Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik

RESEARCH

Thomas Stenzel

Mathematisches Problemlösen in der Studieneingangsphase

Untersuchung von Bearbeitungsprozessen typischer Übungsaufgaben und zyklische Entwicklung einer Fördermaßnahme im Rahmen vorlesungsbegleitender Übungen

OPEN ACCESS

Springer Spektrum

Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik

Reihe herausgegeben von

Bärbel Barzel, Fakultät für Mathematik, Universität Duisburg-Essen, Essen, Deutschland

Andreas Büchter, Fakultät für Mathematik, Universität Duisburg-Essen, Essen, Deutschland

Florian Schacht, Fakultät für Mathematik, Universität Duisburg-Essen, Essen, Deutschland

Petra Scherer, Fakultät für Mathematik, Universität Duisburg-Essen, Essen, Deutschland

In der Reihe werden ausgewählte exzellente Forschungsarbeiten publiziert, die das breite Spektrum der mathematikdidaktischen Forschung am Hochschulstandort Essen repräsentieren. Dieses umfasst qualitative und quantitative empirische Studien zum Lehren und Lernen von Mathematik vom Elementarbereich über die verschiedenen Schulstufen bis zur Hochschule sowie zur Lehrerbildung. Die publizierten Arbeiten sind Beiträge zur mathematikdidaktischen Grundlagen- und Entwicklungsforschung und zum Teil interdisziplinär angelegt. In der Reihe erscheinen neben Qualifikationsarbeiten auch Publikationen aus weiteren Essener Forschungsprojekten.

Thomas Stenzel

Mathematisches Problemlösen in der Studieneingangsphase

Untersuchung von Bearbeitungsprozessen typischer Übungsaufgaben und zyklische Entwicklung einer Fördermaßnahme im Rahmen vorlesungsbegleitender Übungen

Springer Spektrum

Thomas Stenzel
Didaktik der Mathematik
University of Duisburg-Essen
Essen, Deutschland

Dem Fachbereich Mathematik der Universität Duisburg-Essen zur Erlangung des akademischen Grades eines Dr. rer. nat. eingereichte Dissertation von Herrn Dipl.-Math. Thomas Stenzel aus Essen
Datum der Einreichung: 05.01.2021
Tag der mündlichen Prüfung: 24.3.2021
Referent: Prof. Dr. Andreas Büchter
Korreferent: Prof. Dr. Benjamin Rott

ISSN 2509-3169 ISSN 2509-3177 (electronic)
Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik
ISBN 978-3-658-39051-8 ISBN 978-3-658-39052-5 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-39052-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Marija Kojic
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort

Die Aufnahme eines Fachstudiengangs Mathematik bzw. eines Lehramtsstudiengangs Mathematik mit vergleichbaren Fachlehrveranstaltungen ist für viele Studienanfänger:innen mit großen und für sie neuen Herausforderungen beim Lernen von Mathematik verbunden. Der größere Teil der Studierenden beendet das Mathematikstudium erfolglos, sei es durch Abbruch des Studiums oder den Wechsel des Studienfachs. Zu den Herausforderungen zählen zunächst fachliche Aspekte im engeren Sinne, wie die stärkere Formalisierung und Präzisierung der Begriffe, das Streben nach möglichst allgemeinen Begriffen, der strengere Theorieaufbau, die größere Relevanz sicheren und verständigen kalkülhaften symbolischen Arbeitens, die große stoffliche Dichte sowie insgesamt eine größere Komplexität der Begriffsnetze, Betrachtungen und Übungsaufgaben. Darüber hinaus spielen überfachliche Aspekte, die zum Teil auch als fachliche Aspekte im weiteren Sinne verstanden werden können, ebenfalls eine wichtige Rolle; hierzu zählen die Selbstregulation (u. a. mit der Aufrechterhaltung der Motivation) bei den im Vergleich zur Schule erheblich längeren Phasen der Vorlesungsnachbereitung und der Übungsaufgabenbearbeitung, die Entwicklung geeigneter fachspezifischer Lernstrategien sowie die Reflexion über häufig nur implizit vermittelte fachliche Methoden und Problemlösestrategien.

Der Bearbeitung von Übungsaufgaben wird dabei sowohl aus Sicht der Lehrenden als auch aus Sicht der Lernenden die entscheidende Rolle für den Lernerfolg innerhalb der Lehrveranstaltung zugeschrieben. Hier hat Thomas Stenzel mit Blick auf die stoffliche Dichte in der Studieneingangsphase überzeugend herausgearbeitet, dass Übungsaufgaben aus Sicht der Lernenden grundsätzlich Probleme (im Sinne des Problemlösens) darstellen. Daher liegt es nahe, die Prozesse der Aufgabenbearbeitung aus Sicht der Problemlöseforschung zu untersuchen und zu unterstützen. Insbesondere bei der Entwicklung geeigneter

Problemlösestrategien werden Studienanfänger:innen heute überwiegend noch zu wenig explizit unterstützt. In den Vorlesungen können entsprechende Reflexionen der Dozent:innen kaum Spuren hinterlassen, da (in der klassischen Hörsaalsituation) zeitnahe aktive Aneignungshandlungen durch die Lernenden fehlen. Das Potenzial der Betrachtungen wird dann für die Lernenden nicht subjektiv erfahrbar und entsprechende Reflexionen und Strategien werden dementsprechend nicht in das eigene Repertoire integriert. Wenn dann noch die zugehörigen Übungen tendenziell dem „Vorrechnen" von Aufgaben gewidmet werden, ohne Fragen des Findens von Lösungsansätzen diskursiv zu klären, bleibt vor allem dieser Teil der Lehrveranstaltung hinter seinen Möglichkeiten zurück.

An dieser Stelle setzt die vorliegende Dissertation von Thomas Stenzel an, die im Design-Based-Research-Ansatz sowohl praxis- als auch grundlagenorientierte Beiträge zur mathematikdidaktischen Diskussion leistet. Der Kern der Entwicklungsarbeiten besteht aus der bewussten Förderung von fachtypischen Lern- und Problemlösestrategien bei der Bearbeitung bzw. Diskussion von Übungsaufgaben in vorlesungsbegleitenden Übungen in der Studieneingangsphase. Diese Weiterentwicklung der Übungen – sowohl zur Analysis I als auch zur Linearen Algebra I – war dabei von vorneherein bewusst auf größtmögliche ökologische Validität und Transferfähigkeit der Konzeption ausgerichtet; so wurden „herkömmliche" Übungen durch zeitlich überschaubare Diskussionen und Reflexionen angereichert. Hierdurch und durch einen üblichen Ressourceneinsatz in der Lehre wird eine hohe Transferfähigkeit – auch hinsichtlich der Akzeptanz durch die jeweils verantwortlichen Dozent:innen – gewährleistet.

Darüber hinaus liefert die Dissertation grundlagenorientierte Beiträge zur Hochschuldidaktik der Mathematik (insbesondere durch die Nutzbarmachung von Theorien und Konzepten aus der Problemlöseforschung) sowie zur Problemlöseforschung (durch die Ergänzung von Betrachtungen und Befunden auf dem Niveau der Eingangsphase der Fachstudiengänge). Die vertiefte Auseinandersetzung mit der Theorie hat deutlich gezeigt, dass die Problemlöseforschung zuvor noch kaum einschlägig für die Studieneingangsphase der Fachstudiengänge war. Dies betrifft insbesondere die Bedeutung des Vorwissens bei der Bearbeitung von Übungsaufgaben, die zuvor nicht differenziert untersucht wurde. Studien auf dem curricularen Niveau der Sekundarstufe I ermöglichen dies zumeist nicht, weil das Vorwissen und die erforderlichen Begriffsnetze überschaubar sind. Außerdem wird bei vielen Studien das erforderliche Vorwissen durch die Auswahl der Probleme bewusst relativ (zur betrachteten Stichprobe) niedrig angesetzt;

entsprechende Probleme sind daher nicht typisch für Aufgaben, die in stofflich systematisch angelegten Lehr-Lern-Prozessen – wie Unterrichtsreihen in der Schule oder Vorlesungen in der Universität – eingesetzt werden.

Essen
im Mai 2022

Andreas Büchter

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschreibt die theoriebasierte Entwicklung einer semesterbegleitenden Maßnahme zur Förderung der Problemlösekompetenz von Studienanfängern der Fachmathematik und des gymnasialen Lehramts, sowie die zyklische Modifikation dieser Maßnahme im Sinne der Entwicklungsforschung. Begleitend dazu wurden, mit dem Ziel, grundlegende Erkenntnisse zum studentischen Problemlösen zu gewinnen, systematische Beobachtungen von Bearbeitungsprozessen zu typischen Übungsaufgaben durchgeführt. Hierbei hat sich insbesondere die Rolle des Vorwissens als entscheidender Faktor herausgestellt.

Schlüsselwörter: Problemlösen · Studieneingangsphase · Metakognition · Lernstrategien · Hochschuldidaktik

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Einleitung erzähle ich die Geschichte meiner Dissertation. Da diese Geschichte eine persönliche ist, habe ich mir erlaubt, diese, im Gegensatz zum Rest der vorliegenden Arbeit, aus der Ich-Perspektive zu schreiben. Auch der Stil dieses Kapitels mag etwas prosaischer sein, als es in den anderen Abschnitten der Fall ist.

Der Beginn des Mathematikstudiums ist für viele Studienanfänger[1] schwierig. Die Gründe dafür sind vielfältig und werden, ergänzt durch eine Zusammenfassung aktueller hochschuldidaktischer Maßnahmen, in Abschnitt 2.1 ausführlich dargestellt. Letztlich läuft es aber (zumindest was die Bewertung der Studienleistung angeht) auf die Bearbeitung von Aufgaben – zunächst von Hausaufgaben, dann, für den Studienerfolg noch wichtiger, von Klausuraufgaben – hinaus. In den ersten Semestern meines Studiums hatte auch ich in diesem Bereich mit einigen Schwierigkeiten zu kämpfen. Interessanterweise legten sich trotz abstrakter werdender Inhalte diese Schwierigkeiten aber im Laufe des Studiums. Während ich die Klausuren im ersten Semester (Analyis I und Lineare Algebra I) noch mit Ach und Krach bestanden hatte (beide Noten: 4.0 – Heute weiß ich, dass ich mit zwei bestandenen Klausuren im ersten Versuch sicherlich schon im oberen Drittel des Jahrgangs lag), hatte ich spätestens nach dem Vordiplom keinen Zweifel mehr daran, das Studium zu meistern. Meine Kommilitonen – oder zumindest diejenigen, die es über die ersten Semester hinaus geschafft hatten – waren ebenfalls nach erfolgreichem Bestehen der Klausuren des zweiten Semesters (Analysis II und Lineare Algebra II) deutlich entspannter. Bereits zu der Zeit reifte in mir die Erkenntnis, dass das Bearbeiten von Aufgaben offenbar mit der Zeit trotz abstrakter werdender Inhalte (und damit

[1] Zugunsten der besseren Lesbarkeit wird in der vorliegenden Arbeit das generische Maskulinum verwendet, wenn das Geschlecht nicht bekannt ist oder keine Rolle spielt. Wenn es nicht anders erwähnt wird, sind Personen jeglichen Geschlechts gemeint.

T. Stenzel, *Mathematisches Problemlösen in der Studieneingangsphase*,
Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-39052-5_1

höchstwahrscheinlich eher steigendem als fallendem Schwierigkeitsgrad) leichter fällt, man es also durch Übung lernen kann. Leider schafften es nur wenige Kommilitonen zu diesem Punkt.

Schon bald bekam ich die Möglichkeit, als Übungsgruppenleiter in mathematischen und physikalischen Anfängervorlesungen – hauptsächlich der Analysis I und II – Erfahrungen zu sammeln. Neben vielen Dingen, die zunächst nicht so gut funktionierten, hat sich dabei eine stärkere Prozessorientierung bei der Besprechung der Hausaufgaben als fruchtbar erwiesen.

Im ersten Jahr meiner Promotionszeit habe ich zunächst Vorlesung und Übung aus mathematikdidaktischer Sicht genauer beobachtet und dabei reifte in mir die Idee, eine Maßnahme zur Verbesserung der Anfängerveranstaltungen zu entwickeln. Hierbei waren zwei Dinge zu beachten: Erstens sollte keine zusätzliche Präsenzveranstaltung geschaffen werden, da die Studierenden auf der einen Seite auch so schon genug zu tun hatten und mir auf der anderen Seite die Selbstständigkeit und -verantwortung der Lernenden sehr wichtig war. Zweitens hielt ich es für problematisch, in die Vorlesung einzugreifen, über die sich der Dozent sicherlich einige Gedanken gemacht hatte.

Und so fiel mein Entschluss darauf, mich systematisch der Übung zu widmen. Aus den Beobachtungen meines ersten Promotionsjahres und den Erfahrungen des eigenen Studiums, war mir intuitiv klar, dass es sich bei einem Großteil der Übungsaufgaben um Probleme handelt (eine Exposition des Problembegriffs wird in Abschnitt 2.2 gegeben). Bei ausgiebigen Literaturrecherchen wurde ich auf die Einflussfaktoren auf das Problemlösen (die in Abschnitt 2.3 beschrieben werden) und verschiedene Konzeptionen, vorrangig aus dem Schulkontext, die bei der Förderung der Problemlösekompetenz behilflich sein können, aufmerksam. Besonderes Augenmerk habe ich hierbei darauf gerichtet, wie Studierende dabei unterstützt werden können, ihr eigenes Vorgehen metakognitiv zu steuern und zu reflektieren, um so eigene Herangehensweisen (inklusive bewährter Heurismen) an das Problemlösen entwickeln zu können. Die Quintessenz hieraus ist in Abschnitt 2.4 nachzulesen. Um ehrlich zu sein, war mir zu Beginn der Maßnahme nicht alles, was dort dargestellt wird, bekannt, aber es tut gut, zu erfahren, dass auch Andere ähnliche Ideen hatten wie ich und diese zum Teil sogar schon erfolgreich getestet haben.

Die Leitfragen für meine Dissertation (ausformuliert in Kapitel 3) drehen sich also zum einen darum, wie sich diese theoriebasierten Überlegungen tatsächlich in die Praxis der Übungsgruppen umsetzen lassen und wie sich eine solche Umsetzung auf Faktoren wie Klausurerfolg und Anwesenheit in den Übungen auswirkt. Zum anderen hatte ich bei meinen Recherchen vergleichsweise wenig darüber gefunden, wie Studierende authentische Übungsaufgaben bearbeiten. Diese Forschungslücke soll durch die in Kapitel 5 dargestellten aufgabenbasierten Interviews und ihre Auswertung ein wenig geschlossen werden.

Die Weiterentwicklung der Übungsgruppe lief in Form eines *Design Research* (siehe Abschnitt 4.1) ab. Sicherlich musste ich aufgrund der Tatsache, dass die Studie in der tatsächlichen Lehrpraxis der Anfängerveranstaltung angesiedelt war, mit einigen Einschränkungen umgehen (die in Abschnitt 4.3 beschrieben sind), wodurch die Intervention sich das Adjektiv *minimalinvasiv* verdient hat, sie also in den von den Dozenten geplanten Ablauf möglichst wenig eingreift. Dies hat den Vorteil, dass deren Umsetzbarkeit nur daran gebunden ist, ob sich jemand wie ich die Zeit nimmt, das Ganze zu organisieren. Weitere Ressourcen sind, zusätzlich zu den ohnehin zur Verfügung stehenden, nicht notwendig. Eine Übertragbarkeit auf ähnliche Bereiche, etwa die Zweitsemesterveranstaltungen, scheint also relativ problemlos gegeben zu sein. Die ursprüngliche, theoriebasierte Version ist in Abschnitt 4.4 nachzulesen, wobei die Schulung der Tutoren in Abschnitt 4.5 dargestellt ist. Da die bereits genannte qualitative Betrachtung (Kapitel 5) ebenfalls Einfluss auf die zyklische Weiterentwicklung der Maßnahme im Sinne des *Design Research* gehabt hat, wird die letzte Iteration (wirklich abgeschlossen ist so etwas ja nie) in Kapitel 6 vorgestellt.

Zu guter Letzt war ich an der Wirkung der Intervention interessiert, die ich mit Hilfe quantitativer Erhebungen (beschrieben in Kapitel 7) überprüft habe. Aufgrund der Mininmalinvasivität war hier aber von vornherein klar, dass sich keine großen Effekte zeigen würden. Im Gegenteil hatte ich die nicht unbegründete Befürchtung, dass die Veränderung der etablierten Übungsgruppe auch negative Auswirkungen haben kann. Schließlich ist die zur Verfügung stehende Zeit sehr begrenzt und wenn neue Aspekte aufgenommen werden, müssen zwangsläufig andere darunter leiden.

Zum Schluss der Arbeit (Kapitel 8) werden die Ergebnisse zusammenfassend diskutiert und es wird ein Ausblick gegeben, welche darauf aufbauenden Forschungsmöglichkeiten sich mir und meinen Kollegen ergeben.

Ich hoffe mit dieser Arbeit einen interessanten Beitrag zur Hochschuldidaktik, Problemlöseforschung und der Verknüpfung dieser beiden Zweige leisten zu können. Ich wünsche eine angenehme Lektüre.

2 Theoretischer Rahmen

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, das universitäre Problemlösen genauer zu untersuchen sowie eine Fördermaßnahme zur Problemlösekompetenz von Studienanfängern zu entwickeln. In Abschnitt 2.1 werden zunächst die Schwierigkeiten von Studienanfängern der Mathematik[1] beschrieben und einige bestehende und geplante Maßnahmen aufgezählt, die bei der Bewältigung dieser Schwierigkeiten helfen sollen. Anschließend werden Untersuchungen von Problemlöse- und Beweisprozessen zusammengefasst. Die vorliegende Studie wird dann in die bestehende Literatur eingeordnet. In Abschnitt 2.2 wird danach erläutert, wie ein Problem definiert ist und welche Modelle zur Beschreibung von Problemlöseprozessen es gibt. In Abschnitt 2.3 werden die vier Einflussfaktoren auf das Problemlösen nach Schoenfeld (1985), *Ressourcen*, *Heurismen*, *Kontrolle* und *Überzeugungen* beschrieben. Vor einer kurzen Zusammenfassung (Abschnitt 2.5) werden in Abschnitt 2.4 verschiedene Konzeptionen vorgestellt, auf deren Grundlage die in dieser Arbeit beschriebene Intervention entwickelt wurde.

[1] In der vorliegenden Arbeit sind in diesem Zusammenhang immer die Fachstudiengänge (an der Universität Duisburg-Essen sind dies Mathematik, Wirtschaftsmathematik und Technomathematik) sowie der Lehramtsstudiengang für Gymnasien und Gesamtschulen gemeint.

Ergänzende Information Die elektronische Version dieses Kapitels enthält Zusatzmaterial, auf das über folgenden Link zugegriffen werden kann https://doi.org/10.1007/978-3-658-39052-5_2.

T. Stenzel, *Mathematisches Problemlösen in der Studieneingangsphase*,
Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-39052-5_2

2.1 Einordnung der Arbeit

Viele Studienanfänger der Mathematik haben beim Übergang von der Schule in die Hochschule große Schwierigkeiten. Der Fachstudiengang Mathematik (B. Sc.) hat die höchsten Abbruchquoten aller Studiengänge[2] (Dieter, 2012, Heublein, 2015). Neben mangelnden Grundfertigkeiten (Cramer, Walcher & Wittich, 2015; Pustelnik, 2018), bei denen hauptsächlich Lücken im Bereich des Unterrichtsstoffes der Sekundarstufe I diagnostiziert werden (vgl. Bruder et al., 2010; Greefrath, Koepf & Neugebauer, 2017), werden diese Schwierigkeiten auf „unterschiedliche Kulturen des Mathematiktreibens und -lernens“ (Roth, Bauer, Koch & Prediger, 2015, Im Vorwort) zurückgeführt. Abgesehen von anderen Inhalten (vgl. Bauer & Partheil, 2009; Brandell, Hemmi & Thunberg, 2008; Winsløw, 2013) zeigt sich dies besonders in unterschiedlichen Schwerpunktsetzungen: Während im universitären Kontext die formale Darstellung der Inhalte im Mittelpunkt steht, wird in der Schule eher auf Beispiele und intuitives Verständnis gesetzt (Clark & Lovric, 2009; Fischer, Heinze & Wagner, 2009; Nardi, 2014; Sierpinska, 2000). An der Universität geht es eher um das Beweisen von Sachverhalten, während in der Schule deren Anwendung fokussiert wird (Ufer et al. 2017; Vollstedt et al. 2014). Dadurch bedingt kommt es zu Unterschieden in der Argumentationsweise (Bauer & Partheil, 2009; Hefendehl-Hebeker, 2016; Nagel, 2017; Sfard, 2014; Thoma & Nardi, 2017) und bei der Einführung von neuen Begriffen (Edwards & Ward, 2004; Moore, 1994; Weber & Alcock, 2004). Hinzu kommen Schwierigkeiten mit der Fach- und Symbolsprache (Clark & Lovric, 2009; Epp, 2009; Hefendehl-Hebeker, 2016; Ottinger, Ufer & Kollar, 2016). Auch in der Art des Lernens gibt es große Unterschiede: So sind an der Universität sowohl die Vorlesungen als auch die zu bearbeitenden Aufgaben nicht auf unmittelbares Verständnis ausgelegt (Liebendörfer et al., 2017) und neue Begriffe treten in deutlich höherer Frequenz auf (Artigue, 2016). Insgesamt wird von den Studierenden ein höheres Maß an Eigenverantwortung gefordert als es in der Schule der Fall ist (Biza, Jaworski & Hemmi, 2014; Greefrath, Kirsten & Kürten, 2019), wodurch, in Kombination mit der Neuartigkeit der zu bewältigenden Schwierigkeiten, Selbstregulation eine wichtige Rolle einnimmt (Artelt, 2005).

[2] Es gibt hier verschiedene Betrachtungsweisen. Heublein (2015) definiert Studienabbrecher als diejenigen, die ohne irgendeinen akademischen Abschluss bleiben und kommt auf etwa 40 %, Dieter (2012) bezeichnet solche Studierenden als Abbrecher, die sich aus dem Studiengang Mathematik exmatrikulieren, ohne das Studium erfolgreich abgeschlossen zu haben. Studienfachwechsel werden also mitgezählt. Hierbei ergibt sich ein Anteil von fast 80 %. In jedem Fall sind diese Zahlen im Bachelorstudiengang Mathematik im Vergleich mit allen anderen Studiengängen am höchsten.

Zusätzlich zu den bisher genannten, eher kognitiven Aspekten werden in der Literatur auch eine Reihe affektiver Aspekte genannt. Hierzu gehören u. a. die Selbstwirksamkeitserwartung (Greefrath et al., 2019; Thomas et al., 2010), das Gefühl des Dazugehörens (Kouvela, Hernandez-Martinez & Croft, 2017; Nieminen, 2020) und Einstellungen zur Mathematik (DeBellis & Goldin, 2006; Di Martino & Gregorio, 2019; Iannone & Simpson, 2019; McLeod, 1989b). Einen guten Überblick über die Motivation von Mathematikstudierenden bietet die Dissertation von Liebendörfer (2018).

Um diesen Schwierigkeiten entgegenzutreten, gibt es unterschiedliche Ansätze, die größtenteils erst in den letzten fünf bis zehn Jahren entwickelt wurden. Auf inhaltlicher Ebene gibt es einige Überlegungen zu bestimmten Vorlesungen. International werden hierbei insbesondere die Inhalte der *Abstract Algebra* (die in großen Teilen der deutschen *Linearen Algebra* entspricht) im Allgemeinen (z. B. Ioannou, 2018; Larsen, Johnson & Weber, 2013) und der *Group Theory* im Speziellen betrachtet (Melhuish, 2018; Weber & Larsen, 2008). Der Grund hierfür liegt vermutlich darin, dass es sich in vielen Ländern – unter anderem den USA – um den ersten Hochschulkurs handelt, bei dem wesentlich über Rechenaktivitäten hinausgegangen und ein stärkerer Blick auf das Beweisen geworfen wird[3] (vgl. Dubinsky, Dautermann, Leron & Zazkis, 1994). Aber auch im Bezug auf die Analysis gibt es einige Überlegungen bezüglich der Vermittlung der Inhalte (vgl. Bressoud & Zorn, 2018; Voigt, Apkarian, Rasmussen & the Progress through Calculus Team, 2020). Hierbei stehen oft stoffdidaktische Überlegungen zu Begriffen, die bereits in der Schule Anwendung finden, im Mittelpunkt, beispielsweise zum Funktionsbegriff (Beitlich, Moll, Nagel & Reiss, 2015), zum Extremwertbegriff (Roos, 2017), zur Quadratwurzel im Reellen und Komplexen (Kontorovich, 2019) oder zum Grenzwertbegriff (Chorlay, 2019; Weigand, 2016).

Speziell in Deutschland wird der Begriff der *doppelten Diskontinuität* diskutiert, der auf Felix Klein (1908) zurückgeht und beschreibt, dass es für Lehramtsstudierende nicht nur beim Übergang von der Schule zur Hochschule, sondern auch bei der Rückkehr zur Schule einen Bruch gibt. Die Unterschiede sind in verschiedenen

[3] In den USA beginnt das Studium zunächst mit Veranstaltungen wie *calculus*, in denen ein viel stärkerer Fokus auf Rechenverfahren gelegt wird. Erst im zweiten Studienjahr werden in Veranstaltungen wie *Analysis* und *Abstract Algebra* axiomatisch-deduktive Theorien durch Beweisprozesse aufgebaut. Man könnte also, neben dem Übergang von der Schule zur Hochschule von einem zweiten Übergang zur wissenschaftlichen Mathematik sprechen. Häufig wird versucht, diesen Übergang durch sogenannte *Transition-To-Prove*-Kurse zu erleichtern, auf die weiter unten eingegangen wird.

Untersuchungen herausgestellt (Blum, 2019; Hefendehl-Hebeker, 2013; Schwarz & Herrmann, 2015) und in Ansätzen zur deren Überwindung oder Explizierung diskutiert worden (Ableitinger, 2013; Bauer & Partheil, 2009; Beutelspacher, Danckwerts, Nickel, Spies & Wickel, 2011; Nagel, Quiring, Deiser & Reiss, 2016; Neubrand, 2015). Auch international wird dieser Problematik Beachtung geschenkt (z. B. Fukawa-Connelly, Mejía-Ramos, Wasserman & Weber, 2020).

Unabhängig vom Vorlesungsinhalt gibt es aber auch immer mehr Ansätze, die Struktur der Vorlesungen zu verändern. Hierbei soll häufig die aktive Beteiligung von Studierenden verstärkt werden (z. B. Alcock & Simpson, 2001; Ioannou, 2019). In einer Metastudie fassen Freeman et al. (2014) zusammen, dass eine aktive Einbindung der Studierenden in die Lehrveranstaltung den Studienerfolg deutlich erhöhen kann. Eine einfache Möglichkeit der Aktivierung ist die Verwendung von sogenannten *Classroom Response Systems*. Hierbei handelt es sich um Tools, die es den Studierenden ermöglichen, aktiv auf die Geschehnisse der Vorlesung oder Übung zu reagieren (vgl. Bauer, 2019; Sommerhoff & Weixler, 2019). Eine weitere Möglichkeit, die sich wachsender Beliebtheit erfreut, ist das Konzept des *Flipped Learning* (Clark, 2015; Fischer & Spannagel, 2012; Lesseig & Krouss, 2017; Strayer, 2012). Hierbei werden die Studierenden beauftragt, sich in Vorbereitung auf die Präsenzzeit mit bestimmten Materialien auseinanderzusetzen, die in der Regel den Theorieteil der Lerneinheit (z. B. neu zu erlernende Begriffe und Sätze) ausmachen. In der Präsenzveranstaltung (die entsprechend des neuen Konzeptes nicht mehr als *Vorlesung* bezeichnet wird) werden stärker praktisch orientierte Tätigkeiten (z. B. die Anwendung des neu Gelernten) durchgeführt (vgl. Straw, Quinlan, Harland & Walker, 2015).

Bereits vor Beginn des eigentlichen Studiums gibt es Bemühungen, den Studierenden durch (weitgehend freiwillige) sogenannte Vor- und Brückenkurse den Einstieg ins Studium zu erleichtern. Eine Übersicht verschiedener Maßnahmen findet man in den Sammelbänden von Bausch et al. (2014) und Hoppenbrock, Biehler, Hochmuth und Rück (2016). Hierbei kann der Schwerpunkt auf inhaltsbezogenen Kompetenzen liegen, wobei hier Themen aus der Schulzeit wiederholt und eingeübt werden (meist mit großem Anteil von Inhalten aus der Sekundarstufe I) oder auf prozessbezogenen Kompetenzen wie Problemlösen, Begriffsklärung, Beweisen etc. (Greefrath, Hoever, Kürten & Neugebauer, 2015).

Zur Unterstützung der Lehre gibt es außerdem einige Konzepte zur Integration digitaler Medien, häufig in Form von Online-Lernangeboten (z. B. Bausch et al., 2014; Dorko, 2020; Salle, Schumacher & Hattermann, 2016; Wilzek, 2019). Einen Überblick über die verschiedenen Formen gibt es bei Borba et al. (2016).

Um die Studierenden bei der eigenständigen Arbeit zu unterstützen, gibt es schon seit längerer Zeit *Support Center*[4]. Hierbei handelt es sich um Räumlichkeiten, in denen sich Studierende selbstorganisiert zum gemeinsamen Lernen in Gruppen treffen können und in denen die meiste Zeit der Woche[5] ein oder mehrere Tutoren (meistens Studierende höherer Semester) ansprechbar sind, um bei den Lernaktivitäten behilflich zu sein (natürlich ist es auch möglich, diese Tutoren als Einzelperson anzusprechen, üblich ist aber eher die Arbeit in Gruppen). In letzter Zeit wurde die Betreuung solcher Einrichtungen sowie die Schulung der Tutoren systematisiert (z. B. Rämö, Oinonen, Vikberg et al., 2015; Grove & Croft, 2019; Greefrath et al., 2019).

Zur Gestaltung von Gruppenübungen gibt es hingegen kaum Studien (vgl. Jaworski, Potari, Rasmussen, Oates & Kwon, 2016; Speer, Smith III & Horvath, 2010). Die wenigen Arbeiten, die es gibt, beschäftigen sich entweder mit der Gestaltung und Auswahl geeigneter Übungsaufgaben (z. B. Bauer & Partheil, 2009) oder damit, wie die Tutoren instruiert werden sollten (z. B. Klemm, Biehler, Schreiber & Hochmuth, 2011). Darüber hinaus gibt es einige Überlegungen zur Erstellung und Präsentation von Musterlösungen (Ableitinger, 2013; Reichersdorfer, 2013), auf die auf S. 41 f. eingegangen wird. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich zum einen damit, wie Studienanfänger Aufgaben bearbeiten, für deren Bearbeitung sie kein Routineverfahren parat haben (sogenannte *Probleme*; für eine genaue Definition siehe Abschnitt 2.2), zum anderen wird die Thematisierung solcher Aufgaben während der Gruppenübung zyklisch weiterentwickelt. Dadurch soll ein Beitrag zur Schließung dieser Forschungs- bzw. Entwicklungslücke geleistet werden.

Obwohl die Untersuchungen von Schoenfeld (1985) zum Problemlösen, die größtenteils im Hochschulkontext stattgefunden haben, großen Einfluss auf die mathematikdidaktische Diskussion haben, gibt es darüber hinaus erstaunlich wenige Arbeiten, die sich der Bearbeitung universitärer Übungsaufgaben und der Förderung zugehöriger Kompetenzen aus der Sicht des Problemlösens nähern. Die Schoenfeld'schen Untersuchungen und Erfahrungen haben zu einem Problemlösekurs geführt, der von Arcavi, Kessel, Meira und Smith (1998) und Schoenfeld (1998) beschrieben wird. Dieser Kurs hat an der University of California in Berkeley mehrfach stattgefunden. In den hier aufgeführten Artikeln wird die Version von 1990 beschrieben. Teilgenommen haben acht Studierende, von denen die meisten im Hauptfach Informatik oder Mathematik studiert haben. Da der Kurs keinerlei inhaltlichen Vorgaben unterlag, konnte mit viel Zeit und Ruhe auf verschiedene

[4] Hierfür gibt es verschiedene Bezeichnungen. An der Universität Duisburg-Essen gibt es eine solche Einrichtung unter dem Namen *LuDi* (Lern- und Diskussionsforum) bereits seit 2007.

[5] An der Universität Duisburg-Essen sind es etwa 30 Stunden pro Woche.

Aspekte des Problemlösens theoretisch wie praktisch eingegangen werden. In den Abschnitten 2.4.5 und 2.4.7 wird auf einzelne Aspekte dieses Kurses eingegangen. Ein Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine Maßnahme zur Förderung der Problemlösekompetenz zu entwickeln, die auf der traditionellen Gruppenübung aufbaut. Die Schoenfeld'sche Kursstruktur kann schon aufgrund der Gruppengröße, der inhaltlichen Anbindung an die Vorlesung und der deutlich geringeren zur Verfügung stehenden Zeit nicht ohne Weiteres übernommen werden. Wie die Konzepte Schoenfelds und anderer auf die gegebenen Umstände übertragen wurden, wird in Abschnitt 4.4 beschrieben.

Insgesamt werden im Hochschulkontext Maßnahmen und Prozessbeobachtungen eher im Hinblick auf Beweisen als auf Problemlösen durchgeführt. Ein möglicher Grund dafür ist, dass Probleme, wie sie z. B. in Schoenfelds Kurs behandelt werden, auf möglichst wenig Vorwissen zurückgreifen und daher häufig keine authentischen Aufgaben, also keine Aufgaben, die üblicherweise in einer fachmathematischen Veranstaltung gestellt werden, darstellen (vgl. Selden & Selden, 2013). Schoenfeld (1994) beschreibt als Kriterium für die Auswahl seiner Aufgaben:

> Without being trivial, problems should be accessible to a wide range of students on the basis of their prior knowledge, and should not require a lot of machinery and/or vocabulary.

Eine Gegenüberstellung der Begriffe *Problem* und *Beweis* gibt es auf S. 14 f. An dieser Stelle sei erwähnt, dass es sich bei fast allen Problemaufgaben an der Universität auch um Beweisaufgaben handelt, während einige Beweise keinen Problemcharakter haben. Aber auch zu Beweisverständnis und -konstruktion ist die Forschungslage, was instruktionelle Designs angeht, recht dünn (vgl. Stylianides & Stylianides, 2017), wenngleich beispielsweise in den USA die oben bereits genannten *Transition-To-Prove*-Kurse Tradition haben. An einigen Universitäten hat sich hierbei die *Moore Method* (Moore, 1994), bzw. die *Modified Moore Method* etabliert (z. B. Coppin, Mahavier, May & Parker, 2009; Selden, McKee & Selden, 2010). Ziel dieser Methode ist die Übertragung der Verantwortung zum Problemlösen und Beweisen auf die Studierenden. Zu diesem Zweck werden zu beweisende Aussagen unabhängig von mathematischen Inhalten mit aufsteigendem Schwierigkeitsgrad ausgewählt, an denen die Studierenden das selbstständige Mathematikbetreiben lernen sollen. Diese Aussagen werden mit zugehörigen Definitionen und ggf. damit verknüpften Zusammenhängen in Form eines sehr kleinen Skriptes mit dem Auftrag, sie als Hausaufgabe zu beweisen, ausgegeben. Es wird also keine Präsenzzeit durch „Vorlesen“ dieser Skripte aufgewendet. Stattdessen steht viel Zeit zur Diskussion und Reflexion der entstandenen Beweise zur Verfügung. Basierend auf diesen Überlegungen hat Grieser (2013) einen ähnlichen Kurs für deutsche Lehramtsstudenten (Gymnasium und Gesamtschule) entwickelt, der sich etwas stärker an bestimmten „mathematischen Ideen“ (Rekursion, Induktion, Graphen, Abzählen etc.) orientiert. Kempen (2019) hat an der Universität Paderborn einen Kurs für Studienanfänger des Lehramts (Haupt-, Real- und Gesamtschulen) entwickelt und umgesetzt, der sich an den Prinzipien dieser *Transition-To-Prove*-Kurse orientiert und sie der Situation an deutschen Universitäten anpasst. Ein anderes Beispiel für eine Fördermaßnahme ist das von McKee, Savic, Selden und Selden (2010) entwickelte freiwillige Zusatzangebot zur Analysis-Vorlesung. Hier können Studierende, die Schwierigkeiten mit den Hausaufgaben haben, im Gruppengespräch von bis zu zehn Leuten, mit Unterstützung der Forschenden Aufgaben diskutieren, die diesen Hausaufgaben ähneln. Das Vorgehen in diesem Kurs ähnelt dem von Präsenzübungen an deutschen Universitäten, allerdings mit dem wesentlichen Unterschied, dass deutlich mehr Zeit für die Aktivität der Studierenden eingeräumt wurde. In einer Sitzung von 75 Minuten wurde in der Regel nur eine Aufgabe thematisiert. Aus diesem Grund ist eine Übertragung auf den üblichen Übungsbetrieb auch nicht ohne Weiteres möglich.

Was das Problemlösen angeht, so gibt es eine Reihe von Konzeptionen, die zu Teilen im Schulbetrieb getestet wurden und potenziell auf den universitären Kontext übertragbar sind. Diese werden in Abschnitt 2.4 näher betrachtet.

Auch bezüglich der Untersuchung von Problemlöseprozessen gibt es über die frühen Studien von Lucas (1974) und Schoenfeld (1985) hinaus wenige Arbeiten, die sich mit Studierenden in der Anfangszeit ihrer Hochschullaufbahn auseinandersetzen. Auch im Hinblick auf Beweisprozesse haben kaum ausführliche Analysen mit einem holistischen Blick stattgefunden. Viele Studien fokussieren den Einsatz einer ausgewählten Strategie, wie der Generierung von Beispielen oder Visualisierungen (z. B. Alcock & Weber, 2010; Gibson, 1998; Samkoff, Lai & Weber, 2012; Sandefur, Mason, Stylianides & Watson, 2013; Stylianou & Silver, 2004). Einen etwas weiteren Blick liefern die Studien von Boero (1999), bei denen Beweisprozesse in Anlehnung an das Schema von Toulmin (2003) und das Modell zur kommunikativen Rationalität von Habermas (2004) untersucht werden, und Weber (2004), der drei verschiedene Arten der Beweisproduktion unterscheidet: *procedural*, *syntactic* und *semantic*. Betrachtungen unter den Aspekten des Problemlösens (wie Vorwissen, Heurismeneinsatz, Metakognition, aber auch eine Einteilung der Prozesse in Phasen) sind sehr rar. Eine Ausnahme bildet die Arbeit von Zazkis, Weber und Mejía-Ramos (2015), die sich im Gegensatz zur vorliegenden Arbeit mit fortgeschrittenen Studierenden beschäftigt, die mindestens die Veranstaltung Lineare Algebra II erfolgreich abgeschlossen haben und zusätzlich (anhand weiterer Tests und ihrer bisherigen Noten) als erfolgreich eingestuft wurden. Ihr Fokus liegt dabei auf der Beobachtung von Kontrollmechanismen (also Metakognition) und dem damit verbundenen Wechseln von Lösungsansätzen. Aufgrund der recht dünnen Forschungslage in diesem Bereich sollen mit der vorliegenden Arbeit grundlegende Erkenntnisse zum Problemlösen von Studienanfängern gewonnen werden. Da die Gruppe der Probanden sich hier anders zusammensetzt als bei Schoenfeld (1985 – hier Anfänger aus Mathematikstudiengängen, dort Studierende aus verschiedenen MINT-Studiengängen mindestens aus dem zweiten Studienjahr, die an einem Wahlpflicht-Kurs zum Problemlösen teilnehmen), sind auch andere Ergebnisse zu erwarten. Parallel zur vorliegenden Arbeit wurden an der Universität Münster Beweisprozesse von Studienanfängern untersucht (Kirsten, im Druck).

2.2 Problemlösen

Die vorliegende Arbeit fokussiert die Bearbeitung von mathematischen Aufgaben, wie sie in wöchentlichen Übungen, aber auch in Klausuren auftreten. Hierbei wird besonderes Augenmerk auf sogenannte Problemlöseaufgaben oder einfach *Probleme* gelegt. In Abschnitt 2.2.1 wird zunächst dargestellt, wie dieser Begriff hier verstanden wird und es werden Gemeinsamkeiten mit dem Begriff der Beweisaufgabe herausgearbeitet. Anschließend werden in Abschnitt 2.2.2 die Phasenmodelle von Pólya (1945) und Hadamard (1959) vorgestellt, die bei der Betrachtung von Problemlöseprozessen hilfreich sein können.

2.2.1 Begriffsdefinition

> Unter einem Problem wird mit großem Konsens in pädagogisch-psychologischem Zusammenhang eine (auf ein Individuum bezogene) Anforderung verstanden, deren Lösung mit Schwierigkeiten verbunden ist. […]
>
> Unter *Problemlösen* wird domänenübergreifend der Prozess der Überführung eines Ausgangszustandes in einen Zielzustand verstanden, bei dem gewisse (auch personenspezifische) Schwierigkeiten bzw. Barrieren überwunden werden müssen. (Heinrich, Bruder & Bauer, 2015)

Ob der oben genannte Konsens wirklich so groß ist, lässt sich hinterfragen. So sagt beispielsweise Leuders (2017): „Weniger Einigkeit herrscht darüber, was alles unter den Begriff Problemlösen fällt […]“. Zwar findet man sowohl in der deutschen (vgl. z. B. Büchter & Leuders, 2011; Dörner, 1979; Tietze, Klika & Wolpers, 2000; Klix, 1971; Vollrath, 1992; Zech, 1996) als auch der internationalen (vgl. z. B. Kilpatrick, 1985; Polya, 1980; Schoenfeld, 1989b) Problemlöseliteratur viele Charakterisierungen, die im Wesentlichen der obigen entsprechen, wobei der Begriff gerade im englischen Sprachraum weniger einheitlich verwendet wird. Das rührt daher, dass dort traditionell alle mathematischen Aufgaben als *problem* bezeichnet werden. Wird eine genauere Unterscheidung als notwendig erachtet, ist hier häufig von *routine* und *nonroutine problems* die Rede (vgl. Schoenfeld, 1992; Stanic & Kilpatrick, 1989; Pehkonen, 2001). Aber obwohl die expliziten Charakterisierungen im Wesentlichen übereinstimmen, gibt es einzelne Arbeiten, die den Problemlösebegriff etwas weiter fassen (z. B. Renkl, Gruber, Weber, Lerche & Schweizer, 2003). Funke & Zumbach (2006) sprechen sogar von *algorithmischem Problemlösen*, das „bei einfachen Problemen immer zur Lösung [führt], wenn die spezifizierten Regeln zur Überführung eines Ausgangszustands in einen Zielzustand berücksichtigt werden“ (S. 208). Bei den hier erwähnten Beispielen ist aufgrund der zitierten Quellen ein Einfluss aus dem englischsprachigen Raum zu vermuten, insgesamt kann aber über die Gründe für die breitere Verwendung des Begriffs nur spekuliert werden, es lässt sich aber sagfen, dass es sich hierbei um Autoren handelt, die eher aus psychologischen Fachbereichen stammen, innerhalb der (deutschen) Mathematikdidaktik herrscht aber tatsächlich großer Konsens darüber, welche Aufgaben als Problem verstanden werden.

Ein Problem lässt sich in Abgrenzung von einer Routineaufgabe definieren. Häufig wird von einer Barriere o. ä. gesprochen, die es in irgendeiner Form zu überwinden gilt. So findet man z. B. bei Pólya (1945) die folgenden Beschreibungen, die von einem *Hindernis* bzw. einer *Lücke* reden: „Going around an obstacle is what we do in solving any kind of problem.“(S. 232) und „We may represent our unsolved problem […] as a gap across which we have to construct a bridge“ (S. 73). Eine ausführliche Gegenüberstellung von ähnlichen Definitionen findet man z. B. bei Rott (2013). Zwei Dinge seien in diesem Zusammenhang noch betont: Erstens soll bei mathematischen Problemen die Barriere nicht darin bestehen, dass die durchzuführenden Rechenoperationen schwierig sind, sofern diese zum Repertoire des Problemlösers zählen (vgl. Schoenfeld, 1985). Zweitens spielt es eine wichtige Rolle dafür, ob eine Aufgabe als ein Problem gesehen wird oder ob Routineoperationen zugänglich sind, wer die Aufgabe bearbeitet und was seine Fähigkeiten, Erfahrungen und Kenntnisse sind (vgl. Vollrath, 1992). Aus diesem Grund stellt für viele Studierende, anders als eine reine Aufgabenanalyse suggerieren würde[6], ein Großteil der an der Universität zu bearbeitenden Aufgaben ein Problem dar. Zum

[6] Einer Studie von Lithner (2003) zufolge, sind in den USA etwa 70 % der Calculus-Aufgaben mit einfachen Mitteln lösbar. In der Analysis sind aufgrund der stärkeren Fokussierung von Beweisen geringere Anteile zu erwarten. Tatsächlich berichten Weber & Lindmeier (2020) von einem Anteil von etwa 30 % schematisch bearbeitbarer Aufgaben in der Analysis I. Bei einer eigenen Untersuchung (Stenzel, 2017) an der Universität Duisburg-Essen nehmen solche Aufgaben, abhängig vom verantwortlichen Dozenten, zwischen 24 % und 48 % ein

Teil hängt das mit der hohen Frequenz der von den Studierenden neu zu erlernenden Wissenkomponenten zusammen (vgl. Artigue, 2016), die für die Bearbeitung der Aufgaben notwendig sind, aber so schnell nicht in die kognitiven Strukturen der Studierenden internalisiert werden können, zum Teil sind mögliche Routineprozesse den Studierenden vor der Bearbeitung der Aufgaben nicht bekannt (etwa im Bereich der Grenzwertbestimmungen), so dass diese Lösungsverfahren von ihnen selbst entwickelt werden müssen.

Zusammenfassend wird in der vorliegenden Arbeit also ein *Problem* als eine Aufgabe verstanden, für deren Lösung dem Bearbeiter keine Routineverfahren zur Verfügung stehen. Leuders (2017) unterscheidet noch *Problemlösen im engeren Sinne* und *Problemlösen im weiteren Sinne*. Zu Letzterem zählt er zusätzlich zur Bearbeitung einer oder mehrerer Problemaufgaben, wie sie in diesem Abschnitt charakterisiert wurden, noch das eigenständige Finden von Problem- und Fragestellungen, das sicherlich beim Mathematiktreiben eine große Rolle spielt, sowie das Weiterentwickeln des Problems, das aus dem Aufgreifen während der Problembearbeitung aufgeworfener weiterführender Probleme und entdeckter Begriffe und Verfahren besteht. In der vorliegenden Arbeit wird unter *Problemlösen* aber ausschließlich der eigentliche Lösungsprozess (also das Problemlösen im engeren Sinne) verstanden.

Problemlösen und Beweisen

Betrachtet man die oben genannte Definition eines Problems, stellt sich gerade im Hochschulkontext die Frage, wie sich mathematische Beweise im Verhältnis zu diesem Begriff verhalten. Pólya (1979) unterscheidet zwischen *Beweisaufgaben* und *Bestimmungsaufgaben*. Diese Unterscheidung hat bis heute Bestand, wenngleich später noch die Kategorien der *Entdeckungsaufgaben* und der *Entscheidungsaufgaben* hinzugefügt wurden (vgl. Heinrich et al., 2015 und Stenzel, 2017). Letztere gehen im universitären Kontext häufig mit dem Operator „Beweisen oder widerlegen Sie“ einher und können in dem Zusammenhang als Spezialfall der Beweisaufgaben angesehen werden, während erstere an der Universität äußerst selten als Übungsaufgaben eingesetzt werden (Stenzel, 2017). Bei Bestimmungsaufgaben handelt es sich um Aufgaben, bei denen eine Unbekannte (im universitären Kontext etwa ein Grenzwert, das Supremum einer Menge oder die Lösungsmenge einer Gleichung) bestimmt werden muss, bei Beweisaufgaben soll eine Behauptung bewiesen werden. Grundsätzlich können Aufgaben aus allen Kategorien ein Problem oder eine Routineaufgabe darstellen. Nun ist es so, dass es bei Bestimmungsaufgaben an der

(an dieser Stelle sei angemerkt, dass die genannten Studien sich leicht darin unterscheiden, welche Aufgaben sie als schematisch einordnen).

Universität in der Regel nicht ausreicht, die Unbekannte zu bestimmen. Ohne dass es im Aufgabentext explizit erwähnt ist, wird erwartet, dass zusätzlich zur Bestimmung der Unbekannten auch bewiesen wird, dass diese die Bedingungen tatsächlich erfüllt. Aus diesem Blickwinkel können Bestimmungsaufgaben an der Universität also als Beweisaufgaben angesehen werden, bei denen zunächst noch vom Aufgabenbearbeiter bestimmt werden muss, was zu zeigen ist (ebd.). Damit können fast alle Aufgaben (und damit auch fast alle Probleme), die an der Universität gestellt werden, als Beweisaufgaben angesehen werden.

Andersherum stellt sich die Frage, inwiefern Beweisaufgaben[7] als Probleme angesehen werden können. Selden und Selden (2009) unterscheiden den *formal-rhetorical* Teil eines Beweises vom *problem-centered* Teil. Erstere besteht zum einen aus Routineoperationen (sie sprechen hier vom direkten Anwenden zugehöriger Definitionen und vorheriger Ergebnisse – es sei an dieser Stelle angemerkt, dass auch dieser Teil Studierenden schon Probleme bereiten kann), zum anderen aus für formale Beweise typischen Wendungen, die den Rahmen des Beweises bilden (etwa bei einem Stetigkeitsbeweis: Sei $x \in D_f$ und $\varepsilon > 0 \ldots$Dann ist $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x_0 \in U(x;\delta)$). Solche Wendungen sind laut Selden und Selden leicht erlernbar und benötigen neben der Definition der vorkommenden Begriffe kein spezielles Wissen, können aber dabei helfen, Ideen zum Lösen der Aufgabe zu generieren. Das obige Beispiel legt nahe, die durch die drei Punkte angedeutete Lücke des Beweises zu füllen, indem ein geeignetes δ gesucht wird. Der *problem-centered* Teil kann als Problemlösen im obigen Sinne bezeichnet werden (Selden und Selden beziehen sich hier auf Schoenfelds (1985) Definition eines Problems). Da eine Aufgabe bereits dann als Problem gilt, wenn nur an einer Stelle eine Barriere mit anderen als Routinemitteln überwunden werden muss, ist also jede Beweisaufgabe, die nicht ausschließlich *formal-rhetorical* ist, ein Problem. Selden und Selden (ebd.) betonen aber, dass es auch solche Beweise gibt. Ein Beispiel hierfür wäre der Beweis, dass die $n \times n$-Matrizen eine Gruppe bilden. Das Nachweisen der Gruppenaxiome stellt, sofern es schon an anderen Beispielen betrachtet wurde, für die meisten Studierenden kein Problem dar. Insgesamt gibt es bei Übungsaufgaben im Mathematikstudium eine große Schnittmenge zwischen Problemlöseaufgaben und Beweisaufgaben (vgl. Stenzel, 2017), weswegen es sich lohnt, auch Theorien zum Lernen von Beweisen (siehe Abschnitt 2.4) für die Konzeption einer Fördermaßnahme in Betracht zu ziehen.

[7] An dieser Stelle wird ausschließlich die Beweiskonstruktion zu einer vorher aufgestellten Behauptung betrachtet. Von vielen wird das Aufstellen und Formulieren einer Vermutung bereits als Teil des Beweisprozesses angesehen (z. B. Boero, 1999). Interessant ist auch, dass andere mit Beweisen verbundene Aspekte, wie das Verstehen von Beweisen, ebenfalls als Problemlöseprozesse angesehen werden können (vgl. Mamona-Downs & Downs, 2005).

