigerung der Vorhersagegenauigkeit des High-Fidelity-Modells untersucht.

## 6.1 Vorbereitung und Durchführung der statistischen Modellkalibrierung

Als ersten Schritt hin zur Quantifizierung der Parameter- und Modellunsicherheit werden zunächst die zu kalibrierenden Parameter  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_\eta, \boldsymbol{\theta}_\delta)$  bestimmt. Diese bestehen aus den zu kalibrierenden Modellparameter  $\boldsymbol{\theta}_\eta$  des im vorherigen Kapitel hergeleiteten High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi}, n_y}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  und den zu kalibrierenden Diskrepanz-Hyperparameter  $\boldsymbol{\theta}_\delta$ , siehe Abschnitt 3.1. Zur Bestimmung der zu kalibrierenden Modellparameter  $\boldsymbol{\theta}_\eta$  wird zunächst eine Sensitivitätsanalyse basierend auf den *SOBOL-Indices* durchgeführt. In Abschnitt 6.1.2 werden anschließend die zu kalibrierenden Diskrepanz-Hyperparameter  $\boldsymbol{\theta}_\delta$  und die Initialwerte  $\boldsymbol{\theta}^{(0)} = (\boldsymbol{\theta}_\eta^{(0)}, \boldsymbol{\theta}_\delta^{(0)})$  bestimmt sowie in Abschnitt 6.1.3 die A-priori-Verteilung  $p_0(\boldsymbol{\theta})$  beschrieben. Mit den in diesem Abschnitt geleisteten Vorarbeiten kann die A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_A)$  schließlich entsprechend Algorithmus 4 bestimmt werden.

---

## 6.1.1 Sensitivitätsanalyse

Mit der Modellierung des SFB-Demonstrators in Kapitel 5 wurden auch die im High-Fidelity-Modell vorkommenden Parameter beschrieben, siehe Tabelle 5.1. In diesem Abschnitt wird auf Basis von Abschnitt 2.2.7 eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt, um mit den *Total-SOBOL-Indices* die relevanten Modellparameter  $\theta_\eta$  zu identifizieren. Die Sensitivitätsanalyse wurde mit den  $N_{\text{Sobol}} = 13$  in Tabelle 6.1 aufgelisteten Parameter des Modells durchgeführt. Der Input  $\boldsymbol{x}$  wird für die Sensitivitätsanalyse auf die Fallhöhe 0,04 m und das Zusatzgewicht  $m_{\text{add}} = 40$  kg fixiert, siehe Abschnitt 4.3. Zu den möglichen Variationsgrenzen der Parameter liegt kein A-Priori-Wissen vor. Diese werden daher aufgrund von Plausibilitätsüberlegungen festgelegt. Die Variation der Steifigkeits- und Dämpfungparameter des Feder-Dämpfer-Systems  $k_{\text{FDS},1}$ ,  $d_{\text{FDS},11}$ ,  $d_{\text{FDS},21}$  sowie des elastischen Fuß  $k_{\text{F},1}$ ,  $k_{\text{F},2}$  werden für die Sensitivitätsanalyse zu  $\pm 30\%$  um ihren in Tabelle 5.1 angegebenen Nominalwert angenommen, siehe Tabelle 6.1. Die Variation der Parameter  $E_{\text{B}}$ ,  $E_{\text{A1}}$ ,  $E_{\text{A2}}$ ,  $\rho_{\text{A2}}$ ,  $\rho_{\text{B}}$ ,  $m_{\text{VK}}$  werden zu  $\pm 5\%$  um ihren nominalen Wert angenommen. Für die Dämpfungparameter  $\alpha_{\text{D}}$ ,  $\beta_{\text{D}}$  wird eine Variation zwischen 0 und dem vom Autor empirisch ermittelten Wert 0,15 angenommen. Die aufgelisteten Parameter wurden aufgrund von praktischen Überlegungen ausgewählt. Die Hinzunahme von weiteren Parametern, wie z. B. die geometrischen Abmaße des Tragwerks, würde die Anzahl der notwendigen Modellauswertungen und damit die Rechenkosten in die Höhe treiben.

Die *Total-SOBOL-Indices* werden auf Basis von 5000 Samples geschätzt, sodass insgesamt  $5000 \cdot (N_{\text{Sobol}} + 2) = 75\,000$  Modellauswertungen benötigt werden, die parallel auf dem Lichtenberg Cluster der TU Darmstadt berechnet wurden. Es wurde auf 384 Rechenkernen gerechnet und die Berechnungsdauer betrug 2 Stunden und 38 Minuten.

Die *Total-SOBOL-Indices* (2.22) wurden für die vier in Abschnitt 5.5.2 beschriebenen Modellausgänge  $\sigma_{\text{N,max}}$ ,  $\sigma_{\text{N,stat}}$ ,  $z_{\text{r,max}}$ ,  $z_{\text{r,stat}}$  berechnet und sind in Abbildung 6.1 dargestellt. Anhand der *Total-SOBOL-Indices*  $S_{\text{T}}$  lässt sich beobachten, dass nur die vier Parameter  $k_{\text{FDS},1}$ ,  $d_{\text{FDS},21}$ ,  $E_{\text{B}}$  und  $\alpha_{\text{D}}$  der insgesamt  $N_{\text{Sobol}} = 13$  in Tabelle 6.1 aufgelisteten Parameter einen relevanten Einfluss auf die vier Modellausgänge haben. Die beiden statischen Modellausgänge  $z_{\text{r,stat}}$  und  $\sigma_{\text{N,stat}}$  werden erwartungsgemäß jeweils nur durch den in Abschnitt 5.3 bzw. Abschnitt 5.2.1 eingeführten Steifigkeitsparameter  $k_{\text{FDS},1}$  und E-Modul  $E_{\text{B}}$  des Balkenelements B beeinflusst. Dies ist nachvollziehbar, da die Normalspannungen über ein Balkenelement B gemessen werden und die Tragwerke zu überwiegender Teil mit Balkenelement B modelliert wurden, siehe Abschnitt 5.2.1.

Die dynamischen Modellausgänge  $z_{\text{r,max}}$  und  $\sigma_{\text{N,max}}$  werden überwiegend von dem in Abschnitt 5.3 und Abschnitt 5.2.4 eingeführten Dämpfungsparameter  $d_{\text{FDS},21}$  und dem

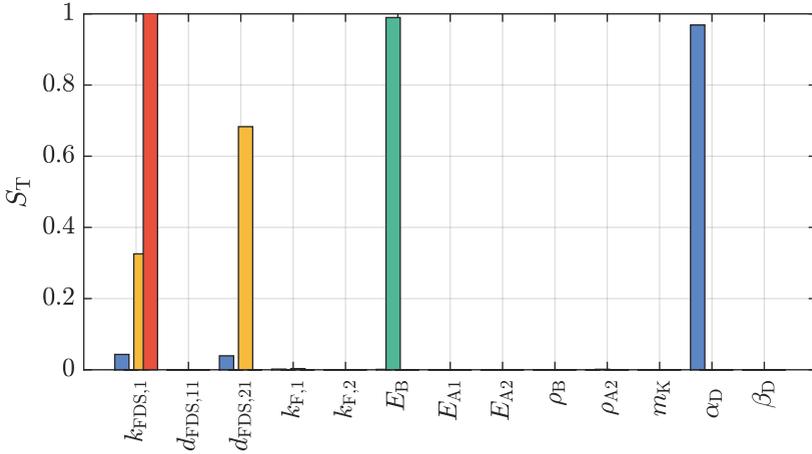


Abbildung 6.1: Total-SOBOL-Indices für die Modellausgänge  $\sigma_{N,max}$  (■),  $\sigma_{N,stat}$  (■),  $z_{r,max}$  (■),  $z_{r,stat}$  (■)

Dämpfungsparameter der Tragwerke  $\alpha_D$ , sowie in geringerem Maße vom Steifigkeitsparameter  $k_{FDS,1}$  beeinflusst. Der erste Dämpfungsparameter  $d_{FDS,11}$  für die Dämpfung hat dabei kaum Einfluss auf die dynamischen Modellausgänge. Dies kann dadurch erklärt werden, dass dieser Parameter nur bei der Ausfederung des Feder-Dämpfer-Systems wirksam ist, nachdem der Wert für die maximale absolute Einfederung  $z_{r,max}$  schon erreicht ist, siehe Abbildung 4.6. Der zweite Dämpfungsparameter  $d_{FDS,21}$  ist während der Einfederung des Feder-Dämpfer-Systems wirksam und hat demnach einen hohen Einfluss auf die maximale absolute Einfederung  $z_{r,max}$ .

Insgesamt lässt sich feststellen, dass die Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse physikalisch plausibel sind. Von den  $N_{Sobol} = 13$  in der Sensitivitätsanalyse betrachteten Parametern des Modells können anhand von Abbildung 6.1 die  $N_\eta = 4$  zu kalibrierenden Modellparameter  $\theta_\eta$  identifiziert werden zu

$$\theta_\eta = (k_{FDS,1}, d_{FDS,21}, E_B, \alpha_D). \quad (6.1)$$

Tabelle 6.1: Variationsgrenzen der mit der Sensitivitätsanalyse untersuchten Parameter  $\theta_{\text{Sobol}}$

Parameter	Symbol	Parameter der Gleichverteilung $\mathcal{U}(a, b)$			Einheit
		$\mathbb{E}$	$a$	$b$	
<b>Feder-Dämpfer-System</b>					
Steifigkeitsparameter	$k_{\text{FDS},1}$	$3,888 \cdot 10^4$	$2,722 \cdot 10^4$	$5,055 \cdot 10^4$	N/m
Dämpfungsparameter	$d_{\text{FDS},1,1}$	$3,503 \cdot 10^3$	$2,452 \cdot 10^3$	$4,554 \cdot 10^3$	Ns/m
	$d_{\text{FDS},2,1}$	$2,590 \cdot 10^3$	$1,813 \cdot 10^3$	$3,367 \cdot 10^3$	Ns/m
<b>Tragwerkparameter</b>					
E-Modul B	$E_B$	71,800	71,082	72,518	GPa
E-Modul A1	$E_{A1}$	210	207,900	212,100	GPa
E-Modul A2	$E_{A2}$	210	207,900	212,100	GPa
Dichte A2	$\rho_{A2}$	7800	7722	7878	kg/m <sup>3</sup>
Dichte B	$\rho_B$	2813	2784,870	2841,130	kg/m <sup>3</sup>
Verbindungskugelmasse	$m_{\text{VK}}$	0,268	0,265	0,271	kg
Dämpfungsparameter	$\alpha_D$	0,075	0	0,15	–
	$\beta_D$	0,075	0	0,15	–
<b>Gummipuffer</b>					
Steifigkeitsparameter	$k_{\text{F},1}$	$-1,132 \cdot 10^7$	$-1,471 \cdot 10^7$	$-7,921 \cdot 10^6$	N/m
	$k_{\text{F},2}$	$1,299 \cdot 10^4$	$9,090 \cdot 10^3$	$1,688 \cdot 10^4$	N/m

## 6.1.2 Generierung von Initialwerten

Die vom Algorithmus 4 erzeugte (Markov-)Kette  $(\theta^{(0)}, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(N_S)})$  beginnt mit Initialwerten für die Modellparameter und die Diskrepanz-Hyperparameter  $\theta^{(0)} = (\theta_\eta^{(0)}, \theta_\delta^{(0)})$ , wobei  $\theta_\eta$  den in Abschnitt 6.1.1 bestimmten Modellparametern entspricht.

### Modellparameter

Für die Modellparameter  $k_{\text{FDS},1}$ ,  $d_{\text{FDS},2,1}$ ,  $E_B$  des in Kapitel 5 hergeleiteten High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HIFI},n_y}(\mathbf{x}_m, \theta_\eta)$  liegen die Nominalwerte in Tabelle 5.1 vor, die als Initialwerte für die Kalibrierung verwendet werden, siehe Tabelle 6.2. Für den Dämpfungsparameter der Tragwerke  $\alpha_D$  wird der vom Autor empirisch ermittelte Wert 0,075 als Initialwert angenommen.

