Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Teoremas de convergencia monótona en el marco de la integral de Henstock-Kurzweil y aplicaciones

por

Homero Alejandro Escamilla Rocha

en opción al grado de

Maestría en Ciencias
con Orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León Diciembre 2020

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Teoremas de convergencia monótona en el marco de la integral de Henstock-Kurzweil y aplicaciones

por

Homero Alejandro Escamilla Rocha

en opción al grado de

Maestría en Ciencias

con Orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León Diciembre 2020

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis "Teoremas de convergencia monótona en el marco de la integral de henstock-kurzweil y aplicaciones", realizada por el alumno Homero Alejandro Escamilla Rocha, con número de matrícula 1067136, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias con Orientación en Matemáticas.

El Comité de Tesis

Dra. Lilia Alanís López
Directora

Dra. María Luisa Daza Torres
Codirectora

Dr. Raúl Gómez Muñoz
Revisor

Vo. Bo.

Dr. Omar Jorge Ibarra Rojas
Coordinar del Posgrado en Ciencias con
Orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Diciembre 2020

Para Sandra, la fuente que todo lo emana.

Índice general

Agradecimientos VIII

Resumen X

1. Introducción 1

1.1. Objetivo 4

1.2. Motivación 5

1.3. Estructura 5

2. Teoría de Conos 9

2.1. Conos Ordenados en Espacios Vectoriales 9

2.2. Espacios de Banach Ordenados 12

2.3. Conos Normales, Regulares y Completamente Regulares 14

3. Integración en Espacios de Banach 27

3.1. Sistemas, Particiones y Calibradores 27

3.2. Definición de las Integrales de McShane y Henstock-Kurzweil 29

3.3. Propiedades de la Integral de Henstock-Kurzweil 31

3.4. El Lema de Saks-Henstock 42

3.5. Teorema Fundamental del Cálculo 50

4. Teoremas de Convergencia Monótona 53

4.1. Teoremas de Convergencia Para Funciones Real Valuadas 54
4.1.1. Teorema de Convergencia Monótona 54
4.1.2. Teorema de Convergencia Dominada 54
4.1.3. Teorema de Equi-Integrabilidad 55
4.2. Teoremas de Convergencia Monótona Para Funciones Vector-Valuadas . . . 56
4.2.1. Primer Teorema de Convergencia Monótona 58
4.2.2. Segundo teorema de Convergencia monótona 64
4.2.3. Teorema de Equi-integrabilidad 65

5. Aplicaciones **69**

5.1. Aplicación a la Teoría de Espacios de Banach 69
5.2. Aplicación a una Ecuación Integral 73
5.2.1. Primer Teorema de Existencia 74
5.2.2. Segundo teorema de existencia 78

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a mis padres, Homero Escamilla Reyna y Sara Rocha Rivera por darme la vida, por predicar con el ejemplo, por haberme dado la oportunidad de estudiar y siempre alentarme a seguir adelante. Es un placer y un verdadero honor ser su hijo.

A mis hermanos Jorge Mariano Escamilla Rocha y Tania Sarahí Escamilla Rocha por todos los momentos de dicha, felicidad y tristeza que hemos pasado juntos, por su amor y cariño que, a pesar de la distancia, siempre me hecen sentir.

Por supuesto a mi esposa, Sandra Bahena Méndez, por su apoyo siempre incondicional, su comprensión, su amor y ternura a cada momento. En fin, por complementar de manera precisa mi amor y alegría por vivir.

A mis asesoras, Dra. Lilia Alanís López y Dra. María Luisa Daza Torres, por haber aceptado dirigir éste trabajo de último momento. Por su apoyo incondicional, sus consejos y por haberme brindado su amistad. Muchas gracias a ambas.

Al Dr. Juan Alberto Escamilla Reyna, por estar siempre al pendiente de mis avances, por su ayuda técnica, por proporcionarme libros y artículos para lectura y por sus consejos en la redacción de los capítulos de éste trabajo. Muchas gracias Juan.

Por último, deseo hacer un agradecimiento especial a mis abuelos Fernando Rocha Issasi (D.E.P) y María Graciela Rivera García por todo su dulce amor a lo largo de mi vida.

Resumen

En este trabajo se sientan las bases para el estudio de la integral de Henstock-Kurzweil en el contexto de los espacios de Banach y sus teoremas de convergencia. Se desarrollan las propiedades fundamentales de dicha integral y se presentan dos teoremas de convergencia monótona para funciones Henstock-Kurzweil integrables definidas en un intervalo compacto de los reales y con valores en un espacio de Banch. La teoría de integración de Henstock-Kurzweil es aplicada en la caracterización de los espacios de Banach de dimensión finita y los teoremas de convergencia monótona son aplicados para probar resultados de existencia de soluciones a una ecuación integral funcional que contiene funciones Henstock-Kurzweil integrables.

Palabras clave: Integral de Henstock-Kurzweil, Espacio de Banach, Cono ordenado, Normal, Regular, Completamente regular, Teorema de convergencia monótona, Ecuación integral.

Capítulo 1
Introducción

La teoría de integración tiene una rica historia y hunde sus raíces hasta la antigua Grecia en los intentos de Arquímedes por calcular el área de regiones planas. No fue si no hasta 1854 que Riemann presenta la primer teoría de integración propiamente dicha. Como es bien sabido, la integral de Riemann presenta varias deficiencias para trabajar en matemáticas. Entre ellas podemos mencionar (ver [1]):

- Si una función es Riemann integrable sobre el intervalo $[a, b]$ de los reales, entonces es acotada ahí.
- Existen derivadas acotadas que no son Riemann integrables.
- Existen sucesiones de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ que son Riemann integrables,que convergen puntualmente hacia una función f sobre un intervalo $[a, b]$ de la recta real y tal que f no es Riemann integrable sobre $[a, b]$.

En 1902 Lebesgue desarrolla una integral más general para eliminar las deficiencias mencionadas antes. Sin embargo, la integral de Lebesgue no es lo suficientemente poderosa como para poder integrar todas las derivadas. Fue natural entonces para Lebesgue plantear el problema de encontrar otra integral que pudiera remediar lo anterior, es decir, una teoría de integración que nos garantice la integrabilidad de toda derivada.

En 1912, Denjoy extiende la integral de Lebesgue unidimensional de tal modo que la integral resultante pueda integrar todas las derivadas finitas. Dos años después Perron emplea un método diferente para definir su integral y la usa en el estudio de las ecuaciones diferenciales. Es algo sorprendente que las dos integrales mencionadas antes coincidan. Esta integral es hoy conocida como la integral de Denjoy-Perron. Cabe mencionar que las definiciones clásicas de las integrales de Riemann, Lebesgue, Denjoy y Perron tienen muy poco en común ([7]).

En los años cincuenta del siglo pasado, Henstock y Kurzweil, de manera independiente, dieron una ligera pero ingeniosa modificación a la definición clásica de la integral de Riemann ([13]) para obtener la integral de Henstock-Kurzweil, la cual es una definición del tipo Riemann de la integral de Denjoy-Perron y enmarca el contexto del presente trabajo.

La integral de Henstock-Kurzweil fue formulada inicialmente para funciones real valuadas, posteriormente Cao, en [3], presenta una generalización para funciones que toman valores en un espacio de Banch.

Fue Ralph Henstock quien desarrolló las principales propiedades de la integral, tales como el Lema de Saks-Henstock, el Teorema Fundamental del Cáculo y los Teoremas de Convergencia para el caso de funciones real-valuadas. En el año 2010 Heikkilä presenta en [9] y [10] los correspondientes teoremas de convergencia para funciones con valores en un espacio de Banach y los aplica para la obtención de resultados de existencia de soluciones a ecuaciones integrales. Nosotros en los capítulos 4 y 5 emprenderemos el estudio de dichos teoremas.

Para introducir la definición de la integral de Henstock-Kurzweil consideremos la siguiente pregunta: si tenemos una función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, ¿como podríamos intentar una demostración del teorema fundamental del cálculo para la integral de Riemann? Es decir, como podríamos probar que:

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Sea $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. En cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ buscamos un punto t_i tal que el término $f'(t_i)(x_{i+1} - x_i)$ aproxime a $f(x_{i+1}) - f(x_i)$. Si esta elección de puntos es posible en cada subintervalo, entonces la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n-1} f'(t_i)(x_{i+1} - x_i)$$

debería proporcionar una aproximación al valor deseado de la integral de f' sobre $[a, b]$, ya que

$$\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{i+1}) - f(x_i)] = f(b) - f(a)$$

¿Es siempre posible tal elección de puntos? El siguiente lema nos dice que en cierto sentido este es el caso.

Lema 1.1. ***(Straddle)*** *Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $z \in [a, b]$, entonces para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si*

$$u \leq z \leq v \ y \ \ [u, v] \subset [a, b] \cap (z - \delta, z + \delta)$$

entonces

$$|f(v) - f(u) - f'(z)(v - u)| \leq \epsilon(v - u).$$

La demostración de este resultado es bastante simple y puede encontrarse en [20]. Nosotros en el capítulo 3 damos una demostración para funciones que toman valores en un espacio de Banach.

Si fuera posible partir el intervalo $[a, b]$ de tal modo que el punto $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$ y el subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ satisficieran la conclusión del lema anterior, obtendriamos

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) - [f(a) - f(b)] \right|$$

$$= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ f'(t_i)(x_{i+1} - x_i) \ - \ [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \right\} \right| \leq \epsilon(b - a)$$

y la suma de Riemann $\sum_{i=0}^{n-1} f'(t_i)(x_{i+1} - x_i)$ nos da una buena aproximación al valor deseado de la integral f' sobre $[a, b]$.

Recordemos en este punto la definición de la integral de Riemann: $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es Riemann integrable sobre $[a, b]$ si existe $A \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $P = \{a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b\}$ es una partición de $[a, b]$ con $\max\{x_{i+1} - x_i : i = 0, \ldots, n - 1\} < \delta$ y $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$ entonces

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i)(x_{i+1} - x_i) - A \right| < \epsilon.$$

Nótese que el $\delta = \delta(z)$ dado en la conclusión del lema depende del punto $z \in [a, b]$ e indudablemente varía conforme z recorre el intervalo $[a, b]$, dependiendo del comportamiento de la función f. Es decir, puede no existir una sola constante positiva δ que satisfaga la conclusión del lema para todos los puntos del intervalo, y por lo tanto no podemos garantizar la integrabilidad de Riemann de la derivada f'.

Coma para cada $t \in [a, b]$ podemos encontrar $\delta(t) > 0$ que cumple la conclusión del lema, esto sugiere reemplazar la constante δ de la definición de Riemann por $\delta(t_i)$ y la condición $\max\{x_{i+1} - x_i : i = 0, \ldots, n-1\} < \delta$ por $t_i \in [x_i, x_{i+1}] \subset (t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i))$. Esta es precisamente la modificación que hizo Kurzweil a la integral de Riemann y que dio lugar a la teoría de integración de Henstock-Kurzweil. Presentaremos las definiciones formales en el capítulo 3 de esta tesis.

Cabe aclarar que ninguna de las ideas y resultados presentados en este trabajo son originales. Han sido obtenidos de una serie de artículos de investigación y libros que son citados oportunamente a lo largo de los capítulos. Nuestra principal contribución consiste en una presentación ordenada de la teoría, completando rigurosamente los detalles faltantes en algunas de las demostraciones importantes y dando algunas demostraciones propias que no encontramos en la literatura. Cuando este ha sido el caso, se menciona de manera explícita en el punto correspondiente.

1.1 Objetivo

El objetivo general del presente trabajo de tesis es desarrollar la teoría matemática necesaria para iniciar el estudio de la teoría de integración de Henstock-Kurzwei y de sus teoremas de convergencia monótona para funciones que toman valores en un espacio de Banach, así como presentar las principales propiedades de dicha integral. Entre las teorías matemáticas necesarias para emprender el estudio se encuentran la teoría de conos y la teoría de espacios de Banach ordenados. Lo anterior debido al hecho de que las funciones que integraremos tomarán valores en un espacio de Banach X y no se puede hablar de teoremas de convergencia monótona a menos que se tenga un orden en el espacio de Banach.

Como objetivo específico nos planteamos presentar y demostrar dos teoremas de convergencia monótona para la integral de Henstock-Kurzweil y aplicarlos en la obtención de resultados que nos garanticen la existencia de soluciones para una ecuación integral de tipo Urysohn.

Otro de los objetivos específicos es caracterizar a los espacios de Banach de dimensión finita mediante la teoría de integración de Henstock-Kurzweil.

1.2 Motivación

La integral de Henstock-Kurzweil que surge entre 1950 y 1960 del siglo pasado se destaca por ser una integral potente como la de Lebesgue pero que preserva la sencillez de la definición de Riemann. En la actualidad se ha utilizado para dar una formulación matemática rigurosa de la integral de camino de Feynman, la cual juega un rol importante en la física cuántica. Otras de sus aplicaciones han sido en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales (Chew, [4]) y en la aproximación numérica de soluciones a ecuaciones diferenciales (León Velasco, [15]).

La principal ventaja de la integral de Henstock-Kurzweil es su aplicabilidad para integrar funciones que son altamente oscilantes, las cuales surgen en la teoría cuántica y el análisis no lineal. Como se mencionó antes, es también fácil de entender, pues al preservar la sencillez de la integral de Riemann, no requiere de la teoría de la medida para su presentación.

Hay que mencionar sin embargo que la falta de estructura de espacio de Banach para la clase de las funciones que son integrables en el sentido de Henstock-Kurzweil, es el factor más importante que ha impedido su amplia aceptación en ingeniería, matemáticas y física.

Por otra parte, las ecuaciones integrales funcionales de varios tipos aparecen en muchas aplicaciones que surgen en los campos del análisis matemático, análisis funcional no lineal, física matemática e ingeniería. Lo anterior pone de manifiesto la importancia de contar con resultados que nos garanticen la existencia de soluciones a dicho tipo de ecuaciones, lo cual constituye uno de los objetivos específicos de esta tesis.

1.3 Estructura

El presente trabajo de tesis está compuesto por cinco capítulos, de los cuales la presente introducción constituye el primero. Los capítulos restantes se describen a continuación:

Capítulo 2. En el concepto de monotonía va implicito con el de relación de orden. Las funciones que son estudiadas toman valores en un espacio de Banach, los cuales en general no tienen una relación de orden natural y es por esta razón que en el capítulo dos desarrollamos la parte esencial de la teoría de conos que nos permita dotar de un orden a los espacios de Banch.

Se inicia con la definición de cono ordenado en un espacio vectorial y mediante dicho concepto se define una relación de orden parcial en el espacio. Posteriormente, la definición de cono ordnado es extendida a los espacios vectoriales normados, añadiendo a la definición de cono en un espacio vectorial, la condición de que este último sea cerrado en el espacio.

Se introducen los conceptos de acotación en orden y acotación en norma para una sucesión, se desarrollan las propiedades fundamentales de la relación de orden inducida por el cono y se introducen los conceptos de cono ordenado normal, regular y completamente regular, demostrando que completamente regular implica regular y esto a su vez implica normal.

Se proporcionan ejemplos que muestran que los conceptos previos no son equivalentes y se termina enunciando un teorema que garantiza la equivalencia de los mismos si el espacio de Banach es débilmente secuencialmente completo.

Capítulo 3. Este capítulo desarrolla la teoría básica de la integral de Henstock-Kurzweil, iniciando con conceptos fundamentales, tales como intervalo marcado, intervalos no traslapados, M-sistema, K-sistema, M-partición, K-partición, calibrador, K-partición δ-fina, etcétera, que nos permitan definir la integral de Henstock-Kurzweil para una función definida en subintervalos compactos de $\mathbb{R}^n$ y con valores en un espacio de Banch X. Es también presentada la integral de McShane para funciones del tipo descrito antes.

Se desarrollan las propiedades algebraicas básicas de la integral de Henstock-Kurzweil y se presenta el criterio de integrabilidad de Cauchy, el cual resulta ser útil en situaciones donde el valor de la integral no es conocido de antemano. Se muestra que el conjunto de las funciones Henstock-Kurzweil integrables posee estructura de espacio vectorial. Entre otras de las propiedades desarrolladas, está la que nos dice que si una función es Henstock-Kurzweil integrable sombre un intervalo I, entonces lo será sobre cualquier subintervalo cerrado de I; hecho que nos permite definir el concepto de integral indefinida o primitiva para una función Henstock-Kurzweil integrable.

Se presenta el importante lema de Saks-Henstock, tanto en su versión débil como en su versión fuerte, haciendo hincapié en que este último se cumple sólo en el caso en que el espacio de Banach es de dimensión finita.

El capítulo finaliza con el teorema fundamental del cálculo, mostrando que en la teoría de integración de Henstock-Kurzweil, dicho teorema se cumple en su totalidad, es decir, que al ser una función f Henstock-Kurzweil integrable, entonces su derivada f' también lo es y $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.

Capítulo 4. El capítulo inicia con la presentación de los teoremas de convergencia para la intgral de Henstock-Kurzweil de funciones con valores reales definidas en un intervalo compacto de los reales. Entre los teoremas presentados en este contexto están el de convergencia monótona y de convergencia dominada.

Se introduce el concepto de equi-integrabilidad para una clase de funciones Henstock-Kurzweil integrables y el teorema de equi-integrabilidad, el cual tiene la ventaja de no implicar la relación de orden usual de los números reales, lo que facilita su extensión al contexto de funciones vector-valuadas.

Se hace uso da la teoría de conos desarrollada en el capítulo dos, para enunciar los teoremas de convergencia monótona para funciones que toman valores en un espacio de Banch. Se presentan las demostraciones de los resultados correspondientes.

Capítulo 5. En este capítulo final se presentan aplicaciones de los resultados desarrollados en los capítulos previos. La primera de ellas caracteriza a los espacios de Banach de dimensión finita mediante la teoría de integración de Henstock-Kurzweil.

Para llevar a cabo lo anterior, se introduce la definición de una función Henstock integrable, los conceptos de oscilación de una función, de variación acotada en el sentido restringido y el de variación acotada generalizada en el sentido restringido.

Se presenta el teorema que establece que las integrales de Henstock y Henstock-Kurzweil coinciden si y sólo si el espacio de Banch es de dimensión finita.

El capítulo termina con la aplicación de los teoremas de convergencia monótona a la obtención de resultados de existencia de soluciones a una ecuación integral.

Capítulo 2
Teoría de Conos

El objetivo de este capítulo es presentar conceptos y resultados básicos de la teoría de conos que nos serán de utilidad en el estudio de integración en espacios de Banach. Empezaremos por definir el concepto de cono en un espacio vectorial, para posteriormente introducir dicho concepto en el contexto de los espacios normados. Se presentan las definiciones de cono normal, regular y fuertemente regular, probando que fuertemente regular implica regular y esto a su vez implica normal. Concluimos enunciando un resultado que establece que dichos conceptos son equivalentes en un espacio de Banach débilmente secuencialmente completo.

Para el lector interesado en profundizar en dicha teoría se recomienda [8, 2] de la bibliografía.

2.1 Conos Ordenados en Espacios Vectoriales

Todos los espacios vectoriales que consideraremos en este capítulo serán reales. Si X es un espacio vectorial, nuestro primer objetivo es definir un orden parcial en él y para ello definimos en primera instancia el "conjunto de elementos positivos". Así pues, tenemos entonces la siguiente definición.

Definición 2.1. *Sea X un espacio vectorial. Un* ***cono ordenado*** *(o simplemente cono) en X, es un subconjunto no vacío P de X tal que:*

1. $P + P \subseteq P$.
2. $\forall \lambda \geq 0,\ \lambda P \subseteq P$.
3. $P \cap (-P) = \{0\}$.

Al par (X, P), siendo X un espacio vectorial y P un cono ordenado en X, se le llama ***espacio vectorial ordenado.*** *Como es usual, cuando no exista peligro de confusión, nos* *referiremos al espacio vectorial ordenado (X, P), simplemente como el espacio vectorial ordenado X.*

Observación 2.1. *Sea (X, P) un espacio vectorial ordenado. Entonces se cumple que:*

1. $0 \in P$.

2. *$\{0\}$ es un cono y se le conoce como cono trivial.*

3. *$\{0\}$ es el único subespacio vectorial de X que es un cono.*

Teniendo a nuestra disposición el concepto de cono ordenado, pasamos a definir una relación en el espacio vectorial X del siguiente modo:

Definición 2.2. *Sea (X, P) un espacio vectorial ordenado. Definimos una relación $\leq$ en X como:*

$$x \leq y \text{ si y solo si } y - x \in P$$

El espacio vectorial X con la relación recién definida pasa a ser un conjunto parcialmente ordenado tal como establecen los primeros tres puntos del siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Sea (X, P) un espacio vectorial ordenado con $x, y, z \in X$, $\lambda \geq 0$. Entonces:*

1. $\forall x \in X$, $x \leq x$.

2. *Si $x \leq y$ y $y \leq x$ entonces $x = y$.*

3. *Si $x \leq y$ y $y \leq z$ entonces $x \leq z$.*

4. *Si $x \leq y$ y $z \in X$ entonces $x + z \leq y + z$.*

5. *Si $\lambda \geq 0$ y $x \leq y$ entonces $\lambda x \leq \lambda y$.*

Demostración

1. Sea $x \in X$. Como $x - x = 0$ y $0 \in P$, entonces $x \leq x$.

2. Como $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $y - x \in P \cap (-P)$ y de aquí que $y - x = 0$, de donde $x = y$.

3. Como $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $y - x, z - y \in P$ y de aquí que $z - x = (y - x) + (z - y) \in P$, lo cual implica que $x \leq z$.

4. Sea $z \in X$. Como $x \leq y$, entonces $y - x = (y + z) - (x + z) \in P$. Por lo tanto $x + z \leq y + z$.
5. Sea $\lambda \geq 0$. Como $x \leq y$, entonces $y - x \in P$ y de aquí que $\lambda y - \lambda x = \lambda(y - x) \in P$. Por lo tanto $\lambda x \leq \lambda y$.

□

Los siguientes son algunos ejemplos de conos ordenados en espacios vectoriales.

Ejemplo 2.1.

a) Sea $X = \mathbb{R}$, $P = [0, \infty)$ *es un cono ordenado en* $\mathbb{R}$.

b) Sea $X = \mathbb{R}^n$. $P = \big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\big\}$. P *es un cono en* $\mathbb{R}^n$.

c) Sea $A \neq \emptyset$, $X = \mathbb{R}^A$, $P = \big\{f \in \mathbb{R}^A : \forall x \in A, f(x) \geq 0\big\}$. P *es un cono en* X.

d) Sea $X = C\big([a, b], \mathbb{R}\big)$, $P = \big\{f \in X : \forall x \in [a, b], f(x) \geq 0\big\}$. P *es un cono en* X.