2.2.2 Phasenmodelle des Problemlösens

George Pólya hat den Problemlöseprozess in seinem Buch „How to solve it" (Pólya, 1945) in vier Phasen unterteilt. Da eine solche Betrachtung sowohl für die theoretische Betrachtung des Problemlösens, die bei der Konzeptualisierung von Fördermaßnahmen von Nutzen sein kann (vgl. Abschnitt 4.4), als auch bei der Analyse von Problembearbeitungen (siehe Abschnitt 5.3.1) hilfreich ist, sollen diese Phasen im Folgenden kurz beschrieben werden[8]:

Understanding the Problem
In dieser ersten Phase geht es darum, das Problem zu verstehen. Man schaut sich genau an, was gegeben (*data* und *condition* bei Bestimmungsaufgaben, *hypothesis*[9] bei Beweisaufgaben) und was gesucht ist (*unknown* bzw. *conclusion*[9]) und gibt die Aufgabe mit eigenen Worten wieder. Außerdem kann das Verständnis des Problems durch Anfertigen einer Skizze oder andere Repräsentationswechsel und durch Einführen geeigneter Bezeichnungen erleichtert werden.

Devising a Plan
Hier soll die Verbindung zwischen Gegebenem und Gesuchtem hergestellt und ein Lösungsplan erstellt werden. Hierzu können analoge Probleme und deren Lösungsmethoden bzw. äquivalente Formulierungen des Problems herangezogen oder Teilprobleme betrachtet werden. Der Plan muss hier noch nicht perfekt ausgearbeitet sein. Eine ausführlichere Betrachtung möglicher Strategien, die bei der Suche nach einem Plan helfen können, folgt in Abschnitt 2.3.2.

Carrying Out the Plan
Bei der Durchführung des Plans soll jeder einzelne Schritt genau überprüft werden. Diese Phase erfordert hauptsächlich Geduld, da die kreative Arbeit bereits bei der Erstellung des Plans geleistet wurde (ebd. S. 12). Bei komplexeren Problemen soll hier von großen zu kleinen Schritten vorgegangen werden.

Looking Back
Hier werden Ergebnis und Argumentation nicht nur auf Korrektheit und Vollständigkeit überprüft, es geht vor allem auch darum, aus dem Vorgehen zu lernen und

[8] Bei der Bezeichnung der einzelnen Phasen wurde das englische Original beibehalten. Das hat auch den Vorteil, dass eine Verwechslung mit anderen Begriffen (z. B. der Planungsphase einer Unterrichtseinheit) weniger wahrscheinlich ist.

[9] Die wörtliche Übersetzung dieser Begriffe bringt einige Probleme mit sich, da *Hypothese* und *(Schluss-)Folgerung* im heutigen Deutsch etwas anderes meinen. Gebräuchlich wären beispielsweise *Voraussetzung* und *Behauptung*. Auch Pólya ist sich der Problematik sich wandelnder Bedeutungen bewusst, wie im Abschnitt **Terms, old and new** (Pólya, 1945, S. 200 f.) deutlich wird.

sowohl Ergebnis, als auch Methode für andere Probleme nutzbar zu machen und in das eigene Vorwissen einzubetten. In dieser Phase soll auch nach alternativen, möglicherweise eleganteren oder direkteren Lösungswegen gesucht werden.

Weiter unten (ebd. S. 33 f.) beschreibt Pólya die einzelnen Phasen genauer. Interessant ist, dass die erste Phase hierbei noch weiter unterteilt ist in:

Getting Acquainted
Um sich mit dem Problem vertraut zu machen, seinen Sinn zu verstehen und sich wichtige Punkte einzuprägen, wird das Problem zunächst als Ganzes so klar und plastisch wie möglich betrachtet. Hierbei werden Details zunächst vernachlässigt.

Working For Better Understanding
Erst jetzt werden die Hauptteile des Problems (das Gegebene und das Gesuchte) detaillierter und isoliert voneinander betrachtet und jede Einzelheit zu den anderen und zum Ganzen in Verbindung gesetzt.

Die Unterteilung dieser ersten Phase wird, wenn im Folgenden von den *Pólya-Phasen* die Rede ist, nicht weiter beachtet. Hiermit sind, gemäß den allgemeinen Konventionen, die eingangs erwähnten vier Phasen gemeint.

Bemerkenswert ist ebenfalss die etwas detailliertere Beschreibung der zweiten Phase (ebd., S. 34 f.), da hier der Wert nicht-zielführender Ideen, metakognitiver Steuerung (vgl. Abschnitt 2.3.3) und des Vorwissens (vgl. Abschnitt 2.3.1) betont wird. Auch wird bereits in dieser kurzen Zusammenfassung die mögliche Komplexität von Problemlöseprozessen deutlich, da a priori schwer zu sagen ist, welche der vielen möglichen Ansatzpunkte zum Ziel führt:

Hunting For the Helpful Idea
Ziel dieser Phase ist es, Ideen zu finden, die das weitere Vorgehen zum Erreichen des Ziels oder eines Teilziels aufzeigen können. Hierbei sind auch unvollständige Ideen gerne gesehen. An dieser Stelle soll der Nutzen dieser Ideen eingeschätzt werden und ob es sich lohnt, diese weiter zu verfolgen. Durch eine solche Betrachtung des Problems kann sich die Wahrnehmung des Bearbeiters ändern. So können Ideen zu neuen Ideen, zur Lösung des Problem oder aber in die Irre führen. In dieser Phase soll das Problem, ausgehend von seinen vorher bereits ausführlich betrachteten und möglichst verinnerlichten Hauptteilen, von verschiedenen Seiten betrachtet werden. Hierbei können bestimmte Punkte fokussiert, Details auf verschiedene Weisen untersucht, verschiedene Punkte miteinander in Verbindung gesetzt und hierdurch neu entstehende Interpretationen

einzelner Punkte, sowie des Ganzen betrachtet werden. Eine wichtige Rolle spielt hier auch die Verknüpfung mit dem Vorwissen. Es soll nach vertrauten Elementen gesucht und daraus Nutzen gezogen werden, was in ähnlichen Situationen geholfen hat.

Eine weitere Möglichkeit, Problemlöseprozesse zu beschreiben, bietet das vierstufige Modell von Wallas (1926), der sich auf die Überlegungen bzw. Beschreibungen der eigenen Erkenntnisprozesse von Dewey (1997), Poincaré (1914), Helmholtz (1898) und anderen bezieht. Hierbei spielt das Konzept der *Illumination*, einer unerwarteten Eingebung, einer plötzlichen Idee, eines Lichtaufgehens, eines Geistesblitzes, eine entscheidende Rolle. Hadamard (1959) hat dieses Phänomen weiter untersucht und eine eigene Version des Modells eingeführt. Es besteht aus den Phasen *Inintiation*, *Incubation*, *Illumination* und *Vérification*. Entscheidend ist hierbei, dass eine Eingebung nicht einfach so kommt. Ihr muss zwingend eine Phase der Vorbereitung (*Initiation*) vorangehen, bei der das Problem von allen Seiten betrachtet und ein Lösungsversuch unternommen wird. Sollte an dieser Stelle noch kein entscheidender Ansatz gefunden werden, wird die Entfernung vom Problem empfohlen (Phase der *Incubation*), während der sich das Unterbewusstsein mit dem Problem beschäftigen kann. Viele Anekdoten, nicht nur von den oben genannten Wissenschaftlern (vgl. Ghiselin, 1985), erzählen dann von einer plötzlichen *Illumination*[10], einer für die Lösung des Problems entscheidenden Idee, die letztlich wieder durch bewusste Auseinandersetzung verifiziert werden muss. Diese *Vérification* entspricht weniger, wie man vielleicht vermuten mag, einer Kontrolle einer bereits fertigen Lösung, wie das in Pólyas *Looking-Back*-Phase geschieht. Vielmehr muss wie in der dritten Pólya-Phase der Plan erst noch ausgeführt werden. Dieses Modell scheint für die Hochschulmathematik von großer Bedeutung zu sein. Denn im Gegensatz zur Schulmathematik, bei der für die Bearbeitung von Aufgaben im Unterricht maximal eine Doppelstunde zur Verfügung steht und auch Hausaufgaben selten über einen längeren Zeitraum als zwei bis drei Tage zu bearbeiten sind, ist es an der Hochschule eher die Regel, dass für die Bearbeitung von Übungsaufgaben eine Woche zur Verfügung steht. So kann die Möglichkeit, das Unterbewusstsein an der Lösung von Problemen zu beteiligen, bei der Zeitplanung mit einbezogen werden (vgl. Lehn, o. D.), wenngleich Poincaré (1914) im Zusammenhang mit mathematischer Forschung auch deutlich längere Inkubationszeiten im Blick hatte.

[10] Pólya hat solche Phänomene zwar nicht in sein Phasenmodell eingebaut, sie waren ihm aber sehrwohl bekannt. Er widmet ihnen einen ganzen Abschnitt mit dem Titel *Subconcious work* (Pólya, 1945, S. 197 f.).

Vergleiche verschiedener Verlaufsmodelle zum Problemlösen findet man u. a. bei Neuhaus (2001) und Rott (2014).

2.3 Einflussfaktoren auf das Problemlösen

Nach Schoenfeld gibt es vier Aspekte, die Problemlöseprozesse beeinflussen können. In seinen ursprünglichen Bezeichnungen[11] (Schoenfeld, 1985, S. 15) sind das:

Ressources: Die zur Verfügung stehende (mathematische) Wissensbasis, auf die beim Bearbeiten eines Problems zurückgegriffen werden kann.

Heuristics: Strategien, die beim Bearbeiten eines Problems helfen können.

Control: Regulation des eigenen Vorgehens, hauptsächlich durch Auswahl von Ressourcen und Strategien sowie Entscheidungen zu deren Umsetzung.

Belief Systems: Ansichten zur Mathematik, die das individuelle Verhalten bewusst oder unbewusst beeinflussen können.

In den folgenden Abschnitten soll genauer auf diese Faktoren eingegangen werden. Rott (2013) stellt in der Einleitung dem Modell von Schoenfeld noch weitere entgegen.

2.3.1 Ressourcen

Unter Ressourcen versteht Schoenfeld (ebd.) alles dem Problembearbeiter zur Verfügung stehende, für das Problem relevante Wissen, also alle Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren, die auf das Problem angewendet werden können. Hierbei ist es zunächst nicht von Bedeutung, ob es sich um falsche Vorstellungen oder missverstandene Fakten handelt (vgl. auch Schoenfeld, 1992). Diese Wissensbasis ist offensichtlich dömanenspezifisch. So kann ein Experte auf einem Gebiet Schwierigkeiten in einem anderen Gebiet haben, wenn ihm hier das Vorwissen fehlt. Außerdem kann es vorkommen, dass zwar das nötige Wissen vorhanden ist, während des Problemlöseprozesses aber nicht darauf zurückgegriffen wird. Es ist also wichtig, aus der großen Menge an vorhandenen Informationen die relevanten herauszugreifen

[11] Obwohl diese vier Kategorien zwischenzeitlich leicht abgewandelt wurden (vgl. z. B. Schoenfeld, 1992; Schoenfeld, 2010), treten sie zuletzt (z. B. Schoenfeld, 2015) wieder in der ursprünglichen Form auf, mit den Bezeichnungen 1. *Knowledge (or more broadly, ressources)*, 2. *Problem solving strategies, also known as „heuristics“*, 3. *„Metacognition“ or „Monitoring and self-regulation“* und 4. *Beliefs.*

und auf das Problem anzuwenden. Dies ist eine Frage der Kontrolle und wird weiter unten genauer behandelt. Grundsätzlich wird durch das vorhandene Wissen beeinflusst, worauf man seine Aufmerksamkeit lenkt und welche Details verstanden und behalten werden (Alexander, 1996).

Exkurs: Lernstrategien

Lernstrategien selbst sind kein direkter Einflussfaktor auf das Problemlösen. Dennoch stellt sich die Frage, auf welche Art das zum Problemlösen nötige Vorwissen aufgebaut werden kann. Gerade an der Universität liegt es häufig nicht in der Hand des jeweiligen Dozenten, ob Studierende solches Wissen hinreichend verinnerlicht haben. Die Verantwortung für ihre Lernprozesse tragen die Studierenden selbst (Grünwald, Kossow, Sauerbier & Klymchuk, 2004; Wild, 2005). Es ist daher angebracht, im Folgenden einen genaueren Blick auf Strategien zu werfen, die dabei helfen können, den in der Vorlesung in großer Dichte präsentierten Stoff (vgl. Artigue, 2016) zu lernen.

Grundsätzlich verstehen wir unter Lernstrategien „Verhaltensweisen und Gedanken, die Lernende aktivieren, um ihre Motivation und den Prozess des Wissenserwerbs zu beeinflussen und zu steuern“ (Friedrich & Mandl, 2006; vgl. auch Weinstein & Mayer, 1983). Hierbei wird in der Regel zwischen *kognitiven Strategien*, die sich direkt mit der Informationsaufnahme, -verarbeitung und -speicherung beschäftigen, *metakognitiven Strategien*, bei denen es um die Kontrolle und Steuerung des (eigenen) Lernens geht, und *ressourcenbezogenen Strategien* unterschieden. Hierbei sind Ressourcen nicht im Sinne von Schoenfeld gemeint, es geht vielmehr um das Management interner Ressourcen (Anstrengung, Zeiteinsatz, Aufmerksamkeit und Konzentration) sowie die Nutzung von externen Ressourcen (verschiedene Medien als Informationsquellen, Hilfestellungen durch Tutoren oder Kommilitonen sowie Gestaltung des Arbeitsplatzes) (vgl. Mandl & Friedrich, 2006; Wild, 2005). Strategien sind dafür da, durch zielgerichtete Auseinandersetzung mit dem Lernstoff geistige Kapazitäten zu schonen.

Auf metakognitive Strategien sowie kooperatives Lernen wird weiter unten genauer eingegangen. An dieser Stelle sollen die kognitiven Strategien genauer unter die Lupe genommen werden: Hierbei unterscheidet man zwischen den *Elaborationsstrategien*, den *Organisationsstrategien* und den *Wiederholungsstrategien* bzw. *Memorierungsstrategien*. Letztere zählen zu den Oberflächenstrategien (hier werden oberflächliche Merkmale des zu lernenden Stoffes auswendig gelernt), während die ersten beiden zu den Tiefenstrategien (es werden strukturelle Merkmale des Stoffes betrachtet, mit dem Ziel, diesen besser zu verstehen) zählen (vgl. hierzu Artelt, 2005).

Bei den *Elaborationsstrategien* geht es darum, Zusammenhänge zwischen dem neu zu erlernenden und bereits vorhandenem Wissen herzustellen (ebd.). Dadurch werden neue Informationen in bestehende Wissensstrukturen integriert. Durch solche Verknüpfungen wird das Abrufen dieser Informationen erleichtert (Friedrich & Mandl, 2006). Je besser das Wissen vernetzt ist, desto schneller und automatisierter kann die Aktivierung von Vorwissen geschehen (Klimesch et al., 1995; Boshuizen, 2004). Das kann gerade bei der Bearbeitung von Problemen von großer Bedeutung sein.

Die *Organisationsstrategien* sollen Zusammenhänge zwischen den neu zu erlernenden Inhalten herstellen (Artelt, 2005). Diese werden umorganisiert und neu strukturiert, um sie in eine leichter zu verarbeitende Form zu bringen (Wild, 2005). Typische Strategien sind die Reduktion eines Textes auf das Wesentliche, die Nutzung von Wissensschemata (s. u.) sowie der Wechsel von Darstellungen (Friedrich & Mandl, 2006).

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Grenze zwischen Organisations- und Elaborationsstrategien fließend ist. Während beim Betrachten von Beispielen fast immer an das Vorwissen angeknüpft wird, lässt sich z. B. bei der Nutzung verschiedener Darstellungen (Erstellen von Skizzen, Mind Maps, Tabellen etc.) nicht a priori sagen, ob nur neue Informationen dargestellt werden oder auch Vorwissen in die Darstellung mit einfließt. Auch lässt sich nicht genau festlegen, wann im Lernprozess eine neue Information als in den Wissensspeicher aufgenommen gilt, womit die Verknüpfung mit dieser Information von einer Organisations- zu einer Elaborationsaktivität wird.

Bei den *Wiederholungsstrategien* geht es um das Auswendiglernen durch Wiederholen (Steiner, 2006). Hierzu zählen neben dem inneren Wiederholen von Informationen, mit dem Ziel, diese im Arbeitsgedächtnis aufrecht zu erhalten, auch das wiederholte Abrufen von Informationen und das wiederholte Anwenden von Prozeduren. Letzteres kann dazu führen, dass verschiedene Subroutinen zu größeren Einheiten (sogenannten Chunks – vgl. Miller, 1956) verbunden werden, was deren Abruf erleichtert (ebd. S. 107). Bei den Mnemotechniken, die das Nutzen von Eselsbrücken und das Verknüpfen der zu lernenden Informationen mit selbst ausgedachten Geschichten einschließen, ist nicht ganz klar, ob diese zu den Wiederholungsstrategien zählen, weil es um pures Auswendiglernen geht, oder ob aufgrund der gebildeten Verknüpfungen eine Zuordnung zu den Elaborationsstrategien sinnvoll ist (Stangl, 2006). Im Folgenden werden sie den Wiederholungsstrategien zugeordnet, da die Verknüpfungen nicht von inhaltlicher Relevanz sind.

Tabelle 2.1 Übersicht über verschiedene Lernstrategien

Kognitive Strategien	Tiefenstrategien Oberflächenstrategien	Elaborationsstrategien Organisationsstrategien Wiederholungsstrategien
Metakognitive Strategien		
Ressourcenbezogene Strategien		Interne Ressourcen Externe Ressourcen

In Tabelle 2.1 sind die verschiedenen Klassen von Lernstrategien nach Wild und Schiefele (1994) dargestellt.

Ohne Anspruch auf Vollständigkeit oder Überschneidungsfreiheit zu erheben, gibt die folgende Auflistung einen Überblick über allgemeine kognitive Lernstrategien. Hierbei werden aufgrund der fließenden Grenzen Organisations- und Elaborationsstrategien unter dem Begriff der *Tiefenstrategien* zusammengefasst:

- Tiefenstrategien[12]
  - Multiple Repräsentationen des Lernstoffs (Darstellungswechsel)
  - Mit eigenen Worten umformulieren
  - Informationen auf das Wesentliche reduzieren
  - Unterstreichen und Markieren
  - Erstellen von Mind Maps und anderen Formen der visuellen Verknüpfung
  - Beispiele betrachten
  - Fragen, Hypothesen, Erklärungen und Beispiele generieren
  - Analogien bilden
  - Anwendungskontexte heranziehen
  - Wissensschemata nutzen etc.
- Oberflächenstrategien
  - Inneres Wiederholen der neuen Information
  - Wiederholtes Abrufen
  - Wiederholte Anwendung
  - Mnemotechnik

[12] Viele der hier aufgeführten Strategien stellen in sehr ähnlicher Form auch hilfreiche Anknüpfungspunkte beim Problemlösen dar und werden als *Heurismen* in Abschnitt 2.3.2 aufgelistet. Der naheliegende Grund für diese Parallelen liegt darin, dass es in beiden Fällen darum geht, zu tieferem Verständnis (des Lernstoffes bzw. der Aufgabenstellung) zu gelangen. Auf diese Ähnlichkeit wird weiter unten ausführlicher eingegangen.

Eine Strategie, deren Bedeutung nicht unmittelbar aus der Bezeichnung klar wird, ist das Nutzen von Wissensschemata. Daher wird im Folgenden genauer erläutert, was ein Wissensschema ist. Hierunter versteht man die Zusammenfassung der mentalen Repräsentationen einzelner Wissenskomponenten zu einem zusammenhängenden Konzept (vgl. Anderson & Pearson, 1984). Diese Schemata umfassen sowohl konzeptuelles als auch prozedurales Wissen. Sie werden meist unbewusst gebildet und erleichtern sowohl das Abrufen als auch das Abspeichern von Informationen (vgl. Kopp & Mandl, 2005). In der Mathematik können das Begriffe sein, aber auch Verfahren und andere zusammenhängende Phänomene. Ein einfaches Beispiel wäre der Begriff des *Körpers*. Ein typisches Vorgehen an der Universität wäre es, zunächst eine Definition (Menge mit zwei Verknüpfungen) mit zugehörigen Axiomen (neutrales Element, inverses Element, Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz) zu liefern. Dann werden erste Beispiele (rationale bzw. reelle Zahlen, Körper mit zwei Elementen etc.) genannt. Nach und nach kommen weitere Eigenschaften (z. B. Rechenregeln) hinzu, weitere Beispiele (z. B. komplexe Zahlen) und Verknüpfungen zu anderen Begriffen (Gruppen, Anordnungen, Vollständigkeit etc.). Wie bereits erwähnt, kann aber auch prozedurales Wissen, wie die Anwendung des Gauss-Algorithmus, aber auch weniger festgelegte Vorgehensweisen, wie der Umgang mit Folgenkonvergenz, als Schema abgespeichert werden. Es können sich sogar verschiedene Schemata zu einem großen Schema verbinden, z. B. Wissen zum Themenbereich Folgen und Reihen. Gut ausgebildete Schemata machen einen dann zum Experten in diesem Gebiet, was zwei Vorteile hat: Zum einen wird bei neuen Informationen die Aufmerksamkeit auf die relevanten Aspekte gelenkt, zum anderen gelingt die Integration von neuem Wissen in das passende Schema leichter (ebd.). Aus diesen Gründen erleichtern gut ausgebildete Schemata die Bearbeitung von Problemen in diesem Fachgebiet (vgl. Chi, Feltovich & Glaser, 1981, Bielaczyc, Pirolli & Brown, 1995). Auch Aufgabentypen und hierzu passende Lösungsmethoden können Schemata bilden. Es gibt sogar Schemata für das Problemlösen selbst (Kopp & Mandl, 2005). Hierauf wird in Abschnitt 2.3.2 näher eingegangen. Um den Lernerfolg zu verbessern, kann es hilfreich sein, durch einen Experten (die Lehrkraft) ein Schema vorzugeben, entweder durch direktes Training oder durch Integration in die Lernumgebung (ebd.).

Betrachtet man die obige Aufzählung von Strategien genauer, so wird man erkennen, dass sich manche mehr und manche weniger gut für den Einsatz in der Hochschulmathematik eignen. So ist es beispielsweise kaum möglich, Informationen aus einem mathematischen Text, wie dem Skript einer Vorlesung, weiter zu reduzieren, ohne dabei inhaltliche Verkürzungen (z. B. beim Geltungsbereich einer Aussage) vorzunehmen (vgl. Liebendörfer, 2018, Kapitel 2). Der Grund dafür ist, dass die Verwendung mathematischer Fachsprache unter anderem zum Ziel hat, wichtige

Informationen möglichst verdichtet zu kommunizieren (vgl. Hußmann, 2017, S. 61). Andererseits lässt sich mathematisches Wissen aufgrund der ihm innewohnenden Struktur (Definition – Satz – Beweis) besonders gut ordnen (ebd.). Auch das Betrachten und Generieren von Beispielen (und Gegenbeispielen) ist von großer Bedeutung (vgl. Mejia-Ramos, Fuller, Weber, Rhoads & Samkoff, 2012). Der Abgleich mit Vorwissen ist aufgrund des deduktiven Aufbaus der Mathematik nicht nur hilfreich, sondern notwendig für ein gutes Verständnis (Houston, 2012). Das Heranziehen von Anwendungskontexten hingegen ist eine Strategie, die zumindest in der Fachmathematik bald an Grenzen stößt (Liebendörfer et al., 2020). Was die Oberflächenstrategien angeht, so hat das wiederholte Anwenden, also das Einüben von gewissen Prozeduren zum Aufbau von Routinen, eine besondere Stellung in der Mathematik (vgl. Göller, 2020). Dasselbe gilt für Beweise (vgl. Grieser, 2015). Zum einen kann man durch das Betrachten von Beweisen innere Zusammenhänge von Sätzen erkennen, zum anderen werden hierdurch oft auch Verknüpfungen zu vorherigen Aussagen gebildet (vgl. Liebendörfer et al., 2020). Nach Hodds, Alcock und Inglis (2014) kommt es beim Nachvollziehen von Beweisen auf zwei Dinge an: Zum einen sollen die Kernideen des Beweises erkannt werden, zum anderen soll bei jedem einzelnen Beweisschritt der Zusammenhang mit vorherigen Schritten des Beweises und anderem Vorwissen hergestellt werden. In beiden Fällen wird die Tiefenstruktur eines Satzes unter die Lupe genommen, was der reinen Aussage des Satzes mehr Bedeutung verleiht.

In einem Praxisartikel für die Schulmathematik haben sich Prediger, Hußmann, Barzel und Leuders (2011) genauer mit dem Sichern und Systematisieren von neuem Wissen beschäftigt und unterscheiden hierbei verschiedene in Betracht zu ziehende *Facetten* und *Arten des Wissens* (S. 3), die sich im Wesentlichen auf die Hochschule übertragen lassen. Die Arten des Wissens sind klassisch aufgeteilt in *Begriffe* (hier: Konzepte), *Zusammenhänge* und *Verfahren* (vgl. Vollrath & Roth, 2012), wobei die Verfahren noch in *mathematische* und *handwerkliche Verfahren* aufgeteilt sind. Da letztere in der Universitätsmathematik aber nicht vorkommen[13], wird im Folgenden auf diese Unterscheidung verzichtet. Facetten des Wissens sind die *explizite Formulierung*, die *Konkretisierung und Abgrenzung*, die *Bedeutung und Vernetzung* sowie *konventionelle Festlegungen*. *Explizite Formulierungen* entsprechen an der Universität ziemlich genau der Definition eines Begriffs bzw. dem Satz, der einen Zusammenhang beschreibt. Bei Verfahren werden diese durch eine genaue Anleitung dargestellt. *Konkretisierung und Abgrenzung* geschehen bei Begriffen und Zusammenhängen in der Regel durch Beispiele und Gegenbeispiele. Bei Ver-

[13] Beispiele aus der Schule wären das Abmessen und Zeichnen von Winkeln, das genaue Einzeichnen einer Winkelhalbierenden usw.

fahren ist hiermit das Wissen über die Grenzen der Anwendbarkeit, Spezialfälle und typische Fehler gemeint. *Vernetzung* und das Verleihen von *Bedeutung* können durch das Betrachten verschiedener Darstellungen, anschaulicher Begründungen und formaler Beweise geschehen. Mit *konventionellen Festlegungen* sind Namen, Bezeichnungen sowie die Bedeutung von mathematischen Symbolen und Buchstaben gemeint. Prediger et al. (ebd.) empfehlen der Lehrkraft, für jede der Facetten zu entscheiden, ob diese einer besonderen Aufmerksamkeit bedarf oder nicht. Auch wenn in der Universitätsmathematik die explizite Formulierung häufig im Mittelpunkt steht, ist klar, dass diese allein zum Verständnis oft nicht ausreicht und sie zur Bildung tragfähiger Vorstellungen durch die Betrachtung der anderen Facetten angereichert werden muss (vgl. Prediger, 2009). Wie man sieht, decken sich die Erkenntnisse von Prediger et al. (2011) in großen Teilen mit den vorherigen Überlegungen.

Was die Auswirkungen verschiedener Lernstrategien auf den Studienerfolg angeht, ist die Studienlage nicht eindeutig. Zwar wird auf theoretischer Ebene den Tiefenstrategien ein positiver Effekt attestiert und von der Nutzung oberflächlicher Strategien abgeraten (z. B. Entwistle & Entwistle, 1991, Entwistle & Marton, 1994), ebenso wurde gezeigt, dass Tiefenlernen grundsätzlich positiv mit Verständnis korreliert (Marton & Säljö, 1984), allerdings spiegeln sich diese Erfolge nicht in den Studienleistungen wider (vgl. Artelt, 1998, Wild, 2000). Mögliche Erklärungen hierfür sind zum einen die Art der Prüfungen an den Hochschulen, die unter Umständen nicht ausschließlich die Qualität der Lernleistungen erfassen, zum anderen die Erfassung des Lernstrategieeinsatzes, die häufig in Form von Fragebögen geschieht. Hier ist fraglich, ob die Selbstbeurteilungen der Probanden bei der abstrakten Form, in der die Fragen gestellt sind, adäquat sind (Artelt, 1998). Es gibt empirische Studien, die den Lernstrategieeinsatz durch Handlungsanalysen ermitteln und einen positiven Zusammenhang zwischen dem grundsätzlichen Einsatz von Lernstrategien und dem Lernerfolg aufzeigen (Lehtinen, 1992, Renkl, 1997). Allerdings wurde hier keine Unterscheidung zwischen verschiedenen Strategien gemacht, so dass hieraus nicht abzuleiten ist, welche Strategien sich besonders positiv auf den Lernerfolg auswirken und welche eher nicht. Der positive Einfluss von metakognitiven Strategien und Anstrengung auf den Lernerfolg wurde hingegen mehrfach gezeigt (Jamieson-Noel & Winne, 2003; Schiefele, Streblow, Ermgassen & Moschner, 2003; Schunk, Meece & Pintrich, 2014; Wild & Schiefele, 1994; Zimmerman & Schunk, 2009). Auf metakognitive Strategien wird in Abschnitt 2.3.3 genauer eingegangen. In der Mathematik stellte sich zudem zunächst das Problem, dass die fachunspezifisch erhobenen Lernstrategien nicht immer sinnvoll einsetzbar sind (s. o.) und sich keine Korrelationen zwischen diesen und der Mathematikleistung zeigen. Erste Versuche, Lernstrategien mathematikspezifisch zu erfassen, zeigen aber gewisse Zusammenhänge. So haben Kolter et al. (2018) in der Grundschullehrerausbildung eine signifikante positive Korrelation zwischen Elaborationsstrategien und Testleistung sowie eine signifikante negative Korrelation zwischen Wiederholungsstrategien und Testleistung gezeigt. Ein Ergebnis zu Organisationsstrategien wird hier nicht präsentiert. Eley und Meyer (2004) haben bei Studienanfängern der Mathematik festgestellt, dass die erfolgreichsten Studierenden besonders hohe Durchschnittswerte in einer Kategorie, die sie *Systematic and Principled Use of Examples* nennen, aufweisen. Schaut man sich die Items dieser Kategorie genauer an, sieht man, dass diese Bezeichnung etwas irreführend ist. Es geht nicht, wie man vermuten könnte, um das systematische Betrachten von Beispielen zum Verständnis von Definitionen oder Sätzen, sondern um das Bearbeiten vieler Übungsaufgaben und das Betrachten von Lösungsbeispielen. Da diese Bearbeitung nicht genauer spezifiziert ist, könnte es sich also auch um das Einüben von Prozeduren durch Wiederholung handeln. Dieses wird im Gegensatz zu anderen Wiederholungsstrategien auch von Alcock (2017) empfohlen. Das im vergangenen Jahr fertiggestellte Untersuchungsinstrument *LimSt* (Liebendörfer et al., 2020), das speziell auf Lernstrategien im Mathematikstudium zugeschnitten ist, eröffnet die Möglichkeit zu prüfen, ob sich die genannten Ergebnisse bestätigen und auf andere Studiengänge übertragen lassen.

Zusammenfassend wird Studierenden also die Nutzung folgender mathematikspezifischer Lernstrategien empfohlen (vgl. auch Alcock, 2017):

- Explizite Formulierungen nachvollziehen (auch durch Wiedergabe mit eigenen Worten)
- Konkretisierung und Abgrenzung durch Betrachten und Generieren von Beispielen und Gegenbeispielen
- Verleihen von Bedeutung durch Darstellungswechsel
- Verleihen von Bedeutung durch Begründungen und Beweise
- Beweisverständnis durch Self-Explanations
- Vernetzung durch Beweise
- Vernetzung durch externe Visualisierungen (Mind Maps, Listen)
- Wiederholtes Anwenden von Verfahren

2.3.2 Heurismen

Betrachtet man das Problemlöseverhalten von Experten (beispielsweise von Mathematikern), so lassen sich eine Reihe von systematischen Herangehensweisen erkennen, die mehr oder weniger bewusst verwendet werden. Solche Herangehensweisen bezeichnen wir als *Heurismen*. Bevor eine genauere Charakterisierung des Begriffs vorgenommen wird, sei auf eine Schwierigkeit der englischen Sprache hingewiesen. Hier beschreibt der Begriff *heuristic* sowohl eine einzelne Problemlösestrategie (zu deutsch: *Heurismus*), als auch, grob gesagt, die Lehre solcher Strategien (*Heuristik*). Eine Unterscheidung dieser beiden Konzepte wird auch über den Numerus vorgenommen: Wird der Plural *heuristics* verwendet, sind Heurismen gemeint, der Singular *heuristic* ist in diesem Zusammenhang eher nicht gebräuchlich[14]. Wird dieser verwendet, ist also meist die Heuristik gemeint. Eine klare Definition von Heurismen ist schwierig. Etymologisch stammt das Wort von dem altgriechischen Verb *εὑρίσκειν* (heurískein: finden, entdecken) (Wirtz, 2017) ab und hat somit denselben Wortstamm wie der berühmte Ausruf Archimedes' „Heureka!" (Ich habe (es) gefunden). Schoenfeld (1985) bezeichnet Heurismen als „rules of thumb", frei übersetzt also als Faustregeln, Pólya (1945, S. 130) beschreibt sie als „mental operations typically useful [in the process of solving problems]", also alle mentalen Operationen, die beim Problemlösen hilfreich sind. Später wird er etwas präziser:

> A reasonable sort of heuristic cannot aim at unfailing rules; but it may endeavor to study procedures (mental operations, moves, steps) which are typically useful in solving problems. Such procedures are practiced by every sane person sufficiently interested in his problem. They are hinted by certain stereotyped questions and suggestions which intelligent people put to themselves and intelligent teachers to their students (ebd. S. 172).

Er unterscheidet Heurismen also von unfehlbaren Regeln. Bruder und Collet (2011, S. 42) benennen diesen Unterschied noch deutlicher (vgl. auch König, 1992):

> Heuristische Verfahren bieten keine Lösungsgarantie wie die Algorithmen, sie bieten lediglich Orientierung, eine Art Geländer beim Lösen einer Aufgabe, wo man nach Bedarf mal zugreift, um sich zu stützen. Auch eine bestimmte Schrittfolge ist bei den Heurismen nicht einzuhalten – im Gegenteil: Ein flexibler Umgang mit den Impulsen ist gefragt.

Es handelt sich also um Strategien, die, flexibel eingesetzt, beim Lösen eines Problems helfen können, aber keine Lösungsgarantie bieten. Eine strikte Abgrenzung von Heurismen und Algorithmen ist allerdings nicht immer möglich (vgl. Kilpatrick, 1967), zumal auch eine solche Unterscheidung davon abhängt, wer die Strategie einsetzt. In der vorliegenden Arbeit werden ganz in der Tradition Schoenfelds

---

[14] Hierbei werden teilweise verwandte Begriffe, wie *problem solving strategy* (s. u.), verwendet. Manche Autoren (z. B. Koichu, Berman & Moore, 2007) reden auch von *heuristics*, wenn sie einen einzelnen Heurismus meinen.

(z. B. Schoenfeld, 1992) die Begriffe *Heurismen* und *Problemlösestrategien* synonym verwendet. Obwohl streng genommen auch metakognitive Strategien, wenn sie beim Problemlösen eingesetzt werden, als Problemlösestrategien gesehen werden können[15], werden sie hier separat betrachtet (siehe Abschnitt 2.3.3) und nicht unter diesem Begriff geführt.

Aus kognitionspsychologischer Sicht zählen die verfügbaren Heurismen ebenfalls zur Wissensbasis, also zur Kategorie der Ressourcen (vgl. Schoenfeld, 2010), allerdings sind sie für den Problemlöseprozess von so großer Bedeutung, dass sie gesondert aufgeführt werden (ebd.). Der Zusammenhang zwischen Lernen und Problemlösen sowie den zugehörigen Strategien wird weiter unten diskutiert. Ein gute Übersicht über Heurismen und mögliche Kategorisierungen derer liefern die Artikel von Rott (2015; 2018).

Wie schon aus Pólyas Zitat deutlich wird, schlägt er vor, den Einsatz von Heurismen durch bestimmte, immer wiederkehrende Fragen anzuregen. Er betont aber auch, dass man diese Fragen nie aus Gewohnheit stellen, sondern sich immer fragen sollte, ob diese zum vorliegenden Problem passen (Pólya, 1945, S. 148). Auch das zählt zu dem von Bruder und Collet erwähnten flexiblen Umgang. Pólya hat seinen Phasen eine Liste von Fragen zugeordnet, die er selbst schlicht als „The List" bezeichnet (vgl. Abbildung 2.1).

Er sagt (ebd. S. 21), dass eine solche Liste nicht zu lang sein darf, damit die Fragen ohne größere Schwierigkeiten wiederholbar (d. h. unter verschiedenen Umständen und in unterschiedlichen Problemkontexten abrufbar) sind. Schaut man sich die Liste genauer an, sieht man, dass die Fragen recht allgemein gehalten und auf alle möglichen Probleme anwendbar sind. Durch eine solche Liste von Fragen wird ein *Problemlöseschema* (vgl. 2.3.1) vorgegeben (Kopp & Mandl, 2005), welches durch wiederholtes Anwenden (also die Auswahl zur jeweiligen Problemsituation passender Fragen aus der Liste) in die kognitive Struktur des Problemlösers übergehen soll. Hierbei handelt es sich, im Gegensatz zu einzelnen Heurismen (die unter Umständen durch Fragen der Liste repräsentiert bzw. hervorgerufen werden) um eine allgemeine Herangehensweise an das Problemlösen, nach der über die Passung der einzelnen Fragen zum Problem entschieden wird. Tietze et al. (2000) sprechen in diesem Zusammenhang von *globalen Heuristiken*[16], die sich (im Gegensatz zu *lokalen Heuristiken*[16], die in der vorliegenden Arbeit einfach als *Heurismen* bezeichnet werden) eher mit der übergreifenden Planung des Problemlöseprozesses beschäftigen (wozu unter anderem auch die Zerlegung in Phasen gehören kann) und damit

[15] Manche Autoren (z. B. Koichu et al., 2007; Tietze et al., 2000) zählen sie sogar zu den Heurismen.

[16] Gemeint sind hier Heurismen im obigen Sinne, nicht die Lehre derer.

HOW TO SOLVE IT

xvi

UNDERSTANDING THE PROBLEM

First.
You have to *understand* the problem.

What is the unknown? What are the data? What is the condition?
Is it possible to satisfy the condition? Is the condition sufficient to determine the unknown? Or is it insufficient? Or redundant? Or contradictory?
Draw a figure. Introduce suitable notation.
Separate the various parts of the condition. Can you write them down?

How To Solve It

DEVISING A PLAN

Second.
Find the connection between the data and the unknown. You may be obliged to consider auxiliary problems if an immediate connection cannot be found. You should obtain eventually a *plan* of the solution.

Have you seen it before? Or have you seen the same problem in a slightly different form?
Do you know a related problem? Do you know a theorem that could be useful?
Look at the unknown! And try to think of a familiar problem having the same or a similar unknown.
Here is a problem related to yours and solved before. Could you use it? Could you use its result? Could you use its method? Should you introduce some auxiliary element in order to make its use possible?
Could you restate the problem? Could you restate it still differently? Go back to definitions.

If you cannot solve the proposed problem try to solve first some related problem. Could you imagine a more accessible related problem? A more general problem? A more special problem? An analogous problem? Could you solve a part of the problem? Keep only a part of the condition, drop the other part; how far is the unknown then determined, how can it vary? Could you derive something useful from the data? Could you think of other data appropriate to determine the unknown? Could you change the unknown or the data, or both if necessary, so that the new unknown and the new data are nearer to each other?
Did you use all the data? Did you use the whole condition? Have you taken into account all essential notions involved in the problem?

How To Solve It

CARRYING OUT THE PLAN

Third.
Carry out your plan.

Carrying out your plan of the solution, *check each step*. Can you see clearly that the step is correct? Can you prove that it is correct?

LOOKING BACK

Fourth.
Examine the solution obtained.

Can you *check the result?* Can you check the argument?
Can you derive the result differently? Can you see it at a glance?
Can you use the result, or the method, for some other problem?

xvii

Abbildung 2.1 Phasen des Problemlösens (Pólya, 1945, S. xvii)

schon in den Bereich der *Metakgonition* (vgl. Abschnitt 2.3.3) hineinspielen. King (1994) spricht auch von *question stems* (Fragestämmen) und hat in einer Studie mit Viert- und Fünftklässlern gezeigt, dass sich diese allgemeinen Fragen eignen, das Stellen von Fragen in konkreten Situationen einzuüben. Nach Pólyas Vorbild wurden noch einige weitere solcher Schemata entworfen (z. B. King, 1991, König, 1996, Schoenfeld, 1985, S. 109). Die Hoffnung, dass eine solche Liste bereits beim

Problemlösen hilft, hat sich leider nicht bestätigt. Im Gegenteil wurde mehrfach gezeigt (z. B. Lesh & Zawojewski, 2007; Lester Jr. & Kehle, 2003; Schoenfeld, 1992; Silver, 1985), dass das reine Zur-Verfügung-Stellen einer solchen Übersicht keine wesentlichen Fortschritte mit sich bringt. Mögliche Gründe und weitere Lehrkonzepte, die zum Teil auch Problemlöseschemata nutzen oder mit den Lernenden gemeinsam entwickeln, werden in Abschnitt 2.4.5 beschrieben.

Generell ist der Nutzen von Heurismen nicht offensichtlich. Der Autor der vorliegenden Arbeit hat die Erfahrung gemacht, dass manche Professoren der Fachmathematik, die man in der Regel zu den Experten im Bereich des Problemlösens zählen kann, dem Heurismeneinsatz skeptisch gegenüberstehen, da sie laut eigenen Aussagen auch ohne den bewussten Einsatz solcher Strategien zurechtgekommen sind. Es scheint also auch weniger bewusste Komponenten für das erfolgreiche Problemlösen zu geben. In diesem Zusammenhang treten die Begriffe *Intuition* (Fischbein, 1987), *Kreativität* (Liljedahl, 2013) und *geistige Beweglichkeit* (Hasdorf, 1976) auf. Letztere lässt sich an folgenden Eigenschaften erfolgreicher Problemlöser festmachen (vgl. Bruder, 2000b; Rott, 2018):

Reduktion: Intuitive Konzentration auf wesentliche Aspekte, oft mit Hilfe von Visualisierungs- und Strukturierungshilfen

Reversibilität: Die Fähigkeit, Gedankengänge umzukehren

Aspektbetrachtung: Das Erkennen von Zusammenhängen und Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Aspekten sowie das Durchhalten tragfähig erscheinender Ideen

Aspektwechsel: Das intuitive Variieren verschiedener Aspekte oder der Perspektive hierauf, was neue Ideen ermöglicht und ein Versteifen auf einen Lösungsansatz verhindert

Transferierung: Die Fähigkeit, bekannte Vorgehensweisen auf teilweise weit entfernt liegende, andere Kontexte zu übertragen; ein Sinn für tieferliegende Strukturen

Wie in der Beschreibung bereits deutlich wird, sind diese Fähigkeiten dem Problemlöser oft nicht bewusst und werden intuitiv angewandt. Menschen mit hoher geistiger Beweglichkeit sind auch ohne den Einsatz von Heurismen gut darin, Probleme zu lösen (ebd.). Zu diesem Personenkreis würde man wahrscheinlich auch die oben angesprochenen Mathematikprofessoren zählen[17]. Ist die geistige Beweglichkeit

[17] Wenngleich dies möglicherweise nicht bewusst passiert, werden sich diese Experten wahrscheinlich ähnliche Fragen stellen, die durch den Einsatz von Heurismen hervorgerufen werden sollen.

allerdings weniger gut ausgeprägt, kann es zu Schwierigkeiten beim Problemlösen kommen, die durch das Erlernen von Heurismen zum Teil behoben werden können (ebd., vgl. auch König, 1992). Zusammenfassend kann man sagen: Gute intuitive Problemlöser kommen mitunter auch ohne die bewusste Verwendung von Heurismen aus, weniger gute können hiervon aber stark profitieren.

Um einen Überblick zu geben, folgt eine Liste von Beispiel-Heurismen (vgl. z. B. Bruder, 2000a, Heinrich et al., 2015, King, 1991, König, 1992, Leuders, 2017, Pólya, 1945, Schoenfeld, 1985), die längst nicht vollständig ist:

- Voraussetzung und Behauptung systematisch festhalten
- Begriffe klären
- Betrachten von Beispielen (Spezialfälle und Extremfälle)
- Darstellungswechsel (Skizzen, Tabellen, Gleichungen etc.)
- Vorwärtsarbeiten (Von den Voraussetzungen Schritt für Schritt folgern)
- Rückwärtsarbeiten (Was wird benötigt, um die Behauptung zu zeigen?)
- Problem umformulieren (Verallgemeinern, Spezialisieren, Analogisieren etc.)
- Zerlegung des Problems in Teilprobleme
- auf bekannte Zusammenhänge zurückgreifen
- Ähnliche (bekannte) Probleme heranziehen
- Variation der Aspekte (Voraussetzungen, Behauptung) etc.

Vergleicht man diese Liste mit den oben aufgeführten Lernstrategien (vgl. S. 22 und 26, so erkennt man einige Parallelen (vor allem zu Tiefenstrategien). Insgesamt scheinen Lernen und Problemlösen sehr ähnliche kognitive Prozesse zu sein. So schreibt Leuders:

> Vom lerntheoretischen Standpunkt aus ist jedes Lernen ein Problemlöseprozess. Ein „Problem" ist schlichtweg eine Diskrepanz zwischen der Erwartung eines Individuums und der von ihm wahrgenommenen tatsächlichen Situation, oder unpersönlicher ausgedrückt: zwischen vorliegendem Ausgangszustand und erwünschtem Zielzustand.

Er beschreibt, dass zur Überwindung dieser Diskrepanz kognitive Konstruktionsprozesse (*Assimilation* und *Akkomodation* im Sinne von Piaget et al. (1975)) herangezogen werden, die man durchaus als Problemlösen bezeichnen kann.

Wenngleich fraglich ist, ob diese Behauptung wirklich für alle Lernprozesse, auch bei der Anwendung von Oberflächenstrategien (sind diese doch eher durch das Abspulen von Routineprozessen gekennzeichnet) haltbar ist, ist es doch ein interessanter Standpunkt, dass (Tiefen-)Lernen durch kognitive Aktivitäten geprägt ist, die mit Problemlöseprozessen gleichzusetzen sind. Umgekehrt kann man sich auch die Frage stellen, ob jedes Problemlösen ein Lernprozess ist. Zumindest scheinen die kognitiven Aktivitäten beim Problemlösen im Wesentlichen aus Organisieren und Elaborieren zu bestehen. Das könnte ein Hinweis darauf sein, dass das (erfolgreiche) Lösen von Problemen besonders zum Verständnis des jeweiligen Themas beiträgt. Mamona-Downs & Downs (2005) sehen auch das Verständnis von Beweisen als Problemlöseprozess an.

Neben allgemeinen Heurismen gibt es auch bereichsspezifische Lösungsverfahren. Für die Analysis hat der Mathematiker Terence Tao eine Liste von 21 Strategien, die teilweise sehr ähnlich zu denen aus unserer Liste, zum Teil sehr viel spezifischer und nur auf eine bestimmte Menge von Problemen anwendbar sind, auf seiner Homepage veröffentlicht (Tao, o. D.) (eine stichpunktartige Auflistung findet sich in Anhang A). Hierdurch wird deutlich, dass Problemlösestrategien sehr stark von den jeweiligen Themengebieten abhängen können.

2.3.3 Metakognition und Selbstregulation (Kontrolle)

Wie bereits in den vorherigen Abschnitten angeklungen ist, genügt es, um beim Problemlösen erfolgreich zu sein, nicht, ein gewisses Vorwissen (sowohl inhaltlicher als auch heuristischer Art) zu haben. Entscheidend ist es, dieses Wissen zum geeigneten Zeitpunkt abzurufen und flexibel (d. h. auf die Gegebenheiten der jeweiligen Problemlösesituation abgestimmt) einzusetzen, also das eigene Handeln zu steuern (vgl. z. B. Collet, 2009; Göller, 2020; Schoenfeld, 1985; Zimmerman & Schunk, 2009). Die Steuerung der eigenen Aktivitäten beim Problemlösen bezeichnet Schoenfeld (1985) als *control*. Heutzutage werden in diesem Zusammenhang eher die verwandten, aber nicht bedeutungsgleichen Begriffe *Metakognition* und *Selbstregulation* verwendet, die im Folgenden charakterisiert werden sollen. Unter *Metakognition* verstehen wir:

> Any cognitive activity that takes as its object, or regulates any aspect of any cognitive enterprise (Flavell, Miller & Miller, 1993).

Sie beschreibt also alles Wissen und alle Kognition über (eigene wie fremde) kognitive Aktivitäten sowie alle Regulation derer. Ähnliche Definitionen finden sich u. a. auch bei Brown (1978) sowie Hasselhorn und Artelt (2018). Um genauer zu verstehen, was hier gemeint ist, ist es hilfreich, sich zunächst den Begriff der *Kognition* anzuschauen. Im Lexikon der Psychologie (Wirtz, 2017) heißt es hierzu:

> Kognition ist ein Sammelbegriff für bewusste und unbewusste mentale Prozesse, die von Wahrnehmung bis Denken reichen. Kognition wird meist von Emotion und Motivation unterschieden, obgleich diese Aufmerksamkeit und damit Kognition beeinflussen.

Hervorzuheben ist hierbei, dass nach dieser Definition Emotionen gegenüber kognitiven Vorgängen nicht zur Metakognition zählen.

Sehr ähnlich zur Metakognition ist das Konzept der *Selbstregulation*:

> [Self-regulation] is an active, constructive process whereby learners set goals for their learning and then attempt to monitor, regulate, and control their cognition, motivation, and behavior, guided and constrained by their goals and the contextual features in the environment (Pintrich, 2000, S. 453).

Selbstregulation umfasst also die Regulation der eigenen kognitiven, aber auch motivationalen Aktivitäten sowie des eigenen Verhaltens. Andere Autoren verwenden vergleichbare Definitionen (z. B. Landmann, Perels, Otto & Schmitz, 2009; Zimmerman & Schunk, 2009).

Im Folgenden sollen die Unterschiede der Begriffe Metakognition und Selbstregulation herausgearbeitet werden (vgl. hierzu auch Dinsmore, Alexander & Loughlin, 2008).

Die große Gemeinsamkeit der beiden Begriffe ist, dass sie die bewusste[18] Regulation von kognitiven Prozessen umfassen. Während die Selbstregulation zusätzlich noch die Regulation von Handlungen sowie emotionalen und motivationalen Vorgängen umfasst, wovon die Metakognition ja ausdrücklich ausgenommen ist, fällt unter den Begriff der Metakognition zusätzlich zur Regulation auch das Wissen über kognitive Vorgänge (im Folgenden *metakognitives Wissen* genannt). Flavell (1979) unterteilt dieses in die drei Kategorien *personales Wissen*, *Aufgabenwissen* und *Strategiewissen*, betont aber, dass es meistens als Kombination dieser drei Wissensformen auftritt. Hierbei beschreibt *personales Wissen* das Wissen eines Individuums über seine eigenen kognitiven Aktivitäten und Möglichkeiten, sowie die anderer Individuen, *Aufgabenwissen* umfasst Wissen über geschickten (oder ungeschickten) Umgang mit einer bestimmten Aufgabe oder einem Aufgabentyp, sowie eine Einschätzung der Aufgabenschwierigkeiten, und *Strategiewissen* umfasst neben

[18] Nimmt man die obige Charakterisierung von Metakognition wörtlich (als kognitive Aktivitäten, die auf Kognition gerichtet sind) und verbindet diese mit der Definition von Kognition, dann müssten auch unbewusste Aktivitäten unter diesen Begriff fallen. Flavell (und ihm folgend auch andere Autoren) hat jedoch an anderen Stellen deutlich gemacht, dass er nur bewusste Aktivitäten als Metakognition betrachtet (z. B. Flavell, 1984).

der Kenntnis von Strategien auch die Einschätzung, wann eine Strategie wahrscheinlich sinnvoll ist und wann eher nicht. Letzteres scheint der Schlüssel zum Problemlösen zu sein, ist aber sicherlich abhängig von personalem Wissen und Aufgabenwissen. Flavell schreibt zu dieser Abhängigkeit:

> I believe that the monitoring of a wide variety of cognitive enterprises occurs through the actions of and interactions among four classes of phenomena: (a) *metacognitive knowledge*, (b) *metacognitive experiences*, (c) *goals (or tasks)*, and (d) *actions (or strategies)*. (Flavell, 1979, S. 1)

Metakognitives Wissen kann, wie jedes andere Wissen auch, bewusst oder unbewusst aktiviert werden (ebd.).

