Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

Modelado del comportamiento de los agentes económicos en sistema con la estructura Fabricante - Intermediarios - Mercado competitivo

por

Daniela Osorio González

en opción al grado de

Maestría en Ciencias

con Orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León — Junio de 2021

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

Modelado del comportamiento de los agentes económicos en sistema con la estructura Fabricante - Intermediarios - Mercado competitivo

por

Daniela Osorio González

en opción al grado de

Maestría en Ciencias

con Orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León Junio de 2021

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis "Modelado del comportamiento de los agentes económicos en sistema con la estructura Fabricante - Intermediarios - Mercado competitivo", realizada por la alumna Daniela Osorio González, con número de matrícula 1558072, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias con Orientación en Matemáticas.

El Comité de Tesis

Dra. Nataliya Kalashnykova
Asesora

Dr. José Guadalupe Flores Muñiz
Co-asesor

Dr. Vitaly Kalashnikov
Revisor

Dr. Omar Jorge Ibarra Rojas
Coordinar del Posgrado en Ciencias con
Orientación en Matemáticas

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, Junio de 2021

Dedicatoria

A mis padres, abuelos, tíos y hermano quienes siempre me han dado su apoyo incondicional y me motivan a superar cada uno de los obstáculos que se me presenten. A la doctora Dra. Nataliya por su ayuda y guía. A mi novio Erick Daniel que siempre me da ánimos, y ahora a mi hijo que me da mas razones para no rendirme. A Dios por su infinito amor. A mis mascotas por desvelarse conmigo. A todas las personas que creen en mí. Les dedico esta tesis a todos ustedes.

Índice general

Agradecimientos

Doy las gracias a Dios por darme la fortaleza para seguir adelante y cumplir siempre cada de mis metas, porque sin el no se en donde estaría.

A la Dra. Nataliya Kalashnykova, por darme la oportunidad de trabajar con ella y ser mi asesora de tesis, por ser una guía a lo largo de mis estudios de maestría, por su apoyo y consejos, críticas constructivas y sugerencias para lograr esta tesis, a pesar de los obstáculos que se nos presentaron, y sobre todo por transmitirme nuevos conocimientos y motivarme a seguir con mis estudios y cada una de mis metas.

Le agradezco también a mi co-asesor, el Dr. José Guadalupe Flores Muñiz por su gran ayuda, consejos y sugerencias, por su tiempo y todos los consejos y conocimientos brindados a lo largo de la elaboración de esta tesis.

Al Dr. Vitaliy Kalashnikov por sus apoyo y comentarios en esta tesis.

Agradezco al Concejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca proporcionada la cual fue una gran ayuda a lo largo de la maestría.

También a los maestros que me dieron clases en la licenciatura y a lo largo de la maestría, así como a mis compañeros y amigos por su comprensión y apoyo durante mi estancia en la maestría.

Agradezco también a mi familia, a mi mama la Sra. Esther González Sánchez, a mi hermano Freddy Osorio González quien siempre me ha brindado su apoyo incondicional a lo largo de mi vida, por alentarme a superarme a pesar de todos los obstáculos que se me presenten, por quererme.

A mis amados abuelos Martha Sánchez Catarina y Rosendo González Sánchez, quien han sido una parte importante en lo largo de mi vida, ya que ellos me han enseñado que *no importa la edad siempre se puedo lograr todo lo que nos propongamos, la importancia del respeto, honestidad. Sin olvidar a mis tíos Nicolas González Sanchez quien a sido como un segundo padre para mi, y me ha motivado a seguir estudiando y ser una profesional.*

A mi amado novio Erik Daniel Hernández Carrillo quien me ha brindado su apoyo y a estado conmigo apoyándome y motivándome a no rendirme y lograr todas mis metas.

A todos ustedes, Muchas Gracias.

Capítulo 1
Introducción

1.1 Motivación

La motivación es principalmente el gusto por el área de Investigación de Operaciones, por lo que decidí conocer en más detallé la teoría de juegos razón por la que elegí escribir la tesis con la Dra. Nataliya Kalashnykova quien trabaja en esta área.

1.2 Objetivo

La Dra. Kalashnykova me propuso para mi tesis considerar el problema siguiente: *¿Cómo de manera racionable gestionar el sistema "Productor - Intermediario - Mercado" tomando en cuenta que el comportamiento racional de los agentes del sistema está restringido o limitado y su conciencia es asimétrica?*

La formación de la red intermedia no siempre es mutuamente beneficiosa para los fabricantes y los intermediarios. A menudo este proceso va acompañado de conflictos entre ellos y entre los intermediarios de la misma red. El fabricante está interesado en maximizar las ventas y minimizar el riesgo y, por lo tanto, en el caso de una coyuntura favorable, tiende a aumentar el número de intermediarios que trabajan en este mercado. El intermediario, en contrario, está interesado en el mantenimiento exclusivo del territorio. Por lo tanto, es muy importante mantener el nivel óptimo de desarrollo del sistema en su conjunto, en el cual asegura un equilibrio de intereses de los participantes del mercado. Para analizar más a fondo el problema de formar una red de mediación la Dra. Kalashnykova me propuso considerar el sistema "Productor - Intermediario - Mercado" como un juego y realizar investigación matemática con el siguiente **objetivo principal**:

Proponer la variedad más amplia posible de los modelos matemáticos para la búsqueda de diferentes posibles equilibrios de tal sistema y sus análisis.

En general, no somos los matemáticos los que tomamos la decisión que obtenemos en un modelo como óptima para una situación en la vida real, por ejemplo, en economía tales decisiones en general son tomados por expertos - economistas. Pero ellos toman sus decisiones basando sobre los resultados de experimentos numéricos utilizando los modelos propuestos por nosotros, los matemáticos.

El primer paso de mi trabajo con el tema propuesto fue el estudio de la teoría relacionada con el problema.

1.3 Marco Teórico

El término “juego”, en lenguaje habitual, se refiere al desarrollo de una situación de interacción entre diferentes individuos, sujeto a unas reglas específicas, y a la que se asocian unos pagos determinados por los diferentes posibles resultados. En nuestro caso, un juego se refiere esencialmente a la misma idea. Es decir, una situación de conflicto entre dos o más personas, en la que cada concursante, jugador o participante tiene cierto control, pero no total, sobre el resultado del conflicto. Asumimos que todos los jugadores tienen un conocimiento completo de todas las acciones, movimientos u opciones disponibles para ellos y sus oponentes, y conocimiento de los resultados del conflicto asociado con cualquier selección de acciones.

Suponiendo que cada jugador actúa racionalmente para maximizar su ganancia, nuestro problema básico es desarrollar una teoría que nos ayude a comprender y predecir el comportamiento humano o los fenómenos económicos. Sin embargo, como veremos, la traducción del enunciado “cada jugador actúa racionalmente para maximizar su ganancia” en términos matemáticos no siempre es sencilla, pero puede dar lugar a diversas interpretaciones, enfoques y soluciones de un juego. Esto contrasta con la situación de la programación lineal, en la que los problemas de optimización conducen a una teoría bien definida y generalmente aceptada.

En un juego dependiendo de la estrategia o conjetura, el juego tiene una solución o soluciones diferentes, lo que buscamos nosotros es investigar si existe una manera óptima de jugar ese juego.

Por esta razón empezamos a estudiar diferentes tipos de conjeturas, para encontrar cuales son las más adecuadas a utilizarse en el problema propuesto en esta tesis, a continuación, hacemos mención de diferentes tipos de conjeturas (o equilibrios) los cuales consideramos más interesantes.

1.3.1 Equilibrio en sentido de Pareto

En Hernández-Lerma (2005) para un juego cooperativo los jugadores desean cooperar para alcanzar un resultado que, en algún sentido, sea benéfico para todos ellos. Por el contrario, en un juego no cooperativo, los jugadores no hacen acuerdos para cooperar, más bien, actúan de manera independiente y sólo se preocupan por alcanzar sus objetivos individuales. Para juegos dinámicos cooperativos nos restringimos al caso más común y más estudiado el equilibrio de Pareto.

En el trabajo de Blanco and Sam (2014) se menciona que el economista italiano Wilfredo Pareto (1938), formuló una serie de principios (que han imperado en la sociedad) que definen el Óptimo de Pareto, además, según Millar y Meiners (1989), Pareto señala que "cualquier cambio de situación afectaría a una economía sin perjudicar a otra, es decir, las situaciones son eficientes, si al haber un cambio de esa situación, se beneficia a alguno, sin perjudicar a otro".

De acuerdo con lo anterior, en el modelo propuesto en esta tesis este caso no es muy real, ya que los intermediarios actúan independientemente y sólo se preocupan por alcanzar sus objetivos individuales.

1.3.2 Equilibrio de Cournot

Uno de los primeros investigadores que desarrolló modelos de oligopolio fue Cournot en 1838. En el modelo de Cournot las firmas deciden la cantidad a producir (sin saber o sin considerar) la producción de la otra firma. Cada una de las empresas maximiza su beneficio suponiendo que la cantidad producida por su rival permanece constante. Sus cantidades afectan el precio pera la cantidad del rival no afecta la suya.

En el capitulo 4 de esta tesis aplicamos el modelo de Cournot y será explicando en más detalle.

1.3.3 Equilibrio conjeturado

Los *equilibrios de variación conjetural* (CVE por sus siglas en inglés) fueron definidos por Bowley (1924) y Frisch (1933) en donde definen otro concepto para entender y dar una solución posible a los juegos estáticos. En este concepto los jugadores elijen su estrategia óptima tomando en cuenta que la estrategia de cada rival es una función conjeturada de su propia estrategia.

En los trabajos de Kalashnikov and Kalashnikov (2005), Bulavsky and Kalashnikov (1994b) y Bulavsky and Kalashnikov (1995b) se fueron investigando nuevas formas de definir los equilibrios de variaciones conjeturadas para los modelos de oligopolio clásico.

Cuando se estudia el mercado de oligopolios bajo el enfoque de los modelos clásicos, en adición a las preguntas de la existencia de un equilibrio y la forma de calcularlo, es de especial interés compararlo con los equilibrios de Cournot y competencia perfecta. En las obras de Kalashnikov and Kalashnikov (2005), Bulavsky and Kalashnikov (1994b) y Bulavsky and Kalashnikov (1995b) ambos modelos fueron incluidos en una clase uniforme de modelos de oligopolios en los cuales el grado de influencia de cada agente se modela por un parámetro especial (llamado coeficiente de influencia). En más detalle, en lugar de la hipótesis clásica de Cournot, se asume que cada productor utiliza una conjetura sobre las variaciones del volumen total de mercado en función de las variaciones (infinitesimales) de su propia producción de la siguiente manera:

$$G_i(\eta) = G + (\eta - q_i)\omega_i(G, q_i) \tag{1}$$

en donde:

- G es el volumen total de producción del mercado;

- q_i es la cantidad producida actualmente por el productor i;

- η es la cantidad esperada para producir por el productor i;

- $G_i(\eta)$ es el volumen total conjeturado por el agente i por el cambio de su volumen de producción q_i a η.

La función de la conjetura $\omega_i(G, q_i)$ en la formula (1) representa el coeficiente de influencia del productor i. En el modelo clásico de Cournot este coeficiente es igual a 1 y en el modelo de competencia perfecta es igual a cero. Bajo suposiciones muy generales se ha demostrado la existencia y unicidad de dichos equilibrios.

Un enfoque completamente nuevo fue propuesto por Bulavsky (1997), donde supone que cada jugador hace conjeturas, no sobre las variaciones del volumen total de mercado, sino sobre las variaciones del precio del mercado en función de las variaciones de su propia producción. Con este cambio la conjetura fue denotada por ν_i y se obtiene una relación simple con la notación anterior ω_i:

$$\omega_i = -\frac{\nu_i}{p'(G)}, i = 1, 2, \ldots, n$$

Una vez que se conocen las conjeturas de todas las firmas (a las cuales también se les llaman coeficientes de influencia), cada firma realiza un procedimiento de verificación y comprueba si su coeficiente de influencia es coherente con el de los demás o no. La situación cuando los coeficientes de influencia de todas firmas son coherentes entre si es considerado como un equilibrio, estos coeficientes de influencia se llaman consistentes y el equilibrio con conjeturas consistentes es llamado equilibrio consistente con variaciones conjeturadas (CCVE por sus siglas en inglés).

Esto nos lleva a las siguientes preguntas:

¿Cuál es la diferencia principal entre el equilibrio consistente con variaciones conjeturales (CCVE) y el equilibrio clásico Cournot - Nash?

En el modelo clásico de Cournot-Nash cada agente supone que solo él puede cambiar su volumen de producción q_i y los demás no, es decir su conjetura es $\omega_i = -\dfrac{\partial G}{\partial q_i} = 1$. En contraste con el modelo de Cournot - Nash, en el caso de CCVE, los coeficientes de influencia ν_i se encuentran como una solución de un sistema de ecuaciones.

¿Por qué los modelos con el equilibrio consistente de variaciones conjeturales (CCVE) son interesantes?

1.- Los modelos con equilibrios conjeturales forman una clase uniforme. Dentro de esta clase están los modelos de Cournot y competencia perfecta, es decir, este concepto es más general que el equilibrio de Cournot - Nash.