Tabelle 6.2: Initialwerte  $\theta^{(0)} = (\theta_\eta^{(0)}, \theta_\delta^{(0)})$  für die statistische Modellkalibrierung

Initialwert	Symbol	Wert	Einheit
<b>Modellparameter <math>\theta_\eta^{(0)}</math></b>			
Steifigkeitsparameter FDS	$k_{\text{FDS},1}$	$3,888 \cdot 10^4$	N/m
Dämpfungsparameter FDS	$d_{\text{FDS},21}$	$2,590 \cdot 10^3$	Ns/m
E-Modul Balkenelement B	$E_B$	71,800	GPa
Dämpfungsparameter Tragwerke	$\alpha_D$	0,075	–
<b>Diskrepanz-Hyperparameter <math>\theta_\delta^{(0)}</math></b>			
Diskrepanz-Signalvarianz $\sigma_{N,\text{max}}$	$\sigma_{f,\delta,1}^2$	$\sigma_{f,\delta,1,\text{opt}}^2 = 26,896$	MPa <sup>2</sup>
Diskrepanz-Signalvarianz $\sigma_{N,\text{stat}}$	$\sigma_{f,\delta,2}^2$	$\sigma_{f,\delta,2,\text{opt}}^2 = 6,599 \cdot 10^{-5}$	MPa <sup>2</sup>
Diskrepanz-Signalvarianz $z_{r,\text{max}}$	$\sigma_{f,\delta,3}^2$	$\sigma_{f,\delta,3,\text{opt}}^2 = 1,468 \cdot 10^{-5}$	m <sup>2</sup>
Diskrepanz-Signalvarianz $z_{r,\text{stat}}$	$\sigma_{f,\delta,4}^2$	$\sigma_{f,\delta,4,\text{opt}}^2 = 1,555 \cdot 10^{-7}$	m <sup>2</sup>

## Diskrepanz-Hyperparameter

In diesem Abschnitt werden für die in Abschnitt 3.1 eingeführten Diskrepanz-Hyperparameter  $\theta_\delta$  der Diskrepanzfunktion  $\delta_{n_y}(\mathbf{x}_m)$  geeignete Initialwerte  $\theta_\delta^{(0)}$  mithilfe einer Optimierung bestimmt. Deren Ziel ist es, dass die GP-basierte Diskrepanzfunktion  $\delta_{n_y}(\mathbf{x}_m)$  einen Diskrepanz-Trainingsdatensatz möglichst adäquat repräsentiert. Da die Kalibrierung mit  $N_y = 4$  Modellausgängen erfolgt (siehe Abschnitt 4.4 und Abschnitt 5.5.2), werden  $n_y = 1, \dots, N_y$  Diskrepanz-Trainingsdatensätze  $\mathcal{Y}_{\delta,n_y} = (\mathbf{X}_m, \mathbf{y}_{n_y} - \boldsymbol{\eta}_{\text{HiFi},n_y}(\boldsymbol{\theta}_\eta^{(0)}))$  benötigt. Diese ergeben sich durch Subtraktion des Vektors der Auswertungen des High-Fidelity-Modells für die in Tabelle 6.2 gegebenen Initialwerte der Modellparameter  $\boldsymbol{\eta}_{\text{HiFi},n_y}(\boldsymbol{\theta}_\eta^{(0)}) = (\eta_{\text{HiFi},n_y}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\theta}_\eta^{(0)}), \dots, \eta_{\text{HiFi},n_y}(\mathbf{x}_M, \boldsymbol{\theta}_\eta^{(0)}))^\top$  von dem zuvor in Abschnitt 4.4 definierten Vektor der entsprechenden Messungen  $\mathbf{y}_{n_y}$ .

Die Diskrepanz-Rauschvarianz zur Berücksichtigung des Messrauschens der Messdaten kann direkt aus den in Tabelle 4.3 angegebenen Messungen bestimmt werden. Da für jeden der in Abbildung 4.5 abgebildeten  $M = 20$  Inputs  $\mathbf{x}_m$  fünf Messungen durchgeführt wurden, werden die  $M = 20$  Varianzen der jeweils zu einem der  $M = 20$  Inputs  $\mathbf{x}_m$  gehörenden 5 Messungen für die  $N_y$  Modellausgänge bestimmt und zu den empirisch bestimmten Diskrepanz-Rauschvarianzen  $\sigma_{n,\delta,1}^2, \dots, \sigma_{n,\delta,N_y}^2$  gemittelt.

Die Optimierung der Diskrepanz-Hyperparameter  $\theta_\delta$  erfolgt analog wie in Abschnitt 3.2.2 mit dem in der MATLAB® Toolbox UQLAB implementierten hybriden genetischen Algorithmus (HGA) auf Basis der Diskrepanz-

Trainingsdatensätze  $\mathcal{Y}_{\delta, n_y}$  [52]. Dabei werden für jeden der  $N_y = 4$  Modellausgänge die optimalen Diskrepanz-Signalvarianzen  $\sigma_{f, \delta, 1, \text{opt}}^2, \dots, \sigma_{f, \delta, 4, \text{opt}}^2$  sowie die optimalen Diskrepanz-Rauhigkeitsparameter  $\gamma_{\delta, 1, 1, \text{opt}}, \gamma_{\delta, 2, 1, \text{opt}}, \dots, \gamma_{\delta, 1, 4, \text{opt}}, \gamma_{\delta, 2, 4, \text{opt}}$  bestimmt, wobei pro Modellausgang zwei Diskrepanz-Rauhigkeitsparameter, entsprechend der Dimensionalität  $D = 2$  der Inputs  $\mathbf{x}_m$ , optimiert werden, siehe Abschnitt 2.3.1. Die zuvor bereits empirisch ermittelten  $N_y = 4$  Diskrepanz-Rauschvarianzen  $\sigma_{n, \delta, 1}^2, \dots, \sigma_{n, \delta, 4}^2$  werden bei der Optimierung konstant gehalten.

Dadurch dass zur statistischen Modellkalibrierung nur die  $M = 20$  gemittelten Messungen verwendet werden, siehe Abschnitt 4.4, fehlt die notwendige Information zur Schätzung der Diskrepanz-Rauschvarianzen. Daher werden die empirisch ermittelten Diskrepanz-Rauschvarianzen  $\sigma_{n, \delta, 1}^2, \dots, \sigma_{n, \delta, N_y}^2$  bei der Kalibrierung fixiert.

Auch die Diskrepanz-Rauhigkeitsparameter werden auf ihre optimierten Werte  $\gamma_{\delta, 1, 1, \text{opt}}, \gamma_{\delta, 2, 1, \text{opt}}, \dots, \gamma_{\delta, 1, 4, \text{opt}}, \gamma_{\delta, 2, 4, \text{opt}}$  fixiert, da die Hyperparameter im Allgemeinen, wie KENNEDY und O'HAGAN beschreiben, schwer identifizierbar sind [49]. Insgesamt lassen sich die zu kalibrierenden Diskrepanz-Hyperparameter somit schreiben zu

$$\boldsymbol{\theta}_{\delta} = \left( \sigma_{f, \delta, 1}^2, \dots, \sigma_{f, \delta, 4}^2 \right). \quad (6.2)$$

Die entsprechenden Initialwerte für die Diskrepanz-Hyperparameter  $\boldsymbol{\theta}_{\delta}^{(0)}$  sind in Tabelle 6.2 gegeben. Die zu kalibrierenden Parameter ergeben sich mit den Modellparametern (6.1) zu

$$\boldsymbol{\theta} = \left( k_{\text{FDS}, 1}, d_{\text{FDS}, 21}, E_{\text{B}}, \alpha_{\text{D}}, \sigma_{f, \delta, 1}^2, \dots, \sigma_{f, \delta, 4}^2 \right). \quad (6.3)$$

### 6.1.3 Bestimmung der A-priori-Verteilung

Im Folgenden werden geeignete A-priori-Verteilung  $p_0(\boldsymbol{\theta})$  als Grundlage für die Durchführung von BAYES'SCHER Inferenz (2.13) bestimmt um Algorithmus 4 anwenden zu können. Die A-priori-Verteilungen  $p_0(\boldsymbol{\theta})$  der Modellparameter  $\boldsymbol{\theta}_{\eta}$  und der Diskrepanz-Hyperparameter  $\boldsymbol{\theta}_{\delta}$  werden als unabhängig voneinander angenommen.

Für die A-priori-Verteilung der Modellparameter  $p_0(\boldsymbol{\theta}_{\eta})$  werden die gleichen Verteilungen angenommen wie für die Durchführung der Sensitivitätsanalyse, siehe Tabelle 6.1. In Tabelle 6.3 sind die Parameter der A-priori-Verteilungen der Modellparameter  $\boldsymbol{\theta}_{\eta}$  zusammengefasst und exemplarisch für den Steifigkeitsparameter des Feder-Dämpfer-Systems  $k_{\text{FDS}, 1}$  in Abbildung 6.2a dargestellt.

Die A-priori-Verteilung für die Diskrepanz-Signalvarianzen  $\sigma_{f, \delta, n_y, \text{opt}}^2$  basieren auf den in Abschnitt 6.1.2 bestimmten optimierten Werten  $\sigma_{f, \delta, n_y, \text{opt}}^2$  für die Diskrepanzfunktion

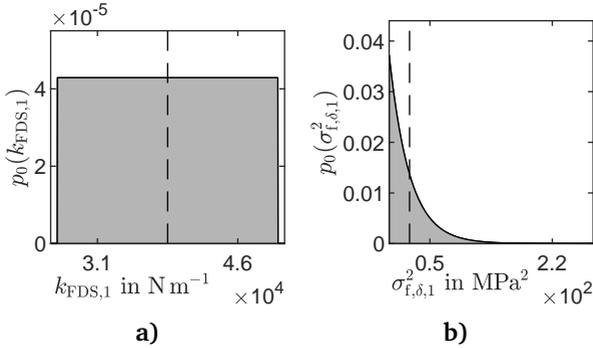


Abbildung 6.2: A-priori-Verteilung  $p_0$  exemplarisch für (a) den gleichverteilten Steifigkeitsparameter des Feder-Dämpfer-Systems  $k_{\text{FDS},1}$  und (b) die exponentiell verteilte Diskrepanz-Signalvarianz  $\sigma_{f,\delta,1}^2$ .

Tabelle 6.3: A-priori-Verteilungen der zu kalibrierenden Modellparameter  $\theta_\eta$

Parameter	Symbol	Parameter der A-priori-Verteilung			Einheit
		$\mathbb{E}$	$a$	$b$	
Steifigkeitsparameter FDS	$k_{\text{FDS},1}$	$3,888 \cdot 10^4$	$2,722 \cdot 10^4$	$5,055 \cdot 10^4$	N/m
Dämpfungsparameter FDS	$d_{\text{FDS},21}$	$2,590 \cdot 10^3$	$1,813 \cdot 10^3$	$3,367 \cdot 10^3$	Ns/m
E-Modul Balkenelement B	$E_B$	71,800	$6,821 \cdot 10^{10}$	$7,539 \cdot 10^{10}$	GPa
Dämpfungsparameter Tragwerke	$\alpha_D$	0,075	0	0,15	–

nen  $\delta_{n_y}(\mathbf{x}_m)$  der  $N_y = 4$  Modellausgänge. Für die Diskrepanz-Signalvarianzen wird als A-priori-Verteilung eine Exponentialverteilung (siehe Abschnitt 2.1.1) verwendet, die um den optimalen Wert  $\sigma_{f,\delta,n_y,\text{opt}}^2$  zentriert ist, siehe Tabelle 6.4. Diese Wahl der Verteilungsfunktion stellt die Dominanz des High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi},n_y}(\mathbf{x}, \theta_\eta)$  über die Diskrepanzfunktion  $\delta_{n_y}(\mathbf{x}_m)$  sicher, da niedrigere Werte höheren Werten der Diskrepanz-Signalvarianz gegenüber bevorzugt werden [3]. In Abbildung 6.2b ist exemplarisch die A-Priori-Verteilung der Diskrepanz-Signalvarianz  $\sigma_{f,\delta,1}^2$  dargestellt. In der statistischen Modellkalibrierung stellen sich somit nur höhere Werte für die Diskrepanz-Signalvarianzen ein, wenn dies durch das Zusammenspiel von Messungen, Modell und Diskrepanzfunktion in der Likelihood begründet ist. Dadurch wird das High-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{HiFi},n_y}(\mathbf{x}_m, \theta_\eta)$  aktiv gegenüber der Diskrepanzfunktion  $\delta_{n_y}(\mathbf{x}_m)$  bevorzugt, um

---

die Messdaten nachzubilden.