Später wurde, in Abgrenzung von metakognitivem Wissen, der Begriff der *metacognitive skills* eingeführt. Hiermit ist der Teil der Metakognition gemeint, der der Regulation von kognitiven Aktivitäten, vornehmlich Problemlöse- und Lernaktivitäten dient. Hierzu zählen grundlegende Aktivitäten (Orientierung und Reflexion), Kontrollaktivitäten (Planen und Ausbessern) und Beobachtungen (Prozessbeobachtungen, Selbst-Tests, Diagnose und Evaluation) (vgl. Veenman, Hout-Wolters et al., 2003). Kluwe und Schiebler (1984) unterscheiden in diesem Zusammenhang auch *deklarative Metakognition* (Wissen) und *prozedurale Metakognition* (Kontrollprozesse). Diese Bezeichnungen können aber zu Verwirrung führen, da, wie jedes andere Wissen auch das metakognitive in deklarative und prozedurale Aspekte aufgeteilt werden kann (was z. B. von Hoy (2013, S. 319 f.) auch getan wird), ohne dass hierbei Kontrollaspekte gemeint sind. In der vorliegenden Arbeit wird daher zwischen *metakognitivem Wissen* und der *Regulation kognitiver Aspekte* unterschieden.

Da Letztere, sofern sie vom Lerner ausgeht, eine Teilmenge der Selbstregulation bildet, treffen die im Folgenden getätigten Aussagen in der Regel auch hierauf zu. Selbstregulation ist ein zyklischer Vorgang (Boekaerts & Corno, 2005, Zimmerman, 2000). Das bedeutet, dass Kognition, Emotion und Verhalten beobachtet und bei Abweichungen vom Wunschzustand iterativ angepasst werden. Hierdurch wird nicht zwingend der gewünschte Zustand erreicht, sondern nur angenähert, so dass bei weiteren Aktivitäten weitere Regulationen durchgeführt werden können. Cohors-Fresenborg und Kaune (2007) unterteilen die Selbstregulation in die Teilprozesse *Planung*, *Monitoring* und *Reflexion*.

Neben dieser Einteilung in Teilprozesse hat sich ein Phasenmodell nach Zimmerman (1998, 2000) etabliert, das hier in einer Adaption von Schmitz & Schmidt (2007) beschrieben werden soll:

Präaktionale Phase (Voraussicht): Hier werden Aufgaben[19] analysiert, Ziele gesetzt, Vorwissen aktiviert, Strategien ausgewählt, motivationale Prozesse angestoßen und das allgemeine Vorgehen geplant.

Aktionale Phase (Durchführung): Hier wird der Plan unter Selbst-Beobachtung und -Kontrolle durchgeführt und Informationen über Einflussgrößen und Wirkung des eigenen Handelns gesammelt.

Postaktionale Phase (Reflexion): Schließlich wird das Ergebnis sowie der Lern- bzw. Problemlöseprozess reflektiert und evaluiert und es werden Schlussfolgerungen für zukünftiges Handeln gezogen.

Hierbei ist darauf zu achten, diese Phasen auf der einen Seite nicht mit den Phasen Pólyas zu vermischen. Wenngleich es bei der präaktionalen Phase um die Analyse der vor einem liegenden Aufgaben und die Planung des Herangehens an diese handelt, liegt diese Phase vor der Bearbeitung des eigentlichen Problems (oder einer anderen zu bewältigenden Aufgabe). Die Pólya-Phasen *Understanding the Oroblem* und *Devising a Plan* sind deutlich detaillierter und liegen bereits in der aktionalen Phase. In der präaktionalen Phase werden eher allgemeine Herangehensweisen und einzusetzende Ressourcen, wie Anstrengung und Zeiteinsatz, geplant. Genauso liegt die postaktionale Phase nach dem eigentlichen Bearbeitungsprozess und ist nicht mit *Looking Back* zu verwechseln, wenngleich eine Unterscheidung hier nicht ganz so trennscharf ist. Auf der anderen Seite sind die oben genannten Teilprozesse *Planung*, *Monitoring* und *Reflexion* nach Cohors-Fresenborg und Kaune (2007) nicht mit solchen Phasen zu verwechseln. Hierbei handelt es sich um „kleinere" Aktivitäten, die in jeder Phase (sowohl nach Zimmerman als auch nach Pólya) auftreten können. Mit anderen Worten: Jeder einzelne Schritt eines Problemlöse- oder Lernprozesses kann geplant, beobachtet und reflektiert werden, egal in welcher Phase man sich befindet. Darüber hinaus ist, wie die meisten Phasenmodelle, auch dieses nicht rein linear zu sehen. Es ist beispielsweise durchaus möglich, von einer aktionalen Phase in eine präaktionale überzugehen.

Als hilfreiche Faktoren der Selbstregulation werden genannt (Zimmerman & Martinez-Pons, 1988; Sitzmann & Ely, 2011):

- Zielsetzung
- Implementierung effektiver Strategien
- Beobachtung und Beurteilung des eigenen Fortschritts
- Schaffung produktiver Lernumgebungen

[19] Hierbei kann es sich um beliebige Aktivitäten handeln. Es sind nicht ausschließlich mathematische Aufgaben gemeint.

- Sinn für Selbstwirksamkeit
- Ausdauer und Anstrengung

Metakognition und Selbstregulation hängen stark von dem Bereich ab, in dem die Lern- und Problemlöseaktivitäten stattfinden (vgl. Veenman et al., 2003, Boekaerts, Maes & Karoly, 2005). So ist es beispielsweise naheliegend, dass ein mathematischer Text anders zu lesen ist als ein literarischer (Alcock, 2017). Dementsprechend werden auch die zugehörigen Regulationsprozesse anders aussehen. Aber auch beim mathematischen Problemlösen kann es sein, dass das jeweilige Teilgebiet (z. B. Analysis oder Lineare Algebra) die Herangehensweise beeinflusst. Dieses Thema wird im Verlauf dieser Arbeit noch weiter aufgegriffen. Selbstregulation hängt also stark mit der Kompetenzentwicklung in diesem Bereich zusammen. Umgekehrt gilt Metakognition (und damit Selbstregulation der kognitiven Lernprozesse) als stärkster Prädiktor für Lernerfolg (Wang, Haertel & Walberg, 1990; Prins, Veenman & Elshout, 2006).

Wenn im Folgenden von *Metakognition* gesprochen wird, sind damit, wenn nicht anders erwähnt, *metacognitive skills* gemeint, also die Regulation von kognitiven Aktivitäten. Metakognitives Wissen wird in der vorliegenden Arbeit als Vorwissen, bzw. als Wissen über Problemlösestrategien betrachtet. Auf der anderen Seite beschäftigt sich die vorliegende Arbeit nur marginal mit der Regulation von Handlungen, Emotionen und Motivation. Demnach werden die Begriffe *Metakognition* und *Selbst-Regulation* hier nach reiflicher Überlegung weitgehend synonym verwendet. Zusammenfassend beschreiben sie beide die Beobachtung, Beurteilung und darauf basierende Reaktion bzw. Anpassung der eigenen kognitiven Aktivitäten, also genau das, was (Schoenfeld, 1985) unter *control* verstanden hat[20]. An dieser Stelle sei erwähnt, dass sich die bei Schoenfeld (ebd.) beschriebenen Kontrollaktivitäten im Wesentlichen auf den eigentlichen Problembearbeitungsprozess, also auf die aktionale Phase beschränken. Von großer Bedeutung ist aber auch die postaktionale Reflexion der Prozesse, die das Problemlöseverhalten zukünftiger Prozesse entscheidend beeinflussen kann und sich zum Teil in Pólyas Phase des *Looking Back* wiederfindet.

[20] In späteren Veröffentlichungen, als der Begriff der Metakognition sich bereits etabliert hatte, verwendet Schoenfeld diesen oft synonym mit *Control*.

2.3.4 Überzeugungssysteme

Als letzten Einflussfaktor erfolgreichen Problemlösens benennt Schoenfeld (1985) *Belief Systems*. Damit ist die Sicht des Individuums auf die mathematische Welt gemeint. Hierzu gehören Überzeugungen über Mathematik an sich, über sich selbst und seine mathematischen Fähigkeiten, über das spezielle Thema und über die Umwelt, zu der auch andere Individuen gehören. Diese Ansichten sind häufig unbewusst und können das individuelle (Problemlöse-)Verhalten (insbesondere motivationale Aspekte) beeinflussen. Schoenfeld (ebd.) beschreibt typische Überzeugungen von Studienanfängern, die möglicherweise systematisch in der Schulmathematik „erlernt" werden und die bei der Problembearbeitung hinderlich sein können. Hierzu gehören Aussagen wie „Mathematische Aufgaben lassen sich immer nach einem Schema lösen", „Eine mathematische Aufgabe muss nach spätestens fünf Minuten gelöst sein" oder „Es gibt für jede Aufgabe nur einen sinnvollen Lösungsweg". Später (1992) bezieht er, zumindest namentlich, auch *affects* in diese Kategorie mit ein. Andere Autoren (z. B. DeBellis & Goldin, 2006; Hannula, 1999) beschäftigen sich intensiver mit dem Einfluss von Affekten auf das Problemlösen.

Da der Fokus der in dieser Arbeit beschriebenen Maßnahme eher auf der Förderung von kognitiven und metakognitiven Aspekten lag und Überzeugungen (sowie motivationale Aspekte) nur mittelbar beeinflusst wurden, wird auf weitere Ausführungen zu diesem Aspekt verzichtet und dieser Abschnitt bewusst kurz gehalten. Der geneigte Leser findet bei Schoenfeld (1985 vor allem in Kapitel 5 und 10; 1989a) und McLeod (1989a) ausführlichere Beschreibungen.

2.4 Konzeptionen zur Förderung der Problemlösekompetenz

In diesem Abschnitt werden bestehende theoretische Überlegungen aus verschiedenen didaktischen Bereichen vorgestellt, die Einfluss auf die Entwicklung der in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Interventionsmaßnahme hatten. In den ersten Unterabschnitten werden allgemeinere didaktische Konzeptionen vorgestellt, beginnend mit dem *entdeckenden Lernen* und verwandten Ideen (Abschnitt 2.4.1), gefolgt von der *Cognitive Load Theory*, die sich mit der Belastung (und Überlastung) des Arbeitsgedächtnisses beschäftigt sowie dem Lernen aus Lösungsbeispielen, das einer Überlastung entgegenwirken soll (Abschnitt 2.4.2). Um Lernenden die benötigten Hilfestellungen zu geben, ohne ihnen die Möglichkeit der eigenständigen Entwicklung zu nehmen, eignet sich der Ansatz des *Scaffolding*, bei dem die Hilfen an die Erfahrung der Lernenden angepasst und nach und nach ausgeblendet werden. Dieses Konzept ist in Abschnitt 2.4.3 beschrieben. Abschnitt 2.4.4 beschäftigt sich mit den Vor- und Nachteilen kooperativer Lehrformen. Die letzten drei Teilabschnitte behandeln Konzeptionen, die spezifischer zur Förderung der Problemlösekompetenz eingesetzt werden können. So werden in Abschnitt 2.4.5 verschiedene Ideen zur Vermittlung heuristischer Strategien diskutiert, Abschnitt 2.4.6 beschäftigt sich mit mathematikspezifischen Lernstrategien, die Studierenden dabei helfen können, selbstständig die zur Bearbeitung der Übungsaufgaben notwendige Wissensbasis aufzubauen und Abschnitt 2.4.7 erläutert Konzeptionen, die metakognitive Kompetenzen zur eigenständigen Steuerung von Problemlöse- und Lernprozessen fördern sollen. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass motivationale und volitionale Aspekte in der vorliegenden Arbeit nur indirekt behandelt werden. Zwar ist es naheliegend, dass Teile der hier entwickelten Maßnahme Einfluss auf diese Faktoren haben[21], der Fokus liegt aber auf der Vermittlung kognitiver und metakognitiver Strategien.

2.4.1 Entdeckendes Lernen

Die in diesem Abschnitt beschriebene Idee tritt in der Didaktik in vielen verschiedenen Formen unter verschiedenen Bezeichnungen auf, unter anderem im *Konstruktivismus* (Jonassen, 1991, Leder & Gunstone, 1990, Siebert, 2005), beim *genetischen Prinzip* (Schubring, 1978), als *entdeckendes Lernen* (Bruner, 1961; Klauer & Leutner, 2007) und beim *problembasierten Lernen* (Schmidt, 1983, Zumbach, 2003). Wenngleich es unterschiedliche Strömungen gibt, so ist ihnen doch eine Grundannahme gemein:

> [L]earning is not a passive receiving of ready-made knowledge but a process of construction in which the students themselves have to be the primary actors. (Glasersfeld, 1992, S. 120)

Mit anderen Worten: Es geht um die aktive Konstruktion von Wissen. Diese Annahme passt zu der auf S. 23 beschriebenen Ansicht, dass Lernen durch die Integration neuer Informationen in bereits vorhandene, individuelle Wissensstrukturen

[21] Sollte sich die Problemlöseleistung beispielsweise verbessern, kann dies durchaus positive Auswirkungen auf die Motivation haben. Auch ist es denkbar, dass durch eine stärkere Reflexion der eigenen Aktivitäten, wie sie durch die Maßnahme angeregt werden soll, Schwierigkeiten identifiziert und dadurch auf veränderbare Faktoren zurückgeführt werden, was sich positiv auf die Selbstwirksamkeitserwartung auswirkt (Otto, 2007). Zudem kann eine ausführliche Betrachtung von Übungsaufgaben im Studium Überzeugungen hierzu beeinflussen.

geschieht (vgl. Kopp & Mandl, 2005). Hierbei ist es grundsätzlich auch möglich, dass die Aktivität des Lerners ausschließlich mental und von außen nicht beobachtbar abläuft, auch bei scheinbar rezeptivem Lernen bei Vorträgen oder beim Lesen von Sachtexten (vgl. Renkl, 2005, Mayer, 1999). Wichtig ist aber, dass die Verantwortung für den Lernprozess auf den Lerner übertragen wird (vgl. Wittmann, 1997). Dies passt sehr gut zur grundsätzlichen Organisation von Hochschulbildung[22]. Dementsprechend scheint es sinnvoll, auch in den Präsenzveranstaltungen die Selbstständigkeit der Studierenden zu fördern. Nach Bruner (1975) dient das entdeckende Lernen der Aneignung passender Techniken und Strategien. Er geht von der Annahme aus, dass selbst Entdecktes leichter behalten und auf andere Kontexte transferiert wird (ebd.). Übertragen auf das Problemlösen würde das bedeuten, dass die Problembearbeiter die Aufgaben probierend-entdeckend angehen und sich im Verlauf Gesetzmäßigkeiten, Beziehungen, Strukturen, Fertigkeiten, Wissenselemente und Lösungsstrategien selbst erarbeiten. Dadurch werden eigene Erfahrungen gemacht, durch die das Überwinden von Hindernissen erlernt und die (metakognitive) Steuerung von kognitiven Aktivitäten gefördert wird (vgl. Wittmann, 1997). Demnach wäre es also das Beste, die Studierenden die Probleme komplett eigenständig bearbeiten und ihre eigenen Strategien entdecken zu lassen. Schon Pólya (1945) sagt, dass erfolgreiche Problemlöseprozesse die Problemlösekompetenz verbessern. Aber genau da liegt eine Schwierigkeit, die beim entdeckenden Lernen zu beachten ist. Wenn der Lernende nicht in der Lage ist, eine Aufgabe selbstständig zu lösen, so kann er auch keine Lösungsstrategie entdecken. Es ist bei einem akademischen Studium auch nicht zu erwarten, dass ein Student Erkenntnisse, für die Mathematiker Jahre, Jahrzehnte oder gar Jahrhunderte gebraucht haben, innerhalb eines Semesters gewinnt. Nussbaum und Leutner (1986) haben in einer Studie mit Studierenden einer technischen Hochschule gezeigt, dass beim reinen entdeckenden Lernen leichte Aufgaben (mit einer Lösungsquote[23] von 90 %) deutlich besser zum Erlernen eines Lösungsprinzips geeignet waren als mittlere (50 % Lösungsquote) oder schwere (20 % Lösungsquote). Interessanterweise haben sich Aufgabengrup-

[22] Der erwartete Eigenanteil im Mathematikstudium im Vergleich zur Präsenzzeit ist relativ hoch. So werden z. B. bei den Anfängervorlesungen an der Universität Duisburg-Essen 9 ECTS pro Veranstaltung (Jeweils 18 ECTS für die Analysis I und II bzw. Lineare Algebra I und II nebst mündlicher Modulabschlussprüfung) vergeben. Das entspricht in etwa einer erwarteten Workload von 270 Stunden. Die Präsenzveranstaltungen machen 6 bis 8 Stunden pro Woche aus (4 Stunden Vorlesung plus 2 Stunden Übung plus, je nach Dozent, 0 bis 2 Stunden Globalübung oder Tutorium). Bei 13 bis 14 Wochen pro Semester macht das 78 bis 112 (Dreiviertel-)Stunden aus. Es wird also erwartet, dass der Großteil der Arbeit eigenständig erledigt wird.

[23] Es wurden hier standardisierte Aufgaben mit bekannten Lösungsquoten verwendet.

pen mit steigendem Schwierigkeitsgrad (also ein gleicher Anteil leichter, mittlerer und schwerer Aufgaben, beginnend bei den leichten) nur als fast so gut geeignet erwiesen wie die leichten Aufgaben.

Eine Möglichkeit, dem Problem der Überforderung zu begegnen, wäre es, die Schwierigkeit der zu bearbeitenden Probleme entsprechend anzupassen, also mit deutlich einfacheren Aufgaben zu beginnen und den Schwierigkeitsgrad im Verlauf des Semesters Schritt für Schritt zu erhöhen. Da aber in mathematischen Vorlesungen die Aufgaben in thematischer Reihenfolge, die durch den axiomatisch-deduktiven Aufbau vorgegeben ist und daher nicht ohne Weiteres verändert werden kann, gestellt werden, lässt sich das kaum umsetzen. Darüber hinaus ist zweifelhaft, ob eine solche Staffelung zielführend ist, da bisher nur gezeigt wurde, dass zum Erlernen eines Lösungsprinzips Aufgaben mit steigendem Schwierigkeitsgrad geeignet sind. Da ein einziges Lösungsprinzip (etwa ein Heurismus) aber sicherlich nicht ausreicht, um alle möglichen Probleme zu bearbeiten, und selbst ein einziges Problem verschiedene Lösungswege haben kann, ist zu vermuten, dass Problemlösen so einfach nicht zu erlernen ist. Um Lernende beim Entdecken zu unterstützen, gibt es eine Reihe von Ansätzen, die in den folgenden Abschnitten besprochen werden.

2.4.2 Cognitive Load Theory und Worked Examples

Bevor auf einzelne Förderansätze eingegangen wird, soll in diesem Abschnitt eine weitere Schwierigkeit, die im Zusammenhang mit Problemlösen auftritt, beschrieben werden. Die *Cognitive Load Theory* geht davon aus, dass das Arbeitsgedächtnis nur eine geringe Anzahl (je nach Quelle wird von 3 bis 9 gesprochen) von Informationen speichern kann (Cowan, 2001, Miller, 1956). Eine Gruppe von Wissenschaftlern um John Sweller hat sich mit den Konsequenzen für das Lernen durch Aufgabenbearbeitungen beschäftigt und gezeigt, dass das entdeckende Lernen nur bedingt effektiv ist (z. B. Cooper & Sweller, 1987; Kirschner, Sweller & Clark, 2006; Sweller, 1999). Als *Cognitive Load* bezeichnet Sweller (1988) die kognitive Belastung, die aus der Menge an Informationen im Arbeitsgedächtnis resultiert. Hierbei differenzieren Sweller, Merrienboer und Paas (1998) drei verschiedene Arten:

Intrinsic Cognitive Load Hiermit wird die Komplexität der jeweiligen (Lern-) Aufgabe bezeichnet. Diese ist abhängig vom Vorwissen des Lernenden.

Extraneous Cognitive Load Alle kognitiven Belastungen, die nicht direkt dem Wissenserwerb dienen.

Germane Cognitive Load Hierzu zählen alle kognitiven Anstrengungen, die dem Wissenskonstruktionsprozess dienen.

Demnach ist der Germane Load für das Lernen verantwortlich. Da es gerade bei komplexen Aufgaben mit hohem Intrinsic Load leicht zu Überforderung des Arbeitsgedächtnisses kommt (*Cognitive Overload*), wird versucht, die kognitive Belastung zugunsten des Germane Load zu verringern. Die einzig verbleibende Stellschraube ist der Extraneous Load, der durch die Darbietung der Aufgabe (z. B. in Form von Lernhilfen) beeinflusst werden kann.

Als Alternative zum entdeckenden Lernen wird das Lernen aus *Worked Examples*, zu deutsch *Lösungsbeispielen* oder auch *Musterlösungen* (vgl. Renkl et al., 2003) vorgeschlagen. Im hochschulmathematischen Bereich hat sich Ableitinger (2013) mit solchen ausführlichen Musterlösungen beschäftigt. Ihm kommt es darauf an, „jeden einzelnen Lösungsschritt und die ihn steuernden Begleitüberlegungen möglichst genau offenzulegen" (ebd. S. 91). Die Überlegenheit von Lösungsbeispielen gegenüber eigenständiger Aufgabenbearbeitung zum Erlernen von Lösungsprinzipien wird in mehreren Studien nachgewiesen (z. B. Renkl, Atkinson, Maier & Staley, 2002; Renkl et al., 2003; Sweller, 1988; Sweller et al., 1998). Dieser Effekt kehrt sich allerdings mit steigender Expertise der Probanden um. Dieses Phänomen wird von Kalyuga et al. (2003) als *Expertise Reversal Effect* beschrieben und lässt sich dadurch erklären, dass mit steigender Erfahrung die kognitive Belastung geringer wird, sodass Kapazitäten für Lernprozesse freiwerden, die von Lösungsbeispielen nicht angeregt werden. Lösungsbeispiele hingegen bringen weniger neue Informationen und beanspruchen das Arbeitsgedächtnis unnötig durch Redundanzen. Demzufolge wird ein langsames Ausschleichen (wie beim *Scaffolding* – vgl. Abschnitt 2.4.3) aus der Nutzung von Lösungsbeispielen empfohlen (Atkinson, Renkl & Merrill, 2003). Einschränkend sei erwähnt, dass in den oben genannten Studien, obwohl hier von *problem solving* gesprochen wird, eher leichtere Aufgabentypen untersucht werden, die zwar für Neulinge ein Problem darstellen können, allerdings nach Einüben des Lösungsprinzips (was genau der Gegenstand der Untersuchungen ist) zur Routine werden (unter anderem sind die Themen: Berechnungen eines Winkels im Dreieck bei Vorgabe der anderen Winkel (Sweller et al., 1998), einfache Aufgaben aus der Kinematik (ebd.), Berechnungen von Seitenlängen im Dreieck mit Hilfe von Sinus und Cosinus (Sweller, 1988), einfache Aufgaben zu stochastischer Unabhängigkeit (Renkl et al., 2002; Renkl et al., 2003)). Die Übertragung der Ergebnisse auf Probleme ist also nicht gesichert. Jonassen (2014) schreibt hierzu:

> Because most research with worked examples has been conducted with well-structured problems, the relationships between problem complexity and working memory demands remain questionable.

Außerdem haben Atkinson et al. (2003) herausgefunden, dass es beim Lernen aus Lösungsbeispielen von großer Bedeutung ist, wie die Lernenden damit umgehen. Es ist nicht klar, ob die zum Lernen nötigen Verknüpfungen gebildet werden. So entlastet zwar das Bereitstellen von Lösungsbeispielen im Vergleich zum eigenständigen Lösen das Arbeitsgedächtnis, jedoch ist nicht klar, ob die freigewordenen Ressourcen wirklich zum tieferen Verständnis genutzt werden oder ob eher auf oberflächliche Merkmale der Lösung geachtet wird. Zahlreiche Versuche, den Lerneffekt von Musterlösungen durch ausführliche Erklärungen zum Vorgehen zu verbessern, haben nur begrenzt zu Erfolgen geführt, wie eine Metastudie (Wittwer & Renkl, 2010) gezeigt hat. Vielversprechender ist hier der Ansatz, die Lernenden zum aktiven Umgang mit den Materialien anzuregen. Ein Beispiel für solche Anregungen im Zusammenhang mit Beweisverständnis ist das *Self-Explanation Training* (Hodds et al., 2014), das in Abschnitt 2.4.6 beschrieben wird.

Obwohl die oben angesprochenen Ergebnisse sich nicht zwingend auf das Problemlösen übertragen lassen, ergibt sich doch folgende Erkenntnis: Da Problembearbeitungsprozesse mit einer hohen kognitiven Belastung verbunden sind, sollte versucht werden, einen Teil dieser Belastung auszulagern. Das kann durch Lösungshilfen, teilweise Vermittlung benötigten Wissens, kooperatives Arbeiten oder vorheriges Einüben von Teilprozessen geschehen (vgl. Neber & Neuhaus, 2018). Sweller (2006) betont, dass die Limitationen des Gedächtnisses sich nicht auf solches Wissen beziehen, das bereits im Langzeitgedächtnis abgespeichert ist. Alle Teilhandlungen, die im Vorfeld bereits internalisiert sind, tragen nicht zum Cognitive Load bei. Eine andere Möglichkeit wäre, Lernprozesse, die aufgrund eines Cognitive Overload nicht während der Aufgabenbearbeitung stattfinden konnten, durch ausführliche Reflexion des Vorgehens nachzulagern. Diese Möglichkeiten werden in den folgenden Abschnitten weiter besprochen.

2.4.3 Scaffolding

> Scaffolding […] allows students to meaningfully participate in and gain skill at a task that they would be unable to complete unaided (Belland, 2014).

Das Wort *Scaffolding* lässt sich auf zwei verschiedene Arten übersetzen: Zum einen als Substantiv: *Das Gerüst*, das zur Unterstützung baulicher Maßnahmen verwendet wird und nach erfolgreicher Fertigstellung wieder abgebaut wird, und zum anderen als Verlaufsform des Verbs *to scaffold*, womit das Auf- und Abbauen eines solchen Gerüsts gemeint ist. Das scaffolding bietet eine Möglichkeit, die Eigenaktivität des Lernenden im Rahmen seiner Fähigkeiten hoch zu halten, ohne ihn zu überfordern. Hierbei soll, einfach ausgedrückt, so wenig wie möglich, aber so viel wie nötig geholfen werden. Darin zeigen sich Ähnlichkeiten zum Prinzip der minimalen Hilfe (Aebli, 2019) und der Zone der nächsten Entwicklung (Vygotskij, 1978). Das Scaffolding verzichtet weitgehend auf direkte Instruktionen und setzt stattdessen auf Fragen, Hinweise und Denkanstöße sowie eine produktive Gestaltung der Lernumgebung (Zech, 1996). Ein Beispiel dafür wäre die Verwendung von Pólya-Fragen (Pólya, 1945) oder ähnlichen Fragestämmen wie sie in Abschnitt 2.3.2 beschrieben wurden. Wesentlicher Bestandteil des Scaffolding ist es, das verwendete Gerüst dynamisch an die Fähigkeiten der Lernenden anzupassen und dementsprechen nach und nach abzubauen, um nach und nach die Verantwortung für den Lernprozess auf die Lernenden zu übertragen (Puntambekar & Hubscher, 2005). Man spricht in diesem Zusammenhang auch von *Fading* (z. B. Belland, 2014; Wood, Bruner & Ross, 1976). Scaffolding soll nach Pol, Volman und Beishuizen (2010) Interesse wecken, Frustration kontrollieren, Feedback geben, auf wichtige Problemelemente hinweisen, Expertenverhalten simulieren und Fragen aufwerfen.

Speziell im Bereich der Metakognition gibt es bereits einige erfolgreiche Ansätze, die von der Vorgabe metakognitiver Fragestämme (Davis, 1996; Hannafin, Land & Oliver, 1999; vgl. auch Abschnitt 2.4.7, insbesondere Schoenfeld-Fragen) bis hin zur Entwicklung eigener metakognitiver Fragen (Molenaar, Boxtel & Sleegers, 2010; Pol et al., 2010) reichen. Alle diese Studien zeigen einen positiven Einfluss des Scaffolding auf die metakognitiven Kompetenzen der Probanden.

Eine etwas abgewandelte Form des Scaffolding ist die *Cognitive Apprenticeship*. Hierbei wird der Lernprozess einer Lehrlingsausbildung nachgebildet (vgl. Collins, Brown & Newman, 1988). Zunächst modelliert der Meister die zu lernende Tätigkeit, wobei er sein Vorgehen (und auch die Gründe dafür) nachvollziehbar kommentiert. Als nächstes versucht sich der Lehrling an der Tätigkeit, wobei der Meister bei Bedarf behilflich ist, sich aber nach und nach zurückzieht. Der Lehrling artikuliert hierbei seine Denkprozesse, damit der Meister Missverständnisse ausräumen kann, aber auch zur Selbstreflexion. Anschließend werden die Prozesse gemeinsam reflektiert. Zu guter Letzt führt der Lehrling die Prozesse selbstständig aus und der Meister betrachtet nur noch die Endprodukte.

2.4.4 Kooperative Lernformen

Bevor die Konsequenzen der bisherigen Überlegungen für die Förderung der Problemlösekompetenz dargestellt werden, sollen in diesem Abschnitt noch ein paar Überlegungen zu verschiedenen kooperativen Lernformen angestellt werden, die bei der Konzeption der in Abschnitt 4.4 beschriebenen Maßnahme eine Rolle spielen: Grundsätzlich ist der Vorteil von Gruppenarbeit im Vergleich zu Klassenunterricht, was die Lernwirksamkeit angeht, gut belegt, wobei die besten Ergebnisse von heterogenen Kleingruppen von drei bis vier Mitgliedern erzielt werden (vgl. Metastudie von Lou et al., 1996). Diese Effektivität ist auch an Universitäten nachgewiesen, wo vor allem die schwächeren Studierenden von Gruppenarbeit profitieren (Springer, Stanne & Donovan, 1999). Als Vorteile kooperativer Lernformen werden vor allem kommunikative Aspekte benannt: Durch die Notwendigkeit sich den anderen Gruppenmitgliedern mitzuteilen wird zum einen das vorhandene Vorwissen expliziert und neue Inhalte werden erläutert (Pressley et al., 1992), was sowohl das Elaborieren, als auch das Organisieren (vgl. Abschnitt 2.3.1) fördert. Da man sich auf ein gemeinsames Vorgehen einigen muss, werden Entscheidungen explizit hinterfragt wodurch die Metakognition gestärkt wird (Kramarski & Mevarech, 2003). Darüber hinaus werden verschiedene Perspektiven aufgeworfen und mehr Ideen generiert, was die Erfolgswahrscheinlichkeit erhöht (Zech, 1996). Fehlkonzepte und Wissenslücken werden durch die Kontrolle der Gruppenmitglieder leichter erkannt (Hatano & Inagaki, 1992). Bei schweren Aufgaben kann es allerdings durch die Gruppenarbeit zu kognitiver Überforderung kommen, sodass Kapazitäten für die Bearbeitung fehlen (Krause, Stark & Mandl, 2004; Lester Jr., 1989; Schnotz, Böckheler, Grzondziel, Gaertner & Waechter, 1998). Hier empfiehlt es sich, die Komplexität der Aufgabe zu reduzieren, beispielsweise indem man sich auf bestimmte Teilaspekte konzentriert (möglicherweise auch unterschiedliche je Gruppe). Wenn das nicht möglich ist, so kann eine Einzelarbeit besser sein (ebd.). Weitere mögliche Probleme bei der Gruppenarbeit können sein, dass sich einzelne Gruppenmitglieder in die Passivität zurückziehen oder im Gegenteil das Geschehen an sich reißen, ohne sich mit den anderen abzustimmen (Klauer & Leutner, 2007). Im Vergleich zum Unterricht im Plenum benötigt der Gruppenunterricht mehr Zeit, vor allem wenn im Anschluss noch die Ergebnisse aus den Gruppen zur Sicherung zusammengetragen werden sollen. Das kann gerade in universitären Veranstaltungen, wo die Präsenzzeit knapp bemessen ist, als Argument gegen die Gruppenarbeit genutzt werden. Aber auch die Arbeit im Plenum kann kooperativ sein. Eine gute Möglichkeit zum Sammeln von Ansätzen und Ideen kann das *brainstorming* sein, bei dem spontane Äußerungen zunächst kommentarlos notiert werden (Runco & Chand, 1994). Die hierbei erstellten Notizen können anschließend gemeinsam beurteilt oder in Gruppen- oder Einzelarbeit genutzt werden. Grundsätzlich sollte bei der Zusammenarbeit im Plenum eine Atmosphäre geschaffen werden, die Fehler zulässt (Bruder, 1992). Gerade beim Problemlösen gehören auch nicht-zielführende Ideen zum Prozess dazu. Außerdem sollte genügend Zeit zum Nachdenken eingeräumt werden und nicht nach zu kurzer Zeit eine Idee von der Lehrperson eingeworfen werden (ebd.). Ein Spezialfall des kooperativen Lernens ist das *Ich-Du-Wir-Prinzip* (Barzel, 2006) (oder im Englischen *Think-Pair-Share*). Hierbei gibt es zunächst eine Phase, in der sich jeder, ganz im Sinne des entdeckenden Lernens, selbstständig mit einer Aufgabe beschäftigt. Anschließend werden die Erkenntnisse in Kleingruppen (oder in Partnerarbeit) zusammengetragen und in der letzten Phase werden die Ergebnisse der verschiedenen Gruppen im Plenum vorgestellt. Der Vorteil dieser Arbeitsform ist, dass durch die erste Phase Passivität vermieden wird, in der zweiten Phase viele Vorteile der Kommunikation genutzt werden und am Ende alle Ergebnisse gesammelt werden.

2.4.5 Heurismentraining

Da es sich bei Heurismen um kognitive Strategien handelt und gewisse Gemeinsamkeiten mit Lernstrategien vorhanden sind (vgl. S. 31), lohnt es sich, einen Blick auf allgemeine Befunde zum Trainieren von kognitiven Strategien zu werfen. Wenngleich die Übertragbarkeit auf das Problemlösen nicht gesichert ist, lassen sich durch die deutlich breitere Forschungslage gewisse Tendenzen ausmachen. Grundsätzlich ist das Training kognitiver Strategien effektiver, wenn es mit metakognitivem Training verbunden ist (zu empirischen Befunden siehe Klauer, 2000; Leutner, Barthel & Schreiber, 2001; Leutner & Leopold, 2003; Schreiber, 1998). Ein möglicher Grund dafür ist, dass es nicht nur von Bedeutung ist, Strategien zu kennen, sondern auch einordnen zu können, wann deren Einsatz sinnvoll ist, also eine Verknüpfung zu Anwendungsmöglichkeiten herzustellen. Diese Einschätzungen werden durch metakognitive Strategien eingeübt. In Bezug auf Problemlösestrategien ist die Effektivität der Verknüpfung mit metakognitivem Training nicht so eindeutig. Collet (2009, S. 295) schreibt:

> Diese Kombination [von Problemlösestrategien mit Aspekten selbstregulierten Lernens] zeigt vergleichbare positive Wirkungen auf die Entwicklung von Problemlösefähigkeiten wie eine reine Vermittlung von Problemlösestrategien.

Außerdem wurde gezeigt (Hattie, Biggs & Purdie, 1996), dass kognitive Lernstrategie-Trainings mit zunehmendem Alter der Teilnehmer weniger effektiv sind, was möglicherweise durch einen *Ceiling-Effekt* zu begründen ist, d. h. aufgrund dessen, dass älteren Probanden bereits mehr Strategien bekannt sind, gibt es für sie gar nicht mehr so viel zu trainieren. Hinzu kommt, dass ältere Probanden möglicherweise zu der Überzeugung gelangt sind, dass die Strategien, mit denen sie schon länger arbeiten, für ihre Zwecke ausreichen und dadurch die Notwendigkeit von neuen Strategien nicht gesehen wird. Man muss also gerade bei älteren Lernenden (z. B. Studierenden) Wert darauf legen, die Notwendigkeit von neuen Strategien erfahrbar zu machen. Grundsätzlich werden kurzfristige Strategietrainings als wenig geeignet angesehen. So schreiben Friedrich und Mandl (2006):

> Erwerb und Nutzung von Lernstrategien sind kein Ergebnis kurzfristiger Strategietrainings oder einzelner Unterrichtssequenzen, sondern viel eher das Resultat langfristiger Gewohnheitsbildung.

Ähnliche Aussagen gibt es auch im Bezug auf Problemlösestrategien, z. B. von König (1992) sowie Bruder und Collet (2011), die wiederholte Anwendung über den kompletten Schulzeitraum fordern. Im Kontext des Lernens aus Sachtexten konnte ein alleiniges Training von kognitiven Strategien nicht zu einer Verbesserung führen (Leutner & Leopold, 2006). Ähnlich schlechte Diagnosen wurden immer wieder den Heurismentrainings gestellt (z. B. Lesh & Zawojewski, 2007; Schoenfeld, 1992; Silver, 1985, Lester Jr. & Kehle, 2003). Zwar wurde mehrfach gezeigt, dass der Einsatz vieler unterschiedlicher Heurismen positiv mit dem Erfolg beim Problemlösen korreliert (Kilpatrick, 1967; Lucas, 1974; Kantowski, 1977; Perels, 2003; Collet, 2009; Komorek, Bruder, Collet & Schmitz, 2006), und es gibt auch Hinweise darauf, dass Heurismentraining zu mehr Heurismeneinsatz führt (Koichu et al., 2007), allerdings zeigt sich ein positiver Effekt von Heurismentraining auf Problemlöseerfolg trotz zahlloser Studien selten und wenn es einmal gelingt, dass einzelne Heurismen mehr oder weniger erfolgreich trainiert werden, so findet Transfer in andere Kontexte so gut wie gar nicht statt (vgl. schon Schoenfeld, 1992; Silver, 1985; Smith, 1973; Wilson, 1968).

Da diese Befunde schon seit langer Zeit vorliegen, gibt es auch zahlreiche Erklärungsversuche und berechtigte Zweifel nicht nur an der Wirksamkeit von Heurismentrainings, sondern auch an der Sinnhaftigkeit einer Liste, wie sie von (Pólya, 1945) erstellt wurde (vgl. Zech, 1996). Einer der Hauptkritikpunkte hieran ist die Tatsache, dass die dort aufgelisteten Heurismen deskriptiv sind, d. h. sie beschreiben Heurismen, nachdem sie sich als erfolgreich erwiesen haben. Es ist für einen Laien kaum möglich, im Vorhinein zu sagen, welcher der Einträge auf der Liste wirklich zielführend ist. Die Liste ist also nicht präskriptiv (vgl. Schoenfeld, 1992). Auch ist es zweifelhaft, dass Experten ihre Entscheidungen aufgrund einer solchen

Liste treffen (vgl. Fritzlar, 2011). Zwar werden sie (bewusst oder unbewusst) einen Fundus an bewährten Vorgehensweisen haben. Diesen haben sie sich aber in der Regel durch das Bearbeiten zahlreicher Probleme erarbeitet (z. B. Lester Jr., 1989; Pólya, 1945). Dazu kommt, dass die Heurismen auf so einer Liste entweder sehr allgemein sind oder „durch das Maß ihrer Bereichsspezifität des Problems teilweise beschränkt" (Heinze, 2007), was dazu führen würde, dass eine solche Liste sehr lang werden müsste, um möglichst viele Probleme abzudecken. Pólya (1945) hat sich bekanntermaßen für eine kurze Liste entschieden, damit die Fragen leicht abrufbar sind. Auch wäre eine lange Liste viel zu umfangreich, um hieraus passende Heurismen auszuwählen. Das führt aber dazu, dass die genannten Heurismen sehr allgemein und in ihrer konkreten Anwendung auf ein Problem schwierig zu handhaben sind. So schreiben English und Sriraman (2010, S. 20) zu dem scheinbar leicht zu überschauenden Heurismus *Fertige eine Skizze an*:

> For example, the strategic tool, *draw a diagram*, can be effective in solving some problems whose structure lends itself to the use of this tool, such as combinatorial problems. However, the solver needs to know which *type* of diagram to use, *how to use it*, and *how to reason* systematically in executing their actions.

Sie gehen sogar so weit, zu sagen, dass Heurismen erst dann eingesetzt werden sollten, wenn man ohne sie nicht mehr weiterkommt (ebd.). Zumindest darin, dass Heurismen nicht blind einzusetzen sind, sondern es genauer Überlegung zu ihrer Passung bedarf, stimmt Pólya mit ihnen überein:

> The intelligent problem-solver should be prepared to ask all questions of the list but he should ask none unless he is prompted to do so by careful consideration of the problem at hand and by his own unprejudiced judgement. In fact, he must recognize by himself whether the present situation is sufficiently similar or not to some other situation in which he saw the question successfully applied (Pólya, 1945, S. 206–207).

Das Fragenstellen bzw. der Heurismeneinsatz sollte also immer bewusst ablaufen, da sie sonst der zum Problemlösen „erforderlichen Beweglichkeit"[24] im Weg stehen (vgl. Zech, 1996, S. 340). Schoenfeld (1992) kritisiert in diesem Zusammenhang, dass Problemlösestrategien üblicherweise als etwas gelehrt werden, das durch Übung beherrscht werden kann. Entsprechende Aufgaben werden so ausgewählt, dass der entsprechende Heurismus gut daran ausgeführt werden kann. Die Lernen-

---

[24] Ob Zech hier die geistige Beweglichkeit im Sinne von Hasdorf (1976) meint (siehe S. 30 f.) oder eine generelle Flexibilität, die durch das unreflektierte Abarbeiten einer Liste gestört werden kann, ist der genannten Textstelle nicht zu entnehmen.

den bekommen so den Eindruck, dass der Lösungsweg bereits vorgegeben ist und sie selbst nichts weiter tun müssen, als diese anzuwenden.

Wenn Heurismentrainings also so umstritten sind, warum werden sie dann immer wieder eingesetzt? Bruder und Collet (2011) begründen ihr Vorgehen damit, dass es langwierig ist, das Problemlösen nur durch das Lösen von Problemen zu erlernen. Ihr Ziel ist es, aus wenigen Musteraufgaben durch angeleitete und reflektierte Erfahrung möglichst viel Übertragbares zu lernen. Das schrittweise Erlernen von einzelnen Heurismen soll zu einer Internalisation führen, also dazu, dass ein Wissensschema um sie herum aufgebaut wird, das durch immer stärkere Kontexterweiterung ausgebaut wird, so dass der Abruf des Heurismus und die Einschätzung seiner Nützlichkeit für neue Probleme immer leichter fällt. Zwar kann man Problemlöseprozesse nicht komplett automatisieren (sonst wären sie per definitionem keine Problemlöseprozesse mehr), aber einzelne Strategien und Teilhandlungen können prozeduralisiert werden (vgl. Heinze, 2007; Newell, 1983). So werden wieder Ressourcen für andere Prozesse frei (Renkl & Nückles, 2006). Bruder und Collet (2011) zitieren selbst die Bund-Länder-Komission für Bildungsplanung und Forschungsförderung mit ähnlichen Argumenten gegen ein (kurz- oder mittelfristiges) Heurismentraining, wie sie hier vorgebracht werden:

> Grundsätzlich lassen sich allgemeine Strategien, Heuristiken, Lösungsalgorithmen und Lernregeln im begrenzten Umfang auch direkt vermitteln und trainieren. Für diese generellen Werkzeuge gilt jedoch ein Bandbreiten-Genauigkeitsdilemma: Je allgemeiner diese Werkzeuge sind, desto geringer ist ihr Nutzen bei der Lösung spezifischer anspruchsvoller Probleme.
>
> Erfolgversprechender ist der Weg, Methoden des Lernens und des Problemlösens, persönliche Arbeitshaltungen und soziale Kompetenzen systematisch bei der Erarbeitung inhaltsspezifischen Wissens zu vermitteln. Der Erfolg dieser induktiven Strategie hängt davon ab, daß es sich bei dieser Vermittlung nicht um sporadische, sondern um systematische Bemühungen handelt (Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung, 1997).

Entscheidend ist hier, dass es sich bei der Vermittlung von Problemlösestrategien um systematische, also andauernde Bemühungen handelt, die dann stattfinden, wenn es inhaltlich sinnvoll ist. Das entspricht auch der Meinung von Zech (1996), der vorschlägt, Heurismen nach den Aufgabenanforderungen auszurichten (also z. B. in der Geometrie das Erstellen von Skizzen zu behandeln). Das Heurismentraining von Bruder und Collet (2011) ist langfristig angelegt und wird weiter unten ausführlich beschrieben.

Zwei weitere Konzeptionen sollen an dieser Stelle kurz beschrieben werden: Zum einen hat Schoenfeld (1985, Kapitel 6) ein Heurismentraining durchgeführt, bei dem fünf sehr spezifische Unterstrategien von Heurismen eingeübt wurden. Diese Strategien waren: Das *Anfertigen einer Zeichnung*, die *induktive Argumentation* (Wenn es eine natürliche Zahl als Parameter gibt, betrachte die Zahlen von eins bis fünf, dann überlege, was passiert, wenn man einen Schritt weiter von n nach $n + 1$ geht), der *indirekte Beweis*, das *Betrachten eines Ähnlichen Problems mit weniger Variablen* und das *Setzen von Teilzielen*. Hierbei haben sowohl die Interventions- als auch die Kontrollgruppe über einen längeren Zeitraum je vier Probleme, die auf die fünf Heurismen zugeschnitten waren, bearbeitet. Anschließend wurde ihnen eine Musterlösung gegeben. Bei der Kontrollgruppe waren die Probleme ungeordnet. Die Interventionsgruppe hat die Probleme nach Heurismen geordnet gestellt bekommen. Außerdem wurden die Heurismen explizit benannt und es gab eine Liste der fünf Heurismen, die jederzeit griffbereit war. Während bei Prätest beide Gruppen etwa gleich abschnitten, hat sich die Interventionsgruppe beim Posttest deutlich verbessert, während die Kontrollgruppe keine Verbesserungen zu verzeichnen hatte. Dieses Ergebnis wurde von Rott und Gawlick (2014) repliziert und bestätigt. Zusätzlich wurde hier eine Nullgruppe eingeführt, die zwischen Vor- und Nachtest keine Probleme bearbeitete. Diese Gruppe hat sich vom Prä- zum Posttest deutlich verschlechtert, was darauf schließen lässt, dass die Aufgaben im Posttest einen höheren Schwierigkeitsgrad hatten. Obwohl dies eine der wenigen Studien ist, bei der Heurismentraining zu besseren Ergebnissen führt, ist der Erfolg mit Vorsicht zu genießen. Schoenfeld schreibt in der Zusammenfassung dieses Trainings:

> At least in a fairly ideal environment – where problems of executive control are kept to a minimum, the heuristic strategies are explicitly labeled and explicated in some detail, and practice is given in concentrated doses – students can master certain heuristic strategies well enough to use them on related but not isomorphic problems.

Eine Einschränkung ist also, dass Kontrollentscheidungen der Interventionsgruppe weitestgehend abgenommen wurden. Es wurde relativ deutlich impliziert, dass es im Posttest genau um diese fünf Heurismen ging. Es musste also nur jeder Aufgabe eine Strategie zugeordnet werden. Die Kontrollgruppe hingegen wusste lediglich, dass es um das Bearbeiten von Problemen ging. Wenn sie aber die Verbindung zwischen den Übungsaufgaben nicht selbst hergestellt hatten (was eine große Leistung wäre), hatten sie wenig Anhaltspunkte, wie die Testaufgaben zu bearbeiten sind. Eine zweite Einschränkung ist die, dass das Training nur bei bestimmten Heurismen Wirkung gezeigt hat. Bei den Strategien *Setzen von Teilzielen* und *indirekter Beweis* ließen sich keine Transfereffekte erkennen. Eine mögliche Erklärung hierfür liegt darin, dass diese Strategien nicht spezifisch genug waren, also zu vage, als dass sie den Probanden bei der Aufgabenbearbeitung geholfen hätten. Wollte man die Strategien aber weiter spezifizieren, also in Unterstrategien aufteilen, hätte man wieder das Problem einer langen Liste an Strategien.

Schoenfeld selbst führt ein Problemlösetraining durch, dessen Prinzipien von Arcavi et al. (1998) wie folgt beschrieben werden:

- Probleme werden erst in Gruppenarbeit bearbeitet, dann im Plenum.
- Während der Gruppenarbeit ist der Dozent als Berater tätig.
- Während der Bearbeitung von Aufgaben werden metakognitive Kontrollfragen gestellt (siehe Abschnit 2.4.7).
- Lösungen werden in der Regel von Studierenden vorgestellt und nur im Notfall vom Dozenten.
- Die Präsentation der Aufgaben reflektiert die abgelaufenen kognitiven Aktivitäten.
- Erläuterungen zur Ideengenerierung werden als wertvoll angesehen, auch wenn sie nicht zum Ziel führen.
- Neue Techniken werden explizit festgehalten.
- Bereits bei der Bearbeitung der Hausaufgaben soll die Kommunikation der Ergebnisse vorbereitet werden.

Leuders (2017, S. 133) ist sich der beschriebenen Schwierigkeit der Vermittlung von heuristischen Strategien durchaus bewusst und stellt seinerseits ein langfristiges Konzept für den Unterricht vor:

> Trotz ihrer relativen Vagheit sind Strategien und Routinen für den kreativen Umgang mit Problemen durchaus erlernbar. Der Lernfortschritt bei Schülerinnen und Schülern in dieser Hinsicht ist jedoch nur gering, wenn man erwartet, dass Problemlösekompetenz gleichsam implizit mitgelernt wird. Stattdessen muss man Verfahren des Problemlösens an die Oberfläche holen, explizit machen und reflektieren. Dies sollte mit wachsender Erfahrung in mehreren Schritten geschehen:

Die Schritte, die er vorschlägt, sind:

- Durch konkrete Fragen (ähnlich denen Pólyas) zur Reflexion anregen (z. B. Welche Möglichkeiten haben wir? Warum ist dieses Ergebnis herausgekommen? Haben wir so etwas Ähnliches schon einmal gemacht?)
- Einzelne dieser Fragen in das Repertoire der Schüler übergehen lassen

- Heurismen anwenden, reflektieren und auf einem *Strategiekärtchen* explizit benennen, mit Fragen verknüpfen und durch eine Musteraufgabe repräsentieren
- In Problemlösestunden die Heurismen an vielfältigen Beispielen anwenden, um ihre Tragweite zu erkennen.
- Sammeln der Strategiekarten in einem Strategiebaukasten, auf den beim selbstständigen Problemlösen zurückgegriffen werden kann.

Bevor auf das Konzept von Bruder und Collet eingegangen wird, soll noch eine Frage diskutiert werden, die sich bei jedem Heurismentraining stellt: Welche Heurismen sollen hierfür ausgewählt werden?

> In fact, there are enough indications that problem-solving strategies are both problem- and student-specific often enough to suggest that hopes of finding one (or few) strategies which should be taught to all (or most) students are far too simplistic (Begle, 1979, S. 145 f.).

Auch Zech (1996) findet eine „starke Fixierung auf bestimmte heuristische Regeln unnötig" und schlägt, wie bereits erwähnt, eine Auswahl nach typischen Aufgabenanforderungen vor. Es gibt allerdings eine Gruppe von Heurismen, nämlich die *heuristischen Hilfsmittel*, die eine Sonderstellung einnehmen.

> Im Gegensatz zu den anderen Heurismen, die eher Verfahrenscharakter haben, sind die heuristischen Hilfsmittel keine unmittelbaren Lösungsstrategien. Sie sollen vielmehr dabei helfen, ein Problem zu verstehen und zu strukturieren, zu visualisieren bzw. Informationen zu reduzieren (Bruder & Collet, 2011, S. 45).