2.- En muchas aplicaciones, los modelos de CCVE nos dan resultados más eficientes y atractivos que los modelos clásicos (ver Liu et al. (2007) y Kalashnikov et al. (2011)). En particular, cuando se aplica el concepto de CCVE a un mercado de electricidad (ver Kalashnikov et al. (2011)), el equilibrio consistente conjeturado conduce a mejores resultados para los productores y consumidores.

1.3.4 Equilibrio de Stackelberg

En los trabajos Hernández-Lerma (2005), Pereyra and Triunfo (1999), Church and Ware (2000) se habla acerca del equilibrio de Stackelberg. Los juegos de Stackelberg fueron introducidos por el economista austriaco H. von Stackelberg en 1934, además, desarrolló un modelo donde las empresas toman sus decisiones secuencialmente.

En este modelo existe una firma llamada líder que decide la cantidad a producir, y el resto de las firmas, a quienes se les llama seguidores observan la cantidad producida por el líder y deciden la suya. Los seguidores buscan la respuesta óptima a las reglas del líder. El modelo supone que el líder conoce la función de costos de los seguidores, y este es capaz de prever con precisión la reacción del seguidor ante cada posible nivel de producción que el decide.

El seguidor puede no conocer la función de costos del líder, pero esto no influye en la solución del modelo, ya que esta solución se basa en que el líder es capaz de prever con precisión la reacción de los seguidores ante cada posible nivel de producción que el decida. Si el líder y los seguidores conocen la función de la demanda es posible saber (para el volumen total de producción) el precio del mercado.

En el modelo de Stackelberg, los agentes actúan racionalmente y se llega a un equilibrio en el que todas las firmas toman decisiones de producción con las que están satisfechas.

El juego de Stackelberg es parecido al juego de Cournot en el sentido que todas las empresas compiten por la producción que enviaran al mercado, pero ambos modelos difieren en la forma de tomar esta decisión. En el juego de Cournot, las empresas eligen sus productos de manera simultánea, mientras que en el juego de Stackelberg, el volumen de producción se elige de forma jerárquica.

1.3.5 Competencia perfecta

En Méndez and Silvestre (1989) se menciona que la definición de Competencia perfecta tiene varios supuestos los cuales deben cumplirse para indicar que una empresa se encuentra dentro de este tipo de organización. Los supuestos principales son:

- Las empresas son tan pequeñas que no tienen influencia sobre el precio final del producto en el mercado.

- Los productos de todas las empresas son homogéneos o idénticos.

- La industria presenta libre entrada y salida de empresas. - Existe libre movilidad de los recursos para trasladarlos a otras actividades.

- Los participantes cuentan con información perfecta y un conocimiento completo del futuro.

En Church and Ware (2000), los cuatro supuestos estándar del modelo de competencia perfecta son:

1. Las economías de escala son pequeñas en relación con el tamaño del mercado. Esto significa que los costos promedio aumentarán rápidamente si una empresa aumen-

ta la producción más allá de una cantidad relativamente pequeña. En consecuencia, en una industria perfectamente competitiva habrá un gran número de vendedores. También asumimos que hay muchos compradores, cada uno de los cuales exige solo un pequeño porcentaje de la demanda total.

2. Los productos son homogéneos. Es decir, los consumidores no pueden distinguir entre productos producidos por diferentes empresas.

3. La información es perfecta. Todas las empresas están plenamente informadas sobre sus posibilidades de producción y los consumidores son plenamente conscientes de sus alternativas.

4. No hay barreras de entrada o salida. Esto significa que el número de empresas en la industria se ajusta con el tiempo para que todas las empresas obtengan beneficios económicos nulos o una tasa de rendimiento competitiva.

Los supuestos 1 a 3 implican un comportamiento de toma de precios. Los tomadores de precios creen o actúan como si pudieran vender o comprar tanto o tan poco como quieran sin afectar el precio. En efecto, actúan como si los precios fueran independientes de su comportamiento.

En de España (2012), bajo el supuesto de competencia perfecta, los precios vienen determinados principalmente por los costes laborales unitarios (CLU), por lo que el análisis de la competitividad se realiza frecuentemente a partir de la comparación internacional de CLU. No obstante, el modelo de competencia perfecta no resulta muy adecuado para caracterizar muchos mercados internacionales, en los que se intercambian variedades diferenciadas de productos que compiten en precio y calidad, y, por tanto, se aproximan más a una situación de competencia monopolística.

En una empresa perfectamente competitiva en equilibrio, el valor del coste marginal es el mismo para todas las empresas. En una empresa perfectamente competitiva con libre entrada y salida, cada empresa tendrá beneficio económico nulo en el equilibrio a largo plazo.

El equilibrio de mercado a largo plazo de una industria perfectamente competitiva es eficiente: no hay transacciones mutuamente beneficiosas que queden por explotar.

1.4 Revisión de literatura

Para analizar más a fondo el problema de formar una red de mediación, se necesita investigación matemática.

En la literatura sobre el equilibrio de intereses en un modelo de este tipo, el modelo de Cournot ocupa el primer lugar. Al mismo tiempo, varios autores atribuyeron mayor importancia a varios aspectos de la aplicación del modelo de Cournot. Diferentes autores usan el modelo de Cournot de diferentes maneras. Por ejemplo, en Dusouchet (2006), Kolemaev (1998), McManus (1962), McMANUS (1964) y Roberts and Sonnenschein (1976) los autores consideran el modelo donde todos participantes del mercado son semejantes. Otros autores investigan el mercado donde los participantes no son semejantes, utilizando unas suposiciones para la función inversa de la demanda, las funciones de los gastos y las funciones objetivos de los participantes (véase, Frank and Quandt (1963), Novshek (1985), Okuquchi (1973), Ruffin (1971), Szidarovszky and Yakowitz (1977)).En los trabajos de Bulavsky and Kalashnikov (1994b), Harker (1984), Harker and Choi (1991), Metzler et al. (2003), Novshek (1985), Okuquchi (1973) y Roberts and Sonnenschein (1976), los autores ponen más atención a los métodos de la búsqueda del equilibrio de Cournot.

En un número significativo de publicaciones, además del modelo de Cournot, se introduce un modelo de una empresa que actúa de acuerdo con reglas especiales (véase, Bulavsky and Kalashnikov (1994b), Algazin and Algazina (2006), Algazin and Algazina (2009), Bulavsky and Kalashnikov (1995a), Kolemaev (1998), Harker and Choi (1991) y Sherali et al. (1983)). A diferencia de las firmas de Cournot, esta compañía (llamada el líder) posee la posibilidad de tomar la primera decisión, maximiza su propio beneficio, mientras que explícitamente toma en cuenta la reacción de otras firmas al cambiar su comportamiento. Esta compañía líder también se llama firma - Stackelberg, dado que Stackelberg fue el primero en introducir un modelo con un comportamiento de este tipo (véase, Stackelberg (1934)). Las empresas restantes, como antes, maximizan sus propias ganancias basadas en el principio de inmutabilidad de Cournot - Nash.

En el enfoque clásico, los principios de comportamiento de Cournot y Stackelberg se aplican a los fabricantes. Pero en esta tesis estos principios se implementan en relación con los intermediarios. En lugar del sistema tradicional “Productor - Mercado” en esta tesis se considera el sistema “Productor - Intermediarios - Mercado”. Esta idea ha sido propuesta en trabajos anteriores tales como Algazin and Algazina (2006), Algazin and Algazina (2009) y Hegji and Moore (2006).

En esta tesis consideramos que el fabricante puede afectar significativamente al mercado, teniendo este la capacidad de regular a través del precio de oferta de su producto (utilizando un parámetro k) el número de intermediarios en el mercado y sus actividades.

El fabricante, que actúa como vendedor, está interesado en vender sus productos al precio máximo. El intermediario, que actúa como comprador y vendedor, está interesado en comprar los productos del fabricante a un precio más bajo y venderlos en el mercado al precio máximo. El conflicto de intereses de los agentes económicos, la competitividad del mercado y la racionalidad del comportamiento de los agentes limitada por estos factores, además su conciencia asimétrica, determinan la elección de los mecanismos para la interacción de los agentes económicos dentro del mercado.

En los modelos de Cournot y Stackerberg se tiene una producción mayor que en un modelo monopolístico (colusión) en tanto que existe cierta competencia entre las firmas. En el caso Cournot la situación es más próxima al monopolio que en Stackerberg, es decir, el modelo de Stackerberg está más próximo a la competencia. El resultado desde el punto de vista social es que es menos ineficiente que los duopolistas sean competidores de Stackerberg a que sean competidores de Cournot.

Es mejor para la empresa ser líder de Stackerberg a ser competidor de Cournot, y esta última opción a ser seguidor de Stackerberg. Para hacer esta comparación se deben comparar los beneficios de cada firma.

Basándonos sobre el análisis de la literatura relacionada con el problema de esta tesis, propusimos el modelo matemático descrito en la siguiente sección.

Capítulo 2
Descripción del modelo

En este modelo consideraremos un fragmento del mercado de oligopolio clásico de un producto homogéneo formado por un fabricante y sus n distribuidores, con $n \geq 1$. El intermediario vende los productos al consumidor a un precio p (precio del mercado), comprándolos al fabricante a un precio $(1-k)p$. Por lo tanto, el valor de kp es la diferencia entre el precio de oferta del fabricante y el precio de oferta en este mercado. Esta diferencia forma el ingreso del intermediario.

El *objetivo del fabricante* es elegir Q y el parámetro k maximizando su función de utilidad neta:

$$\begin{cases} \max\limits_{Q,k} \pi(p,Q,k) = (1-k)pQ - f(Q) \\ Q \geq 0 \\ k \in [0,1] \end{cases} \tag{2}$$

El *objetivo del intermediario* i, $i = 1, \ldots, n$, es elegir q_i maximizando su función de utilidad neta:

$$\max_{q_i \geq 0} \pi_i(p, q_i, k) = kpq_i - f(q_i), \quad i = 1, \ldots, n \tag{3}$$

Donde

q_i - es el volumen del producto vendido por el intermediario i,

$Q = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i$ - es el volumen total de bienes producidos, que luego son plenamente vendidos a través de intermediarios del mercado,

$f(Q)$ - es la función de gastos del fabricante,

$f_i(q_i)$ es la función de los gastos del intermediario i.

Es importante tener en cuenta que en este modelo el valor del parámetro k está determinado por el fabricante y es evidente que en el caso si $k = 0$ (o muy pequeña) la ganancia de los intermediarios no es positiva y entonces, el sistema "Productor - Intermediario - Mercado" no va a funcionar, lo mismo pasa en el caso si $k = 1$ (o muy cercana a 1), ya que en este caso el fabricante no tiene ganancia positiva.

El equilibrio entre la demanda $G(p)$ y los suministros para el precio p está dado por la siguiente ecuación de balance

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i = G(p) \tag{4}$$

Para el modelo asumiremos los siguientes supuestos para la función de la demanda y las funciones de los gastos:

Escribir las suposiciones así:

A1. *La función de demanda pasiva $G(p)$ está definida para los precios $p \in (0, +\infty)$ y es igual a*

$$G(p) = \begin{cases} -Kp + T, & si\ 0 < p \leq \frac{T}{K} \\ 0, & si\ p \geq \frac{T}{K} \end{cases} \tag{5}$$

donde $K > 0$ y $T > 0$.

A2. *Las funciones de costos $f(Q)$ y $f_i(q_i)$, $i = 1, \ldots, n$, son cuadráticas, es decir,*

$$f(Q) = \frac{1}{2}aQ^2 + bQ \tag{6}$$

$$f(q_i) = \frac{1}{2}a_i q_i^2 + b_i q_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{7}$$

donde $a > 0, b > 0$ y $a_i > 0, b_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n$

Para el modelo propuesto, el fabricante utiliza el modelo de Stackelberg, siendo este el líder y los intermediarios los seguidores. Pero en un entorno competitivo, cada intermediario para determinar su estrategia debe tener en cuenta el comportamiento de los demás intermediarios. Dependiendo de la situación real en el mercado los intermediarios entre sí pueden aplicar diferentes tipos de conjeturas. En esta tesis consideraremos varios casos, en la sección 3 los intermediarios aplican el concepto de equilibrio conjeturado en el enfoque propuesto por Bulavsky (1997), en la sección 4 aplican la conjetura de Cournot, en la sección 5 aplican la conjetura de competencia perfecta y en la sección 6 aplican el modelo de Stackelberg.