Si X es un espacio vectorial ordenado con cono ordenado P, utilizamos al cono para definir a los elementos positivos de X de acuerdo a la siguiente definición.

Definición 2.3. *Sea* (X, P) *un espacio vectorial ordenado. Si* $x \in X$ *y* $0 \leq x$, x *es llamado* ***vector positivo****. Al conjunto de todos los vectores postivos lo denotaremos por* X_+ *y lo llamaremos* ***cono positivo*** *de* X*. Es decir*

$$X_+ = \{x \in X : x \geq 0\}\,.$$

El cono positivo también suele denotarse por X^+.

Si (X, P) es un espacio vectorial ordenado, el siguiente resultado nos da la relación esperada entre el cono ordenado P y el cono positivo X_+.

Teorema 2.2. *Sea* (X, P) *un espacio vectorial ordenado. Entonces el cono positivo* X_+ *de* X *es un cono y* $P = X_+$.

Demostración

$$x \in X_+ \;\Leftrightarrow\; 0 \leq x \;\Leftrightarrow\; x = x - 0 \in P.$$

□

Debido a lo anterior, de aquí en adelante a un cono ordenado en un espacio vectorial X lo denotaremos por X_+.

2.2 Espacios de Banach Ordenados

Si X es un espacio vectorial ordenado con cono ordenado X_+ e introducimos en X una norma, tendremos ahora la topología inducida por la métrica de la norma y tendrá sentido hablar de convergencia de sucesiones. Si (x_n) es una sucesión convergente en X con $x_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, nos gustaría que el límite fuera un vector positivo. Por tal motivo, si X es un espacio normado, aunado a las condiciones que hemos impuesto en la definición de cono ordenado, debemos añadir la condición extra de que X_+ sea un conjunto cerrado. Tenemos así la siguiente definición.

Definición 2.4. *Sea X un espacio normado. Un* ***cono ordenado*** *en X es un subconjunto no vacío X_+ de X tal que:*

1. *X_+ es cerrado en X.*
2. *$X_+ + X_+ \subseteq X_+$.*
3. *$\forall \lambda \geq 0$, $\lambda X_+ \subseteq X_+$.*
4. *$X_+ \cap (-X_+) = \{0\}$.*

Al par (X, X_+), siendo X un espacio normado y X_+ un cono ordenado en X, se le llama ***espacio normado ordenado*** *y como es usual, cuando no exista peligro de confusión, nos referiremos a él simplemente como el espacio normado ordenado X.*

Definición 2.5. *Un* ***espacio de Banach ordenado,*** *es un par (X, X_+), donde X es un espacio de Banach y X_+ es un cono ordenado en X.*

El siguiente ejemplo nos muestra que las nociones de cono en un espacio vectorial y en un espacio normado no coinciden.

Ejemplo 2.2. *Consideremos $X = C([0,1])$, con la norma uniforme. $X_+ = \big\{f \in X : f \text{ es un polinomio y } \forall x \in [0,1],\ f(x) \geq 0\big\}$. Nótese que X_+ no es cerrado en X, pues por el teorema de Weistrass $\sin x$ es un punto limite de X_+ que no pertenece a X_+. Así, X_+ es un cono ordenado considerando a X como espacio vectorial, pero no lo es considerando a X como espacio normado.*

Si X es un espacio normado ordenado y (x_n) es una sucesión en X, la expresión: "(x_n) es una sucesión acotada"puede resultar ambigua. ¿Nos referimos a que existen $x, y \in X$ tales que $y \leq x_n \leq x$, $n \in \mathbb{N}$, o nos referimos a que existe $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$? La siguiente definición pone remedio a dicha ambiguedad.

Definición 2.6. *Sea (X, X_+) un espacio normado ordenado. Decimos que la sucesión $(x_n) \subset X$ está* ***acotada superiormente en orden*** *si existe $x \in X$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq x$, y decimos que está* ***acotada inferiormente en orden*** *si existe $x \in X$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \leq x_n$. Decimos que la sucesión está* ***acotada en orden****, si lo está inferiormente y superiormente.*
Se dice que la sucesión $(x_n) \subset X$ está ***acotada en norma****, si existe $M > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \leq M$.*
Se tienen definiciones análogas para $A \subset X$.

A una sucesión acotada en norma la llamaremos simplemente sucesión acotada.

Los siguientes resultados, al ser consecuencia casi directa de la definición de cono ordenado en un espacio normado, nos muestran la conveniencia de pedir que X_+ sea un conjunto cerrado en X.

Teorema 2.3. *Sean (X, X_+) un espacio normado ordenado, $x, y \in X$ y $(x_n), (y_n)$ sucesiones en X que convergen a x e y respectivamente. Si $x_n \leq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $x \leq y$.*

Demostración:
Como $x_n \to x$ y $y_n \to y$, entonces $y_n - x_n \to y - x$. Como $x_n \leq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $y_n - x_n \in X_+$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $y - x \in \overline{X_+} = X_+$, y de aquí que, por definición $x \leq y$. □

Teorema 2.4. *Sea (X, X_+) un espacio normado ordenado, y $A \subseteq X$ acotado en orden. Entonces $\overline{A}$ está acotado en orden.*

Demostración.
Por hipótesis, existen $x_0, y_0 \in X$ tales que $\forall a \in A$, $x_0 \leq a \leq y_0$. Sea $a \in \overline{A}$, entonces existe (a_n) sucesión en A tal que $a_n \to a$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_0 \leq a_n \leq y_0$, de donde, haciendo n tender a infinito tenemos por el resultado anteior que $x_0 \leq a \leq y_0$. □

Teorema 2.5. *Todo intervalo cerrado en un espacio normado ordenado es un conjunto cerrado.*

Demostración.
Sea X un espacio normado ordenado y $a, b \in X$ con $a \leq b$. Si $x_0 \in \overline{[a, b]}$, entonces existe (x_n) sucesión en $[a, b]$ tal que $x_n \to x_0$. Pero $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leq x_n \leq b$ y de aquí, despues de hacer n tender a infinito, obtenemos $a \leq x_0 \leq b$. □

2.3 Conos Normales, Regulares y Completamente Regulares

Si consideramos a los números reales con su norma usual (valor absoluto), tenemos entonces conocimiento de una serie de resultados relativos a sucesiones que son muy útiles, como por ejemplo que toda sucesión creciente y acotada superiormente converge, que toda sucesión tiene una subsucesión monótona, etc. En un espacio normado ordenado cualquiera, estos reultados ya no se cumplen necesariamente. Por tal motivo, a los que preservan algunas de estas propiedades se les da un nombre especial.

Definición 2.7. *Sea (X, X_+) un espacio de Banach ordenado. El cono X_+ se dice:*

1. ***Normal**, si existe una constante $N \geq 1$ tal que*

$$0 \leq x \leq y \quad \Rightarrow \quad \|x\| \leq N\|y\|.$$

   *Al menor de los N que cumple lo anterior se le llama **constante normal** o **constante de normalidad**.*

2. ***Regular**, si cada sucesión creciente y acotada superiormente en orden tiene un límite.*

3. ***Completamente Regular**, si cada sucesión creciente y acotada (en norma) tiene límite.*

Observación 2.2.

a) X_+ es regular $\Leftrightarrow$ cada sucesión decreciente y acotada inferiormente en orden tiene un límite.

b) X_+ es completamente regular $\Leftrightarrow$ cada sucesión decreciente y acotada tiene un límite.

La experiencia nos ha mostrado que siempre es deseable tener definiciones equivalentes de un mismo concepto, pues en un contexto dado una definición puede ser mas útil que otra. Por tal motivo nuestro siguiente teorema nos da varias condiciones equivalentes a la normalidad.

Teorema 2.6. *Sea X_+ un cono ordenado en un espacio de Banach X. Las siguientes proposiciones son equivalentes.*

1. *X_+ es normal.*

2. *Existe una norma equivalente* $\|\cdot\|_1$ *sobre* X *tal que*

$$0 \leq x \leq y \quad \Rightarrow \quad \|x\|_1 \leq \|y\|_1.$$

3. *Si* $x_n \leq z_n \leq y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *y* $x_n \to x$, $y_n \to x$, *entonces* $z_n \to x$.

4. $(B + X_+) \cap (B - X_+)$ *es acotado, donde* $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.

5. *Cualquier intervalo cerrado* $[x, y] = \{z \in X : x \leq z \leq y\}$ *es acotado.*

6. *Existe* $\delta > 0$ *tal que* $\forall x, y \in X_+$ *con* $\|x\| = \|y\| = 1$, *se tiene* $\|x + y\| \geq \delta$.

7. *Existe* $\gamma > 0$ *tal que* $\forall x, y \in X_+$, *se tiene* $\|x + y\| \geq \gamma \max\{\|x\|, \|y\|\}$.

Demostración.
$(1) \Rightarrow (2)$: Para $x \in X$, definimos

$$\|x\|_1 = \inf_{u \leq x} \|u\| + \inf_{x \leq v} \|v\|.$$

Probaremos que $\|\cdot\|_1$ es una norma en X que es equivalente a $\|\cdot\|$ (la norma de X) y que es creciente en el sentido de que:

$$0 \leq x \leq y \quad \Rightarrow \quad \|x\|_1 \leq \|y\|_1$$

Como para cada $x \in X$, $\|x\| \geq 0$, se tiene que $\inf_{u \leq x} \|u\| \geq 0$ e $\inf_{x \leq v} \|v\| \geq 0$, de donde concluimos que $\forall x \in X$, $\|x\|_1 \geq 0$. Si $x = 0$, entonces $0 \leq x \leq 0$ y de aquí que tengamos $\|0\|_1 = 0$. Por otra parte, si $\|x\|_1 = 0$, entonces:

$$\inf_{u \leq x} \|u\| = \inf_{x \leq v} \|v\| = 0.$$

Sea $\epsilon > 0$; existen, por definición del ínfimo, $u, v \in X$ tales que:

$$u \leq x \leq v \;\text{ y }\; \|u\| < \epsilon,\ \|v\| < \epsilon.$$

Tenemos:

$$\|x\| \leq \|x - u\| + \|u\|$$

y como $0 \leq x - u \leq v - u$, entonces, por la normalidad de X_+ se tiene:

$$\|x - u\| \leq N\|v - u\|.$$

Por lo tanto, de lo anterior:

$$\|x\| \leq N\|v-u\| + \|u\| \leq N\big(\|v\| + \|u\|\big) + \|u\| < 2N\epsilon + \epsilon = \epsilon(2N+1)$$

y como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que $\|x\| = 0$ y de aquí que $x = 0$.

Hemos probado que para cada $x \in X$:

$$\|x\|_1 \geq 0 \;\text{ y }\; \|x\|_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Probaremos ahora que para cada $\lambda \in \mathbb{R},\ x \in X$ se tiene:

$$\|\lambda x\|_1 = |\lambda|\|x\|_1.$$

Si $\lambda = 0$, ambos lados de la igualdad anterior se reducen a cero. Así que supongamos que $\lambda \neq 0$ y sean $u, v, x \in X$ tales que:

$$u \leq \lambda x \leq v.$$

Entonces tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{u}{\lambda} \leq x \leq \dfrac{v}{\lambda} & si \quad \lambda > 0 \\[2ex] \dfrac{v}{\lambda} \leq x \leq \dfrac{u}{\lambda} & si \quad \lambda < 0 \end{cases}$$

y en cualquiera de los dos casos tenemos:

$$\|x\|_1 \leq \frac{1}{|\lambda|}\big(\|u\| + \|v\|\big).$$

Por lo tanto

$$|\lambda|\|x\|_1 \leq \|u\| + \|v\|$$

y de aquí que

$$|\lambda|\|x\|_1 \leq \|\lambda x\|_1.$$

Similarmente, si $u \leq x \leq v$, entonces

$$\begin{cases} \lambda u \leq \lambda x \leq \lambda v & si \quad \lambda > 0 \\ \lambda v \leq \lambda x \leq \lambda u & si \quad \lambda < 0 \end{cases}$$

y en cualquiera de los dos casos tenemos

$$\|\lambda x\|_1 \leq |\lambda|\big(\|u\| + \|v\|\big)$$

luego

$$\frac{1}{|\lambda|}\|\lambda x\|_1 \leq \|u\| + \|v\|$$

por lo tanto

$$\frac{1}{|\lambda|}\|\lambda x\|_1 \leq \|x\|_1$$

y entonces

$$\|\lambda x\|_1 \leq |\lambda|\|x\|_1.$$

De lo anterior se sigue que para cada $\lambda \in \mathbb{R}, x \in X$ se tiene

$$\|\lambda x\|_1 = |\lambda|\|x\|_1.$$

Ahora probaremos que para cada $x, y \in X$

$$\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Sean $x, y \in X$ y $\epsilon > 0$. Existen $u_1, v_1, u_2, v_2 \in X$ tales que

$$u_1 \leq x \leq v_1 \text{ y } \|u_1\| + \|v_1\| < \|x\|_1 + \epsilon$$

$$u_2 \leq y \leq v_2 \text{ y } \|u_2\| + \|v_2\| < \|y\|_1 + \epsilon$$

Como $u_1 + u_2 \leq x + y \leq v_1 + v_2$, tenemos

$$\|x + y\|_1 \leq \|u_1 + u_2\| + \|v_1 + v_2\| \leq$$

$$\big(\|u_1\| + \|v_1\|\big) + \big(\|u_2\| + \|v_2\|\big) <$$

$$\|x\|_1 + \|y\|_1 + 2\epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario concluimos que

$$\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Lo anterior demuestra que $\|\cdot\|_1$ es efectivamente una norma en X.

Resta probar que $\|\cdot\|_1$ es creciente y equivalente a la norma de X.

Sean $0 \leq x \leq y$; tenemos

$$\inf_{u \leq x} \|u\| = \inf_{u \leq y} \|u\| = 0$$

y por lo tanto

$$\|x\|_1 = \inf_{x \leq v} \|v\| \ \text{ y } \ \|y\|_1 = \inf_{y \leq v} \|v\|.$$

Como $\big\{\|v\| : y \leq v\big\} \subseteq \big\{\|v\| : x \leq v\big\}$, concluimos que $\|x\|_1 \leq \|y\|_1$.

Finalmente probaremos que $\|\cdot\|_1$ es equivalente a la norma de X.

Como

$$\inf_{u \leq x} \|u\| \leq \|x\| \ \text{ y } \ \inf_{x \leq v} \|v\| \leq \|x\|$$

entonces

$$\|x\|_1 \leq 2\|x\|.$$

Sean ahora $u, v \in X$ con $u \leq x \leq v$. Tenemos

$$\|x\| \leq \|x - u\| + \|u\|$$

Como $0 \leq x - u \leq v - u$, tenemos también por la normalidad de X_+ que

$$\|x - u\| \leq N\|v - u\|$$

De las dos últimas desigualdades concluimos que

$$\|x\| \leq N\|v - u\| + \|u\| \leq$$

$$N\|v - u\| + \|u\| + \|v\| \leq$$

$$N\big(\|v\| + \|u\|\big) + \|u\| + \|v\| =$$

$$\big(N + 1\big)\big(\|u\| + \|v\|\big)$$

De lo anterior vemos que

$$\frac{\|x\|}{N+1} \leq \|u\| + \|v\|$$

y por la definición $\|x\|_1$ tenemos

$$\frac{\|x\|}{N+1} \leq \|x\|_1.$$

Concluimos entonces que

$$\frac{\|x\|}{N+1} \leq \|x\|_1 \leq 2\|x\|$$

es decir, las dos normas son equivalentes.

(2) $\Rightarrow$ (3): De $0 \leq z_n - x_n \leq y_n - x_n$, tenemos $\|z_n - x_n\|_1 \leq \|y_n - x_n\|_1$. Como existen constanes $M, m > 0$ tales que $\forall x \in X,\ m\|x\| \leq \|x\|_1 \leq M\|x\|$, tenemos

$$0 \leq \|z_n - x_n\| \leq \frac{1}{m}\|z_n - x_n\|_1 \leq \frac{1}{m}\|y_n - x_n\|_1 \leq \frac{M}{m}\|y_n - x_n\| \to 0,$$

lo cual implica que

$$\|z_n - x\| \leq \|z_n - x_n\| + \|x_n - x\| \to 0.$$

De lo anterior concluimos que $z_n \to x$.

(3) $\Rightarrow$ (4) : Si $(B + X_+) \cap (B - X_+)$ no es acotado, entonces existe una sucesión $(z_n) \subset (B + X_+) \cap (B - X_+)$ tal que $\|z_n\| \to \infty$. Como $z_n \in B + X_+$, $z_n = x_n + p_n$, $x_n \in B$, $p_n \in X_+$. Por lo tanto $x_n \leq z_n$. Como también $z_n \in B - X_+$, $z_n = y_n - q_n$, $y_n \in B$, $q_n \in X_+$. Por lo tanto $z_n \leq y_n$.

Hacemos

$$u_n = \frac{x_n}{\|z_n\|}, \quad v_n = \frac{y_n}{\|z_n\|}, \quad w_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}.$$

Tenemos que $u_n \leq w_n \leq v_n$, $u_n \to 0$, $v_n \to 0$, pero w_n no converge a cero, lo cual contradice (3).

(4) $\Rightarrow$ (5) : Supongamos que $(B + X_+) \cap (B - X_+) \subseteq \rho B$, donde $\rho > 0$. Sea $\gamma = \text{máx}\big\{\|x\|, \|y\|\big\}$. Si $z \in [x, y]$, vemos que

$$\frac{z}{\gamma} = \frac{x}{\gamma} + \frac{z - x}{\gamma}, \text{ con } \frac{x}{\gamma} \in B, \ \frac{z - x}{\gamma} \in X_+$$

$$\frac{z}{\gamma} = \frac{y}{\gamma} - \frac{y - z}{\gamma}, \text{ con } \frac{y}{\gamma} \in B, \ \frac{y - z}{\gamma} \in X_+$$

de donde tenemos que $\dfrac{z}{\gamma} \in \rho B$. Por lo tanto $[x, y] \subseteq \gamma\rho B$.

(5) $\Rightarrow$ (6) : Supongamos que no se cumple (6). Entonces existen sucesiones $(x_n), \ (y_n) \subset X_+$ tales que

$$\|x_n\| = \|y_n\| = 1 \text{ y } \|x_n + y_n\| < 4^{-n}, \ n = 1, 2 \ldots$$

Sean

$$u_n = \frac{x_n}{\big(\|x_n + y_n\|\big)^{\frac{1}{2}}}, \quad v_n = \frac{x_n + y_n}{\big(\|x_n + y_n\|\big)^{\frac{1}{2}}}.$$

Tenemos $0 \leq u_n \leq v_n, \ n = 1, 2 \ldots$. Como

$$\|v_n\| = \big(\|x_n + y_n\|\big)^{\frac{1}{2}} < 2^{-n}$$

entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|$ converge, y entonces existe $v \in X$ tal que $v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Nótese que $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n \leq v$. Así tenemos $0 \leq u_n \leq v_n \leq v$. Como

$$\|u_n\| = \frac{1}{\big(\|x_n + y_n\|\big)^{\frac{1}{2}}} > 2^n, \ n = 1, 2 \ldots$$

entonces $[0, v]$ no es acotado, lo cual contradice (5).

(6) $\Rightarrow$ (7): Sea $\gamma = \frac{\delta}{2}, \ x, y \in X_+$ y supongamos en primer lugar que $\|x\| = 1, \ 0 < \|y\| \leq 1$. Tenemos

$$1 = \|x\| \leq \|x + y\| + \| - y\| = \|x + y\| + \|y\|.$$

Por lo tanto $\|x + y\| \geq 1 - \|y\|$.

Por otra parte

$$\|x+y\| = \left\| x + \frac{y}{\|y\|} - \frac{1-\|y\|}{\|y\|}y \right\| \geq \left\| x + \frac{y}{\|y\|} \right\| - \big(1-\|y\|\big) \geq \delta - 1 + \|y\|.$$

Sumando ambas desiguladades obtenemos

$$\|x+y\| \geq \frac{\delta}{2} = \gamma\, \text{máx}\big\{\|x\|,\ \|y\|\big\}.$$

Ahora sean $x, y \in X_+$ ambos diferentes de cero y supongamos que $\|x\| \geq \|y\|$. Hacemos

$$z = \frac{x}{\|x\|},\ w = \frac{y}{\|x\|}.$$

Entonces por lo probado antes tenemos

$$\|z+w\| = \left\| \frac{x+y}{\|x\|} \right\| \geq \frac{\delta}{2}.$$

Por lo tanto

$$\|x+y\| \geq \gamma\|x\| = \gamma\, \text{máx}\big\{\|x\|,\ \|y\|\big\}.$$

Si $x \neq 0$ y $y = 0$, hacemos

$$z = \frac{x}{\|x\|} = w$$

y por hipótesis

$$\|z+w\| = \left\| \frac{2x}{\|x\|} \right\| = 2 \geq \delta.$$

Por lo tanto $1 \geq \dfrac{\delta}{2}$ y tenemos

$$\|x+y\| = \|x\| \geq \frac{\delta}{2}\|x\| = \gamma\, \text{máx}\big\{\|x\|, \|y\|\big\}.$$

Finalmente notemos que si $x = y = 0$, la desigualdad se cumple trivialmente.

(7) $\Rightarrow$ (1): Si X_+ no es normal, entonces existen sucesiones $(x_n),\ (y_n) \subset X_+$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$0 \leq x_n \leq y_n \ \text{ y } \ \|x_n\| > n\|y_n\|.$$

Nótese que si para algún $n \in \mathbb{N},\ y_n = 0$, entonces $x_n = 0$ y $\|x_n\| = 0$, por lo que tendríamos $0 > n0$. Por lo tanto $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n \neq 0$ y de aquí que también $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \neq 0$.

Por la observación anterior podemos entonces definir

$$u_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{y_n}{n\|y_n\|},\ v_n = \frac{-x_n}{\|x_n\|} + \frac{y_n}{n\|y_n\|},\ n \in \mathbb{N}.$$

Claramente $u_n \in X_+,\ n \in \mathbb{N}$, y como $x_n \leq y_n$, entonces

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} \leq \frac{y_n}{\|x_n\|} \leq \frac{y_n}{n\|x_n\|}.$$

Por lo tanto también $v_n \in X_+$.