Man könnte diese Hilfsmittel analog zu Lernstrategien also auch als Organisationsstrategien bezeichnen. Sie kommen hauptsächlich in Pólyas erster Phase *Understanding the Problem* vor. Beispiele für solche Heurismen sind *Voraussetzungen und Behauptungen systematisch festhalten*, *Begriffe klären* und *Darstellungswechsel*. Interessanterweise wird das *Betrachten von Beispielen* nicht zu dieser Kategorie gezählt, obwohl es ebenfalls die oben genannten Eigenschaften besitzt. Der Grund dafür liegt darin, dass Beispiele nicht ausschließlich in dieser ersten Phase des Verstehens, sondern während des gesamten Problembearbeitungsprozess von Bedeutung sein können, da die Verallgemeinerung von Spezialfällen ein probates Mittel zum Problemlösen ist. Die Notwendigkeit von Hilfsmitteln ist von den Lernenden leicht einzusehen (ebd.) und sie können auch leichter vermittelt werden (vgl. auch König, 1992). Weitere Präferenzen sind schwer zu begründen. Bruder und Collet (2011) haben einige Heurismen aus ihrem Training ausgeschlossen, weil sie in der Schule kaum eine Bedeutung haben (z. B. das *Rekursionsprinzip* oder das *Schubfachprinzip*). Auch werden Heurismen ausgeschlossen, die Bruder und Collet als *Trivialstrategien* bezeichnen, namentlich der *Analogieschluss* und die *Rückführung auf Bekanntes*, weil diese für die Schüler keinen Neuheitsgrad haben und ihr Nutzen nicht so gut einzusehen ist. Für die Auswahl der weiteren Heurismen wird (abgesehen von den empfohlenen heuristischen Hilfsmitteln) keine weitere Erklärung abgegeben.

Das Training von Bruder und Collet (ebd.) besteht aus einem Vier-Phasen-Konzept. In der ersten Phase *Gewöhnen an Heurismen* dient die Lehrkraft als Vorbild. Vor dem Bearbeiten eines Problems (nach dem Lesen der Aufgabe) werden durch die Lehrkraft typische Fragestellungen verwendet, an die sich die Schüler gewöhnen sollen, die aber nicht explizit beigebracht werden. Sie sollen als Handlungsmuster zur Orientierung dienen. Diese Fragen können z. B. sein:

- Worum geht es?
- Was wissen wir zum Problem?
- Wie kann man die gegebene Situation strukturieren?

oder (sofern schon Heurismen bekannt sind)

- Welche Methoden und Techniken stehen uns zur Verfügung?
- Welche eignen sich für das Problem?

Nachdem die Schüler sich mit einem Problem beschäftigt haben, werden explizit Reflexionsanlässe gegeben, durch Fragen wie:

- Welche mathematischen Inhalte haben uns geholfen?
- Welche Strategien waren nützlich?
- Was war neu?
- Welche Fragen sind offen geblieben?
- Gibt es eine (eindeutige) Lösung des Problems?
- Geht es auch einfacher?

Möglicherweise muss die Lehrkraft zunächst viel bei der Beantwortung dieser Fragen helfen. Langfristig ist aber das Ziel, dass die Schüler lernen, die Fragen selbstständig zu beantworten. In dieser Phase wird schon klar, dass sich dieses Training nicht auf die Vermittlung von Heurismen beschränkt. Auch metakognitive Elemente sind eingebaut.

In der zweiten Phase *Bewusstmachen heuristischer Elemente und Einsicht in deren Wirksamkeit* werden zu dem hier thematisierten Heurismus Musteraufgaben verwendet, die die Nützlichkeit dieses Heurismus besonders verdeutlichen. Diese Aufgabe wird dann, in der Regel nach dem Ich-Du-Wir-Prinzip (vgl. Barzel, 2006), bearbeitet. Idealerweise entdecken die Schüler den Heurismus selbst, realistischerweise kann das aber nicht immer jedem gelingen. Verschiedene Lösungswege werden von den Schülern vorgestellt. Die Lehrkraft kann dann alternative, nicht gefundene Lösungswege vorstellen. Anschließend wird der Heurismus explizit benannt, sein spezielles Vorgehen wird zusammengefasst und es werden Heurismensteckbriefe angefertigt. Diese beinhalten, ähnlich wie die Leuders'schen Strategiekarten (s. o.) den Namen des Heurismus, eine passende, von jedem Schüler individuell gewählte Orientierungsfrage (ähnlich der Pólya-Fragen), sowie markante Musterbeispiele zur Anwendung. Dann können die Schüler noch nach Aufgaben suchen, die sie bereits ähnlich gelöst haben. An die Einführung des Heurismus schließen sich noch eine Übungsphase sowie (möglicherweise längerfristige) Hausaufgaben an.

In der dritten Phase *Zeitweilige bewusste Übung und Anwendung* soll der neue Heurismus an weiteren Anwendungsaufgaben eingeübt werden. Hierbei sollen zur Differenzierung unterschiedlich schwere Aufgaben gestellt werden, damit zum einen auch schwächere Schüler ein Erfolgserlebnis mit der neuen Strategie haben, zum anderen die stärkeren Schüler die Aufgaben nicht so leicht finden, dass sie diese auch ohne Verwendung des Heurismus lösen können. Die Notwendigkeit muss erlebt werden. Am Ende dieser Phase sollten alle Schüler sich mit dem Heurismus so gut auskennen, dass sie sich an das Vorgehen bei vergangenen Aufgaben erinnern, dieses verbalisieren können und bei einer ähnlichen Aufgabe wiedererkennen. Es kommt nicht so sehr darauf an, den Namen zu kennen oder Orientierungsfragen auswendig zu lernen. Es sei angemerkt, dass Schoenfeld an dieser Stelle einen anderen Weg verfolgt. Er möchte verhindern, dass sich Strategien unreflektiert einschleifen und streut nach dem Erlernen eines neuen Heurismus gerne Aufgaben ein, bei denen ebendieser nicht zielführend ist oder gar völlig in die Irre führt (siehe Arcavi et al., 1998).

Die vierte Phase ist die *Schrittweise bewusste Kontexterweiterung für den Einsatz der Heurismen und zunehmend unterbewusste Nutzung*. Damit die Schüler erkennen, dass es sich bei dem neu erlernten Heurismus nicht nur um ein Lösungsschema für einen bestimmten Aufgabentyp handelt, das man nach Abschluss des Themenbereiches wieder in der Schublade verschwinden lassen kann, soll der Heurismus zunächst ganz bewusst auf weitere Anwendungsbereiche ausgeweitet werden, bei denen das Vorgehen höchstwahrscheinlich an den neuen Kontext angepasst werden muss. Die Schüler sollen sich hier der Tragweite der Strategie bewusst werden. Aufgaben aus den neuen Kontexten können die in der zweiten Phase erstellten Heurismensteckbriefe erweitern. Zunehmend soll dann die Nutzung des Heurismus internalisiert werden, so dass das Abrufen keine große Anstrengung mehr bereitet. Diese Phase sollte einen gewissen Abstand zur dritten Phase haben.

Insgesamt erstreckt sich das hier vorgestellte Training über größere Zeiträume und ist im Grunde genommen nie abgeschlossen, da sich immer wieder neue Anwendungskontexte ergeben. Wenn die Schüler bereits eine Reihe von Heurismen gelernt haben, empfiehlt es sich, dass sie individuelle Problemlösemodelle erstellen, in denen sie Beziehungen zwischen Heurismen aufzeigen können. Darüber hinaus können Lösungsgraphen helfen, Muster in der Problembearbeitung zu erkennen und eine Reflexion darüber anregen. Wie man sieht, ist dieses Konzept mehr als nur ein Heurismentraining. Auch andere Aspekte des Problemlösens werden beachtet. Eine Gefahr dieses Trainings besteht, so Bruder und Collet selbstkritisch, darin, dass die in der zweiten Phase explizierten Heurismen von den Schülern als Regeln, die es auswendig zu lernen gilt, wahrgenommen werden, bevor sie deren Nutzen erkennen. In dem Fall kann es passieren, dass diese Regeln nicht mit anderem Wissen verknüpft und leichter wieder vergessen werden.

2.4.6 Training von mathematikspezifischen kognitiven Lernstrategien

Auf die Beschreibung von Konzeptionen zu allgemeinen Lernstrategietrainings wird an dieser Stelle verzichtet, da, wie die in Abschnitt 2.4.5 zitierten Befunde zeigen, von kurzfristigen Trainings im Studium nur geringe Wirksamkeit zu erwarten ist. Stattdessen wird ein Training zum Beweisverständnis durch sogenannte *Self-Explanations* vorgestellt, dessen Wirksamkeit von Hodds et al. (2014) gezeigt wurde. Das Konzept der *Self-Explanations* wurde zuerst von Chi, Bassok, Lewis, Reimann und Glaser (1989) im Bereich der Newton'schen Mechanik qualitativ untersucht. Sie haben zehn Studierenden einen physikalischen Text vorgelegt und sie aufgefordert, sich die Inhalte selbst zu erklären. Anschließend wurde den Studierenden ein Test mit Aufgaben zu diesem Text gestellt. Es zeigte sich, dass diejenigen Studierenden, die eine hohe Punktzahl bei dem Test erreicht haben, vorher mehr *Self-Explanations* (Informationen und Verknüpfungen, die nicht explizit im Text auftauchen) hervorgebracht haben. Hodds et al. (2014) haben hierzu im Zusammenhang mit mathematischen Beweisen ein Trainingskonzept entwickelt, dass die Self-Explanations der Studierenden verbessern soll. Diese bestehen im Idealfall darin, dass für jede Beweiszeile[25] festgestellt wird, *warum* sie durchgeführt wird (also was die Grundidee dahinter ist) und Verknüpfungen zu vorherigen Zeilen und anderem Vorwissen hergestellt werden. Dieses Vorgehen wurde an einem Beispielbeweis vorgeführt und es wurde den Studierenden ein weiterer Beweis zum Einüben des Verfahrens gegeben. Es konnte gezeigt werden, dass sich dieses Training positiv auf Lernprozesse und Beweisverständnis auswirkt. Eine Übertragbarkeit auf das Nachvollziehen von Musterlösungen zu Problemaufgaben ist anzunehmen, da es sich hierbei überwiegend um Beweisaufgaben handelt.

2.4.7 Metakognitives Training

Wenn in diesem Abschnitt von Metakognition und Selbstregulation die Rede ist, dann ist, wie in Abschnitt 2.3.3 besprochen, generell die Steuerung von kognitiven Aktivitäten gemeint. Wenn nicht anders erwähnt, schließt das sowohl den Einsatz von Lern- als auch von Problemlösestrategien mit ein.

Die Bedeutung von metakognitiven Aktivitäten für Lern- und Problemlöseprozesse ist unbestritten. Laut einer Metastudie von Hattie et al. (1996) wirkt sich die Nutzung metakognitiver Strategien positiv auf den Lernerfolg aus. Bei fehlendem bereichsspezifischem Wissen oder besonders schweren Lerninhalten sind metakognitive Kompetenzen sogar wichtigster Prädiktor für Lernerfolg (Prins et al., 2006).

Auch auf den Bereich des Problemlösens lassen sich diese Ergebnisse übertragen. Bereits Resnick und Glaser (1975) konnten empirisch bessere Problemleistungen durch Vorausplanen des eigenen Vorgehens nachweisen. Es wurde auch mehrfach gezeigt, dass regelmäßige Kontrolle des eigenen Vorgehens der wichtigste Unterschied zwischen erfolgreichen und weniger erfolgreichen Problemlösern ist (Überblicksartikel: Lester Jr., 1994; vgl. auch Schoenfeld, 1981; Kaune & Cohors-Fresenborg, 2010).

Im Gegensatz zu den meisten Heurismentrainings konnten bei Metakognitionstrainings positive Effekte nachgewiesen werden. So führt das regelmäßige Hervorheben metakognitiver Elemente in der Schule zu besseren Mathematikleistungen (Cohors-Fresenborg & Klieme, 2000). Auch zwischen Selbstregulationstraining und Problemlösekompetenz wurde mehrfach ein positiver Zusammenhang festgestellt (Lester Jr., 1989; Perels, 2003; Mevarech & Kramarski, 1997; Schoenfeld, 1992). Als besonders wirksam erweisen sich Metakognitionstrainings, wenn sie mit fachs-

[25] Natürlich muss es sich hierbei nicht zwingend um eine Zeile handeln, gemeint ist ein einzelner Beweisschritt, der auch länger als eine Zeile sein kann. Auch mehrere Schritte in einer Zeile sind nicht ungewöhnlich.

pezifischen Inhalten oder Strategietrainings verknüpft werden (Klauer, 2000; Perels, 2007; Perels, Gürtler & Schmitz, 2005; Souvignier & Mokhlesgerami, 2006).

Es ist also nicht verwunderlich, dass viele Autoren (z. B. Lester Jr., 1989; Woods et al., 1997; Zech, 1996) metakognitiven Aktivitäten beim Problemlösen große Bedeutung zumessen. Bereits (Pólya, 1945) hat in der Reflexion des Lösungsweges und des Ergebnisses (in der Phase *Looking Back*) den wichtigsten Teil der Arbeit gesehen. Entsprechende Fragen sind: Was war die entscheidende Idee? Was hat behindert, was geholfen? Er betont die Wichtigkeit des Vergleichs der Merkmale des Problems mit anderen Problemen.

Insgesamt schlagen viele Autoren die regelmäßige Integration von Metakognition zur effektiven Auswahl von Strategien in den täglichen Unterricht vor (z. B. Pressley, Borkwski & Schneider, 1989; Moely, Santulli & Obach, 1995). Aber worauf kommt es also neben der Verknüpfung mit mathematischem Wissen und Strategien hierbei noch an? Schoenfeld (1985; 1998) hat auf folgende Aktivitäten zur Förderung der Metakognition Wert gelegt:

- Arbeit in Gruppen zur gemeinsamen Planung und Kontrolle des Vorgehens (siehe Abschnitt 2.4.4)
- Kontrollfragen, die jederzeit im Problemlöseprozess vom Dozenten gestellt werden konnten und an deren Beantwortung sich die Studierenden nach und nach gewöhnten (Was mache ich? Warum? Was bringt mir das Ergebnis?)
- Implizite Vermittlung von Entscheidungsprozessen durch demonstratives lautes Denken bei der Bearbeitung von Aufgaben durch die Lehrkraft, hierbei auch Fehlentscheidungen treffen, die dann etwas später reguliert werden konnten
- Gemeinsame Bearbeitung von Problemen im Plenum (zunächst verschiedene Ideen vorschlagen, dann Entscheidung der Studenten, welche verfolgt werden soll, nach fünf Minuten evaluieren, ob man bei dieser Idee bleiben soll oder nicht)
- Gemeinsame Reflexion im Plenum (Was haben wir getan? Wo hätte man effizienter arbeiten können? Weitere Ansätze verfolgen)

Vor allem die regelmäßigen Kontrollfragen sieht Schoenfeld als besonders erfolgreichen Teil seiner Lehrveranstaltung an.

Bei der Förderung von metakognitiven Kompetenzen unterscheidet man neben der expliziten (durch Benennung und Einordnung der Strategien) und der impliziten (durch demonstrative Verwendung von Strategien) auch die direkte und die indirekte Vermittlung. Erstere setzt sich aus expliziter und impliziter Vermittlung zusammen, letztere besteht darin, Gelegenheiten zur Selbstregulation zu schaffen und hat deswegen so große Bedeutung für die Metakognition, weil dadurch die Eigenaktivität gefördert wird. Nachteil der indirekten Vermittlung ist aber, dass die Erkenntnisse von den Lernenden nur selten selbstständig auf andere Kontexte übertragen werden (Veenman, 2011). Das kann durch Explikation gestärkt werden, die beim selbstständigen Arbeiten oft zu kurz kommt (Hunter-Blanks, Ghatala, Pressley & Levin, 1988). Insgesamt wird daher eine Mischung aus direkter und indirekter Vermittlung empfohlen (Paris & Paris, 2001; Veenman, 2013).

Bei der Vermittlung metakognitiver Strategien sind viele Dinge von Bedeutung, die bereits bei der Vermittlung von Heurismen angesprochen wurden. So schreiben Prins et al. (2006), dass an Stelle eines kurzfristigen Trainings ein anhaltendes Training treten sollte, um die Anwendung von metakognitiven Strategien langfristig zu sichern. Masui und Corte (2005) betonen die Wichtigkeit verschiedener kooperativer Lernformen (vgl. Abschnitt 2.4.4), sowie die Notwendigkeit, die Lernenden von der Nützlichkeit und den Vorteilen der verwendeten Strategien zu überzeugen. Außerdem halten sie es für entscheidend, ausreichend Übungsmöglichkeiten und Feedback zur Anwendung der Strategien zu Verfügung zu stellen. Um Transfereffekte zu sichern, schlägt Pickl (2004), ähnlich wie Bruder und Collet (2011), die Thematisierung verschiedener Anwendungskontexte vor.

Bei der Regulation des eigenen Verhaltens kann bereits einfach Selbstbeobachtung helfen (vgl. Kanfer, Reinecker & Schmelzer, 2012). Der nächste Schritt wäre dann, sich das eigene Verhalten selbst vorzusagen, um dieses auf eine bewusste Ebene zu heben. Man spricht in diesem Zusammenhang von *Selbstverbalisierung* (vgl. Dunlosky, Rawson, Marsh, Nathan und Willingham (2013)). Um zur eigentlichen Regulation des Verhaltens zu kommen, muss nun eingeschätzt werden, ob das eben beobachtete Verhalten sinnvoll ist, also zum vorgegebenen Ziel führt. Das Ergebnis dieser Einschätzung führt dann zur Modifikation, also Regulation des eigenen Vorgehens. Hierbei können Fragen, wie die von Schoenfeld (1985) oder Bruder und Collet (2011) (s. o.) helfen. Einen Schritt weiter geht die schriftliche Dokumentation des eigenen Vorgehens. Mason, Burton und Stacey (2011) haben im Zusammenhang mit Problemlöseprozessen eine Systematik entwickelt, die bei der Reflexion des eigenen Vorgehens, mit besonderem Augenmerk auf *Aha-Erlebnissen* (Bruder und Collet sprechen hier von *Heureka-Effekten*) und Schwierigkeiten im Lösungsprozess, helfen sollen. Eine Ausführliche Beschreibung der Umsetzung dieser Idee wird in Abschnitt 4.4 gegeben.

2.5 Zusammenfassung

An dieser Stelle soll das Theoriekapitel kurz zusammengefasst werden. In Abschnitt 2.1 wurde die Situation der mathematischen Hochschuldidaktik dargelegt und einige Maßnahmen wurden angesprochen, die, im Wesentlichen in den letzten zehn Jahren, entwickelt wurden. Es wurde aber auch festgestellt, dass, gerade im Zusammenhang mit der Gestaltung der Übungsgruppen, die Forschungslage recht dünn ist. Auch die Forschung zu authentischen Problemlöseprozessen an der Universität bedarf größerer Beachtung.

In Abschnitt 2.2.1 wurde der Problembegriff als Aufgabe, zu deren Lösung dem Bearbeiter keine Routineverfahren zur Verfügung steht, charakterisiert und eine Abgrenzung zum Beweisbegriff vorgenommen. In Abschnitt 2.2.2 wurden die vier Phasen des Problemlöseprozesses nach Pólya (1945) (*Understanding the Problem*, *Devising a Plan*, *Carrying Out the Plan* und *Looking Back* sowie das Phasenmodell nach Hadamard (1959), bestehend aus *Initiation*, *Incubation*, *Illumination* und *Vérification* vorgestellt.

Abschnitt 2.3 beschreibt die Einflussfaktoren auf das Problemlösen nach Schoenfeld (1985). Diese sind die *Ressourcen* (Abschnitt 2.3.1), bzw. das Vorwissen der Problembearbeiter, die *Heurismen* (Abschnitt 2.3.2), die *Kontrolle* (Abschnitt 2.3.3), bzw. Metakognition und Selbstregulation sowie die *Überzeugungssysteme* (Abschnitt 2.3.4) der Problembearbeiter. Zusätzlich zur Vorstellung dieser Aspekte werden hier Lernstrategien zur selbstständigen Aneignung von Vorwissen (ebenfalls Abschnitt 2.3.1) beschrieben. Außerdem wurde eine gewisse Ähnlichkeit von Tiefenlernstrategien, also solchen Strategien, die dem tieferen Verständnis der Lerninhalte dienen, und Heurismen festgestellt (Abschnitt 2.3.2).

In Abschnitt 2.4 wurden Konzeptionen vorgestellt, die zur Förderung von Problemlösekompetenzen verwendet werden können und die Grundlage für die in Abschnitt 4.4 vorgestellte Maßnahme bilden.

Ein wichtiger Aspekt der Maßnahme ist das in Abschnitt 2.4.1 vorgestellte *entdeckende Lernen*, bei dem auf der einen Seite zur individuellen Verarbeitung prozedurales Wissen vom Lernenden entdeckt, auf der anderen Seite eine Überforderung, die dieses Entdecken verhindert, vermieden werden soll.

Eine Möglichkeit, solche Überforderungen zu beschreiben, bietet die *Cognitive Load Theory* (Abschnitt 2.4.2). Ihr zufolge sollen Lernende bei der Bearbeitung komplexer Aufgaben unterstützt werden, um Kapazitäten für Lernaktivitäten zu schaffen. Eine Möglichkeit der Unterstützung ist die Verwendung von *Worked Examples* also ausführlicher Musterlösungen, deren Erfolg aber sehr stark abhängig vom Umgang der Lernenden hiermit ist. Einen Schritt weiter geht das *Self-Explanation Training* nach Hodds et al. (2014), bei dem eben dieser Umgang mit Musterlösungen geschult werden soll. Die Umsetzung dieses Trainings ist in Abschnitt 2.4.6 beschrieben. Weitere Möglichkeiten der kognitiven Entlastung bieten sich z. B. durch Lösungshilfen, teilweise Vermittlung benötigten Wissens, kooperatives Arbeiten oder vorheriges Einüben von Teilprozessen. Übertragen auf den universitären Kontext sind auch lückenhafte Musterlösungen, Vorschläge von mehr oder weniger zielführenden Ansätzen oder die Lösung zu einer Aufgabe, bei der ähnliche Strategien zum Einsatz kommen (mit möglichst unterschiedlichen oberflächlichen Merkmalen) oder eine gemeinsame Vorbereitungsphase für schwierige Aufgaben denkbar, die den Studierenden den Einstieg erleichtert.

Das in Abschnitt 2.4.3 beschriebene Konzept des *Scaffolding* betont, dass es bei allen Hilfestellungen darauf ankommt, diese an die Bedürfnisse des jeweiligen Lernenden anzupassen (also nicht zu wenig, aber auch nicht zu viel zu helfen) und diese Hilfestellungen dementsprechend nach und nach abzubauen (*Fading*).

In Abschnitt 2.4.4 werden Vor- und Nachteile kooperativer Lernformen diskutiert. Die Vorteile von Gruppenarbeit liegen in der Kommunikation und der dadurch erzwungenen Explikation und Reflexion eigener und fremder Gedankengänge, sowie dem Profitieren von fremder Expertise, während die Nachteile in einer möglichen Überforderung durch die notwendige Kommunikation sowie der Passivität einzelner Gruppenmitglieder liegen. Auch eine gemeinsame Arbeit im Plenum ist möglich, wobei gerade beim Problemlösen darauf geachtet werden sollte, eine angenehme Atmosphäre zu schaffen, in der auch weniger gute Ideen positiv aufgenommen und diskutiert werden können. Um die negativen Aspekte der verschiedenen Sozialformen auszugleichen, empfiehlt sich eine Kombination, etwa in Form des *Ich-Du-Wir-Prinzips*.

Wie in Abschnitt 2.4.5 besprochen, zeigen kurzfristige Heurismentrainings oft wenig Wirkung und es ist generell fraglich, ob der Einsatz vorgefertigter Heurismen überhaupt hilfreich ist. Um aber aus der Bearbeitung weniger Aufgaben möglichst viele Erkenntnisse herauszuholen, können bestimmte Schritte hilfreich sein. Abgesehen von der geforderten Langfristigkeit solcher Maßnahmen und bereits angesprochener Aspekte wie der Sozialform oder des *Fadings*, sollen hier verschiedene, mit einander kompatible Ideen von Bruder und Collet (2011), Leuders (2017), und Schoenfeld (letztere zusammengetragen von Arcavi et al., 1998) genannt werden. Hierbei sind auch schon metakognitive Aspekte enthalten, die in 2.4.7 beschrieben wurden:

- Unterstützende Beratung des Dozenten während der Problembearbeitung
- Verwendung allgemeiner Fragestämme zur Orientierung oder Kontrolle des eigenen Vorgehens

- Vorstellung von Lösungen in der Regel von den Lernenden
- Aktive Reflexion des Vorgehens anregen
- Neue Strategien explizit festhalten und sammeln etc.

Es gibt allerdings auch einige Vorgehensweisen, in denen die verschiedenen Ansätze voneinander abweichen. Abgesehen von kleinen Unterschieden ergeben sich folgende, zunächst unbeantwortete Fragen:

- Sollten Heurismen vom Dozenten vorgegeben werden?
- In welchem Umfang sollten Heurismen eingeübt werden?

In Bezug auf die erste Frage geben Bruder und Collet (2011) einige Begründungen zur Auswahl der Heurismen und auch Schoenfeld wählt seine Aufgaben schon danach aus, ob sie exemplarisch für bestimmte Vorgehensweisen sind. Dennoch ist, wie in Abschnitt 2.4.5 beschrieben, dieses Vorgehen nicht unumstritten. Bei der zweiten Frage unterscheiden sich die Herangehensweisen von Schoenfeld (1998) auf der einen und Bruder und Collet (2011) und z. B. Leuders (2017) auf der anderen Seite. Während ersterer sogar bewusst Aufgaben einsetzt, bei denen frisch erlernte Heurismen eher hinderlich sind, setzen letztere auf das Einüben von Heurismen in verschiedenen Kontexten, um deren breiten Nutzen zu betonen. Allerdings warnen auch sie vor der Gefahr, dass Strategien nur auswendig gelernt werden, bevor der Nutzen erkannt wird.

Abschließend sollen die in Abschnitt 2.4.7 genannten Ansätze zur Förderung metakognitiver Fähigkeiten zusammengefasst werden. Hier werden lediglich verschiedene Ideen zusammengetragen, keine konkurrierenden Konzepte mit einander verglichen: Insgesamt werden Metakognitionstrainings als effektiver als Heurismentrainings angesehen, wobei die Übergänge in der Praxis fließend sein können. Neben einer impliziten Vermittlung durch Vorleben metakognitiver Aktivitäten und einer indirekten Vermittlung, die zwar gerade im Bezug auf Eigenaktivität einige Vorteile mit sich bringt, aufgrund schwacher Ergebnisse bei der Übertragung auf andere Kontexte aber nur empfohlen wird, wenn anschließend das Vorgehen expliziert wird, werden auch hier während des Problemlösens Kontrollfragen empfohlen. Beim Beobachten des eigenen Verhaltens können zusätzlich Selbstverbalisierungen helfen. Eine stärkere Art der Reflexion wird durch die Dokumentation des Vorgehens gegeben. Ein Bespiel hierfür im Kontext des Problemlösens wird von Mason et al. (2011) gegeben und in Abschnitt 4.4 genauer beschrieben. Wie schon beschrieben ist auch eine gemeinsame Reflexion des Vorgehens im Nachhinein möglich. Hierdurch können Lernprozesse, die während der Bearbeitung aufgrund kognitiver Überforderung (Abschnitt 2.4.2) nicht stattgefunden haben, nachgelagert werden.

3 Forschungsfragen

Die vorliegende Arbeit verfolgt im Wesentlichen drei Forschungsinteressen, die an dieser Stelle grob vorgestellt werden sollen. Eine Verfeinerung der einzelnen Fragen wird in den entsprechenden Kapiteln vorgenommen.

Forschungsfrage 1: Inwiefern lassen sich bestehende Vermittlungskonzepte zum Problemlösen sinnvoll auf den Kontext der universitären Übungsgruppe übertragen?

Dieser Frage soll durch die zyklische Entwicklung der Intervention sowie deren Umsetzung und Evaluation im gegebenen Kontext nachgegangen werden. Hierbei werden die in Abschnitt 2.4 beschriebenen theoretischen Ansätze in der universitären Praxis umgesetzt (Kapitel 4) und gemäß der systematisch festgehaltenen Erfahrungen und qualitativen Erhebungen (Kapitel 5) modifiziert (Kapitel 6). Die Beantwortung dieser Frage steht in Abschnitt 6.4.

Forschungsfrage 2: Wie laufen Problembearbeitungsprozesse bei Studienanfängern der Mathematik an authentischen Übungsaufgaben ab und welchen Einfluss hat dabei die Teilnahme an der Fördermaßnahme?

Diese Frage ist bewusst sehr offen gestellt, da zunächst ein holistischer Blick auf das universitäre Problemlösen gerichtet werden soll. Anhand videographierter aufgabenbasierter Interviews werden in Kapitel 5 Prozesse[1] von Studierenden betrachtet. Hierbei kommt es zunächst darauf an, generelle Erkenntnisse über das Problemlösen

[1] Zur Beantwortung dieser Frage wurde bei der Auswahl der Aufgaben darauf geachtet, dass diese von den Probanden wirklich als Probleme angesehen wurden. Man kann hier also von Problembearbeitungsprozessen sprechen.

T. Stenzel, *Mathematisches Problemlösen in der Studieneingangsphase*,
Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-39052-5_3

an deutschen Universitäten zu sammeln und diese mit bestehenden Untersuchungen, etwa von Rott (2013) oder Schoenfeld (1985), zu vergleichen. Erst im zweiten Schritt wird zwischen Interventions- und Kontrollgruppe unterschieden, um mögliche Einflüsse der Intervention nachvollziehen zu können.

Forschungsfrage 3: Welche Auswirkungen hat die Intervention auf den Klausurerfolg sowie die Teilnahme an den Übungsgruppen und die Bearbeitung der Hausaufgaben im ersten Semester?

Da im Rahmen dieser Feldstudie Einflüsse auf das Problemlöseverhalten aus Zeitgründen nur qualitativ untersucht werden können, soll auf quantitativer Ebene untersucht werden, ob sich zwischen Interventionsgruppe und Kontrollgruppe Unterschiede im Bezug auf den Klausurerfolg oder auf andere messbare Faktoren (hierzu zählen die Teilnahme an Übungsgruppen und Klausur sowie die Abgabe und Qualität der Hausaufgaben) feststellen lassen. Durch die Beantwortung dieser Frage lassen sich zwar generelle Rückschlüsse auf die Auswirkungen der Intervention ziehen, jedoch keine Aussagen zur Wirksamkeit von Teilaspekten treffen. Dementsprechend hatten die quantitativen Untersuchungen keinen Einfluss auf die zyklische Entwicklung der Maßnahme und werden daher in Kapitel 7 dargestellt.

4 Design der Intervention

In diesem Kapitel wird die Interventionsmaßnahme in ihrer ursprünglichen, theoriebasierten Form beschrieben. Zunächst werden jedoch in Abschnitt 4.1 verschiedene Ansätze des *Design Research* präsentiert. Abschnitt 4.2 gibt dann einen kurzen Überblick über den zyklischen Ablauf der Intervention. Nachdem in Abschnitt 4.3 die Rahmenbedingungen der Maßnahme vorgestellt wurden, folgt in Abschnitt 4.4 die Entwicklung des ersten Zyklus der Intervention, die auf den in Abschnitt 2.4 beschriebenen theoretischen Überlegungen basiert. Abschnitt 4.5 beschäftigt sich mit der Schulung der an der Intervention beteiligten Tutoren. Da die in Kapitel 5 dargelegte qualitative Forschung Einfluss auf die Weiterentwicklung der Maßnahme hat, wird diese, und damit die vorerst letzte Version der Intervention, erst in Kapitel 6 beschrieben. Am Ende dieses Kapitels gibt es eine kurze Zuammenfassung der Maßnahme (Abschnitt 4.6).

4.1 Design Research

Im folgenden Abschnitt werden die Prinzipien des *Design Research* bzw. der *Entwicklungsforschung*, wie diese Forschungsrichtung im deutschsprachigen Raum meist genannt wird, zusammengefasst und auf die vorliegende Arbeit bezogen. Hierzu gibt es viele verschiedene Ansätze mit unterschiedlichen Bezeichnungen, die sich durch abweichende Schwerpunktsetzungen voneinander unterscheiden (vgl. Link, 2012; Plomp, 2013; Akker, Gravemeijer, McKenney & Nieveen, 2006), z. B.

Ergänzende Information Die elektronische Version dieses Kapitels enthält Zusatzmaterial, auf das über folgenden Link zugegriffen werden kann https://doi.org/10.1007/978-3-658-39052-5_4.

T. Stenzel, *Mathematisches Problemlösen in der Studieneingangsphase*, Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik, https://doi.org/10.1007/978-3-658-39052-5_4

Design-Based Research (Barab & Squire, 2016; Design-Based Research-Collective, 2003), *Design Experiments* (Brown, 1992; Cobb, Confrey, Disessa, Lehrer & Schauble 2003, Schoenfeld, 2006), *Design Studies* (Feuer, Philips, Shavelson & Towne, 2003; Walker, 2006), *Developmental Research* (Freudenthal, 1991; Gravemeijer, 1994; Akker, 1999); *Engineering Research* (Burkhardt & Schoenfeld, 2003, Burkhardt, 2006) und *Participatory Action Research* (Marks & Eilks, 2010). In Deutschland ist der Begriff der *fachdidaktischen Entwicklungsforschung* (Hußmann, Thiele, Hinz, Prediger & Ralle, 2013; Prediger et al., 2012) sehr präsent. Um Missverständnissen vorzubeugen, die durch die Bezeichnungen entstehen könnten, sei an dieser Stelle erwähnt, dass es sich bei *Design Research* nicht um das Design der Forschung handelt (dieses würde man im Englischen als *research design* bezeichnen). Ebenso beschäftigt die *Entwicklungsforschung* sich in der Regel nicht direkt mit der kindlichen Entwicklung. Es geht hierbei grundsätzlich um die Entwicklung (bzw. das Design) von Unterrichtsteinheiten oder ganzen Unterrichtsreihen. Das Prinzip, das allen Spielarten des *Design Research* gemein ist, wird vom Design-Based Research Collective (Design-Based Research-Collective, 2003, S. 7) wie folgt beschrieben:

> [U]sing theory-driven design to generate complex interventions that can be improved through empirical study and that can contribute to more basic understanding of the underlying theory.

All diesen Ansätzen liegt also der Gedanke einer engeren Verknüpfung von Theorie und Praxis zu Grunde. So weist Wittmann (1992; 1995) darauf hin, dass mathematikdidaktische Forschung erst dann von Nutzen ist, wenn sie einen Einfluss auf die Durchführung von Lehr-Lern-Einheiten hat (vgl. für ähnliche Aussagen Brown, 1992 und das Design-Based Research Collective, 2003). So betont er, dass bei empirischer Forschung ohne reflektierte Erfahrung mit Schülern und ohne Teilhabe an der Unterrichtspraxis dieser praktische Nutzen nicht gegeben ist (Wittmann, 1992). Andererseits bestehe auch die Gefahr eines „verengten Pragmatismus“, der zu sehr auf unmittelbare Anwendbarkeit fixiere (ebd.). Wittmanns Ansicht nach ist die Mathematikdidaktik, ebenso wie die Ingenieurswissenschaften als eine *design science* zu verstehen, also als eine Wissenschaft, die, auf theoretischen Befunden basierend, Konstrukte (in dem Fall Unterrichtskonzepte) entwickelt, die einen praktischen Nutzen haben, und diese weiter untersucht.

In den Niederlanden wurde bereits in den 70er Jahren am IOWO (Institut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde-Onderwijs – dt.: Institut für die Entwicklung des Mathematikunterrichts), dem Vorgänger des heutigen Freudenthal-Instituts, Curriculumentwicklung nach den Prinzipien des *Design Research* betrieben. Hieraus ist der Zweig des oben erwähnten *Developmental Research* entstanden. Auch hier wird die „Trennung von Entwurf und Ausführung“ von „Lehrstoff“ kritisiert. Freudenthal (1978) schreibt dazu:

> Zweckmäßiger ist in der Curriculumentwicklung gerade die Einheit im Zyklus von Entwurf, über Fortbildung, Begleitung, Auswertung, zur Entwurf-Revision; der Entwerfer sei derselbe, der den ausführenden Lehrer vorbereitet und in der Klasse begleitet, und der die Ausführung und den Entwurf bewertet, wobei er selber von einem Team begleitet und beobachtet wird. So wird garantiert, dass die Absichten hinter dem Entwurf in der Ausführung zur Geltung kommen, dass schlecht Funktionierendes auf der Stelle revidiert und in einem zeitlich etwas verschobenen Zyklus in Parallelklassen von neuem erprobt wird.

Ein wesentliches Merkmal, das auch in diesem Zitat deutlich wird, ist die enge Zusammenarbeit zwischen dem Entwickler der Maßnahme und der Lehrkraft. Von anderen Autoren wird, noch deutlicher als diesem Textabschnitt zu entnehmen ist, die Beteiligung der Lehrkraft an Forschung und Entwicklung gefordert (z. B. Cobb et al., 2003; Gravemeijer & Cobb, 2006; Wittmann, 1992). Hierzu schreibt Plomp (2013):

> [T]his will increase the chance that the intervention will indeed become relevant and practical for the educational context which increases the probability for a successful implementation.

Manche Ansätze (z. B. Burkhardt & Schoenfeld, 2003, Prediger et al., 2012) schlagen sogar vor, dass der Hauptentwickler der Maßnahme (zumindest in den frühen Phasen der Pilotierung) selbst als Lehrkraft aktiv wird, was in der vorliegenden Studie auch der Fall ist.

Abbildung 4.1 zeigt ein Modell von Entwicklungsforschung (das so allgemein gehalten ist, dass es neben der Mathematikdidaktik in Wittmanns (Wittmanns 1992; 1995) Sinne auch auf andere *Design Sciences*, wie die Ingenieurwissenschaften oder die Pharmakologie, anwendbar wäre), das im Folgenden genauer betrachtet werden soll. Zu Beginn[1] steht ein Problem[2], das zunächst einmal analysiert werden muss.

---

[1] Grundsätzlich ist es möglich, mit der Forschung an jedem Punkt des dargestellten Kreislaufs anzufangen, beispielsweise wenn das Ziel die Modifikation eines bestehenden Konzeptes ist.

[2] Auch wenn es sich hierbei nicht um ein mathematisches Problem handelt, so kann man doch von einem Problem gemäß der in Abschnitt 2.2.1 gegebenen Charakterisierung sprechen: Ein Anfangszustand soll in einen gewünschten Zielzustand übersetzt werden. Bei dem hier dargestellten Zyklus lassen sich sogar Parallelen zu Pólyas Phasen ziehen: *Understanding the Problem*: Analyse; *Devising a Plan*: Theoriebasierte Entwicklung der Maßnahme; *Carrying Out the Plan*: Durchführung der Maßnahme; *Looking Back*: Evaluation und Revision der Maßnahme.

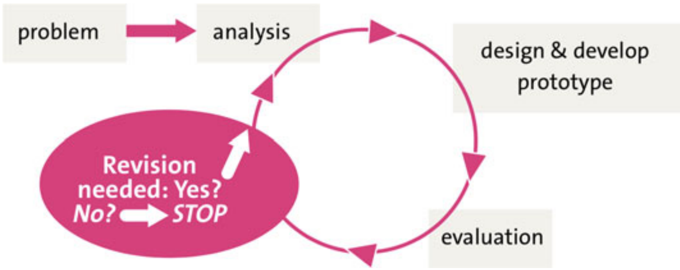

Abbildung 4.1 Zyklischer Ablauf von Entwicklungsforschung (Plomp, 2013)

Im hier betrachteten Zusammenhang bedeutet dies vor allem, dass die gegebenen Rahmenbedingungen untersucht sowie Lernziele gesetzt werden. Dies wird für die vorliegende Arbeit in Abschnitt 4.3 genauer beschrieben. Anschließend wird eine erste Version der Maßnahme (hier *Prototyp* genannt) entwickelt. Diese Entwicklung baut auf Einsichten vorheriger Forschung auf, basiert also explizit auf fundamentalen theoretischen Prinzipien (vgl. Burkhardt & Schoenfeld, 2003; Cobb et al., 2003; Wittmann, 1995), wie sie in Abschnitt 2.4 dargestellt sind. Hierzu schreibt Wittmann (1992):

> Die Qualität dieser Konstruktion hängt in der Tat von der theoriegeleiteten konstruktiven Phantasie, dem „ingenium“, der Konstrukteure ab und muß durch systematische Erprobung nachgewiesen werden, wie es für Ingenieurswissenschaften typisch ist.

Die Entwicklung eines theoriebasierten Prototyps der in dieser Arbeit beschriebenen Maßnahme wird in Abschnitt 4.4 ausgeführt.

Die praktische Erprobung in authentischen Kontexten ist ein entscheidendes Merkmal der Entwicklungsforschung, da hier der oben erwähnte Praxisbezug hergestellt wird (vgl. Design-Based Research-Collective, 2003). Hier kommen viele Einflussfaktoren und individuelle Merkmale der Beteiligten in komplexen Interaktionen zusammen, die von Lehr-Lern-Theorien nicht im Detail abgebildet werden können (vgl. Cobb et al., 2003; Design-Based Research-Collective, 2003; Wittmann, 1995). So schreibt Burkhardt (2006, S. 128): „Studies of student learning in tightly controlled laboratory conditions are too artificial to use directly in guiding design for the classroom“. Es ist also notwendig, die hypothetisierten Lernprozesse sowie die Mittel zu deren Unterstützung im lokalen Kontext auf ihre ökologische Validität (vgl. Kaminski, 1988) zu testen und zu evaluieren. Diese Evaluation führt zu einer Analyse des Designs und schließlich zu einer auf die Charakteristika der jeweiligen Lernsituation zurechtgeschnittenen Überarbeitung, die in weiteren Zyklen wiederum getestet werden kann. Auf die Art nähert man sich dem gewünschten Zielzustand immer weiter an (vgl. Design-Based Research-Collective, 2003; Gravemeijer, 1994; Link, 2012).

Die Evaluation kann, beruhend auf empirischen Untersuchungen und systematischen Beobachtungen, aber auch auf Erfahrungsberichten der involvierten Lehrpersonen, geschehen. Hierzu schreibt Hierzu schreibt Gravemeijer (1994, S. 47):

> In practice, the findings are more often due to classroom experiences [...] than to testing results. That is, with intensive observations and productive contacts with experimental schools, there is a great deal of information obtained prior to when tests are administered.

In der Art und Weise, wie die Interventionen untersucht werden, unterscheiden sich die verschiedenen Zweige des *Design Research*, was auch mit unterschiedlichen Zielsetzungen zusammenhängt (vgl. Plomp, 2013). So hat sich beispielsweise das dortmunder Modell der Entwicklungsforschung (vgl. Prediger et al., 2012), ähnlich wie die niederländische *Developmental Research*, (Gravemeijer & Cobb, 2006) (wie auch die vorliegende Studie) zum Ziel gesetzt, die ablaufenden Lernprozesse besser zu verstehen und aus diesem Verständnis lokal geltende Erkenntnisse zu gewinnen, aus denen sich möglichst verallgemeinerbare Aussagen herleiten lassen. Daher werden hier relativ kleinschrittig Teilaspekte der Lernprozesse empirisch untersucht. Um diese leichter erfassen zu können, werden die Unterrichtseinheiten in der Regel in Laborsituationen in Kleingruppen durchgeführt (Prediger et al., 2012). Der Ansatz des *Engineering Research* (der seinen Namen aus der auch von Wittmann benannten Nähe zum Vorgehen der Ingenieurswissenschaften ableitet) hingegen hat zunächst nur die Entwicklung einer gut funktionierenden Intervention im Blick. Stärken und Schwächen werden hauptsächlich durch strukturierte Beobachtungen sowie Rückmeldungen der Lehrpersonen identifiziert und überarbeitet. Empirische Untersuchungen werden auf spätere Umsetzungen in größerem Maße ausgelagert (Burkhardt & Schoenfeld, 2003).

4.2 Überblick über die Intervention

Die vorliegende Arbeit stellt ebenfalls die Entwicklung einer Intervention in den Vordergrund. Zusätzlich zu systematischen Beobachtungen und regelmäßigen Gesprächen mit den beteiligten Lehrpersonen wird, im Gegensatz zum dortmunder Modell, das detailliert Teilaspekte in den Blick nimmt, ein eher holistischer Blick auf die

Tabelle 4.1 Iteration der Intervention

Zyklus	Semester	Veranstaltung	Anzahl der betreuten Übungsgruppen[3]
1	Wintersemester	Analysis I	1
2	Sommersemester	Analysis I	2
3	Wintersemester	Lineare Algebra I	8
4	Sommersemester	Lineare Algebra I	3
5	Wintersemester	Lineare Algebra I	7
6	Sommersemester	Analysis I	2
7	Wintersemester	Analysis I	5

Problembearbeitungsprozesse von Studienanfängern und mögliche Auswirkungen der Intervention hierauf geworfen (siehe Kapitel 5). Zusätzlich wird in quantitativen Messungen der Einfluss der Maßnahme auf den Klausurerfolg sowie die aktive Teilnahme am ersten Semester betrachtet (Kapitel 7).

Die im Folgenden beschriebene Maßnahme (bei der es um die Neustrukturierung der wöchentlichen Übungsgruppe geht, siehe Abschnitt 4.3) hat insgesamt sieben Zyklen durchlaufen. Hierbei wurde, wie von Burkhardt und Schoenfeld 2003 empfohlen, zunächst in kleinem Umfang mit einer Übungsgruppe, die vom Autor der vorliegenden Arbeit geleitet wurde, begonnen. Im zweiten Durchlauf wurde eine zweite Gruppe hinzugenommen, wobei es zu wöchentlichen Treffen und regem Austausch mit dem anderen Tutor kam. Ab dem dritten Zyklus wurde, um einen Vergleich von Interventions- und Kontrollgruppe gewährleisten zu können, die Hälfte aller Übungsgruppen von Tutoren geleitet, die auf die Durchführung der Maßnahme geschult waren und sich zu wöchentlichen Treffen mit dem Autor, der immer jeweils selbst eine Übungsgruppe betreut hat, zusammenfanden. Tabelle 4.1 gibt einen Überblick über die verschiedenen Zyklen.

Im folgenden Abschnitt 4.3 werden zunächst Überlegungen zu Rahmenbedingungen und Zielen der Intervention dargelegt. Anschließend wird in Abschnitt 4.4 die aus diesen Überlegungen und aus Abschnitt 2.4 hergeleitete erste Version der Maßnahme beschrieben. Die Schulung der Tutoren wird in einem eigenen Abschnitt (4.5) behandelt. Auf eine detaillierte Aufzählung, welche Änderungen sich nach welchem Zyklus ergeben haben, wird verzichtet. Stattdessen wird (nachdem in Kapitel 5 der qualitative Teil der Arbeit behandelt wurde) in Kapitel 6 ausführlich

[3] Ab dem dritten Zyklus entspricht das Hälfte aller Übungsgruppen. Im Sommersemester ist die Gesamtzahl der Teilnehmer in der Regel geringer als im Wintersemester.

beschrieben, welche Veränderungen, basierend auf den Ergebnissen der qualitativen Untersuchung[4] und den Erfahrungen der Lehrenden, insgesamt seit dem ersten Zyklus vorgenommen wurden. Dort findet sich auch eine Zusammenfassung der (vorerst) finalen Version der Maßnahme.

4.3 Rahmenbedingungen und Ziele der Maßnahme

In diesem Abschnitt werden einige grundsätzliche Vorüberlegungen und damit zusammenhängende Rahmenbedingungen der Maßnahme beschrieben, die die Umsetzung der in Abschnitt 2.4 dargelegten Konzeptionen beeinflussen. Ein wesentlicher Grundsatz der Maßnahme ist, die ohnehin an der Universität in stärkerem Maße geforderte Eigenständigkeit der Studierenden (vgl. Artigue, 2016) weiter zu fördern. Neben einer starken Fokussierung der studentischen Selbstregulation (vgl. Abschnitt 2.4.7) bedeutet das auch, dass die Maßnahme keine zusätzliche Präsenzzeit beinhaltet, damit den Studierenden genügend Zeit zur eigenständigen Beschäftigung mit den Lerninhalten der Veranstaltung bleibt. Statt eine Ergänzungsveranstaltung anzubieten, wurde also die bereits existierende Gruppenübung, die traditionell zur Besprechung von Übungsaufgaben verwendet wird, mit dem Ziel umstrukturiert, die Problemlösekompetenz der Studierenden zu fördern. Im Fokus der Maßnahme stehen also keine Fachinhalte, sondern der Aufbau von Kompetenzen im Sinne von Niss und Højgaard (2019). Diese spezielle Übung ist zunächst auf das erste Fachsemester beschränkt. Dementsprechend muss darauf geachtet werden, dass durch den Wegfall der Maßnahme im zweiten Semester Probleme des Übergangs von der Schule zur Hochschule nicht nur dorthin verschoben werden. Im vorliegenden Fall soll das hauptsächlich durch das langsame Ausschleichen von Hilfen im Sinne des Scaffolding (siehe Abschnitt 2.4.3) und die damit zusammenhängende Stärkung der Eigenverantwortung realisiert werden. Eine Verlängerung der Maßnahme auf Folgesemester ist aufgrund ihres minimalinvasiven Charakters ohne großen Aufwand möglich, wurde zum jetzigen Zeitpunkt allerdings noch nicht erprobt.

Da es sich bei der Intervention um eine Modifikation der klassischen Gruppenübung handelt, sind ihr einige Beschränkungen auferlegt: Zum einen muss die Hauptaufgabe, die Besprechung der Hausaufgaben[5] (in der Regel vier Aufgaben

[4] Wie bereits erwähnt, konnten die Ergebnisse der quantitativen Untersuchung aufgrund ihres recht groben Blicks keinen Beitrag zur Detailentwicklung der Maßnahme leisten.

[5] In zwei der sieben durchgeführten Zyklen war die Gruppenübung von Seiten der verantwortlichen Dozenten als sogenannte Präsenzübung organisiert, in denen zur Vorbereitung auf die Hausaufgaben gemeinsam ähnliche Aufgaben bearbeitet werden. Auch hier musste eine vorgegebene Menge an Aufgaben bearbeitet werden.

pro Woche), weiterhin wahrgenommen werden. Dadurch ist die Zeit, die effektiv für zusätzliche Aktivitäten bleibt, sehr knapp bemessen. Zum anderen ist die Maßnahme auf die Akzeptanz der jeweiligen für die Vorlesung verantwortlichen Dozenten angewiesen. Aufgrund des zyklischen Charakters der Entwicklungsforschung sind also mehrere Personen mit unterschiedlichen Ansichten zur Lehre zu überzeugen. Aus diesem Grund wurde die Intervention und deren Evaluation so entwickelt, dass in den Verantwortungsbereich des Dozenten nicht eingegriffen wurde. Das bedeutet insbesondere, dass die Gestaltung der Übungsaufgaben in keiner Weise beeinflusst wurde. Eine Auswahl oder Sortierung von Aufgaben gemäß hierfür hilfreicher Heurismen, wie sie im Training von Bruder und Collet (2011, vgl. Abschnitt 2.4.5) vorgenommen wird, ist, selbst wenn man sinnvolle Kriterien für die Auswahl im universitären Kontext hilfreicher Heurismen findet, in diesem Rahmen nicht möglich. In den meisten Fällen war die erfolgreiche Bearbeitung einer bestimmten Menge der Hausaufgaben Voraussetzung für die Teilnahme an der Abschlussklausur. Aus diesem Grund beinhaltet die Maßnahme keine schriftlichen Hilfen zur kognitiven Entlastung bei der Bearbeitung der Hausaufgaben (wie lückenhafte Musterlösungen etc. – vgl. Abschnitt 2.4.2), die direkt bei der Bearbeitung der Aufgaben helfen, um die Kontrollgruppe, die eine solche Hilfe nicht bekommt, nicht zu benachteiligen. Außerdem gab es in der Regel keine Möglichkeit, die Studierenden bei ganzen Problemlöseprozessen zu begleiten, da diese in der Regel nicht in der Präsenzzeit abliefen. Daher war es für die Tutoren der Übungsgruppen nicht möglich, direkt Einfluss auf metakognitive Kontrollprozesse in der aktionalen Phase zu nehmen (z. B. durch das Stellen von Fragen nach Schoenfeld (1985), wie sie in Abschnitt 2.4.7 beschrieben wurden: Was machst Du gerade? Warum machst Du das? Was bringt Dir das Ergebnis dieser Tätigkeit?).