Capítulo 3

Equilibrio Conjeturado

Consideramos el sistema “Productor - Intermediario - Mercado” con el número de intermediarios $n \geq 2$. Suponemos que los intermediarios aplican las conjeturas de equilibrio conjeturado en el enfoque de Bulavsky (1997), es decir, que cada intermediario asume que la decisión de sus volúmenes de producto vendido q_i afectará el precio p del mercado. En este caso la condición necesaria de optimalidad de primer orden para los intermediarios $(i = 1, \ldots, n)$ toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_i} = kp + kq_i \frac{\partial p}{\partial q_i} - f_i'(q_i) \begin{cases} = 0, & \text{si} \quad q_i > 0; \\ \leq 0, & \text{si} \quad q_i = 0; \end{cases} \tag{8}$$

Para describir el comportamiento de los intermediarios necesitamos evaluar el comportamiento de la derivada $\dfrac{\partial p}{\partial q_i} = -\nu_i$ antes de la dependencia de p sobre q_i. Aquí, introducimos el signo de negativo para poder trabajar con los valores no negativos de ν_i. La dependencia p respecto a q_i debe probar (al menos localmente) la concavidad del beneficio del $i-esimo$ intermediario en función de su propia producción q_i. De otra manera no podemos garantizar que el beneficio sea maximizado. Como hemos supuesto que las funciones de costo $f_i(q_i)$ son cuadráticas y estrictamente convexas, entonces, para comprobar la concavidad de la función $\pi_i(q_i)$, $i = 1, \ldots, n$, es suficiente verificar la concavidad del producto $p \cdot q_i$. Si asumimos que el coeficiente ν_i, llamado **coeficiente de influencia** del intermediario $i - esimo$, es no negativo y constante, entonces, la dependencia local de la utilidad neta $\pi_i(q_i)$ respecto al volumen de producto vendido η_i tiene la forma

$$\hat{\pi}(\eta_i; q_i) = k[p - \nu_i(\eta_i - q_i)]\eta_i - \frac{1}{2} a_i \eta_i^2 - b_i \eta i,$$

la cual es una función cuadrática con su coeficiente principal negativo, es decir, cóncava.

Entonces, la condición (8) para $\eta_i = q_i$ se reescribe de la siguiente manera:

$$\begin{cases} kp = k\nu_i q_i + b_i + a_i q_i, & \text{si} \quad q_i > 0; \\ kp \le q_i, & \text{si} \quad q_i = 0; \end{cases} para \quad i = 1, \ldots, n \tag{9}$$

y es una condición necesaria y suficiente.

Si las conjeturas de los intermediarios son dadas exógenamente tal como en los trabajos de (Bulavsky and Kalashnikov (1994b), Bulavsky and Kalashnikov (1995b)) , entonces los valores ν_i, en general, dependen del volumen q_i para cada intermediario i, del precio del mercado p , es decir, son funciones de q_i y p, pero, puede ser que ν_i también dependa del volumen total del mercado y del parámetro k. Sin embargo, en este trabajo usaremos el enfoque propuesto por Bulavsky (1997), donde las conjeturas ν_i están incluidas en el equilibrio y son determinadas simultáneamente con el precio p y los volúmenes del producto vendido q_i. En el último caso, los coeficientes de influencia son parámetros escalares determinados sólo por el equilibrio. Más adelante tal equilibrio es descrito por el vector $(p, q_1, \ldots, q_n, \nu_1, \ldots, \nu_n)$ y se llama **interior**.

3.1 Equilibrio exterior

Para poder proseguir con lo anterior necesitamos definir otra noción de equilibrio llamado **exterior** (Bulavsky (1997)) donde los coeficientes de influencia $\nu_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$, están dados de forma exógena.

En el modelo propuesto en Bulavsky (1997) se considera la demanda de dos tipos: la demanda activa $D \ge 0$, la cual no depende del precio p, y la demanda pasiva $G(p)$, la cual depende del precio y satisface la suposición siguiente:

A. *La función de la demanda $G(p)$, $p \in (0, +\infty)$ es positiva y continuamente diferenciable con la derivada $G'(p) < 0$.*

La ecuación de balance en Bulavsky (1997) se escribe de la siguiente manera

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i = G(p) + D, \tag{10}$$

la cual en el caso si la demanda activa $D = 0$ coincide con la ecuación de la demanda (4) en el modelo propuesto en esta tesis. Es evidente, que la función de la demanda $G(p)$, considerada en nuestro modelo, no cumple la suposición **A**. Más adelante vamos a ver que este detalle no perjudica la aplicación del concepto de equilibrio consistente en el enfoque de Bulavsky para los intermediarios en nuestro modelo.

Definición 1. *El vector* $(p, q_1, \ldots, q_n)$ *es llamado* ***equilibrio exterior****, para los coeficientes de influencia* $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ *si el mercado es balanceado, es decir, la condición (10) se satisface, y para cada intermediario la condición (9) es válida.*

A continuación, vamos a considerar solo el caso en el que el conjunto de intermediarios está fijo, es decir, no depende de los valores de los coeficientes de influencia ν_i. Para eso suponemos lo siguiente:

A3. *Para el precio* $kp_0 = \max\limits_{1 \le j \le n} b_j$*, la siguiente desigualdad se cumple*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{kp_0 - b_i}{a_i} < G(kp_0) \tag{11}$$

Para el modelo propuesto en esta tesis, este supuesto **A3** sólo puede cumplirse si (cómo se mencionó al inicio de la sección 2) el valor del parámetro k no es muy cercano a cero, específicamente, el supuesto **A3** sólo puede ser cumplido si

$$k \in \left(\frac{Kkp_0}{T - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{kp_0 - b_i}{a_i}}, 1 \right]. \tag{12}$$

Nota: Es importante mencionar que, en la desigualdad (11) y el intervalo definido en (12), el valor kp_0 definido en el supuesto **A3** es una constante independientemente del valor del parámetro k.

La suposición **A3**, junto con las suposiciones **A** y **A2**, garantiza que para todos los valores no negativos de ν_i, $i = 1, \ldots, n$, existe una solución óptima para la condición (9) que satisface la ecuación de balance (10), es decir, un equilibrio exterior. Además, las condiciones (10) y (9) se cumplen simultáneamente si y solo si $p > p_0$, esto es, si y solo si todos los volúmenes del producto vendido q_i son estrictamente positivos para todos los intermediarios $i = 1, \ldots, n$. En efecto, si $p > p_0$, entonces la desigualdad $kp \le b_i$, $i = 1, \ldots, n$, dada por (9) no es posible, lo que significa que todos q_i, $i = 1, \ldots, n$, son positivos. Si todos volúmenes del producto vendido $q_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, entonces para la condición dada por (9) tenemos que

$$kp = k\nu_i q_i + b_i + a_i q_i > b_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

Entonces, tomando en cuenta que $k \neq 0$, tenemos que $kp > \max_{1 \leq j \leq n} b_j = kp_0$ y entonces, $p > p_0$.

En Bulavsky (1997) ha sido mostrado la existencia y unicidad del equilibrio exterior bajo las suposiciones **A**, **A2** y **A3**. Por la importancia de este resultado colocamos en esta tesis la formulación del teorema y su demostración:

Teorema 1. *(Bulavsky (1997)) Bajo las suposiciones **A**, **A2** y **A3**, para cualesquiera $D \geq 0$, $\nu_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, existe un único equilibrio exterior $(p, q_1, \dots, q_n)$, que depende continuamente de los parámetros $(D, \nu_1, \dots, \nu_n)$. El precio del equilibrio $p = p(D, \nu_1, \dots, \nu_n)$ como función de esos parámetros es diferenciable respecto a D y ν_i, $i = 1, \dots, n$. Además, $p(D, \nu_1, \dots, \nu_n) > p_0$ y*

$$\frac{\partial p}{\partial D} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{k}{k\nu_i + a_i} + G'(p)} \tag{13}$$

Demostración. Ver apéndice 9.1.

Comentario 1. En el modelo presentado en esta tesis la demanda activa es $D = 0$ y la demanda $G(p)$ no es diferenciable en el punto $p = \frac{T}{K}$, por lo que no cumple la suposición **A**. Pero de los pasos de la demostración del Teorema 1 está claro que para cualesquiera coeficientes de influencia $\nu_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, el precio del equilibrio exterior se encuentra dentro del intervalo $p_0 < p^*(0, \nu_1, \dots, \nu_n) < \frac{T}{K}$, y dentro de este intervalo la función $G(p)$ considerada en nuestro modelo cumple la suposición **A**.

3.2 Equilibrio interior

Para poder describir el equilibrio interior, primero describiremos el procedimiento de verificación de los coeficientes de influencia ν_i descrito por Bulavsky (1997). Supongamos que tenemos un equilibrio exterior $(p, q_1, \dots, q_n)$ que ocurrió para algunos $(\nu_1, \dots, \nu_n)$ y una D. Uno de los intermediarios, digamos el k, temporalmente cambia su comportamiento absteniéndose de maximizar sus ganancias y haciendo pequeñas variaciones sobre su volumen del producto vendido q_k. En términos matemáticos esto es equivalente a restringir el conjunto de intermediarios al subconjunto $i \neq k$ con el volumen de producción q_k sustraído desde la demanda activa D. La variación del volumen del producto vendido por el intermediario k es equivalente a la variación de la demanda activa en la forma

$D_k = D - q_k$, es decir,

$$\frac{\partial p}{\partial D_k} = \frac{\partial p}{\partial (D - q_k)} = -\frac{\partial p}{\partial q_k}$$

Si consideramos que estas variaciones son infinitesimales, entonces, el intermediario k puede estimar la derivada del precio del equilibrio p con respecto a la demanda activa D, es decir, sus coeficientes de influencia.

Aplicamos la formula (13) del Teorema 1, recordando que el intermediario k esta temporalmente ausente del modelo, por lo tanto, debemos excluir de la suma el término con $i = k$. Teniendo esto a considerar, se obtiene el siguiente criterio de consistencia para los coeficientes de influencia de intermediarios para el modelo presentado en esta tesis.

Criterio de Consistencia: *Dado un equilibrio exterior $(p, q_1, \ldots, q_n)$, los coeficientes de influencia ν_i, $i = 1, \ldots, n$ se referirán como* ***consistentes*** *si las siguientes ecuaciones se cumplen:*

$$\nu_i = \frac{1}{\displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{k}{k\nu_j + a_j} + K}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{14}$$

Ahora podemos definir con detalle que es un equilibrio interior para nuestro modelo.

Definición 2. *El vector $(p, q_1, \ldots, q_n, \nu_1, \ldots, \nu_n)$ donde $\nu_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, es un* ***equilibrio interior*** *si el vector $(p, q_1, \ldots, q_n)$ es el equilibrio exterior para los coeficientes de influencia dados $\nu_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, y el criterio de consistencia se satisface para todo i*

Vamos a mostrar que el equilibrio interior para el modelo presentado existe y es único.

Teorema 2. *Bajo las suposiciones **A**, **A2** y **A3**, existe un único equilibrio interior.*

Demostración. Ver apéndice 9.2.

Con esto, la aplicación del concepto de equilibrio conjeturado consistente en el enfoque de Bulavsky está justificada.

Después de hallar la solución del sistema (14) encontramos los demás parámetros del equilibrio consistente para los intermediarios. Tomando en cuenta que el fabricante siempre aplica la conjetura de Stackelberg, encontramos todos los parámetros del equilibrio para nuestro modelo:

$$p^* = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{k\nu_i^* + a_i} + T}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{k}{k\nu_i^* + a_i} + K} \tag{15}$$

$$q_i^* = \frac{kp^* - b_i}{k\nu_i^* + a_i}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{16}$$

$$Q^* = \sum_{i=1}^{n} q_i^* \tag{17}$$

$$\pi_i^*(q_i^*) = kp^* q_i^* - \frac{1}{2} a_i (q_i^*)^2 - b_i q_i^*, \quad i = 1, \ldots, n \tag{18}$$

$$\pi^*(k; Q^*) = (1-k)p^* Q^* - \frac{1}{2} a (Q^*)^2 - bQ^* \tag{19}$$

$$\sigma_i^* = (1-k)p^* q_i^*, \quad i = 1, \ldots, n \tag{20}$$

De lo anterior, σ_i^* es el valor de los productos comprados por el intermediario i del fabricante. En teoría la siguiente magnitud $\sigma_i^* \times \dfrac{k}{1-k}$ puede interpretarse como estimulación, es decir, remuneración pagada por el fabricante al intermediario.

Comentario 2. El análisis teórico cualitativo del modelo presentado en esta sección no es simple, por lo que lo dejaremos para trabajos futuros.

3.3 Experimentos numéricos

Para los experimentos numéricos utilizaremos los datos del artículo Liu et al. (2007). La función de la demanda inversa está dada por

$$p(G) = 50 - 0.02Q.$$

Los valores para los parámetros de las funciones de los costos

$$f_i(q_i) = \frac{1}{2} a_i q_i^2 + b_i q_i, \quad (i = 1, \ldots, 6)$$

están dados en la Tabla 1:

Firma	1	2	3	4	5	6
a_i	2	1.75	3	3	1	3.25
b_i	0.02	0.0175	0.025	0.025	0.0625	0.00834

Tabla 1:

Los coeficientes de influencia se determinan para el CCVE mediante la fórmula obtenida en este trabajo (14).

Experimento:
La firma $i = 1$ representa al fabricante y las firmas $i = 2, \ldots, 6$ son los intermediarios.