Tabelle 6.4: A-priori-Verteilungen der zu kalibrierenden Diskrepanz-Hyperparameter  $\theta_\delta$  auf Basis der optimierten Diskrepanzhyperparameter aus Tabelle 6.2 für die  $n_y = 1, \dots, 4$  Ausgänge

Parameter	Symbol	$\mathbb{E}$	A-Priori-Verteilung $p_0(\cdot)$
Diskrepanz-Signalvarianz	$\sigma_{f,\delta,n_y}$	$\sigma_{f,\delta,n_y,\text{opt}}$	$\mathcal{E}(1/\sigma_{f,\delta,n_y,\text{opt}})$

---

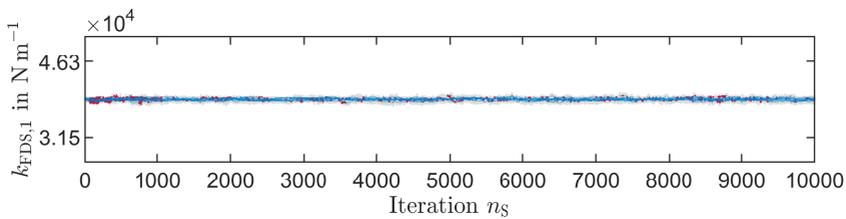
## 6.2 Untersuchung der Konvergenz und des Adaptionverhaltens

Algorithmus 4 folgend wird auf Basis der in Abschnitt 6.1.3 definierten A-priori-Verteilung  $p_0(\boldsymbol{\theta}_\eta)$  das GP-basierte Low-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi},n_y}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  wie in Abschnitt 3.2.2 generiert. Dieses wird mit  $Q = 250$  Samples der A-priori-Verteilung  $p_0(\boldsymbol{\theta}_\eta)$  generiert, sodass bei den in Abbildung 4.5 abgebildeten  $M = 20$  Messpunkten insgesamt 5000 Modellauswertungen notwendig sind. Diese werden parallel auf dem Lichtenberg Cluster berechnet. Der Schwellwert für Prädikationsunsicherheit-basierte Adaptionkriterium wird zu  $\epsilon_2 = 3,735 \cdot 10^{-5}$  ermittelt, siehe Abschnitt 2.3.2. Die initiale Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}_0$  der Vorschlagverteilung ergibt sich wie in Abschnitt 2.2.2 beschrieben auf Basis der in Tabelle 6.3 und Tabelle 6.4 angegebenen A-priori-Verteilungen der Modellparameter  $p_0(\boldsymbol{\theta}_\eta)$  und Diskrepanz-Hyperparameter  $\boldsymbol{\theta}_\delta$ .

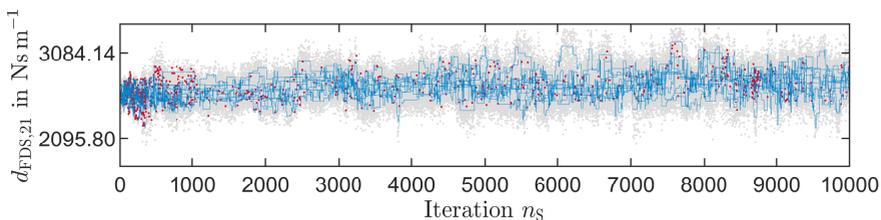
Die statistische Modellkalibrierung wird mit  $K = 10$  Ketten und einer Kettenlänge von  $N_S = 10\,000$  Samples durchgeführt. Es wird eine *Burn-In* Phase von  $N_b = 2000$  Samples und eine Trainingsphase für die Vorschlags-Kovarianzmatrix von  $N_T = 300$  angenommen. Die Rechenzeit betrug auf dem Lichtenberg Cluster bei einer Verwendung von 180 Rechenkernen 20 Stunden und 16 Minuten.

### Traceplots und Konvergenz

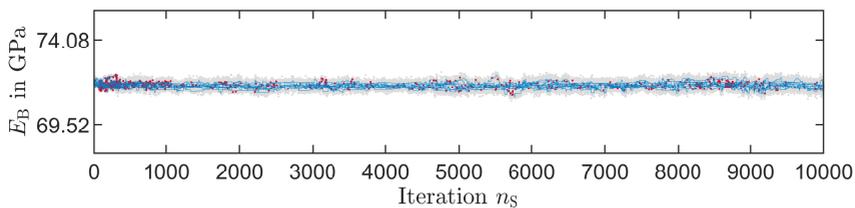
Abbildung 6.3 zeigt die Traceplots der statistischen Modellkalibrierung als Verlauf der Kette für die zu kalibrierenden Parameter  $\boldsymbol{\theta}$ . Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass Konvergenz im Allgemeinen falsifiziert, aber nicht vollständig verifiziert werden kann [16], scheinen die Trace-Plots vom visuellen Eindruck her zu konvergieren, da sich die Gestalt der Kette nach der *Burn-In*-Phase wenig ändert. Einzig für den Dämpfungsparameter  $d_{\text{FDS},21}$  des Feder-Dämpfer-Systems in Abbildung 6.3b und die Diskrepanz-Signalvarianz  $\sigma_{f,\delta,2}$  in Abbildung 6.3f scheint die Kette bis zum Ende noch nicht vollständig zu konvergieren. Grundsätzlich könnte eine höhere Anzahl an Samples  $N_S$  zum Erreichen vollständiger Konvergenz generiert werden, allerdings muss abgewogen werden, ob dies die Verwendung von zusätzlicher Rechenzeit auf dem Lichtenberg Cluster rechtfertigt. Für den Dämpfungsparameter der Tragwerke  $\alpha_D$  und die Diskrepanz-Signalvarianz  $\sigma_{f,\delta,1}$  lässt sich eine längere *Burn-In*-Phase bis ungefähr  $n_S = 1000$  erkennen, siehe Abschnitt 2.2.5. Alle anderen Parameter scheinen von Beginn an zu konvergieren.



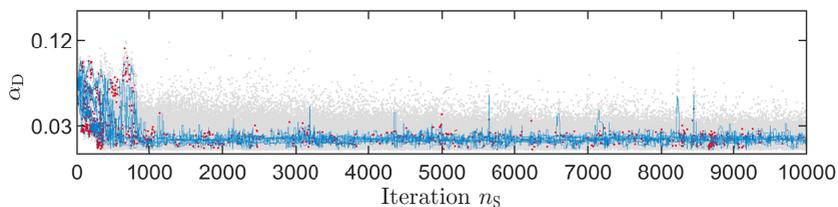
**a)**



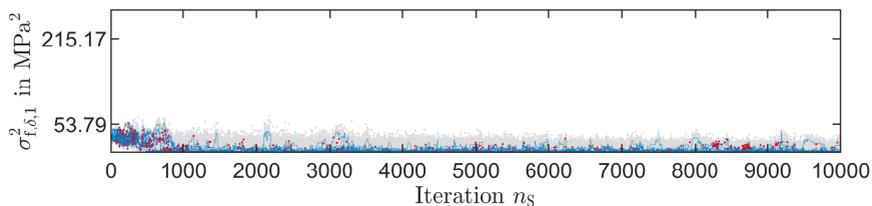
**b)**



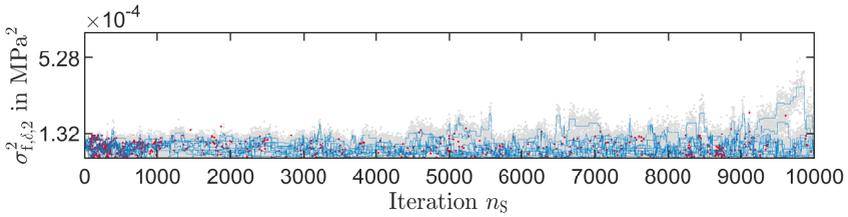
**c)**



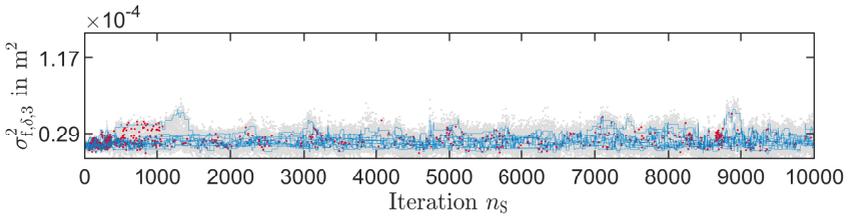
**d)**



**e)**



f)



g)

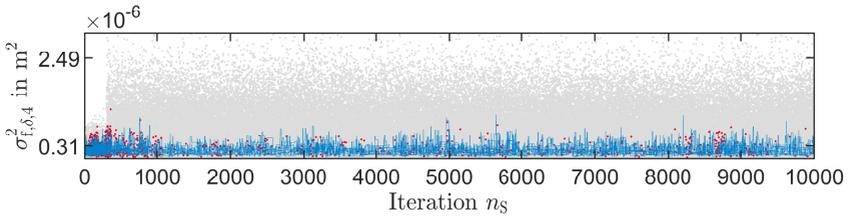


Abbildung 6.3: Trace Plots der  $K = 10$  Ketten mit verworfenen Samples der ersten Stufe ( ), in der ersten Stufe akzeptierten aber in der zweiten Stufe verworfenen Samples (•) und akzeptierten Samples der ersten und zweiten Stufe, die die Kette bilden (—) für den Steifigkeitsparameter des Feder-Dämpfer-Systems  $k_{\text{FDS},1}$  (a), Dämpfungsparameter des Feder-Dämpfer-Systems  $d_{\text{FDS},2}$  (b), E-Modul Balkenelements B  $E_{\text{B}}$  (c), Dämpfungsparameter der Tragwerke  $\alpha_{\text{D}}$  (d) und Diskrepanz-Signalvarianz  $\sigma_{\text{f},\delta,n_{\text{y}}}^2$  für die  $n_{\text{y}} = 1, \dots, 4$  Modellausgänge (e) - (g)

Die Trace Plots in Abbildung 6.3 vermitteln einen guten visuellen Eindruck von der durch Algorithmus 4 erreichten Filterung der vorgeschlagenen Samples  $\theta^*$ , wobei die in der ersten, weniger rechenintensiven Stufe zurückgewiesenen Samples in grau dargestellt sind und die blau gezeichnete erzeugte Kette umschließen. Nur sehr wenige, rot gekennzeichnete Samples der zweiten, rechenintensiven Stufe werden verworfen.

Dies deutet darauf hin, dass die Erkundung des Parameterraums in erster Linie mit dem Low-Fidelity-Modell und geringen Rechenkosten erfolgt.

Anhand der Traceplots in Abbildung 6.3 konnte bereits eine qualitative Bewertung der Konvergenz durchgeführt werden. Eine quantitative Bewertung erfolgt mit der GELMAN-RUBIN-Metrik, siehe Abschnitt 2.2.5. Der Verlauf des *potential scale reduction*-Faktor  $R$  ist in Abbildung 6.4 gegeben. Wie zu erkennen ist, konvergiert dieser an den Wert 1 und zeigt damit grundsätzlich die Konvergenz der Ketten an. Mit einer höheren Anzahl an Samples  $N_S$  ist zu erwarten dass der *potential scale reduction*-Faktor nahezu 1 wird und die vollständige Konvergenz der Ketten indiziert.