Ahora

$$\|v_n\| = \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{y_n}{n\|y_n\|} \right\| \geq \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\| - \left\| \frac{y_n}{n\|y_n\|} \right\| = 1 - \frac{1}{n}.$$

También

$$2\|u_n\| = \| - 2u_n\| = \big\|(v_n - u_n) - (u_n + v_n)\big\| \geq \|v_n - u_n\| - \|u_n + v_n\| = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Por lo tanto $\|u_n\| \geq 1 - \dfrac{1}{n}$, y tenemos

$$\frac{2}{n} = \|u_n + v_n\| \geq \gamma \operatorname{máx}\big\{\|u_n\|,\ \|v_n\|\big\} \geq \gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Haciendo n tender a infinito, obtenemos $0 \geq \gamma$, lo cual es una contradicción. Concluimos entonces que X_+ es normal. □

Una pregunta pertinente es si existe alguna relación entre los conceptos de cono normal, regular y fuertemente regular. Resulta que fuertemente regular implica regular y regular a su vez implica normal tal como se establece en el siguiente teorema.

Teorema 2.7. *Sea X_+ un cono en un espacio de Banach X. Si X_+ es completamente regular entonces es regular y si X_+ es regular entonces es normal.*

Demostración:
Supongamos que X_+ no es normal. Entonces existen sucesiones $(x_n),\ (y_n)$ en X tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$0 \leq x_n \leq y_n \ \text{ y } \ \|x_n\| > 2^n \|y_n\|.$$

Sean

$$z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}, \quad v_n = \frac{y_n}{2^n \|y_n\|}.$$

Tenemos que

$$0 \leq z_n \leq \frac{x_n}{2^n \|y_n\|} \leq \frac{y_n}{2^n \|y_n\|} = v_n.$$

Además

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Por lo tanto, existe $v \in X$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v$. Definimos una sucesión (w_n) como

$$w_n = \begin{cases} v_1 + v_2 + \ldots + v_{2m} & si \quad n = 2m,\ m \in \mathbb{N} \\ \\ v_1 + v_2 + \ldots + v_{2m} + z_{2m+1} & si \quad n = 2m+1,\ m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Vemos que

$$w_2 \leq w_3 \leq w_4 \leq \ldots \leq v.$$

Es decir, la sucesión es creciente y acotada superiormente en orden. Además $\|w_n\| \leq 2$, por lo que la sucesión también es acotada. Sin embargo como

$$\|w_{2m+1} - w_{2m}\| = \|z_{2m+1}\| = 1$$

la sucesión no es de Cauchy, y por consiguiente no es convergente. Concluimos entonces X_+ no es regular ni completamente regular.

Resta probar que si X_+ es completamente regular, entonces es regular. Supongamos que X_+ es completamente regular. Por lo que acabamos de probar X_+ es normal. Tomemos una sucesión (x_n) creciente y acotada superiormente en orden por y. Probaremos que (x_n) converge.

Al ser la sucesión creciente y acotada superiormente en orden por y, tenemos que

$$0 \leq y - x_n \leq y - x_1,\ n \in \mathbb{N}.$$

Por la normalidad teneos que

$$\|y - x_n\| \leq N\|y - x_1\|$$

donde N es la constante normal.

Debido a lo anterior

$$\|x_n\| \leq N\|y - x_1\| + \|y\|.$$

Esto nos dice que la sucesión es acotada y al ser X_+ completamente regular, debe ser convergente. □

Los siguientes ejemplos nos muestran que completamente regular es estrictamente más fuerte que regular y este a su vez estrictamente más fuerte que normal.

Ejemplo 2.3. ***(Cono Normal que no es Regular)***
Consideremos $X = C[0,1]$ con la norma uniforme y sea

$$X_+ = \left\{x \in X : x(t) \geq 0,\ t \in [0,1]\right\}.$$

Es fácil ver que X_+ es un cono en X. Como

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x(t) \leq y(t),\ \forall t \in [0,1]$$

vemos que $x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$. Por lo tanto por el teorema 2.6, X_+ es normal. Sin embargo, si consideramos $x_n(t) = 1 - t^n,\ n \in \mathbb{N},\ t \in [0,1]$ tenemos que $x_n(t) \leq x_{n+1}(t),\ \forall n \in \mathbb{N},\ t \in [0,1]$. Por lo tanto $x_n \leq x_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$; es decir, tenemos una sucesión creciente en X. Además, $1 - t^n \leq 1,\ \forall t \in [0,1]$. Es decir $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leq y$, donde $y(t) = 1,\ \forall t \in [0,1]$. Así que (x_n) es una sucesión creciente y acotada superiormente en orden que no converge en X ya que $x_n(t)$ no es uniformemente convergente sobre $[0,1]$.

Ejemplo 2.4. ***(Cono Regular que no es Completamente Regular)***
Consideremos $X = c_0 = \left\{x = (x_n) \subset \mathbb{R} : x_n \to 0\right\}$, con la norma $\|x\| = \sup_n |x_n|$. Sea

$$X_+ = \{x \in c_0 : x_n \geq 0,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Se verifica sin dificultad que X_+ es un cono en X. Probaremos que X_+ es regular.

Consideremos una sucesión $\left(x^{(m)}\right)$ *en* X *creciente y acotada superiormente en orden por* $y \in X$*. Como para* $m \in \mathbb{N}$, $x^{(m)} \in X$ *y* $y \in X$*, tenemos que*

$$x^{(m)} = \left(x_n^{(m)}\right)_{n\in\mathbb{N}},\ y = (y_n)$$

donde $y_n \to 0$ *y para* m *fijo* $x_n^{(m)} \to 0$*. Como* $x^{(m)} \leq x^{(m+1)} \leq y$, $m \in \mathbb{N}$*, entonces*

$$x^{(m+1)} - x^{(m)} \in X_+ \ \text{ y } \ y - x^{(m)} \in X_+,\ m \in \mathbb{N}.$$

De aquí que

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ x_n^{(m)} \leq x_n^{(m+1)} \leq y_n.$$

Para n *fijo la sucesión* $\left(x_n^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ *es creciente y acotada superiormente por* y_n *en* $\mathbb{R}$*. Por lo tanto*

$$\exists\, x_n^* \in \mathbb{R} \ \text{ tal que } \ \lim_{m\to\infty} x_n^{(m)} = x_n^*.$$

Sea $x^* = (x_n^*)$*. Entonces de*

$$x_n^{(1)} \leq x_n^{(m)} \leq x_n^* \leq y_n,\ m, n \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

y del hecho de que

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{(1)} = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

concluimos que $\lim_{n\to\infty} x_n^* = 0$*. Por lo tanto* $x^* \in c_0$*.*

Sea $\epsilon > 0$ *y* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|x_n^{(1)}| < \epsilon, \ \ |y_n| < \epsilon,\ n > n_0 \tag{2.2}$$

Entonces de 2.1 y 2.2 se sigue que

$$-\epsilon < x_n^{(1)} \leq x_n^{(m)} \leq x_n^* \leq y_n < \epsilon,\ n > n_0,\ m \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto

$$|x_n^{(m)}| < \epsilon,\ |x_n^*| < \epsilon,\ n > n_0,\ m \in \mathbb{N} \tag{2.3}$$

Elegimos $m_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|x_n^{(m)} - x_n^*| < \epsilon,\ m > m_0,\ n = 1, 2, \ldots, n_0 \tag{2.4}$$

Entonces de 2.3 y 2.4, tenemos

$$\|x^{(m)} - x_n^*\| = \sup_n |x_n^{(m)} - x_n^*| \leq \sup_{n=1,2,\ldots,n_0} |x_n^{(m)} - x_n^*| + \sup_{n>n_0} |x_n^{(m)}| + \sup_{n>n_0} |x_n^*| \leq 3\epsilon,\ m > m_0.$$

Por lo tanto $x^{(m)} \to x^*$ *y* X_+ *es regular.*

Ahora probaremos que X_+ *no es completamente regular.*

Sea $z^{(m)} = \left(z_n^{(m)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $m \in \mathbb{N}$ *donde*

$$z_n^{(m)} = \begin{cases} 1 & si \quad n \leq m \\ \\ 0 & si \quad n > m \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que $\lim_{n\to\infty} z_n^{(m)} = 0,\ m \in \mathbb{N}$. *Por lo tanto* $z^{(m)} \in c_0,\ m \in \mathbb{N}$.

Notemos que para $m \in \mathbb{N}$

$$\left\|z^{(m)}\right\| = 1 \ \ y \ \ z^1 \leq z^{(2)} \leq \ldots \leq z^{(m)} \leq \ldots$$

Es decir $\left(z^{(m)}\right)$ *es una sucesión en* X *creciente y acotada. Sin embargo, como* $\|z^{(m+1)} - z^{(m)}\| = 1$, *la sucesión* $\left(z^{(m)}\right)$ *no es de Cauchy y por lo tanto no converge en* X. *Concluimos entonces que* X_+ *no es completamente regular.*

Dados los ejemplos anteriores, surge la pregunta: ¿Bajo qué condiciones los conceptos de completamente regular, regular y normal, coinciden? El siguiente teorema, el cual presentamos sin demostración, dan respuesta a dicha cuestión. El lector interesado en la demostración puede consultar [8] de la bibliografía.

Teorema 2.8. *Sea* X_+ *un cono ordenado en un espacio de Banach* X. *Si* X *es débilmente secuencialmente completo, entonces son equivalentes:*

1. X_+ *es normal.*
2. X_+ *es regular.*
3. X_+ *es completamente regular.*

Observación 2.3. *Todo espacio de Banach reflexivo es débilmente secuencialmente completo, así que el teorema previo se cumple también si* X *es reflexivo.*

Capítulo 3

Integración en Espacios de Banach

Si bien parte del objetivo de nuestro trabajo es estudiar teoremas de convergencia monótona para la integral de Henstock-Kurzweil, en el presente capítulo, además de dicha integral, presentamos la integral de MacShane por estar estrechamente relacionada con la integral de Henstock-Kurzweil. Empezaremos definiendo una serie de conceptos que nos permitirán definir dichas integrales, para posteriormente pasar a desarrollar algunas de sus propiedades y criterios que nos garantizan integrabilidad. La teoría de integración de Henstock-Kurzweil la desarrollaremos en espacios de Banach, así que en lo sucesivo X denotará un espacio de Banach, $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_m, b_m] \subseteq \mathbb{R}^m$ un intervalo compacto en $\mathbb{R}^m$, equipado con la medida de Lebesgue μ.

Para el lector interesado en un estudio sistemático de la integral de Henstock-Kurzweil en el caso de funciones real valuadas se recomienda [1], [20], [14] y [7] de la bibliografía. Para un estudio de integración en espacios de Banach puede consultarse [18].

3.1 Sistemas, Particiones y Calibradores

Sea $I \subseteq \mathbb{R}^m$ un intervalo compacto dado.

- Un par (x, J) donde $x \in \mathbb{R}^m$ y J es un intervalo compacto de $\mathbb{R}^m$ es llamado un **intervalo marcado**; a x se le llama la **marca** de J.
- Dos intervalos compactos $J,\ L \subseteq \mathbb{R}^m$ son llamados **no traslapados**, si $\mathrm{int}J \cap \mathrm{int}L = \emptyset$.
- Una colección finita $\{(x_i, I_i) : i = 1, 2 \ldots p\}$ de intervalos marcados, no traslapados a pares, es llamada un **M-Sistema** en I, si $I_i \subseteq I$, para $i = 1, 2, \ldots, p$.
- Un M-Sistema en I, $\{(x_i, I_i) : i = 1, \ldots, p\}$ para el cual $x_i \in I_i,\ i = 1, \ldots, p$ es llamado un **K-Sistema** en I.

- Un M-Sistema en I, $\{(x_i, I_i) : i = 1, \ldots, p\}$ es llamado una **M-Partición** del intervalo I si $I = \bigcup_{i=1}^{p} I_i$.
- Un K-Sistema en I, $\{(x_i, I_i) : i = 1, \ldots, p\}$ es llamado una **K-Partición** del intervalo I si $I = \bigcup_{i=1}^{p} I_i$.
- Un **calibrador** sobre I es cualquier función positiva definida en I, $\delta : I \longrightarrow (0, +\infty)$.
- Dado un calibrador δ sobre I, un intervalo marcado (x, J) se dice que es **δ-Fino** si $J \subseteq B(x, \delta(x))$.
- Los M-Sistemas, K-Sistemas o M-Particiones, K-Particiones son llamados δ-finos si todos los intervalos marcados (x_i, I_i), $i = 1, \ldots, p$ son δ-finos respecto al calibrador δ.

Como notación, si $P = \{(x_i, I_i) : i = 1, \ldots, p\}$ es una M-Partición o K-Partición de I y $f : I \longrightarrow X$ es una función dada, denotaremos por $S(f, P)$ a la siguiente suma:

$$S(f, I) = \sum_{i=1}^{p} f(x_i)\mu(I_i).$$

Nuestro primer resultado de este capítulo fue descubierto por el matemático P. Cousin y publicado en 1895 en *Acta Matematica* [5]. Su utilidad para nosotros radica en que prueba que la integral de Henstock-Kurzweil está bien definida.

Lema 3.1. *Dado un calibrador $\delta : I \longrightarrow (0, +\infty)$, existe una K-Partición δ-fina de I.*

Demostración.
Consideraremos $\mathbb{R}^m$ con la norma del máximo $||| \cdot |||$, (recordar que en $\mathbb{R}^m$ todas las normas son equivalentes) donde

$$||| \, x \, ||| = \max\{| \, x_i \, | : i = 1, \ldots, p\}, \ x = (x_1, \ldots, x_m)$$

Procederemos por contradicción suponiendo que $I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_m, b_m]$ no tiene una K-Partición δ-fina. Para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$, dividimos $[a_k, b_k]$ en $[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}]$ y $[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k]$, de tal modo que I es una unión de 2^m intervalos no traslapados a pares en $\mathbb{R}^m$. Como I no tiene una K-Partición δ-fina, entonces, alguno de los 2^m intervalos mencionados antes, no tiene una K-Partición δ-fina; llamemos a dicho subintervalo I_1. Procediendo del mismo modo, obtenemos una sucesión $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ de subintervalos de I tal que las siguientes condiciones se cumplen para todo $n \in \mathbb{N}$:

(i) $I_{n+1} \subset I_n$;

(ii) I_n no tiene una K-Partición δ-fina;

(iii) $\max\{|||\ t-s\ |||: t,s \in I_n\} = \frac{1}{2^n} \ |||\ b-a\ |||,\ \ a=(a_1,\ldots,a_m),\ b=(b_1,\ldots,b_m)$.

Por (i) y (iii) se sigue que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{t_0\}$. Como $\delta(t_0) > 0$, podemos elegir $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} \ |||\ b-a\ ||| < \delta(t_0)$, pero entonces, al tener $t_0 \in I_N$, se sigue que $I_N \subset B(t_0, \delta(t_0))$ y de aquí tenemos que $\{(t_0, I_N)\}$ es una K-Partición δ-fina de I_N, lo cual contradice (ii). Concluimos por lo tanto que existe una K-Partición δ-fina de I. □

Con este resultado y los conceptos introducidos previamente, estamos listos para definir las integrales de McShane y Henstock-Kurzweil.

3.2 Definición de las Integrales de McShane y Henstock-Kurzweil

La integral de Henstock-Kurzweil es también conocida como la Integral Generalizada de Riemann o la Integral Completa de Riemann. Para entrar en contexto, en primer lugar presentaremos una de las formas equivalentes de definir la integral de Riemann y para tal fin recordemos en primera instancia que si $J = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_m, b_m]$ es un intervalo compacto de $\mathbb{R}^m$ llamamos anchura de J al número $\Delta(J) = \max\{b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_m - a_m\}$, y que si $P = \{(x_i, I_i) : i = 1, \ldots, p\}$ es una K-Partición del intervalo compacto $I \subseteq \mathbb{R}^m$, llamamos norma de P al número $\| P \| = \max\{\Delta(I_i) : i = 1, \ldots, p\}$.

Definición 3.1. *Una función acotada $f : I \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice **Riemann Integrable** sobre el intervalo compacto I, si existe un número $L \in \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad:*

Para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $P = \{(x_i, I_i) : i = 1, \ldots, p\}$ es una K-Partición del intervalo I con $\| P \| < \delta$ entonces

$$\left| S(f,P) - L \right| < \epsilon.$$

Si tal número L existe, decimos que es la Integral de Riemann de la función f sobre el intervalo I y se denota como

$$L = (R) \int_I f.$$

La integral de Henstock-Kurzweil consiste en un refinamiento de la integral de Riemann. Se trata de hacer que δ deje de ser una constante y pase a ser una variable (un calibrador). Este pequeño cambio en apariencia insignificante, hace que la condición de integrabilidad sea mucho más laxa, lo que permite ampliar la clase de funciones que son integrables y da lugar a una teoría de integración mucho más poderosa.

Sin más preambulo, pasemos a definir en primer lugar la integral de MacShane y enseguida la integral de Henstock-Kurzweil.

Definición 3.2. *Sea I un intervalo compacto en $\mathbb{R}^m$, X un espacio de Banach y $f : I \longrightarrow X$ una función dada. Decimos que f es **McShane Integrable** sobre el intervalo I si existe un vector x en el espacio de Banach X con la siguiente propiedad:*

Para cada $\epsilon > 0$, existe un calibrador $\delta : I \longrightarrow (0, \infty)$ en I tal que si $\{(t_i, I_i) : i = 1, 2 \ldots, p\}$ es una M-Partición δ-Fina de I, entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(I_i) - x \right\| < \epsilon.$$

El vector x se representa por $(M) \int_I f$ y se le llama la Integral de McShane de f sobre I. El conjunto de todas las funciones McShane integrables sobre I se denota por $M(I)$.

Definición 3.3. *Sea I un intervalo compacto en $\mathbb{R}^m$, X un espacio de Banach y $f : I \longrightarrow X$ una función dada. Decimos que f es **Henstock-Kurzweil Integrable** sobre el intervalo I (por brevedad, HK-Integrable sobre I) si existe un vector x en el espacio de Banach X con la siguiente propiedad:*

Para cada $\epsilon > 0$, existe un calibrador $\delta : I \longrightarrow (0, +\infty)$, tal que si $\{(t_i, I_i) : i = 1, 2 \ldots, p\}$ es una K-Partición δ-Fina de I entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(I_i) - x \right\| < \epsilon.$$

El vector x se representa por $(HK) \int_I f$ y se le llama la Integral de Henstock-Kurzweil de f sobre I. El conjunto de todas las funciones HK-Integrables sobre I se denotará por $HK(I)$.

Observación 3.1. *Inicialmente J. Kurzweil definió su integral para funciones con valores reales (véase [13]); posteriormente Cao [3] extiende la definición de esta integral para el caso de funciones que toman valores en un espacio de Banach. Se le llama integral de Henstock-Kurzweil debido a que R. Henstock realizó aportaciones importantes a esta integral. Otros nombres que usualmente se usan son "Integral en el sentido de Kurzweil", o "K-Integral".*

Si $E \subseteq I$, la unción $f : I \longrightarrow X$ se dice **Integrable sobre el conjunto** E, si la función $f\chi_E : I \longrightarrow X$ es integrable sobre I y se define $\int_E f = \int_I f\chi_E$. Este concepto se aplica a ambas integrales.

Nótese que al ser toda K-Partición una M-Partición, tenemos que toda función McShane integrable es HK-Integrable y $(M)\int_I f = (HK)\int_I f$.

3.3 Propiedades de la Integral de Henstock-Kurzweil

Nuestro primer resultado nos dice que la Integral de Henstock-Kurzweil de una función es única.

Teorema 3.1. *Sea $f : I \longrightarrow X$ una función dada. Si $f \in HK(I)$ entonces $(HK)\int_I f$ es única.*

Demostración.
Supongamos que x_0, $x_1 \in X$ son integrales de Henstock-Kurzweil de f sobre el intervalo I y sea $\epsilon > 0$. Por definición existen calibradores δ_0, δ_1 en I tales que si P y Q son K-Particiones de I, δ_0-Fina y δ_1-Fina respectivamente, entonces

$$\left\|S(f, P) - x_0\right\| < \frac{\epsilon}{2} \text{ y } \left\|S(f, Q) - x_1\right\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea $\delta : I \longrightarrow (0, +\infty)$ dada por $\delta(x) = \text{mín}\{\delta_0(x), \delta_1(x)\}$ y L una K-Partición de I, δ-Fina. Entonces L es δ_0-Fina y δ_1-Fina y tenemos

$$0 \leq \|x_0 - x_1\| \leq \left\|x_0 - S(f, L)\right\| + \left\|S(f, L) - x_1\right\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario, concluimos que $\|x_0 - x_1\| = 0$ y de aquí que $x_0 = x_1$. $\square$

Como cabría esperar, toda función Riemann Integrable será Henstock-Kurzweil Integrable y sus integrales coinciden, tal como establece el siguiente teorema. Dicho resultado no debe de sorprender en lo más mínimo, ya que la integral de Riemann es un caso particular de la integral de Henstock-Kurzweil al considerar un calibrador constante.

Teorema 3.2. *Sea I un intervalo compacto en $\mathbb{R}^m$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dada. Si $f \in R(I)$ entonces $f \in HK(I)$. Además*

$$(R)\int_I f = (HK)\int_I f.$$

Demostración.
Sea $\epsilon > 0$. Por hipótesis, existe $\delta_0 > 0$ tal que si P es K-Partición de I con $\|P\| < \delta_0$, entonces

$$\left\| S(f,P) - (R)\int_I f \right\| < \epsilon.$$

Definimos un calibrador δ sobre I como $\delta(x) = \frac{\delta_0}{2}$ para cada $x \in I$. Sea $Q = \{(t_i, I_i) : i = 1, \ldots, p\}$ una K-Partición δ-Fina de I. Recordemos que lo anterior significa que para $i = 1, \ldots, p,\ I_i \subseteq B(t_i, \delta(t_i))$. Tomemos ahora un subintervalo cualquiera I_k de la partición y $x,\ y \in I_k$. Tenemos que

$$\|x - y\| \leq \|x - t_k\| + \|t_k - y\| < \frac{\delta_0}{2} + \frac{\delta_0}{2} = \delta_0.$$

Lo anterior nos muestra que $\|Q\| < \delta_0$, de donde se sigue entonces que $\big\| S(f,Q) - (R)\int_I f \| < \epsilon$. Por lo tanto $f \in HK(I)$ y $(HK)\int_I f = (R)\int_I f$. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que la inclusión $R(I) \subseteq HK(I)$ es propia.