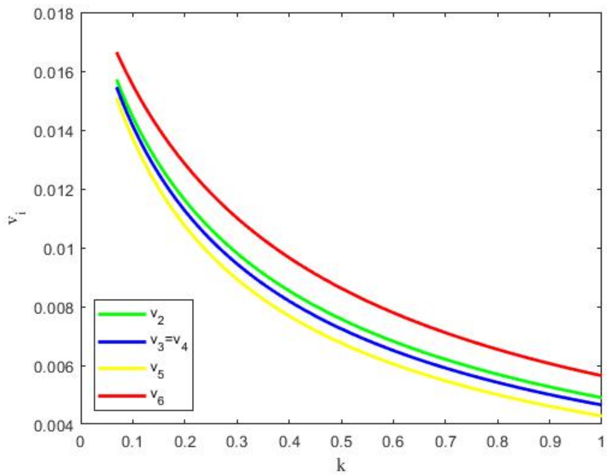

Figura 1: Coeficientes de influencia

En la Figura 1 vemos que el coeficiente de influencia de los intermediarios es decreciente con respecto a k. El intermediario $i = 6$ (color rojo) tiene el mayor coeficiente de influencia para cualquier k, mientras que el intermediario $i = 5$ (color amarillo) tiene el menor coeficiente influencia.

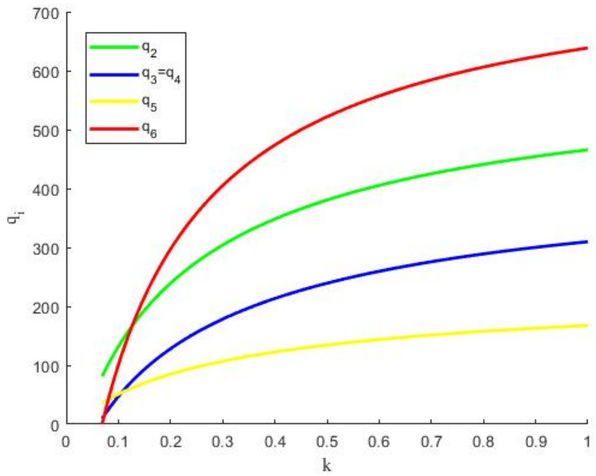

Figura 2: Volumen de producción q_i

En la Figura 2 vemos que si k es muy pequeña (cercana al 0) los volúmenes de producción de los intermediarios son bajos y van creciendo conforme la k se acerca a 1, siendo estos crecientes respecto k.

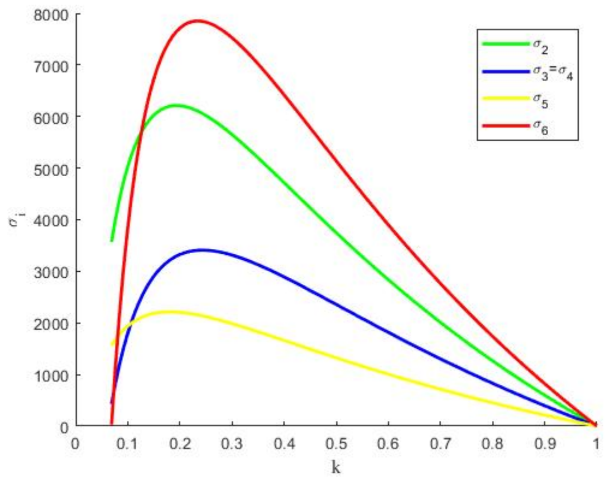

Figura 3: Valor de los productos comprados por el intermediario i del fabricante

En la Figura 3 se muestra lo que gastan los intermediarios al comprarle al fabricante. Podemos ver que cuando el valor de k es cercano a 0, el valor de los productos comprados al fabricante es muy bajo ya que los intermediarios se quedan con una parte muy pequeña de esta ganancia y no les conviene comprar mucho producto. De la misma manera cuando k es cercano a 1, el valor de los productos comprados al fabricante también es muy bajo dado que los intermediarios se quedan con la mayoría de las ganancias. De aquí podemos ver que el valor óptimo de k para el fabricante no puede ser cercano a cero ni cercano a uno, sino un valor intermedio.

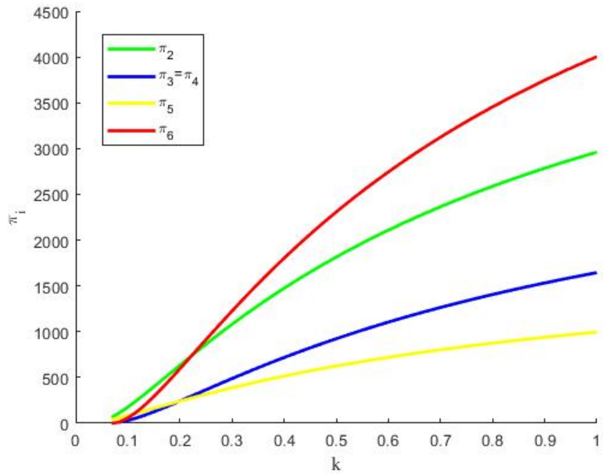

Figura 4: Beneficio de los intermediarios

En la Figura 4 vemos que, entre menor sea el valor k, menor será el beneficio para cada uno de los intermediarios, y por el contrario, si la k es muy cercana a 1 su beneficio será mucho mayor, siendo la función de beneficio creciente respecto a k para todos los intermediarios. Además, vemos que el productor $i = 6$ (con el coeficiente de influencia más grande) presenta un crecimiento más pronunciado en comparación con los demás, mientras que el productor $i = 5$ (con el coeficiente de influencia más pequeño) tiene un crecimiento poco notable en comparación con los demás.

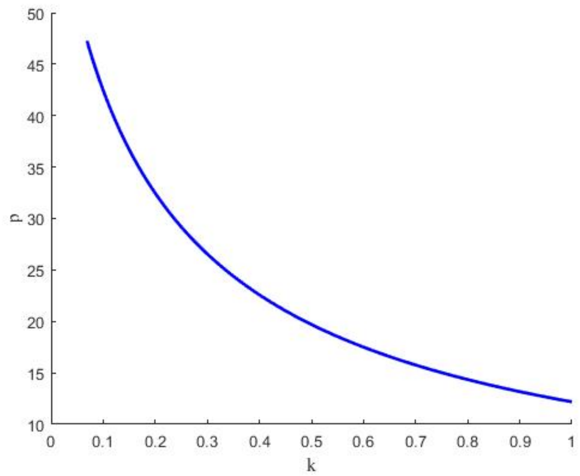

Figura 5: Precio

En la Figura 5 podemos notar que el precio del mercado es decreciente respecto a k, siendo que mientras menor sea el costo del producto comprado al fabricante por los intermediarios, menor será el precio al que necesitan vender el producto a los consumidores para maximizar sus beneficios.

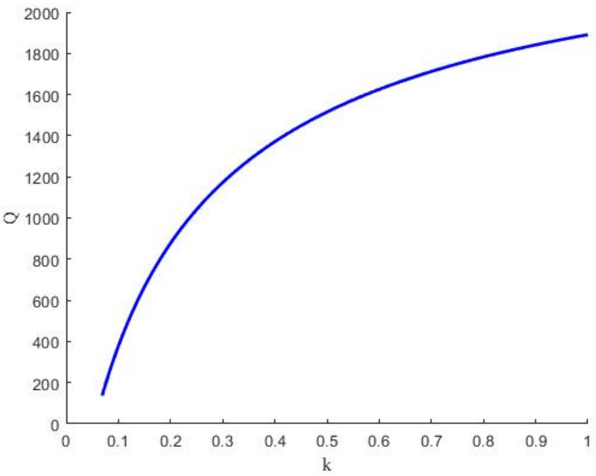

Figura 6: Volumen total

En la Figura 6 vemos que el volumen total de producción es creciente con respecto a k, lo es consecuencia del comportamiento decreciente del precio, dado que mientras menor sea el precio, mayor será la demanda, que en nuestro modelo coincide con el volumen total de producción.

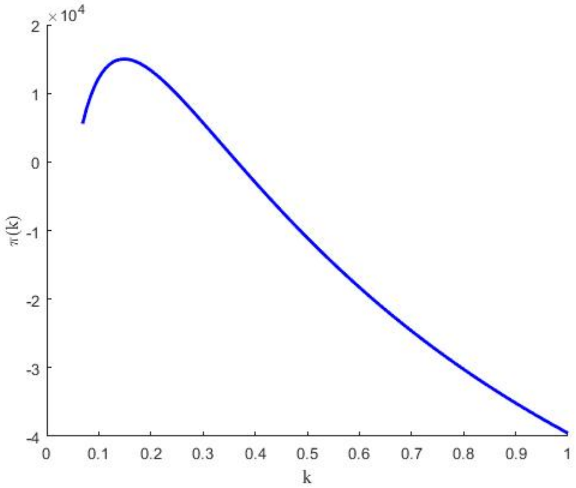

Figura 7: Beneficio del fabricante

De la Figura 7 vemos que el valor óptimo del parámetro k para el fabricante está en el intervalo $0.1 < k < 0.2$. Además, podemos encontrar este valor óptimo utilizando un algoritmo de bisección.

La solución óptima para este **experimento** es:

i	k	Beneficio π	Volumen total Q	Precio p
1	0.1487154	14995.51	659.0858	36.81828

Tabla 2: Para el fabricante

k	i	ν_i	q_i	π_i	σ_i
0.1487154	2	0.01288019	191.88020	392.6821	6014.071
	3	0.01253722	92.14575	121.9665	2888.109
	4	0.01253722	92.14575	121.9665	2888.109
	5	0.01205035	69.61119	160.1126	2181.812
	6	0.01407573	213.30280	284.9672	6685.516

Tabla 3: Para los intermediarios

Capítulo 4
Equilibrio de Cournot

4.1 Descripción del modelo

En un entorno competitivo, cada empresa para determinar su estrategia de mercado debe tener en cuenta el comportamiento de los competidores. Para comprender el comportamiento de las empresas competidoras, Cournot propuso Cournot (1838) hacer un supuesto simple con respecto a la reacción de cada empresa al comportamiento de los competidores, cada empresa actuará como si no esperara que sus competidores cambien la producción, incluso si lo hacen.

Utilizando el supuesto de Cournot, asumiremos que cada empresa intermediaria establece su volumen de ventas como si esperara que los otros intermediarios dejen sus volúmenes de venta sin cambios.

Tomando en cuenta la formula (1), la cual establece la relación entre la conjetura en sentido de Cournot $\dfrac{\partial G}{\partial q_i} = \omega_i = 1$, y la conjetura conjeturada en el sentido de Bulavsky $\dfrac{\partial p}{\partial q_i} = -\nu_i$, el modelo de Cournot está presentado en el modelo de equilibrio conjeturado en el capítulo 3 como el equilibrio exterior para los intermediarios si ellos toman las conjeturas

$$\nu_i = -\frac{\partial p}{\partial q_i} = \frac{\partial p}{\partial G}\frac{\partial G}{\partial q_i} = -\frac{1}{G'(p)}\frac{\partial G}{\partial q_i} = \frac{1}{K}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Por esto, la solución para el modelo de Cournot en el nivel inferior de los intermediarios la podemos obtener utilizando las fórmulas (15) - (20), cambiando ν_i^*, $i = 1, \ldots, n$, por $\nu_i = \frac{1}{K}$, $i = 1, \ldots, n$, y vamos a denotar con el superíndice "C" los resultados obtenidos para el equilibrio de Cournot:

$$p^C = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{\frac{k}{K} + a_i} + T}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{k}{\frac{k}{K} + a_i} + K} \tag{21}$$

$$q_i^C = \frac{kp^C - b_i}{\frac{k}{K} + a_i}, \quad i = 1, \dots, n \tag{22}$$

$$Q^C = \sum_{i=1}^{n} q_i^C \tag{23}$$

$$\pi_i^C(q_i^C) = kp^C q_i^C - \frac{1}{2}a_i(q_i^C)^2 - b_i q_i^C, \quad i = 1, \dots, n \tag{24}$$

$$\pi^C(k; Q^C) = (1-k)p^C Q^C - \frac{1}{2}a(Q^C)^2 - bQ^C \tag{25}$$

$$\sigma_i^C = (1-k)p^C q_i^C, \quad i = 1, \dots, n \tag{26}$$

Es fácil ver que el equilibrio de Cournot no coincide con el equilibrio conjeturado consistente, pues los coeficientes de influencia $\nu_i = \frac{1}{K}$, $i = 1, \dots, n$, no cumplen el sistema de ecuaciones (14) del criterio de consistencia.

4.2 Experimentos numéricos

Para los experimentos numéricos aplicamos los mismos datos utilizados para el experimento en la sección 3.3. El valor óptimo k lo encontramos como antes, suponiendo que el fabricante aplica la conjetura de Stackelberg.

Experimento:
La firma $i = 1$ representa al fabricante y las firmas $i = 2, \dots, 6$ son los intermediarios.

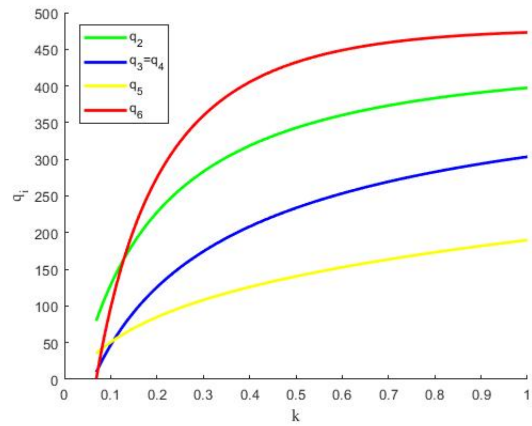

Figura 8: Volumen de producción q_i

En la Figura 8 vemos que al igual que antes, los volúmenes de producción de los intermediarios son crecientes respecto a k.