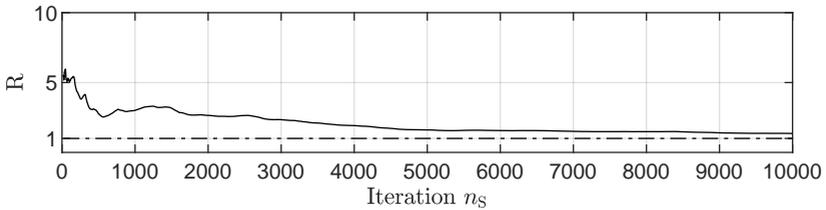


Abbildung 6.4: Verlauf des *potential scale reduction*-Faktor  $R$  über die Iterationen  $n_s$  der Ketten (—) und Grenzwert 1 (---)

## Akzeptanzraten

Die Akzeptanzraten der ersten und zweiten Stufe für die  $K = 10$  Ketten sind in Abbildung 6.5 dargestellt. Die Akzeptanzrate der ersten Stufe  $\bar{\alpha}_{\text{LoFi}}$  ist die Rate der vorgeschlagenen Samples  $\theta^*$ , für die die wenig rechenintensive Low-Fidelity-Likelihood  $L_{\text{LoFi}}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_4 | \theta^*)$  ausgewertet wird und die mit Wahrscheinlichkeit  $\alpha_{\text{LoFi}}$  akzeptiert werden, siehe Abbildung 2.4 und Algorithmus 4. Die Akzeptanzrate der zweiten Stufe  $\bar{\alpha}_{\text{HiFi}}$  ist die Rate der zuvor akzeptierten Samples, für die die rechenintensive High-Fidelity-Likelihood  $L_{\text{HiFi}}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_4 | \theta^*)$  ausgewertet wird und die mit Wahrscheinlichkeit  $\alpha_{\text{HiFi}}$  akzeptiert wurden. Die Akzeptanzrate der zweiten Stufe  $\bar{\alpha}_{\text{LoFi}}$  bewegt sich zwischen 80% und 100% und zeigt eine gute Approximation des High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi}, n_y}(\mathbf{x}_m, \theta)$  durch das Low-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi}, n_y}(\mathbf{x}_m, \theta)$ . Einzig zu Beginn ist eine niedrigere Akzeptanzrate  $\bar{\alpha}_{\text{LoFi}}$  zu beobachten. Dies kann darauf hindeuten, dass das Modell anfänglich noch ungenauer ist und durch die fortlaufende Adaption genauer wird. Die Akzeptanzrate  $\bar{\alpha}_{\text{LoFi}}$  liegt in der *Burn-In*-Phase zwischen 20% und 40%, fällt im Verlauf jedoch und stabilisiert sich zwischen 5% und 10%. Sie

liegt damit am unteren Ende des von SMITH empfohlenen Bereichs von 10% bis 50% [76].

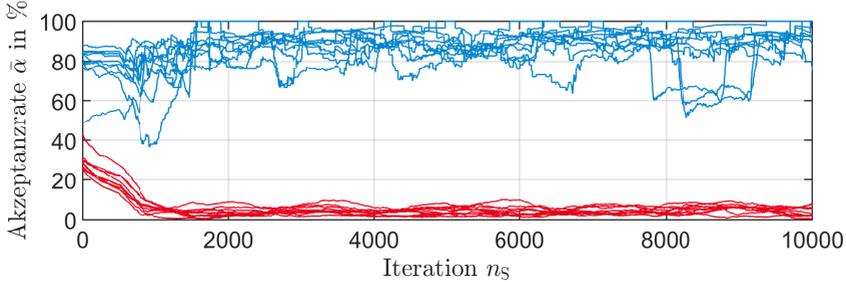


Abbildung 6.5: Gleitender Durchschnitt über 1000 Samples der Akzeptanzraten der ersten Stufe (—)  $\bar{\alpha}_{\text{LoFi}}$  und der zweiten Stufe (—)  $\bar{\alpha}_{\text{HiFi}}$  für die  $K = 10$  Ketten

Grundsätzlich könnte hier zum einen eine längere Trainingsphase  $N_T$  oder zum anderen eine angepasste initiale Kovarianzmatrix der Vorschlagsverteilung  $C_0$  die Akzeptanzrate  $\bar{\alpha}_{\text{LoFi}}$  erhöhen, was sich jedoch aufgrund des komplexen Zusammenspiels der zu kalibrierenden Parameter als schwierig herausgestellt hat. Auf der anderen Seite zeigt sich hier der Vorteil der in Abbildung 2.4 illustrierten Filterung der vorgeschlagenen Samples. Die hohe Anzahl an in der ersten Stufe verworfenen Samples hat kaum Einfluss auf die rechnerische Effizienz, da für diese nur die wenig rechenintensive Low-Fidelity-Likelihood  $L_{\text{LoFi}}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_4 | \boldsymbol{\theta}^*)$  und nicht die rechenintensive High-Fidelity-Likelihood  $L_{\text{HiFi}}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_4 | \boldsymbol{\theta}^*)$  berechnet wird. Würde keine Filterung der vorgeschlagenen Samples durch das Low-Fidelity-Modell erfolgen, so müsste die rechenintensive High-Fidelity-Likelihood  $L_{\text{HiFi}}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_4 | \boldsymbol{\theta}^*)$  nicht nur für 5 – 10% der Samples ausgewertet werden, sondern für 100% der vorgeschlagenen Samples. Bei den niedrigen Rechenkosten der Low-Fidelity-Likelihood  $L_{\text{LoFi}}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_4 | \boldsymbol{\theta}^*)$ , die mit 0,7492 Sekunden nur etwa 1,236 % der Rechenkosten der High-Fidelity-Likelihood  $L_{\text{HiFi}}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_4 | \boldsymbol{\theta}^*)$  (bei paralleler Berechnung auf 12 Rechenkernen) betragen, wiegt der Vorteil der Filterung hoch.

## Adaption des GP-basierten Low-Fidelity-Modells

Die Adaption des in Abschnitt 3.2.4 beschriebenen Low-Fidelity-Trainingsdatensatzes  $\mathcal{Y}_{\eta, n_y}$ , den das Low-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi}, n_y}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  zur Vorhersage verwenden und

mit Algorithmus 2 und Algorithmus 3 adaptiert werden, ist in Abbildung 6.6 für alle  $K = 10$  Ketten gezeigt, wobei ein farbiger Punkt eine Adaption kennzeichnet. Es ist zu erkennen, dass die Adaption mithilfe der beiden Adaptionskriterien in unterschiedlichen Phasen der Ketten stattfindet. Die Adaption mit dem Prädikationsunsicherheit-basiertem Kriterium, siehe Algorithmus 3, findet fast ausschließlich zu Beginn der Kette statt. Es scheint, dass im Folgenden die Prädikationsunsicherheit des Low-Fidelity-Modells niedrig genug ist, um das Prädikationsunsicherheit-basierte Kriterium nicht auszulösen.

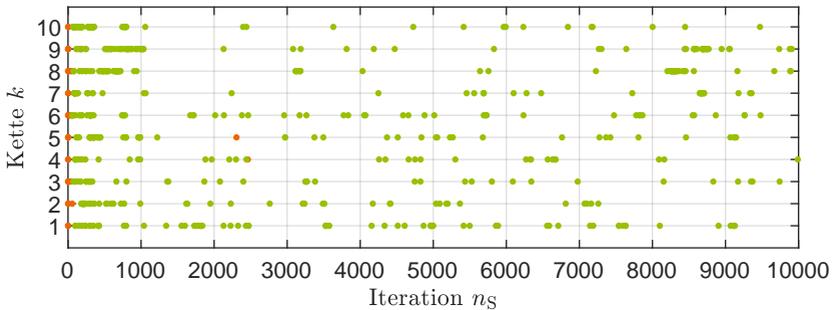


Abbildung 6.6: Adaption des GP-basierten Low-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{LoFi},n_y}$  im Verlauf der statistischen Modellkalibrierung mit dem Likelihood-basierten Adaptionskriterium ( $\bullet$ ) und dem Prädikationsunsicherheit-basiertem Adaptionskriterium ( $\circ$ )

Auch das Likelihood-basierte Kriterium, siehe Algorithmus 2, adaptiert zu Beginn der Kette, jedoch deutlich länger. Mit Fortschreiten der Kette und Konvergenz zur A-Posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_4)$  wird der Low-Fidelity-Datensatz  $\mathcal{Y}_{\eta,n_y}$  immer dichter, sodass der Approximationsfehler des Low-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{LoFi},n_y}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  kleiner wird und das Likelihood-basierte Adaptionskriterium immer seltener auslöst, was als Zeichen der Konvergenz der Kette gewertet werden kann. Am Verlauf der Akzeptanzrate  $\bar{\alpha}_{\text{HiFi}}$  in Abbildung 6.5 lässt sich erkennen, dass diese bis  $n_S = 2000$  leicht steigt und somit den Effekt der Adaption sichtbar macht. Grundsätzlich deutet dies auf eine erfolgreiche Adaption des Low-Fidelity-Modells hin, sodass die Anforderungen an ein hinreichend genaues Low-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{LoFi},n_y}(\mathbf{x}_m, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  erfüllt sind. Insgesamt werden 0,603% der Samples mit dem Likelihood-basierten Kriterium adaptiert und 0,044% der Samples mit dem Prädikationsunsicherheit-basierten Kriterium adaptiert.

---

## 6.3 Analyse der A-posteriori-Verteilung

Die A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_4)$  ist in Abbildung 6.7 dargestellt. Die Plotgrenzen entsprechen für die Modellparameter den Grenzen ihrer gleichverteilten A-Priori-Verteilung, siehe Tabelle 6.3. Die Plotgrenzen für die Diskrepanzhyperparameter liegen zwischen 0 und dem zehnfachen Erwartungswert  $10 \sigma_{\hat{\tau}_{i,\delta,n_y,\text{opt}}}^2$  ihrer exponentiellen A-Priori-Verteilung, siehe Tabelle 6.4. Die Breite der Randverteilungen für die Modellparameter  $p(k_{\text{FDS},1} | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_4)$ ,  $p(d_{\text{FDS},21} | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_4)$ ,  $p(E_{\text{B}} | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_4)$  und  $p(\alpha_{\text{D}} | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_4)$  sowie für die Diskrepanz-Hyperparameter  $p(\sigma_{\hat{\tau}_{i,\delta,n_y}}^2 | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_4)$  auf der Diagonalen haben eine Breite und eine Form, die eine deutliche Reduktion der Unsicherheit im Vergleich zu ihrer A-priori-Verteilung widerspiegeln.

In Tabelle 6.5 ist die unter Verwendung eines Kerndichteschätzers, siehe Abschnitt 2.1.1, ermittelte Reduktion der 95%-Interquantilabstände<sup>1</sup> (IQA) zwischen A-priori-Verteilung  $p_0(\theta_p)$  und A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_4)$  der zu kalibrierenden Parameter  $\boldsymbol{\theta}$  angegeben. Auch hier ist zu erkennen, dass mit der statistischen Modellkalibrierung eine deutliche Reduktion der Unsicherheit der Modellparameter  $\boldsymbol{\theta}_\eta$  und der Diskrepanz-Hyperparameter  $\boldsymbol{\theta}_\delta$  einhergeht. Da die Diskrepanz-Hyperparameter  $\boldsymbol{\theta}_\delta$  die Diskrepanzfunktionen  $\delta_{n_y}(\mathbf{x}_m)$  der einzelnen Modellausgänge beschreiben und daher mit der Modellunsicherheit verbunden sind, gilt diese Unsicherheitsreduktion für die Diskrepanz-Hyperparameter gleichermaßen als Reduktion und Quantifizierung der Modellunsicherheit. Die Reduktion der Unsicherheit des Dämpfungsparameters des Feder-Dämpfer-Systems  $d_{\text{FDS},21}$  und des Dämpfungsparameters der Tragwerke  $\alpha_{\text{D}}$  ist niedriger als für den Steifigkeitsparameter des Feder-Dämpfer-Systems  $k_{\text{FDS},1}$  und das E-Modul des Balkenelement B  $E_{\text{B}}$ . Zum einen zeigt dies, dass die A-Priori-Verteilungen  $p_0(d_{\text{FDS},21})$  und  $p_0(\alpha_{\text{D}})$  der beiden Dämpfungsparameter im Vergleich zu den A-Priori-Verteilungen des Steifigkeitsparameters des Feder-Dämpfer-Systems  $p_0(k_{\text{FDS},1})$  und des E-Modells des Balkenelement B  $p_0(E_{\text{B}})$  enger gewählt wurden. Zum anderen passt dies zur Erfahrung, dass Dissipationsphänomene häufig schwer zu modellieren sind und den Parametern von Dämpfungsmodellen Parameterunsicherheit innewohnt. Auffällig in Tabelle 6.5 ist auch, dass die Reduktion der Unsicherheit der Diskrepanz-Hyperparameter  $\boldsymbol{\theta}_\delta$  niedriger ist als für die Modellparameter  $\boldsymbol{\theta}_\eta$ . Dies kann darauf hindeuten, dass die Diskrepanz-Hyperparameter  $\boldsymbol{\theta}_\delta$  in Bezug auf die Likelihood weniger sensitiv sind als die Modellparameter  $\boldsymbol{\theta}_\eta$ .