Ejemplo 3.1. *Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales y definamos una función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ como*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ \\ 0 & si \quad x \notin [0,1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Afirmamos que $f \in HK([0,1]) \backslash R([0,1])$. Para verlo, sea $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ una enumeración de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ y $\epsilon > 0$. Definimos un calibrador δ sobre $[0,1]$ como

$$\delta(x) = \begin{cases} \dfrac{\epsilon}{2^{n+1}} & si \quad x = r_n \;\; para\ algún \;\; n \in \mathbb{N} \\ \\ 1 & si \qquad\qquad x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Si P es una K-Partición δ-Fina de $[0,1]$, entonces

$$\begin{aligned} \left| S(f,P) - 0 \right| &= \left| \sum_{\substack{(t,[u,v]) \in P \\ t \in \mathbb{Q} \cap [0,1]}} f(t)(v-u) + \sum_{\substack{(t,[u,v]) \in P \\ t \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}}} f(t)(v-u) \right| \\ &= \sum_{\substack{(t,[u,v]) \in P \\ t \in \mathbb{Q} \cap [0,1]}} f(t)(v-u) \\ &< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $f \in HK([0,1])$ y $(HK) \int_{[0,1]} f = 0$

Para ver que $f \notin R([0,1])$ procedemos por contradicción suponiendo que $f \in R([0,1])$. Como $f \in R([0,1]) \subseteq HK([0,1])$ y $(HK) \int_{[0,1]} f = 0$,tenemos que $(R) \int_I f = 0$. Luego, para $\epsilon = 1$ existe un calibrador constante δ_1 sobre $[0,1]$ tal que

$$\left| S(f, P_1) \right| < 1$$

para cada K-Partición P_1 de $[0,1]$ que sea δ_1-Fina. Si q es un entero positivo tal que $q^{-1} < \delta_1$, entonces

$$P_2 = \left\{ \left((k_1 - 1) q^{-1}, [(k_1 - 1) q^{-1}, k_1 q^{-1}] \right) : k_1 = 1, \ldots, q \right\}$$

es una K-Partición δ_1-Fina de $[0,1]$. Se tiene la contradicción:

$$1 > S(f, P_2) = \sum_{k=1}^{q} \left(k q^{-1} - (k-1) q^{-1} \right) = 1.$$

Un resultado elemental de la teoría de integración de Lebesgue establece que si una función de valores reales es cero casi en todas partes en un subconjunto medible de los reales, entonces dicha función es Lebesgue integrable sobre el conjunto y su integral vale cero. Lo anterior sigue siendo válido para la integral de McShane de una función que toma valores en un espacio de Banach. Como toda función McShane integrable es Henstock-Kurzweil integrable y el valor de las integrales coincide, lo mismo se cumple para la integral de Henstock-Kurzweil.

Teorema 3.3. *Sea $f : I \longrightarrow X$ una función dada. Si $f = 0$ casi en todas partes en I, entonces f es McShane integrable sobre I y $(M) \int_I f = 0$.*

Demostración.
Sea $\epsilon > 0$ y $E = \{x \in I : f(x) \neq 0\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$E_n = \{x \in E : n - 1 \leq \|f(x)\| < n\}.$$

Nótese que si $n \neq m$, $E_n \cap E_m = \emptyset$ y que $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = E$.

Por hipótesis tenemos que $\mu(E) = 0$ y como $E_n \subseteq E$, entonces también $\mu(E_n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De lo anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe G_n abierto tal que

$$E_n \subseteq G_n \text{ y } \mu(G_n) < \frac{\varepsilon}{n2^n}.$$

Si $t \in E$, entonces $t \in E_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y como $E_n \subseteq G_n$, existe una bola con centro en t contenida en G_n. Podemos entonces definir un calibrador δ en I como:

$$\delta(t) = 1 \text{ si } t \in I - E \quad \text{y si } t \in E_n \text{ definimos } \delta(t) \text{ tal que } B(t, \delta(t)) \subseteq G_n.$$

Sea ahora $P = \{(t_i, I_i) : i = i, \ldots, r\}$ una M-Partición δ-Fina de I. Queremos probar que $\| \sum_{i=1}^{r} f(t_i)\mu(I_i)\| < \epsilon$.

En la suma anterior, solo nos interesan los t_i tales que $t_i \in E$, pues si $t_i \notin E$ entonces $f(t_i) = 0$. Definimos entonces para $n \in \mathbb{N}$

$$P_n = \{(t_i, I_i) \in P : t_i \in E_n\}.$$

Nótese que $P_n \cap P_m = \emptyset$, si $n \neq m$, y que $\cup_{n=1}^{\infty} P_n \subseteq P$. Tenemos entonces que

$$\sum_{i=1}^{r} f(t_i)\mu(I_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(t_i, I_i) \in P_n} f(t_i)\mu(I_i)$$

por lo que

$$\left\|\sum_{i=1}^{r} f(t_i)\mu(I_i)\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(t_i,I_i)\in P_n} f(t_i)\mu(I_I)\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \| \sum_{(t_i,I_I)\in P_n} f(t_i)\mu(I_i)\| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(t_i,I_i)\in P_n} \|f(t_i)\|\mu(I_i).$$

Ahora, si $(t_i, I_i) \in P_n$ entonces $t_i \in E_n$ y entonces $\|f(t_i)\| < n$. Además $I_i \subseteq B(t_i, \delta(t_i)) \subseteq G_n$, por lo que $\mu(I_i) \leq \mu(G_n) < \frac{\varepsilon}{n2^n}$. De lo anterior tenemos que

$$\left\|\sum_{i=1}^{r} f(t_i)\mu(I_I)\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(t_i,I_i)\in P_n} \|f(t_i)\|\mu(I_i) <$$

$$< \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{(t_i,I_i)\in P_n} \mu(I_i) < \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{\varepsilon}{n2^n} = \epsilon$$

que es lo que se quería demostrar. □

Corolario 3.1. *Si $f : I \longrightarrow X$ es cero casi en todas partes en I, entonces f es Henstock-Kurzweil integrable sobre I y $(HK)\int_I f = 0$*

El siguiente resultado nos dice que el conjunto de las funciones Henstock-Kurzweil integrables tiene estructura de espacio vectorial.

Teorema 3.4. *Sean $f, g : I \longrightarrow X$ Henstock-Kurzweil integrables sobre I y $c \in \mathbb{R}$. Entonces:*

1. *cf es Henstock-Kurzweil integrable sobre I y $(HK)\int_I cf = c(HK)\int_I f$*
2. *$f + g$ es Henstock-Kurzweil integrable sobre I y $(HK)\int_I (f + g) = (HK)\int_I f + (HK)\int_I g$*

Demostración.

1. Si $c = 0$ el resultado es claro. Supongamos entonces que $c \neq 0$ y sea $\epsilon > 0$. Por hipótesis existe un calibrador δ sobre I tal que si $\{(t_i, I_i) : i = 1, 2, \ldots,\}$ es K-

Partición δ-Fina de I entonces

$$\left\|\sum_{i=1}^{r} f(t_i)\mu(I_i) - (\mathrm{HK})\int_I f\right\| < \frac{\epsilon}{|c|}.$$

Como $\sum_{i=1}^{r} cf(t_i)\mu(I_i) = c\sum_{i=1}^{r} f(t_i)\mu(I_i)$ tenemos que

$$\left\|\sum_{i=1}^{r}(cf)(t_i)\mu(I_i) - c(\mathrm{HK})\int_I f\right\| = |c|\left\|\sum_{i=1}^{r} f(t_i)\mu(I_i) - (\mathrm{HK})\int_I f\right\| < \epsilon.$$

2. Sea $\epsilon > 0$. Por hipótesis existen calibradores δ_1 y δ_2 sobre I, tales que si P es K-Partición δ_1-Fina de I y Q es K-Partición δ_2-Fina de I entonces:

$$\left\|S(f,P) - (\mathrm{HK})\int_I f\right\| < \frac{\epsilon}{2} \text{ y } \left\|S(g,Q) - (\mathrm{HK})\int_I g\right\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea ahora $\delta : I \longrightarrow (0, +\infty)$ un calibrador sobre I definido por $\delta(t) = \min\{\delta_1(t),\, \delta_2(t)\}$. Vemos entonces que si R es K-Partición de I que es δ-Fina, entonces R es δ_1-Fina y δ_2-Fina, por lo que tenemos:

$$\left\|\sum_{(t_i,I_i)\in R}\big[f(t_i) + g(t_i)\big]\mu(I_i) - (\mathrm{HK})\int_I f - (\mathrm{HK})\int_I g\right\| =$$

$$= \left\|\left(\sum_{(t_i,I_i)\in R} f(t_i)\mu(I_i) - (\mathrm{HK})\int_I f\right) + \left(\sum_{(t_i,I_i)\in R} g(t_i)\mu(I_i) - (\mathrm{HK})\int_I g\right)\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\sum_{(t_i,I_i)\in R} f(t_i)\mu(I_i) - (\mathrm{HK})\int_I f\right\| + \left\|\sum_{(t_i,I_i)\in R} g(t_i)\mu(I_i) - (\mathrm{HK})\int_I g\right\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Corolario 3.2. *Sean f, $g : I \longrightarrow X$ con f Henstock-Kurzweil integrable sobre I. Si $f = g$ casi en todas partes en I entonces g es Henstock-Kurzweil integrable sobre I y*

$$(HK)\int_I g = (HK)\int_I f.$$

Demostración.

Sea $h = g - f$. Entonces $h = 0$ casi en todas partes en I y por el Teorema 3.3, h es

Henstock-Kurzweil integrable sobre I con $(HK)\int_I h = 0$. Ahora, aplicando el resultado previo tenemos que $g = h + f$ es Henstock-Kurzweil integrable sobre I y además:

$$\int_I g = \int_I (h+f) = \int_I h + \int_I f = \int_I f.$$

$\square$

El siguiente resultado nos da un criterio de integrabilidad para la integral de Henstock-Kurzweil que es el ánalogo al criterio de integrabilidad de Cauchy para la integral de Riemann. Este resultado támbien es conocido como el **criterio de Cauchy** en el presente contexto y es particularmente útil en los casos en que el valor de la integral es desconocido.

Teorema 3.5. *Una función $f : I \longrightarrow X$ es Henstock-Kurzweil integrable sobre I si y solo si para todo $\epsilon > 0$, existe un calibrador $\delta : I \longrightarrow (0, +\infty)$ tal que para todas las K-Particiones δ-Finas de I, $\{(t_i, I_i) : i = 1, \ldots, p\}$ y $\{(s_j, J_j) : j = 1, \ldots, r\}$ se cumple:*

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(I_i) - \sum_{j=1}^{r} f(s_j)\mu(J_j) \right\| < \epsilon.$$

Demostración.
$(\Longrightarrow)$ Supongamos que f es Henstock-Kurzweil integrable sobre I y sea $\epsilon > 0$. Por definición existe $\delta : I \longrightarrow (0, +\infty)$, tal que si $\{(t_i, I_i) : i = 1, \ldots, p\}$ es una K-Partición δ-Fina de I, entonces tenemos:

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(I_i) - (\mathrm{HK}) \int_I f \right\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por lo tanto, si $\{(t_i, I_i) : i = 1, \ldots, p\}$ y $\{(s_j, J_j) : j = 1, \ldots, r\}$ son K-Particiones δ-Finas de I, entonces:

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(I_i) - \sum_{j=1}^{r} f(s_j)\mu(J_j) \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(I_i) - (HK) \int_I f \right\| + \left\| ((HK) \int_I f - \sum_{j=1}^{r} f(s_j)\mu(J_j) \right\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

$(\Longleftarrow)$ Por Hipótesis, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe un calibrador $\delta_k : I \longrightarrow (0, +\infty)$ tal que para todo par de K-Particiones δ_k-Finas de I, $\{(t_i, I_i) : i = 1, \ldots, p\}$ y $\{(s_j, J_j) : j =$

$1, \ldots, r\}$ se cumple:

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(I_i) - \sum_{j=1}^{r} f(s_j)\mu(J_j)\right\| < \frac{1}{k}.$$

Podemos asumir que $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \ldots \geq \delta_k \geq \ldots$ ya que de no ser así podemos reemplazarlas por $\min\{\delta_1\}$, $\min\{\delta_1, \delta_2\}$, $\min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \ldots$ respectivamente. Para todo $k \in \mathbb{N}$ tomamos una K-Partición P_k, δ_k-Fina de I. Notemos que si $j > k$ entonces $\delta_j \leq \delta_k$ y entonces P_j es δ_k-Fina. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k_0} < \epsilon$. Si $i, j > k_0$ entonces $\delta_i \leq \delta_{k_0}$ y $\delta_j \leq \delta_{k_0}$ y entonces P_i y P_j son δ_{k_0}-Finas y de aquí que:

$$\left\|S(f, P_i) - S(f, P_j)\right\| < \frac{1}{k_0} < \epsilon.$$

De lo anterior concluimos que $\big(S(f, P_k)\big)_{k=1}^{\infty}$ es sucesión de Cauchy en X. Siendo X espacio de Banach, existe $x_0 \in X$ tal que:

$$\lim_{k \to \infty} S(f, P_k) = x_0.$$

Tenemos que para k fijo y $j > k$:

$$\left\|x_0 - S(f, P_k)\right\| = \lim_{j \to \infty} \left\|S(f, P_j) - S(f, P_k)\right\| \leq \frac{1}{k}$$

Probaremos que la integral de Henstock-Kurzweil de f sobre I es x_0. Sea $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{n} < \epsilon$. Tomamos el calibrador δ_n sobre I y vemos que si P es K-Partición δ_n-Fina, entonces :

$$\left\|S(f, P) - x_0\right\| \leq \left\|S(f, P) - S(f, P_n)\right\| + \left\|S(f, P_n) - x_0\right\| <$$

$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < \epsilon.$$

□

Cerramos esta sección con dos propiedades más de la integral de Henstock-Kurzweil. La primer propiedad nos dice que si f es Henstock-Kurzweil integrable sobre un intervalo compacto, entonces lo será sobre cualquier subintervalo compacto, mientras que la segunda establece que si $I = J \cup K$ es un intervalo compacto, donde J y K son intervalos tales que $f \in HK(J) \cap HK(K)$ entonces $f \in HK(I)$.

Teorema 3.6. *Si $f : I \longrightarrow X$ es Henstock-Kurzweil integrable sobre I y $J \subseteq I$ es un intervalo compacto, entonces f es Henstock-Kurzweil integrable sobre J.*

Demostración.
Sea $\epsilon > 0$. Como f es Henstock-Kurzweil integrable sobre I, entonces por el criterio de Cauchy, existe un calibrador $\delta : I \longrightarrow (0, +\infty)$ tal que si $\{(t_i, I_i) : i = 1, \ldots, p\}$ y $\{(s_j, J_j) : j = 1, \ldots r\}$ son dos K-Particiones δ-Finas de I, entonces :

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(I_i) - \sum_{j=1}^{r} f(s_j)\mu(J_j) \right\| < \epsilon.$$

Sean ahora $\{(\tau_i, K_i) : i = 1, \ldots, q\}$ y $\{(\sigma_j, L_j) : j = 1, \ldots, s\}$ dos K-Particiones δ-Finas de J. Notemos que $I \setminus J$ puede ser expresado como una unión finita de intervalos contenidos en I, digamos que :

$$I \setminus J = N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_k.$$

De cada uno de los intervalos $N_1, N_2, \ldots, N_k$ tomamos una K-Partición δ-Fina $M_i = \{(\rho_l^{(i)}, M_l^{(i)}) : l = 1, \ldots, t_i\}$ para $i = 1, \ldots, k$. Vemos entonces que :

$$\{(\tau_i, K_i) : i = 1, \ldots, q\} \cup (\cup_{i=1}^{k} M_i) \ \ y \ \ \{(\sigma_j, L_j) : j = 1, \ldots, s\} \cup (\cup_{i=1}^{k} M_i)$$

son K-Particiones δ-Finas de I. Luego, tenemos :

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{q} f(\tau_i)\mu(K_i) + \sum_{i,l} f(\rho_l^{(i)})\mu(M_l^{(i)}) \right) - \left(\sum_{j=1}^{s} f(\sigma_j)\mu(L_j) + \sum_{i.l} f(\rho_l^{(i)})\mu(M_l^{(i)}) \right) \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{q} f(\tau_i)\mu(K_i) - \sum_{j=1}^{s} f(\sigma_j)\mu(L_j) \right\| < \epsilon.$$

Concluimos por el criterio de Cauchy que f es Henstock-Kurzweil integrable sobre J. □

Si consideramos una fucncion $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to X$ que es HK-integrable sobre $[a, b]$, entonces el teorema previo nos dice que para cada $t \in [a, b]$ la integral $(HK) \int_a^t f$ existe, lo cual nos permite definir una función $F : [a, b] \subset \mathbb{R} \to X$ como $F(t) = (HK) \int_a^t f$. Esta función es conocida como la HK-integral indefinida de f.

Teorema 3.7. *Sean J, K intervalos compactos en $\mathbb{R}^m$ tales que $J \cup K$ es un intervalo en $\mathbb{R}^m$. Si $f : J \cup K \longrightarrow X$ es tal que f es Henstock-Kurzweil integrable sobre J y K, entonces f es Henstock-Kurzweil integrable sobre $J \cup K$. Además, si los intervalos J y K son no traslapados, se tiene :*

$$(HK)\int_{J\cup K} f = (HK)\int_J f + (HK)\int_K f.$$

Demostración.
Solo probaremos el caso en que J y K son no traslapados. Sean entonces J y K intervalos compactos no traslapados. Entonces $F = J \cap K$ es la cara común de ambos intervalos en $\mathbb{R}^m$. Sea $\epsilon > 0$. Como f es Henstock-Kurzweil integrable sobre J y K, existen calibradores δ_1 y δ_2 sobre J y K respectivamente, tales que para toda K-Partición δ_1-Fina de J, $P = \{(t_i, J_i) : j = 1, \ldots, p\}$, tenemos:

$$\left\| S(f,P) - (\mathrm{HK})\int_J f \right\| < \frac{\epsilon}{2}$$

y para toda K-Partición δ_2-Fina de K, $Q = \{(s_j, K_J) : j = 1, \ldots, q\}$,tenemos:

$$\left\| S(f,Q) - (\mathrm{HK})\int_K f \right\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Nótese que si $t \in (J \setminus F) \cup (K \setminus F)$, entonces $t \notin F$, y como F es cerrado entonces $dist(t, F) > 0$. Para tales t tomamos $\delta_*(t)$ tal que $0 < \delta_*(t) < dist(t, F)$. Podemos entonces definir un calibrador δ sobre $J \cup K$ como:

$$\delta(t) = \begin{cases} \min\{\delta_1(t), \delta_*(t)\} & si \quad t \in J \setminus F \\ \\ \min\{\delta_1(t), \delta_2(t)\} & si \quad t \in F \\ \\ \min\{\delta_2(t), \delta_*(t)\} & si \quad t \in K \setminus F. \end{cases}$$

Sea $R = \{(t_i, I_i) : i = 1, \ldots, r\}$ una K-Partición δ-Fina de $J \cup K$. Notemos que si $I_i \cap F \neq \emptyset$ y $t_i \notin F$ entonces, para $c \in I_i \cap F$ tenemos que $t_i \neq c$ y entonces como $c \in I_i \subseteq B(t_i, \delta(t_i))$ tenemos:

$$0 < d(c, t_i) < \delta(t_i) \leq \delta_*(t_i) < dist(t_i, F),$$

lo cual es una contradicción, pues recordemos que $dist(t_i, F) = \text{ínf}\{d(t_i, x) : x \in F\}$. Concluimos entonces que si $I_i \cap F \neq \emptyset$, entonces $t_i \in F$.

Consideremos ahora los intervalos marcados $(t_i, I_i) \in R$ tales que $I_i \cap F \neq \emptyset$. Entonces, $(t_i, I_i \cap J)$ es δ_1-Fino y $(t_i, I_i \cap K)$ es δ_2-Fino. Además, para tales (t_i, I_i), tenemos:

$$\begin{aligned} f(t_i)\mu(I_i) &= f(t_i)\mu(\ (I_i \cap J) \cup (I_i \cap K)\ ) \\ &= f(t_i)\big[\mu(I_i \cap J) + \mu(I_i \cap K) - \mu(I_i \cap F)\big] \\ &= f(t_i)\mu(I_i \cap J) + f(t_i)\mu(I_i \cap K) \end{aligned} \tag{3.1}$$

El sistema de intervalos marcados $\{(t_i, I_i) \in R : t_i \in J \setminus F\} \cup \{(t_i, I_i \cap J) : I_i \cap F \neq \emptyset\}$ es K-Partición δ_1-Fina de J, mientras que el sistema de intervalos marcados $\{(t_i, I_i) \in R : t_i \in K \setminus F\} \cup \{(t_i, I_i \cap K) : I_i \cap F \neq \emptyset\}$ es K-Partición δ_2-Fina de K y tenemos entonces que:

$$\left\| \sum_{i=1}^{r} f(t_i)\mu(I_i) - (\text{HK}) \int_J f - (\text{HK}) \int_K f \right\| =$$

$$\left\| \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in J \setminus F}}^{r} f(t_i)\mu(I_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in F}}^{r} f(t_i)\mu(I_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in K \setminus F}}^{r} f(t_i)\mu(I_i) - (\text{HK}) \int_J f - (\text{HK}) \int_K f \right\| =$$

$$\left\| \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in J \setminus F}}^{r} f(t_i)\mu(I_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in F}}^{r} f(t_i)\big[\mu(I_i \cap J) + \mu(I_i \cap K)\big] + \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in K \setminus F}}^{r} f(t_i)\mu(I_i) - (\text{HK}) \int_J f - (\text{HK}) \int_K f \right\|$$

$$\leq \left\| \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in J \setminus F}}^{r} f(t_i)\mu(I_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in F}}^{r} f(t_i)\mu(I_i \cap J) - (\text{HK}) \int_J f \right\|$$

$$+ \left\| \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in F}}^{r} f(t_i)\mu(I_i \cap K) + \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \in K \setminus F}}^{r} f(t_i)\mu(I_i) - (\text{HK}) \int_K f \right\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

lo que muestra que $(\text{HK}) \int_{J \cup K} f = (\text{HK}) \int_J f + (\text{HK}) \int_K f$. $\square$

3.4 El Lema de Saks-Henstock

En la presente sección demostraremos el Lema de Saks-Henstock y resultados relacionados que consisten en otras formas de presentar dicho lema. Aunque en primera instancia el lema no parece decir nada relevante, es sin duda uno de los resultados más importantes de la teoría de integración Henstock-Kurzweil. Nosotros lo utilizaremos en el siguiente capitulo para demostrar teoremas de convergencia monótona.