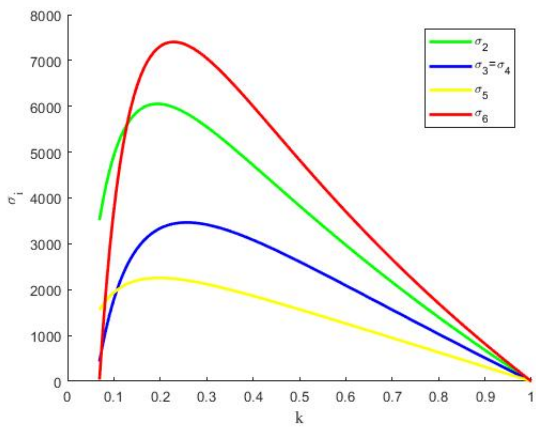

Figura 9: Valor de los productos comprados por el intermediario i del fabricante

En la Figura 9 también vemos que el valor de los productos comprados al fabricante por los intermediarios es muy parecido a lo que sucede en el equilibrio conjeturado.

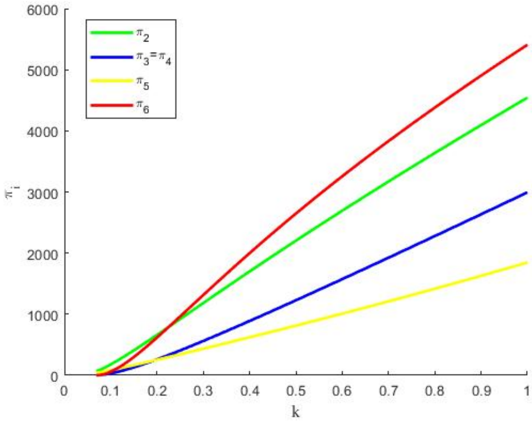

Figura 10: Beneficio de los intermediarios

En la Figura 10 vemos que (al igual que en el equilibrio conjeturado) el beneficio de los intermediarios sigue siendo creciente respecto a k, más aún, para cada uno de los intermediarios, podemos ver que la razón de cambio de este beneficio es mayor que en el equilibrio conjeturado, pero aun así, el intermediario $i = 6$ (con el mayor coeficiente de influencia en el equilibrio conjeturado) tiene la mayor ganancia cuando k no es cercana a cero, mientras que el intermediario $i = 5$ (con el menor coeficiente de influencia en el equilibrio conjeturado) tiene la menor ganancia cuando k no es cercana a cero.

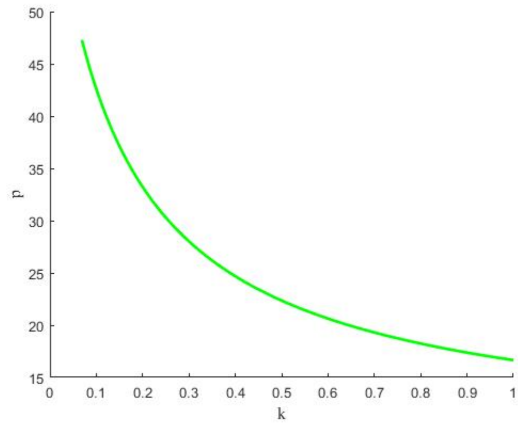

Figura 11: Precio

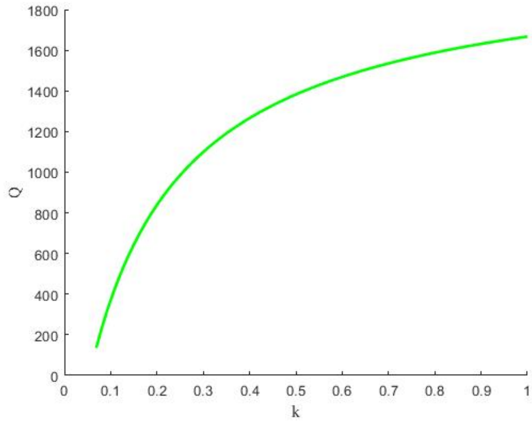

Figura 12: Volumen total

En las Figuras 11 y Figura 12 de nuevo podemos notar que el precio del mercado es decreciente respecto a k, mientras que el volumen total de producción es creciente respecto a k.

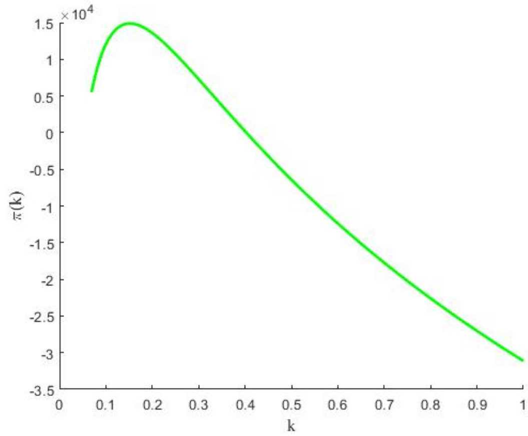

Figura 13: Beneficio del fabricante

De la Figura 13 vemos que el valor óptimo del parámetro k para el fabricante está en el intervalo $0.1 < k < 0.2$, el cual, de nuevo podemos encontrar utilizando un algoritmo de bisección.

La solución óptima para este experimento es:

i	k	Beneficio π	Volumen total Q	Precio p
1	0.1514625	14885.11	650.5199	36.9896

Tabla 4: Para el fabricante

k	i	ν_i	q_i	π_i	σ_i
0.1514625	2	0.0200	187.66090	414.8253	5890.125
	3	0.0200	92.85078	133.8818	2914.313
	4	0.0200	92.85078	133.8818	2914.313
	5	0.0200	70.23638	169.1047	2204.514
	6	0.0200	206.92110	308.2455	6494.645

Tabla 5: Para los intermediarios

Capítulo 5

Equilibrio de Competencia Perfecta

5.1 Descripción del modelo

El modelo de competencia perfecta $\dfrac{\partial G}{\partial q_i} = \omega_i = 0$ está presentado en el modelo de equilibrio conjeturado del capítulo 3 como el equilibrio exterior para los intermediarios si ellos toman las conjeturas

$$\nu_i = -\frac{\partial p}{\partial q_i} = \frac{\partial p}{\partial G}\frac{\partial G}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Este supuesto se utiliza cuando el número de intermediarios es bastante grande, de tal manera que los intermediarios pueden suponer que los cambios en sus volúmenes de producción no afectarán el precio del mercado. De nuevo, la solución para el modelo de competencia perfecta en el nivel inferior de los intermediarios la podemos obtener utilizando las fórmulas (15) - (20), tomando $\nu_i^* = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Vamos a notar esta solución con el superíndice "CP'':

$$p^{CP} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i} + T}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{k}{a_i} + K} \tag{27}$$

$$q_i^{CP} = \frac{kp^{CP} - b_i}{a_i}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{28}$$

$$Q^{CP} = \sum_{i=1}^{n} q_i^{CP} \tag{29}$$

$$\pi_i^{CP}(q_i^{CP}) = kp^{CP}q_i^{CP} - \frac{1}{2}a_i(q_i^{CP})^2 - b_i q_i^{CP}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{30}$$

$$\pi^{CP}(k; Q^{CP}) = (1-k)p^{CP}Q^{CP} - \frac{1}{2}a(Q^{CP})^2 - bQ^{CP} \tag{31}$$

$$\sigma_i^{CP} = (1-k)p^{CP}q_i^{CP}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{32}$$

De nuevo, podemos ver fácilmente que el equilibrio de consistencia perfecta no coincide con el equilibrio conjeturado consistente, dado que los coeficientes de influencia $\nu_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, no cumplen el sistema de ecuaciones (14) del criterio de consistencia.

5.2 Experimentos numéricos

Para los experimentos numéricos aplicamos los mismos datos utilizados para el experimento en la sección 3.3. El valor óptimo k lo encontramos como antes, suponiendo que el fabricante aplica la conjetura de Stackelberg.

Experimento:
La firma $i = 1$ representa al fabricante y las firmas $i = 2, \ldots, 6$ son los intermediarios.

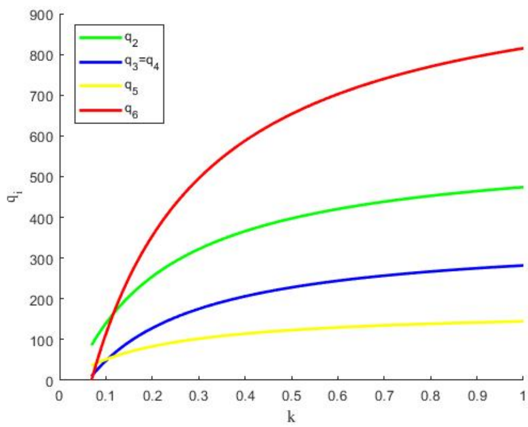

Figura 14: Volumen de producción q_i

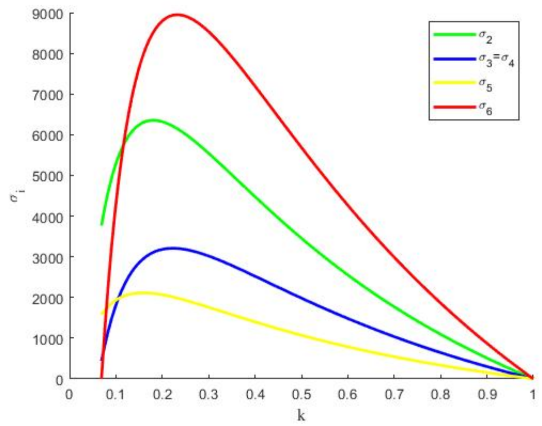

Figura 15: Valor de los productos comprados por el intermediario i del fabricante

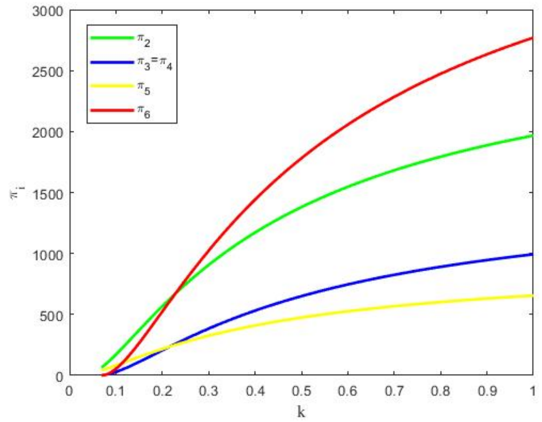

Figura 16: Beneficio de los intermediarios

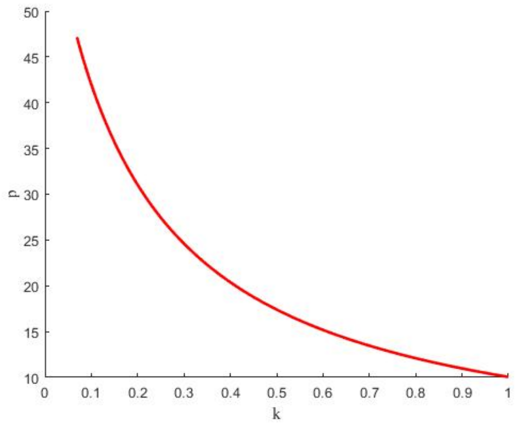

Figura 17: Precio

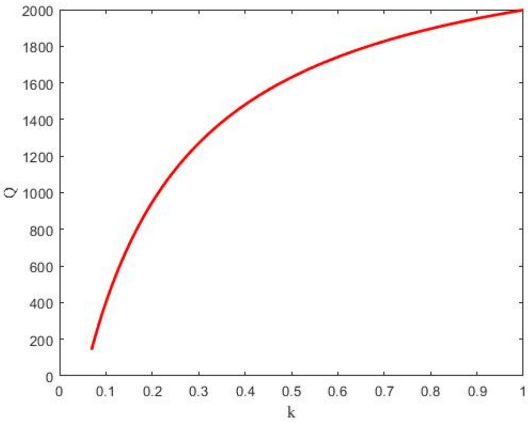

Figura 18: Volumen total

En las Figuras 14 a 18 vemos que las funciones del volumen de producción, el valor de los productos y beneficio para los intermediarios tienen el mismo comportamiento que en los modelos anteriores. Además, en la Figura 18, seguimos observando que (cuando k no es cercano a 0) la mayor ganancia la obtiene el intermediario $i = 6$ mientras que la menor ganancia la obtiene el intermediario $i = 5$.