Zusammenfassend handelt es sich bei der Maßnahme also um eine wöchentlich stattfindende vorlesungsbegleitende 90-minütige Gruppenübung, in der Hausaufgaben besprochen wurden, auf deren Gestaltung kein Einfluss genommen wurde und die nicht durch schriftliche Lösungshilfen unterstützt wurden. Die Gruppengröße lag zwischen 20 und 30 Studierenden. Eine solche minimalinvasive Maßnahme ist zwar an die Einhaltung einiger, gerade beschriebener Vorgaben gebunden, hat aber den Vorteil, dass sie dadurch ohne große Modifikationen im universitären Normalbetrieb einsetzbar ist.

4.4 Theoriebasierte Entwicklung der Intervention

Dieser Abschnitt beschreibt die Durchführung der ersten Zyklen der Maßnahme, die sich zunächst nur auf theoriebasierte Überlegungen stützt. Weiterentwicklungen, die sich aus den Erfahrungen der ersten Zyklen sowie der im Kapitel 5 beschriebenen qualitativen Forschung ergeben haben, werden in Kapitel 6 beschrieben. Wie bereits erwähnt, basiert die Maßnahme auf der klassischen Art einer Gruppenübung, in der wöchentlich bearbeitete Hausaufgaben zur Vorlesung *Analysis I* bzw. *Lineare Algebra I* (für eine Übersicht der betreuten Veranstaltungen, siehe Tabelle 4.1) besprochen werden. Während die Kontrollgruppe aus Übungsgruppen besteht, die weiterhin auf diese traditionelle Art abgehalten wurden, wurden die Übungsgruppen der Interventionsgruppe vom Autor dieser Arbeit selbst, sowie Tutoren, die sich freiwillig zu einer wöchentlichen Besprechung mit ihm getroffen haben, betreut. Der Ablauf dieser Besprechungen wird in Abschnitt 4.5 beschrieben. Hierbei ist nicht auszuschließen, dass erfahrene Tutoren aus der Kontrollgruppe, auch wenn sie bei diesen Treffen nicht anwesend waren, von sich aus Ideen umgesetzt haben, die dort besprochen wurden, da einige Aspekte durchaus naheliegend sind.

Bei der hier beschriebenen Maßnahme sollten folgende Kernideen umgesetzt werden: Die Studierenden sollten aktiv eigene Erfahrungen mit dem Problemlösen machen (vgl. Abschnitt 2.4.1), wobei gerade diejenigen, die hier vor größeren Schwierigkeiten stehen, von der Erfahrung der Kommilitonen und der Expertise des Tutors profitieren sollen. Dies wurde durch kooperatives Arbeiten (vgl. Abschnitt 2.4.4) und die gemeinsame Reflexion individueller Vorgehensweisen (Abschnitt 2.4.7) angestrebt. Basierend auf den kollektiven Erfahrungen wurden verwendete Heurismen expliziert und separat gesammelt, um diese bewusst zu machen (vgl. Bruder & Collet, 2011; Leuders, 2017 – siehe auch Abschnitt 2.3.2). Um die kognitive Belastung bei der Problembearbeitung (vgl. Abschnit 2.4.2), speziell für die schwächeren Studierenden, zu reduzieren, wurden der Einstieg in ausgewählte Probleme gemeinsam (in verschiedenen Sozialformen) besprochen. Ein weiterer Vorteil dieser Besprechungen war, dass die Studierenden hierdurch Einblick in die Denkweisen der Kommilitonen und eines Experten in Form des Tutors (falls sich dieser dazu entschied, die Beiträge der Studierenden durch eigene zu ergänzen) bekommen konnten.

Diese Kernideen wurden im Wesentlichen in vier Phasen umgesetzt: Der *Vorbereitungsphase*, in der bereits vor der Bearbeitung Teilaspekte der Hausaufgaben besprochen und Lösungsideen gesammelt wurden, der *Eigenarbeitsphase*, die aus dem Bearbeiten der Hausaufgaben außerhalb der Präsenzzeit bestand, angereichert durch Dokumentationsaufgaben, der *Diskussionsphase*, in der die Bearbeitungsprozesse der Eigenarbeitsphase gemeinsam reflektiert wurden, sowie einer *Zusammenfassung* des Vorgehens mit besonderem Blick auf strategische Vorgehensweisen. Im Folgenden werden die einzelnen Phasen genauer beschrieben:

Vorbereitungsphase: Diese Phase fand vor der Bearbeitung der Hausaufgaben, also eine Woche vor den anderen beschriebenen Phasen statt. Ihr wesentliches Ziel bestand darin, für die Studierenden den Einstieg in ein Problem zu erleichtern, ohne dabei einen zu großen Teil des Lösungsprozesses vorwegzunehmen. Sie war auf maximal zehn Minuten beschränkt. Das liegt zum einen daran, dass die Zeit ohnehin knapp bemessen war, zum anderen sollte dadurch verhindert werden, dass bereits zu sehr ins Detail gegangen wird, damit die Studierenden in der folgenden Phase die Möglichkeit hatten, entsprechende Aktivitäten eigenständig durchzuführen. Gemeinsam mit den Studierenden wurde eine der vier Hausaufgaben ausgewählt (in der Regel eine Aufgabe, bei der die Studierenden eine besonders hohe Einstiegshürde sahen, die also von den meisten als Problem betrachtet wurde). Je nach Zeitpunkt im Semester und Beschaffenheit der Aufgabe wurden hier verschiedene Aktivitäten durchgeführt. Zu Beginn des Semesters wurde, zunächst demonstrativ vom Tutor, mit *heuristischen Hilfsmitteln* im Sinne von Bruder und Collet (2011) die Aufgabe genauer analysiert. Hierzu zählen verschiedene Darstellungswechsel, wie das Anfertigen einer Skizze oder einer Tabelle[6], das Zeichnen eines Graphen oder auch das Aufstellen einer Gleichung, das Betrachten von Beispielen (einfache Spezialfälle oder Extremfälle), das Klären aller vorkommenden Begriffe (ggf. auch durch das Betrachten verschiedener Darstellungen und Beispiele) oder aber lediglich das systematische Aufschreiben dessen, was gegeben und gesucht ist. Hierbei wurde vom Tutor auch explizit schriftlich (mit farbiger Kreide oder auf einer gesonderten *Strategietafel*[7]) festgehalten, welche Hilfsmittel benutzt wurden. In späteren Stunden wurde, ganz im Sinne des *cognitive apprenticeship* (vgl. Abschnitt 2.4.3), die Aufgabenanalyse auch gemeinsam mit den Studierenden oder komplett in Einzel- oder Gruppenarbeit durchgeführt. Dadurch sollte es zur Gewöhnung an die heuristischen Hilfsmittel kommen. Je nach Beschaffenheit der Aufgabe (wenn beispielsweise das Verständnis der Aufgabe kein großes Hindernis darstellte, es aber trotzdem schwierig war, einen Ansatz zu finden), wurde statt der Aufgabenanalyse ein gemeinsames *brainstorming* (vgl. Abschnitt 2.4.4) durch-

[6] Auch das Notieren der ersten Glieder einer Folge zählt hierzu, selbst wenn es nicht in der klassischen Tabellenform untereinander geschieht

[7] In einigen Räumen der Universität Duisburg-Essen befindet sich an der Seite eine kleine Tafel, die selten verwendet wird und deswegen in der Regel auch nicht geputzt wird. Daher können hier Strategien über die Dauer des Semesters gesammelt werden. Ist eine solche Tafel nicht vorhanden, können beispielsweise ein Laptop mit Beamer oder Poster diese Aufgabe übernehmen. In jedem Fall werden die Studierenden dazu angehalten, selbst eine Seite mit verwendeten Strategien zu erstellen und jederzeit griffbereit zu haben, ähnlich einem *heuristischen Wissensspeicher* nach Leuders (2017).

geführt. Hierbei wurden zunächst kommentarlos Ideen an der Tafel gesammelt und anschließend kurz diskutiert. Bei der Diskussion wurde darauf geachtet, dass keine Idee als schlecht stigmatisiert wurde und dass klar wurde, dass auch weniger gute Ideen zum Problemlöseprozess gehören. Grundsätzlich konnten die Studierenden (vor allem zu Beginn des Semesters, als noch eine gewisse Hemmschwelle vorhanden war) ihre Ideen zunächst individuell auf Pappkarten sammeln, die anschließend im Plenum gesammelt und vorgestellt wurden. Dadurch konnten mehrere Studierende dieselbe Idee notieren und es wurden Hemmungen, die eigenen Ansätze vorzustellen, abgebaut. Später im Semester wurde das Sammeln von Ideen auch in Gruppenarbeiten verlegt, bei der der Tutor unterstützend tätig war. Die Gruppenarbeit konnte bei Bedarf auch durch Orientierungsfragen, ähnlich derer von Bruder und Collet (2011) (vgl. Abschnitt 2.4.5 unterstützt werden (Was wissen wir zum Problem? Wie kann man die gegebene Situation strukturieren? Welche Strategien eignen sich für das Problem? etc.). Falls genügend Zeit zur Verfügung stand, konnte auch zuerst eine Analyse und dann eine Ideensammlung durchgeführt werden. Ziel dieser Phase war es zum einen, dass Studierende, die sonst keinen Zugang zu der Aufgabe finden würden, eine Chance bekommen, diese zu bearbeiten. Dadurch wurde auch die negative Erfahrung, dass man mit „solchen Aufgaben" überhaupt nichts anfangen kann, abgefangen, was einen positiven Effekt auf die Motivation haben kann. Zum anderen bekamen die Studierenden auch die Chance, aus den Aktivitäten der Kommilitonen bzw. des Tutors zu lernen, wie man problemhaltige Aufgaben angeht. Insgesamt sollte das Vorziehen dieser Überlegungen zu einer kognitiven Entlastung bei der folgenden Phase führen (vgl. Abschnitt 2.4.2).

Eigenarbeitsphase: Diese Phase fand zwischen zwei Übungsstunden statt und entsprach weitestgehend dem klassischen Bearbeiten der Hausaufgaben. Ob Studierende hierbei alleine arbeiteten oder sich in Lerngruppen zusammenfanden, blieb ihnen selbst überlassen und wurde in keiner Weise beeinflusst. Die Verantwortung für den Problemlöseprozess[8] wurde ganz auf sie übertragen. Abgesehen von den zehn Minuten Vorbereitung in der vorigen Phase, die sich nur auf eine Aufgabe bezogen, hatten die Studierenden hier die Gelegenheit, selbstständig nach Lösungsstrategien zu suchen und diese in die individuellen Wissensstrukturen zu integrieren. Zusätzlich wurden die Studierenden dazu angehalten, mindestens eine der Problembearbeitungen ausführlich zu dokumentieren. Diese Dokumentation sollte ihnen dabei helfen, ihr Vorgehen im Nachhinein besser reflektieren

[8] Nicht alle zu bearbeitenden Hausaufgaben galten als Probleme, wenngleich, wie auf S. 13 f. besprochen, dies beim Großteil der Aufgaben für typische Studienanfänger zutraf. In allen hier beschriebenen Phasen wurden solche Aufgaben fokussiert, die von den meisten Studierenden als Probleme betrachtet wurden.

zu können. Sie orientierte sich an Prinzipien von Mason et al. (2011). Eine Handreichung, die zur Unterstützung dieser Dokumentation angefertigt wurde, ist in Anhang A (Hilfe zur Bearbeitung von Übungsblättern (Teil 1)) zu finden. Über die Handreichung hinaus wurde das Vorgehen hierbei auch mehrfach thematisiert. Zusätzlich zu den bereits von Schoenfeld (1985 – vgl. Abschnitt 2.4.7) angesprochenen Fragen (Was mache ich gerade? Warum mache ich das?[9]) wurde Wert auf die Dokumentation von Barrieren (Wo bin ich auf Schwierigkeiten gestoßen? Wie konnte ich diese Schwierigkeiten überwinden?), Illumination (Gab es bestimmte „Aha-Effekte"? Was hat diese Effekte ausgelöst?) und eine Reflexion der Problemlöseprozesse (Wie schätzen Sie Ihr Vorgehen ein?) gelegt. Bei letzterer ging es darum, ein Fazit aus den übrigen Dokumentationen zu ziehen. Vorteilhafte Vorgehensweisen sollten selbstständig und individuell von weniger vorteilhaften Vorgehensweisen unterschieden werden und es sollte auf einer Metaebene darüber nachgedacht werden, warum bestimmte Vorgehensweisen von mehr oder weniger Nutzen waren. Dadurch wurde den Studierenden die Möglichkeit eröffnet, Konsequenzen für weitere Problemlöseprozesse zu ziehen. Das Bewusstmachen von eigenen Schwierigkeiten konnte Ansatzpunkte liefern, woran noch zu arbeiten ist. Dies konnten organisatorische Dinge sein (z. B. dass einfach zu wenig Zeit für die Bearbeitung der Aufgabe eingeplant wurde), mangelndes Vorwissen oder eine eher unkonkrete Ideenlosigkeit. Selbst bei letzterer konnte die Identifikation der Stelle, an der man steckenblieb, bereits neue Erkenntnisse bringen. Besonders hilfreich war es (auch aus motivationaler Sicht), festzustellen, wie Schwierigkeiten überwunden wurden, um daraus Schlüsse für weitere Probleme zu ziehen. Ähnlich verhielt es sich mit der Benennung von „Aha-Effekten" und deren Auslösern. Neben der eigenen Reflexion sollte die Dokumentation auch eine Grundlage für die Teilnahme an der im Folgenden beschriebenen Diskussionsphase geben. Die Studierenden wurden dazu angehalten, die Dokumentation bereits während der Bearbeitung der Aufgabe durchzuführen, nicht erst nachträglich. Obwohl nicht ganz klar ist, ob dies zu weiterer kognitiver Belastung führte oder ob die hierbei entstehenden Notizen eher zur Entlastung des Arbeitsgedächtnisses führten (siehe Abschnitt 2.4.2), wurde hierauf Wert gelegt, damit keine Bearbeitungsschritte in der nachträglichen Betrachtung unter den Tisch fielen (vgl. Mason et al., 2011). Diese Dokumentation wurde nicht eingesammelt, weil keine hinreichenden Ressourcen zur Korrektur und Rückmeldung vorhanden waren. Die Studierenden wussten allerdings, dass die Inhalte Gegenstände der im Folgenden beschriebenen

[9] Die dritte Frage: Was bringt mir das Ergebnis dieser Tätigkeit? wurde nicht explizit gestellt, in den Erläuterungen zu den Fragen wurde dieser Aspekt allerdings berücksichtigt.

Diskussionsphase werden würden. Die Kontrolle der Dokumentation wird in Abschnitt 6.4 diskutiert.

Diskussionsphase: Diese Phase nahm den Großteil der Präsenzzeit der hier vorgestellten Maßnahme ein. Hier wurden die bearbeiteten Hausaufgaben besprochen, allerdings mit einem starken Fokus auf die Prozesse der Problembearbeitung. Ziel der Diskussion war es, bei den Studierenden die Reflexion des eigenen Vorgehens und des der Kommilitonen anzuregen. Bevor Lösungsmöglichkeiten der Aufgaben präsentiert wurden, wurde zunächst die Frage nach individuellen Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der Aufgabe gestellt. So hatten Studierende, die nicht zu einer Lösung gelangt sind, die Möglichkeit, ihre Barriere zu identifizieren und in der folgenden Diskussion Tipps von Kommilitonen zu erhalten, die ähnliche Schwierigkeiten hatten, diese aber evtl. überwinden konnten. Anschließend wurden nach Möglichkeit verschiedene Lösungswege durch die Studierenden vorgestellt (evtl. ergänzt durch Alternativen seitens des Tutors – vgl. hierzu auch Bruder & Collet, 2011; sowie Abschnitt 2.4.5). Hierbei war es hilfreich, dass der Tutor im Vorfeld die eingereichten Hausaufgaben begutachtet hatte und dadurch wusste, bei welchen Studierenden interessante Lösungen zu finden waren. Auch hier wurde besonderer Wert auf Strategien, individuelle Schwierigkeiten und Aha-Erlebnisse gelegt. Die Präsentatoren wurden also dazu angehalten, darzulegen, wie sie dazu gekommen sind, so vorzugehen, wie sie es getan haben. Hierbei sollten auch Umwege (nicht zielführende Ideen), die Überwindung von Schwierigkeiten und besondere Erkenntnisse beschrieben werden. Dadurch sollte zum einen das Bewusstwerden der eigenen Vorgehensweise erreicht werden und zum anderen sollten den weniger erfolgreichen Studierenden Einblicke in die kognitiven Vorgänge beim Problemlösen gewährt werden. Idealerweise wurde hierbei auch deutlich, dass die Lösung einer Problemaufgabe keineswegs so einfach ist, wie sie manchmal bei der Präsentation einer möglichst kurzen und eleganten Musterlösung erscheint und dass auch erfolgreiche Problemlöser nicht ohne Mühe zum Ziel kommen. Die hier begonnene Reflexion wird in der vierten und letzten Phase weitergeführt. Im Idealfall würden in dieser Phase alle Hausaufgaben auf diese Art besprochen. Da eine solche ausführliche Diskussion allerdings Zeit kostet, wurde in der Regel nur zwei Aufgaben diese Aufmerksamkeit zuteil. Zu den anderen Aufgaben, meist den etwas einfacheren, wurden ohne ausführliche Diskussion Musterlösungen (mal von Studierenden, mal vom Tutor) vorgestellt.

Zusammenfassungsphase: Das Ziel dieser Phase war es, auf den Problemlöseprozess zurückzublicken (entsprechend der *Looking Back*-Phase bei Pólya), verwendete Strategien zu explizieren und so ein Repertoire an individuellen Handlungsmöglichkeiten für zukünftige Problemlöseprozesse aufzubauen (vgl. Abschnitt

2.4.5 und Leuders, 2017). Nachdem in der vorhergehenden Phase also verschiedene Lösungsmöglichkeiten ausführlich diskutiert wurden, wurde gemeinsam reflektiert, welche Strategien hierbei hilfreich waren. Zum einen wurden neue Strategien benannt, zum anderen wurde eine Verbindung zu früheren Aufgaben aufgebaut, indem bereits bekannte Strategien identifiziert wurden. Die neu entdeckten Strategien wurden dann gesondert festgehalten, wobei sich die Studierenden auf eine Bezeichnung einigen konnten. Dies geschah entweder auf einer Strategietafel oder mit farbiger Kreide, in jedem Fall aber auf einer gesonderten Seite in den Unterlagen der Studierenden (vgl. Fußnote 7 auf S. 74). So wurde ein Repertoire an Strategien aufgebaut, das nicht normativ vorgegeben war (anders als bei Bruder & Collet, 2011 wurden die Aufgaben nicht danach ausgesucht, welche Heurismen sich an ihnen erlernen lassen), sondern sich aus der erlebten Nützlichkeit bei bereits bearbeiteten Problemen ergab (anders gesagt: die Heurismen wurden dann festgehalten, wenn sie sich bei typischen Aufgaben als hilfreich herausgestellt haben). Auch zu Aufgaben, deren Lösung nicht ausführlich besprochen, sondern nur kurz vorgestellt wurde, wurden verwendete Strategien herausgestellt und wie hier beschrieben festgehalten.

In den beschriebenen Phasen lassen sich Elemente der Pólya-Phasen Pólya (1945) erkennen, allerdings sind diese keineswegs gleichzusetzen: Die *Vorbereitungsphase* deckte im Wesentlichen Pólyas *Understanding the Problem* ab, enthielt aber bereits Elemente von *Devising a Plan*. In der *Eigenarbeitsphase* wurden im Idealfall komplette Problemlöseprozesse, also alle vier Pólya-Phasen durchlaufen, wobei die Dokumentation vor allem das *Looking Back*, aber auch schon die metakognitive Steuerung der vorherigen Pólya-Phasen unterstützen sollte. In der *Diskussionsphase* sowie der *Zusammenfassung* ging es im Wesentlichen um das *Looking Back*. Welche der Hausaufgaben in welcher Phase bearbeitet wurden, wurde von Woche zu Woche entschieden. Meist wurde das in der Tutorenschulung (siehe unten) entschieden, allerdings konnten die Studierenden auch Wünsche äußern, welche Aufgaben sie als besonders beachtenswert empfanden. Für die zweite Phase wurde ein Vorschlag gemacht, welche Aufgabe dokumentiert werden sollte. Insgesamt war es eher die Ausnahme, dass eine Aufgabe alle vier hier genannten Phasen durchlaufen hat. Es wurde darauf geachtet, dass jede problemhaltige Aufgabe in mindestens einer Phase (zusätzlich zur *Zusammenfassung*, die für jede Aufgabe gemacht wurde) Beachtung fand.

Der wesentliche Teil der Maßnahme wurde durch die Durchführung dieser Phasen abgedeckt. Da die Zeit knapp war, gab es auch nicht viele Möglichkeiten, weitere Elemente einfließen zu lassen. Allerdings war es so, dass in den ersten ein bis zwei Wochen (abhängig vom verantwortlichen Dozenten) noch keine Hausaufgaben zu besprechen waren. Manche Dozenten ließen die erste Übungsstunde ausfallen, einige ließen in ihr Grundlagen zu Logik und Mengenlehre behandeln, aber grundsätzlich gab es hier ein wenig Zeit, unterschiedliche Lern- und Problemlösehilfen auszuprobieren. Diese wurden in der Regel über die verschiedenen Zyklen modifiziert. Das Endergebnis wird in Kapitel 6 dargestellt. Im Folgenden werden einige durchgeführte Ansätze beschrieben. Teilweise war es auch möglich, im Semester ein wenig Zeit zu finden, um diese Ansätze zu wiederholen und zu vertiefen.

Eine Maßnahme war, ein wenig auf Lesestratgien (vgl. auch Abschnitt 2.3.1) einzugehen. Dabei handelt es sich im Wesentlichen um Organisations- und Elaborationsstrategien, die beim Lesen eines mathematischen Textes, wie dem Skript, zum Einsatz kommen können. Gemeinsam wurden anhand des Skriptes (oder einem vom Autor selbst erstellten „nullten Kapitel" zur Logik und Mengenlehre) solche Strategien erarbeitet und festgehalten. Die folgende Liste enthält einige der hierbei entstandenen Strategien:

- Aktives Lesen (Notizen machen, kritisch prüfen, in eigene Worte fassen)
- Wichtige Aussagen identifizieren und zusammenfassen
- Selbst Beispiele ausdenken
- Nicht-lineares Lesen (Springen im Text)
- Darstellungswechsel (in der Mengenlehre z. B. Venn-Diagramme)
- Verknüpfen und Strukturieren (z. B. durch Mind Maps)
- Fragen Stellen etc.

Diese Strategien wurden an einem Textteil gemeinsam eingeübt. Als Hausaufgabe sollten sie auf einen anderen Teil übertragen werden. In der Folgewoche konnten dabei entstandene Fragen der Studierenden beantwortet und das Vorgehen reflektiert werden. Wie und warum dieses Vorgehen in späteren Zyklen modifiziert wurde, wird in Kapitel 6 beschrieben.

In den ersten beiden Zyklen wurde den Studierenden noch zu Beginn des Semesters eine Liste von Strategien mitgegeben, die beim Problemlösen behilflich sein können. Diese bewusst kurz gehaltene Liste bestand aus den Stichwörten (in dieser Reihenfolge)

- Begriffe klären
- Vereinfachen des Problems
- Veranschaulichen
- Ähnlichkeiten suchen
- Variieren der Aufgabe
- Unterteilung in Teilprobleme
- Reflexion des eigenen Vorgehens

Hiervon wurde bereits nach dem zweiten Zyklus Abstand genommen, da eine solche Liste zum einen nicht zu dem Konzept passt, dass die Studierenden hilfreiche Strategien selbst entwickeln sollen, und zum anderen sowohl dieTheorie als auch die Erfahrungen der Tutoren sowie die Ergebnisse der qualitativen Untersuchung gegen den Nutzen einer solchen Liste sprechen. Hierzu wird in den folgenden beiden Kapiteln mehr geschrieben.

Ein Ansatz, der sich über alle Zyklen hinweg stabil gehalten hat, bezieht ein Stück weit das Konzept der Illumination (vgl. Abschnitt 2.2.2) ein. Hierbei wurde ein Text von Lehn (o. D.) ausgeteilt und besprochen. Im Wesentlichen rät der Text dazu, möglichst frühzeitig nach Veröffentlichung der Hausaufgaben mit der Bearbeitung anzufangen. Hierbei kommt es nicht darauf an, alle Aufgaben sofort zu lösen, sondern sich damit vertraut zu machen, und zwar so gut, dass man in der Lage ist, die Aufgabe in eigenen Worten wiederzugeben, ohne dabei auf das Übungsblatt schauen zu müssen. Das entspricht in etwa der Pólya-Phase *Understanding the Problem*. Man sollte also alle vorkommenden Begriffe verstanden haben und eine mentale Repräsentation der Problemsituation aufbauen (zum Teil auch durch Beispiele oder Darstellungswechsel). Hat man dies getan, so hat man zum einen die Möglichkeit, in vielen verschiedenen Situationen über das Problem nachzudenken (Lehn nennt als Beispiel die Bushaltestelle und die Schlange beim Bäcker), zum anderen gibt man dem Unterbewusstsein die Möglichkeit, an der Bearbeitung des Problems mitzuhelfen. Mit den Worten von Hadamard (1959) soll es also möglichst früh (also nicht erst kurz vor Abgabe) eine *Initiation* (die zwar durch das Verstehen der Aufgabe allein noch nicht abgeschlossen, aber zumindest eingeleitet ist) geben, um nach einer Phase der *Incubation* eine *Illumination* zu ermöglichen.

4.5 Tutorenschulung

Der vorherige Abschnitt beschreibt den geplanten Verlauf der Maßnahme. Im Folgenden werden die Methoden dargelegt, wie diese Ideen den Tutoren der einzelnen Übungsgruppen der Intervention nahegebracht wurden. Wie bereits erwähnt, wurde in jedem Zyklus eine der Gruppen vom Autor der vorliegenden Arbeit geleitet. Im ersten Durchlauf war dies die einzige Gruppe, die modifiziert wurde, im zweiten kam eine weitere hinzu. Hier gab es ebenfalls wöchentliche Treffen mit dem anderen Tutor, diese liefen aber informeller und weniger organisiert ab als das in den folgenden Zyklen der Fall war. Da die Veränderungen aber nicht aus Erfahrungen aus vorhergehenden Zyklen oder neuen empirischen Kenntnissen hervorgingen, sondern sich natürlich aus dem Ausweiten der Intervention auf eine größere Anzahl von Übungsgruppen und den betreuenden Tutoren ergab, wird die Konzeption bereits an dieser Stelle und nicht erst in Kapitel 6 beschrieben, und nicht als Ergebnis der Entwicklungsforschung betrachtet.

Das Treffen der Tutoren fand wöchentlich statt und wurde vom Autor geleitet. Da die Tutoren sich freiwillig gemeldet hatten, sollte dieses Treffen nicht zu lange dauern, zumal in manchen Semestern zusätzlich noch ein Treffen mit dem verantwortlichen Dozenten stattfand. Auf der anderen Seite musste genügend Zeit eingeräumt werden, die Intention hinreichten klar zu machen und die Tutoren auf einen flexiblen Umgang mit den Aufgaben und den Reaktionen der Studierenden zu schulen. Mit der Zeit hat sich ein Rahmen von 60 Minuten als günstig erwiesen.

Die zugrunde liegende Idee der Schulung war es, die Tutoren dieselben Prozesse durchleben zu lassen, wie sie von den Studierenden erwartet wurden. Das wurde an einer ausgewählten schwierigen Problemaufgabe exemplarisch durchgeführt. Konkret bedeutet das, dass sie zunächst (im Gegensatz zu manchmal gängiger Praxis) keine Musterlösungen erhalten haben. Sie wurden gebeten, sich vor dem Treffen (mindestens) die ausgewählte Aufgabe ausführlich anzuschauen und dabei ihr eigenes Vorgehen zu dokumentieren. Hierbei gab es genau dieselben Leitlinien, wie für die Studierenden (vgl. Abschnitt 4.4), d. h. es wurde besonders auf eingesetzte Strategien, Schwierigkeiten und das Auftreten von Aha-Effekten geachtet. Da die Tutoren mehr Erfahrung mit dem Bearbeiten von Problemen, insbesondere im betreffenden Themengebiet (Analysis oder Lineare Algebra) hatten und zum Teil sogar die behandelten Aufgaben bereits kannten, wurden sie zusätzlich aufgefordert, sich in die Situation der Studierenden hineinzuversetzen und sich über mögliche auftretende Schwierigkeiten, deren Überwindung sowie über die der Auswahl von Strategien zugrunde liegenden Überlegungen Gedanken zu machen, oder wie Pólya (1945) schreibt, ihre eigenen Erfahrungen, Schwierigkeiten und Erfolge beim Lösen dieser oder ähnlicher Aufgaben nachzuleben. Auf Grundlage dieser Bearbeitung wurde beim Tutoren-Treffen über die Aufgabe diskutiert, so wie es auch in den Übungsgruppen getan werden sollte: Verschiedene Lösungsansätze wurden vorgestellt, unter besonderer Berücksichtigung von möglichen Schwierigkeiten und dem Strategieeinsatz. So bekamen die Tutoren einen Überblick über alternative Lösungsmethoden und konnten Überlegungen auf der Metaebene miteinander teilen. Auf diese Art sollte ein Gefühl dafür entwickelt werden, worauf es bei solchen Diskussionen ankommt und welche Erkenntnisse dabei gewonnen werden können. Auch hier wurden verwendete Strategien identifiziert und benannt, mit dem Hinweis, dass diese nicht einfach vom Tutor vorgegeben werden, sondern von den Studierenden kommen sollten. Analog wurde auch eine gemeinsame Vorbereitungsphase durchlebt, in der mögliche Darstellungsweisen eines ausgewählten Problems und der hierbei vorkommenden Begriffe, Beispiele sowie Lösungsideen gesammelt wurden. Dabei wurde auch gemeinsam entschieden, wo die Grenze erreicht ist, ab der mögliche Tipps zu viel verraten und die Essenz der Aufgaben verloren geht.

Darüber hinaus gab es wöchentliches Feedback, was gut funktioniert hat und welche Ideen sich aus welchen Gründen nicht gut in der Praxis umsetzen ließen (das häufigste Problem war hier Zeitmangel – eine ausführlichere Reflexion wird in Abschnitt 6.4 gegeben). Dadurch konnte zum einen die Maßnahme direkt auf die Umstände angepasst werden, zum anderen kam es zu einem fruchtbaren Austausch, wenn andere Tutoren ähnliche Schwierigkeiten hatten, diese aber überwinden konnten. Wie die Studierenden konnten also auch die Übungsgruppenleiter von den Erfahrungen der Kollegen profitieren.

Zu Beginn eines jeden Semesters wurde vom Autor ein Kurzvortrag über die Ideen und Prinzipien der Maßnahme gehalten, wie sie in der vorliegenden Arbeit beschrieben sind (aktives Entdecken von Problemlösestrategien, metakognitive Steuerung und Reflexion etc.). Dieser wurde bewusst kurz gehalten und der Fokus der Schulung lag auf der aktiven Umsetzung in die Praxis. Wurden zu Beginn des Semesters weitere Maßnahmen (wie oben beschrieben – z. B. ein Training der Lesekompetenz) durchgeführt, so wurde auch hier zunächst kurz der Sinn erklärt, um anschließend die für die Übungsgruppe geplanten Aktivitäten durchzuspielen.

4.6 Zusammenfassung

An der Universität Duisburg-Essen wurde über sieben Zyklen von jeweils einem Semester in einer Anfängervorlesung (Lineare Algebra I oder Analysis I) nach den Prinzipien des *Design Research* eine Intervention entwickelt, die eine Modifikation der traditionellen Gruppenübung mit starker Fokussierung strategischer Aspekte darstellen soll. Die ursprüngliche theoriegeleitete Version wurde in diesem Kapitel vorgestellt. Veränderungen, basierend auf den Erfahrungen der Tutoren und auf der im folgenden Kapitel vorgestellten qualitativen Untersuchungen zum Problemlösen von Studienanfängern werden in Kapitel 6 beschrieben. Den Kern der Maßnahme bildet ein vier-Phasen-Modell, in dem bei unterschiedlichen Aufgaben verschiedene Schritte des Problemlöseprozesses durchlaufen werden. In der *Vorbereitungsphase* werden gemeinsam Möglichkeiten erkundet, wie man zu einem besseren Verständnis der Aufgabe kommt und/oder Ideen für ein mögliches Vorgehen gesammelt. In der *Eigenarbeitsphase* bearbeiten die Studierenden wie üblich die Hausaufgaben, werden aber zu einer ausführlichen Dokumentation ihres Vorgehens aufgefordert, bei der verwendete Strategien, auftretende Schwierigkeiten und Aha-Erlebnisse im Vordergrund stehen. In der *Diskussionsphase* werden verschiedene Lösungsansätze vorgestellt, unter besonderer Berücksichtigung der Reflexion ebendieser Aspekte.

Individuelle Schwierigkeiten können angesprochen und gelöst werden. Zuletzt werden in einer *Zusammenfassung* verwendete Strategien identifiziert, benannt und gesondert festgehalten. Zusätzlich zu diesen vier Phasen werden kleinere Lernhilfen zum Lesen von mathematischen Texten und zum frühzeitigen Aufbau mentaler Repräsentationen zu den Aufgaben gegeben. Die Tutoren wurden geschult, indem sie nach einer kurzen Begründung des Vorgehens selbst die geplanten Aktivitäten der Übungsgruppe durchlaufen haben.

5 Aufgabenbasierte Interviews

In diesem Kapitel wird die Planung, Durchführung und Auswertung der qualitativen Forschung beschrieben. Hierbei geht es nicht nur darum, Informationen zur Weiterentwicklung der hier beschriebenen Interventionsmaßnahme zu sammeln, sondern vor allem darum, grundsätzliche Erkenntnisse zu Problemlöseprozessen von Studienanfängern zu gewinnen.

Wie in Abschnitt 2.1 beschrieben, gibt es hierzu noch recht wenig Studien. Erwähnenswert sind in diesem Zusammenhang neben den Klassikern von Lucas (1974) und Schoenfeld (1985) eine Studie von Zazkis et al. (2015), bei der Problembearbeitungsprozesse von erfolgreichen Studierenden höherer Semester untersucht werden, und die Dissertation von Kirsten (im Druck), die die in Abschnitt 5.3.1 beschriebene Einteilung von Problemlöseprozessen in Episoden nach Schoenfeld (1985) an Beweisprozesse anpasst.

Abschnitt 5.1 beschreibt den grundsätzlichen Ablauf der qualitativen Forschung. Hierbei handelt es sich um eine Prozessanalyse von Problembearbeitungen der Probanden. In Abschnitt 5.2 wird eine kurze stoffdidaktische Analyse der verwendeten Aufgaben durchgeführt.

In diesem Kapitel soll eingegangen werden auf die

Forschungsfrage 2: Wie laufen Problembearbeitungsprozesse bei Studienanfängern der Mathematik an authentischen Übungsaufgaben ab und welchen Einfluss hat dabei die Teilnahme an der Fördermaßnahme?

Ergänzende Information Die elektronische Version dieses Kapitels enthält Zusatzmaterial, auf das über folgenden Link zugegriffen werden kann https://doi.org/10.1007/978-3-658-39052-5_5.

T. Stenzel, *Mathematisches Problemlösen in der Studieneingangsphase*, Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-39052-5_5

In Abschnitt 5.3 werden die Methoden beschrieben, die zur Auswertung der videographierten Prozesse und damit der Beantwortung der Forschungsfrage 2 verwendet wurden. Diese ist bewusst recht allgemein gestellt, da eine Präzisierung die Gefahr birgt, dass der Suchraum eingeschränkt wird. Da es, wie eben beschrieben, im betrachteten Kontext bisher wenig Studien gibt, es sich hier also um Grundlagenforschung handelt, soll ein holistischer Blick auf die Prozesse gerichtet werden. Aus demselben Grund ist es auch nicht sinnvoll, die Untersuchung auf ausgewählte, quantitativ messbare Aspekte zu beschränken. Die Wahl fiel also auf eine qualitative Untersuchung. Um eine gewisse Objektivität sicherzustellen, wurden vorher festgelegte Aspekte, denen aufgrund der theoretischen Überlegungen und der oben genannten Studien eine gewisse Bedeutung unterstellt werden kann, unabhängig von zwei Personen kodiert. Hierbei handelt es sich um *Schoenfeld-Episoden* (Abschnitt 5.3.1), das Nutzen *externer Hilfsmittel*, wie dem Skript oder dem Internet (Abschnitt 5.3.2), *Heurismeneinsatz* (Abschnitt 5.3.4), *metakognitive Aktivitäten* (Abschnitt 5.3.5), das Auftreten neuer *Ideen und Lösungsansätze*, den Einfluss von *Fachwissen* (Abschnitt 5.3.6) sowie die Kodierung von Fehlern.

In Abschnitt 5.4 wird erläutert, wie die Kodierer geschult wurden, um eine möglichst objektive Kodierung zu erreichen. In Abschnitt 5.5 werden schließlich die Ergebnisse präsentiert, bevor diese in Abschnitt 5.6 zusammengefasst werden. Um einen guten Überblick über die betrachteten Teilaspekte zu bekommen, werden in Abschnitt 5.5 Teilfragen gestellt, die sich, um den holistischen Blick nicht im Vorfeld einzuschränken, erst im Prozess der Auswertung als sinnvoll herauskristallisiert haben.

5.1 Forschungsdesign

In diesem Abschnitt werden die Gegebenheiten der qualitativen Datenerhebung beschrieben. Bei den Probanden handelt es sich um Freiwillige aus jedem Zyklus der Maßnahme, die etwa zu gleichen Teilen aus Interventionsgruppe und Kontrollgruppe stammen (für eine Übersicht vgl. Tabelle 5.1). Von den meisten dieser Freiwilligen liegen aufgabenbasierte Interviews (s. u.) von zwei Messzeitpunkten – zu Beginn und am Ende des Semesters – vor. Manche haben nur am ersten Interview teilgenommen, in der Regel, weil sie ihr Mathematikstudium abgebrochen haben, in wenigen Fällen auch ohne Angabe von Gründen oder aus Zeitmangel. Von Einzelnen liegt auch noch Material eines dritten Messzeitpunktes in der Mitte des Semesters vor. In der vorliegenden Arbeit wurden allerdings von jedem Teilnehmer maximal zwei Prozesse ausgewertet. Das Forschungsvorhaben und der geplante Ablauf der Interviews wurde zu Beginn des Semesters in allen Übungsgruppen kurz durch den

Autor vorgestellt, um dort die Freiwilligen zu rekrutieren. Es ist gut denkbar, dass es sich bei der Stichprobe um eine Positivauswahl handelt, falls sich etwa Studierende erst dann freiwillig melden, wenn sie sich die Bearbeitung der Aufgaben zutrauen. Insgesamt wurde nach Möglichkeit darauf geachtet, dass sich die Probanden gleichmäßig auf die Übungsgruppen aufteilen, um Verzerrungen, die sich durch die Persönlichkeit des jeweiligen Tutors ergeben, möglichst auszugleichen. Da in manchen Zyklen die Übungen erst in der zweiten Vorlesungswoche begannen, wurden die ersten Interviews teilweise erst in der dritten oder vierten Woche geführt. Die letzten Interviews hingegen sollten noch im Semester stattfinden, damit die Probanden, auch im Hinblick auf die für die bevorstehenden Klausuren dringend benötigte Vorbereitungszeit, nicht eigens dafür anreisen mussten. Daher lagen in machen Fällen zwischen dem ersten und dem letzten Interview nur acht Übungsstunden (Feiertage nicht mitberechnet). Hauptkriterium dafür, ob ein Prozess ausgewertet wurde, war dass der Proband ausreichend gesprochen hat. Bei einigen Prozessen hat dies nicht gut funktioniert. Außerdem wurde darauf geachtet, zumindest von der Interventionsgruppe genügend Teilnehmer zu zwei Messzeitpunkten betrachten zu können. Aus der Kontrollgruppe gibt es leider nur einen Probanden, von dem zwei Bearbeitungen untersucht wurden. Es ist nicht klar, warum die Studierenden aus dieser Gruppe beim zweiten Messzeitpunkt ausblieben. Eine höhere Abbruchquote oder geringere Nähe zum Interviewer sind nur zwei mögliche Gründe. Insgesamt wurden 13 Prozesse von 9 verschiedenen Probanden analysiert (vgl. Tabelle 5.1).

Bei *aufgabenbasierten Interviews* (vgl. Goldin, 2000) wird den Teilnehmenden eine Aufgabe (in dem Fall ein Problem) vorgelegt, das sie lösen sollen. Im Mittelpunkt steht weniger die Interaktion mit dem Interviewer als die Interaktion mit der Aufgabe. Ziel ist es, die ablaufenden Prozesse besser zu verstehen. Hilfestellungen und Zwischenfragen gelten als Teil der Lernumgebung. Hierbei ist von minimalen Interventionen (z. B. durch die Aufforderung zum lauten Denken) über metakognitive Fragen bis hin zu heuristischen Hilfestellungen (in vorher festgelegten Situationen) alles möglich. In diesem Fall wurde versucht, den Problembearbeitungsprozess möglichst wenig zu stören, weswegen sich der Interviewer weitestgehend zurückgezogen hat (auch räumlich – er hat sich einige Meter entfernt außerhalb der natürlichen Blickrichtung des Probanden hingesetzt).

Die Auswahl der zu bearbeitenden Probleme durchläuft, wie das Design der Intervention, einen Entwicklungsprozess. Nachdem vorher verschiedene Möglichkeiten getestet wurden, wurden in den letzten vier Zyklen ausschließlich authentische Übungsaufgaben ausgewählt, die in vorherigen Durchläufen der Veranstaltung (Analysis I bzw. Lineare Algebra I) als Übungsaufgaben verwendet wurden. Durch die thematische Anbindung an die Vorlesung waren die Aufgaben zeitlich nicht austauschbar. Dadurch ist es schwieriger, die Entwicklung der Problemlösekompetenz der Probanden nachzuvollziehen, denn die Beschaffenheit der Aufgaben kann einen großen Einfluss auf Prozess und Erfolg des Problemlösens haben. Der große Vorteil ist allerdings, dass diese Aufgaben die Realität des universitären Übungsbetriebs widerspiegeln, also Problemlösen im authentischen Kontext betrachtet werden konnte. Es wurden bewusst Aufgaben mit einem hohen Problemgehalt ausgewählt. Das heißt, dass die Aufgaben von keinem der Probanden routinemäßig gelöst werden konnten.

Da große Teile des zur Bearbeitung der Aufgaben benötigten Vorwissens erst kurz zuvor in der Vorlesung behandelt wurden, war davon auszugehen, dass die Probanden dieses Wissen noch nicht hinreichend abgespeichert hatten. Aus diesem Grund wurde entschieden, das jeweils aktuelle Kapitel des Vorlesungsskriptes zu Verfügung zu stellen. So konnten die Studierenden ohne künstliche Hürden auf aktuelle Begriffe und Zusammenhänge zurückgreifen. Zusätzlich wurde auch betont, dass sämtliche selbst mitgebrachten Materialien, inklusive des Zugangs zum Internet, verwendet werden durften. Auch dadurch sollte eine möglichst authentische Problembearbeitung nachgestellt werden. Aus demselben Grund wurde auch keine Zeitbeschränkung vorgegeben, wobei die Prozesse in der Regel nach spätestens einer Stunde von den Probanden abgebrochen wurden. Der längste Lösungsversuch dauerte etwa 90 Minuten. Insofern weichen die beobachteten Problembearbeitungen von dem wöchentlichen Bearbeiten eines Übungsblattes ab. Es gibt keine Möglichkeit eines Entfernens von der Aufgabe, um auf eine *Illumination* im Sinne Hadamards (1959) zu warten[1].

5.2 Stoffdidaktische Analyse ausgewählter Aufgaben

Vor der Durchführung der Interviews wurden die verwendeten Aufgaben einer stoffdidaktischen Analyse unterzogen. Exemplarisch sollen an dieser Stelle Überlegungen zu drei Aufgaben wiedergegeben werden. Kurzfassungen solcher Überlegungen zu den anderen Aufgaben finden sich in Anhang D. Hierbei soll ein typischer Lösungsprozess skizziert werden. An Stelle eines lückenlosen Beweises sollen aber nur die wesentlichen Eckpunkte skizziert werden. Stärker werden aber Überlegungen zur Vorgehensweise und möglichen Heurismen in Betracht gezogen. Metakognitive Elemente lassen sich hierbei nicht so leicht einbeziehen, da diese zu großen Teilen der Korrektur von ungünstigen Entscheidungen dienen. Dennoch werden alternative Vorgehensweisen benannt, wenn es sich anbietet. Darüber hinaus wird

[1] Eine Studentin sagte „Normalerweise würde ich mich jetzt duschen und mir die Haare föhnen. Dann fällt mir meistens was Gutes ein“.

analysiert, welches deklarative und prozedurale Fachwissen zur erfolgreichen Bearbeitung der Aufgabe notwendig oder hilfreich ist. Grundsätzlich ist es natürlich immer möglich, einen notwendigen Zusammenhang, der etwa in der Vorlesung bereits bewiesen wurden, während des Problembearbeitungsprozesses selbstständig herzuleiten, wenngleich dieses Vorgehen sehr aufwändig und daher eher unwahrscheinlich ist. Auch mögliche Fehlerquellen sollen antizipiert werden.

5.2.1 Aufgabe 1: Quetschlemma

Aufgabe 1: (Quetschlemma)
Seien a_n, b_n und c_n Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie: Wenn a_n und c_n gegen den gemeinsamen Grenzwert c konvergieren, dann konvergiert auch b_n gegen c.

Zunächst sollte man sich die Konvergenz entweder als formale Definition

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall \mathrm{n} \geq \mathrm{N}: \qquad |\mathrm{a_n} - \mathrm{c}| < \varepsilon$$

(und entsprechend für c_n und das zu zeigende b_n) oder in Form einer Skizze darstellen (siehe Abbildung 5.1). Ab einem gewissen $N \in \mathbb{N}$ liegen alle Glieder von a_n bzw. c_n innerhalb des Intervalls. Hierbei kann sich N für a_n und c_n unterscheiden. Zu zeigen ist, dass ab einem (möglicherweise wieder anderen) N auch alle b_n in dieser Umgebung liegen.

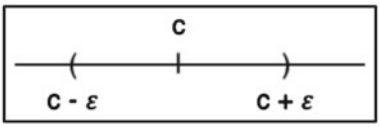

Abbildung 5.1 ε-Umgebung um den Punkt c

Die Informationen aus der Definition und der Skizze weichen leicht von einander ab. Übersetzt man die Skizze in eine Formel, ergibt sich „für große n“:

$$c - \varepsilon < a_n < c + \varepsilon$$

(und entsprechend für c_n). Alternativ lässt sich auch die Ungleichung aus der Definition durch Äquivalenzumformungen schnell in diese Form bringen. Verknüpft man diese Formeln mit der Voraussetzung, dass $a_n \leq b_n \leq c_n$ ist, so erhält man direkt

$$c - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < c + \varepsilon$$

Eine genauere Betrachtung, für welche n diese Gleichung gilt (in Kurzform: $\forall n \geq \max(N_a, N_c)$), schließt die Aufgabe ab.

Didaktische Kommentare
Um diese Aufgabe lösen zu können ist die Kenntnis des *Grenzwertbegriffes* notwendig. Außerdem sollte der *Betragsbegriff* beherrscht werden, entweder durch sicheren rechnerischen Umgang oder durch die Abstandsvorstellung. Auf heuristischer Ebene kann, wenngleich nicht zwingend notwendig, das Erstellen einer *Skizze* (s. o.) sehr hilfreich sein. Alternativ kann auch ein zweidimensionaler Graph der Folgen dargestellt werden. Hat man weiterhin Schwierigkeiten, kann eine *Zerlegung in Teilaufgaben* hilfreich sein: Zum einen ist $c - \varepsilon < b_n$ bzw. $c - b_n < \varepsilon$ zu beweisen, was mit Hilfe von $a_n \leq b_n$ gelingt, zum anderen $b_n < c + \varepsilon$ bzw. $b_n - c < \varepsilon$ mit Hilfe von $b_n \leq c_n$. Fügt man beide Ergebnisse wieder zusammen, ergibt sich das gesuchte $|b_n - c| < \varepsilon$.

5.2.2 Aufgabe 2: Konstante Funktion

Aufgabe 2: (Konstante Funktion)
Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es gelte außerdem für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$f(x) = f(x^2) \quad .$$

Zeigen Sie, dass dann f konstant sein muss.

Betrachtet man die vorgegebene Gleichung, kommt man noch vergleichsweise schnell darauf, dass man diese fortsetzen kann:

$$f(x) = f(x^2) = f(x^4) = \ldots = f(x^{2^n})$$

Eine Möglichkeit hier weiterzukommen ist, Werte für $x \in (0, 1)$ zu betrachten. Dann geht x^{2^n} gegen Null, egal wie das $x \in (0, 1)$ gewählt wird. An dieser Stelle kommt das Konzept der Folgenstetigkeit ins Spiel, denn es gilt:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x^{2^n}) = f(0)$$

Also ist die Funktion zumindest für alle Werte zwischen 0 und 1 konstant. Um dieses Prinzip auch für Werte außerhalb dieses Intervalls nutzen zu können, muss man auf die Idee kommen, die Folge umzukehren. Wenn $f(x) = f(x^2)$ ist, gilt auch:

$$f(x) = f(\sqrt{x}) = \ldots = f(\sqrt[2^n]{x})$$

Mit dem (in einer vorherigen Übung hergeleiteten) Wissen, dass die n-te Wurzel einer Konstanten gegen 1 konvergiert, ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(\sqrt[2^n]{x}) = f(1)$$

Damit ist die Konstanz der Funktion bewiesen.

Didaktische Kommentare
Diese Aufgabe hat sich als besonders schwierig erwiesen und wurde von keinem der Probanden gelöst. Um sie bearbeiten zu können, muss man mit dem *Stetigkeitsbegriff* vertraut sein, insbesondere muss man mit der *Folgenstetigkeit* als äquivalenter Eigenschaft zur ε-δ-Stetigkeit vertraut sein. Zwar lässt sich die Behauptung grundsätzlich auch ohne Folgenstetigkeit beweisen, allerdings wird die Aufgabe dann deutlich aufwändiger. Hier besteht die Gefahr, sich zu sehr in aussichtslosen Versuchen zu verlieren, weswegen eine gute *metakognitive Kontrolle* notwendig sein kann. Darüber hinaus muss bekannt sein, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$ ist für jede Konstante k. Das Betrachten von Beispielwerten (*Spezialfällen*) für x und das Anfertigen einer *Skizze* können hilfreiche Heurismen beim Verstehen der Aufgabe sein. Insbesondere der oben erwähnte *Spezialfall*, dass x zunächst zwischen 0 und 1 liegt, kann einen auf den richtigen Weg bringen und ist deswegen, wenngleich für die eigentliche Lösung nicht notwendig, hier mit aufgeführt. Eine Musterlösung würde mit der Umkehrung der Voraussetzung zur Wurzel beginnen. Grundsätzlich ist auch das Ausnutzen des *Symmetrieprinzips* denkbar ($f(-x) = f(x^2) = f(x)$), letztlich erspart es aber keine Arbeit.