La integrabilidad de Henstock-Kurzweil de una función f sobre el intervalo I requiere que dado $\epsilon > 0$ exista un calibrador δ sobre I tal que si $\{(t_i, I_i) : i = 1 \ldots, p\}$ es una K-Partición δ-Fina de I entonces el valor de la integral se encuentra a una distancia de la suma de Riemann menor que ϵ. El lema de Saks-Henstock esencialmente afirma que el mismo grado de aproximación es válido para la diferencia entre cualquier subconjunto de términos de esta suma de Riemann y la suma de integrales de f sobre los correspondientes subintervalos.

Observación 3.2. *Aunque Henstock en [12] atribuye este resultado a S. Saks, su uso en la integración es mérito de él.*

Lema 3.2. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow X$ Henstock-Kurzweil integrable sobre I. Para cada $\epsilon > 0$, existe un calibrador δ sobre I tal que si $M = \{(t_i, M_i) : i = 1, \ldots, q\}$ es K-Sistema δ-Fino de I, entonces*

$$\left\| \sum_{i=1}^{q} \left\{ f(t_i)\mu(M_i) - (\mathrm{HK}) \int_{M_i} f \right\} \right\| \leq \epsilon.$$

Demostración.
Sea $\epsilon > 0$. Como f es Henstock-Kurzweil integrable sobre I, existe un calibrador δ sobre I tal que si Q es K-Partición δ-Fina de I, entonces

$$\left\| \sum_{(x,J)\in Q} f(x)\mu(J) - (\mathrm{HK}) \int_I f \right\| < \epsilon.$$

Sea $M = \Big\{(t_i, M_i) \, : \, i = 1, \ldots, q\Big\}$ un K-Sistema δ-Fino de I. Elegimos intervalos no traslapados $J_1, \ldots, J_k$ tales que $\bigcup_{i=1}^{k} J_i = I \setminus \bigcup_{i=1}^{q} intM_i$.

Sea $\eta > 0$. Como $f \in HK(I)$ y J_i es un subintervalo de I, $i = 1, \ldots, k$, entonces $f \in HK(J_i)$, $i = 1, \ldots, k$ y existen, para $i = 1, \ldots, k$, calibradores δ_i sobre J_i, tales que si K_i es K-Partición δ_i-Fina de J_i, entonces

$$\left\| \sum_{(x,L)\in K_i} f(x)\mu(L) - (\mathrm{HK}) \int_{J_i} f \right\| < \frac{\eta}{k}.$$

Como δ_i, $i = 1, \ldots, k$ y δ son calibradores sobre J_i, por el Lema de Cousin, podemos tomar una K-Partición de J_i que sea mín$\{\delta, \delta_i\}$-Fina. Denotemos dicha partición por $Q_i = \left\{(t_j^{(i)}, Q_j^{(i)}) : j = 1, \ldots, r_i\right\}$, $i = 1, \ldots, k$. Entonces $Q = M \cup \left[\bigcup_{i=1}^k Q_i\right]$ es K-Partición δ-Fina de I. Nótese que

$$S(f, Q) = S(f, M) + \sum_{i=1}^{k} S(f, Q_i)$$

y que

$$(\mathrm{HK}) \int_I f = \sum_{i=1}^{q} (\mathrm{HK}) \int_{M_i} f + \sum_{i=1}^{k} (\mathrm{HK}) \int_{J_i} f.$$

Por lo tanto, tenemos

$$\sum_{i=1}^{q} f(t_i)\mu(M_i) = S(f, M) = S(f, Q) - \sum_{i=1}^{k} S(f, Q_i)$$

y

$$\sum_{i=1}^{q} (\mathrm{HK}) \int_{M_i} f = (\mathrm{HK}) \int_I f - \sum_{i=1}^{k} (\mathrm{HK}) \int_{J_i} f.$$

De lo anterior, tenemos finalmente que

$$\left\| \sum_{i=1}^{q} \left\{ f(t_i)\mu(M_i) - (\mathrm{HK}) \int_{M_i} f \right\} \right\|$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{q} f(t_i)\mu(M_i) - \sum_{i=1}^{q} (\mathrm{HK}) \int_{M_i} f \right\|$$

$$= \left\| \left\{ S(f,Q) - \sum_{i=1}^{k} S(f,Q_i) \right\} - \left\{ (\mathrm{HK}) \int_I f - \sum_{i=1}^{k} (\mathrm{HK}) \int_{J_i} f \right\} \right\|$$

$$= \left\| \left\{ S(f,Q) - (\mathrm{HK}) \int_I f \right\} - \left\{ \sum_{i=1}^{k} \left[S(f,Q_i) - (\mathrm{HK}) \int_{J_i} f \right] \right\} \right\|$$

$$\leq \left\| S(f,Q) - (\mathrm{HK}) \int_I f \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{k} \left[S(f,Q_i) - (\mathrm{HK}) \int_{J_i} f \right] \right\|$$

$$\leq \left\| S(f,Q) - (\mathrm{HK}) \int_I f \right\| + \sum_{i=1}^{k} \left\| S(f,Q_i) - (\mathrm{HK}) \int_{J_i} f \right\|$$

$$< \epsilon + k\frac{\eta}{k} = \epsilon + \eta$$

Haciendo η tender a cero obtenemos $\left\| \sum_{i=1}^{q} \left\{ f(t_i)\mu(M_i) - (\mathrm{HK}) \int_{M_i} f \right\} \right\| \leq \epsilon.$ □

Observación 3.3. *El lema previo es conocido como la versión débil del lema de Saks-Henstock. El próximo lema, el cual está planteado para funciones con valores reales, se conoce como la versión fuerte del lema de Saks-Henstock. La versión fuerte del lema no se cumple para funciones con valores en un espacio de Banach arbitrario, sin embargo, como demostramos al final de la sección, se cumple bajo la hipótesis de que el espacio de Banach X es de dimensión finita.*

Lema 3.3. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ Henstock-Kurzweil integrable sobre I. Para cada $\epsilon > 0$, existe un calibrador δ sobre I, tal que si P es K-Sistema δ-Fino de I, entonces*

$$\sum_{(t,J)\in P} \left| f(t)\mu(J) - (\mathrm{HK}) \int_J f \right| < \epsilon.$$

Demostración.

Sea $\epsilon > 0$ y $P = \{(t_i, I_i) : i = 1, \ldots, q\}$ un K-Sistema de I. Definimos

$$P^+ = \left\{ (t_i, I_i) \in P : f(t_i)\mu(I_i) - (\mathrm{HK}) \int_{I_i} f \geq 0 \right\}$$

y

$$P^- = P \setminus P^+.$$

Entonces

$$(t_i, I_i) \in P^+ \Longrightarrow \left| f(t_i)\mu(I_i) - (\mathrm{HK}) \int_{I_I} f \right| = f(t_i)\mu(I_i) - (\mathrm{HK}) \int_{I_i} f$$

y

$$(t_i, I_i) \in P^- \Longrightarrow \left| f(t_i)\mu(I_i) - (\mathrm{HK}) \int_{I_I} f \right| = -\Bigg(f(t_i)\mu(I_i) - (\mathrm{HK}) \int_{I_i} f \Bigg).$$

Ahora, por el lema anterior, existe un calibrador δ sobre I, tal que si Q es K-Sistema de I δ-Fino, entonces

$$\left| \sum_{(t,J)\in Q} \{ f(t)\mu(J) - (\mathrm{HK}) \int_J f \} \right| \leq \frac{\epsilon}{3} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sea P entonces un K-Sistema δ-Fino de I. Tenemos

$$\sum_{(t,J)\in P} \left| f(t)\mu(J) - (\mathrm{HK}) \int_J f \right| = \sum_{(t,J)\in P^+} \left| f(t)\mu(J) - (\mathrm{HK}) \int_J f \right| + \sum_{(t,J)\in P^-} \left| f(t)\mu(J) - (\mathrm{HK}) \int_J f \right|$$

$$= \sum_{(t,J)\in P^+} \Big(f(t)\mu(J) - (\mathrm{HK}) \int_J f \Big) - \sum_{(t,J)\in P^-} \Big(f(t)\mu(J) - (\mathrm{HK}) \int_J f \Big)$$

$$= \left| \sum_{(t,J)\in P^+} (f(t)\mu(J) - (\mathrm{HK}) \int_J f) \right| + \left| \sum_{(t,J)\in P^-} (f(t)\mu(J) - (\mathrm{HK}) \int_J f) \right|$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Cabe mencionar en este punto que el lema anterior es lo que usualmente se presenta como Lema de Saks-Henstock por muchos autores (es la versión fuerte, valido solo para funciones real valuadas) y que existen formas distintas de presentarlo usadas algunas veces en la literatura. Ver por ejemplo [3] de la bibliografía. En realidad nosotros solo haremos uso en el próximo capítulo del Lema 3.2 para probar los teoremas de convergencia monótona. Sin embargo, con la intención de que la exposición sea lo mas completa posible, la versión que nosotros presentamos del Lema de Saks-Henstock (Versión fuerte) será en el caso en que la función toma valores en un espacio de Banach X de dimensión finita. Para tal fin, necesitamos desarrollar aún algunos resultados adicionales.

Proposición 3.1. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Henstock-Kurzweil integrable sobre I. Si $f = (f_1, \ldots, f_n)$ y (HK) $\int_I f = (x_1, \ldots, x_n)$, entonces, para $i = 1, \ldots, n$, f_i es Henstock-Kurzweil integrable sobre I y además (HK) $\int_I f_i = x_i$.*

Demostración.
Sea $\epsilon > 0$ y δ calibrador sobre I tal que si P es K-Partición δ-Fina de I entonces

$$\left\| \sum_{(t,J)\in P} f(t)\mu(J) - (\text{HK}) \int_I f \right\| < \epsilon.$$

Si $P = \{(t_i, J_i) : i = 1, \ldots, r\}$ es K-Partición δ-Fina de I, entonces

$$\epsilon > \left\| \sum_{i=1}^{r} f(t_i)\mu(J_i) - (\text{HK}) \int_I f \right\|$$

$$= \left\| \left(\sum_{i=1}^{r} [f_1(t_i)\mu(J_i) - x_1], \ldots, \sum_{i=1}^{r} [f_n(t_i)\mu(J_i) - x_n] \right) \right\|$$

$$\geq \left| \sum_{i=1}^{r} f_j(t_i)\mu(J_i) - x_j \right| \text{ para } j = 1, \ldots, n.$$

Por lo tanto, concluimos que para $j = 1, \ldots, n$, f_j es Henstock-Kurzweil integrable sobre I y que (HK) $\int_I f_j = x_j$. □

Lema 3.4. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Henstock-Kurzweil integrable sobre I. Para cada $\epsilon > 0$, existe un calibrador δ sobre I, tal que si P es K-Sistema δ-Fino de I, entonces*

$$\sum_{(t,J)\in P} \left\| f(t)\mu(J) - (\mathrm{HK})\int_J f \right\| < \epsilon$$

Demostración.
Aquí, consideraremos a $\mathbb{R}^n$ con la norma $\| (x_1, \ldots, x_n) \| = | x_1 | + \ldots + | x_n |$. Sea $\epsilon > 0$ y hagamos $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $\int_I f = (x_1, \ldots, x_n)$. Por la proposición anterior, sabemos que $\int_I f_i = x_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Por lo tanto, existen calibradores δ_i sobre I, $i = 1, \ldots, n$, tales que si P es K-Partición δ_i-Fina de I entonces

$$\sum_{(t,J)\in P} | f_i(t)\mu(J) - x_i | < \frac{\epsilon}{n}$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ y P, K-Partición de I δ-Fina. Entonces P es δ_i-Fina para $i = 1, \ldots, n$ y tenemos

$$\left\| f(t)\mu(J) - (\mathrm{HK})\int_J f \right\| = \left\| \big(f_1(t)\mu(J) - x_1, \ldots, f_n(t)\mu(J) - x_n \big) \right\|$$

$$= | f_1(t)\mu(J) - x_1 | + \ldots + | f_n(t)\mu(J) - x_n | .$$

Entonces

$$\sum_{(t,J)\in P} \left\| f(t)\mu(J) - (\mathrm{HK})\int_J f \right\| = \sum_{(t,J)\in P} | f_1(t)\mu(J) - x_1 | + \ldots + \sum_{(t,J)\in P} | f_n(t)\mu(J) - x_n |$$

$$< \frac{\epsilon}{n} + \ldots + \frac{\epsilon}{n} = \epsilon.$$

□

Lema 3.5. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow X$ Henstock-Kurzweil integrable sobre I, donde X es un espacio de Banach de dimensión finita n. Si $T : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es isomorfismo y $g = T \circ f$, entonces g es Henstock-Kurzweil integrable sobre I y $\int_I g = T\big(\int_I f\big)$.*

Demostración.
Como T es isomorfismo entre X y $\mathbb{R}^n$, existen constantes positivas k y K tales que para cada $x \in X$, se tiene

$$k \parallel x \parallel \leq \parallel Tx \parallel \leq K \parallel x \parallel .$$

Sea $\epsilon > 0$ y δ calibrador sobre I, tal que si P es K-Partición δ-Fina de I, entonces

$$\left\| \sum_{(t,J)\in P} f(t)\mu(J) - (\mathrm{HK}) \int_I f \right\| < \frac{\epsilon}{K}.$$

Como

$$\left\| T\Big[\sum_{(t,J)\in P} f(t)\mu(J) - (\mathrm{HK}) \int_I f \Big] \right\|$$

$$= \left\| \sum_{(t,J)\in P} T\big(f(t)\big)\mu(J) - T\Big((\mathrm{HK}) \int_I f \Big) \right\|$$

$$= \left\| \sum_{(t,J)\in P} g(t)\mu(J) - T\Big((\mathrm{HK}) \int_I f \Big) \right\| < M \left\| \sum_{(t,J)\in P} f(t)\mu(J) - (\mathrm{HK}) \int_I f \right\| < \epsilon$$

tenemos el resultado deseado. □

Lema 3.6. ***(de Saks-Henstock)*** *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow X$ Henstock-Kurzweil integrable sobre I, donde X es un espacio de Banach de dimensión finita. Para cada $\epsilon > 0$, existe un calibrador δ sobre I, tal que si P es K-Sistema δ-Fino de I, entonces*

$$\sum_{(t,J)\in P} \left\| f(t)\mu(J) - (\mathrm{HK}) \int_J f \right\| < \epsilon.$$

Demostración.
Sea $n = \dim X$. Entonces X es isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Sea $T : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ isomorfismo y $g = T \circ f$. Por el lema anterior, g es Henstock-Kurzweil integrable sobre I, con $(\mathrm{HK}) \int_I g = T\big((HK) \int_I f\big)$. Sean k y K constantes positivas tales que para cada $x \in X$, se tiene

$$k \parallel x \parallel \leq \parallel Tx \parallel \leq \ K \parallel x \parallel .$$

Sea $\epsilon > 0$. Por el Lema 3.4 aplicado a g, existe un calibrador δ sobre I, tal que si P es K-Sistema δ-Fino de I, entonces

$$\sum_{(t,J)\in P} \left\| g(t)\mu(J) - (\mathrm{HK}) \int_J g \right\| < \epsilon k.$$

Entonces

$$k\left\| f(t)\mu(J) - (\mathrm{HK}) \int_J f \right\| \leq \left\| T\left[f(t)\mu(J) - (\mathrm{HK}) \int_J f \right] \right\|$$

$$= \left\| g(t)\mu(J) - (\mathrm{HK}) \int_J g \right\|.$$

Por lo tanto

$$\sum_{(t,J)\in P} \left\| f(t)\mu(J) - (\mathrm{HK}) \int_J f \right\| \leq \frac{1}{k} \sum_{(t,J)\in P} \left\| g(t)\mu(J) - (\mathrm{HK}) \int_J g \right\| < \frac{1}{k}\epsilon k = \epsilon$$

que es lo que se quería demostrar. □

Observación 3.4. *Si bien en [18] se enuncia el Lema 3.6, solo se demuestra para espacios de Banach de dimensión* 1*. En la revisión bibliográfica que hemos realizado no encontramos una prueba para el caso de dimensión n. Los resultados previos al Lema 3.6, es decir, de la proposición 3.1 al lema 3.5, así como sus demostraciones* ***son de nuestra autoría.***

El último resultado muestra que si X es de dimensión finita, entonces la HK-integral cumple ambas versiones del Lema de Saks-Henstock (débil y fuerte, ver la observación 3.3). Lo anterior nos lleva a cuestionarnos si este hecho caracteriza a los espacios de Banach de dimensión finita; la respuesta es afirmativa, tal como lo demuestra Solodov en [19].

3.5 Teorema Fundamental del Cálculo

Una de las principales características de la integral de Henstock-Kurzweil es su capacidad para integrar toda derivada, es decir si $f \in HK([a,b],X)$ entonces $f' \in HK([a,b],X)$ y $(HK)\int_{[a,b]} f' = f(b) - f(a)$, algo que como es bien sabido, no cumplen la integral de Riemann ni la de Lebesgue. En la presente sección presentamos la demostración del teorema fundamental del cálculo para la integral de Henstock-Kurzweil. La prueba sigue la demostración dada por Swartz en [20] para funciones real valuadas. Nosotros la hemos adaptado para funciones con valores en un espacio de Banach. En lo que sigue $[a,b]$ denotará un intervalo cerrado de los números reales.

En el contexto de los espacios de Banach existen diferentes conceptos de diferenciabilidad, tales como la derivada de Fréchet, la derivada de Gâteaux, entre otros; sin embargo, el concepto de diferenciabilidad que utilizaremos será el de derivada fuerte (derivada de Fréchet), el cual en el contexto real coincide con el concepto de derivada clásica.

Definición 3.4. *Una función $f : [a,b] \longrightarrow X$ es **fuertemente diferenciable** en $t_0 \in [a,b]$ si y sólo si existe $x \in X$ tal que*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} - x \right\| = 0.$$

*Si tal x existe, es único y lo denotaremos por $x = f'(t_0)$ y la denominaremos la derivada fuerte de f en t_0; además, si la derivada fuerte existe para cada $t \in [a,b]$ entonces diremos que f es **fuertemente diferenciable** en $[a,b]$.*

Pasamos ahora a demostrar el teorema fundamental del cálculo para la integral de Henstock-Kurzweil, pero antes requerimos del siguiente resultado.

Lema 3.7. ***(Straddle)*** *Sea $f : [a,b] \longrightarrow X$ fuertemente diferenciable en un punto $t \in [a,b]$. Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon(t) > 0$ tal que si $u, v \in [a,b]$ satisfacen*

$$t - \delta_\epsilon(t) \le u \le t \le v \le t + \delta_\epsilon(t)$$

entonces

$$\|f(v) - f(u) - f'(t)(v-u)\| \le \epsilon(v-u).$$

Demostración:

Por la definición de la derivada fuerte $f'(t)$ en el punto $t \in [a,b]$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon(t) > 0$ tal que si $0 < |z-t| \leq \delta_\epsilon(t)$, $z \in [a,b]$, entonces

$$\left\| \frac{f(z)-f(t)}{z-t} - f'(t) \right\| \leq \epsilon$$

de aquí se sigue que

$$\|f(z)-f(t)-f'(t)(z-t)\| \leq \epsilon|z-t|$$

para todo $z \in [a,b]$ tal que $|z-t| \leq \delta_\epsilon(t)$. En particular, si elegimos $u \leq t \leq v$ con $u,v \in [t-\delta_\epsilon(t), t+\delta_\epsilon(t)]$, entonces tenemos que $v-t \geq 0$ y $t-u \geq 0$. Restando y sumando el término $f(t)-f'(t)t$, tenemos que

$$\|f(v)-f(u)-f'(t)(v-u)\|$$

$$= \|[f(v)-f(t)-f'(t)(v-t)] \; - \; [f(u)-f(t)-f'(t)(u-t)\|]$$

$$\leq \|f(v)-f(t)-f'(t)(v-t)\| + \|f(u)-f(t)-f'(t)(u-t)\|$$

$$\leq \epsilon(v-t)+\epsilon(t-u) = \epsilon(v-u).$$

Por lo tanto $\|f(v)-f(u)-f'(t)(v-u)\| \leq \epsilon(v-u)$ □.

Teorema 3.8. ***(Teorema Fundamental del Cálculo)*** *Si la función $f : [a,b] \longrightarrow X$ es fuertemente diferenciable en $[a,b]$, entonces f' es Henstock-Kurzweil integrable sobre $[a,b]$ y*

$$(HK)\int_a^b f' = f(b)-f(a).$$

Demostración:

Sea $\epsilon > 0$. Para cada $t \in [a,b]$, existe por el lema previo, $\delta(t) > 0$ tal que si $u \leq t \leq v$ y $[u,v] \subset [a,b] \cap (t-\delta(t), t+\delta(t))$ entonces

$$\|f(v)-f(u)-f'(t)(v-u)\| \leq \frac{\epsilon}{b-a}(v-u).$$

Tenemos entonces definido un calibrador $\delta : [a,b] \longrightarrow (0,\infty)$. Si $\{(t_i, I_i) : i = 0,\ldots,n\}$ es K-Partición δ-Fina de $[a,b]$, entonces $t_i \in I_i = [x_i, x_{i+1}] \subset (t_i-\delta(t_i), t_i+\delta(t_i))$ y tenemos

$$\left\| \sum_{i=0}^{n-1} f'(t_i)(x_{i+1}-x_i) \; - \; [f(b)-f(a)] \right\| =$$

$$\Big\|\sum_{i=0}^{n-1}\big\{f'(t_i)(x_{i+1}-x_i)\ -\ [f(x_{i+1})-f(x_i)]\big\}\Big\| \leq \frac{\epsilon}{b-a}(b-a)=\epsilon.$$

Lo anterior prueba que $f' \in HK([a,b],X)$ y que $(HK)\int_a^b f' = f(b)-f(a)$ $\square$

Capítulo 4
Teoremas de Convergencia Monótona

Si se tiene una sucesión de funciones reales (f_n), integrables en algún sentido, y que converge a una función f, a cualquier teorema del tipo $\lim \int_I f_n = \int_I \lim f_n$, se le suele llamar "Teorema de Convergencia". Es bien sabido que si las funciones f_n son Riemann integrables, la función límite puede no serlo, y aún y cuando lo fuere, su integral de Riemann puede no ser el límite de la sucesión de integrales $\left(\int_I f_n\right)$. En [1] se pueden encontrar ejemplos de estos hechos. Una condición suficiente para garantizar que la función límite sea Riemann integrable es considerar la convergencia uniforme de la sucesión, algo que es muy restrictivo. La principal ventaja de la integral de Lebesgue sobre la de Riemann es que los teoremas de convergencia se cumplen bajo condiciones muy generales, siendo el Teorema de Convergencia Monótona y el Teorema de Convergencia Dominada los más celebres en este sentido. En el presente capítulo mostramos que teoremas del mismo tipo se cumplen para la integral de Henstock-Kurzweil y más aún, pues presentamos un teorema de convergencia que no involucra la relación de orden de los reales, algo que será muy provechoso al considerar el caso de funciones que toman valores en un espacio de Banach, pues dichos espacios no tienen un orden natural.