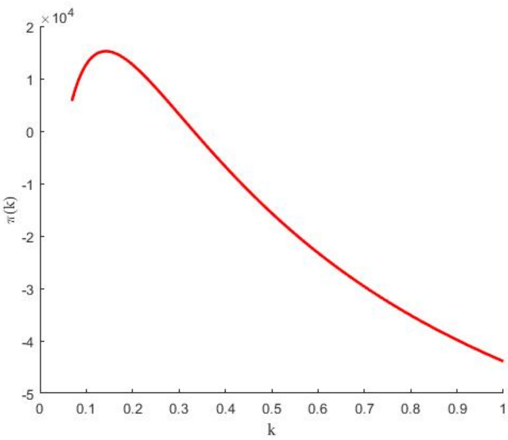

Figura 19: Beneficio del fabricante

De la Figura 19 vemos que el valor óptimo del parámetro k para el fabricante está en el intervalo $0.1 < k < 0.2$. De nuevo, podemos encontrar este valor óptimo utilizando un algoritmo de bisección.

La solución óptima para este experimento es:

i	k	Beneficio π	Volumen total Q	Precio p
1	0.1420868	15219.39	672.3978	36.55204

Tabla 6: Para el fabricante

k	i	ν_i	q_i	π_i	σ_i
0.1420868	2	0	196.77490	338.80330	6170.564
	3	0	87.74246	96.23423	2751.470
	4	0	87.74246	96.23423	2751.470
	5	0	67.09698	140.68770	2104.060
	6	0	233.04090	226.46470	7307.810

Tabla 7: Para los intermediarios

Capítulo 6
Equilibrio de Stackelberg

6.1 Descripción del modelo

Supongamos que el primer intermediario $i = 1$ es líder y que los demás intermediarios $i = 2, \ldots, n$, son sus seguidores, los cuales se compartan según el modelo Conjeturado. Entonces, el equilibrio de los intermediarios está dado por el problema binivel (33)-(35):

$$\max_{q_1 \geq 0} \pi_1(p, q_1, k) = kpq_1 - f(q_1) \tag{33}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} &\max_{q_i \geq 0} \pi_i(p, q_i, k) = kpq_i - f(q_i), \quad \forall i = 2, \ldots, n \\ &\quad \text{sujeto a:} \end{aligned} \tag{34}$$

$$\sum_{i=2}^{n} q_i = G(p) - q_1 \tag{35}$$

Si suponemos que se cumplan los axiomas **A**, **A2** y **A3**, la solución del problema (34)-(35), es decir, la respuesta óptima de los intermediarios $i = 2, \ldots, n$, para cualquier valor fijo q_1, se puede encontrar fácilmente aplicando los resultados del capítulo 3 con pequeños cambios en las fórmulas.

El criterio de consistencia para los intermediarios seguidores está dado por:

$$\nu_i^S = \frac{1}{\displaystyle\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{n} \frac{k}{k\nu_j^S + a_j} + K}, \quad i = 2, \ldots, n \tag{36}$$

El equilibrio exterior está dado por:

$$q_i^S = \frac{kp^S - b_i}{k\nu_i^S + a_i}, \quad i = 2, \ldots, n \tag{37}$$

$$p^S = \frac{\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{b_i}{k\nu_i^S + a_i} + T - q_1}{\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{k}{k\nu_i^S + a_i} + K} \tag{38}$$

Después, el intermediario i=1 sustituye la respuesta óptima (37)-(38) en su función objetivo:

$$\hat{\pi}_1 = \hat{\pi}_1(q_1) = \hat{\pi}_1(p^S, q_1, k) = kp^S q_1 - \frac{1}{2}a_i q_1^2 - b_i q_1$$

y busca el máximo respecto a q_1 utilizando el criterio de la primera derivada

$$\frac{\partial \hat{\pi}}{\partial q_1} = kp^S + kq_1 \frac{dp^S}{dq_1} - a_1 q_1 - b_1 = 0 \tag{39}$$

Utilizando la regla de la cadena, de (38) obtenemos que

$$\frac{dp^S}{dq_1} = \frac{\partial p^S}{\partial q_1} + \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial p^S}{\partial \nu_i^S} \frac{\partial \nu_i^S}{\partial q_1}$$

Además, podemos ver que el sistema de ecuaciones (36) no depende de q_1, por lo que su solución $(\nu_2^S, \ldots, \nu_n^S)$ tampoco depende de q_1, lo que implica que $\dfrac{\partial \nu_i^S}{\partial q_1} = 0$ para todo $i = 2, \ldots, n$. Entonces,

$$\frac{dp^S}{dq_1} = \frac{\partial p^S}{\partial q_1}.$$

Utilizando la fórmula del teorema 1, obtenemos que

$$\frac{dp^S}{dq_1} = -\frac{1}{\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{k\nu_i^S + a_i} + K}, \quad i = 2, \ldots, n. \tag{40}$$

Algo importante que hacemos notar aquí, es que, aunque el intermediario líder $i = 1$ está afuera del equilibrio conjeturado formado por los intermediarios seguidores $i = 2, \ldots, n$, podemos definir su coeficiente de influencia como $\nu_1^S = -\dfrac{dp^S}{dq_1}$. De esta manera, de la igualdad (40) podemos observar que el coeficiente de influencia del intermediario líder sigue siendo consistente con los coeficientes de influencia de los intermediarios seguidores en el sentido definido por Bulavsky. Por otra parte, de las identidades (36) vemos que los coeficientes de influencia de los intermediarios seguidores sólo son consistentes entre ellos, sin tomar en cuenta el valor del coeficiente de influencia del intermediario líder, dado que este elije su producción antes que los demás. De aquí podemos observar que el equilibrio de Stackelberg no puede coincidir con el equilibrio conjeturado definido por Bulavsky.

Aún así, en el experimento numérico no vamos a considerar el valor del coeficiente de influencia del intermediario líder, dado que este elge su producción antes que los demás. Ahora, aplicando las identidades (38) y (40), la condición necesaria de primer order (39) se reescribe como:

$$k\left(\frac{\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{b_i}{k\nu_i^S+a_i}+T-q_1}{\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{k}{k\nu_i^S+a_i}+K}\right)+\frac{kq_1}{\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{k}{k\nu_i^S+a_i}+K}-a_1q_1-b_1=0$$

de donde podemos despejar fácilmente q_1.

Entonces, la producción óptima para el intermediario $i=1$ que elige su volumen antes que los demás (es decir, esta fuera del equilibrio de Conjeturado) es

$$q_1=\frac{k\left(\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{b_i}{k\nu_i^S+a_i}+T\right)-b_1\left(\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{k}{k\nu_i^S+a_i}+K\right)}{2k+a_1\left(\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\frac{k}{k\nu_i^S+a_i}+K\right)}$$

El fabricante siempre aplica el modelo de Stackelberg.

6.2 Experimentos numéricos

Para este último experimento, el supuesto **A3** sólo puede cumplirse para el conjunto de intermediarios que actúan como seguidores, además, el intervalo del parámetro k para el cual este el supuesto **A3** es válido, depende de la selección del volumen de producción del intermediario líder. Reformular el supuesto **A3** para que sea válido de nuevo para todos los seguidores puede ser algo complicado, por esta razón, para este experimento decidimos buscar, de forma numérica, el equilibrio para cada uno de los valores del parámetro k, permitiendo que los intermediarios pudieran tener un volumen de producción nulo.

Experimento:
La firma $i=1$ representa al fabricante, la firma $i=2$ representa al intermediario que actúa como líder y las firmas $i=3,\dots,6$ son los intermediarios que actúan como seguidores.

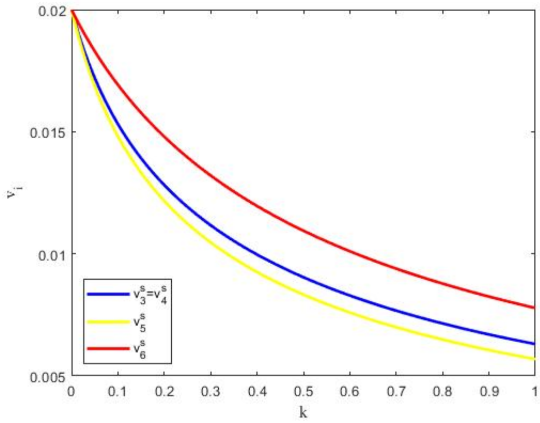

Figura 20: Coeficientes de influencia

En la Figura 20 vemos que los coeficientes de influencia de los intermediarios que actúan cómo seguidores siguen siendo decrecientes con respecto a k. El intermediario $i = 6$ sigue teniendo el mayor coeficiente de influencia y el intermediario $i = 5$ sigue teniendo el menor coeficiente influencia.

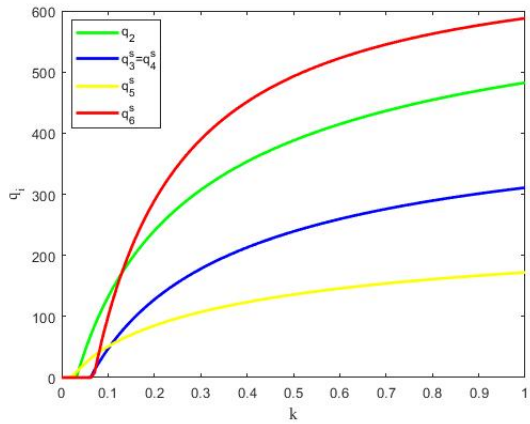

Figura 21: Volumen de producción q_i

En la Figura 21 vemos que el volumen de producción de todos los intermediarios sigue siendo creciente respecto a k, con la diferencia que estos dejan de ser funciones diferenciables, más aun, también dejan de ser funciones cóncavas (aunque sigue siendo continuas), cómo consecuencia de que ya no se cumple el supuesto **A3**.

En trabajos futuros se planea reformular el supuesto **A3** para este caso binivel, garantizando la diferenciación y concavidad de estas funciones, de lo contrario la formulación y demostración de resultados teóricos para este equilibrio se complican demasiado cuando la cantidad de intermediarios es mayor a 2.

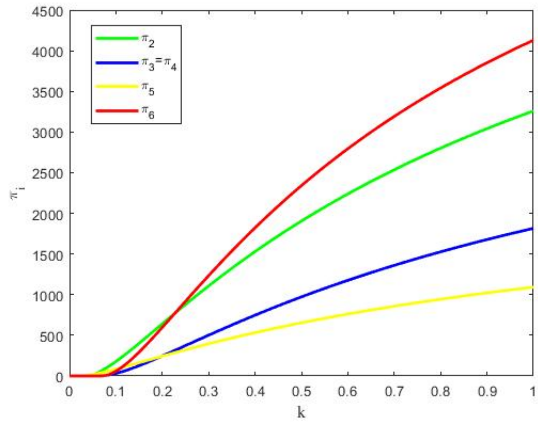

Figura 22: Beneficio de los intermediarios

En la Figura 22 volvemos a ver las funciones de beneficio de los intermediarios siguen teniendo el mismo comportamiento creciente respecto a k, con la diferencia que estas ya no son diferenciables ni cóncavas por lo mismo mencionado anteriormente. Aun así, seguimos observando que el intermediario $i = 6$ sigue siendo el que presenta el mayor incremento en la razón de cambio de su beneficio, mientras que el intermediario $i = 5$ sigue teniendo una razón de cambio en su beneficio menor a la de los otros intermediarios.

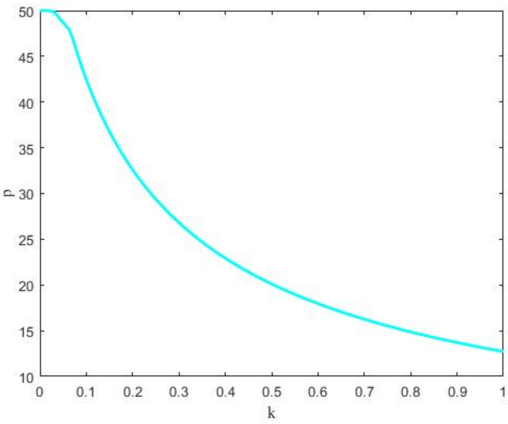

Figura 23: Precio

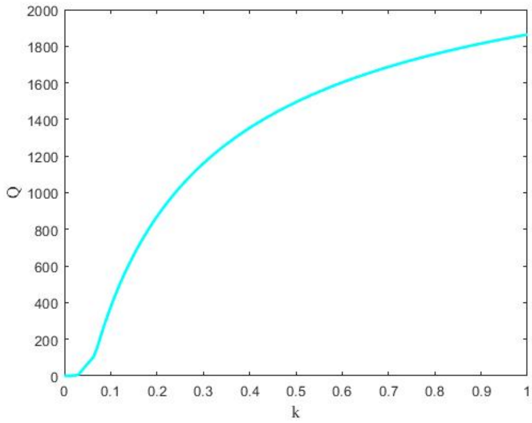

Figura 24: Volumen total

En las Figuras 23 y 24 vemos que las funciones de precio del mercado y volumen total de producción siguen siendo decreciente y creciente, respectivamente, respecto a k (aunque ya no son diferenciables y pierden su convexidad/concavidad).