5.2.3 Aufgabe 3: Grenzwert von Quotient und Wurzel

Aufgabe 3: (Grenzwert von Quotient und Wurzel)
Sei a_n eine Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \quad .$$

Beweisen Sie, dass dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \quad .$$

Zu dieser Aufgabe soll keine vollständige Lösung gegeben werden, sondern ein mögliches heuristisches Vorgehen, da es sich hierbei um ein spezielles handelt. Didaktische Kommentare werden daher auch nicht am Ende gesondert gegeben, sondern direkt in den Text eingebaut. Nachdem man sich *Beispiele* für Folgen a_n angeschaut hat, die die erste Gleichung erfüllen, erkennt man, dass das L eine Art Wachstumsfaktor darstellt. Ein *Spezialfall* wäre die Konvergenz von a_n, bei der $L = 1$ wäre. Hier liegt auch eine mögliche *Fehlerquelle*, denn die *Grenzwertsätze* (in dem Fall: der Grenzwert des Quotienten ist der Quotient der Grenzwerte) lassen sich eben nur anwenden, wenn a_n konvergent ist. Eine falsche Anwendung könnte aber zu der Vermutung führen, dass L immer gleich Eins sein muss. Ein sehr geschicktes heuristisches Vorgehen wäre, sich zunächst ein einfacheres *ähnliches* Problem anzuschauen, indem man die Voraussetzung zu

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

verstärkt. Dadurch hat man viele Details (Was passiert mit kleinen n? Wie gehe ich mit dem ε um, um das sich auch bei großen n der Quotient von L unterscheidet?) zunächst ausgeblendet und kann sich auf den Kern der Aufgabe konzentrieren. Es ergibt sich für alle n:

$$a_n = L \cdot a_{n-1} = L^2 \cdot a_{n-2} = L^n \cdot a_0$$

Auch das Detail, dass möglicherweise die Folge erst ab a_1 definiert ist, soll zunächst vernachlässigt werden. Es folgt direkt:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{L^n \cdot a_0} = L \cdot \sqrt[n]{a_0}$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich der Grenzwert L. Zwar sind noch viele Details zu klären, die zum Teil schon erwähnt wurden, allerdings wurde schonmal eine Beweisidee entwickelt. Eine andere Möglichkeit, sich der Aufgabe zu nähern, ist, sich den oben erwähnten Spezialfall anzuschauen, dass a_n gegen einen Wert (ungleich 0) konvergiert. Dann ist $L = 1$ und der Beweis, dass $\sqrt[n]{a_n}$ dagegen konvergiert, ist schnell geführt.

5.3 Auswertungsmethoden

Da zunächst unvoreingenommen ein holistischer Blick auf die Problembearbeitungsprozesse geworfen werden sollte, wurden möglichst viele Aspekte in der Breite in Augenschein genommen. Die einzelnen Betrachtungen können daher auch nicht in die Tiefe gehen, die eine Konzentration auf wenige Aspekte ermöglicht hätte. In Abschnitt 5.3.1 wird eine Episodenkodierung in Anlehnung an Schoenfeld (1985) beschrieben, die mit einer Kodierung des Umgangs mit externen Ressourcen (Abschnitt 5.3.2) kombiniert wurde. Anschließend wird in Abschnitt 5.3.3 die Beschreibung der Lösungsqualität der Bearbeitungen dargestellt. In den Abschnitten 5.3.4 und 5.3.5 wird die Kodierung von Heurismen bzw. Metakognition erläutert. Außerdem wurden benötigtes Fachwissen und begangene Fehler sowie neue Lösungsansätze und Ideen (Abschnitt 5.3.6) festgehalten. Zu guter Letzt wurde mit Hilfe der vorherigen detaillierten Analysen wieder ein ganzheitlicher Blick auf die Prozesse geworfen, der durch die in Abschnitt 5.3.7 beschriebenen Leitfragen gelenkt wurde.

5.3.1 Episodenkodierung nach Schoenfeld

Um verschiedene Problemlöseprozesse auf einen Blick miteinander vergleichen zu können hat Schoenfeld (1985) in Anlehnung an das Phasenmodell (vgl. Abschnitt 2.2.2) von Pólya (1945) Problemlöseprozesse in verschiedene *Episoden* eingeteilt[2]. Hierbei handelt es sich grob gesagt[3] um Zeitintervalle, in denen die Problemlöser zusammengehörige Handlungen ausführen. Man spricht in diesem Zusammenhang vom *Event-Sampling*-Verfahren. Im Gegensatz zum *Time-Sampling* wird der Prozess also nicht in Zeitintervalle gleicher Länge, denen dann eine Kategorie (bzw. ein Episodentyp) zugeordnet wird, sondern in inhaltlich zusammengehörige Abschnitte zerlegt, deren Länge variieren kann (vgl. Reusser, Pauli & Waldis,

[2] Zwar schreibt Schoenfeld an keiner Stelle explizit, dass er sich an Pólya orientiert hat, bei einem Vergleich seiner Episodentypen mit den Pólya-Phasen wird der Einfluss aber deutlich (vgl. hierzu auch Rott, 2013).

[3] Eine präzise Definition wird von Schoenfeld nicht gegeben, allerdings scheint nach dem Studium der einzelnen Episodentypen recht klar zu sein, was hier gemeint ist. Eine Diskussion der Problematik findet sich ebenfalls bei Rott (2013).

2010). Die Einteilung der Schoenfeld-Episoden ist (bei Hinzunahme der *Transition*) lückenlos, das heißt jeder Zeitpunkt ist einer bestimmten Episode zugeordnet. Die verschiedenen Episodentypen sind: *Reading* (hierzu gibt es keine Entsprechung bei Pólya), *Analysis* (angelehnt an die Pólya-Phase *Understanding the Problem*), *Exploration*, *Planning* (diese beiden Phasen teilen die Pólya-Phase *Devising a Plan* weiter auf), *Implementation* (entspricht *Carrying out the Plan*) und *Verification* (*Looking Back*). Sie werden weiter unten ausführlich beschrieben. Zusätzlich dazu gibt es noch eine Episode (die *Transition*), die den Übergang von einer offensichtlich abgeschlossenen Episode zu einer anderen, die noch nicht begonnen hat, markiert. Während der *Transition* finden häufig metakognitive Aktivitäten statt, z. B. die Entscheidung, die Aktivitäten der vorherigen Episode abzubrechen oder zu verändern oder Überlegungen, welcher Ansatz im Folgenden aufgegriffen werden soll. Übergänge von einer Episode zur nächsten können auch ohne zeitliche Ausdehnung und ohne von außen erkennbare Kontrollentscheidungen vonstatten gehen. Trotzdem ist ein Episodenwechsel ein Hinweis auf metakognitive Aktivitäten, da hier die Richtung des Vorgehens geändert wird. Grundsätzlich ist es auch möglich, dass zwei Episoden desselben Typs aufeinander folgen. Solche Episodenwechsel wurden in der vorliegenden Arbeit nicht markiert, da es hierdurch zu größeren Abweichungen zwischen verschiedenen Kodierern gekommen ist (s. u.). Stattdessen wurden neue Ansätze im Prozess markiert (vgl. Abschnitt 5.3.6). Rott (2013) hat zusätzlich zu den Schoenfeld'schen Episoden noch weitere, nicht-inhaltliche Episodentypen (*Abschweifung*, *Organisation* und *Schreiben*) eingeführt, die er bei der Beobachtung von Problemlöseprozessen von Fünftklässlern identifiziert hat. Da solche Aktivitäten bei den in der vorliegenden Arbeit betrachteten Prozessen selten isoliert aufgetreten sind (d. h. sie waren nur von sehr kurzer Dauer oder sind zeitgleich mit den Episoden nach Schoenfeld aufgetreten), wurde hier auf diese Kategorien verzichtet[4]. Es wurde allerdings (wie bei Rott) eine Kategorie *Sonstiges* eingeführt, um die selten auftretenden nicht-inhaltlichen Aktivitäten[5] erfassen zu können.

Zum besseren Verständnis der einzelnen Episodentypen wird an dieser Stelle das in der vorliegenden Arbeit verwendete Kodiermanual zitiert[6], welches in Anlehnung

---

[4] Rott vermutet, dass diese Episodentypen bei Schoenfeld nicht notwendig waren, da dieser zum einen mit erwachsenen Probanden gearbeitet hat und zum anderen der Interviewer bei den Prozessen mit im Raum war. Dass bei den in der vorliegenden Arbeit betrachteten Prozessen ebendiese Bedingungen ebenfalls gegeben waren und auch hier diese Episodentypen als unnötig empfunden wurden, bestärkt Rotts Vermutung.

[5] wenn es beispielsweise einen Druckfehler in der Aufgabenstellung gegeben hat oder der Stift eines Probanden ersetzt werden musste, weil er nicht mehr schrieb

[6] Im Gegensatz zu den weiter unten abgedruckten Manualen zur Kodierung von Heurismen bzw. metakognitiven Aktivitäten sind hier keine Beispiele angegeben, da diese hier nicht präg-

an das von (Rott, 2013) entstanden und basierend auf den gemachten Erfahrungen erster Probe-Kodierungen angepasst worden ist. Die Bezeichnungen der Episodentypen wurden im englischen Original belassen:

Reading: Hierbei handelt es sich um das Lesen der Aufgabenstellung. Ob das laut oder leise geschieht, spielt keine Rolle. Auch das Abschreiben der Aufgabe gehört dazu, sofern wörtlich abgeschrieben, also keine Paraphrasierung vorgenommen wird. Die Kodierung beginnt, sobald der Blick für längere Zeit auf das Aufgabenblatt gerichtet wird. Rückfragen an den Interviewer, die sich nicht auf den Aufgabentext (sondern beispielsweise auf organisatorische Dinge) beziehen und vor dem eigentlichen Lesen stattfinden, werden somit ausgeschlossen und nicht kodiert. Der Prozess beginnt also in der Regel mit dem Lesen des Aufgabentextes. Während des Prozesses wird diese Episode nur kodiert, wenn für einen längeren Zeitraum gelesen wird. Kurzes Nachschauen einzelner Aspekte wird nicht als *Reading* kodiert. Geht das Notieren der Aufgabenstellung über reines Abschreiben hinaus, z. B. durch Umformulieren oder Ändern der Reihenfolge, wird dies nicht als *Reading*, sondern als *Analysis* kodiert.

Analysis: Aktivitäten, die dazu dienen, die Aufgabe an sich zu verstehen oder besser zu verstehen. Hierzu zählen vor allem Umformulierungen und Darstellungswechsel der Voraussetzung oder der Behauptung (Klären von Definitionen, Äquivalente Formulierungen, Skizzen, Aufstellen von Gleichungen etc.), aber auch bereits das Paraphrasieren der Aufgabenstellung. Analysis wird nur dann mitten im Prozess kodiert, wenn es wirklich um das Verstehen der Aufgabenstellung geht und beispielsweise bisher nicht genau verstanden wurde, was zu machen ist. Aussagen wie „Ich versuche noch zu verstehen...“ bezogen auf die Aufgabe sind ein Indiz für diese Episode, auch wenn zwischendurch vereinzelt explorative Aussagen getätigt werden. Die nicht immer leicht zu identifizierenden Unterschiede zwischen *Analysis* und *Exploration* liegen in der Struktur und dem Inhalt. In einer Episode der *Analyse* arbeiten die Problemlöser eher dicht am Aufgabentext und gehen eher strukturiert vor.

Exploration: Jegliche Erkundung, die weder direkt an der Aufgabenstellung orientiert ist wie *Analysis*, noch einen gezielten Plan verfolgt wie *Planning* und *Implementation*, sondern in der nach Lösungsmöglichkeiten gesucht wird. In dieser Phase werden mitunter viele verschiedene Ansätze ausprobiert, das Vorgehen an sich ist aber eher unsicher und nicht wirklich zielgeleitet. Diese Phase kann auch dann kodiert werden, wenn die Aufgabenstellung noch nicht oder

nant zusammengefasst werden können. Den Kodierern wurden aber zu Beginn des Trainings mehrere Beispiele vorgeführt.

nicht ganz verstanden wurde, der Problemlöser aber schon eine (vermeintliche) Idee davon hat, was von ihm verlangt wird und eine grobe Richtung einschlägt. Eine Kodierung mehrerer *Explorations*-Episoden hintereinander ist hier nicht notwendig, da neue Ideen/Ansätze gesondert kodiert werden.

Planning: Die Entwicklung eines Plans, der ein bestimmtes (Zwischen-)Ziel verfolgt. Es genügt hier nicht, lediglich ein Ziel aufzustellen. Es muss auch eine Idee geben, wie dieses Ziel zu erreichen ist. Oft gehören *Planning* und *Implementation* zusammen, allerdings muss nicht jeder Plan auch implementiert werden. Wenn *Planning* und *Implementation* als getrennte Episoden zu erkennen sind, sollten sie auch entsprechend kodiert werden.

Implementation: Die Umsetzung eines Plans. Meistens ist hier schon klar, wie in etwa vorgegangen werden muss. Dennoch muss diese Phase nicht immer geradlinig verlaufen, diese Episode kann z. B. auch beinhalten, dass ein Plan verworfen wird. Gibt es bei der Durchführung noch Unsicherheiten bzw. ist an einigen Stellen noch nicht klar, wie es weiter geht, wird *Exploration* kodiert. Kleinere Hindernisse, die sich schnell aus dem Weg schaffen lassen, gehören aber zur *Implementation*. Oft wird ein Plan auch zeitgleich mit der *Implementation* entwickelt oder die *Planung* erstreckt sich über einen sehr kurzen Zeitraum oder wird nicht expliziert. In dem Fall werden *Planning* und *Implementation* gleichzeitig kodiert.

Verification: Hierbei handelt es sich um die Überprüfung des Ergebnisses oder eines Teilergebnisses. Kurze Kontrollen und Evaluationen der Argumentation oder des Rechenwegs zählen nicht hierzu.

Transition: Die Übergänge zwischen zwei Episoden. Viele *Transitions* haben keine zeitliche Ausdehnung, werden also auch nicht extra kodiert. Wenn aber die vorhergehende Episode bereits abgeschlossen ist, die neue aber noch nicht angefangen hat, werden *Transitions* kodiert. Nicht zu dieser Episode zählen Schweigen (nichts Sichtbares passiert) oder organisatorische Tätigkeiten. So etwas wird als zur vorhergehenden Episode gehörig kodiert. *Transitions* sind meist geprägt von metakognitiven Aktivitäten (Beurteilung des bisherigen Vorgehens, Entscheidungen über das weitere Vorgehen), da hier bewusste Richtungsentscheidungen getroffen werden. Es kann auch zwischen zwei gleichnamigen Episoden *Transitions* geben (z. B. *Exploration – Transition – Exploration*). Hier wird beispielsweise ein Ansatz verworfen, das weitere Vorgehen geplant und dann ein weiterer Ansatz verfolgt.

Grundsätzlich wurde für die einzelnen Episoden eine Mindestlänge von 30 Sekunden gesetzt, da zu kurze Episoden der Übersichtlichkeit schaden können[7]. Ausnahmen können die Episoden *Reading*, *Planning* und *Transition* bilden, da diese in der Regel eher kurz sind. Für *Reading* und *Planning* wurde eine Mindestlänge von 10 Sekunden gesetzt, für die *Transition* keine, da ein solcher Übergang sehr schnell gehen kann und die Episode eher durch das Ende der vorherigen und den Beginn der nächsten definiert ist. Die Einteilung der Episoden wurde nicht am Transkript, sondern am Videomaterial vorgenommen, um so einen direkteren Blick auf die Prozesse zu haben. Eine Arbeit am Transkript könnte hier zu sehr ins Detail gehen und den holistischen Blick verstellen. Aus demselben Grund sollte vor der Kodierung der Prozess mindestens einmal in seiner Gänze betrachtet werden.

5.3.2 Arbeit mit dem Skript oder anderen externen Ressourcen

Wie bereits erwähnt, durften die Probanden sämtliche Materialien, die sie selbst mitgebracht haben oder auf die sie mit Hilfe des Internets zugreifen konnten, verwenden. Zusätzlich wurde ihnen der Teil des jeweiligen Skriptes zur Vorlesung zur Verfügung gestellt, der die fachlichen Inhalte der Aufgabe zum Thema hat. Der Umgang mit dem Skript wurde ebenfalls in einem Event-Sampling-Verfahren kodiert. Er bildet eine zu den Schoenfeld-Episoden unabhängige Dimension. Hierbei wurde zwischen *gezieltem* und *explorativem* Nachschlagen unterschieden. Ersteres wurde kodiert, wenn deutlich wurde, dass nach einer ganz bestimmten Stelle (z. B. einem Satz oder einer Definition) gesucht wird, letzteres, wenn keine solche Absicht vorlag oder keine erkennbar war. Ein Beispiel für einen Prozess mit Schoenfeld-Episoden und Kodierung der Arbeit mit dem Skript lässt sich Abbildung 5.2 entnehmen. Eine hellere Färbung in der ersten Zeile (Skriptnutzung) zeigt ein gezieltes Nachschlagen an. In den weiteren Zeilen sind die Schoenfeld-Episoden in der Reihenfolge des Kodiermanuals (vgl. Abschnitt 5.3.1). In Anhang E sind alle Prozesse auf diese Weise graphisch dargestellt.

[7] Bereits Schoenfeld warnt davor, Episoden zu feinkörnig zu kodieren, die Festlegung der Mindestlänge wurde aber von Rott (2013) übernommen.

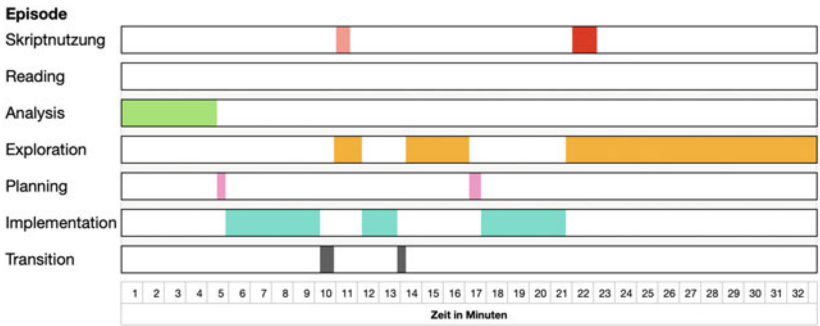

Abbildung 5.2 Beispiel für die Darstellung von Episoden

Über die reine Markierung von Nachschlage-Episoden hinaus wurde für jeden Prozess auch kodiert, zu welchem Zweck das Skript und andere Materialien herangezogen wurden. Hierbei wurden folgende Kategorien unterschieden:

(U0) Das Skript wird nicht verwendet.
(U1) Das Skript wird ausschließlich zur Absicherung der eigenen Gedankengänge herangezogen.
(U2) Das Skript wird zusätzlich zur Klärung von Begriffen herangezogen.
(U3a) Das Skript wird von Beginn an auch zur Ideenfindung herangezogen.
(U3b) Das Skript wird, nachdem eigenständige Ideenfindung nicht erfolgreich war, auch hierzu herangezogen.

Tatsächlich sind diese Antwortmöglichkeiten disjunkt, d. h. keiner der Probanden hat das Skript zu Ideenfindung, aber nicht zur Begriffsklärung verwendet. Mit *Absicherung der eigenen Gedankengänge* ist gemeint, dass entweder Begriffe und Zusammenhänge nachgeschlagen wurden obwohl deutlich wurde, dass diese auch ohne Hilfe des Skriptes klar waren, oder geäußert wurde, dass bevor eine eigene Idee verfolgt wird zur Sicherheit nachgeschlagen wird, ob man nicht wichtige Zusammenhänge übersehen hat.

5.3.3 Einschätzung der Lösungsqualität

Ähnlich wie die Arbeit mit dem Skript wird auch die Qualität einer Lösung global beschrieben. Hierbei gibt es folgende Kategorien:

(L0) Es wurde kein wesentlicher Lösungsfortschritt erzielt.
(L1) Die Aufgabe wurde zwar nicht gelöst, aber trotzdem wesentlicher Fortschritt erzielt.
(L2) Die Aufgabe wurde mit kleinen Lücken gelöst.
(L3) Die Aufgabe wurde vollständig gelöst.

Hier wurde (L0) auch dann vergeben, wenn zwar eine sinnvolle Analyse der Aufgabe stattgefunden hat, darüber hinaus aber kein Fortschritt gemacht wurde. Zu (L1) kann das Erreichen einer Teillösung oder der Beweis eines Spezialfalls zählen, währen bei (L2) nur wenig bis zur Lösung der kompletten Aufgabe fehlt. Die vorgegebenen Antwortmöglichkeiten wurden von einem Modell von Zazkis et al. (2015) übernommen.

5.3.4 Kodierung von Heurismen

Auch der Heurismeneinsatz stellt einen wichtigen Aspekt des Problemlösens dar (vgl. Abschnitt 2.3.2) und wird hier genauer betrachtet. Hierbei wurde das Kodierschema von Rott (2013, im Anhang; vgl. auch Rott, 2018) übernommen und der Situation angepasst. In Abbildung 5.3 und 5.4 ist die überarbeitete Version des Kodiermanuals abgebildet, der sich auch Beispiele für die jeweiligen Kategorien entnehmen lassen. Ausführlichere Beispiele finden sich in Abschnitt 5.5.4.

Bei der Kodierung der Heurismen wurden zunächst alle Tätigkeiten markiert, bei denen es sich um heuristische handeln könnte (im weit gefassten Sinne Pólyas als strategisches Vorgehen, das bei der Problembearbeitung hilfreich sein könnte) und erst im Anschluss wurde versucht, diese einer existierenden Kategorie zuzuordnen. War das nicht möglich, wurden sie zunächst einer Restkategorie zugeordnet, aus der später neue Kategorien gebildet wurden. In wenigen Fällen wurde konsensuell entschieden, dass es sich bei den markierten Tätigkeiten nicht um heuristische handelt (was wiederum handlungsleitend für folgende Kodierungen bzw. Nicht-Kodierungen wurde). Im Gegensatz zur Einteilung der Prozesse in Episoden und der Identifizierung des Nachschlagens wurden Heurismen, wie auch die in den folgenden Abschnitten beschriebenen metakognitiven Aktivitäten, Rückgriffe auf Fachwissen, Fehler und neue Lösungsansätze als Ereignisse kodiert, d. h. anstatt Anfangs- und Endzeitpunkt festzulegen, wurde nur der Zeitpunkt markiert, an dem das jeweilige Ereignis aufgetreten ist.

Die Anpassungen, die im Vergleich zum Rott'schen Manual vorgenommen wurden, seien im Folgenden kurz beschrieben. Einige Kodes wurden zwar bis zum Ende im Kodiermanual belassen, wurden aber nie kodiert und deshalb aus dieser Darstel-

Kode	Beschreibung	Beispiele
Begriffe klären (Bkl)	Die Bedeutung von Begriffen/Begrifflichkeiten wird geklärt, ohne dass mit den Begriffen bereits gearbeitet wird. Das Klären von Begriffen kann z. B. mittels Nachschlagens im Skript oder in Kombination mit dem Heurismus „Skizze“ passieren.	(1) Zu Beginn einer Aufgabe werden die benötigten Begriffe im Skript nachgeschlagen. (2) Bereits bekannte Definitionen werden aufgeschrieben. (3) Es wird sich explizit darüber Gedanken gemacht, was es bedeutet, dass eine Funktion injektiv ist.
Skizze (Skiz)	Das Anfertigen einer Skizze, eines Diagramms, eines Graphen bzw. das Anfertigen einer Figur, sowie die weitere Arbeit damit.	(1) In einem Diagramm/einem Funktionsgraphen werden markante Punkte markiert und Eigenschaften verdeutlicht. (2) Zeichnen einer Epsilon-Umgebung um einen Grenzwert.
Imaginäre Figur (imF)	Zeichnen einer fiktiven Abbildung in der Luft/auf dem Tisch oder bildliches Vorstellen eines Sachverhalts.	(1) Der Verlauf einer injektiven Funktion wird „in die Luft gemalt“. (2) Es wird erwähnt, dass man sich etwas bildlich vorstellt.
Hilfselemente (HiE)	Das Einfügen von Hilfselementen oder Bezeichnungen, die in der Aufgabenstellung nicht erwähnt wurden.	(1) Das Zusammenfassen von längeren Ausdrücken zu einer Variablen (2) Hilfslinien in einer Skizze einzeichnen. (3) Einem in der Aufgabenstellung genannten Intervall werden Intervallgrenzen zugeordnet
Tabelle (Tab)	Anlegen einer Tabelle, um mehrere Werte zu ordnen und um evtl. vorhandene funktionale Zusammenhänge sichtbar zu machen. Es reicht schon die Erstellung einer Liste von Wertepaaren für die Kodierung dieses Heurismus.	(1) Bei einer Folge/Summe werden die ersten Folgenglieder/Summanden notiert . (2) Zeichnen einer Matrix.
Gleichung (Glg)	Das Aufstellen von Gleichungen, in denen Zusammenhänge dargestellt werden. Dieser Heurismus wird nicht kodiert, wenn etwas z. B. aus einer Definition abgeschrieben oder übertragen wird.	(1) Die Eigenschaft eines Fixpunktes wird als f(x)=x notiert. (2) Bilden einer Linearkombination von Vektoren, um deren lineare Unabhängigkeit zu zeigen.
Spezialfall (SpF)	Betrachten von besonderen Fällen, die angenommen werden können, etwa zur Vereinfachung eines Beweises.	(1) Bei einer Summe von n=1 bis N wird N=1 oder N=2 gesetzt. (2) Bei einem Beweis für beliebige Intervalle werden zunächst kompakte Intervalle betrachtet.
Fallunterscheidung (FU)	Hier werden zum Lösen der Aufgabe verschiedene Fälle unterschieden.	(1) Aufteilen einer Ungleichung mit „≤“ in die Fälle „=“ und „<“. (2) Eine Folge konvergiert oder eine Folge divergiert. (3) Zerlegung des Betrages |x| in die Fälle, dass x positiv bzw. negativ ist.
Nutzung aller Voraussetzungen (NVor)	Es wird überprüft, ob alle in der Aufgabenstellung gegebenen Bedingungen einbezogen worden sind.	(1) „Wofür brauche ich die Injektivität?“ (2) „Ich habe noch gar nicht benutzt, dass...“

Abbildung 5.3 Das verwendete Kodiermanual zu Heurismen – Seite 1

Systematisierungshilfen (SyH)	Das Einführen ordnender Elemente, die bei der Ausführung und Überwachung einer Tätigkeit/eines Plans helfen.	(1) Wichtige Teilaussagen werden zur weiteren Nutzung markiert. (2) Unterstreichen von einzelnen Teilen einer Gleichung, um das Zusammenfassen zu vereinfachen.
Metapher (Met)	In der Aufgabe vorkommende Aspekte werden mittels anschaulicher Metaphern beschrieben.	(1) "Schachtel da drum bauen" für Epsilon-Umgebung. (2) Eine Matrix wird „durchgeschnitten".
Rückführungsprinzip (RfP)	Bezugnahme auf bekannte *Ergebnisse* oder auf Teilergebnisse der Aufgabe. Im Gegensatz zu *Ähnlichen Aufgaben* werden keine Verfahren übertragen. Dieser Heurismus wird auch dann kodiert, wenn sich nonverbal z.B. auf Teilergebnisse der Aufgabe bezogen wird.	(1) Bezugnahme auf bereits erreichte Zwischenergebnisse. (2) Verwenden des Ergebnisses einer bereits bewiesenen Übungsaufgabe. (3) Zurückführen des allgemeinen Falls auf einen der Spezialfälle, z.B. wenn man bei einer Summe von n=1 bis N, N=1 oder N=2 gesetzt hat.
Ähnliche Aufgabe (Ähn)	Das bewusste, explizite Heranziehen bekannter *Verfahren* und *Methoden* durch Bezug auf andere Aufgaben, Sätze oder Beweise, die sich auf (vermutlich) ähnliche Weise lösen lassen.	(2) Bei Konvergenzaufgaben: Kürzen durch die „größte Folge" oder erweitern mit binomischer Formel. (3) Ein Verfahren, das mit der Variblen a_n durchgeführt wurde, wird genauso mit a_1 durchgeführt.
Analogieprinzip (Ana)	Das Heranziehen vergleichbarer Aufgaben, deren Lösungsweg übertragbar sein kann. Im Gegensatz zu *Ähnlichen Aufgaben* ist hier eine stärkere Abstraktion vonnöten. Das Verfahren ist hierbei als solches nicht bekannt.	(1) Der Beweis eines Satzes wird für die eigene Beweisführung herangezogen: „Das könnte so ähnlich funktionieren."
Suche nach neuen Ergebnissen (neuEr)	Dieser Heurismus ist eine Vorstufe zu *„RfP, Ähn* bzw. *Ana"*. Es wird gezielt überlegt oder im Skript geschaut, welche Elemente einem für das zu lösende Problem weiterhelfen könnten.	(1) „Ich überlege mal, was haben wir denn gemacht, was mir hier weiterhelfen könnte..." (2) „Mal schauen, was das Skript dazu sagt..."
Symmetrieprinzip (Sym)	Symmetrische Eigenschaften werden genutzt.	(1) Es wird benutzt, dass wegen f(x)=f(-x) nur Werte ≥0 betrachtet werden müssen.
Rückwärtsarbeiten (RüA)	Betrachtung des Zielzustandes/des Gesuchten. Es wird überlegt, was man zeigen muss, damit die Behauptung erfüllt ist.davon ausgehend wird versucht, zum Anfangszustand zu gelangen.	(1) Um eine lineare Unabhängigkeit zu beweisen wird eine Linearkombination aus den Vektoren gebildet, um zu zeigen, dass die Koeffizienten gleich Null sein müssen.
Vorwärtsarbeiten (VwA)	„Drauf los"-Arbeiten vom Anfangszustand. Das Gegebene wird verwendet, um zum Zielzustand zu gelangen. Bei Beweisaufgaben wird von den Voraussetzungen ausgegangen.	(1) Eine vorgegebene Gleichung wird manipuliert, um zu sehen, ob man mit dem Ergebnis weiterkommt.

Abbildung 5.4 Das verwendete Kodiermanual zu Heurismen – Seite 2

lung aus Gründen der Übersichtlichkeit entfernt. Diese sind: *Messen*, *Extremfall*, *Suche nach Mustern*, *Systematisches Probieren*, *Backtracking* und *Kombiniertes Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten*.

Des Weiteren wurden einige Kategorien zusammengefasst, weil eine klare Unterscheidung nicht mit großer Inter-Rater-Übereinstimmung möglich war. Möglicherweise war in Kontext von Rotts Aufgaben, zu denen auch geometrische zählten, diese Unterscheidung einfacher. Die Kategorien *informative Figur* und *operative Figur* wurden zur Kategorie *Skizze* zusammengefasst. Die Kategorie *Bezeichnungen einführen* wurde unter die Kategorie *Hilfselemente* gefasst. Das *Transformationsprinzip* wurde gestrichen, da es sich nicht gut von den verschiedenen Darstellungswechseln (*Skizze*, *Tabelle* und *Gleichung*) unterscheiden ließ.

Außerdem wurden, wie oben beschrieben, einige neue Kategorien hinzugefügt, deren Bedeutung aus dem Kodiermanual deutlich werden sollte: Das *Begriffe klären*, die *imaginäre Figur*, die *Nutzung aller Voraussetzungen*, die *Metapher* und die *Suche nach neuen Ergebnissen*, die eng mit der Skriptnutzung zusammenhängt. Interessant ist hier die *Nutzung aller Voraussetzungen*, denn Kilpatrick, der zur Kodierung von Heurismen die Pólya-Fragen als Grundlage genommen und diese drastisch verkürzt hat, schreibt:

> Many of the categories were unoccupied: subjects seemingly did not exhibit behavior even remotely resembling actions suggested by the heuristic questions. For example, no subjects asked themselves aloud whether they were using all of the essential notions of the Problem. (Kilpatrick, 1967, S. 44)

Gerade diese Kategorie, die Kilpatrick exemplarisch als bei seinen Untersuchungen mit Achtklässlern nicht existent erwähnt, scheint im universitären Zusammenhang (aus dem die Pólya-Fragen ebenfalls ursprünglich stammen) wieder an Bedeutung zu gewinnen.

5.3.5 Kodierung von Metakognition

Bei der Kodierung der Metakognition wurde nicht auf ein bestehendes Schema zurückgegriffen. Eines der bekanntesten Kodierschemata zu diesem Aspekt geht auf (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007) zurück, ist aber für unsere Zwecke zu umfangreich und erfordert die Transkription der beobachteten Prozesse. Da in der vorliegenden Arbeit ein holistischer Blick auf die Problembearbeitungsprozesse gerichtet wird, wurde stattdessen entschieden, induktiv ein eigenes Schema aus den betrachteten Prozessen herzuleiten. Hierbei wurde sich an den Grundsätzen der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2020) orientiert: Zunächst wurden an einigen Beispielprozessen Äußerungen *identifiziert*, die metakognitive Aktivitäten darstellten. Auch hierbei wurden zunächst sehr großzügig alle Aussagen und schriftlichen Aktivitäten markiert, die auf ein Nachdenken über die eigenen Aktivitäten hindeuten könnten. Da sich metakognitive Aktivitäten so nur indirekt identifizieren lassen, können sicherlich nicht alle erfasst werden. Die Aussagen wurden *paraphrasiert* und auf ein vorher festgelegtes Abstraktionsniveau *generalisiert*. Anschließend wurden bedeutungsgleiche Paraphrasen *gestrichen*, so dass eine übersichtliche Liste entstand, aus der durch *Bündelung* von Aussagen Kategorien gebildet wurden. Das Ergebnis ist als Kodiermanual in Abbildung 5.5 und 5.6 dargestellt. Auch einige der Paraphrasen sind hier beispielhaft aufgeführt. In Abschnitt 5.5.6 werden weitere ausführlichere Beispiele genannt.

Zur weiteren Zusammenfassung der Kategorien gibt es verschiedene Möglichkeiten: Das Kodierschema von Cohors-Fresenborg & Kaune (2007) unterscheidet die drei Hauptkategorien *Planung*, *Monitoring* und *Reflexion*, also grob gesagt etwas in die Zukunft Schauendes, die Gegenwart Beobachtendes und Rückblickendes. Bei der Auswertung der vorliegenden Prozesse hat sich allerdings gezeigt, dass gerade das *Monitoring* sich in Aussagen (die zeitlich meist nach dem Beobachteten liegen) kaum von einer *Reflexion* abgrenzen lassen. Folgende Zusammenfassung hat sich allerdings als hilfreich erwiesen: *Kontrollprozesse* im Sinne von Schoenfeld (1985) sind solche Aktivitäten, die sich auf Richtungsentscheidungen beziehen, also die Frage, ob ein Ansatz weiter verfolgt werden oder verworfen werden soll. Hierunter fallen die Kategorien *Voraussicht*, bei der eine Idee beurteilt wird, bevor diese umgesetzt wird, *Evaluation*, bei der während oder nach Durchführung eines Ansatzes dessen Nutzen eingeschätzt wird, und der *Regulation des Vorgehens*, bei der eine Richtungsentscheidung getroffen wird, ohne dass explizit ein Ansatz beurteilt wird. Auch die Kategorien der *Planung* im weiteren Sinne können, ähnlich wie bei Cohors-Fresenborg und Kaune (2007) zusammengefasst werden. Hierzu gehören die *Zielsetzung*, die *Planungsaktivität*, bei der zusätzlich zur Zielsetzung auch ein Mittel benannt wird, wie dieses Ziel erreicht werden soll und die *Klärung der Handlungsoptionen*, die eine Art Vorstufe der Planung darstellt, da es hier noch zu keiner Entscheidung kommt. Auch die eben erwähnte *Voraussicht* stellt eine Art der Planung dar, da der Nutzen eines möglichen Ansatzes eingeschätzt und darauf basierend das weitere Vorgehen geplant wird. Da aus diesem Grund *Kontrollprozesse* nicht eindeutig von *Planung* abgegrenzt werden kann, wurden nur die ersteren zu einer Oberkategorie zusammengefasst. Besonders auf diese wird in Abschnitt 5.5.6 stärker eingegangen.

Kode	Beschreibung	Beispiele
Klärung der Handlungsoptionen (Klär)	Es werden verschiedene Möglichkeiten für das weitere Vorgehen nebeneinandergestellt bzw. aufgezählt ggf. mit einer kurzen Beurteilung	(1) „Was kann ich jetzt machen? Ich habe verschiedene Möglichkeiten...“
Zielsetzung (Ziel)	Es werden sich Ziele bzw. Zwischenziele gesetzt oder es wird geplant, was im Folgenden getan oder gezeigt werden soll.	(1) „Erstmal die eine Richtung von links nach rechts“ (2) „Das muss ich sinnvoll aufschreiben.“ (3) „Jetzt muss ich mir überlegen, wie ich das sinnvoll in eine Funktion packe.“ (4) „Da will ich hin.“
Planungsaktivität (PA)	Es wird nicht nur deutlich gemacht, auf welches Ziel hingearbeitet werden soll, sondern auch benannt, wie man (vermeintlich) dieses Ziel erreicht.	(1) „Mit Satz 4.2 müsste ich das beweisen können.“ (2) „Ich würde versuchen, mit Delta einen Widerspruch herbeizuführen.“ (3) „Ich suche nach einer Möglichkeit, etwas unter der Wurzel auszuklammern, damit ich einen Faktor rausziehen kann.“
Voraussicht (Vor)	Einschätzung des Nutzens eines konkreten Ansatzes, *bevor* dieser durchgeführt wird.	(1) „Ich überlege gerade, ob das damit funktioniert.“ (2) „Ich müsste die Definition benutzen können.“ (3) „injektiv, surjektiv wird nichts bringen“ (4) „Meine Aussichten auf Erfolg schätze ich da ziemlich schlecht ein.“
Evaluation (Ev)	Einschätzung des Nutzens eines konkreten Ansatzes, *nachdem* dieser durchgeführt wurde (keine fachlichen Fehler!)	(1) „Vielleicht hat mir das jetzt geholfen.“ (2) „Bringt mir das jetzt irgendwas?“ (4) „Hier kann ich schon mal einiges rausziehen.“ (5) „Ach nee, so rum bringt das gar nichts.“
Einschätzen des Lösungsfortschritts (Fort)	Hier wird auf den bisherigen Lösungsfortschritt geblickt, wobei hierbei der Blick etwas globaler ist als bei (Ev).	(1) „Dann müssten wir eigentlich schon die Lösung haben.“ (2) „Das hätten wir gezeigt, fehlt nur noch...“ (3) „Dass das gilt, kann ich einfach annehmen.“ (4) „Haben wir schon irgendwo gezeigt, was wir brauchen?“

Abbildung 5.5 Das verwendete Kodiermanual zu Metakognition – Seite 1

Kontrolle der Korrektheit bisheriger Überlegungen (Kontr)	Während oder nach der Durchführung eines Ansatzes wird überprüfr, ob dieser korrekt ist.	(1) Durchstreichen von Aufgeschriebenem (2) „Ich überlege, ob das jetzt wirklich so ist." (3) „Ich glaube, die Einschränkung ist in Ordnung." (4) „Hier habe ich gerade einen falschen Schluss gezogen."
Diagnose von Schwierigkeiten (Schw)	Es wird explizit geäußert, dass man an einer bestimmten Stelle nicht weiterkommt. Oft wird hierbei auch genau erwähnt, was Schwierigkeiten bereitet.	(1) „Ich kriege es gerade nicht hin, dass f konstant ist sinnvoll in eine Funktion zu packen." (2) „Ich kann halt leider nicht die Rückrichtung machen." (3) „Da hake ich jetzt gerade." (4) „Ich weiß nicht mehr, wie man das auseinandernimmt."
Regulation des Vorgehens (Reg)	Es wird explizit die Entscheidung geäußert, das Vorgehen zu verändern.	(1) „Ich verwerfe einmal kurz die Idee." (3) „Ich muss mir nochmal ein neues Konzept ausdenken." (3) „Das was ich hier oben habe könnte ich doch noch verwenden."
Äußerung zum intuitiven Verständnis (inVer)	Es wird eine Aussage darüber getätigt, inwiefern Vermutungen informell nachvollzogen werden.	(1) „Logisch ist das selbstverständlich, aber wir müssen noch einen Schritt beweisen, würde ich sagen." (2) „Ich verstehe das, aber weiß nicht ganz, wie ich das jetzt aufschreiben soll." (3) „Das erscheint mir nicht plausibel."
Eigene Fähigkeiten (eigFäh)	Hier wird eine Aussage über die eigenen Fähigkeiten getätigt.	(1) „Da verdrehe ich mich immer komplett." (2) „Ich habe gedacht, die Aufgabe ist relativ einfach, aber die ist doch nichts für mich." (5) „Das kann ich dir nicht machen."

Abbildung 5.6 Das verwendete Kodiermanual zu Metakognition – Seite 2

5.3.6 Kodierung von Fachwissen, Fehlern und neuen Lösungsansätzen

Da das verfügbare Vorwissen und die tatsächliche Nutzung dessen einer der wesentlichen Aspekte des Problemlösens ist (vgl. Abschnitt 2.3.1), wurde in den betrachteten Prozessen der Rückgriff auf *Fachwissen* und das Auftreten von *Fehlern*, die häufig ein Zeichen mangelnden Fachwissens sind, kodiert. Zusätzlich wurden neue *Lösungsansätze und -ideen* markiert. Auch hier wurden, ähnlich wie bei Heurismen und Metakognition, zunächst alle Aktivitäten markiert, die unter diese Kategorien fallen könnten, um anschließend gemeinsam zu entscheiden, ob es sich dabei wirklich um solche handelt. Im Folgenden sollen einige Beispiele für diese Kategorien gegeben werden:

Als auftretendes *Fachwissen* wird unter anderem die Erklärung von Begriffen (z. B. Stetigkeit, Konvergenz oder Beschränktheit) kodiert. Außerdem Zusammenhänge in verschiedenen Formen: Hierzu zählen unter anderem Aussagen aus der Vorlesung (Strenge Monotonie impliziert Injektivität, der Grenzwert einer Folge ist eindeutig bestimmt, Teilfolgen von konvergenten Funktionen konvergieren gegen denselben Grenzwert, Beschränkte Folgen haben mindestens eine konvergente Teilfolge, beschränkte und monotone Folgen sind konvergent, die Grenzwertsätze, der Zwischenwertsatz etc.). Diese werden nicht nur kodiert, wenn sie als Sätze aus dem Skript zitiert werden, sondern immer, wenn deutlich wird, dass diese Zusammenhänge dem Probanden bekannt sind. Zusammenhänge können auch in vorhergehenden Übungen bewiesen worden sein (etwa die Konvergenz einer Folge gegen einen bestimmten Grenzwert) oder im Prozess auftreten, ohne dass eine Quelle dafür deutlich wird (Hierbei handelt es sich häufig um einfache Feststellungen, etwa dass Stetigkeit nicht Monotonie impliziert, der Grenzwert von a_{n+1} gleich dem Grenzwert von a_n ist, sofern existent etc.). Auch Verfahren (wie die Anwendung des Quetschlemmas, der rechnerische Umgang mit dem Betrag oder Ähnliches) sowie Konventionen, etwa die Schreibweise der n-ten Wurzel als $(\ldots)^{\frac{1}{n}}$ fallen unter die Kategorie des Vorwissens. Natürlich kann auch hier nur kodiert werden, was sich in irgendeiner Form (mündlich oder schriftlich) äußert. Auf die Kodierung elementarer logischer Zusammenhänge (wie die Tatsache, dass Äquivalenz der Implikation in beide Richtungen entspricht) wurde nach einiger Diskussion hier verzichtet, da sonst viele Routinetätigkeiten mit aufgenommen werden müssten.

Auch bei *Fehlern* gibt es eine große Bandbreite. Geering (1995) unterscheidet drei Arten von Fehlern: Fertigkeitsfehler, Wissensfehler und Strategiefehler. Bei den Fertigkeitsfehlern handelt es sich um Flüchtigkeitsfehler oder Rechenfehler, wenn etwa ein Student beim Notieren der ersten Glieder einer Folge falsche Werte aufschreibt. Die Wissensfehler umfassen alle oben genannten Formen mangelhaften *Fachwissens*. In den meisten Fällen handelt es sich um Fehlvorstellungen irgendeiner Art. Hierbei kann es sich um grundlegendes Begriffsverständnis handeln, wenn z. B. nicht genau klar ist, was eine Teilfolge ist oder wie sich eine divergente Folge verhält, oder um Schwierigkeiten mit Zusammenhängen, wenn etwa aus dem Satz von Weierstraß (stetige Funktionen auf einem kompakten Intervall besitzen ein Maximum und ein Minimum) gefolgert wird, dass diese Funktionen nicht streng monoton sein können (weil dem Bearbeiter nicht klar ist, dass dieses Maximum auch am Rand des Intervalls liegen kann). Aber auch die Vermutung von nicht-existenten

Zusammenhängen fällt unter dieser Kategorie. So vermutet z. B. ein Student, dass aus der Stetigkeit einer Funktion folgt, dass, wenn zwei Funktionswerte gleich sind, alle Werte dazwischen ebenfalls gleich sein müssen. Auch falsche Schreib- oder Sprechweisen sind in der Regel auf mangelndes Wissen zurückzuführen, wenngleich diese den Lösungserfolg einer isolierten Aufgabe meist nicht beeinflussen. Ebenfalls zu Wissensfehlern zählen Missverständnisse bezüglich der Aufgabenstellung, wenn etwa nicht klar ist, was zu zeigen ist, eine Voraussetzung missverstanden wurde oder beim Versuch eines indirekten Beweises die Negation der Folgerung falsch durchgeführt wird. Als dritte Fehlerart nennt Geering (ebd.) die Strategiefehler[8]. Hierbei handelt es sich um mangelnde oder falsch eingesetzte kognitive (Heurismen) oder metakognitive Strategien. Da diese Strategien an anderer Stelle ausführlich behandelt werden, wurden solche Fehler nicht gesondert kodiert. Auf eine Unterscheidung von Fertigkeits- und Wissensfehlern wurde bei der Kodierung zunächst ebenfalls verzichtet.

Die *neuen Lösungsansätze* sind ebenfalls sehr vielfältig. Trotzdem war den Kodierern intuitiv schnell klar, was als neuer Lösungsansatz oder neue Lösungsidee zählt und was nicht. Im Nachhinein betrachtet treten diese in folgenden Zusammenhängen auf: Zum einen in Kombination mit Zielsetzungen („Die Koeffizienten müssten gleich Null sein, damit die Vektoren linear unabhängig sind“[9] oder „Wenn ich die Monotonie der Folge gezeigt hätte, wäre sie auch konvergent.“). Eine andere Möglichkeit liegt darin, dass sie sich als präformale Ideen bzw. durch das Erkennen von Mustern („L gibt so etwas wie das Wachstum der Folge an.“ oder „Die Summanden müssten alle kleiner gleich Eins sein.“) oder das Aufstellen von Vermutungen („Wenn das konvergent ist, müsste $L = 1$ sein“ oder „Ich nehme mal an, dass der Grenzwert nur von a_N abhängt“) äußern. Auch um die Nennung möglicher Werkzeuge oder Methoden kann unter diese Kategorie fallen. Mit Werkzeugen sind an dieser Stelle zum einen Zusammenhänge (Sätze) und Verfahren aus der Vorlesung gemeint (Intervallschachtelung, Quetschlemma, Zwischenwertsatz, Dreiecksungleichung, Folgenstetigkeit etc.), zum anderen aber auch typische Tätigkeiten, wie das Addieren mehrerer Gleichungen oder die Abschätzung einer Folge. Letztere sind häufig noch weniger konkret und geben nur eine Ahnung wieder („Ich glaube, ich müsste nur das m clever wählen...“ oder „Vielleicht kann ich hier ja einen Faktor ausklammern.“). Methoden hingegen sind allgemeinere Vorgehensweisen, wie das Führen eines indirekten Beweises, die Zerlegung der Aufgabe in mehrere

[8] Die Braunschweiger Arbeitsgruppe um Frank Heinrich hat sich intensiv mit Strategiefehlern beim Problemlösen beschäftigt. Betrachte hierzu etwa die Dissertationen von Heinrich (2004) oder Fritz (2020)

[9] Die in diesem Abschnitt in Anführungszeichen gesetzten Aussagen sind keine Zitate, sondern aus dem Gedächtnis gerufene Paraphrasen

Teile oder ein Beweis durch Induktion. Auch diese müssen in Bezug auf die Aufgabe erst noch konkretisiert werden. Gerade bei den *Lösungsansätzen* zeigen sich große Überschneidungen zu den anderen betrachteten Dimensionen. So treten bestimmte Ideen häufig im Zusammenhang mit Heurismen auf. Eine Überschneidung, bei der die Unterscheidung nicht offensichtlich (allerdings auch nicht zwingend notwendig) ist, soll im folgenden Abschnitt exemplarisch betrachtet werden.

Planung, metakognitive Planungsaktivitäten, Zielsetzung und Lösungsansätze Größere Gemeinsamkeiten gibt es zwischen der Schoenfeld-Episode *Planning*, den metakognitiven Aktivitäten der *Zielsetzung* bzw. *Planungsaktivitäten (PA)* sowie *Ideen* und *Lösungsansätzen*. Während die drei erstgenannten fast immer mit neuen *Ideen* bzw. *Lösungsansätzen* einhergehen, sollte klar sein, dass umgekehrt nicht jede *Idee* auch zu einem Planvollen Vorgehen (weder im Sinne von Schoenfeld, noch als metakognitive Aktivität) führen oder ein bestimmtes Ziel verfolgen muss. Bevor *Planning* und *PA* gegenübergestellt werden, soll zunächst auf die Unterschiede zwischen *Zielsetzung* und *PA* eingegangen werden:

Wie dem Kodiermanual (Abbildung 5.5) zu entnehmen ist, beschränkt sich die *Planungsaktivität* im Gegensatz zur *Zielsetzung* nicht darauf, zu benennen, wo es hingehen soll. Zusätzlich wird hierbei noch ein möglicher Weg dorthin angegeben. Ob dieser Weg tatsächlich zum Ziel führt, ist zunächst unerheblich. Als Beispiel sei hier Niklas Bearbeitung der Aufgabe zur *konstanten Funktion* (vgl. Abschnitt 5.2.2) genannt. Er sagt: „Jetzt würde ich probieren das irgendwie über das Delta zu nem Widerspruch zu bringen (25:55).“ Es wird also ein Ziel (Widerspruch) und auch der Weg (Delta) benannt. Das Wort „irgendwie“ im obigen Zitat gibt bereits einen Hinweis darauf, dass Niklas noch nicht weiß, wie genau dieser Weg aussehen könnte.

Hierin besteht ein wesentlicher Unterschied zur *Planning*-Episode. Hier muss der Weg zu einem gewissen Grad vorgezeichnet sein, so dass dieser bei einer möglichen *Implementation* ohne größere Hindernisse beschritten werden kann. Darüber hinaus muss dem Problembearbeiter klar sein, was die Erreichung des Ziels für den weiteren Problemlöseverlauf bringt. Ein Beispiel für eine solche Episode gibt es bei Andreas' Bearbeitung der Aufgabe zur *linearen Unabhängigkeit* (vgl. Anhang D). Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, stellt er zunächst fest (10:02), dass bei einer Linearkombination „die Vorfaktoren gleich Null sein“ müssen (*Zielsetzung*). Um dies zu erreichen, fasst er den Plan: „Ich pack die erstmal alle zusammen (10:13 – *Planning*).“ Aus dem weiteren Vorgehen wird außerdem deutlich, dass er diesen Plan (abgesehen von kleinen Schwierigkeiten beim Rechnen) zielstrebig umsetzen kann und mit dem Ergebnis auch etwas anfangen kann. Hier wurde deswegen eine

Planning-Episode kodiert. In Abschnitt 5.5.2 wird insbesondere auf diese Episoden ausführlicher eingegangen.

5.3.7 Leitfragen

Anders als etwa die Lösungsqualität oder die Skriptnutzung ist die Qualität des Heurismeneinsatzes und der metakognitiven Aktivitäten nicht so eindeutig operationalisierbar. Da quantitativ messbare Werte hier aber wenig hilfreiche Aussagen zulassen, wurden diese beiden Dimensionen in Form von Leitfragen betrachtet. Hierbei wurde sich den Arbeiten von Nowińska (2016) orientiert. Sie hat gezeigt, dass nach intensiver Beschäftigung mit videographierten Prozessen, zu der auch die detaillierte Kodierung von Einzelereignissen zählt, eine Einschätzung von Prozessen anhand von Leitfragen mit vorher festgelegten Antwortmöglichkeiten mit großer Übereinstimmung zwischen verschiedenen Ratern möglich ist, wenn diese vertraut mit den Prozessen sind. Die Beantwortung dieser Fragen ermöglicht einen schnellen Überblick über die wesentlichen Punkte des Problemlöseprozesses. Die folgenden Leitfragen wurden von Nowińska (ebd.) übernommen. Zu deren Beantwortung wurden alle vorher beschriebenen Kodierungen und eine erneute Betrachtung der Prozesse herangezogen.