Los comentarios previos nos muestran que la integral de Henstock-Kurzweil goza de las mismas ventajas que tiene la integral de Lebesgue sobre la de Riemann, con el añadido de que su formulación conserva la simpleza que posee la integral de Riemann. Iniciamos el capítulo presentando teoremas de convergencia para la integral de Henstock-Kurzweil en el caso en que las funciones involucradas son de valores reales. Posteriormente pasamos a generalizar dichos teoremas al caso en que las funciones toman valores en un espacio de Banach. Dichos teoremas son de la autoría de Heikkilä y pueden encontrarse en [9]. Teoremas del mismo tipo para funciones Henstock-Lebesgue integrables, que no fueron incluidos en nuestro estudio, pueden encontrarse en [10].

4.1 Teoremas de Convergencia Para Funciones Real Valuadas

Los teoremas que presentamos en esta sección son meramente con fines comparativos al caso en que las funciones toman valores en un espacio de Banach. Por tal motivo omitimos las demostraciones de los resultados, remitiendo al lector interesado en ellas a consultar [20], [7], [16] y [1] de la bibliografía.

4.1.1 Teorema de Convergencia Monótona

En lo que sigue $I = [a, b]$ denotará un intervalo compacto de los reales y $HK([a, b], \mathbb{R})$ el espacio de la funciones Henstock-Kurzweil integrables definidas en I y con valores en $\mathbb{R}$.

En 1906 el matemático italiano Beppo Levi formula el importante teorema de convergencia monótona para la integral de Lebesgue. El siguiente resultado es una generalización del mismo.

Teorema 4.1. ***(de Convergencia Monótona)*** *Sea (f_n) una sucesión monótona en $HK([a, b], \mathbb{R})$ que converge puntualmente casi en todas partes en $[a, b]$ a la función f. $f \in HK([a, b], \mathbb{R})$ si y sólo si la sucesión $\left((HK) \int_I f_n\right)$ es acotada en $\mathbb{R}$; en este caso*

$$\lim_{n\to\infty} (HK) \int_I f_n = (HK) \int_I \lim_{n\to\infty} f_n$$

4.1.2 Teorema de Convergencia Dominada

Teorema 4.2. ***(de Convergencia Dominada)*** *Sea (f_n) una sucesión en $HK([a, b], \mathbb{R})$ que converge puntualmente a la función f en $[a, b]$. Si existen funciones $g_\pm \in HK([a, b], \mathbb{R})$ tales que*

$$g_-(t) \leq f_n(t) \leq g_+(t) \text{ para casi toda } t \in [a, b],\ n \in \mathbb{N}$$

entonces $f \in HK([a, b], \mathbb{R})$ y

$$\lim_{n\to\infty} (HK) \int_I f_n = (HK) \int_I \lim_{n\to\infty} f_n.$$

4.1.3 Teorema de Equi-Integrabilidad

Los teoremas de Convergencia Monónotona y Convergencia Dominada prsentados anteriormente, hacen uso del orden usual de los números reales, y de entrada, carecen de sentido en el caso en que las funciones involucradas toman valores en un espacio de Banach X. El próximo resultado que presentamos, a diferencia de los previos, no hace uso de la relación de orden en $\mathbb{R}$, lo cual es importante al considerar funciones con valores vectoriales. Dicho resultado hace uso del concepto de **equi-integrabilidad**, el cual definimos en primera instancia. Esencialmente dicho concepto tiene que ver con una colección de funciones HK-integrables y tales que para cada $\epsilon > 0$ existe un calibrador δ que satisface los requerimientos de la definición de la HK-integral para cada función en la colección. Otro nombre que se le da al teorema de equi-integrbilidad es "Teorema de Convergencia Uniforme", tal como lo hace Swartz en [20].

Definición 4.1. *Una colección $\mathfrak{F} \subset HK([a,b],\mathbb{R})$ es* ***equi-integrable*** *sobre $[a,b]$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe un calibrador δ sobre $[a,b]$ tal que si P es cualquier K-Partición $\delta-$Fina de $[a,b]$ y $f \in \mathfrak{F}$ entonces*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\mu(I_i) - (HK)\int_I f \right| < \epsilon.$$

Teorema 4.3. ***(de Equi-integrabilidad)*** *Si $(f_n) \subset HK([a,b],\mathbb{R})$ es una sucesión equi-integrable sobre $[a,b]$ que converge puntalmente a la función f en $[a,b]$, entonces f es Henstock-Kurzweil integrable sobre $[a,b]$ y*

$$\lim_{n\to\infty} (HK)\int_I f_n = (HK)\int_I \lim_{n\to\infty} f_n.$$

En [16], McLeod prueba que el Teorema de Convergencia Monótona y el Teorema de Covergencia Dominada son consecuencias del Teorema de Equi-integrabilidad; Gordon por su parte demuestra en [6] el mismo hecho usando resultados de Teoría de la Medida.

4.2 Teoremas de Convergencia Monótona Para Funciones Vector-Valuadas

En la presente sección establecemos los correspondientes teoremas de convergencia para la integral de Henstock-Kurzweil análogos a los que se tiene para el caso real.

Los teoeremas de convergencia monónotana y convergencia dominada presentados en la sección previa, hacen uso de la realción de orden usual en los reales, por tal motivo no pueden ser extendidos sin más al caso de funciones que toman valores en un espacio de Banach X, dado que en general en dichos espacios no se cuenta con una estructura de orden. Es en este punto que entrará en juego la teoría de conos desarrollada en el capítulo 2. Así pues, en lo sucesivo consideraremos espacios de Banach X ordenados por un cono ordenado X_+.

$[a, b]$ será un intervalo cerrado y acotado de los reales y $HK([a, b], X)$ el conjunto de todas las funciones HK-integrables definidas en $[a, b]$ y con valores en el espacio de Banach ordenado X.

Si identificamos a dos funciones en $HK([a, b], X)$ que son iguales casi en todas partes de $[a, b]$, podemos definir un orden parcial en $HK([a, b], X)$ vía el cono ordenado X_+ del siguiente modo.

Definición 4.2. *Si $f, g \in HK([a, b], X)$, decimos que $f \leq g$ si y sólo si $f(x) \leq g(x)$ para casi toda $x \in [a, b]$.*

Ahora que disponemos de un orden parcial en $HK([a, b], X)$ cobra sentido hablar de sucesiones monótonas en dicho espacio.

Definición 4.3. *Sea (f_n) una sucesión en $HK([a, b], X)$.Decimos que:*

1. *La sucesión (f_n) es* ***creciente****, si para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n \leq f_{n+1}$.*
2. *La sucesión (f_n) es* ***decreciente****, si para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} \leq f_n$.*
3. *La sucesión (f_n) es* ***monótona*** *si es o bien creciente o bien decreciente.*

Dada una sucesión (f_n) en $HK([a, b], X)$, para cada $x \in [a, b]$ tenemos la sucesión $(f_n(x))$ en X que puede estar acotada en orden o en norma. Para nosotros será de interes el caso en que (f_n) esté acotada puntualmente en norma casi en todas partes de acuerdo a la siguiente definición.

Definición 4.4. *Sea (f_n) una sucesión en $HK\big([a,b],X\big)$. Se dice que la sucesión (f_n) es* ***puntualmente acotada casi en todas partes****, si $\sup_n \| f_n(x) \| < \infty$, para casi toda x en $[a,b]$.*

Para el caso de funciones reales f, g es bien sabido que si $f \leq g$, entonces se puede integrar en ambos lados y se conserva la desigualdad. El siguiente resultado, el cual juega un papel relevante en la teoría de las funciones Henstock-Kurzweil integrables en espacios de Banach ordenados, nos dice que lo mismo se cumple en el presente contexto.

Lema 4.1. *Si $f, g \in HK\big([a,b],X\big)$ y $f \leq g$, entonces, para cada J, subintervalo cerrado de $[a,b]$, se tiene*

$$\text{(HK)} \int_J f \leq \text{(HK)} \int_J g.$$

Demostración:

Sea $h = g - f$ y supongamos que $f(x) \leq g(x)$ para cada x de $[a,b]$. Entonces $h(x) \in X_+$ para cada x en $[a,b]$. Como f y g son HK-Integrables sobre $[a,b]$, entonces, por el Teorema 3.4, h es HK-Integrable sobre $[a,b]$. Sea $J = [c,d]$ un subintervalo cerrado de $[a,b]$. Como h es HK-Integrable sobre $[a,b]$, entonces lo es también sobre J (Teorema 3.6).

Por la definición de la integral de Henstock-Kurzweil, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen calibradores δ_n sobre J y particiones $\{(t_i^{(n)}, I_i^{(n)}) : i = 1, \ldots, p_n\}$ de J que son δ_n-Finas (Lema de Cousin), tales que

$$\left\| \sum_{i=1}^{p_n} h(t_i^{(n)})\mu(I_i^{(n)}) - \text{(HK)} \int_I h \right\| < \frac{1}{n}.$$

Sea $y_n = \sum_{i=1}^{p_n} h(t_i^{(n)})\mu(I_i^{(n)})$, $n \in \mathbb{N}$. Nótese que para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in X_+$ y tenemos

$$\left\| \text{(HK)} \int_J h - y_n \right\| < \frac{1}{n}.$$

Por lo tanto $y_n \longrightarrow \text{(HK)} \int_J h$, y como X_+ es cerrado, concluimos que $\text{(HK)} \int_J h \in X_+$.

Finalmente, si $f(x) \leq g(x)$ para $x \in [a,b] \setminus A$, donde $A \subset [a,b]$ es de medida cero, entonces $(g-f)\chi_{A^c} = g - f$ para casi toda x en $[a,b]$ y $(g-f)\chi_A^c \in X_+$ para cada $x \in [a,b]$. Tenemos entonces que $(g-f)\chi_{A^c}$ es HK-Integrable sobre J y por lo probado antes (HK) $\int_J (g-f) =$ (HK) $\int_J (g-f)\chi_{A^c} \in X_+$, de donde se obtiene el resultado deseado. □

4.2.1 Primer Teorema de Convergencia Monótona

En la presente subsección presentamos el primer teorema de convergencia monótona que puede considerarse una generalización del teorema 4.1 para el caso de funciones vector-valuadas. Con la finalidad de facilitar la lectura del primer teorema de convergencia monótona presentamos previamente algunos lemas que serán usados en la demostración.

El siguiente resultado, aunque es elemental y consecuencia de los conceptos previos, **es de nuestra autoría.**

Lema 4.2. *Si (f_n) es sucesión en $HK\big([a,b],X\big)$, creciente y puntualmente acotada casi en todas partes, entonces, para casi toda $x \in [a,b]$, $\big(f_n(x)\big)$ es creciente y acotada.*

Demostración:
Como $f_n \leq f_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, entonces existe $A_n \subset [a,b]$ con $\mu(A_n) = 0$, tal que para cada $x \in [a,b] \setminus A_n$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Como también (f_n) es puntualmente acotada casi en todas partes, existe entonces $B \subset [a,b]$, con $\mu(B) = 0$, tal que para cada $x \in [a,b] \setminus B$, existe $M_x > 0$ que cumple $\| f_n(x) \| \leq M_x$, $n \in \mathbb{N}$.

Sea $F = \bigcup A_n$. Tenemos por la subaditividad de μ, que $\mu(F) = 0$, y si $x \in [a,b] \setminus F$, entonces $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea ahora $A = F \cup B$, entonces $\mu(A) = 0$ y si $x \in [a,b] \setminus A$, entonces para $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ y $\| f_n(x) \| \leq M_x$. □

Lema 4.3. *Sea X un espacio de Banach ordenado por un cono completamente regular X_+. Si $(f_n) \subset HK([a,b],X)$ es una sucesión monótona y acotada puntualmente casi en todas partes, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existe para casi toda $x \in [a,b]$.

Demostración:
Supongamos que la sucesión es creciente. Como la sucesión es puntualmente acotada casi en todas partes, por el Lema 4.2, para casi toda $x \in [a,b]$, $(f_n(x))$ es creciente y

acotada. Como X_+ es completamente regular, entonces $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe para casi toda $x \in [a,b]$ □

Lema 4.4. *Sea X un espacio de Banach ordenado por un cono completamente regular X_+. Si $(f_n) \subset HK([a,b],X)$ es una sucesión monótona, acotada puntualmente casi en todas partes, y la sucesión de integrales $(HK)\int_{[a,b]} f_n$ está acotada, entonces para cada $[c,d]$ subintervalo cerrado de $[a,b]$*

$$\lim_{n\to\infty}(HK)\int_{[c,d]} f_n$$

existe.

Demostración:
Supongamos que (f_n) es creciente. Si $I=[c,d]$ es un subintervalo cerrado de $[a,b]$, tenemos para cada $n \in \mathbb{N}$ que

$$0 \leq (\mathrm{HK})\int_I (f_n - f_1) \leq (\mathrm{HK})\int_{[a,c]}(f_n - f_1) + (\mathrm{HK})\int_{[c,d]}(f_n - f_1) + (\mathrm{HK})\int_{[d,b]}(f_n - f_1)$$

$$= (\mathrm{HK})\int_{[a,b]}(f_n - f_1).$$

Como X_+ es completamente regular, entonces es normal, y tenemos por la desigualdad anterior que

$$\left\|(\mathrm{HK})\int_I (f_n - f_1)\right\| \leq N\left\|(\mathrm{HK})\int_{[a,b]}(f_n - f_1)\right\|$$

donde $N \geq 1$ es la constante de normalidad.

De la desigualdad anterior tenemos que

$$\left\|(HK)\int_I f_n\right\| \leq \left\|(HK)\int_I f_1\right\| + \left\|(HK)\int_I (f_n - f_1)\right\|$$

$$\leq \left\|(\mathrm{HK})\int_I f_1\right\| + N\left\|(HK)\int_{[a,b]} f_n\right\| + N\left\|(\mathrm{HK})\int_{[a,b]} f_1\right\|$$

Como por hipótesis, la sucesión de integrales (HK) $\int_{[a,b]} f_n$ es acotada, se desprende de la desigualdad anterior que la sucesión de integrales (HK) $\int_I f_n$, también es acotada. Como además $f_n \leq f_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, tenemos por el Lema 4.1 que (HK) $\int_I f_n \leq$ (HK) $\int_I f_{n+1}$.

Se sigue entonces que la sucesión (HK) $\int_I f_n$ es creciente y acotada. Al ser el cono X_+ completamente regular, concluimos que $\lim_{n\to\infty}$(HK) $\int_I f_n$ existe. □

Teorema 4.4. ***(Primer Teorema de Convergencia Monótona,*** *Heikkilä, [9])* *Sea X un espacio de Banach ordenado por un cono completamente regular X_+, (f_n) una sucesión en $(HK)\big([a,b],X\big)$, monótona y puntualmente acotada casi en todas partes. Si la sucesión de integrales* (HK) $\int_{[a,b]} f_n$*, está acotada, entonces, existe $f \in HK\big([a,b],X\big)$ tal que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, para casi toda $x \in [a,b]$ y $\lim_{n\to\infty}$*(HK) $\int_{[a,b]} f_n =$ (HK) $\int_{[a,b]} f$.

Demostración:
Supongamos que la sucesión (f_n) es creciente. Denotemos por $\mathcal{I}$, la colección de todos los subintervalos cerrados de $[a,b]$ y hagamos $F_n(I) =$ (HK) $\int_I f_n$, $I \in \mathcal{I}$. Por el lema 4.4 podemos definir $F : \mathcal{I} \longrightarrow X$ como

$$F(I) = \lim_{n\to\infty} F_n(I), \tag{4.1}$$

F es una función de intervalos, que por las propiedades de la integral, resulta ser aditiva.

Sea $\epsilon > 0$ dado. Como X_+ es completamente regular, entonces por el teorema 2.7 X_+ es normal y existe $N \geq 1$ tal que

$$\text{si } 0 \leq x \leq y \implies \|x\| \leq N\|y\|.$$

Como $\lim_{n\to\infty} F_n[a,b] = F[a,b]$, podemos elegir $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{si } n \geq n_\epsilon \text{ entonces } \big\|F[a,b] - F_n[a,b]\big\| < \frac{\epsilon}{N}. \tag{4.2}$$

Por el lema 3.2, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un calibrador δ_n sobre $[a,b]$, tal que si $D = \{(x_i, I_i) : i = 1, \ldots, p\}$ es K-Sistema δ_n-Fino de $[a,b]$, entonces

$$\left\|\sum_i \Big\{f_n(x_i)\mu(I_i) - F_n(I_i)\Big\}\right\| \leq \frac{\epsilon}{2^n}. \tag{4.3}$$

Por el lema 4.3 sabemos que $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe para casi toda $x \in [a,b]$. Sea $A = \{x \in [a,b] : f_n(x) \text{ diverge}\}$. Tenemos que, para casi toda $x \in [a,b]$, $f_n\chi_{A^c} = f_n$

y $f_n\chi_{A^c}$ converge para cada $x \in [a,b]$. Además (HK) $\int_{[a,b]} f_n\chi_{A^c} =$ (HK) $\int_{[a,b]} f_n$. Por lo tanto, podemos suponer que la sucesión (f_n), converge para cada $x \in [a,b]$.

Sea $f : [a,b] \longrightarrow X$, definida por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \; x \in [a,b].$$

Para cada $x \in [a,b]$ fijo, podemos entonces elegir $n(x) \in \mathbb{N}$, tal que

$$\text{si } n \geq n(x) \text{ entonces } \Big\| f(x) - f_n(x) \Big\| \leq \epsilon. \tag{4.4}$$

Definimos a continuación un calibrador δ sobre $[a,b]$ como

$$\delta(x) = \delta_{\text{máx}\{n(x),\, n_\epsilon\}}(x), \quad x \in [a,b]. \tag{4.5}$$

Sea $D = \big\{(x_i, J_i) : i = 1, \ldots, p\big\}$ una K-Partición δ-Fina de $[a,b]$. Para $i = 1, \ldots, p$ y $n_i = \text{máx}\big\{n(x_i),\, n_\epsilon\big\}$, tenemos

$$\begin{gathered} f(x_i)\mu(J_i) - F(J_i) = \\ \big(f(x_i) - f_{n_i}(x_i)\big)\mu(J_i) + f_{n_i}(x_i)\mu(J_i) - F_{n_i}(J_i) + F_{n_i}(J_i) - F(J_i). \end{gathered} \tag{4.6}$$

Si denotamos por $k = \text{mín}_i\{n_i\}$, $m = \text{máx}_i\{n_i\}$ y sumamos ambos lados de la igualdad anterior sobre las $i = 1, \ldots, p$, obtenemos

$$\begin{gathered} \sum_i \big[f(x_i)\mu(J_i) - F(J_i)\big] = \\ \sum_i \big(f(x_i) - f_{n_i}(x_i)\big)\mu(J_i) + \sum_{n=k}^{m} \sum_{n_i = n} \big(f_{n_i}(x_i)\mu(J_i) - F_{n_i}(J_i)\big) + \sum_i \big(F_{n_i}(J_i) - F(J_i)\big). \end{gathered} \tag{4.7}$$

Nótese que, como la sucesión (f_n) es creciente y $n_i \geq n_\epsilon$, entonces $f_{n_i} \geq f_{n_\epsilon}$ y entonces $F_{n_i}(J_i) \geq F_{n_\epsilon}(J_i)$. Por lo tanto

$$F(J_i) - F_{n_i}(J_i) \leq F(J_i) - F_{n_\epsilon}(J_i).$$

Sumando la desigualdad anterior sobre $i = 1, \dots, p$ y usando el hecho de que F es aditiva, obtenemos

$$0 \leq \sum_i \big(F(J_i) - F_{n_i}(J_i)\big) \leq \sum_i \big(F(J_i) - F_{n_\epsilon}(J_i)\big) = F[a,b] - F_{n_\epsilon}[a,b].$$

Usando la normalidad del cono, la desigualdad anterior y la ecuación 4.2, obtenemos que

$$\Big\|\sum_i \big(F(J_i) - F_{n_i}(J_i)\big)\Big\| \leq N\Big\|F[a,b] - F_{n_\epsilon}[a,b]\Big\| \leq \epsilon. \tag{4.8}$$

Ahora, si n es tal que $k \leq n \leq m$ y $n_i = n$, entonces $\big\{(x_i, J_i)\big\}$ es un K-Sistema de $[a,b]$ que es δ_i-Fino, pues como D es δ-Fino, entonce $J_i \subset B\big(x_i, \delta(x_i)\big)$, donde $\delta(x_i) = \delta_{n_i}(x_i) = \delta_n(x_i)$.