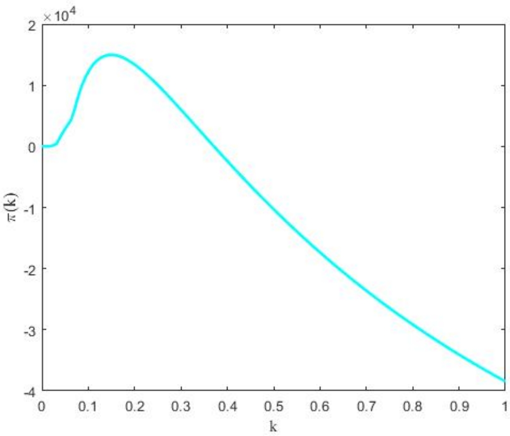

Figura 25: Beneficio del fabricante

De la Figura 25 vemos que el valor óptimo del parámetro k para el fabricante está en el intervalo $0.1 < k < 0.2$. Aunque la función de beneficio del fabricante ya no es diferenciable, aún podemos encontramos el valor óptimo de k utilizando un algoritmo de bisección.

La solución óptima para este experimento es:

i	k	Beneficio π	Volumen total Q	Precio p
1	0.1492321	14975.33	657.5483	36.84903

Tabla 8: Para el fabricante

k	i	ν_i	q_i	π_i
0.1492321	2	N/A	192.9435	397.6185
	3	0.01393207	92.2873	124.1695
	4	0.01393207	92.2873	124.1695
	5	0.01333799	69.76316	161.7779
	6	0.01578882	210.2671	288.5378

Tabla 9: Para los intermediarios

Capítulo 7

Comparación de los resultados numéricos para los 4 modelos

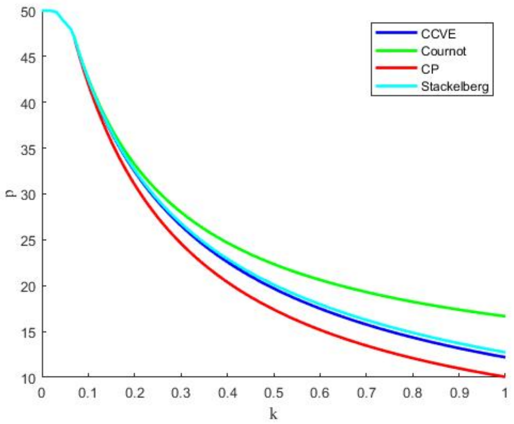

Figura 26: Precio

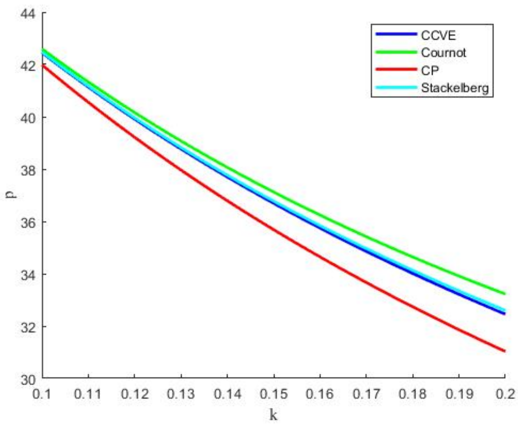

Figura 27: Precio

En las Figuras 26 y Figuras 27 podemos ver que, independientemente de parámetro k, el precio del mercado es el más grande cuando los intermediarios están en un equilibrio de Cournot, seguido por los equilibrios de Stackelberg, conjetural consistente y competencia perfecta, siendo este último el caso en el que aparece el precio más bajo.

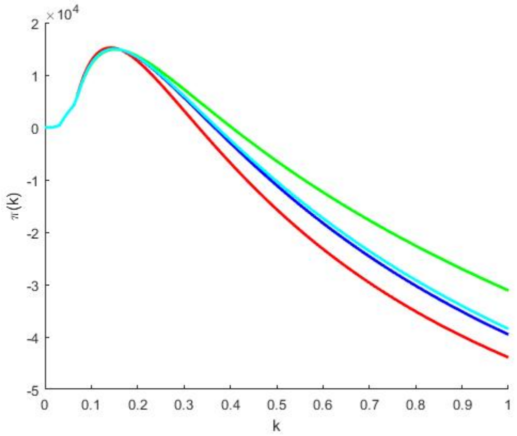

Figura 28: Beneficio del fabricante

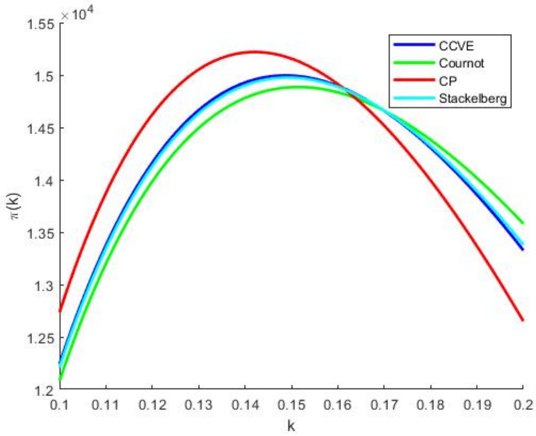

Figura 29: Beneficio del fabricante

De la Figura 29 vemos que el fabricante, eligiendo el valor de k óptimo, recibe un mejor beneficio cuando los intermediarios están en un equilibrio de competencia perfecta, seguido por los equilibrios conjetural consistente, Stackelberg y Cournot, siendo este último el que genera el beneficio más bajo. Esto mismo se ve reflejado en el valor óptimo de k, siendo este el más pequeño cuando los intermediarios están en un equilibrio de competencia perfecta (por lo que el fabricante se queda con una mayor ganancia) y el más grande cuando los intermediarios están en un equilibrio de Cournot.

Por el contrario, de la Figura 28, vemos que cuando el valor de k se acerca a 1, este comportamiento se invierte, pues el fabricante presenta mejores ganancias cuando los intermediarios están en un equilibrio de Cournot, seguido por los equilibrios de Stackelberg, conjetural consistente y competencia perfecta.

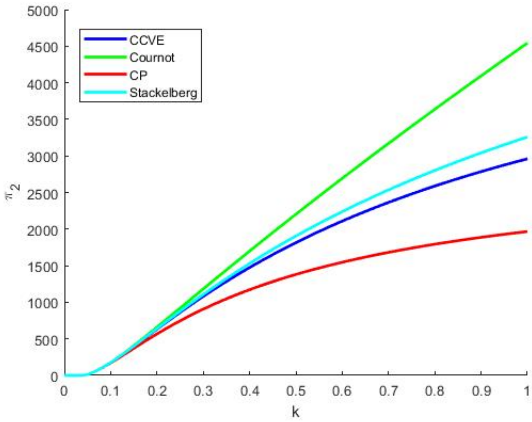

Figura 30: Beneficio del intermediario $i = 2$

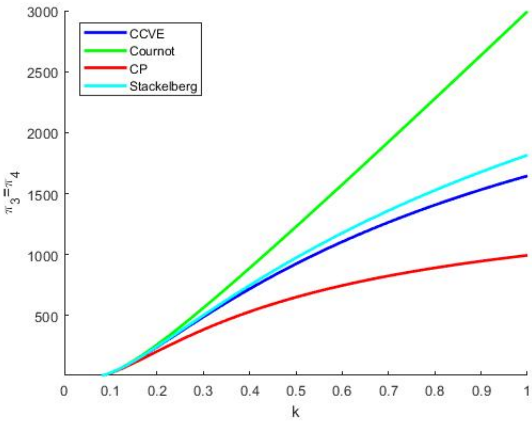

Figura 31: Beneficio del intermediario $i = 3 = 4$

En las figuras 30 y 31 podemos ver que los intermediarios obtienen el mejor beneficio cuando se encuentras en un equilibrio de Cournot, seguido por los equilibrios de Stackelberg (independientemente si actúan cómo lideres o seguidores), conjeturado consistente y competencia perfecta, siendo este último que presenta el beneficio más bajo para todos los intermediarios. Esto mismo se puede apreciar en las Tablas 2 a 10.

Capítulo 8

Conclusiones y Trabajo a Futuro

En esta tesis analizamos un modelo binivel de mercado con una estructura de "Fabricante - Intermediario - Mercado", donde el fabricante siempre actúa cómo el líder y sus seguidores (los intermediarios) buscan un estado de equilibrio. Dependiendo de la situación real en el mercado, los intermediarios pueden comportarse de una u otra manera, por lo que modelamos la búsqueda del equilibrio en el nivel inferior de los seguidores de 4 maneras diferentes, suponiendo que los intermediarios se comportan según las conjeturas de Cournot, competencia perfecta, Stackelberg o Bulavsky.

Se presentaron los resultados teóricos del equilibrio en el nivel inferior cuando los intermediarios adoptan las conjeturas de Cournot, competencia perfecta y Bulavsky. Para el caso cuando los intermediarios adoptan la conjetura de Stackleber, se presentó la descripción de cómo hallar el estado de equilibrio, aunque sin una demostración estricta.

Finalmente, se halló el equilibrio de Stackelber para el nivel superior (donde el Fabricante toma el papel del líder) y se mostraron algunos experimentos numéricos comparando los 4 modelos que surgen de las diferentes conjeturas que pueden tomar los seguidores.

En estos experimentos numéricos podemos ver que el modelo más beneficioso para el fabricante y los consumidores es el correspondiente al caso cuando los intermediarios están en un equilibrio de competencia perfecta, seguido por los equilibrios conjetural consistente, Stackelberg y Cournot, siendo este último el menos beneficioso para ambos, el fabricante y los consumidores. En contraste con esto, el modelo más beneficioso para los intermediarios es el correspondiente al caso cuando estos están en un equilibrio de Cournot, seguido por los equilibrios de Stackelberg, conjeturado consistente y competencia perfecta, siendo este último el menos beneficioso para todos los intermediarios.

Esto coincide con la realidad pues es bien sabido que los modelos de Cournot y competencia perfecta son los 2 casos extremos, siendo el equilibrio de Cournot el mejor modelo para los productores y el equilibrio de competencia perfecta el mejor modelo para los consumidores, mientras que el equilibrio conjeturado consistente es algo intermedio entre Cournot y competencia perfecta.

Algo interesante que podemos observar es que el equilibrio de Stackelberg (para los intermediarios) también está presente como algo intermedio entre Cournot y competencia perfecta, aun así, el equilibrio de Stackelberg sigue siendo más beneficioso para los productores (los intermediarios) en comparación con el equilibrio conjetural consistente dado que el equilibrio de Stackelberg está más cercano al caso monopolístico.

Una explicación simple para este resultado podría ser que cuando los intermediarios se encuentran en un equilibrio de competencia perfecta, el precio que aparece en el mercado es el más bajo, lo que implica que el volumen total de producción será el más grande en comparación con los otros 3 modelos, lo que implica una mayor ganancia para el productor.

Como trabajo futuro dejamos la formulación del supuesto **A3** para el caso cuando los intermediarios actúan bajo conjetura de Stackelberg, justo con los resultados teóricos del estado de equilibrio correspondiente.

También está planeado obtener resultados teóricos del análisis comparativo entre los 4 equilibrios presentados en esta tesis.

Seguir trabajando con el sistema Productor - Intermediario - Mercado y elaborar un trabajo con modelos más sofisticado y con modelos de mercados de bienes más reales. Es una inscripción ideal para mercados de bienes muy lujosos con nivel de precios muy altos. Puede aplicarse, por ejemplo, al mercado de los Ferrari, ya que en este caso no es un problema de producción, ni tampoco es un problema clásico de precio-demanda. Es más un problema de advertencia, prestigió e influencia de los agentes de venta, su conexión a la clase de las multimillonarias. Donde las diferentes agencias tienen un nivel de impacto muy diferentes.

Capítulo 9

Apéndices

9.1 Demostración del Teorema 1

Teorema 1. *(Bulavsky (1997)) Bajo las suposiciones* ***A****,* ***A2*** *y* ***A3****, para cualesquiera* $D \geq 0$*,* $\nu_i \geq 0$*,* $i = 1, \ldots, n$*, existe un único equilibrio exterior* $(p, q_1, \ldots, q_n)$*, que depende continuamente de los parámetros* $(D, \nu_1, \ldots, \nu_n)$*. El precio del equilibrio* $p = p(D, \nu_1, \ldots, \nu_n)$ *como función de esos parámetros es diferenciable respecto a* D *y* ν_i*,* $i = 1, \ldots, n$*. Además,* $p(D, \nu_1, \ldots, \nu_n) > p_0$ *y*

$$\frac{\partial p}{\partial D} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{k}{k\nu_i + a_i} + G'(p)} \tag{13}$$

Demostración. Sean $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)^T \geq 0$ fijos. Utilizando la condición de optimalidad (9), la cual se cumple como igualdad, definimos las funciones $q_i(p; \nu_1, \cdots, \nu_n)$

$$q_i(p; \nu_1, \cdots, \nu_n) = \frac{kp - b_i}{k\nu_i + a_i} = \left(\frac{k}{k\nu_i + a_i}\right) p - \frac{b_i}{k\nu_i + a_i}, \quad i = 1, \cdots, n, \tag{41}$$

las cuales son continuamente diferenciables respecto a p y ν_i, $i = 1, \cdots, n$. Veamos que $q_i(p; \nu_1, \cdots, \nu_n)$ es una función lineal con pendiente estrictamente positiva, entonces, $q_i(p; \nu_1, \cdots, \nu_n)$ es estrictamente creciente respecto a p y tiende a $+\infty$ cuando $p \to +\infty$. Introduciremos la función

$$Q(p; \nu_1, \cdots, \nu_n) = \sum_{i=1}^{n} q_i(p; \nu_1, \cdots, \nu_n) \tag{42}$$

Como (42) es una función lineal (por ser suma de las funciones lineales), entonces es estrictamente creciente respecto a p, y tiende a $+\infty$ cuando $p \to +\infty$. Basado sobre (41) y la suposición **A3** tenemos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{kp_0 - b_i}{k\nu_i + a_i} \geq 0$ para cualquier $\nu_i \geq 0$, $i = 1, \cdots, n$, entonces tenemos que

$$Q(p_0;\nu_1,\cdots,\nu_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{kp_0-b_i}{k\nu_i+a_i}\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{kp_0-b_i}{a_i}<G(p_0)\leq G(p_0)+D \tag{43}$$

Como $Q(p;\nu_1,\cdots,\nu_n)$ es estrictamente creciente con respecto a p, y tiende a infinito y $G(p)+D$ es decreciente, de la expresión (43) se sigue la existencia del único valor $p^*>p_0$ tal que:

$$Q(p^*;\nu_1,\cdots,\nu_n)=G(p^*)+D \tag{44}$$

Para este valor p^*, calculamos los volúmenes de producción $q_i^*=q_i(p^*;\nu_1,\cdots,\nu_n)$, $i=1,\cdots,n$, utilizando la formula (41), de tal manera que el vector $(p^*,q_1^*,\cdots,q_n^*)$ es el equilibrio exterior y es único.