Insgesamt weisen die Trace-Plots in Abbildung 6.3, die A-posteriori-Verteilung in Abbildung 6.7, sowie der Verlauf des *potential scale reduction*-Faktor in Abbildung 6.4 und die

---

<sup>1</sup>Der 95%-Interquantilabstand gibt die Distanz zwischen dem 2,5%-Quantil und dem 97,5%-Quantil und damit die Ausdehnung der jeweiligen Verteilung an.

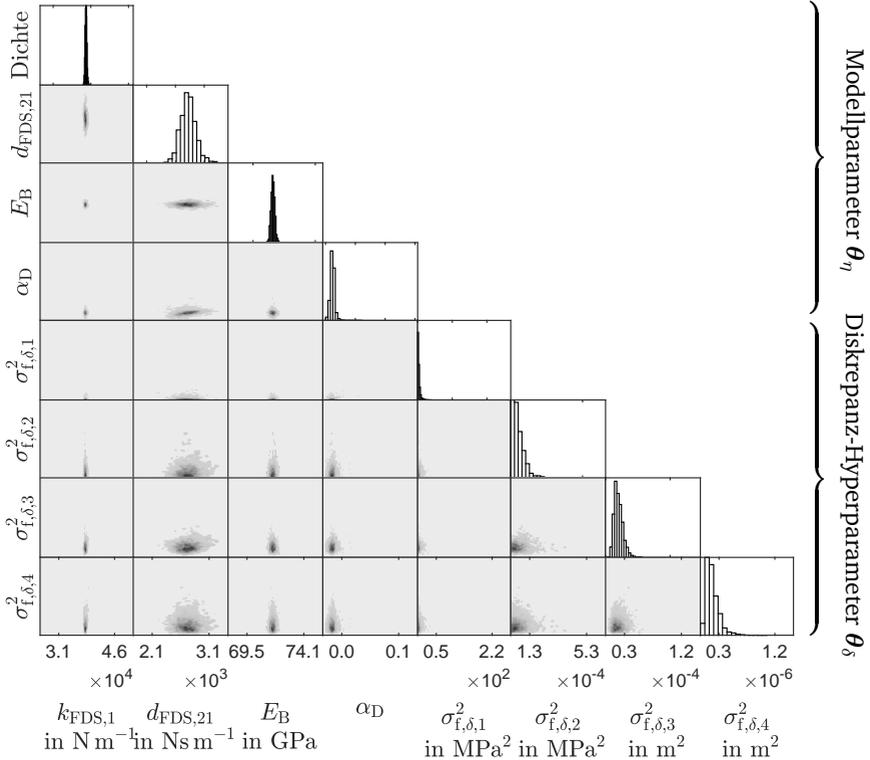


Abbildung 6.7: A-posteriori-Verteilung für den Steifigkeitsparameter des Federdämpfer-Systems  $k_{\text{FD},1}$ , Dämpfungparameter des Federdämpfer-Systems  $d_{\text{FDS},21}$ , E-Modul des Balkenelements B  $E_B$ , Dämpfungparameter der Tragwerke  $\alpha_D$  und Diskrepanz-Signalvarianz  $\sigma_{f,\delta,n_y}^2$  für die  $n_y = 1, \dots, 4$  Modellausgänge, dargestellt mit den Randverteilungen auf der Hauptdiagonalen und der Kerndichteschätzung der gemeinsamen Verteilungen für Paare von Parametern auf den Nebendiagonalen in den Plotgrenzen der A-priori-Verteilung  $p_0(\theta)$

in Tabelle 6.5 quantifizierte Reduktion der Unsicherheit auf eine erfolgreiche statistische Modellkalibrierung hin.

Tabelle 6.5: Reduktion des 95%-Interquantilabstand ( $\Delta IQA_{95\%}$ ) zwischen A-Priori- und A-Posteriori Randverteilungen für die zu kalibrierenden Parameter  $\theta$

Parameter	Symbol	$\Delta IQA_{95\%}$ in %
<b>Modellparameter <math>\theta_\eta</math></b>		
Steifigkeitsparameter FDS	$k_{FDS,1}$	95,7
Dämpfungsparameter FDS	$d_{FDS,21}$	62,7
E-Modul Balkenelement B	$E_B$	91,2
Dämpfungsparameter Tragwerke	$\alpha_D$	89,4
<b>Diskrepanz-Hyperparameter <math>\theta_\delta</math></b>		
Diskrepanz-Signalvarianz $\sigma_{N,max}$	$\sigma_{f,\delta,1}^2$	85,8
Diskrepanz-Signalvarianz $\sigma_{N,stat}$	$\sigma_{f,\delta,2}^2$	33,8
Diskrepanz-Signalvarianz $z_{r,max}$	$\sigma_{f,\delta,3}^2$	51,4
Diskrepanz-Signalvarianz $z_{r,stat}$	$\sigma_{f,\delta,4}^2$	27,5

## 6.4 Bewertung der A-posteriori Vorhersagegenauigkeit des High-Fidelity-Modells

In diesem Abschnitt wird untersucht, welche Auswirkung die Quantifizierung und Reduktion der Parameter- und Modellunsicherheit auf die Vorhersagefähigkeit des High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi},n_y}(\mathbf{x}, \theta_\eta)$  hat. Abbildung 6.8 zeigt die Ergebnisse einer *Leave-One-Out*-Kreuzvalidierung mithilfe aller den 36 in Abbildung 4.5 abgebildeten Messpunkten zugehörigen Messungen. Dabei werden die Vorhersage des zuvor kalibrierten High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi},n_y}(\mathbf{x}, \theta_\eta)$  und die Korrektur durch die Diskrepanzfunktion  $\delta_{n_y}(\mathbf{x})$  jeweils an einem der 36 in Abbildung 4.5 abgebildeten Messpunkte  $\mathbf{x}$  bestimmt. Die diesem Messpunkt zugehörigen Messungen werden aus dem Datensatz der Messungen ausgeschlossen, auf den die GP-basierte Diskrepanzfunktion  $\delta_{n_y}(\mathbf{x})$  konditioniert wird, um die Vorhersage des kalibrierten High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi},n_y}(\mathbf{x}, \theta_\eta)$  zu korrigieren.

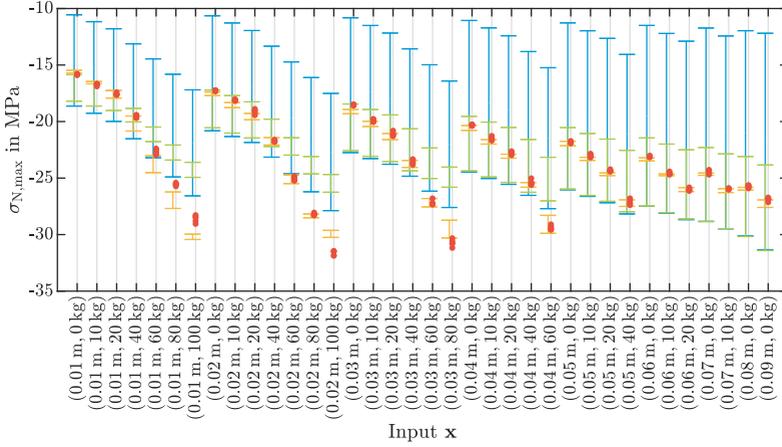
In Abbildung 6.8 sind die 95% Interquantilintervalle der Vorhersagen durch das High-

Fidelity-Modell  $\eta_{\text{HiFi},n_y}(\mathbf{x}, \theta_\eta)$  auf Basis von 500 zufällig ausgewählten Samples der A-Priori-Verteilung  $p_0(\theta_\eta)$  (blau) und der A-posteriori-Verteilung  $p(\theta_\eta|\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_4)$  (grün) der Modellparameter für die  $N_y = 4$  Modellausgänge gezeigt. Anhand des Unterschieds in der Größe dieser beiden 95% Interquantilintervalle (blau und grün) ist für alle Modellausgänge erkennbar, dass durch die Kalibrierung der Modellparameter bereits eine deutliche Reduktion der Unsicherheit in den Modellvorhersagen gelingt. Diese Reduktion ist für die beiden statischen Modellausgänge  $\sigma_{N,\text{stat}}, z_{r,\text{stat}}$  größer als für die dynamischen Modellausgänge  $\sigma_{N,\text{max}}, z_{r,\text{max}}$ . Diese Beobachtung erscheint schlüssig in Anbetracht der im Rahmen der Sensitivitätsanalyse in Abschnitt 6.1.1 festgestellten Abhängigkeit der dynamischen Modellausgänge von den Dämpfungsparametern  $d_{\text{FDS},1}, \alpha_D$ , für die sich eine geringere Reduktion der Parameterunsicherheit in Tabelle 6.5 ergeben hat.

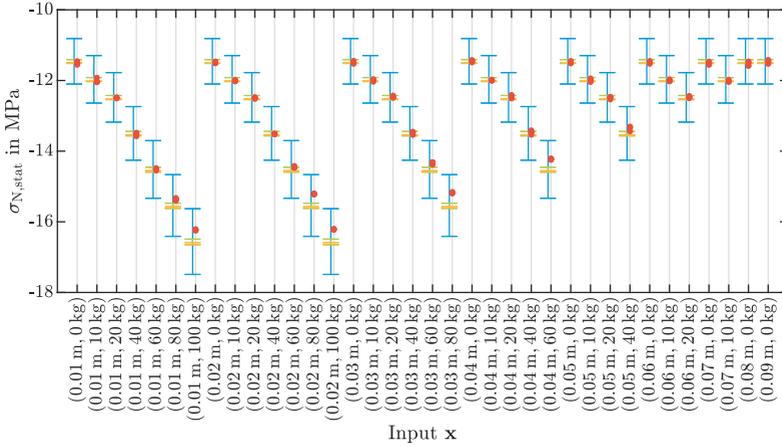
Besonders in Abbildung 6.8a ist zu beobachten, dass die 95% Interquantilintervalle der Vorhersagen von  $\sigma_{N,\text{max}}$  durch das kalibrierte High-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{HiFi},1}(\mathbf{x}, \theta_\eta)$  (grün) die Messungen (rot) an Messpunkten mit höherem Zusatzgewicht ab 60 kg nicht enthalten. Dies kann einerseits darauf zurückgeführt werden, dass nur  $M = 20$  und nicht alle zu den in Abbildung 4.5 abgebildeten 36 Messpunkten zugehörigen Messungen zur statistischen Modellkalibrierung verwendet wurden. Zum anderen deutet dies darauf hin, dass dem High-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{HiFi},1}(\mathbf{x}, \theta_\eta)$  Modellunsicherheit innewohnt, die zum Beispiel auf das Dämpfungsmodell für die Tragwerke in Abschnitt 5.2.4 zurückgeführt werden könnte. In Abbildung 6.8b lässt sich erkennen, dass die Diskrepanz zwischen der Vorhersage von  $\sigma_{N,\text{stat}}$  des kalibrierten High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi},2}(\mathbf{x}, \theta_\eta)$  und der Messung wesentlich kleiner ist. Dieser Unterschied zwischen den beiden Modellausgängen manifestiert sich auch darin, dass sich die den beiden Modellausgängen zugehörigen Diskrepanz-Signalvarianzen  $\sigma_{f,\delta,1}$  und  $\sigma_{f,\delta,2}$  um Größenordnungen unterscheiden, siehe Abbildung 6.7. Die Diskrepanz-Signalvarianz dient als Indikator für die Modellunsicherheit und zeigt somit an, dass die Modellunsicherheit der Modellvorhersage von  $\sigma_{N,\text{max}}$  höher ist als für  $\sigma_{N,\text{stat}}$  [1, 4]. Ähnliche Beobachtungen können für die Modellausgänge  $z_{r,\text{max}}$  und  $z_{r,\text{stat}}$  gemacht werden.