Por lo tanto, de la ecuación 4.3 tenemos

$$\Big\|\sum_{n_i=n} \big(f_{n_i}(x_i)\mu(J_i) - F_{n_i}(J_i)\Big\| \leq \frac{\epsilon}{2^n}, \quad k \leq n \leq m. \tag{4.9}$$

Se sigue entonces de 4.4, 4.7, 4.8 y 4.9 que

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_i f(x_i)\mu(J_i) - F[a,b]\Big\| &= \Big\|\sum_i \big(f(x_i)\mu(J_i) - F(J_i)\big)\Big\| \\
\leq \sum_i \Big\|f(x_i) - f_{n_i}(x_i)\Big\|\mu(J_i) &+ \sum_{n=k}^{m}\Big\|\sum_{n_i=n} \big(f_{n_i}(x_i)\mu(J_i) - F_{n_i}(J_i)\big)\Big\| \\
&+ \sum_i \Big\|F_{n_i}(J_i) - F(J_i)\Big\| \\
\leq \epsilon(b-a) + \sum_{n=k}^{m}\frac{\epsilon}{2^n} + \epsilon &< \epsilon(b-a) + 2\epsilon + \epsilon = \epsilon\big((b-a)+3\big).
\end{aligned}$$

Lo anterior prueba que f es Henstock-Kurzweil integrable sobre $[a,b]$ y que (HK) $\int_{[a,b]} f = F[a,b]$. Además

$$\lim_{n\to\infty} (\mathrm{HK}) \int_{[a,b]} f_n = \lim_{n\to\infty} F_n[a,b] = F[a,b] = (\mathrm{HK}) \int_{[a,b]} f.$$

Finalmente, si la sucesión (f_n) es decreciente, puntualmente acotada casi en todas partes y la sucesión de integrales (HK) $\int_{[a,b]} f_n$ es acotada, entonces la sucesión $(-f_n)$ es creciente, puntualmente acotada casi en todas partes y la sucesión de integrales (HK) $\int_{[a,b]}(-f_n)$ es acotada. Aplicando lo que acabamos de probar, vemos que el resultado también se cumple en este caso. $\square$

Ejemplo 4.1. *(Heikkilä, [9]) Consideremos el espacio*

$$l_2(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) = \left\{ x = (x_{i,j})_{i,j=0}^{\infty} : x_{i,j} \in \mathbb{R};\ \left(\sum_{i,j=0}^{\infty} |x_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

equipado con la norma $\|x\|_2 = \left(\sum_{i,j=0}^{\infty} |x_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

El conjunto $X_+ = \left\{ x = (x_{i,j})_{i,j=0}^{\infty} : x_{i,j} \geq 0,\ (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \right\}$ *es un cono ordenado normal en* $l_2(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$*. Como* $\big(l_2(\mathbb{N}\times\mathbb{N}), \|\cdot\|_2\big)$ *es reflexivo, entonces es débilmente secuencialmente completo (véase [17], pág.251) y por el teorema 2.8,* X_+ *es completamente regular.*

El cono X_+ *induce sobre* $l_2(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ *el orden puntual*

$$x = (x_{i,j})_{i,j=0}^{\infty} \leq y = (y_{i,j})_{i,j=0}^{\infty} \ \textit{si y sólo si}\ x_{i,j} \leq y_{i,j} \ \textit{para todo}\ (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$$

Las funciones características $e_{i,j}$ *de los conjuntos unipuntuales* $\{(i,j)\}$ *en* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *forman una base ortonormal para* $l_2(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$*. Definimos funciones* $g_i : [0,1] \longrightarrow l_2(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$*,* $i \in \mathbb{N}$*, por*

$$g_0(t) = \begin{cases} (0)_{i,j=0}^{\infty} & \textit{si} \quad t = 0 \\ \left(\frac{1}{(i+1)(j+1)}\left(2t\cos(\frac{1}{t^2}) + \frac{2}{t}\sin(\frac{1}{t^2})\right)\right)_{i,j=0}^{\infty} & \textit{si} \quad t \in (0,1] \end{cases}$$

y

$$g_i(t) = \begin{cases} 2^i e_{i,j}, \quad \frac{j}{2^i} \leq t < \frac{j}{2^i} + \frac{1}{2^{2i}}, \quad i = 1, 2\ldots,\ j = 0, \ldots, 2^i - 1 \\ 0 \qquad\qquad \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Las funciones $f_n : [0,1] \longrightarrow l_2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, $n \in \mathbb{N}$, definidas por

$$f_n(t) = \sum_{i=0}^{n} g_i(t), \quad t \in [0,1], \ n \in \mathbb{N}$$

forman una sucesión creciente de funciones HK-integrables. Además

$$\left\| (HK) \int_{[0,1]} g_0 \right\|_2 = \frac{\pi^2 \cos(1)}{6}$$

, y

$$\left\| (HK) \int_{[0,1]} \sum_{i=1}^{n} g_i(s) ds \right\|_2 \leq 1, \ para \ n = 1, 2, \ldots.$$

Por lo tanto la sucesión de integrales $(HK) \int_{[0,1]} f_n$ es acotada. La sucesión (f_n) es también puntualmente acotada casi en todas partes. Por el teorema previo 4.4, existe una función HK-integrable $f_0 : [0,1] \longrightarrow l_2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ tal que $f_0(s) = \lim_{n\to\infty} f_n(s)$ para casi toda $s \in [a,b]$ y $\lim_{n\to\infty} (HK) \int_{[0,1]} f_n = (HK) \int_{[0,1]} f_0$.

4.2.2 Segundo teorema de Convergencia monótona

En el teorema 4.2 se asume que la sucesión (f_n) converge puntualmente a una función f en $[a,b]$. En el teorema que presentamos a continuación no se asume lo anterior, pero se pide que la sucesión (f_n) sea monótona.

Teorema 4.5. *(**Segundo Teorema de Convergencia Monótona,** Heikkilä, [9]) Sea X un espacio de Banach ordenado por un cono regular X_+, (f_n) una sucesión monótona en $HK([a,b],X)$ y f, $g \in HK([a,b],X)$ tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f \leq f_n \leq g$. Entonces, existe una función $h \in HK([a,b],X)$, tal que $h(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, para casi toda $x \in [a,b]$ y $\lim_{n\to\infty} (\mathrm{HK}) \int_{[a,b]} f_n = (\mathrm{HK}) \int_{[a,b]} h$.*

Demostración:

Por las hipótesis dadas y el lema 4.1, tenemos que, para cada subintervalo cerrado I de $[a,b]$, la sucesión de integrales $(\mathrm{HK}) \int_I f_n$, es monótona y

$$(\mathrm{HK}) \int_I f \leq (\mathrm{HK}) \int_I f_n \leq (\mathrm{HK}) \int_I g, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como el cono X_+ es regular, entonces la sucesión de integrales (HK) $\int_I f_n$ converge, y como la sucesión $\big(f_n(x)\big)$ es monótona y acotada en orden para casi toda $x \in [a, b]$, entonces $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe para casi toda $x \in [a, b]$. A partir de aquí, el resto de la prueba es exactamente la misma que la del Teorema anterior. $\square$

Cerraremos el capítulo presentando la versión del Teorema de Equi-integrabilidad (Teorema 4.3) para el caso de funciones vector valuadas.

4.2.3 Teorema de Equi-integrabilidad

El concepto de una familia equi-integrable de funciones se formula de la misma forma que en la definición 4.1, simplemente se reemplaza el valor absoltuto por la norma del espacio X. Para la comidad del lector, enunciamos la definición correspondiente al caso de funciones vector-valuadas.

Definición 4.5. *Una colección $\mathfrak{F} \subset HK([a, b], X)$ es* ***equi-integrable*** *sobre $[a, b]$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe un calibrador δ sobre $[a, b]$ tal que si P es cualquier K-Partición δ-Fina de $[a, b]$ y $f \in \mathfrak{F}$ entonces*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\mu(I_i) - (HK)\int_i f \right\| < \epsilon$$

El teorema de equi-integrabilidad 4.3, al no hacer uso de la relación de orden usual de los números reales, puede ser formulado sin más al caso de funciones que toman valores en un espacio de Banach. Dicho toerema se sigue cumpliendo para el caso de funciones McShane integrables (ver [18], donde además se pueden encontrar criterios que garantizan que una famila de funciones sea equi-integrable).

Teorema 4.6. *(**de Equi-integrabilidad**, Schwabik,[18]) Si $(f_n) \subset HK([a, b], X)$ es una sucesión equi-integrable sobre $[a, b]$ que converge puntualmente a la función f en $[a, b]$, entonces f es Henstoc-Kurzweil integrable sobre $[a, b]$ y*

$$\lim_{n\to\infty} (HK)\int_{[a,b]} f_n = (HK)\int_{[a,b]} \lim_{n\to\infty} f_n$$

Demostración:

Probaremos primero que $\lim_{n\to\infty} (HK)\int_{[a,b]} f_n$ existe.

Sea $\epsilon > 0$ y δ un calibrador sobre $[a,b]$ que cumple los requerimientos de la definición de equi-integrabilidad para la sucesión (f_n).
Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} f_n(t_i)\mu(I_i) - (HK)\int_{[a,b]} f_n \right\| < \frac{\epsilon}{4}$$

para toda K-Partición $\{(t_i, I_i) : i = 1, \ldots, p\}$ de $[a,b]$ que sea δ-Fina.

Fijemos la partición δ-Fina $\{(t_i, I_i) : i = 1, \ldots, p\}$ de $[a,b]$. Como la sucesión (f_n) converge puntualmente a f tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p} f_n(t_i)\mu(I_i) = \sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(I_i)$$

Sea $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0$ entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} f_n(t_i)\mu(I_i) - \sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(I_i) \right\| < \frac{\epsilon}{4}$$

Tenemos entonces que

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(I_i) - (HK)\int_{[a,b]} f_n \right\|$$

$$\leq \left\| \sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(I_i) - \sum_{i=1}^{p} f_n(t_i)\mu(I_i) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{p} f_n(t_i)\mu(I_i) - (HK)\int_{[a,b]} f_n \right\| < \frac{\epsilon}{2}$$

para $n \geq N_0$.

De lo anterior tenemos que si $n, m \geq N_0$ entonces

$$\left\| (HK)\int_{[a,b]} f_n - (HK)\int_{[a,b]} f_m \right\|$$

$$\leq \left\| (HK)\int_{[a,b]} f_n - \sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(I_i) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(I_i) - (HK)\int_{[a,b]} f_m \right\| < \epsilon$$

lo cual muestra que la sucesión $\left((HK)\int_{[a,b]} f_n\right)$ es de Cauchy en X. Por lo tanto, al ser X de Banach, debemos tener que el siguiente límite existe

$$\lim_{n\to\infty} (HK)\int_{[a,b]} f_n = x \in X. \tag{4.10}$$

Ahora probaremos que f es HK-integrable sobre $[a,b]$ y que $\lim_{n\to\infty}(HK)\int_{[a,b]} f_n = (HK)\int_{[a,b]} f$.

Sea $\epsilon > 0$ y δ el calibrador sobre $[a,b]$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que: si $\{(t_i, I_i) : i = 1, \ldots, p\}$ es K-Partición δ-Fina de $[a,b]$ entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} f_n - (HK)\int_{[a,b]} f_n \right\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Por (4.10), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq N$ se tiene

$$\left\| (HK)\int_{[a,b]} f_n - x \right\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Sea $\{(t_i, I_i) : i = 1, \ldots, p\}$ K-Partición δ-Fina de $[a,b]$. Como (f_n) converge puntualmente a f, existe $n_1 \geq N$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} f_{n_1}(t_i)\mu(I_i) - \sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(I_i) \right\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Por lo tanto, tenemos

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(I_i) - x \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{p} f(t_i)\mu(I_i) - \sum_{i=1}^{p} f_{n_1}(t_i)\mu(I_i) \right\|$$

$$+\left\| \sum_{i=1}^{p} f_{n_1}(t_i)\mu(I_i) - (HK)\int_{[a,b]} f_{n_1} \right\| + \left\| (HK)\int_{[a,b]} f_{n_1} - x \right\| < \epsilon.$$

Concluimos que f es HK-integrable sobre $[a,b]$ y que

$$(HK)\int_{[a,b]} f = x = \lim_{n\to\infty} (HK)\int_{[a,b]} f_n.$$

$\square$

Capítulo 5

Aplicaciones

La integral de Henstock-Kurzweil a sido utilizada en estudios recientes como útil herramienta para la solución de problemas diversos. Por ejemplo en [21], Talvila la utiliza para dar una forma modificada del Teorema de Taylor y estimar el residuo; en [4], Chew emplea la integral de Henstock-Kurzweil para tratar el problema de existencia y unicidad de soluciones al problema de Cauchy para una ecuación diferencial parcial cuasi lineal de primer orden, encontrando mejoras sustanciales a resultados clásicos que emplean la integral de Lebesgue. Los resultados clásicos imponen condiciones de diferenciabilidad y continuidad sobre los coeficientes de las derivadas en la ecuación. Empleando la integral de Henstock-Kurzweil, se muestra que dichas condiciones pueden ser relajadas. Por otra parte en [15], León Velasco utiliza el método de elemento finito para encontrar soluciones aproximadas a ecuaciones diferenciales. En dicho estudio, se muestra que los métodos clásicos de aproximación numérica de integrales, fallan para funciones altamente oscilantes y se propone una nueva metodología utilizando la integral de Henstock-Kurzweil.

En este último capítulo, nosotros presentamos dos aplicaciones de la integral de Henstock-Kurzweil. La primera de ellas, a la teoría de espacios de Banach, caracterizando a los espacios de Banach de dimensión finita a través de la teoría de integración. La segunda, emplea los teoremas de convergencia monótona desarrollados en el capítulo 4 para garantizar la existencia de soluciones a una ecuación integral.

5.1 Aplicación a la Teoría de Espacios de Banach

A finales de 1950 J. Kurzweil y R. Henstock, de manera independiente, proponen dos teorías de integración que, en el caso de funciones real valuadas, resultan ser equivalentes. Para el caso de funciones que toman valores en un espacio de Banach X, las integrales de Henstock y Kurzweil ya no resultan ser equivalentes; lo son sin embargo si el espacio de Banch es de dimensión finita. En esta sección, mostramos que este hecho caracteriza a los espacios de Banch de dimensión finita. Dicho resultado es autoría de Solodov y puede encontrarse en [19].

La definición de la integral de Kurzweil es la que nosotros hemos presentado en el capítulo 4 y que hemos llamado integral de Henstock-Kurzweil. A continuación, damos la definición de la integral de Henstock para funciones con valores en un espacio de Banach. En lo sucesivo, $[a, b]$ denotará un intervalo cerrado de los números reales y X a un espacio de Banch.

Definición 5.1. *Una función $f : [a, b] \longrightarrow X$ se dice* ***Henstock integrable*** *sobre $[a, b]$, si existe una función $F : [a, b] \longrightarrow X$ con la siguiente propiedad:*

Dado $\epsilon > 0$, existe un calibrador δ sobre $[a, b]$ tal que si $\{(x_i, [t_{i-1}, t_i]) : i = 1, \ldots, p\}$ es cualquier K-Partición δ-Fina de $[a, b]$, entonces

$$\sum_{i=1}^{p} \left\| f(x_i)\mu(I_i) - [F(t_i) - F(t_{i-1})] \right\| < \epsilon.$$

La integral de Henstock de la función f sobre el intervalo $I = [a, b]$ se denota por $(H)\int_I f$ o por $(H)\int_a^b f$ y se define como $F(b) - F(a)$; es decir $(H)\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

El espacio de las funciones de $[a, b]$ a X que son Henstock integrables, será denotado por $H([a, b], X)$.

Observación 5.1. *A la integral de Henstock también se le conoce como "Integral Varacional", "Integral Fuerte de Henstock-Kurzweil", o la "Integral HL".*

Como se mencionó antes, las integrales de Henstok y Kurzweil no coinciden para funciones vector-valuadas, sin embargo, el siguiente resultado nos dice que $H([a, b], X) \subset HK([a, b], X)$.

Teorema 5.1. *Si $f \in H([a, b], X)$, entonces $f \in HK([a, b], X)$ y el valor de las integrales coinciden.*

Demostración:
Sea $\epsilon > 0$, como f es Henstock integrable, existe un calibarador δ sobre $[a, b]$ tal que si $\{(x_i, I_i) : i = 1, \ldots, p\}$ es K-Partición δ-Fina de $[a, b]$, entonces

$$\sum_{i=1}^{p} \left\| f(x_i)\mu(I_i) - F(t_i) + F(t_{i-1}) \right\| < \epsilon.$$

Sea $\{(x_i, I_i) : i = 1, \ldots, p\}$ una K-Partición δ-Fina de $[a, b]$. Entonces

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} f(x_i)\mu(I_i) - (H)\int_a^b f \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{p} \left[f(x_i)\mu(I_i) - (H)\int_{t_{i-1}}^{t_i} f \right] \right\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{p} \left\| f(x_i)\mu(I_i) - (H)\int_{t_{i-1}}^{t_i} f \right\| = \sum_{i=1}^{p} \left\| f(x_i)\mu(I_i) - F(t_i) + F(t_{i-1}) \right\| < \epsilon$$

Por lo tanto f es Henstock-Kurzweil integrable (Kurzweil integrable) sobre $[a, b]$ y $(H)\int_{[a,b]} f = (HK)\int_{[a,b]} f$. □

Observación 5.2. *Los teoremas 3.6 y 3.7 del capítulo 3 siguen siendo válidos tanto para la integral de Henstock como para la integral de McShane. En la demostración previa se hizo uso del teorema 3.7 para la integral de Henstock.*

Por la observación previa, al igual que para las funciones Henstock-Kurzweil integrables, podemos definir las integrales indefinidas para las funciones Henstock integrables y para las McShane integrables como $F(t) = (H)\int_a^t f$ y $F(t) = (M)\int_a^t f$ respectivamente, donde $t \in [a, b]$.

Veremos a continuación que si el espacio de Banach es de dimensión finita entonces las integrales de Henstock y Henstock-Kurzweil coinciden.

Teorema 5.2. *Sea X un espacio de Banach de dimensión finita. Si $f \in HK([a, b], X)$ entonces $f \in H([a, b], X)$.*

Demostración:
Como $f \in HK([a, b], X)$ y X es de dimensión finita, entonces por el Lema de Saks-Henstock 3.6 se tiene que para cada $\epsilon > 0$, existe un calibrador δ sobre $[a, b]$ tal que si $\{(x_i, I_i) : i = 1, \ldots, p\}$ es K-Partición δ-Fina de $[a, b]$, entonces

$$\sum_{i=1}^{p} \left\| f(x_i)\mu(I_i) - (HK)\int_{I_i} f \right\| < \epsilon.$$

Si hacemos $F(t) = (HK)\int_a^t f,\ t \in [a, b]$, vemos que $F(t_i) - F(t_{i-1}) = (HK)\int_{t_{i-1}}^{t_i} f$. Por lo tanto $f \in H([a, b], X)$ □.

Para poder probar que el hecho previo caracteriza a los espacios de Banach de dimensión finita, necesitamos introducir los conceptos de variación acotada y variación acotada generalizada, en sentido restringido, los cuales son bien conocidos en el caso real (vease por ejemplo [7]).

Definición 5.2. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow X$ y $P \subset [a, b]$. Definimos la **oscilación** de f sobre el conjunto P como*

$$\omega(f, P) = \sup_{t,s \in P} \|f(t) - f(s)\|$$

- *Decimos que f es de **variación acotada en el sentido restringido** sobre un conjunto $E \subset [a, b]$ (o que f es BV^* sobre E), si existe $M > 0$ tal que la desigualdad*

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f, I_i) < M$$

se cumple para cualquier conjunto de intervalos cerrados no traslapados $\{I_i : i = 1, \ldots, n\}$ con puntos terminales en E.

- *Decimos que f es de **variación acotada generalizada en el sentido restringido** sobre un conjunto $E \subset [a, b]$ (o que f es BVG^* sobre E) si E puede ser expresado como una unión numerable de conjuntos tal que f es BV^* sobre cada uno de ellos.*

Las demostraciones de los siguientes dos resultados son un tanto técnicas y extensas, por tal motivo no las presentaremos aquí. Invitamos al lector interesado en las mismas a que consulta [19] de la bibliografía.

Teorema 5.3. *Si $f : [a, b] \longrightarrow X$ es Henstock integrable sobre $[a, b]$ con integral indefinida $F : [a, b] \longrightarrow X$, entonces F es BVG^* sobre $[a, b]$.*

Lema 5.1. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Existe una función $f : [a, b] \longrightarrow X$ con las siguientes propiedades:*

1. *f es McShane integrable sobre $[a, b]$.*
2. *La integral indefinida de f, $F : [a, b] \longrightarrow X$ no es una función BVG^*.*

Por medio de los dos resultados previos, podemos ahora caracterizar a los espacios de Banach de dimensión finita.

Teorema 5.4. *Sea X un espacio de Banach. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *X es finito dimensional.*
2. *$f \in HK([a,b],X)$ si y sólo si $f \in H([a,b],X)$.*

Demostración:
Que 1. $\Rightarrow$ 2. ya ha sido probado en 5.1 y 5.2. Probaremos ahora que 2. $\Rightarrow$ 1. Si X fuera infinito dimensional, entonces por el lema 5.1 existe una función McShane integrable $f : [a,b] \longrightarrow X$ cuya integral indefinida no es BVG^*. Como toda función McShane integrable es Henstock-Kurzweil integrable (ver capítulo 4), tenemos que $f \in HK([a,b],X)$ y por hipótesis $f \in H([a,b],X)$. Pero por el teorema 5.3, la integral indefinida de f debe ser una función BVG^*. Esta contradicción nos muestra que X debe ser de dimensión finita. □

5.2 Aplicación a una Ecuación Integral

Las ecuaciones integrales funcionales de varios tipos aparecen en muchas aplicaciones que surgen en los campos del análisis matemático, análisis funcional no lineal, física matemática e ingeniería. Una característica interesante de las ecuaciones integrales funcionales es su rol en el estudio de muchos problemas de ecuaciones diferenciales. Varias técnicas diferentes han sido propuestas para estudiar la existencia de soluciones de ecuaciones integrales funcionales en un espacio de funciones apropiado. Aunque todas éstas técnicas tienen el mismo objetivo, difieren en los espacios de funciones y en los teoremas de punto fijo a ser aplicados.

Nosotros, en la presente sección, aplicaremos los teoremas de convergencia monótona desarrollados en el capítulo 4 para obtener resultados de existencia de soluciones mínimas y/o máximas de la ecuación integral funcional

$$u(t) = h(t) + (HK)\int_a^b f(t,s,u(s),u)ds, \ t \in [a,b] \tag{5.1}$$

donde $h \in HK([a,b],X)$ y $f : [a,b] \times [a,b] \times X \times HK([a,b],X) \longrightarrow X$.

5.2.1 Primer Teorema de Existencia

Al igual que en la sección previa, X denotará un espacio de Banach ordenado y $[a,b]$ un intervalo compacto en $\mathbb{R}$.

Definición 5.3. *Decimos que una sucesión* $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ *en* $HK([a,b],X)$*, puntualmente acotada casi en todas partes, es* ***HK-acotada*** *si la sucesión de integrales* $(HK)\int_a^b f_n(s)ds,\ n \in \mathbb{N}_0$ *es acotada.*

Definición 5.4. *Decimos que* $u \in HK([a,b],X)$ *es una* ***solución inferior*** *de 5.1 si*

$$u(t) \leq h(t) + (HK)\int_a^b f(t,s,u(s),u)ds, \quad p.c.t. \quad t \in [a,b] \tag{5.2}$$

Si la desigualdad inversa se cumple en 5.2 para casi toda $t \in [a,b]$*, decimos que* u *es una* ***solución superior*** *de 5.1. Si la igualdad se cumple en 5.2 para casi toda* $t \in [a,b]$*, decimos que* u *es* ***una solución*** *de 5.1*

Impondremos las siguientes hipótesis sobre la función f:

- **(f0)** Si $u \in HK([a,b],X)$, entonces $f(t,\cdot,u(\cdot),u) \in HK([a,b],X)$, para todo $t \in [a,b]$, y $(HK)\int_a^b f(\cdot,s,u(s),u)ds \in HK([a,b],X)$.
- **(f1)** Si $u \leq v$ en $HK([a,b],X)$, entonces $f(t,\cdot,u(\cdot),u) \leq f(t,\cdot,v(\cdot),v)$, para toda $t \in [a,b]$.
- **(f2)** Si $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión monótona en $HK([a,b],X)$, la cual converge puntualmente casi en todas partes a $u \in HK([a,b],X)$, entonces $f(t,s,u_n(s),u_n) \longrightarrow f(t,s,u(s),u)$, para toda $t \in [a,b]$ y para casi toda $s \in [a,b]$.
- **(f3)** Si $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión monótona en $HK([a,b],X)$, entonces la sucesión de funciones $(HK)\int_a^b f(\cdot,s,u_n(s),u_n)ds,\ n \in \mathbb{N}_0$ es HK-acotada.