Entonces está demostrada la existencia y unicidad del equilibrio exterior $(p^*,q_1^*,\cdots,q_n^*)$ para cualesquiera parámetros dados $D\geq 0$, $\nu_i\geq 0$, $i=1,\cdots,n$.
Ahora demostramos que el precio $p^*(D,\nu_1,\cdots,\nu_n)$ del equilibrio exterior es la función continuamente diferenciable respecto a sus variables. De (42) y (44) tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n}q_i^*-G(p^*)-D=0 \tag{45}$$

Reescribimos la ecuación (44) de la siguiente manera

$$\sum_{i=1}^{n}q_i^*-G(p^*)-D=\sum_{i=1}^{n}\frac{kp^*-b_i}{k\nu_i+a_i}-G(p^*)-D=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{kp^*}{k\nu_i+a_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{k\nu_i+a_i}-G(p^*)-D=$$

$$p^*\sum_{i=1}^{n}\frac{k}{k\nu_i+a_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{k\nu_i+a_i}-G(p^*)-D=0 \tag{46}$$

La derivada del lado izquierdo de la ecuación (45) respecto a p^* es positiva

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k}{k\nu_i+a_i}-G(p^*)-D>0 \tag{47}$$

Entonces, por el teorema de la función implícita de la ecuación (46) se puede despejar p^* como la función $p^*(D,\nu_1,\cdots,\nu_n)$ continuamente diferenciable de las variables D y ν_i,

$i = 1, \cdots, n$. Reescribimos (46) de esta manera

$$p^*(D, \nu_1, \cdots, \nu_n) \sum_{i=1}^{n} \frac{k}{k\nu_i + a_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{k\nu_i + a_i} - G(p^*(D, \nu_1, \cdots, \nu_n)) - D = 0 \tag{48}$$

y derivamos respecto a D

$$\frac{\partial p^*}{\partial D} \sum_{i=1}^{n} \frac{k}{k\nu_i + a_i} - G'(p^*) \frac{\partial p^*}{\partial D} - 1 = 0 \tag{49}$$

De (49)

$$\frac{\partial p^*}{\partial D} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{k}{k\nu_i + a_i} - G'(p^*)} \tag{50}$$

La demostración está completa. ■

9.2 Demostración del Teorema 2

Teorema 2. *Bajo las suposiciones **A**, **A2** y **A3**, existe un único equilibrio interior.*

Demostración. Vamos a demostrar que existen $\nu_i \geq 0$, $q_i \geq 0$, $i = 1, \cdots, n$, y $p > p_0$ tal que el vector $(p, q_1, \cdots, q_n)$ es el equilibrio exterior para los coeficientes de influencia $\nu_i \geq 0$, $i = 1, \cdots, n$, y las ecuaciones (14) se satisfacen, donde $G'(p) = -K$. Introducimos las funciones siguientes:

$$F_i(\nu_1, \cdots, \nu_n) = \frac{1}{\displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{k}{k\nu_j + a_j} + K}, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{51}$$

Las funciones F_i, $i = 1, \cdots, n$, son bien definidas y continuamente diferenciables, además

$$0 \leq F_i(\nu_1, \cdots, \nu_n) = \frac{1}{\displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{k}{k\nu_j + a_j} + K} \leq \frac{1}{K}, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{52}$$

Definimos el siguiente mapeo $F = (F_1, \cdots, F_n) : R_+^n \to R_+^n$, el cual es continuamente diferenciable. De (52) se observa que para cualquier $0 \leq \nu_j \leq \frac{1}{K}$, $j = 1, \cdots, n$, los valores de $F_j(v_1, \cdots, v_n)$, $j = 1, \cdots, n$ se encuentran en el mismo intervalo $[0, \frac{1}{K}]$. Por lo tanto, establecimos que el mapeo continuo $F = (F_1, \cdots, F_n)$ mapea el conjunto compacto y convexo $[0, \frac{1}{K}]^n$ en sí mismo, entonces, por el Teorema del punto fijo de Brouwer, el mapeo F tiene un punto fijo $(\nu_1^*, \cdots, \nu_n^*)$, para el cual por el Teorema 1 existe el equilibrio exterior $(p^*, q_1^*, \cdots, q_n^*)$ y las condiciones (14) están cumplidas. Así, la existencia del equilibrio interior está demostrada y sólo nos queda demostrar la unicidad. Para esto vamos a demostrar que el mapeo $F = (F_1, \cdots, F_n)$ es contractivo, es decir, que

$$\|\nabla F\|_\infty < 1 \tag{53}$$

La matriz Jacobiana del mapeo $F = (F_1, \cdots, F_n)$ es la matriz $\nabla F = \left(\frac{\partial F_i}{\partial \nu_j}\right)_{i=1,j=1}^{n,n}$ donde

$$\frac{\partial F_i}{\partial \nu_j} = \begin{cases} 0, & \text{si } j = i; \\ F_i^2 \left(\frac{k}{k\nu_j + a_j}\right)^2, & \text{si } j \neq i. \end{cases} \tag{54}$$

Ahora calculemos las sumas de los elementos de la matriz en cada fila $i = 1, 2, \cdots, n$:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial \nu_j} = F_i^2 \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \left(\frac{k}{k\nu_j + a_j}\right)^2 = \frac{\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \left(\frac{k}{k\nu_j + a_j}\right)^2}{\left(\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \frac{k}{k\nu_j + a_j} + K\right)^2} \leq \frac{\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \left(\frac{k}{k\nu_j + a_j}\right)^2}{\left(\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \frac{k}{k\nu_j + a_j}\right)^2} \tag{55}$$

Como $\dfrac{k}{k\nu_j + a_j} > 0$ para todo j, entonces $\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \left(\frac{k}{k\nu_j + a_j}\right)^2 < \left(\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \frac{k}{k\nu_j + a_j}\right)^2$ entonces $\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial F_i}{\partial \nu_j} < 1$, $i = 1, \cdots, n$.

Entonces

$$\|\nabla F\|_\infty < 1 \tag{56}$$

y el mapeo $F = (F_1, \cdots, F_n)$ es contractivo. ■

Bibliografía

Algazin, G. and Algazina, D. (2009). Modeling of multi-agent franchising systems: monograph. *Barnaul: AltSU*, page 91. In Russian.

Algazin, G. and Algazina, Y. (2006). Modeling the behavior of economic agents in the system "producer - intermediary - competitive market". management in socio-economic systems. management of large systems. 32:83–108. In Russian.

Blanco, O. R. and Sam, O. R. F. (2014). Teoría del bienestar y el óptimo de pareto como problemas microeconómicos. *REICE: Revista Electrónica de Investigación en Ciencias Económicas*, 2(3):217–234.

Bowley, A. L. (1924). The mathematical groundwork of economics. *Oxford University Press: Oxford*.

Bulavsky, V. and Kalashnikov, V. (1994a). An unidimensional driving-through method applied to investigation of an equilibrium state. *Ekonomika and Matematicheskie Metody (Economics and Mathematical Methods)*, 30(4):129 – 138. In Russian.

Bulavsky, V. and Kalashnikov, V. (1995a). Equilibrium in the generalized cournot and stackelberg models. *Ekonomika I Matematicheskie Metody (Economics and Mathematical Methods)*, 31(4):151–163. In Russian.

Bulavsky, V. A. (1997). Structure of demand and equilibrium in a model of oligopoly. *Economics and Mathematical Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody)*, 33:112–134. In Russian.

Bulavsky, V. A. and Kalashnikov, V. V. (1994b). One-parametric method to study equilibrium. *Economics and Mathematical Methods*, 30(4):129–138. In Russian.

Bulavsky, V. A. and Kalashnikov, V. V. (1995b). Equilibrium in generalized cournot and stackelberg models. *Economics and Mathematical Methods*, 31(3):164–176. In Russian.

Church, J. R. and Ware, R. . (2000). Industrial organization: a strategic approach. *Homewood, IL.: Irwin McGraw Hill*, pages 21,467–469.

Cournot, A. (1838). *Investigación sobre los principios matemáticos de la teoría de la riqueza*. París.

de España, B. (2012). La competitividad de la economía española. *Informe anual/Banco de España*, pages 36–65.

Dusouchet, O. (2006). The static equilibrium of cournot-nash and reflexive oligopolistic games: the case of linear demand and cost functions. *Economics Journal of the Higher Economics School*, pages 3–32.

Frank, C. and Quandt, R. (1963). On the existence of cournot equilibrium. *International Economic Review*, 5.

Frisch, R. (1933). Monopole-polypole: La notion de force en économie. *Nationaløkonomisk Tidsskrift*, 71:241–259. In french, translated to english in Frisch (1951).

Frisch, R. (1951). Monopoly, polypoly: The concept of force in the economy. *International Economics Papers*, 1:23–36.

Harker, P. (1984). A variational inequality approach for the determination of oligopolistic market equilibrium. *Mathematical Programming*, 30(1):105–111.

Harker, P. and Choi, S. (1991). A penalty function approach for mathematical programs with variational inequality constrains. *Information and Decision Technologies*, 17.

Hegji, C. E. and Moore, E. (2006). On the economics of manufactures and dealers: A reexamination. *Southwestern Economic Review*, pages 107–120.

Hernández-Lerma, O. (2005). *Control óptimo y juegos estocásticos*. EMALCA, CIMAT.

Kalashnikov, V. V., Bulavsky, V. A., Kalashnykova, N. I., and Castillo-Pérez, F. J. (2011). Mixed oligopoly with consistent conjectures. *European Journal of Operational Research*, 210(3):729–735.

Kalashnikov, V. V. and Kalashnikov, V. (2005). Conjectural variations equilibrium in a duopoly with a competitor maximizing domestic social surplus. page 12, Puerto Vallarta, México. Proceedings of the 2005 International Applied Business Research Conference (IABR'2005).

Kolemaev, V. (1998). Mathematical economics: a high school textbook. *M. UNITY*, page 240.

Liu, Y. F., Ni, Y. X., Wu, F. F., and Cai, B. (2007). Existence and uniqueness of consistent conjectural variation equilibrium in electricity markets. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 29(6):455–461.

McManus, M. (1962). Numbers and size in cournot oligopoly. *Yorkshire Bulletin Social and Economic Research*, 14.

McMANUS, M. (1964). Equilibrium, numbers and size in cournot oligopoly. *Yorkshire Bulletin Social and Economic Research*, 16.

Metzler, C., Hobbs, B. S., and Pang, J. (2003). Nash-cournot equilibria in power markets on a linearized dc network with arbitrage: Formulations and properties. *Networks and Spatial Economics*, 3(2):123–150.

Méndez, M. and Silvestre, J. (1989). *Fundamentos de economía*. McGraw Hill.

Novshek, W. (1985). On the existence of cournot equilibrium. *Review Economic Studies*, 5(168).

Okuquchi, K. (1973). Quasi- competitiveness and cournot oligopoly. *Review Economic Studies*, 40.

Pereyra, A. and Triunfo, P. O. (1999). *Microeconomía Avanzada. Notas docentes.* Universidad de la República. Facultad de Ciencias Económicas y Administración., Montevideo.

Roberts, J. and Sonnenschein, H. (1976). On the existence of cournot equilibrium without concave profit functions. *Journal Economic Theory*, 13.

Ruffin, R. (1971). Cournot oligopoly and competitive behavior. *Review Economic Studies*, 38(4).

Sherali, H., Soyster, A., and Murphy, F. (1983). Stackelberg-nah-cournot equilibria: Characterizations and computations. *Operations Research*, 31(2).

Stackelberg, H. (1934). Marktform und gleichgewicht. *Vienna: Julius Springer.*

Szidarovszky, F. and Yakowitz, S. (1977). A new proof of the existence and uniqueness of the cournot equilibrium. *International Economic Review*, 18(3).