Durch die Berücksichtigung der Modellunsicherheit mithilfe der Diskrepanzfunktion  $\delta_{n_y}(\mathbf{x})$  gelingt es die Vorhersagen des kalibrierten High-Fidelity-Modell  $\eta_{\text{HiFi},n_y}(\mathbf{x}, \theta_\eta)$  dahingehend zu korrigieren, dass die entsprechenden 95% Interquantilintervalle des durch die Diskrepanzfunktion  $\delta_{n_y}(\mathbf{x})$  korrigierten kalibrierten Modells (orange) die Messungen (rot) in Abbildung 6.8 für die meisten Messpunkte mit einschließt. Besonders stark zeigt sich dies in Abbildung 6.8a für den Ausgang  $\sigma_{N,\text{max}}$ . Allerdings ist auch hier wieder zu beobachten, dass die Korrektur durch die Diskrepanzfunktion  $\delta_{n_y}(\mathbf{x})$  an Messpunkten mit höherem Zusatzgewicht ab 60 kg weniger wirksam ist, da das 95% Interquantilintervall (orange) zumeist breiter ist und die Messungen (rot) nicht umschließt. Dies kann damit erklärt werden, dass diese Punkte am Rande des in Abbil-

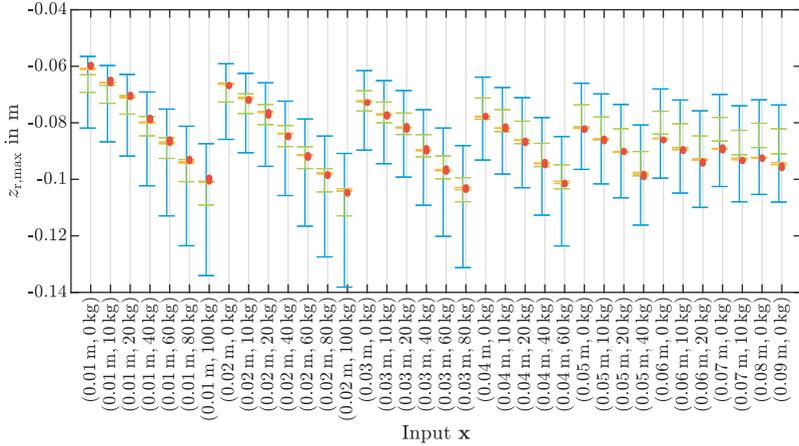
dung 4.5 abgebildeten Messdatenset liegt und eine Extrapolation durch die GP-basierten Diskrepanzfunktion  $\delta_{n_y}(\mathbf{x})$  schwieriger ist.



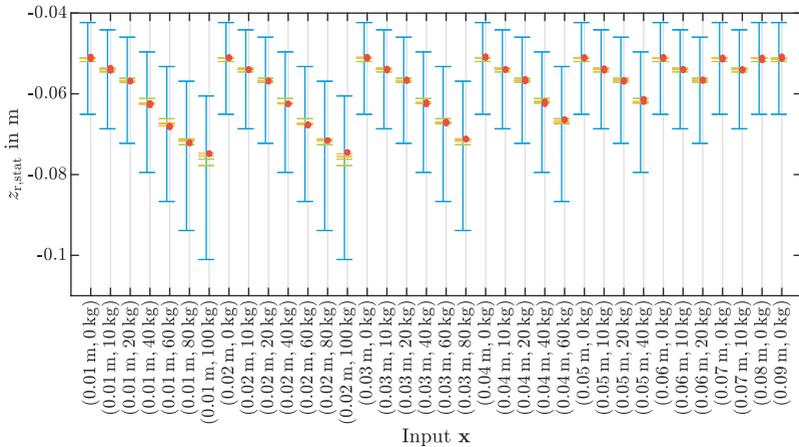
a)



b)



c)



d)

Abbildung 6.8: Messungen ( $\bullet$ ) und 95% Interquantilintervalle der Modellvorhersagen  $\eta_{\text{HiFi}, N_y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  unter Verwendung der A-Priori-Verteilung  $p_0(\boldsymbol{\theta}_\eta)$  ( $\text{---}$ ), der A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}_\eta | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_4)$  ohne ( $\text{---}$ ) und mit ( $\text{—}$ ) Korrektur durch die Diskrepanzfunktion  $\delta_{N_y}(\mathbf{x})$  unter Verwendung der A-posteriori-Verteilung  $p(\boldsymbol{\theta}_\delta | \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_4)$  für die  $N_y = 4$  Modellausgänge

---

Anhand dieser Beobachtungen wird die Wichtigkeit der Kalibrierung einer Diskrepanzfunktion  $\delta_{n_y}(\mathbf{x})$  zur Korrektur der Modellvorhersagen  $\eta_{\text{HiFi}, n_y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  hervorgehoben. Da jedem Modell Modellunsicherheit innewohnt, kann die Vorhersagefähigkeit eines Modells durch eine Diskrepanzfunktion  $\delta_{n_y}(\mathbf{x})$  erheblich verbessert werden und so zusätzlich Informationen zur Modellunsicherheit liefern. Das Weglassen einer Diskrepanzfunktion  $\delta_{n_y}(\mathbf{x})$  bei der statistischen Modellkalibrierung würde die resultierende marginale A-posteriori-Verteilung für den Modellparameter  $\boldsymbol{\theta}_\eta$  verbreitern und verzerren und die Reduzierung der Parameterunsicherheit sowie die Vorhersagefähigkeit des High-Fidelity-Modells  $\eta_{\text{HiFi}, n_y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_\eta)$  beeinträchtigen. Dies konterkariert jedoch die Bemühungen, die Vorhersagefähigkeit von Modellen im Hinblick auf die zunehmende Virtualisierung des Produktentwicklungsprozesses zu verbessern.



---

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

---

In dieser Arbeit wird eine neuartige Methode vorgestellt, um für das Modell eines strukturdynamischen Systems eine statistische Modellkalibrierung einerseits effizient und andererseits unter Berücksichtigung der Modellunsicherheit durchzuführen. Die Effizienz der Methode basiert auf dem 2SDAMCMC-Algorithmus, mit dem die Genauigkeit eines rechenintensiven High-Fidelity-Modells und die Schnelligkeit eines weniger genauen Low-Fidelity-Modells kombiniert wird. Auf diese Weise kann die Anzahl der Auswertungen des High-Fidelity-Modells drastisch reduziert werden und so eine hohe rechnerische Effizienz erreicht werden.

Als Low-Fidelity-Modell wird ein Gaussprozess-basiertes Ersatzmodell verwendet, dessen Erwartungswertfunktion ein PCE-basiertes Ersatzmodell ist. Diese Kombination bietet zum einen den Vorteil einer hohen erreichbaren Genauigkeit und zum anderen ist diese Art des Ersatzmodells anwendungsneutral, sodass es grundsätzlich für jedes beliebige High-Fidelity-Modell gebildet werden kann und damit einen Beitrag zur breiteren Anwendbarkeit von Multi-Fidelity Methoden zur statistischen Modellkalibrierung liefert. Zudem lässt sich der dem GP-basierten Ersatzmodell zugrunde liegende Datensatz leicht adaptieren, um die Genauigkeit im Verlauf der Kalibrierung weiter zu steigern.

Um die Modellunsicherheit zu berücksichtigen, werden die Diskrepanz-Hyperparameter einer GP-basierten Diskrepanzfunktion entsprechend des Ansatzes KENNEDY und O'HAGAN zusammen mit den Modellparametern kalibriert. Auf diese Weise wird verhindert, dass die Modellparameter ihre physikalische Bedeutung verlieren und zu Abstimmungsparametern degenerieren. Die Kalibrierung einer Diskrepanzfunktion ist ein wesentlicher Schritt auf dem Weg zu einer unverzerrten Kalibrierung der Modellparameter und stellt die wichtigste Erweiterung der bestehenden Multifidelity-Methoden zur statistischen Modellkalibrierung dar. Die kalibrierte Diskrepanzfunktion kann zur Korrektur von Modellvorhersagen, aber auch zur Quantifizierung der Modellunsicherheit als Maß für Brauchbarkeit des Modells verwendet werden.

Ein wichtiger Teil dieser Arbeit besteht in der Erprobung der Methode am SFB-Demonstrator, der als flexibles Mehrkörpersystem modelliert wurde. In einer Sensitivitätsanalyse wurden die relevanten Modellparameter identifiziert. Die Unsicherheit der relevanten

---

Modellparameter sowie die Unsicherheit der Diskrepanz-Hyperparameter und damit die Parameter- und Modellunsicherheit werden im Rahmen der statistischen Modellkalibrierung gleichzeitig quantifiziert und reduziert. Die erreichte Reduktion der Unsicherheit betrug zwischen 95,69% und 27,49%. Die erreichte Verbesserung der Vorhersagegenauigkeit wurde anhand einer *Leave-One-Out*-Kreuzvalidierung untersucht. Es zeigte sich, das insbesondere durch die Korrektur der Modellvorhersagen durch die Diskrepanzfunktion deutlich genauere Vorhersagen über das Systemverhalten möglich sind.

In Bezug auf zukünftige Arbeiten zur effizienten statistischen Modellkalibrierung von strukturdynamischen Systemen lassen sich folgende Themenbereiche identifizieren

- Neben dem in dieser Arbeit verwendeten GP-basierten Low-Fidelity-Modell mit PCE-basierter Erwartungswertfunktion sind im Kontext der statistischen Modellkalibrierung flexibler Mehrkörpersysteme noch Erwartungswertfunktionen interessant, die das Starrkörperverhalten modellieren. Die Problematik hierbei ist, dass hierbei der Parameterraum des Low-Fidelity-Modells nur einen Teil des Parameterraums des High-Fidelity-Modells abdeckt. Hierzu müssen geeignete Techniken entwickelt werden, um die verschiedenen Parameterräume abzugleichen, wenn ein Sample von der ersten Stufe zur zweiten Stufe propagiert wird. Dies kann beispielsweise durch die Anpassung von Konzepten erreicht werden, die zuvor durch Reversible Jump MCMC eingeführt wurden, das auf dem Konzept des *dimension matching* aufbaut [35].
- Bisher werden die Low-Fidelity-Hyperparameter des GP-basierten Low-Fidelity-Modells einmalig zu Beginn auf Basis des initialen Low-Fidelity-Trainingsdatensatzes optimiert. Über den Verlauf der Kalibrierung erweitert sich dieser Datensatz jedoch, sodass dieser möglicherweise nicht mehr optimal durch die initial optimierten Low-Fidelity-Hyperparameter repräsentiert wird. Hierzu wäre ein geeignetes Kriterium zu entwickeln, um zu erkennen wann die Low-Fidelity-Hyperparameter erneut optimiert werden müssen.
- Für eine optimale rechnerische Effizienz ist auch auf die optimale Verwendung von Rechenressourcen zu achten. Für die statistischen Modellkalibrierung in dieser Arbeit wurde eine durchschnittliche Speichereffizienz im Bereich von 45,94% und eine CPU-Effizienz im Bereich von 37,09% erreicht. Dieser Aspekt ist ebenso relevant für eine effiziente statistische Modellkalibrierung und sollte in zukünftigen Arbeiten stärker berücksichtigt werden.
- In dieser Arbeit wurden vier Modellausgänge kalibriert, die markante Punkte in den Verläufen der Systemausgänge markieren. Für strukturdynamische Systeme stehen jedoch zumeist hochdimensionale Ausgänge wie Zeitverläufe oder Frequenzgänge zur Verfügung. Die Kalibrierung strukturdynamischer Systeme mit

---

hochdimensionalen Ausgängen steht bisher noch wenig im Fokus. Problematisch hierbei sind die sich ergebenden hochdimensionalen Kovarianzmatrizen, die im Falle der Berücksichtigung der Modellunsicherheit vollbesetzt sind und zu numerischen Problemen bei der Invertierung führen können. Ein Ansatzpunkt für eine Forschung in diesem Bereich könnte die Arbeit von HIGDON sein, der die hochdimensionalen Ausgänge durch eine Basisdarstellung approximiert und somit die Anzahl der zu kalibrierenden Ausgänge reduziert [43].