Heurismeneinsatz
Zu welchem Grad wurden Heurismen verwendet?

(H0) Heurismen werden wenig bis gar nicht verwendet.
(H1) Heurismen werden in erwartbarer Qualität verwendet.
(H2) Heurismen werden erstaunlich gut verwendet.

Wenngleich vor allem die Antwortmöglichkeit (H2) zunächst recht unklar definiert scheint, gab es beim Beantworten dieser Frage wenig Zweifel, welche Antwort gewählt werden soll, da bereits eine große Erfahrung mit den betrachteten Prozessen vorhanden war, so dass auf Vergleichswerte zurückgegriffen werden konnte. Dies deckt sich mit den Erfahrungen von Nowińska (2016). Die *erwartbare Qualität* bedeutet in diesem Zusammenhang, dass naheliegende Heurismen ohne größere Schwierigkeiten verwendet wurden. Unter *erstaunlich guter Verwendung* ist solches Vorgehen zu verstehen, das aus Sicht des Beobachters bemerkenswert über dieses Erwartbare hinausgeht. Wenngleich die Anzahl der verwendeten Heurismen sicherlich Einfluss auf diese Frage hat, ist die Beantwortung grundsätzlich eher von qualitativen Eindrücken abhängig.

Metakognitive Aktivitäten
Zu welchem Grad treten metakognitive Aktivitäten auf?

(M0) Metakognitive Aktivitäten treten wenig bis gar nicht auf.
(M1) Metakognitive Aktivitäten werden in erwartbarer Qualität durchgeführt.
(M2) Metakognitive Aktivitäten werden erstaunlich gut durchgeführt.

In derselben Form wie bei den Heurismen werden hier qualitative Überlegungen herangezogen, um den Grad der metakognitiven Aktivitäten eines Prozesses global einzuschätzen.

5.4 Training der Kodierer

Wenngleich die Kodierung von Schoenfeld-Episoden auf der einen und von Ereignissen wie Heurismeneinsatz, Metakognition, Fehlern etc. auf der anderen Seite sich in wesentlichen Punkten von einander unterscheidet, basiert das Training der Kodierer in beiden Fällen auf denselben Ideen und wird deswegen im Folgenden zusammengefasst:

An der Auswertung der Daten waren zwei Kodierer beteiligt (TS und LH). Bei den Kodierungen wurde wie folgt vorgegangen: Als erstes wurden Beschreibungen von Schoenfeld-Episoden (vgl. Rott, 2013 und Schoenfeld, 1985) sowie das Kodiermanual zu Heurismen von Rott (2013) gemeinsam gesichtet und dabei aufkommende Fragen beantwortet. Zur Klärung von Restunsicherheiten stand, wie beim kompletten Kodierungsprozess, Rott als Experte zur Verfügung.

Dann wurde zunächst ein Prozess gemeinsam unter den genannten Gesichtspunkten kodiert. Auch metakognitive Aktivitäten, verwendetes Vorwissen, Fehler und Lösungsansätze wurden identifiziert. Gerade in diesem ersten Prozess wurde sich viel Zeit gelassen, d. h. es wurde zunächst der Prozess betrachtet, ohne zu kodieren. Dann wurden mehrere Durchläufe vorgenommen, jeweils mit Fokus auf einer der genannten Dimensionen. Hier wurden erstmal nur Episodengrenzen gesetzt bzw. Ereignisse markiert. Erst im Anschluss wurde gemeinsam diskutiert, wie die Episoden eingeordnet und die Heurismen kategorisiert werden sollen. Erste Kategoriebildung der metakognitiven Aktivitäten wurde vorgenommen.

Dann haben die Kodierer drei Prozesse unabhängig von einander bearbeitet. Die Ergebnisse wurden abgeglichen und konsensuell validiert, d. h. Unterschiede wurden diskutiert, bis ein Konsens gefunden wurde. Hierbei wurde nicht nur die Zuordnung zu den Kategorien, sondern auch die Zeitpunkte, zu denen Episodenwechsel oder andere Ereignisse kodiert wurden, abgeglichen. In Anlehnung an das

Vorgehen bei Rott (ebd.) wurde hierbei eine Abweichung von bis zu fünf Sekunden zugelassen. Bei schwer zu klärenden Fragen wurde wieder auf die Expertise von Rott zurückgegriffen. Wichtige Ergebnisse dieser Diskussion wurden in das Kodiermanual aufgenommen. Die Kategoriebildung zur Metakognition wurde gemeinsam weiter ausgeschärft. Dem folgte ein weiterer Zyklus mit denselben Aktivitäten.

Anschließend war eine akzeptable Übereinstimmung der Kodierer erreicht. In der Regel wurden über 60 % der Zeitpunkte gleich gesetzt und über 70 % der Kategorisierungen gleich vorgenommen. Das ist nicht überragend, aber bei der konsensuellen Validierung wurde in allen Fällen eine schnelle Einigung gefunden. Bei den Kategorien zur Metakognition wurden ausschließlich Werte oberhalb von 85 % erreicht. Dies lässt sich dadurch erklären, dass hier die Kategorien gemeinsam erstellt wurden und man sich nicht an ein fremdes System gewöhnen musste (gerade die Schoenfeld-Episoden sind anfangs nicht leicht zugänglich).

Das Training galt damit als abgeschlossen. Mit zwei Ausnahmen wurden in der Folge alle hier behandelten Prozesse von beiden Kodierern unabhängig bearbeitet und anschließend konsensuell validiert.

Die Beantwortung der Leitfragen konnte aus organisatorischen Gründen nur noch von Kodierer TS vorgenommen werden. Da diese sich aber auf die vorherige Kategorisierung stützt und hierbei kaum Zweifel auftraten, scheint ein notwendiges Maß an Objektivität gegeben zu sein (vgl. Nowińska, 2016).

5.5 Ergebnisse der qualitativen Erhebung

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der verschiedenen Auswertungen beschrieben und zusammengebracht. Zu Beginn (Abschnitt 5.5.1) steht ein Beispielprozess, der ausführlich zusammengefasst und analysiert wird. Abschnitt 5.5.2 beschäftigt sich mit den Schoenfeld-Episoden und *Wild Goose Chases*. In Abschnitt 5.5.3 wird die Skriptnutzung der Probanden untersucht. Ein genauerer Blick auf den Heurismeneinsatz wird in 5.5.4 gerichtet, gefolgt von einer Betrachtung des Vorwissens und der Entstehung von Ideen (Abschnitt 5.5.5) Anschließend (Abschnitt 5.5.6) werden die metakognitiven Aktivitäten untersucht. Den Abschluss bilden mögliche Auswirkungen der Interventionsmaßnahme (Abschnitt 5.5.7).

Ein Überblick über die untersuchten Problembearbeitungsprozesse wird in Tabelle 5.1 gegeben. In der ersten Spalte steht der Name des Probanden und eine Zahl, die angibt, ob es sich um einen Prozess am Anfang (1) oder im Semester (2) handelt. Die zweite Spalte gibt den Kurznamen der bearbeiteten Aufgabe an. Dahinter steht, ob der Proband zur Interventions- (IG) oder zur Kontrollgruppe (KG) gehört. Die nächsten beiden Spalten geben die (vgl. Abschnitt 5.3.3) und die Art des

Tabelle 5.1 Übersicht über die betrachteten Prozesse

Prozess	Aufgabe	Gruppe	Lsg	Umg	Episoden	Heur	#	MK	#	Ans
Patrick 1	Umkehrung GWS	KG	0	3a	A, E, A, E	0	8	0	22	5
Jan 1	Fixpunkt	IG	0	2	**R, A, E, PI**	1	13	1	19	6
Jan 2	Rangungleichung	IG	1	3b	**A, P, I, E, I, E, P, I, E**	1	16	2	45	4
Andreas 2	lin. Unabhg.	KG	1	0	**R, A, E, P, I, P, I, A, E, PI**	0	16	0	14	4
Jonas 1	Quetschlemma	IG	0	3a	R, A, E	0	5	0	1	1
Tim 1	Quetschlemma	KG	0	1	R, A, E	0	5	0	1	1
Malik 1	Quetschlemma	IG	3	3b	**R, A, E, P, I, E**	2	14	2	28	12
Malik 2	n-te Wurzel	IG	3	1	**R, A, E, P, E, I, E, PI, E, PI**	2	16	1	67	18
Niklas 1	n-te Wurzel	KG	2	1	**R, A, E, P, E, I, E**	0	8	0	22	9
Niklas 2	konstant	KG	0	0	R, A, E, A, E	0	9	0	14	6
Manuel 1	Grenzwert L	KG	1	3b	**R, A, E, A, E, P, E**	1	16	1	40	16
Julia 1	Grenzwert L	IG	1	3a	A, E, A, E, A, E, A, E	0	4	1	24	6
Julia 2	Monotonie	IG	1	3a	R, A, E, A, E, A, E	1	15	2	13	2

Umgangs mit dem Skript an (vgl. Abschnitt 5.3.2). Dahinter steht die Reihenfolge der Schoenfeld-Episoden (vgl. Abschnitt 5.3.1), wobei solche Prozesse, in denen Planungs- und Implementationsepisoden vorgekommen sind, fett gedruckt sind. Die letzten fünf Spalten geben den Grad des Heurismeneinsatzes (vgl. Abschnitt 5.3.7), die Anzahl der kodierten Heurismeneinsätze (Abschnitt 5.3.4), den Grad der metakognitiven Aktivitäten (Abschnitt 5.3.7), die Anzahl der kodierten metakognitiven Aktivitäten (Abschnitt 5.3.5) und die Anzahl der Lösungsansätze (Abschnitt 5.3.6) an.

Bevor auf einzelne Aspekte der Tabelle eingegangen wird, ein paar Vorbemerkungen zur Auswertung. Es handelt sich um eine qualitative Auswertung. Mit 13 Prozessen können keine quantitativen Aussagen getroffen werden. Hinzu kommt, dass fast alle betrachteten Aspekte davon abhängen, wie viel und auf welche Art der Proband gesprochen hat. Aktivitäten können nur kodiert werden, wenn sie erkannt werden. Gerade im Bereich der Metakognition geschieht vieles unausgesprochen. Auch Ideen wurden nur kodiert, wenn sie deutlich wurden. Vor allem in Bezug auf die letzten fünf Spalten können Prozesse daher nur sinnvoll mit einander verglichen werden, wenn sie vom selben Probanden durchgeführt wurden. Selbst dann müssen diese Vergleiche mit äußerster Sorgfalt geschehen, da sich, wie bereits erwähnt, die Aufgaben stark voneinander unterscheiden. Darüber hinaus können die in der viertletzten, vorletzten und letzten Spalte angegebenen Anzahlen nur eine ganz grobe Orientierung geben. Eine hohe Anzahl bedeutet nicht unbedingt ein gutes Vorgehen. Wenn etwa die erste Idee zum Ziel führt, sind keine weiteren nötig. Auch wurde bereits angesprochen, dass Problembearbeiter mit einer hohen geistigen Beweglichkeit ohne Heurismeneinsatz auskommen (Abschnitt 2.4.5). Abgesehen von den genannten Einschränkungen ist ein Vergleich von Interventions- und Kontrollgruppe ohnehin wenig sinnvoll, da unterschiedlichen Persönlichkeitsmerkmale der Probanden bereits bei der ersten Messung für große Unterschiede sorgen.

Eine Übersicht über die verwendeten Heurismen und metakognitive Aktivitäten wird später (in Abschnitt 5.5.4 bzw. 5.5.6) noch gegeben.

5.5.1 Ausführliche Betrachtung eines Bearbeitungsprozesses

Bevor im Detail auf die verschiedenen Aspekte eingegangen wird, soll ein Prozess beispielhaft zusammengefasst werden. Es handelt sich hierbei um Niklas Bearbeitung der Aufgabe zur n-ten Wurzel (vgl. Anhang D). Hierbei wurden alle Aspekte, also Schoenfeld-Episoden (vgl. Abbildung 5.7), Heurismeneinsatz, metakognitive Aktivitäten, Rückgriffe auf Vorwissen, Fehler sowie Lösungsideen benannt und kursiv markiert. Nach der Beschreibung einer Episode (mit Ausnahme der ersten) folgt jeweils ein Abschnitt mit Interpretationen und Kommentaren.

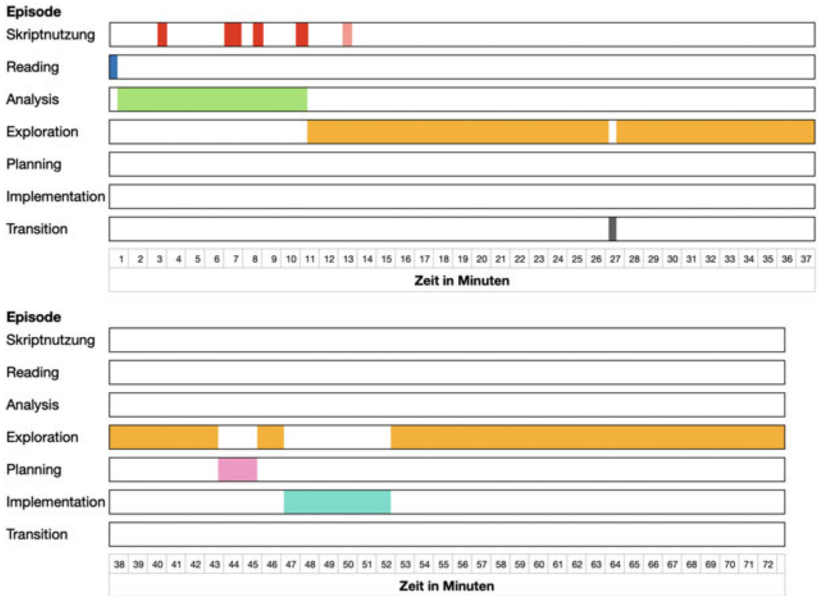

Abbildung 5.7 Episodenkodierung Niklas (*n-te Wurzel*)

Reading (00:00–00:13)

Niklas liest die Aufgabe stumm.

Analysis (00:13–10:24)

Zunächst (00:13) stellt Niklas fest, dass die Folge[10] monoton steigend ist. Bei 01:18 *formuliert* er die gegebene Gleichung in eine andere Schreibweise (als n-te Wurzel) *um* (vgl. Abbildung 5.8 oben). Anschließend schlägt er gezielt im Skript nach, um zu *kontrollieren*, ob diese Schreibweise korrekt ist (02:30–03:10). Dann (03:15) notiert er eine weitere, *fehlerhafte*, Schreibweise (vgl. Abbildung 5.8

[10] Genau genommen handelt es sich hierbei nicht um eine Folge, sondern um endlich viele (N) Zahlen. Hier und im Folgenden wird aber diese Formulierung, die Niklas durchweg verwendet, übernommen.

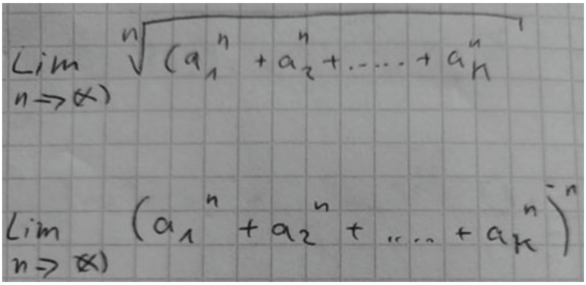

Abbildung 5.8 Niklas Schreibweisen der n-ten Wurzel

unten) und verkündet die Hoffnung (03:52), dass eine der beiden Schreibweisen richtig ist und ihn zum Ziel führt. Hierauf folgt eine zeitlang Schweigen, wobei er zweimal (06:01–06:55) und (07:32–08:05) im Skript blättert. Bei 08:10 entscheidet er sich, *Spezialfälle* für n zu betrachten und schreibt zunächst den Term (in korrekter Schreibweise) für $n = 3$ auf. Nachdem er wieder etwas im Skript geblättert hat (09:48–10:24) fragt er nach einem Skriptausschnitt aus einem anderen Kapitel, das ihm nicht vorlag, in dem bewiesen wird, dass es zu jeder reellen Zahl r eine ganze Zahl z gibt, so dass $z \leq r \leq z+1$ ist. Während der Interviewer diese Stelle sucht, streicht er den Term für $n = 3$ durch und notiert stattdessen den *Spezialfall* $n = 2$ (11:40). Der Interviewer gibt ihm einen Laptop mit der geforderten Skriptstelle, die sich Niklas anschaut (12:16–12:46). Hierbei stellt er mit dem Kommentar „Ich wusste, im Beweis steht da was Ähnliches drin“ fest, dass seine zweite Schreibweise falsch war (*Kontrolle*). Dann vergewissert er sich nochmal beim Interviewer, dass die andere Schreibweise richtig ist (12:51).

Bis hierhin bestehen Niklas Aktivitäten nur darin, die Aufgabe zu verstehen. Das Nachschlagen im Skript dient seinen Aussagen zufolge vermutlich hauptsächlich dazu, zu *kontrollieren*, welche Schreibweise der n-ten Wurzel korrekt ist. Interessant ist hierbei, dass er sich erinnert, etwas Ähnliches in einem Beweis im Skript gesehen zu haben (Da es hier aber nur um eine Schreibweise und keinen Ansatz handelt, wurde nicht das *Analgoieprinzip* kodiert). Darüber hinaus betrachtet er zwei *Spezialfälle* für n, ohne aber konkret an diesen zu arbeiten. Dies folgt in der nächsten Episode.

Exploration (10:25–26:24)

Niklas plant (10:25), einen Faktor aus der Summe auszuklammern, mit dem Ziel „etwas aus der Wurzel herauszuziehen“(*Planungsaktivität*). Er weiß aber

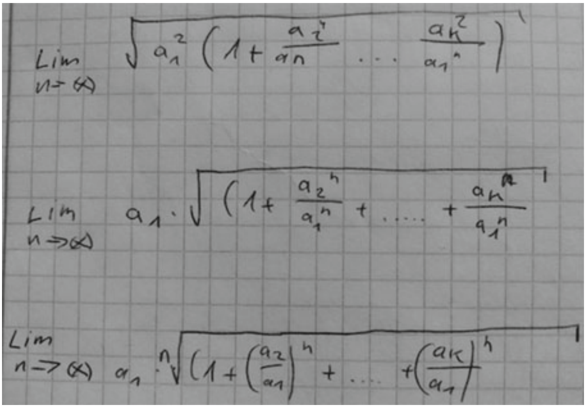

Abbildung 5.9 Herausziehen von a_1

noch nicht, welcher Faktor das sein kann. Nach einiger Zeit (17:56) kommt ihm die *Idee*, a_1^n auszuklammern, was er direkt am *Spezialfall* $n = 2$ durchführt (Abbildung 5.9 oben). Anschließend erinnert er sich, dass die n-te Wurzel einer Konstanten gegen 1 konvergiert (*Rückführungsprinzip*), benennt aber die *Schwierigkeit*, dass er sich noch nicht sicher ist, „wie das ist, wenn man als Exponenten unter der Wurzel auch noch jeweils ein n stehen hat (19:36).“ Im nächsten Schritt (20:11) zieht er a_1 schriftlich aus der Wurzel heraus (Abbildung 5.9). Schließlich stellt er durch *Nutzen aller Voraussetzungen* (21:49) fest, dass durch die Monotonie der Folge die einzelnen Summanden unter der Wurzel „größer Eins“ sind. Zum Ende der Episode *fasst* er seine *bisherigen Ergebnisse zusammen* (24:42).

Erwähnenswert ist, dass an dieser Stelle keine *Planning*-Episode kodiert wurde. Stattdessen wird zu Beginn der Episode eine *Planungsaktivität* kodiert. Wie auf S. 108 f. beschrieben wurde, müsste für eine *Planning*-Episode dem Probanden die grobe Umsetzung klar sein. Da Niklas aber weder zu wissen scheint, welcher Faktor ausgeklammert werden soll, noch, wie ihn das Ergebnis weiterbringt, ist das nicht gegeben. Global gesehen bleibt es zunächst also bei einem Erkunden des Problemraumes durch Manipulation des Terms. Da er aber ein Ziel (etwas aus der Wurzel herausziehen) und auch einen möglichen Weg benennt (einen Faktor ausklammern), liegt eine *Planungsaktivität* vor. Bei (17:56) kommt es nicht zu einer weiteren Planung, es wird aber eine *Idee* benannt, wie der bisherige Plan konkret umzusetzen ist. Des Weiteren ist zum Ende der Episode interessant, dass Niklas (noch) nicht in der Lage ist, die Erkenntnis, dass die einzelnen Summanden größer gleich Eins sind, umzukehren und a_k statt a_1 herauszuziehen, was dazu führen würde, dass die Summanden allesamt kleiner gleich Eins wären (dazu später mehr). Bemerkenswert ist auch, dass er nach anfänglichen Klärungen in der *Analysis*-Episode im gesamten Prozess nicht mehr auf seine Unterlagen zurückgreift. Alle Ideen entstehen aus dem Kopf und werden nicht durch externe Ressourcen angeregt.

Transition (26:24–26:35)

Niklas sagt: „Ich probiere einfach mal einen anderen Ansatz aus“ (*Regulation*).

Wie bereits im letzten Absatz beschrieben, wäre es möglicherweise sinnvoll gewesen, den alten Ansatz weiter zu verfolgen.

Exploration (26:35–42:40)

Niklas nächste *Idee* liegt darin, den Term mit einer 1 zu multiplizieren (28:31). Hierzu schreibt er verschiedene Möglichkeiten auf (Abbildung 5.10). Schließlich sagt er „Ich glaube, ich habe eine Antwort, aber ich denke nicht, dass die richtig ist (33:16 – *Evaluation*).“ Er wiederholt seine schriftlichen Überlegungen mündlich und folgert dass, da $\frac{1}{n}$ (im Exponenten) gegen Null geht, die gesamte

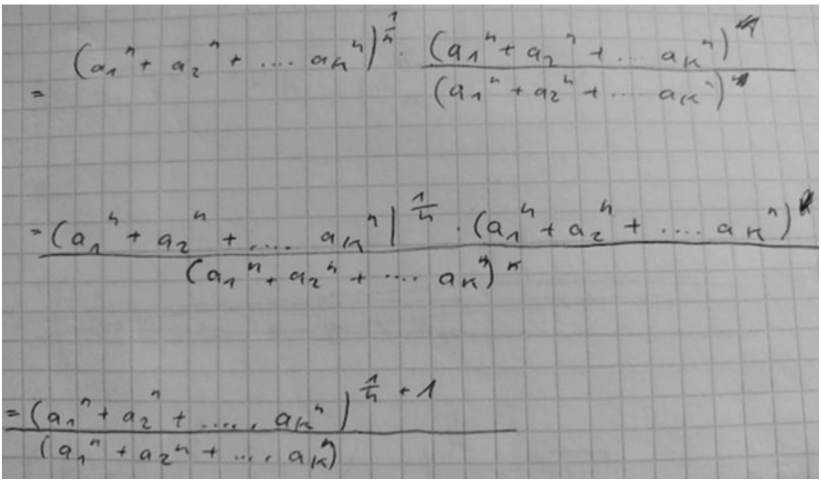

Abbildung 5.10 Multiplikationen der Eins

Folge gegen 1 konvergieren muss (35:19 – *Fehler*). Auf Niklas entsprechende Frage, ob das stimmen kann, antwortet der Interviewer[11], dass dem nicht so ist, weil der Ausdruck unter der Wurzel gegen unendlich geht. Schließlich (38:41) kommt Niklas die *Idee*, den letzten Summanden a_k auszuklammern (vgl. Abbildung 5.11), weil dann die einzelnen Summanden und damit auch ihre n-ten Potenzen kleiner gleich Eins sind. Hieraus folgert er (42:13), dass auch die Zahl unter der Wurzel kleiner als k sein muss.

In diesem Fall führte die *Regulation* des Vorgehens zunächst weiter vom Ziel weg, bevor die ursprüngliche Idee wieder aufgenommen wird, diesmal mit dem größten Summanden. An dieser Stelle hätte mit Hilfe der Grenzwertsätze (wenn der Ausdruck unter der n-ten Wurzel konvergiert, dann kann mit dem Grenzwert weitergerechnet werden) oder der Überlegung, dass die n-te Wurzel einer beschränkten Folge gegen Eins konvergiert, bereits das Ergebnis erreicht werden können. Trotzdem ermöglichen die bisherigen Überlegungen die folgende Episode.

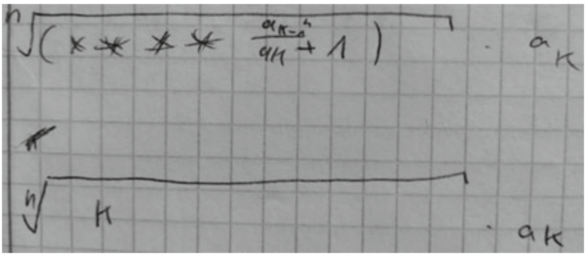

Abbildung 5.11 Herausziehen von a_k

Planning (42:40–44:43)

Nun kommt Niklas auf die Idee, das Quetschlemma (vgl. S. 89) zu verwenden (*Rückführungsprinzip*), hierbei soll nach oben so abgeschätzt werden, dass alle Summanden dem größten (a_k) entsprechen. Er sagt außerdem, dass ihm eine Abschätzung nach unten noch nicht klar ist (43:27 – *Einschätzen des Fortschritts*), bemerkt aber: „Dann würde nach dem Quetschlemma auch diese Folge konvergieren“ (*Voraussicht*).

[11] Eigentlich sollte der Interviewer nicht eingreifen, aber in dieser Situation hat er sich dafür entschieden, wohl auch, weil andere Probanden in ähnlichen Situationen die Bearbeitung abgebrochen haben, in der Überzeugung, eine Antwort gefunden zu haben.

Hier wird ein klares Ziel formuliert (das Nutzen des Quetschlemmas) und auch der globale Grund dieses Ziels ist klar (die Konvergenz der Folge). Außerdem ist, zumindest für die obere Abschätzung, der Weg zu diesem Ziel vorgezeichnet. Es kann also *Planning* kodiert werden. Voraussetzung für die Entstehung dieses Plans ist die Kenntnis des Quetschlemmas.

Exploration (44:43–46:07)

Bevor es zur Umsetzung des Plans kommt, erkundet Niklas noch die nach oben abgeschätzte Folge. Er ist etwas unsicher, was ihren Grenzwert angeht, weil es ihm „nicht plausibel" erscheint (*intuitives Verständnis*), dass sie gegen a_k konvergiert.

Der Plan wird nicht sofort umgesetzt, weil es Zweifel an der Richtigkeit der bisherigen Überlegungen gibt. Das Zögern ist aber nur von kurzer Dauer.

Implementation (46:07–51:41)

Nun lässt Niklas für die Abschätzung nach unten alle Summanden außer dem kleinsten weg (46:07), mit der Erklärung, dass sie alle größer gleich Null sind (Abbildung 5.12 oben). Der Grenzwert dieser Folge ist a_1. Außerdem berechnet er den Limes der bereits ausgewählten größeren Folge (Abbildung 5.12 unten – 48:22). Er hält fest, dass der gesuchte Grenzwert sich zwischen a_1 und a_k befindet (*Einschätzen des Lösungsfortschritts*) und *evaluiert* sein Vorgehen mit den Worten: „Das ist schonmal ein guter Ansatz, das ist besser als nichts (51:26)."

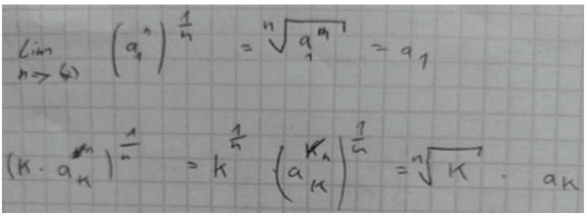

Abbildung 5.12 Abschätzungen der Folge nach unten und oben

Zusätzlich zur Umsetzung des Plans zur Abschätzung nach oben findet Niklas hier eine, bei der Planung noch nicht bekannte, Abschätzung nach unten, die zwar noch nicht zum Ziel führt, zumindest aber das Ergebnis einschränkt. Was er nicht sieht, ist, dass mit einem *ähnlichen* Vorgehen (nämlich dem Weglassen aller Summanden außer dem größten) bereits am Ziel wäre. Die Idee kommt ihm auch im weiteren Verlauf nicht, so dass die Aufgabe schließlich abgegrochen wird.

Exploration (51:41–60:09)

In dieser letzten Exploration werden verschiedene *Ideen* angedacht und mehr oder weniger verfolgt. So bringt Niklas an (52:48), dass jede Teilfolge einer konvergenten Folge gegen denselben Grenzwert konvergiert (*Fachwissen*), verfolgt diese Idee mit dem Kommentar „Ich weiß nicht, ob mich das weiterbringt (53:03)"(*Voraussicht*) aber nicht weiter. Dann (55:09) kommt ihm die *Idee* „dasselbe Spiel" wie bei der Abschätzung nach oben auch bei der Abschätzung nach unten durchzuführen, nämlich jeden Summanden nach unten durch a_1^n abzuschätzen (*Ähnliche Aufgabe*), sagt dann (55:32) aber: „Das brauche ich ja gar nicht machen", weil da, ähnlich wie oben, der Grenzwert a_1 herauskommen wird (*Voraussicht*). Anschließend äußert er Verunsicherung, weil a_k größer gleich den anderen Summanden ist (55:39 – *Benennen von Schwierigkeiten*). Seine nächste *Idee* (56:25) ist, unter der Wurzel eine Folge aus dem Mittelwert von $k \cdot a_1^n$ und $k \cdot a_k^n$ zu bilden. Nachdem er eine solche Folge niedergeschrieben hat, stellt er fest, dass ihn auch das nicht weiterbringt (57:50 – *Evaluation*). Als *Ziel* äußert er: „Ich muss die Folge weiter eingrenzen (58:10)." Die nächste Aussage (58:17) ist etwas schwierig zu interpretieren und wird deswegen wörtlich wiedergegeben: „Das blöde ist, dass ich jetzt nicht z. B. die Hälfte der Anzahl der Folgenglieder von a_k nehmen kann, weil ich nicht definitiv sagen kann, dass die immer noch größer ist als die Folge, welche nur aus a_1 besteht, weil wenn theoretisch jeder Wert gleich dem Nachfolger ist, wäre das sozusagen ne falsche Behauptung. Daher muss ich bei der Anzahl von meinen Folgengliedern gleich bleiben. Ich kann nur verändern, welche Folgenglieder ich nehme." Etwas später (59:06) sagt er, dass er die folgende *Idee* für unwahrscheinlich hält, weil sie sehr aufwändig ist und sehr lange dauern würde (*Voraussicht*): Er beschreibt ein Verfahren, bei dem zunächst alle Summanden gleich a_k^n abgeschätzt werden und nach und nach einzelne Summanden, beginnend beim ersten wieder durch den ursprünglichen Summanden (in dem Fall durch a_1^n) ersetzt werden. Bei 60:09 fragt er den Interviewer nach einem Tipp, woraufhin dieser immer stärker in den Prozess eingreift, da er der Meinung war, dass die neuen Ideen weiter vom Ziel wegführen und der Bearbeitungsprozess nach über einer Stunde zu einem für Niklas befriedigenden Abschluss geführt werden sollte. Die Beschreibung des Prozesses endet deswegen hier.

Die in dieser letzten Exploration entstehenden *Ideen* sind weniger zielführend als das, was vorher im Prozess passiert. Teilweise ist auch kaum nachvollziehbar, worauf genau Niklas hinaus will. Man hat das Gefühl, er hätte sein Pulver verschossen und klammert sich gegen Ende des Prozesses an Strohhalme. Allerdings zeigt er gute *Voraussicht* bei der Einschätzung dieser Ideen. Erstaunlich ist nach wie vor, dass er nicht auf die Idee kommt, alle bis auf den letzten Summanden wegzulassen, zumal er das Prinzip einer *ähnlichen Aufgabe* ja bei 55:09 anwendet und dies nur noch für den Ansatz in 46:07 machen müsste.

5.5.2 Schoenfeld-Episoden

Ein Punkt, der gleich ins Auge fällt, weil er am Anfang der Prozesse steht, dem aber deswegen nicht zu viel Bedeutung zugemessen werden sollte, ist der, dass alle Prozesse entweder mit *Reading* oder mit *Analysis* beginnen. Der einzige Unterschied ist, dass bei letzteren Prozessen die Aufgabe nicht erst komplett gelesen wird, sondern bereits beim Lesen analysiert bzw. systematisiert wird.

So schreibt beispielsweise Jan bei seiner Bearbeitung der Rangaufgabe Schritt für Schritt die einzelnen Teile der Aufgabenstellung mit eigenen Formulierungen nieder (vgl. Abb. 5.13).

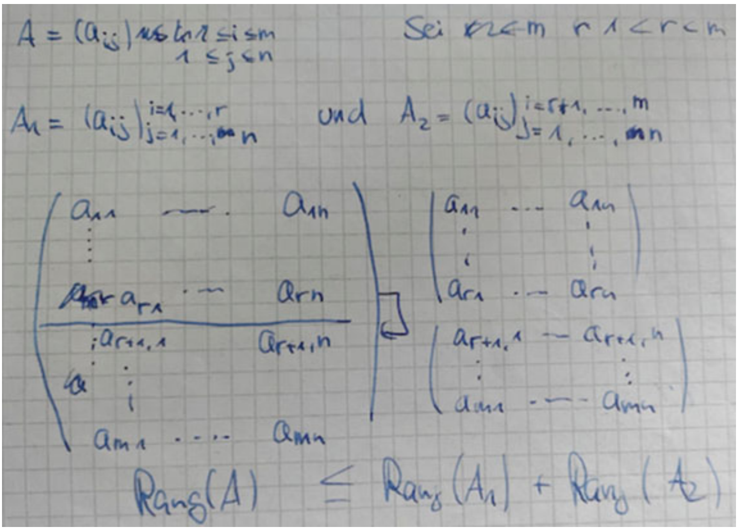

Abbildung 5.13 Jans Zusammenfassung der Aufgabenstellung

Dass hierbei bereits eine Analysetätigkeit erfolgt, lässt sich daran festmachen, dass er die Aufgabe nicht wörtlich abschreibt (Die genaue Formulierung dieser Aufgabe 5 findet sich zum Vergleich in Anhang D), sondern paraphrasiert, bevor er weiterliest, falsche Indizes korrigiert, vor allem aber daran, dass er die Matrizen A, A_1 und A_2 konkret aufschreibt, bevor er sich der Behauptung (der eigentlichen Rangungleichung) zuwendet.

Auch Julia gibt bei Ihrer ersten Bearbeitung (Grenzwert L) die Aufgabe direkt mit eigenen Worten wieder. Wenngleich sie keine eigenen Formulierungen aufschreibt, wird durch die Paraphrasierung deutlich, dass sie bereits in die Analyse eingestiegen ist.

Da Aufgaben im universitären Kontext in der Regel keine redundanten Informationen geben, kann dieses Vorgehen durchaus sinnvoll sein und sogar als ein Zeichen strukturierten Vorgehens gesehen werden[12]. Bei Aufgaben im schulischen Kontext (z. B. Sachaufgaben) ist es im Gegensatz dazu in der Regel aber ratsam, zunächst die Aufgabe komplett zu lesen, um wichtige von unwichtigen Informationen trennen.

Welche weiteren Informationen kann man aus den Episoden herauslesen? Ein Verhalten, das Schoenfeld bei seinen Betrachtungen von Problembearbeitungsprozessen hervorhebt, bezeichnet er als *Wild Goose Chase*. Hiermit meint er solche Prozesse, in denen „[...] students picked a solution direction, and then pursued that approach until they ran out of time“ (Schoenfeld, 1992, S. 195). Es wird also eine Richtung eingeschlagen, die dann ohne wesentliche metakognitive Steuerung beibehalten wird. Im Hinblick auf die Episoden benennt er diejenigen Prozesse als *Wild Goose Chases*, die nur die Episoden *Reading* und *Exploration* enthalten. Rott ordnet dieser Kategorie auch solche Prozesse zu, die zusätzlich *Analysis* enthalten und merkt an, dass auch in den von Schoenfeld als Beispiel für *Wild Goose Chases* genannten Prozessen eigentlich eine kurze Analyse kodiert werden müsste (Rott, 2013, S. 302). Mit anderen Worten: Alle Prozesse, die weder Planung und Implementation, noch Verifikation enthalten, gelten als *Wild Goose Chases*.

Bei den in der vorliegenden Arbeit betrachteten Prozessen ist allerdings das von Schoenfeld beschriebene Verhalten so nicht aufgetaucht: Meistens wurden im Prozess mehrere Ansätze durchdacht. Bei erfolglosen Bearbeitungen war nicht das Problem, dass ein Ansatz zu lange verfolgt wurde, sondern dass gar nicht erst einer

[12] Man könnte hier positive Auswirkungen auf die Lösungsqualität oder Verbindungen zum Grad der metakognitiven Aktivitäten (da letztere auch mit Strukturierung der eigenen Bearbeitung zu tun haben) vermuten. Anhand der beiden betrachteten Prozesse lassen sich allerdings keine Aussagen treffen.

gefunden wurde. Hierfür kann es mehrere Gründe geben. Zum einen sind die hier betrachteten Aufgaben stärker begrifflich als rechnerisch geprägt. Es gibt also wenig bis keine Möglichkeiten, sich im Berechnen wenig hilfreicher Werte zu verlieren[13]. Zum anderen waren die Prozesse, die Schoenfeld (1992) beobachtet hat, durch die Aufnahmetechnik zeitlich auf etwa 20 Minuten beschränkt. Da dies bei unseren Prozessen nicht der Fall war, konnte die Zeit auch nicht ablaufen. Die Bearbeitungen wurden erst dann von den Studierenden selbst beendet, wenn sie keine Ideen bzw. keine Energie mehr hatten. So war die Möglichkeit, mehrere Ansätze durchzuspielen stärker gegeben. Auf Momente, in denen eine besser metakognitive Steuerung Zeit erspart hätte, wird in Abschnitt 5.5.6 genauer eingegangen.

Trotzdem scheinen die Prozesse, die Planung und Implementation enthalten, eine Sonderstellung einzunehmen. Es ergibt sich die

Frage 1: Wie wirkt sich das Vorhandensein der Episoden *Planning* und *implementation* auf die Lösungsqualität der Bearbeitung aus?

Ein Blick auf die Übersichtstabelle lässt einen positiven Effekt vermuten, haben doch, mit einer Ausnahme (Jan 1), diese Prozesse mindestens Lösungsqualität 2 und alle anderen eine geringere. An dieser Stelle ist allerdings Vorsicht geboten. Ein Zitat aus dem Kodiermanual besagt zur Episode *Implementation* (vgl. Abschnitt 5.3.1): „Gibt es bei der Durchführung noch Unsicherheiten bzw. ist an einigen Stellen noch nicht klar, wie es weiter geht, wird *Exploration* kodiert“. Das kann bedeuten, dass bei erfolglosen Bearbeitungen (niedrige Lösungsqualität) eher *Exploration* kodiert wird, auch wenn ein Back vorhanden ist und umgekehrt bei erfolgreichen, bei denen zumindest ein Teil ohne Unsicherheiten abgelaufen ist, eher *Planning* und *Implementation*. Genau das zeigt sich auch beim einzigen Prozesses, der Planung, aber keine Implementation enthält (Manuel 1).

Zur qualitativen Beantwortung dieser Frage wird im Folgenden genauer auf die entsprechenden Stellen (teils durch ausführliche Analysen, teils durch Zusammenfassungen) in ausgewählten Prozessen, beginnend mit Jans Bearbeitung der Aufgabe zur Rangungleichung (siehe Anhang D) geschaut. Dieser Prozess nimmt insofern

[13] Zum Teil geschieht das in Maliks Bearbeitung der Quetschlemma-Aufgabe, auf die in Abschnitt 5.5.5 genauer eingegangen wird. Er kommt aber durch einen Wechsel des Ansatzes schließlich doch recht schnell zum Ziel. Auch Jan beschäftigt sich bei seiner Bearbeitung der Aufgabe zur *konstanten Funktion* sehr lange mit einem nicht-zielführenden Ansatz. Dieser Prozess liegt noch am nächsten an einer *Wild Goose Chase* (und das, obwohl er *Planung* und *Implementation* enthält! – Vgl. hierzu Abschnitt 5.5.6). Grundsätzlich denkbar ist eine lange Rechnung auch bei der Aufgabe zur linearen Unabhängigkeit, die Andreas bearbeitet.

eine Sonderstellung ein, dass er der einzige ist, bei dem direkt auf die Analyse eine Planung folgt, was darauf hindeutet, dass der Proband von vornherein eine Idee hat, wie die Aufgabe zu lösen ist.

Planning (04:25–05:12)

Jan sagt (04:25): „Entweder: Wenn ich jetzt hier (zeigt auf die Matrix A – vgl. Abbildung 5.13) n unabhängige Zeilen und Spalten habe und angenommen die beiden (zeigt auf zwei Zeilen der Matrix A) wären linear abhängig, dann wären sie hier (zeigt auf die Matrizen A_1 und A_2) in unterschiedlichen Matrizen und würden sich dementsprechend aufaddieren, so dass das hier (zeigt auf die rechte Seite der Rangungleichung) mehr wäre.“ Dann (04:50) spricht er noch den *Spezialfall* an, dass alle Zeilen der Matrix A linear unabhängig sind, woraus folgt, dass die Matrizen A_1 und A_2 ebenfalls nur aus linear unabhängigen Zeilen bestehen.

Voraussetzung (*Fachwissen*) für Jans Vorgehen ist die Vorstellung des Rangs einer Matrix als Anzahl ihrer linear unabhängigen Zeilen (bzw. Spalten). Wenngleich seine mündlichen Äußerungen formal nicht perfekt sind (zwei linear abhängige Zeilen in A müssen sich nicht in jedem Fall auf A_1 und A_2 aufteilen) lassen sie doch erkennen, dass eine informelle Grundidee zur Lösung der Aufgabe vorhanden ist. Zwar ist an dieser Stelle noch nicht klar, ob ein Plan zur formalen Umsetzung dieser Idee vorhanden ist, dies wird aber in der folgenden Episode deutlich.

Implementation (05:12–09:13)

Jan betrachtet zunächst (05:12) den *Spezialfall*, dass alle Zeilen linear unabhängig sind. Hierzu schreibt er seine Überlegungen auf (Abbildung 5.14).Bei 08:40 äußert er, dass er ein „Problem bei den Spalten“ hat, welches er aber nicht in Worte fassen kann und auf das er nicht weiter eingeht.

Das Problem mit den Spalten, das Jan anspricht, liegt vermutlich darin, dass wenn A mehr Spalten als Zeilen hat, die Überlegungen nicht funktionieren. In dem Fall könnten aber nicht alle Zeilen linear unabhängig sein, womit er sich nicht mehr im *Spezialfall* befände. Mit dieser Überlegung hätte Jan es sich etwas einfacher machen können. Trotz kleiner Unsicherheiten (die Anzahl der Zeilen von A_2 muss $m - r$ sein), gelingt die Umsetzung des Plans für den *Spezialfall* aber befriedigend.

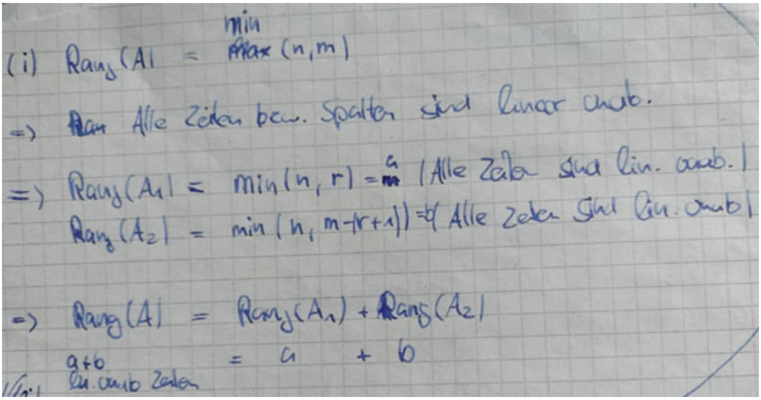

Abbildung 5.14 Jans Überlegungen zum vollen Rang

Exploation (09:13–11:11)

Jan stellt fest (09:13), dass er jetzt nur noch untersuchen muss, was passiert, wenn A „nicht vollen Rang besitzt.“ Hierzu schaut er ins Skript (09:54–10:30), was ihn daran erinnert (10:19), dass sich der Rang einer Matrix nicht durch Anwenden des Gauss-Verfahrens verändert. Diese Erkenntnis kommentiert er aber mit „Das bringt mir aber nicht viel (10:35 – *Voraussicht*).“

Es wird deutlich, dass Jan hier noch keinen genauen Plan verfolgt, was sich auch darin zeigt, dass er zur weiteren Ideenfindung auf das Skript zurückgreift.

In der folgenden *Implementation* (11:11–12:50) geht er wieder auf den vorher betrachteten *Spezialfall* zurück, wobei er sein bisheriges Vorgehen noch etwas sauberer mündlich zusammenfasst. Später im Prozess kommt er in einer weiteren *Planning*-Phase (15:45–16:12) auf seine ursprüngliche Idee zurück, dass sich linear abhängige Zeilen in A auf A_1 und A_2 aufteilen können. Es gelingt ihm leider nur teilweise, diesen Plan umzusetzen. Am Ende der *Implementation* (16:12–20:14) steht zumindest die Aussage „Jede linear unabhängige Zeile in A muss zwangsläufig linear unabhängig in A_1 bzw. A_2 sein.“ Der Rest des Prozesses (bis 32:01) hat wieder *explorativen* Charakter, wobei es Jan nicht gelingt, die bisherigen Erkenntnisse auf die Rangungleichung zu übertragen. Man hat gesehen, dass hier von vornherein ein Plan vorlag (informell hat Jan direkt sehr gut verstanden, warum die Aussage gilt). So konnte zumindest ein Spezialfall bewiesen werden und auch zum Beweis der allgemeinen Aussage hat nicht viel gefehlt.

Dass informelles Verständnis der Aufgabe nicht unbedingt dafür ausreicht, dass *Planning* kodiert wird (und dass ein wesentlicher Lösungsfortschritt erzielt wird), zeigt Julias Bearbeitung der Aufgabe zur Monotonie (Siehe Anhang D). Nachdem sie sich ein Koordinatensystem aufgezeichnet hat, sagt sie: „Jeder Wert auf meiner y-Achse wird nur einmal getroffen, weil's ja injektiv ist und dann kann ich auch dazwischen keinen Graphen haben, der irgendwie so hin- und hertanzt (11:13)" und zeichnet einen nicht-monotonen stetigen Graphen ein. Außerdem äußert sie die Vermutung, dass „das irgendwie mit dem Zwischenwertsatz zu zeigen sein wird (11:36)." Da sie aber keine Idee hat, wie genau der ZWS hier angewendet werden kann, wurde hier zwar eine metakognitive *Planungsaktivität* kodiert, nicht aber die Episode *Planning*. Bei (12:01) benennt sie noch die *Schwierigkeit*, dass der ZWS nur für kompakte Intervalle gilt, während in der Aufgabe von einem beliebigen Intervall die Rede ist. Später (14:12) merkt sie an, dass alle in der Aufgabe vorkommenden Begriffe auch im ZWS und dessen Beweis vorkommen, was ihre Vermutung stärkt, dass dieser herangezogen werden muss. Nach einiger Zeit, in der sie keine Fortschritte gemacht hat, sagt sie, dass sie die Aufgabe nicht lösen kann (16:19), obwohl sie sieht, „dass das hier (zeigt auf den ZWS im Skript) alles drin steckt und ich sehe, dass ich mich damit der Aufgabe nähern könnte, aber keine Idee, wie ich das mathematisch aufschreiben muss. Ich hab auch noch nichtmals ne Idee, wie ich mir graphisch den Beweis überlegen soll." Etwas später (18:54) bricht sie die Bearbeitung ab. Hier wurde das Grundprinzip der Aufgabe zwar verstanden, aber kein Plan gefunden, diese formal oder graphisch zu beweisen, weswegen keine *Planning*-Episode kodiert wurde.

Ein Beispiel, bei dem *Planung* und *Implementation*, zumindest zu einem Teilziel geführt hat, wurde weiter oben bereits betrachtet (113 ff.). Niklas hat hier mit Hilfe von Abschätzungen und dem Quetschlemma ein Intervall gefunden, in dem sich der Grenzwert befinden muss. Eine kleine Korrektur der Abschätzung hätte bereits zur Lösung geführt.

Bei einer weiteren Bearbeitung von Jan, diesmal zur Fixpunkt-Aufgabe (siehe Anhang D), zeigt sich, dass *Planning* und *Implementation* nicht zwingend zielführend sein muss, in diesem Fall, weil bereits der Plan fehlerhaft ist. Jan „wählt" (15:40) für den gesuchten Fixpunkt $m := f^{-n}(m)$ und zeigt in der Folge, dass dann, wie gefordert $f^n(m) = m$ ist. Hierbei geht er sehr planvoll vor und zeigt sogar, dass die bijektiven Funktionen mit der Verknüpfung eine Gruppe sind. Nachdem er damit fertig ist, glaubt er die Aufgabe gelöst zu haben. Leider liegt hier aber ein Zirkelschluss vor, denn ein m, für das $m = f^{-n}(m)$ ist, gibt es nur (genau) dann, wenn $f^n(m) = m$ ist. Das ist aber gerade zu zeigen.

Die Bearbeitung der Aufgabe zum *Grenzwert von Quotient und Wurzel* (siehe Abschnitt 5.2.3) von Manuel stellt ein Beispiel dafür, dass einer *Planning*-Phase nicht zwingend eine *Implementation* folgen muss. Nachdem er vermeintlich gezeigt hat, dass $L = 1$ sein muss (das gilt nur, wenn die Folge a_n konvergiert), fasst er folgenden Plan:

Planning (33:09–33:45)

Er sagt: „Wenn ich grad bewiesen habe, dass $L = 1$ ist, muss ich doch einfach nur zeigen, dass – egal was für ne Folge – davon die n-te Wurzel, dass das auch gegen 1 konvergiert (33:09)“ und „Ich zeig das erstmal für ne beliebige Zahl: n-te Wurzel von c (33:27).“

Anschließend schreibt er sauber auf, was er zeigen möchte, *evaluiert* den Ansatz dann aber mit den Worten „Das [die n-te Wurzel von c] konvergiert nicht gegen 1, das konvergiert gegen 0“ und verwirft diesen.

Zusammenfassend kann bezüglich der **Frage 1** gesagt werden, dass bei den von uns analysierten Prozessen die Existenz einer *Planning*-Episode dann zum Erreichen eines Teilziels geführt hat, wenn der Plan (a) nicht fehlerhaft war und (b) auch tatsächlich *implementiert* wurde. Andererseits haben Prozesse ohne *Planning* allesamt niedrige Lösungsqualität (L0 oder L1). Wie aber bereits weiter oben angemerkt wurde, könnte dieses Ergebnis mit der Tendenz zusammenhängen, erfolgreiche Aktivitäten eher als *geplant* zu kodieren als erfolglose.

Außerdem fällt bei Betrachtung der Prozesse auf, dass eine lang andauernde *Analysis*-Episode ein Hinweis darauf sein könnte, dass der jeweilige Bearbeiter Verständnisschwierigkeiten aufgrund mangelnden Vorwissens haben könnte. Dem wird in Abschnitt 5.5.5 weiter nachgegangen.

Interessant ist auch, dass keiner der Prozesse mit *Planung* und *Implementation* von vornherein das Skript zur Ideenfindung verwendet hat (U3a). Hierauf wird in Abschnitt 5.5.3 eingegangen.

Zuletzt sei erwähnt, dass bei keiner der Bearbeitungen eine Episode der *Verification* kodiert wurde. Es ist durchaus denkbar, dass das Setting der Interviews darauf Einfluss hatte. Da der Interviewer im Raum saß und den Probanden klar war, dass nach der Bearbeitung noch über die Aufgabe gesprochen wurde, sahen sie möglicherweise keine Notwendigkeit, das Ergebnis noch zu verifizieren.