A continuación presentamos nuestro primer resultado de existencia para la ecuación integral 5.1.

Teorema 5.5. *(Heikkilä, [9]) Asumimos que las hipótesis (f0)-(f3) son válidas, y que el cono ordenado de X es completamente regular.*
(a) Si 5.1 tiene una solución inferior u_-, entonces las aproximaciones sucesivas:

$$u_{n+1}(t) = h(t) + (HK)\int_a^b f(t,s,u_n(s),u_n)ds,\ t \in [a,b],\ n \in \mathbb{N}_0,\ u_0 = u_- \tag{5.3}$$

forman en $[u_-) = \{u \in HK([a,b],X) : u_- \leq u\}$ una sucesión creciente $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ que converge puntualmente casi en todas partes a la minima solución de 5.1 en $[u_-)$.
(b) Si 5.1 tiene una solución superior u_+, entonces las aproximaciones sucesivas:

$$v_{n+1}(t) = h(t) + (HK)\int_a^b f(t,s,v_n(s),v_n)ds,\ t \in [a,b],\ n \in \mathbb{N}_0,\ v_0 = u_+ \tag{5.4}$$

forman en $(u_+] = \{u \in HK([a,b],X) : u \leq u_+\}$ una sucesión decreciente $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ que converge puntualmente casi en todas partes a la máxima solución de 5.1 en $(u_+]$.

Demostración:
(a) Supongamos que u_- es una solución inferior de 5.1. Si $u_n \in HK([a,b],X)$, por la hipótesis $(f0)$, $(HK)\int_a^b f(\cdot,s,u_n(s),u_n)ds \in HK([a,b],X)$. Como también $h \in HK([a,b],X)$, entonces, al ser $HK([a,b],X)$ un espacio vectorial, concluimos que

$$u_{n+1} = h + (HK)\int_a^b f(\cdot,s,u_n(s),u_n)ds \in HK([a,b],X).$$

Como $u_0 = u_- \in HK([a,b],X)$, se sigue por inducción que $u_n \in HK([a,b],X),\ n \in \mathbb{N}_0$.

Para probar que la sucesión (u_n) es creciente, nótese primero que

$$u_0(t) = u_-(t) \leq h(t) + (HK)\int_a^b f(t,s,u_-(s),u_-)ds = u_1(t).$$

Si suponemos ahora que $u_n \leq u_{n+1}$, por la hipótesis $(f1)$, se sigue que:

$$\forall t \in [a,b],\ f(t,\cdot,u_n(\cdot),u_n) \leq f(t,\cdot,u_{n+1}(\cdot),u_{n+1})$$

y de aquí, por el lema 4.1, tenemos:

$$\forall t \in [a,b], \int_a^b f(t,s,u_n(s),u_n)ds \leq \int_a^b f(t,s,u_{n+1}(s),u_{n+1})ds.$$

Concluimos entonces, después de sumar $h(t)$ a ambos miembros de la desigualdad anterior, que $\forall t \in [a,b],\ u_{n+1}(t) \leq u_{n+2}(t)$.
Por lo tanto, se tiene por inducción que $\forall t \in [a,b],\ n \in \mathbb{N}_0,\ u_n(t) \leq u_{n+1}(t)$.

Así pues $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ es efectivamente una sucesión creciente en $[u_-)$.

Como (u_n) es monótona en $HK([a,b],X)$, la hipótesis $(f3)$ nos garantiza que la sucesión $g_n = (HK)\int_a^b f(\cdot,s,u_n(s),u_n)ds$ es HK-acotada. De 5.3 tenemos entonces que $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ es HK-acotada. Por hipótesis, el cono ordenado de X es completamente regular, y entonces el teorema 4.4 nos garantiza que existe u_*, el límite puntual casi en todas partes de $(u_n)_{n=0}^{\infty}$, y que $u_* \in HK([a,b],X)$.

Como $\forall n \in \mathbb{N}_0,\ u_n \in HK([a,b],X)$, entonces, por $(f0)$:

$$\forall t \in [a,b],\ n \in \mathbb{N}_0,\ f(t,\cdot,u_n(\cdot),u_n) \in HK([a,b],X)$$

y como (u_n) es creciente, entonces, por $(f1)$:

$$\forall t \in [a,b],\ n \in \mathbb{N}_0,\ f(t,\cdot,u_n(\cdot),u_n) \leq f(t,\cdot,u_{n+1}(\cdot),u_{n+1}).$$

Es decir, para todo $t \in [a,b]$ fijo, la sucesión $f(t,\cdot,u_n(\cdot),u_n)$ pertenece a $HK([a,b],X)$ y es creciente. Además, $u_* = \sup_n u_n$ por ([11], Proposición 1.1.3), de donde:

$$f(t,\cdot,u_-(\cdot),u_-) \leq f(t,\cdot,u_n(\cdot),u_n) \leq f(t,\cdot,u_*(\cdot),u_*)$$

Al ser el cono de X completamente regular, es regular, y el teorema 4.5 nos asegura que $\forall t \in [a,b]$, existe $f_t \in HK([a,b],X)$, límite puntual casi en todas partes de la sucesión

$f(t,\cdot,u_n(\cdot),u_n)$ y además $(HK)\int_a^b f(t,s,u_n(s),u_n)ds \longrightarrow (HK)\int_a^b f_t(s)ds$.

Como u_n es monótona en $HK([a,b],X)$ y converge puntualmente casi en todas partes a $u_* \in HK([a,b],X)$, la hipótesis $(f2)$ nos dice que $f(t,s,u_n(s),u_n) \longrightarrow f(t,s,u_*(s),u_*)$, para toda $t \in [a,b]$ y para casi toda $s \in [a,b]$. Pero también para cada $t \in [a,b]$, $f(t,\cdot,u_n(\cdot),u_n)$ converge puntualmente casi en todas partes a f_t. Concluimos entonces que $f_t = f(t,\cdot,u_*(\cdot),u_*)$, $\forall t \in [a,b]$. Luego, tenemos:

$$(HK)\int_a^b f(t,s,u_n(s),u_n)ds \longrightarrow (HK)\int_a^b f(t,s,u_*(s),u_*)ds,\ t \in [a,b].$$

Al pasar al límite cuando $n \longrightarrow \infty$ en 5.3, obtenemos:

$$u_*(t) = h(t) + (HK)\int_a^b f(t,s,u_*(s),u_*)ds,\ t \in [a,b].$$

Es decir, u_* es solución a 5.1 en $[u_-)$.

Para probar que u_* es la mínima solución de 5.1 en $[u_-)$ tomamos $u \in [u_-)$ solución de 5.1 y observamos en primera instancia que $u_0 = u_- \leq u$. Si suponemos que $u_n \leq u$, entonces, por $(f1)$, tenemos:

$$\forall t \in [a,b],\ f(t,\cdot,u_n(\cdot),u_n) \leq f(t,\cdot,u(\cdot),u)$$

lo cual implica que:

$$(HK)\int_a^b f(t,\cdot,u_n(\cdot),u_n)ds \leq (HK)\int_a^b f(t,\cdot,u(\cdot)u)ds.$$

Por lo tanto $u_{n+1} \leq u$ y se sigue por inducción que para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $u_n \leq u$. Al ser $u_* = \sup_n u_n$ debemos tener que $u_* \leq u$ y entonces u_* es la menor solución a 5.1 en $[u_-)$.

(b) Por un razonamiento similar se puede demostrar que si u_+ es una solución superior de 5.1, entonces la sucesión (v_n) definida en 5.4 es decreciente, y converge puntualmente casi en todas partes a una función $u^* \in HK([a,b],X)$, y que u^* es la mayor solución de 5.1 en $(u_+]$. $\square$

5.2.2 Segundo teorema de existencia

En la presente subsección reemplazaremos la hipótesis **(f3)** por la siguiente hipótesis:

(lu) La ecución 5.1 tiene una solución inferior u_- y una solución superior u_+, y $u_- \leq u_+$.

Si asumimos que el cono de X es regular, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 5.6. *(Heikkilä, [9]) Asumamos que las hipótesis (f0)-(f2) y (lu) son validas y que el cono ordenado de X es regular. Sea*

$$[u_-, u_+] = \{u \in HK([a,b],X) : u_- \leq u \leq u_+\}$$

donde $u_\pm$ son como en (lu). Se tiene que:

(a) Las aproximaciones sucesivas u_n, $n \in \mathbb{N}_0$ definidas por 5.3 forman en $[u_-, u_+]$ una sucesión creciente $(u_n)_{n=0}^\infty$ la cual converge puntualmente casi en todas partes en $[a,b]$ a una función $u_* \in HK([a,b],X)$ que es la mínima solución de 5.1 en $[u_-, u_+]$.

(b) Las aproximaciones sucesivas v_n, $n \in \mathbb{N}_0$ definidas por 5.4, forman en $[u_-, u_+]$ una sucesión decreciente $(v_n)_{n=0}^\infty$ la cual converge puntualmente casi en todas partes en $[a,b]$ a una función $u^* \in HK([a,b],X)$ que es la mayor solución de 5.1 en $[u_-, u_+]$.

Demostración:
(a) Sea u_n, $n \in \mathbb{N}_0$ definida por 5.3. En el teorema 5.5 se probó que $u_n \in HK([a,b],X)$ para toda n y que $u_n(t) \leq u_{n+1}(t)$ para toda $n \in \mathbb{N}_0$ y $t \in [a,b]$. En dicha prueba no se hizo uso de la hipótesis $(f3)$ y así sigue siendo valida en el presente contexto. Probaremos ahora que $u_n \leq u_+$ para cada n.
Si suponemos que $u_n \leq u_+$, entonces por $(f1)$ tenemos

$$f(t,\cdot,u_n(\cdot),u_n) \leq f(t,\cdot,u_+(\cdot),u_+) \quad \text{para toda } t \in [a,b]$$

y entonces

$$(HK)\int_a^b f(t,\cdot,u_n(\cdot),u_n) \leq (HK)\int_a^b f(t,\cdot,u_+(\cdot),u_+).$$

Despues de sumar $h(t)$ a ambos miembros de la desigualdad anterior, obtenemos que $u_{n+1}(t) \leq u_+(t)$ para casi toda $t \in [a,b]$. Como $u_0 = u_- \leq u_+$, se sigue por inducción que $u_n \leq u_+$ para cada n.

Tenemos entonces que $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ es sucesión creciente en $[u_-, u_+]$.

Como el cono ordenado de X es regular, se sigue del teorema 4.5 que el límite puntual casi en todas partes u_* de (u_n) existe y pertenece a $HK([a,b],X)$.

Las hipótesis $(f0),(f1)$ y (lu) implican que para casi toda $t \in [a,b]$ la sucesión $\big(f(t,\cdot,u_n(\cdot),u_n)\big)_{n=0}^{\infty}$ pertenece a $HK([a,b],X)$ y que

$$f(t,\cdot,u_-(\cdot),u_-) \leq f(t,\cdot,u_n(\cdot),u_n) \leq f(t,\cdot,u_{n+1}(\cdot),u_{n+1}) \leq f(t,\cdot,u_+(\cdot),u_+),\ \ n \in \mathbb{N}_0.$$

En vista de lo anterior y el teorema 4.5, existe para casi toda $t \in [a,b]$ una función $f_t \in HK([a,b],X)$ tal que

$$f(t,s,u_n(s),u_n) \longrightarrow f_t(s) \quad \text{para casi toda } \ s \in [a,b]$$

y que

$$(HK)\int_a^b f(t,s,u_n(s),u_n)ds \longrightarrow (HK)\int_a^b f_t(s)ds.$$

Como (u_n) es monótona y $u_n \longrightarrow u_*$ puntualmente casi en todas partes de $[a,b]$, entonces por $(f2)$

$$f(t,s,u_n(s),u_n) \longrightarrow f(t,s,u_*(s),u_*).$$

Concluimos entonces que $f_t = f(t,\cdot,u_*(\cdot),u_*)$, y por lo tanto

$$(HK)\int_a^b f(t,s,u_n(s),u_n)ds \longrightarrow (HK)\int_a^b f(t,s,u_*(s),u_*)ds \quad \text{para casi toda } \ t \in [a,b].$$

Si ahora en 5.3 hacemos $n \longrightarrow \infty$, obtenemos que u_* es una solución de 5.1.

Sea ahora u cualquier solución de 5.1 en $[u_-, u_+]$. Queremos probar que $u_n \leq u$ para toda n.

Como $u \in [u_-, u_+]$, entonces $u_0 = u_- \leq u$ y el resultado se cumple para $n = 0$. Si suponemos que $u_n \leq u$, entonces por $(f1)$

$$f(t, \cdot, u_n(\cdot), u_n) \leq f(t, \cdot, u(\cdot), u)$$

y despues de integrar y sumar $h(t)$ a ambos miembros de la desigualdad anterior obtenemos que $u_{n+1}(t) \leq u(t)$. Se sigue por inducción que $u_n \leq u$ para cada n y por lo tanto $u_* = \sup_n u_n \leq u$, y u_* es la mínima solución de 5.1 en $[u_-, u_+]$.

(b) Por un razonamiento similar se puede probar que la sucesión (v_n) definida por 5.4 es decreciente y converge puntualmente casi en todas partes a la máxima solución u^* de 5.1 en $[u_-, u_+]$ $\square$.

Consideremos ahora la siguiente hipótesis:

(f4) Existen $f_\pm \in HK([a,b], X)$, $f_- \leq f_+$ tales que

$$f_- \leq (HK) \int_a^b f(\cdot, s, u(s), u) ds \leq f_+ \quad \text{para toda } u \in HK([a,b], X).$$

Tenemos como consecuencia del Teorema 5.6 el siguiente resultado.

Corolario 5.1. *Si el cono ordenado de X es regular y las hipótesis $(f0)$, $(f1)$, $(f2)$ y $(f4)$ se cumplen, entonces la ecuación integral 5.1 tiene soluciones mínima y máxima para toda $h \in HK([a,b], X)$.*

Demostración:
Sea $h \in HK([a,b], X)$. Si $u_\pm = h + f_\pm$, entonces $u_\pm \in HK([a,b], X)$ y por $(f4)$ tenemos que

$$f_- \leq (HK) \int_a^b f(\cdot, s, u_\pm(s), u_\pm) ds \leq f_+$$

y sumando h en ambos miembros de las desigualdades anteriores, obtenemos

$$u_- \leq h + (HK)\int_a^b f(\cdot, s, u_\pm(s), u_\pm)ds \leq u_+.$$

Es decir, $u_\pm$ son soluciones superior e inferior respectivamente de 5.1. Por lo tanto se cumple la hipótesis (lu) y entonces las hipótesis del Teorema 5.6 son validas y concluimos que la ecuación 5.1 tiene soluciones mínima y máxima u_* y u^*, respectivamente, en $[u_-, u_+]$.

Sea u solución de 5.1. Por $(f4)$ tenemos

$$f_- \leq (HK)\int_a^b f(\cdot, s, u(s), u)ds \leq f_+.$$

Sumando h a ambos miembros de las desigualdades anteriores, tenemos

$$u_- \leq u \leq u_+.$$

Por lo tanto, toda solución de 5.1 pertenece a $[u_-, u_+]$. En particular u_* y u^* son la menor y mayor solución, respectivamente, de todas las soluciones de 5.1. □

Conclusiones

El objetivo general de este trabajo de tesis fue desarrollar las bases matemáticas necesarias para iniciar el estudio de la integral de Henstock-Kurzweil y de sus teoremas de convergencia para funciones definidas en un intervalo compacto de los números reales y con valores en un espacio de Banach, haciendo énfasis en algunas propiedades algebraicas, en el teorema fundamental del cálculo, los teoremas de convergecia y algunas de sus aplicaciones.

En el capítulo 3 se demostró una versión del teorema fundamental del cálculo para la integral de Henstock-Kurzweil. La segunda versión del teorema fundamental del cálculo, la cual esencialmente establece que, bajo ciertas condiciones, la derivada de la integral indefinida coincide con la función, se cumple para la integral de Henstock (definición 5.1) y no así para la integral de Henstock-Kurzweil. En las demostraciones consultadas de dicho teorema para la integral de Henstock, se hace uso de la versión fuerte del lema de Saks-Henstonck (lema 3.6), sin embargo desconocemos si dicho lema es una condición necesaria para demostrarlo, lo cual abre la posibilidada de un futuro trabajo.

Al no cumplirse la segunda versión del teorema fundamental del cálculo para la integral de Henstock-Kurzweil, surge de manera natural el preguntarnos cuales son las condiciones bajo las cuales este teorema es válido, o si es posible formular alguna versión análoga a él. Esta es otra posibilidad de trabajo futuro.

Como enfatizamos en el capítulo 4, en un espacio de Banach no necesariamente se tiene una estructura de orden, por lo que el teorema de convergencia monótona 4.1 y el teorema de convergencia dominada 4.2 para el caso real, no pueden ser extendidos sin más al caso de funciones que toman valores en un espacio de Banch. Por tal motivo fue en este punto que entró en juego la teoría desarrollada en el capítulo 2. Se vió que existe una versión del teorema de convergencia monótona para la integral de Henstock-Kurzweil análogo a 4.1 para el caso de funciones vector-valuadas. Sin embargo, en la revisión bibliográfica que realizamos, no encontramos un teorema de convergencia dominada para la integral de Henstock-Kurzweil análogo a 4.2, lo cual nos lleva a pensar que dicho teorema no existe. Por otra parte, sí se tiene el teorema 4.5 para esta integral.

El teorema de equi-integrabilidad, al no emplear la relación de orden en los reales, se tiene de manera directa para la integral de Henstock-Kurzweil.

En el ultimo capítulo se presentaron dos aplicaciones de la teoría de integración Henstock-Kurzweil. Una a la teoría de espacios de Banach, caracterizando los espacios de Banach de dimensión finita y otra a la obtención de resulatados de existencia de soluciones a una ecuación integral. Siempre queda abierta la posibilidad de encontrar nuevas aplicaciones de la teoría.

Bibliografía

[1] Robert Gardner Bartle. *A modern theory of integration*, volume 32. American Mathematical Soc., 2001.

[2] Richard Becker. *Ordered banach spaces*, volume 68. Hermann, 2008.

[3] S.C Cao. The Henstock integral for banach-valued functions. *Southeast Asian Bull. Math.*, 16:35–40, 1992.

[4] Tuan Seng Chew, Bruce Van-Brunt, GC Wake, et al. First-order partial differential equations and henstock-kurzweil integrals. *Differential and Integral Equations*, 10(5):947–960, 1997.

[5] Pierre Cousin et al. Sur les fonctions de n variables complexes. *Acta mathematica*, 19:1–61, 1895.

[6] R.A. Gordon. On the integration of vector-valued functions. *Real Analysis Exchange*, 15(2):724–728, 1990.

[7] Russell A Gordon. *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*. Number 4. American Mathematical Soc., 1994.

[8] Dajun Guo, Yeol Je Cho, and Jiang Zhu. *Partial ordering methods in nonlinear problems*. Nova Publishers, 2004.

[9] S Heikkilä. Monotone convergence theorems for henstock–kurzweil integrable functions and applications. *Journal of mathematical analysis and applications*, 377(1):286–295, 2011.

[10] S Heikkilä, M Kumpulainen, and S Seikkala. Convergence theorems for hl integrable vector-valued functions with applications. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 70(5):1939–1955, 2009.

[11] Seppo Heikkila and Vangipuram Lakshmikantham. *Monotone iterative techniques for discontinuous nonlinear differential equations*, volume 181. CRC Press, 1994.

[12] Ralph Henstock. *Theory of integration*, volume 1. Butterworth & Co Publishers Ltd, 1963.

[13] Jaroslav Kurzweil. Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 7(3):418–449, 1957.

[14] Tuo Yeong Lee. *Henstock-Kurzweil integration on Euclidean spaces*, volume 12. World Scientific, 2011.

[15] DA León-Velasco, MM Morín-Castillo, JJ Oliveros-Oliveros, T Pérez-Becerra, and JA Escamilla-Reyna. Numerical solution of some differential equations with henstock–kurzweil functions. *Journal of Function Spaces*, 2019, 2019.

[16] Robert M McLeod. *The generalized Riemann integral*, volume 20. American Mathematical Soc., 1980.

[17] Robert E Megginson. *An introduction to Banach space theory*, volume 183. Springer Science & Business Media, 2012.

[18] Stefan Schwabik and Guoju Ye. *Topics in Banach space integration*, volume 10. World Scientific, 2005.

[19] Aleksei Petrovich Solodov. Henstock and mcshane integrals for banach-valued functions. *Mathematical Notes*, 65(6):723–730, 1999.

[20] Charles W Swartz. *Introduction to gauge integrals*. World Scientific, 2001.

[21] Erik Talvila. Estimates of the remainder in taylor's theorem using the henstock-kurzweil integral. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 55(4):933–940, 2005.

Autobiografía

Homero Alejandro Escamilla Rocha

Candidato para el grado de Maestría en Ciencias
con Orientación en Matemáticas

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

tesis:

Teoremas de convergencia monótona en el marco de la integral de Henstock-Kurzweil y aplicaciones

Nació el 26 de febrero de 1981 en la ciudad de Reynosa Tamauipas, México, donde cursó sus estudios de educación básica. Es licenciado en matemáticas por la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autonóma de Nuevo León (2004). Se ha desempeñado como profesor de asignatura en la Facultad de Ciencias Físico-Matematicas de la Universidad Autónoma de Nuevo León (2008-2009) y en la Universidad Tecnológica de Tamaulipas Norte (2011-2018).

Sus áreas de interés son el Análisis Matemático y sus Aplicaciones, en particular las teorías de integración. Actualmente (2020) se desempeña como profesor de asignatura en la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León, donde imparte de manera regular las materias de Topología, Ecuaciones Diferenciales, Álgebra Lineal y Cálculo Vectorial.