- Die Diskrepanzfunktion ist in dieser Arbeit rein phänomenologischer Natur und wird durch einen GP modelliert. Sie kann zwar zur einer höheren Vorhersagegenauigkeit beitragen, erlaubt jedoch kaum Rückschlüsse auf Maßnahmen, die zur Verbesserung des Modells führen würden. Von Interesse wäre es, wenn sie nicht nur im Einzelfall von Nutzen wäre, sondern anhand der Diskrepanzfunktion mittels einer zu entwickelnden Methodik auch konkrete Maßnahmen zur Verbesserung der funktionalen Form des Modells ableitbar wären.



---

# 8 Literatur

---

## Eigene Veröffentlichungen

- [1] Robert Feldmann und Roland Platz. „Assessing Model Form Uncertainty for a Suspension Strut using Gaussian Processes“. In: *Proceedings of the 3rd International Conference on Uncertainty Quantification in Computational Sciences and Engineering (UNCECOMP 2019)*. 2019.
- [2] Robert Feldmann u. a. „A Detailed Assessment of Model Form Uncertainty in a Load-Carrying Truss Structure“. In: *Model Validation and Uncertainty Quantification, Volume 3*. Hrsg. von Zhu Mao. Conference proceedings of the Society for Experimental Mechanics series. Cham: Springer International Publishing und Imprint: Springer, 2020, S. 303–314. ISBN: 978-3-030-47638-0. DOI: 10.1007/978-3-030-47638-0\_33.
- [3] Robert Feldmann u. a. „A Methodology for the Efficient Quantification of Parameter and Model Uncertainty“. In: *Journal of Verification, Validation and Uncertainty Quantification (Zur Veröffentlichung angenommen)* (2022).
- [4] Robert Feldmann u. a. „Analyzing Propagation of Model Form Uncertainty for Different Suspension Strut Models“. In: *Model Validation and Uncertainty Quantification, Volume 3*. Hrsg. von Zhu Mao. Conference proceedings of the Society for Experimental Mechanics series. Cham: Springer International Publishing und Imprint: Springer, 2020, S. 255–263. ISBN: 978-3-030-47638-0. DOI: 10.1007/978-3-030-47638-0\_28.
- [5] Robert Feldmann u. a. „Recursive Gaussian Processes for Discrepancy Modeling“. In: *Proceedings of ISMA2020 including USD2020 International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics*. Leuven, Belgium, 2020.

- 
- [6] Maximilian Schaeffner u. a. „Forward vs. Bayesian Inference Parameter Calibration: Two Approaches for Non-deterministic Parameter Calibration of a Beam-Column Model“. In: *Uncertainty in Mechanical Engineering*. Hrsg. von Peter F. Pelz und Peter Groche. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Cham: Springer International Publishing, 2021, S. 173–190. ISBN: 978-3-030-77255-0. DOI: 10.1007/978-3-030-77256-7\_15.

## Literaturverzeichnis

- [7] Ghina Nakad Absi. „Multi-fidelity Information Fusion for Structural Dynamics Model Calibration“. Dissertation. Vanderbilt University, 2019.
- [8] Panagiotis Angelikopoulos, Costas Papadimitriou und Petros Koumoutsakos. „X-TMCMC: Adaptive kriging for Bayesian inverse modeling“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 289 (2015), S. 409–428. ISSN: 00457825. DOI: 10.1016/j.cma.2015.01.015.
- [9] Sez Atamturktur u. a. „A forecasting metric for predictive modeling“. In: *Computers & Structures* 89.23-24 (2011), S. 2377–2387. ISSN: 0045-7949. DOI: 10.1016/j.compstruc.2011.06.010. (Besucht am 24. 05. 2017).
- [10] Siu-Kui Au. „Fast Bayesian FFT Method for Ambient Modal Identification with Separated Modes“. In: *Journal of Engineering Mechanics* 137.3 (2011), S. 214–226. ISSN: 0733-9399. DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000213.
- [11] Johnathan M. Bardsley u. a. „Randomize-Then-Optimize for Sampling and Uncertainty Quantification in Electrical Impedance Tomography“. In: *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification* 3.1 (2015), S. 1136–1158. DOI: 10.1137/140978272.
- [12] Thomas Bayes. „An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. By the late Rev. Mr. Bayes, F. R. S. communicated by Mr. Price, in a letter to John Canton, A. M. F. R. S.“. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 53 (1763), S. 370–418. ISSN: 0261-0523. DOI: 10.1098/rstl.1763.0053.
- [13] James L. Beck und Siu-Kui Au. „Bayesian Updating of Structural Models and Reliability using Markov Chain Monte Carlo Simulation“. In: *Journal of Engineering Mechanics* 128.4 (2002), S. 380–391. ISSN: 0733-9399. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:4(380).
- [14] George E. P. Box und Norman Richard Draper. *Empirical model-building and response surfaces*. Wiley series in probability and mathematical statistics. Applied probability and statistics. New York: Wiley, 1987. ISBN: 978-0471810339.

- 
- [15] Stephen P. Brooks und Gareth O. Roberts. „Convergence assessment techniques for Markov chain Monte Carlo“. In: *Statistics and Computing* 8.4 (1998), S. 319–335. ISSN: 0960-3174. DOI: 10.1023/A:1008820505350.
- [16] Steve Brooks. *Handbook of Markov chain Monte Carlo*. Chapman & Hall/CRC handbooks of modern statistical methods. Boca Raton, Fla.: CRC Press Taylor & Francis, 2011. ISBN: 9781420079418. URL: <http://site.ebrary.com/lib/academiccompletetitles/home.action>.
- [17] Jenný Brynjarsdóttir und Anthony O’Hagan. „Learning about physical parameters: the importance of model discrepancy“. In: *Inverse Problems* 30.11 (2014), S. 114007. ISSN: 0266-5611. DOI: 10.1088/0266-5611/30/11/114007.
- [18] J. Andrés Christen und Colin Fox. „Markov chain Monte Carlo Using an Approximation“. In: *Journal of Computational and Graphical Statistics* 14.4 (2005), S. 795–810. ISSN: 1061-8600. DOI: 10.1198/106186005X76983.
- [19] Tiangang Cui, Youssef M. Marzouk und Karen E. Willcox. „Data-driven model reduction for the Bayesian solution of inverse problems“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 102.5 (2015), S. 966–990. ISSN: 00295981. DOI: 10.1002/nme.4748. (Besucht am 27. 09. 2020).
- [20] Roland A. Engelhardt u. a. „A Model to Categorise Uncertainty in Load-Carrying Systems“. In: *Proceedings of the 1st International Conference on Modelling and Management of Engineering Processes (MMEP 2010)*. Hrsg. von Peter Heisig, P. John Clarkson und Sandor Vajna. Cambridge/UK: Springer-Verlag London, 2010, S. 53–64. ISBN: 978-1-84996-198-1.
- [21] Georg Enß u. a. „Device for optimal load transmission and load distribution in lightweight structures (Kraftübertragungsvorrichtung): Offenlegungsschrift“. DE 10 2014 106 858 A1. 2015.
- [22] M. Giselle Fernández-Godino u. a. „Review of multi-fidelity models“. In: *arXiv preprint arXiv:1609.07196* (2016).
- [23] Colin Fox und Geoff Nicholls. „Sampling conductivity images via MCMC“. In: *The art and science of Bayesian image analysis* (1997), S. 91–100.
- [24] M. I. Friswell und John E. Mottershead. *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*. Bd. 38. Solid Mechanics and Its Applications. Dordrecht: Springer, 1995. ISBN: 9789048145355. DOI: 10.1007/978-94-015-8508-8.
- [25] James Gattiker u. a. „Gaussian Process-Based Sensitivity Analysis and Bayesian Model Calibration with GPMSA“. In: *Handbook of Uncertainty Quantification*. Hrsg. von Roger Ghanem, David Higdon und Houman Owhadi. Cham: Springer International Publishing, 2016, S. 1–41. ISBN: 978-3-319-11259-6. DOI: 10.1007/978-3-319-11259-6\_58-1.

- 
- [26] Christopher M. Gehb. „Uncertainty evaluation of semi-active load redistribution in a mechanical load-bearing structure“. Dissertation. Darmstadt: Technische Universität Darmstadt, 2019.
- [27] Andrew Gelman u. a. *Bayesian data analysis: Third Edition*. Third edition. Texts in statistical science series. Boca Raton, London und New York: CRC Press Taylor and Francis Group, 2014. ISBN: 9781439840955.
- [28] Michel Géradin und Alberto Cardona. *Flexible multibody dynamics: A finite element approach*. Chichester, 2001. URL: <http://www.wiley.com/en-us/Flexible+Multibody+Dynamics%3A+A+Finite+Element+Approach-p-9780471489900>.
- [29] Roger G. Ghanem und Pol D. Spanos. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. New York, NY: Springer New York, 1991. ISBN: 9781461277958. DOI: 10.1007/978-1-4612-3094-6.
- [30] V. Ginting, Felipe Pereira und A. Rahunanthan. „A multi-stage Bayesian prediction framework for subsurface flows“. In: *International Journal for Uncertainty Quantification* 3.6 (2013), S. 499–522. ISSN: 2152-5080. DOI: 10.1615/Int.J.UncertaintyQuantification.2013005281.
- [31] Andrew Golightly, Daniel Henderson und Christopher Sherlock. „Efficient particle MCMC for exact inference in stochastic biochemical network models through approximation of expensive likelihoods“. In: *Statistics and Computing* 25.5 (2015), S. 1039–1055. ISSN: 0960-3174. DOI: 10.1007/s11222-014-9469-x.
- [32] Andrew Golightly, Daniel A. Henderson und Chris Sherlock. „Delayed acceptance particle MCMC for exact inference in stochastic biochemical network models“. In: (2013).
- [33] B. Goller und G. I. Schuëller. „Investigation of model uncertainties in Bayesian structural model updating“. In: *Journal of Sound and Vibration* 330.25-15 (2011), S. 6122–6136. ISSN: 0022-460X. DOI: 10.1016/j.jsv.2011.07.036.
- [34] Benedict Götz. „Evaluation of uncertainty in the vibration attenuation with shunted piezoelectric transducers integrated in a beam-column support“. Dissertation. Darmstadt: Technische Universität Darmstadt, 2018.
- [35] Peter J. Green. „Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo Computation and Bayesian Model Determination“. In: *Biometrika* 82.4 (1995), S. 711. ISSN: 00063444. DOI: 10.2307/2337340.
- [36] Peter L. Green. „Bayesian system identification of a nonlinear dynamical system using a novel variant of Simulated Annealing“. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 52-53 (2014), S. 133–146. ISSN: 0888-3270. DOI: 10.1016/j.ymsp.2014.07.010. (Besucht am 27. 04. 2017).

- 
- [37] Peter L. Green und Keith Worden. „Bayesian and Markov chain Monte Carlo methods for identifying nonlinear systems in the presence of uncertainty“. In: *Philosophical transactions. Series A, Mathematical, physical, and engineering sciences* 373.2051 (2015). ISSN: 1364-503X. DOI: 10.1098/rsta.2014.0405. (Besucht am 05. 11. 2019).
- [38] Peter L. Green und Keith Worden. „Modelling Friction in a Nonlinear Dynamic System via Bayesian Inference“. In: *Special Topics in Structural Dynamics, Volume 6*. Hrsg. von Randall Allemang u. a. Proceedings of the 31th IMAC. New York, NY: Springer New York, 2013, S. 543–553.
- [39] Dietmar Gross u. a. *Technische Mechanik 2: Elastostatik*. Springer-Lehrbuch. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. ISBN: 978-3-540-70762-2. DOI: 10.1007/978-3-540-70763-9.
- [40] Heikki Haario, Eero Saksman, Johanna Tamminen u. a. „An adaptive Metropolis algorithm“. In: *Bernoulli* 7.2 (2001), S. 223–242.
- [41] Holger Hanselka und Roland Platz. „Ansätze und Maßnahmen zur Beherrschung von Unsicherheit in lasttragenden Systemen des Maschinenbaus: Controlling Uncertainties in Load Carrying Systems“. In: *VDI-Zeitschrift Konstruktion* 11/12-2010 (2010), S. 55–62. URL: [http://www.konstruktion-online.de/kon/article.php?data\[article\\_id\]=57787](http://www.konstruktion-online.de/kon/article.php?data[article_id]=57787).
- [42] Bernd Heiing und Metin Ersoy, Hrsg. *Fahrwerkhandbuch: Grundlagen, Fahrdynamik, Komponenten, Systeme, Mechatronik, Perspektiven*. Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, GWV Fachverlage GmbH, 2007. ISBN: 978-3-8348-0105-0. DOI: 10.1007/978-3-8348-9151-8.
- [43] Dave Higdon u. a. „Computer Model Calibration Using High-Dimensional Output“. In: *Journal of the American Statistical Association* 103.482 (2008), S. 570–583. DOI: 10.1198/016214507000000888. (Besucht am 22. 02. 2018).
- [44] Hans M. Hilber, Thomas Hughes JR und Robert L. Taylor. „Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics“. In: *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 5.3 (1977), S. 283–292. ISSN: 1096-9845.
- [45] Hendrik Holzmann. „Vibration attenuation of a truss structure with shunted piezoelectric transducers subject to varying static loads“. Master’s Thesis. Technische Universitat Darmstadt, 2018.
- [46] Yong Huang u. a. „State-of-the-art review on Bayesian inference in structural system identification and damage assessment“. In: *Advances in Structural Engineering* 22.6 (2019), S. 1329–1351. ISSN: 1369-4332. DOI: 10.1177/1369433218811540.

- 
- [47] Franz Hubik und Daniel Delhaes. „Qualitätsmängel bei Autos nehmen zu – 3,7 Millionen Rückrufe in Deutschland“. In: *Handelsblatt* (2019-03-14). URL: <https://www.handelsblatt.com/unternehmen/industrie/pkw-maengelreport-qualitaetsmaengel-bei-autos-nehmen-zu-3-7-millionen-rueckrufe-in-deutschland/24099466.html?ticket=ST-6189234-cDXed5yNi5KUwdm9p1fS-ap3> (besucht am 14. 08. 2020).
- [48] Alexandre Janon u. a. „Asymptotic normality and efficiency of two Sobol index estimators“. In: *ESAIM: Probability and Statistics* 18 (2014), S. 342–364.
- [49] Marc C. Kennedy und Anthony O’Hagan. „Bayesian calibration of computer models“. In: *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* 63.3 (2001), S. 425–464. ISSN: 1467-9868. DOI: 10.1111/1467-9868.00294. URL: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/1467-9868.00294/pdf>.
- [50] Katy Klauenberg und Clemens Elster. „Markov chain Monte Carlo methods: an introductory example“. In: *Metrologia* 53.1 (2016), S32–S39. ISSN: 0959-2083. DOI: 10.1088/0026-1394/53/1/S32.
- [51] Thomas Knetsch. „Unsicherheiten in Ingenieurberechnungen“. Diss. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 2004.
- [52] C. Lataniotis u. a. *UQLab user manual – Kriging (Gaussian process modeling)*. 2021. URL: [http://uqftp.ethz.ch/uqlab\\_doc\\_pdf/2.0.0/UserManual\\_Kriging.pdf](http://uqftp.ethz.ch/uqlab_doc_pdf/2.0.0/UserManual_Kriging.pdf) (besucht am 03. 05. 2022).
- [53] C. Lataniotis u. a. *UQLab user manual – The Input module*. 2021.
- [54] Loïc Le Gratiet, Stefano Marelli und Bruno Sudret. „Metamodel-Based Sensitivity Analysis: Polynomial Chaos Expansions and Gaussian Processes“. In: *Handbook of Uncertainty Quantification*. Hrsg. von Roger Ghanem, David Higdon und Houman Owhadi. Cham: Springer International Publishing, 2016, S. 1–37. ISBN: 978-3-319-11259-6. DOI: 10.1007/978-3-319-11259-6\_38-1.
- [55] Guesuk Lee u. a. „Review of statistical model calibration and validation—from the perspective of uncertainty structures“. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 60.4 (2019), S. 1619–1644. ISSN: 1615-147X. DOI: 10.1007/s00158-019-02270-2.
- [56] Jun S. Liu. *Monte Carlo Strategies in Scientific Computing*. New York, NY: Springer New York, 2004. ISBN: 978-0-387-76369-9. DOI: 10.1007/978-0-387-76371-2.
- [57] S. Marelli u. a. *UQLab user manual – Sensitivity analysis*. 2021. URL: [http://uqftp.ethz.ch/uqlab\\_doc\\_pdf/2.0.0/UserManual\\_Sensitivity.pdf](http://uqftp.ethz.ch/uqlab_doc_pdf/2.0.0/UserManual_Sensitivity.pdf) (besucht am 30. 04. 2022).

- 
- [58] Amandine Marrel u. a. „Calculations of Sobol indices for the Gaussian process metamodel“. In: *Reliability Engineering & System Safety* 94.3 (2009), S. 742–751. ISSN: 09518320. DOI: 10.1016/j.ress.2008.07.008.
- [59] Christiane M. Melzer, Roland Platz und Tobias Melz. „Consistent Comparison of Methodical Approaches to Describe and Evaluate Uncertainty in the Load-Carrying Capacity of a Truss Structure“. In: *Proceedings of International Conference on Structural Engineering Dynamics ICEDyn*. 2015, S. 8.
- [60] Anirban Mondal u. a. „Bayesian Uncertainty Quantification for Subsurface Inversion Using a Multiscale Hierarchical Model“. In: *Technometrics* 56.3 (2014), S. 381–392. ISSN: 0040-1706. DOI: 10.1080/00401706.2013.838190.
- [61] Matthew Muto und James L. Beck. „Bayesian Updating and Model Class Selection for Hysteretic Structural Models Using Stochastic Simulation“. In: *Journal of Vibration and Control* 14.1-2 (2008), S. 7–34. DOI: 10.1177/1077546307079400.
- [62] Benjamin Peherstorfer, Karen Willcox und Max Gunzburger. „Survey of Multifidelity Methods in Uncertainty Propagation, Inference, and Optimization“. In: *SIAM Review* 60.3 (2018), S. 550–591. ISSN: 0036-1445. DOI: 10.1137/16M1082469.
- [63] F. P. Pelz u. a. *Mastering Uncertainty in Mechanical Engineering*. Cham: Springer International Publishing (In Print), 2021.
- [64] Roland Platz u. a. „Approach to validate the influences of uncertainties in manufacturing on using load-carrying structures“. In: *Proceedings of ISMA 2010*. Hrsg. von Paul Sas und B. Bergen. Heverlee, 2010, S. 5319–5334. ISBN: 9789073802872.
- [65] Carl Edward Rasmussen und Christopher K. I. Williams. *Gaussian processes for machine learning*. 3. print. Adaptive computation and machine learning. Cambridge, Mass.: MIT Press, 2008. ISBN: 9780262182539.
- [66] Daniel Rixen. *Multi-body Simulation: Lecture Script: Version 2.1*. 2018.
- [67] Daniel Rixen. *Structural Dynamics: Lecture Notes - Version 1.0*. 2015.
- [68] Christian P. Robert und George Casella. *Monte Carlo statistical methods*. 2. ed. Springer Texts in Statistics. New York, NY: Springer, 2004. ISBN: 0387212396.
- [69] Christopher J. Roy und William Louis Oberkampf. „A Complete Framework for Verification, Validation, and Uncertainty Quantification in Scientific Computing (Invited)“. In: *48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, Orlando, Florida*. 2010. DOI: 10.2514/6.2010-124.
- [70] Carolyn M. Rutter, Diana L. Miglioretti und James E. Savarino. „Bayesian Calibration of Microsimulation Models“. In: *Journal of the American Statistical Association* 104.488 (2009), S. 1338–1350. DOI: 10.1198/jasa.2009.ap07466.

- 
- [71] Thomas J. Santner, Brian J. Williams und William I. Notz. *The Design and Analysis of Computer Experiments*. Springer Series in Statistics. New York, NY: Springer, 2003. ISBN: 9781441929921. DOI: 10.1007/978-1-4757-3799-8.
- [72] Maximilian Schaeffner. „Quantification and evaluation of uncertainty in active buckling control of a beam-column subject to dynamic axial loads“. Dissertation. Darmstadt: Technische Universität Darmstadt, 2019.
- [73] M. Schäffner u. a. *SFB 805 Beherrschung von Unsicherheit in lasttragenden Systemen des Maschinenbaus: Entwicklung des SFB-Demonstrators*.
- [74] Roland Schobi, Bruno Sudret und Joe Wiart. „Polynomial-Chaos-Based Kriging“. In: *International Journal for Uncertainty Quantification* 5.2 (2015), S. 171–193. ISSN: 2152-5080. DOI: 10.1615/Int.J.UncertaintyQuantification.2015012467.
- [75] Ahmed A. Shabana. *Dynamics of multibody systems*. Fourth edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. ISBN: 9781107042650. DOI: 10.1017/CBO9781107337213.
- [76] Ralph C. Smith. *Uncertainty quantification: Theory, implementation, and applications*. Bd. 12. Computational science & engineering. Philadelphia, Pa.: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014. ISBN: 978-1-611973-21-1. (Besucht am 23. 05. 2017).
- [77] C. Soize. „A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics“. In: *Journal of Sound and Vibration* 288.3 (2005), S. 623–652. ISSN: 0022-460X. DOI: 10.1016/j.jsv.2005.07.009. (Besucht am 26. 04. 2017).
- [78] *Sonderforschungsbereich 805 – Beherrschung von Unsicherheit in lasttragenden Systemen des Maschinenbaus: Fortsetzungsantrag für die dritte Förderperiode von 2017 bis 2020*.
- [79] Bruno Sudret. „Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions“. In: *Reliability Engineering & System Safety* 93.7 (2008), S. 964–979. ISSN: 09518320. DOI: 10.1016/j.res.2007.04.002.
- [80] T. J. Sullivan. *Introduction to uncertainty quantification*. Bd. volume 63. Texts in applied mathematics. Cham u. a.: Springer, 2015. ISBN: 978-3-319-23394-9. DOI: 10.1007/978-3-319-23395-6.
- [81] Tobias Neckel. *Algorithms for Uncertainty Quantification: Lecture Notes: Lecture 6: Polynomial Chaos Approximation 1: The Pseudo-spectral Approach*. 2018.
- [82] P.-R. Wagner u. a. *UQLab user manual – Bayesian inversion for model calibration and validation*. 2019. URL: [http://uqftp.ethz.ch/uqlab\\_doc\\_pdf/2.0.0/UserManual\\_Bayesian.pdf](http://uqftp.ethz.ch/uqlab_doc_pdf/2.0.0/UserManual_Bayesian.pdf) (besucht am 30. 04. 2022).

- 
- [83] Keith Worden und J. J. Hensman. „Parameter estimation and model selection for a class of hysteretic systems using Bayesian inference“. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 32 (2012), S. 153–169. ISSN: 0888-3270. DOI: 10.1016/j.ymsp.2012.03.019. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ymsp.2012.03.019>.
- [84] Dongbin Xiu. *Numerical Methods for Stochastic Computations*. Princeton University Press, 2010. ISBN: 9781400835348. DOI: 10.1515/9781400835348.
- [85] Ka-Veng Yuen, James L. Beck und Lambros S. Katafygiotis. „Efficient model updating and health monitoring methodology using incomplete modal data without mode matching“. In: *Structural Control and Health Monitoring* 13.1 (2006), S. 91–107. ISSN: 1545-2255. DOI: 10.1002/stc.144.
- [86] Ka-Veng Yuen und Lambros S. Katafygiotis. „Bayesian Fast Fourier Transform Approach for Modal Updating Using Ambient Data“. In: *Advances in Structural Engineering* 6.2 (2003), S. 81–95. ISSN: 1369-4332. DOI: 10.1260/136943303769013183.