5.5.3 Umgang mit dem Skript

Frage 2: Welchen Einfluss hat der Umgang mit dem Skript auf die Bearbeitungsqualität des Prozesses?

Wie bereits erwähnt, scheint planvolles Vorgehen mit Ideenfindung ohne Hilfe des Skriptes einherzugehen. Außerdem sieht man, dass diejenigen Probanden, die sich von Anfang an sehr stark am Skript orientieren (U3a), nur eine Lösungsqualität von 0 oder 1 erreichen. Nun wird es wahrscheinlich nicht so sein, dass man diesen Studierenden nur das Skript wegnehmen muss, damit sie erfolgreicher werden. Es scheint aber so zu sein, dass Probanden, die sich so gut mit den fachlichen Zusammenhängen des Problems auskennen, dass sie nicht oder nur wenig auf das Skript zurückgreifen müssen, zielführendere Prozesse durchlaufen.

Aufgrund der geringen Zahl der betrachteten Prozesse, lässt sich keine quantitative Aussage treffen. Es ist allerdings möglich, die Ideen, die mit Hilfe des Skriptes entstanden sind, genauer zu betrachten und deren Nutzen einzuschätzen. In Abschnitt 5.5.5 werden außerdem die Ideen, die entscheidend zur erfolgreichen Problembearbeitung beigetragen haben, unter die Lupe genommen. Ohne zu viel vorwegnehmen zu wollen, kann an dieser Stelle bereits gesagt werden, dass keine davon aus Arbeit mit dem Skript oder anderen externen Ressourcen entstanden ist.

Die Interpretation der Arbeit mit dem Skript hat sich in der Praxis als schwierig erwiesen, da die Probanden trotz lauten Denkens die betrachteten Ausschnitte meistens nicht vorlesen. Dadurch ist nicht immer ganz klar, welche Stelle der aufgeschlagenen Seite sie sich gerade anschauen. Daher werden im Folgenden nur wenige Beispiele betrachtet, bei denen bestimmte Schlagworte aus dem Skript genannt wurden, wohlwissend, dass es sich hierbei bereits um Stellen handelt, die die Probanden aus verschiedensten Gründen bereits für erwähnenswert hielten. Es wurde also durchaus eine Vorauswahl getroffen.

Zunächst gibt es zwei Beispiele, bei denen Skriptausschnitte möglicherweise für Verwirrung bzw. eine falsche Vorstellung eines Begriffes gesorgt haben.

Zum einen stößt *Patrick* bei seiner Bearbeitung der Aufgabe zur *Umkehrung der Grenzwertsätze* (siehe Anhang D) direkt zu Beginn (02:08) auf den Begriff der *bestimmten Divergenz*[14]. Im weiteren Verlauf äußert er immer wieder, dass eine divergente Folge gegen unendlich läuft. Besonders deutlich wird, dass er sich auf das Skript bezieht, als er sagt: „Jetzt weiß ich aus der Divergenz, dass $x_n > c$ sein muss, um divergent zu sein (16:57).“ Den Fall der unbestimmten Divergenz hat er offenbar zu diesem Zeitpunkt (und wahrscheinlich auch zu allen anderen) nicht auf dem Schirm.

Während sich Patricks Überlegungen ungewollt auf einen Spezialfall konzentrieren, führt bei *Jonas* (Aufgabe *Quetschlemma* – vgl. Abschnitt 5.2.1) eine Fehlin-

[14] Die Stelle im Skript lautet wörtlich: „Eine Folge $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R}$ heißt *bestimmt divergent gegen* $+\infty$ (bzw. *gegen* $-\infty$), wenn zu jedem $c \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $x_n > c$ (bzw. $x_n < c$) für alle $n \geq N$.“

terpretation zu falschen Vorstellungen, die den Problembearbeitungsprozess massiv behindern. Auch er liest zu Beginn (02:06) eine Definition („Eine Folge $\{x_n\}n \subset \mathbb{R}$ nennen wir *konvergent gegen* $\alpha \in \mathbb{R}$, wenn $\{x_n - \alpha\}_n$ eine Nullfolge ist"). Später im Prozess (19:57) schreibt er auf: „a_n, b_n, c_n Nullfolgen." Hier wurde offenbar die richtige (wenngleich etwas ungewöhnlich formulierte) Information aus dem Skript falsch verstanden.

Weder Jonas noch Patrick konnten Lösungsfortschritt erzielen, was sicherlich nicht nur an ihrem Umgang mit dem Skript lag. Es zeigt sich jedoch, dass gerade Studierende, die bereits unsicher (und deswegen vielleicht auf die Hilfe des Skriptes angewiesen) sind, auch Schwierigkeiten haben, Informationen aus dem Skript sinnvoll einzuordnen und zu verwerten.

Weitere Begriffe, die bei vielen Prozessen zur Konvergenz aus dem Skript heraus genannt werden, aber bei der Bearbeitung der entsprechenden Aufgaben (*Umkehrung der Grenzwertsätze*, *Quetschlemma*, *n-te Wurzel* und *Grenzwert von Quotient und Wurzel*), zumindest bei üblichen Lösungswegen, keine Hilfe sind, sind die *Teilfolge* und die *Intervallschachtelung*. In den meisten Fällen werden diese Begriffe nur benannt und eine wirkliche Arbeit mit diesen Ideen ist nicht zu erkennen. Ob das daran liegt, dass metakognitive Kontrollentscheidungen (vgl. Abschnitt 5.5.6) getroffen wurden oder ob die Probanden einfach keinen Weg gefunden haben, hiermit umzugehen, ist meist nicht ersichtlich. Für die zweite Variante würde die eben aufgestellte These, dass Studierende, die viel mit dem Skript arbeiten eher unsicher im Umgang mit den Begriffen, Zusammenhängen und Verfahren sind. Exemplarisch soll im Folgenden ein Ausschnitt aus einer *Exploration*-Episode von *Manuel* wiedergegeben werden, der die Aufgabe zum *Grenzwert von Quotient und Wurzel* (vgl. Abschnitt 5.2.3) bearbeitet und hierbei auf das Skript zurückgreift. Der gesamte Prozess dauert 45:37 Minuten, hiervon arbeitet Manuel knapp ein Drittel (13:23 Minuten) mit dem Skript (vgl. Abbildung 5.15).

Bevor er das erste Mal zum Skript greift (07:52), hat Manuel sich ohne große Fortschritte auf die Untersuchung der Quotientenfolge konzentriert und scheint hier auch fortfahren zu wollen. Nach kurzem Lesen verweist er (08:19) auf eine Stelle im Skript (eine Folgerung aus den Grenzwertsätzen, die besagt: „Es gelte $a_n \to a$ und $b_n \to b$ bei $n \to \infty$ mit $b \neq 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$; ferner konvergiert die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq n_0}$ gegen $\frac{a}{b}$" und folgert daraus (08:46): „Dann wäre $L = \frac{\lim(a_{n+1})}{\lim(a_n)}$" und fügt hinzu: „Theoretisch sollte $a_{n+1} = a_n$ sein – ja, zumindest der Grenzwert sollte derselbe sein (08:55)" (beides gilt nur, wenn a_n konvergiert). Wenig später (09:32) stellt Manuel fest: „Wenn ich beweisen kann, dass die dieselben sind, ergibt sich für L, dass es gleich 1 ist." Sein Ziel ist also zunächst, zu zeigen, dass „der Limes von a_{n+1} [...] der gleiche ist von Limes a_n

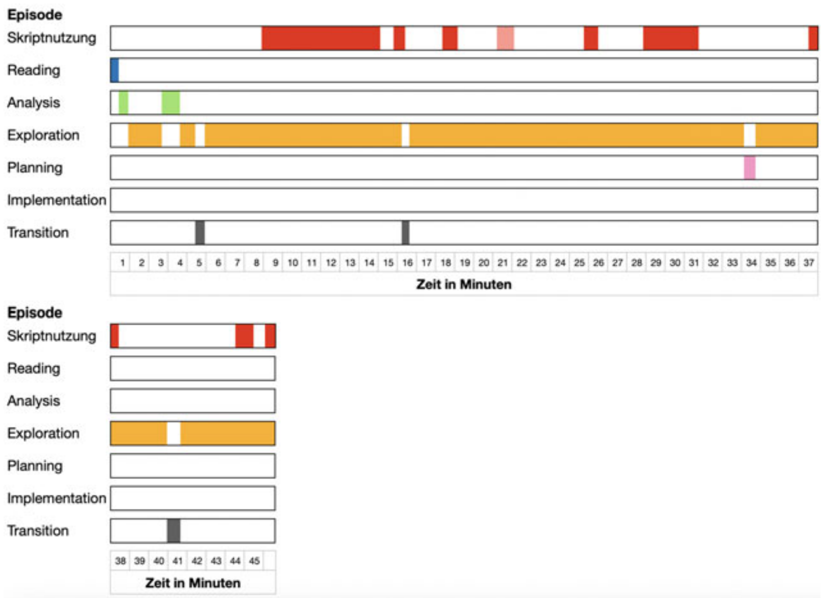

Abbildung 5.15 Episoden Manuel

(10:11).“ Nach weiterem stummen Blättern im Skript sagt er: „Vielleicht könnte ich ja a_{n+1} als konvergente Teilfolge[15] von a_n aufschreiben (11:42)“ und etwas später: „Dann müsste ich jetzt, glaube ich, Intervallschachtelung machen (12:04).“ Etwas weiter unten im Skript wird der Auswahlsatz, der besagt, dass jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt, mit Hilfe des Intervallhalbierungsverfahrens, bei dem ein durch die Beschränkung der Folge vorgegebenes Intervall immer wieder halbiert wird, wobei in mindestens einer Hälfte unendlich viele Folgenglieder liegen müssen, bewiesen. Diesen schaut er sich ab (12:26) laut eigener Aussage etwas ausführlicher an. Bei (13:09) äußert er noch Bedenken (*Voraussicht*): „Intervallschachtelung – Ich weiß nicht, ob ich das für so ne allgemeine Folge machen kann. Ich muss ja immer das Intervall nehmen, was unendlich viele Punkte in sich hat“, sagt aber schließlich (13:36): „Ich glaube, ich kann das machen.“ Bei (14:04)

[15] Auf der Seite, die er gerade aufgeschlagen hat, steht die Definition einer Teilfolge: „Eine Folge $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ heißt „Teilfolge“ der Folge $(a_n)_{p\in\mathbb{N}}$, falls es eine Zuordnung $p \to n_p \in \mathbb{N}$, wobei $p \in \mathbb{N}$, gibt, mit $n_1 < n_2 < \cdots < n_p < n - p + 1 < \cdots$, sodass $b_p := a_{n_p}$ für alle $p \in \mathbb{N}$ gilt.“

löst er sich vom Skript und überlegt, wie er das Startintervall wählen soll. Schließlich (14:36) schreibt er, dass er $I_1 = [0; \frac{L}{\lim(a_{n+1})}]$ wählt und blättert anschließend (14:46) wieder im Skript, bis er sagt: „Das muss ich, glaub ich, gar nicht machen. Ich glaube, das gilt einfach, dass $a_{n+1} = a_n$ ist – also zumindest, dass sie gegen denselben Grenzwert konvergieren (15:13)“ und seine Versuche, dies zu beweisen, abbricht.

Hier sieht man zunächst, dass Manuel nach Betrachten der Grenzwertsätze fälschlicherweise vermutet, dass $L = 1$ sein muss. Ob er hierbei direkt vom Skript auf diese falsche Fährte gebracht wurde, ist fraglich, da er bereits vor dem hier wiedergegebenen Abschnitt die Grenzwertsätze erwähnt. Etwas später bringt ihn das Skript auf die Idee, a_{n+1} als Teilfolge von a_n zu betrachten. Je nach Definition des Begriffes kann das möglich sein. So wie die Definition im Skript steht (vgl. Fußnote), ginge es tatsächlich mit Hilfe der Zuordnung $p \to p - 1$. Daraus würde direkt folgen, dass die Folgen (falls vorhanden) denselben Grenzwert haben müssen. Diese Zuordnung sucht Manuel aber nicht, weil er (vermutlich durch den folgenden Beweis des Auswahlsatzes) auf die Idee gebracht wird, eine Intervallschachtelung anzuwenden. Zwar zweifelt er bei (13:09) kurz daran (ob sein Zögern darauf zurückzuführen ist, dass eine Intervallschachtelung nur bei beschränkten Folgen sinnvoll ist oder ob er nur nicht weiß, wie er eine solche umsetzen soll, wird nicht klar), versucht aber noch einige Zeit, sein Zwischenziel auf diese Weise zu erreichen. Diese Versuche bricht er aber nach einiger Zeit ab. Hier sieht man, wie das Skript Ideen evozieren kann, die kaum oder nur mit großem Aufwand zu realisieren sind (man könnte sicherlich beweisen, dass $[0; \frac{L}{\lim(a_{n+1})} + \varepsilon]$ für ein geeignetes ε unendlich viele Folgenglieder von a_n enthält) und dabei Zeit und kognitive Kapazitäten beanspruchen. Manuels Ziel, zu zeigen, dass a_n und a_{n+1}, wenn sie konvergieren, denselben Grenzwert haben, lässt sich vergleichsweise schnell über die Definition der Konvergenz zeigen.

Auch Julia arbeitet bei derselben Aufgabe (vgl. Abschnitt 5.2.3) recht lange mit dem Skript (20:18 von insgesamt 40:44 Minuten). Diese Arbeit soll im Folgenden kurz zusammengefasst werden (vgl. auch 5.16): In der ersten Hälfte der Bearbeitung geht sie das Kapitel zur Konvergenz im Skript Schritt für Schritt (von 01:29 bis 03:56, 05:45 bis 07:21 und von 08:04 bis 10:39) durch. Unter anderem stößt sie auf die Grenzwertsätze (02:16), die sie zu der Fehlannahme (oder wohlwollend betrachtet zum *Spezialfall*) führen, dass $L = 1$ ist. Hierbei entdeckt sie (09:11) in einem Beweis aus dem Skript (im Gegensatz zu Manuel) auch die Bemerkung, dass „mit $a_n \to a$ auch $a_{n+1} \to a$ bei $n \to \infty$ gilt.“ Später zieht sie auch das Internet zu Rate (30:19 bis 32:20), wobei hier nicht klar wird, was genau sie sich anschaut (einer vorherigen Bemerkung zufolge, sucht sie vermutlich nach hilfreichen Beispielen von Folgen). Von 33:39 bis zum Ende arbeitet sie wieder mit dem Skript. Hierbei

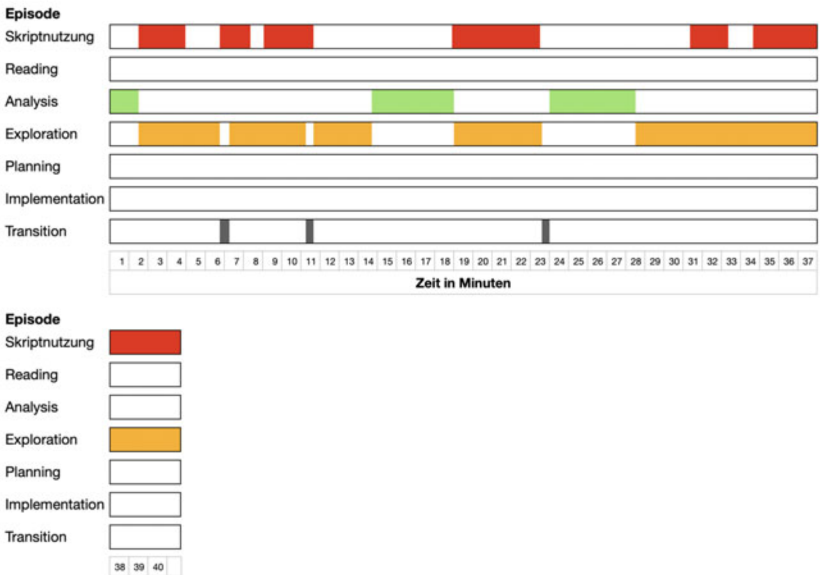

Abbildung 5.16 Episoden Julia

kommt sie auf die Idee: „Es geht um die Monotonie der Konvergenz (34:05)“ und schlägt anschließend (!) die Stelle im Skript auf, an der der Satz zur Monotonen Konvergenz (monotone und beschränkte Folgen sind konvergent) und dessen Beweis steht. Fast bis zum Ende des Prozesses beschäftigt sie sich mit dem Begriff der Monotonie (sowie der Beschränktheit), zunächst mit Hilfe des Skriptes, dann (ca. ab 37:00) mit Hilfe des Internets. Als Abschlussbemerkung (40:29) sagt sie „Das Prinzip der Intervallschachtelung habe ich ja noch nicht so richtig nachgearbeitet, aber ich würde jetzt versuchen, darüber irgendwie weiterzukommen.“

Es zeigen sich hier ähnliche Tendenzen, wie bei Manuel. Vor allem im letzten Teil (ab 33:39) verfolgt Julia eine Idee, die (zumindest mit einfachen Mitteln) nicht zielführend sein kann. Zwar ist auch hier die Idee nicht völlig abwegig[16], letztlich aber wenig hilfreich. Trotzdem wird sie gut sechs Minuten verfolgt, ohne sie einer kritischen Prüfung zu unterziehen. Interessant ist hier die Frage, wie Julia auf diese Idee gekommen ist, da sie erst nach deren Äußerung auf die entsprechende Stelle im

[16] Durch die Konvergenz des Quotienten gegen L könnte man auf die Idee kommen, dass a_n monoton (steigend oder fallend) ist. Dass dies nicht stimmt, zeigt das Gegenbeispiel $a_n = (-1)^n$.

Skript zurückgreift. Da sie aber sehr gezielt diese Seite aufschlägt, ist zu vermuten, dass sie sich daran aus dem ersten Durcharbeiten des Skriptes erinnert (sie hat auch bei (07:07) den entspechenden Satz erwähnt). Das würde bedeuten, dass auch hier das Skript die Ideenfindung stark beeinflusst hat, auch in dem Fall eher negativ.

Bei Ihrer zweiten Aufgabenbearbeitung (Aufgabe *Monotonie* – vgl. Anhang D) zeigt Julia schon geschickteren Umgang mit dem Skript. Die Teile des Prozesses, in denen hiermit gearbeitet wird, sollen als Beispiel komplett wiedergegeben werden. Insgesamt wird das Skript in 07:43 von 18:54 Minuten verwendet.

Nachdem Julia eine Kurzform der Definition der Stetigkeit aufgeschrieben hat (5.17 oben), kommt das Skript zum ersten Mal von (03:25) bis (06:56) zum Einsatz. Relativ schnell (04:00) fällt Julia die Definition einer monotonen Funktion auf, die sie auch, paraphrasiert, auf den Aufgabenzettel überträgt und markiert, indem sie einen Kasten darum zieht (5.17 unten). Das dauert bis (05:58). Bei (06:04) sagt sie: „Stetigkeit habe ich ja eigentlich schon aufgeschrieben", während sie weiter im Skript blättert (und nicht auf einer Seite ist, in der Stetigkeit definiert oder charakterisiert wird). Bei (06:24) paraphrasiert sie den Satz von Weierstraß: „Weierstraß sagt, dass wenn das Intervall kompakt wäre und stetig, dann habe ich mindestens ein Minimum oder Maximum, dann wäre es ja nicht monoton." In dieser Aussage sieht sie einen Widerspruch zur Aufgabenstellung, über den sie in der Folge (im Wesentlichen ohne Verwendung des Skripts) nachdenkt. Hierbei hinterfragt sie ihre Vorstellung von Monotonie („Was bedeutet denn Monotonie (07:58)?") und artikuliert (08:23), dass ein Gipfel dafür sorgen würde, dass die Funktion nicht monoton ist[17]. Schließlich (08:33) entscheidet sie mit den Worten „Naja, ich geh jetzt mal weiter", diesen scheinbaren Widerspruch nicht genauer zu untersuchen und blättert wieder im Skript. Bei (08:44) zeigt sie auf die Definition der Stetigkeit und sagt: „Das habe ich schon aufgeschrieben." Leise nennt sie Schlagwörter, die markieren, an welcher Stelle im Skript sie sich befindet (hierbei geht sie offenbar das Unterkapitel *Funktionen und Stetigkeit* der Reihe nach durch): „Alternative Definition von Stetigkeit (08:56)" (gemeint ist Stetigkeit im $\mathbb{R}^m$), „Beispiele (09:01)" (stetiger und unstetiger Funktionen), „Folgenkriterium (09:05)", bevor sie sich wieder vom Skript abwendet (09:22). In den folgenden Minuten wird deutlich, dass Julia (mit Hilfe einer *Skizze*) die Aufgabe informell verstanden hat (vgl. S. 125). Sie Äußert sogar einen Plan: „Und wenn ich dass hier so aufmale, dann denke ich, dass das irgendwie mit dem Zwischenwertsatz zu zeigen sein wird (11:36)." Diesen versucht sie nun (ab 11:45) wieder mit Hilfe des Skriptes zu verfolgen und schlägt den Zwi-

[17] Diese Einschätzung ist völlig richtig. Was Julia übersieht, ist, dass das Maximum (oder Minimum), das von einer Funktion auf einem kompakten Intervall laut Weierstraß immer angenommen wird, auch am Rand des Intervalls liegen kann.

schenwertsatz (11:59) auf. Bei (12:01) sagt sie: „Wobei der Zwischenwertsatz nur definiert ist für kompakte Intervalle und hier ist ja mein Intervall beliebig.“ Nach einem weiteren kurzen Blick ins Skript (vermutlich in den Beweis des Zwischenwertsatzes), wendet sie sich wieder davon ab (12:39). Unter anderem sagt sie: „Ich sehe jedenfalls, dass ich all diese Begriffe in der Definition und dem Beweis für den Zwischenwertsatz auch finde und dass das deshalb damit irgendwie wahrscheinlich zu beweisen sein wird (14:27).“ Ab (15:48) geht sie weiter den Beweis des Satzes bis (16:19) durch (hierbei fällt auch wieder der Begriff des Intervallschachtelungsprinzips (15:05)). An dieser Stelle ist sie kurz davor, die Bearbeitung abzubrechen, überlegt aber (zunächst wieder ohne Skript), ob sie zumindest einen „graphischen (16:42)“ finden kann. Zum Abschluss (17:41 bis 18:40) blättert sie noch etwas im Skript, bevor sie die Bearbeitung abbricht.

Wenngleich Julia hier zu keinem fertigen Beweis kommt, so zeigt sie doch ein gezielteres Arbeiten mit dem Skript als noch bei ihrer ersten Bearbeitung. Ebenso wird (möglicherweise damit zusammenhängend) zumindest informelles Verständnis erreicht. In welchen Punkten unterscheidet sich diese Bearbeitung von anderen, die viel mit dem Skript arbeiten? Zunächst einmal wird hier nicht mehr, wie vorher, das Skript von Anfang bis Ende durchgearbeitet, sondern gezielt Stellen herausgesucht, die hilfreich sein könnten. So ist die Definition einer streng monotonen Folge das Erste, was herausgegriffen wird. Die Stetigkeit wurde vorher schon ohne Hilfe des Skripts aufgeschrieben, weswegen diese Stelle nicht weiter gesucht wird. In der Folge wird zwar der (für diese Aufgabe wenig hilfreiche) Satz von Weierstraß über einen Zeitraum von etwa zwei Minuten aufgegriffen, danach wird aber bewusst davon Abstand genommen. Hier zeigt sich gute metakognitive Kontrolle

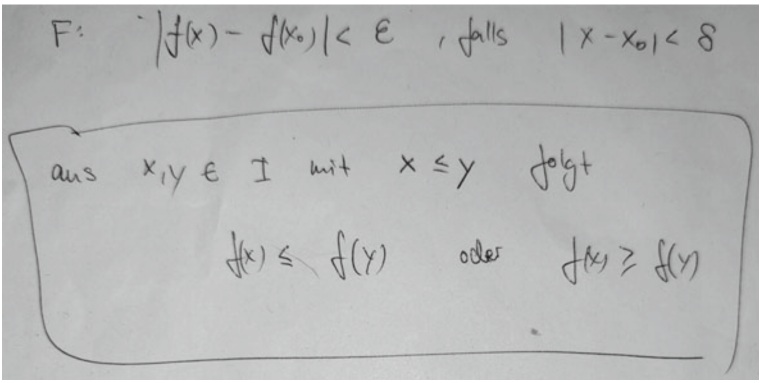

Abbildung 5.17 Julias Niederschrift der wichtigen Definitionen

des Vorgehens. In der Folge werden (etwa eine Minute lang) verschiedene Skriptstellen genannt, die ebenfalls bei dieser Aufgabe keine große Hilfe sind, allesamt aber nur überflogen. Auch das könnte ein Zeichen guter Kontrolle sein. Die nächste Beschäftigung mit dem Skript folgt aus einem klaren Plan (den Zwischenwertsatz anzuwenden) und ist damit sehr zielgerichtet. Grundsätzlich ist die Idee auch völlig richtig, Julia begründet sogar, warum sie diese weiter verfolgt (weil alle Begriffe der Aufgabe im Zwischenwertsatz vorkommen). Leider scheitert sie aber an der Umsetzung, was zum einen daran liegt, dass die Aufgabenstellung ein beliebiges Intervall vorgibt, der Zwischenwertsatz aber nur für kompakte Intervalle gilt (was die Aufgabe etwas schwieriger macht), möglicherweise aber auch daran, dass sie sich etwas zu sehr auf den Beweis des Zwischenwertsatzes konzentriert und weniger auf dessen Anwendung.

Zwar wurden hier nur wenige Prozesse betrachtet, die Erkenntnisse, die sich durch deren Analyse in Bezug auf **Frage 2** gewonnen werden konnten, lassen sich wie folgt zusammenfassen: Grundsätzlich haben Studierende, die Ideen ohne Hilfe des Skriptes generieren, haben größere Aussichten auf eine erfolgreiche Problembearbeitung als solche, die auf das Skript angewiesen sind. Arbeit mit dem Skript kann zu ablenkenden, teilweise sogar abwegigen Ideen führen. Werden diese Ideen aber einer guten metakognitiven Kontrolle unterzogen, sind Studierende durchaus in der Lage, sich nicht zu sehr auf diese Ablenkungen einzulassen[18]. Bei gezielter Verwendung, wie bei Julias zweitem Prozess zu beobachten war, kann das Skript aber ein starker Verbündeter werden. Insgesamt scheint ein gutes Vorwissen (vgl. Abschnitt 5.5.5) zu einer reflektierten Skriptnutzung beitragen zu können.

5.5.4 Heurismeneinsatz

Tabelle 5.2 gibt einen Überblick darüber, in welchen Prozessen welche Heurismen eingesetzt wurden. Hier steht jede Spalte für einen Heurismus mit der im Kodiermanual auf S. 100 verwendeten Abkürzung. Die *imaginäre Figur* wurde in dieser Tabelle mit der *Skizze* zusammengefasst.

Frage 3: Ist Heurismeneinsatz aufgabenabhängig?

Die Theorie zu Heurismen (vgl. Abschnitt 2.3.2) sowie die bisherigen Untersuchungen von Problembearbeitungsprozessen (z. B. von Rott (2013) und Schoenfeld

[18] Genau genommen gilt dies für alle abwegigen Ideen, hier aber ganz besonders.

(1985)) weisen darauf hin, dass dem so ist. An dieser Stelle soll also bestätigt werden, dass diese Aussage auch im hier betrachteten Kontext zutrifft.

Exemplarisch soll dies an der Aufgabe *n-te Wurzel* (vgl. Anhang D) gezeigt werden, die von Niklas (vgl. Abschnitt 5.5.1) und Malik bearbeitet wurde. Beide betrachten zunächst einen *Spezialfall* des zu betrachtenden Terms. Interessanterweise ist bei den beiden Probanden die Variable, die festgelegt wird unterschiedlich. Während Niklas (08:12) das zweite Folgenglied betrachtet (also $n = 2$ setzt), reduziert Malik die Anzahl der Summanden unter der Wurzel zunächst auf drei (02:26), dann auf zwei (06:05 – er setzt also $N = 3$ bzw. $N = 2$)[19]. Beide versuchen offenbar, den Term durch einsetzen von Beispielwerten greifbarer zu machen. Hierbei zeigt sich Maliks Wahl als hilfreicher, denn er kommt durch das betrachtete Beispiel schnell auf die (korrekte) Vermutung, dass ein kleiner Summand für $n \to \infty$ „unrelevant wird (03:52)“ und damit a_N der Grenzwert der Folge sein muss. Er beweist diese Vermutung in der Folge zunächst für den Spezialfall und versucht[20] diesen dann mittels des *Induktionsprinzips* zu verallgemeinern. Auch dieser Heurismus ist naheliegend und von der Aufgabe evoziert. Niklas hingegen geht, nachdem er eine zeitlang mit dem Spezialfall gearbeitet hat, in seinen schriftlichen Aufzeichnungen kommentarlos wieder vom Spezialfall $n = 2$ auf ein allgemeines n zurück (ca. bei 20:00). Auch das *Nutzen aller Voraussetzungen* spielt eine wichtige Rolle. Beide Probanden gehen erst im Laufe der Prozesse darauf ein, dass $0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_N$ ist, Malik mit den Worten: „Mir fällt grad auf, [...] dass ich noch gar nicht verwendet hab, dass a_N größer als a_1 sein muss, also wird das auf jeden Fall eine Rolle spielen (12:16)“ und Niklas, um daraus zu folgern, dass die Quotienten $\frac{a_k}{a_1}$ größer gleich (21:49) bzw. später, dass die Quotienten $\frac{a_k}{a_N}$ kleiner gleich Eins sind (39:04). Es ist klar, dass ohne diese Voraussetzung die Behauptung nicht zutrifft und damit zwingend darauf zurückgegriffen werden muss. Im weiteren Verlauf versuchen beide das Quetschlemma anzuwenden (*Rückführungsprinzip*), wobei Niklas damit nur zu einem Teilerfolg gelangt (vgl. Abschnitt 5.5.1), weil ihm eine geeignete Abschätzung nach unten fehlt. Diese Vorgehensweise ist die mit Abstand ökonomischste, um die Aufgabe zu lösen. Wie man an Maliks Bearbeitung sieht, gibt es zwar auch andere Lösungswege, die aber deutlich aufwändiger sind. Er selbst kommentiert zum Abschluss (49:08) seinen Prozess mit den Worten: „Ich hab etwa gerade ne

[19] Maliks Aufgabenstellung weicht in der Schreibweise leicht von der in Anhang D dargestellten ab: Die Variablen k und n sind bei ihm vertauscht, d. h. n ist der Laufindex der Summe und k gibt das k-te Folgenglied an. Zur besseren Übersicht wird die Notation hier (auch in Zitaten) angepasst, so dass dieselbe wie bei Niklas vorliegt.

[20] Diesen Versuch, der wahrscheinlich auch erfolgreich gewesen wäre, bricht er ab, weil ihm eine (vermutlich) schnellere Möglichkeit, nämlich das Anwenden des Quetschlemmas, einfällt, die er weiter verfolgt.

Tabelle 5.2 Übersicht über die verwendeten Heurismen

Prozess	Aufgabe	Bkl	Skiz	Tab	Glg	Spf	FU	NVor	HiE	SyH	Met	RfP	Ähn	Ana	neuEr	RüA	VwA
Patrick 1	Umkehrung GWS	x				x			x					x	x		
Jan 1	Fixpunkt	x	x		x	x			x	x						x	
Jan 2	Rangungleichung			x	x	x	x		x	x	x	x			x		
Andreas 2	lin. Unabhg.				x				x	x		x				x	x
Jonas 1	Quetschlemma	x	x		x	x	x								x		x
Tim 1	Quetschlemma	x	x							x					x		
Malik 1	Quetschlemma	x	x				x	x					x		x		x
Malik 2	n-te Wurzel				x	x		x	x			x	x	x	x		
Niklas 1	n-te Wurzel					x		x	x	x		x	x				
Niklas 2	konstant	x	x						x		x						x
Manuel 1	Grenzwert L		x	x	x	x			x		x			x	x		
Julia 1	Grenzwert L					x				x		x			x		
Julia 2	Monotonie	x	x					x		x	x			x			

Stunde gerechnet und hab die Lösung in zehn Minuten komplett neu berechnet." An diesen Bearbeitungen sieht man, dass das Betrachten eines *Spezialfalls*, das *Nutzen aller Voraussetzungen* und die *Rückführung* auf das Quetschlemma naheliegende, ja fast notwendige Heurismen sind. Tabelle 5.2 lässt sich entnehmen, dass es noch mehr Heurismen gibt, die von beiden Bearbeitern verwendet wurde, allerdings lässt sich hier kein Zusammenhang mit den Erfordernissen der Aufgabe erkennen. Das Verfahren von *ähnlichen Aufgaben* etwa wird an zwei völlig unterschiedlichen Stellen verwendet (Niklas überträgt sein Vorgehen von der Abschätzung nach oben auf die nach unten, während Malik bei der Manipulation eines Bruchterms durch die größte Folge kürzt, was auf einem vorherigen Übungszettel bereits gemacht wurde).

Andersherum ist der Tabelle 5.2 zu entnehmen, dass es auch Aufgaben gibt, für die sich bestimmte Heurismen nicht anbieten. Eine qualitative Betrachtung von Ereignissen, die nicht auftreten, ist kaum zu liefern, allerdings lässt sich deren Fehlen theoretisch erklären. So wird beispielsweise die *Begriffsklärung* bei den Aufgaben, in denen im Wesentlichen Terme manipuliert werden (*lin. Unabhg.*, *n-te Wurzel* und *Grenzwert L*), nicht genutzt. Bei all diesen Aufgaben kommt es weniger auf den exakten als auf einen geschickten rechnerischen Umgang mit den grundlegenden Begriffen an. Zwar müssen die Bearbeiter grundsätzlich verstanden haben, was lineare Unabhängigkeit bzw. Folgenkonvergenz bedeutet, der Hauptteil der Aufgaben besteht aber darin, eine Gleichung aufzustellen und zu zeigen, dass die Koeffizienten gleich Null sein müssen (bei der linearen Unabhängigkeit) bzw. einen Term durch geschickte Abschätzungen und Umformulierungen so zu manipulieren, dass der Grenzwert gefunden und bewiesen wird (bei den beiden anderen genannten Aufgaben). Hierbei sind weniger Begriffe als Zusammenhänge (wie etwa das Quetschlemma) hilfreich. Ist ein grundlegendes Begriffsverständnis allerdings nicht vorhanden, wäre sicherlich eine *Klärung* notwendig. Das scheint aber bei den Probanden nicht der Fall gewesen zu sein. Bei denselben Aufgaben wurde (mit Ausnahme der Bearbeitung von Manuel, der sich als Beispiel für eine konvergente Folge die Funktion $e^{\frac{1}{x}}$ visualisiert) auch keine *Skizze* angefertigt. Das scheint ebenfalls mit der formalen Struktur der Aufgaben zusammenzuhängen. Zwar sind hier grundsätzlich Skizzen denkbar (etwa um sich lineare Unabhängigkeit oder das Quetschlemma vor Augen zu führen), bei der Manipulation der Terme aber ebenfalls nicht naheliegend. Ein weiteres Beispiel ist das *Anfertigen einer Tabelle*, das nur von Jan in Form einer Matrix *Rangungleichung* und von Manuel als Auflistung der ersten Glieder einer Folge *Grenzwert von Quotient und Wurzel* durchgeführt wurde.

Da, wie bereits in Abschnitt 5.3.4 beschrieben, Kilpatrick (1967) bei seiner, an die Liste von Pólya (1945) angelehnten Kodierung, unter anderen die Pólya Frage *Did you use all the data?* im Nachhinein aus dem Kodiermanual gestrichen hat, weil ein entsprechendes Verhalten niemals aufgetreten ist, wird der hiermit in engem Zusammenhang stehende Heurismus *Nutzen aller Voraussetzungen* im Folgenden etwas genauer betrachtet. Im universitären Zusammenhang scheint dieser sehr wohl eine große Bedeutung zu haben. Aufgabe für Aufgabe (abgesehen von der Aufgabe zur *n-ten Wurzel*, die zu Beginn des Abschnittes bereits behandelt wurde) soll deswegen sein Auftreten und sein möglicher Nutzen untersucht werden (wenn nicht anders aufgeführt, finden sich die Aufgaben in Anhang D):

Die Behauptung der Aufgabe zur *Umkehrung der Grenzwertsätze* (Wenn $\{x_n\}_n$ divergent und $\{y_n\}_n$ konvergent ist, dann ist $\{x_n y_n\}_n$ divergent), die zu beweisen oder widerlegen ist, lässt sich nicht in zwei Voraussetzungen aufteilen, da die Folgerung ($\{x_n y_n\}_n$ ist divergent) beide Elemente aus der Voraussetzung enthält. Es ist deswegen nur schwerlich denkbar, diese von einander zu trennen. Außerdem ist die vorangestellte Voraussetzung, dass es sich bei $\{x_n\}_n$ und $\{y_n\}_n$ um Folgen handelt, implizit bereits in der Voraussetzung der Divergenz bzw. Konvergenz enthalten und kann, so dass diese nicht losgelöst davon betrachtet werden können. Sich bewusst zu machen, dass alle Voraussetzungen genutzt werden müssen, ist bei dieser Aufgabe also nicht notwendig.

Die Aufgabe zum *Fixpunkt* lässt sich allerdings gut in zwei Voraussetzungen aufteilen: Zum einen ist f eine Abbildung einer (nichtleeren) Menge M auf sich selbst, zum anderen ist M endlich. Hieraus folgt, dass es ein $n < 0$ gibt, so dass f^n (mindestens) einen Fixpunkt hat. Die Bearbeitung von Jan scheitert daran, dass er die zweite Voraussetzung (M ist endlich) gar nicht verwendet. Ein Beweis ist ohne diese Voraussetzung nicht möglich. Es ist also zwingend notwendig, dass man sich bei der Bearbeitung bewusst ist, dass man alle Voraussetzungen verwenden muss.

Wenngleich die Aufgabe zur *Rangungleichung* relativ komplex aussieht, hat sie im Grunde genommen nur eine Voraussetzung: Wenn eine Matrix (deren Koeffizienten genauer spezifiziert werden) in zwei Teile geteilt wird, so gilt die Rangungleichung. Auch hier kann dieser Heurismus also nicht sinnvoll zum Tragen kommen.

Bei der Aufgabe zur *Linearen Unabhängigkeit* gibt es (zusätzlich dazu, dass man sich in einem K-Vektorraum befindet) gleich mehrere Voraussetzungen. Erstens sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig und zweitens ist $v := \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$. Die dritte Voraussetzung steckt in der Äquivalenzbehauptung (genau dann, wenn $v_1 - v, \ldots, v_n - v$ linear unabhängig sind, ist $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 1$). Bei einer typischen Aufgabenbearbeitung wird allerdings recht schnell eine Gleichung aufgestellt (etwa $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (v_j - v) = 0$), in die v (also die zweite Bedingung) eingesetzt wird. Weiterhin wäre typisch, die Gleichung so umzustellen, dass die v_j von einander isoliert sind (um die erste Bedingung zu verwenden). Alle Koeffizienten davor müssen dann gleich Null sein, was entweder dann der Fall ist, wenn die $v_j - v$ linear unabhängig sind oder $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ ist. Obwohl es hier gleich drei Voraussetzungen gibt, werden diese bei einer typischen Bearbeitung (so auch bei Andreas) direkt zu Beginn Schritt für Schritt eingesetzt. Dieses Vorgehen ist bei Aufgaben zur linearen Unabhängigkeit so üblich, dass die meisten Bearbeiter sich nicht extra bewusst machen müssen, dass wirklich alle Voraussetzungen genutzt werden sollten.

Beim Quetschlemma (vgl. Abschnitt 5.2.1) haben die beiden erfolglosen Bearbeiter (Jonas und Tim) diesen Heurismus nicht angewandt. Wie wir später (Abschnitt 5.5.5) sehen werden, ist das aber nicht der einzige Grund für ihr Scheitern. Es ist bei dieser Aufgabe auch durchaus denkbar, dass alle Voraussetzungen gemeinsam gedacht werden (b_n liegt zwischen a_n und c_n, die beide gegen denselben Grenzwert c konvergieren. Die sehr schöne Bearbeitung dieser Aufgabe von Malik wird in 5.5.5 genauer betrachtet. Hier soll bereits erwähnt werden, dass die Voraussetzungen nicht etwa in die Ungleichung $a_n \leq b_n \leq c_n$ auf der einen und die Konvergenz von a_n und c_n gegen c auf der anderen Seite, sondern in $a_n \leq b_n$ und $a_n \to c$ auf der einen sowie $b_n \leq c_n$ und $c_n \to c$ auf der anderen aufgeteilt wurde.

Die Aufgabe zur *konstanten Funktion* hat die Voraussetzungen, dass zum einen f eine stetige (reelle) Funktion ist und zum anderen $f(x) = f(x^2)$ für alle x gilt. Zwar würde eine typische Bearbeitung recht schnell die Stetigkeit (in Form von Folgenstetigkeit) mit der gegebenen Gleichung verbinden (und von da an mit einer Gleichung, die beide Voraussetzungen enthält, weiterarbeiten), dass dies aber nicht selbstverständlich ist, zeigt Niklas Bearbeitung. Trotzdem scheint es bei dieser Aufgabe wenig sinnvoll zu sein, die beiden Voraussetzungen getrennt von einander zu betrachten. Die Stetigkeit alleine wird sicherlich nicht zur Behauptung, dass f konstant ist führen. Nur mit der Gleichung zu arbeiten, ist eher denkbar, zumindest in der betrachteten Bearbeitung von Niklas enthalten ausnahmslos alle Ansätze aber auch die Stetigkeit. Zumindest in diesem Prozess war der Heurismus *Nutzen aller Voraussetzungen* also auch nicht explizit notwendig.

Die Aufgabe zum *Grenzwert von Quotient und Wurzel* hat nur eine Voraussetzung, nämlich dass der Quotient gegen L konvergiert. Dass es sich bei a_n um eine Folge handelt und der Nenner nie Null ist, ist implizit darin enthalten.

Die Aufgabe zur *Monotonie* enthält wieder zwei essenzielle Voraussetzungen: Eine stetige und injektive Funktion ist streng monoton. Keine der beiden kann weggelassen werden. Auch hier ist nicht vorstellbar, nur mit der Stetigkeit zu arbeiten. Julia macht sich bei (09:29) bewusst, dass sie noch nicht beide Voraussetzungen nutzt, indem sie sich fragt: „Wofür ist das wichtig, dass die stetig und injektiv ist?“ wobei sie das *und* betont. Auch hier wid also der Heurismus eingesetzt.

Die **Frage 3** lässt sich also auch im Kontext der Studieneingangsphase eindeutig beantworten: Der Einsatz bestimmter Heurismen ist abhängig vom zu bearbeitenden Problem. Außerdem wird die Erfahrung aus den ersten Phasen der Intervention verstärkt, dass es sich lohnt, *heuristische Hilfsmittel* zu unterrichten (vgl. Abschnitte 2.4.5 sowie 4.4). Im Einzelnen handelt es sich hierbei um die *Begriffsklärung*, das

Anfertigen einer *Skizze* oder einer *Tabelle*, das Aufstellen einer *Gleichung* oder das Betrachten eines *Spezialfalls*[21]. Bei all diesen Heurismen fällt die Entscheidung, ob deren Einsatz notwendig, hilfreich oder keines von beiden ist, vergleichsweise leicht, es ist also eher selten der Fall, dass Problembearbeiter sich von ihnen ablenken bzw. auf Abwege bringen lassen. Dass diese trotzdem einer metakognitive Kontrolle bedürfen zeigt die Bearbeitung der Aufgabe zur *n-ten Wurzel* von Malik (vgl. auch Abschnitt 5.5.5). Ihm hilft der betrachtete Spezialfall zunächst sehr dabei, eine Vermutung für den Grenzwert zu generieren, anschließend versteift Malik sich aber zu sehr darauf, diesen zu beweisen, anstatt nach anderen Möglichkeiten zu suchen. In diesem Beispiel wurde der *Spezialfall* auch über die *Analysis*-Phase hinaus verwendet, so dass er nicht mehr als *heuristisches Hilfsmittel* anzusehen ist.

Nachdem die Aufgabenabhängigkeit von Heurismen bestätigt wurde, stellt sich noch die

Frage 4: Ist Heurismeneinsatz vom Problembearbeiter abhängig?

Auch diese Frage wird von der Theorie (vgl. Abschnitt 2.3.2) bejaht. Betrachtet man Tabelle 5.2, scheinen aufgabenübergreifend auf den ersten Blick Heurismen wie die Einführung von *Hilfselementen* oder *Systematisierungshilfen* sowie das Nutzen von *Metaphern* abhängig vom Bearbeiter zu sein. Daher soll im Folgenden auf diese Heurismen bei den Studierenden, von denen zwei Prozesse untersucht wurden (Jan, Malik, Niklas und Julia), ein kurzer Blick geworfen werden. Wirkliche Vorlieben lassen sich aufgrund der geringen Datenbasis (nur vier Probanden mit jeweils zwei Bearbeitungen) nicht herleiten. Bei den eingesetzten *Hilfselementen* handelt es sich in der Regel um Variablen, die neu eingeführt werden, entweder um längere Terme übersichtlich zusammenzufassen oder um mit einem bisher nicht bezeichneten Element leichter arbeiten zu können. Auch hier ist naheliegend, dass dieser Heurismus eher bei Aufgaben mit längeren Rechnungen angewandt wird. So bezeichnet beispielsweise Malik bei der Aufgabe zur *n-ten Wurzel* den vermuteten Grenzwert des Ausdrucks unter der Wurzel mit x^n. Bei seiner Bearbeitung der *Quetschlemma*-Aufgabe führt er keine neue Bezeichnung ein. Die *Systematisierungshilfen* können Markierungen, meist in Form von Umrandungen, wichtiger Stellen in den eigenen Bearbeitungen sein, häufig treten sie aber auch in Form von Pfeilen auf, die

[21] Wie bereits bemerkt, handelt es sich hierbei nicht um ein heuristisches Hilfsmittel im engeren Sinne, da Spezialfälle nicht nur in der *Analysis*-Phase zur Anwendung kommen.

Zusammenhänge zwischen verschiedenen Stellen in der Niederschrift der Gedanken sein. Beide Heurismen können dabei helfen, die eigenen Gedanken zu strukturieren. Exemplarisch seien die Bearbeitungen von Jan genannt: Er verwendet bei beiden Aufgaben neue Bezeichnungen, bei der *Fixpunkt*-Aufgabe werden Potenzen von f, die zwischen 0 und n liegen mit a bezeichnet, bei der Aufgabe zur *Rangungleichung* werden die Ränge der Teilmatrizen mit a bzw. b bezeichnet, die Zeilen der Matrix A (als Vektoren) mit Z_i. Auch *Systematisierungshilfen* werden in beiden Bearbeitungen verwendet, allerdings in unterschiedlicher Form. Bei der *Fixpunkt*-Aufgabe wird ein Zwischenergebnis, das er im weiteren Verlauf auch weiter nutzen möchte, und später auch sein Ziel ($m \to f^1(m)$) umrandet, bei der Aufgabe zur *Rangungleichung* werden Verbindungen in Form von Pfeilen zwischen der Matrix A und den Teilmatrizen, in die diese aufgespalten wird, sowie zwischen Teilergebnissen, die mit einander verbunden werden sollen, gezogen. Zwar lässt sich, auch aufgrund der Unterschiedlichkeit der Systematisierungshilfen, kein eindeutiges Muster festmachen, eine Tendenz, seine Aufzeichnungen zu systematisieren scheint aber im Vergleich zu anderen Bearbeitern erkennbar zu sein. Möglicherweise hängt diese auch damit zusammen, dass er insgesamt relativ viel aufschreibt und dabei den Überblick behalten möchte. Für genauere Aussagen müsste man sich, wie bereits erwähnt, insgesamt mehr verschiedene Aufgabenbearbeitungen anschauen. *Metaphern* wurden insgesamt recht wenig verwendet, weswegen eine Aussage zu Vorlieben noch schwerer fällt. Ohnehin ist nicht ganz klar, ob es sich hierbei wirklich um einen Heurismus handelt, der dem Problembearbeiter bei der Lösung helfen soll, oder ob Metaphern eher dem lauten Denken geschuldet sind, also aus der Pflicht, die Gedanken auszudrücken, resultieren. Beispielsweise redet Jan davon, dass die Matrix bei der *Rangungleichung* „durchgeschnitten" wird, Niklas redet bei der Aufgabe zur *konstanten Funktion* im Zusammenhang der Stetigkeit von einer „Delta-Kugel" für die Delta-Umgebung eines Punktes (ein in Mathematikerkreisen nicht unüblicher Sprachgebrauch, so dass nicht einmal klar ist, ob es sich wirklich um eine *Metapher* handelt) und Julia spricht bei der Aufgabe zur *Montonie* von einem Graphen, der „hin- und hertanzt", also nicht monoton ist. Insgesamt bedarf die Beantwortung von **Frage 4** also der Betrachtung weiterer Prozesse.

Inwiefern Heurismeneinsatz zum Lösungserfolg beiträgt, wird im folgenden Abschnitt, der die Ideengenerierung in den Blick nimmt, genauer betrachtet. Dass sowohl Prozesse mit geringem Heurismeneinsatz (Andreas und Niklas 1), als auch solche mit hohem Heurismeneinsatz (Malik 1 und 2) zu guten Lösungen führen können, ist bereits der Tabelle 5.1 zu entnehmen.

5.5.5 Ideengenerierung und Bedeutung des Vorwissens

In diesem Abschnitt, der besonders interessante Erkenntnisse liefert, werden Erfolgs- und Misserfolgsfaktoren der Prozesse genauer unter die Lupe genommen. Hierbei soll zum einen (sofern das den Prozessen zu entnehmen ist) untersucht werden, wie vor allem die hilfreichen Ideen generiert wurden. Es wird beschrieben, welche Tätigkeiten und Gedanken diesen Ideen vorangegangen sind und versucht, diese Aktivitäten zu interpretieren. Hierbei spielt das Vorwissen bereits eine entscheidende Rolle. Des Weiteren wird vor allem darauf geachtet, wie mangelndes Vorwissen eine erfolgreiche Aufgabenbearbeitung verhindern oder zumindest erschweren kann. Auch andere Faktoren, die zum Teil in den vorherigen Kapiteln bereits angesprochen wurden, werden ebenfalls wiederholend zusammengefasst. Zunächst wird also geschaut auf die folgende

Frage 5: Welche Faktoren führen zu Ideen, die bei der Problembearbeitung hilfreich sind?

Zur Beantwortung dieser Frage werden im Folgenden die Prozesse betrachtet, die zumindest einen Teilerfolg erzielt haben und analysiert, welche Ideen sich dabei als hilfreich erwiesen haben. Wenn nicht anders erwähnt, finden sich die Aufgaben in Anhang D.

Bei Jans Bearbeitung der Aufgabe zur *Rangungleichung* wird bereits zu Beginn (04:25) die Idee generiert, dass die lineare Unabhängigkeit von Zeilen der Matrix A beim Aufteilen auf die zwei Teilmatrizen A_1 und A_2 erhalten bleibt, während das für linear abhängige Zeilen nicht der Fall sein muss (vgl. die ausführliche Beschreibung der Schoenfeld-Episoden in Abschnitt 5.5.2). Wenn diese Idee gut formalisiert wird, ist das bereits die Lösung der Aufgabe. In diesem Fall ist die Idee direkt nach einer ausführlichen Analyse der Aufgabe entstanden. Jan hat sich zunächst aus den Angaben der Aufgabe die Matrix A in *Tabellenform* aufgeschrieben (02:00) und anschließend (03:20) zwischen der r-ten und $r+1$-ten Zeile einen Strich gezogen (*Systematisierungshilfe* – vgl. Abbildung 5.13 links). Danach (03:40) hat er daneben die resultierenden Matrizen A_1 und A_2 ebenfalls in *Tabellenform* notiert (vgl. Abbildung 5.13 rechts). Bereits dieser Darstellungswechsel scheint ihm genügt zu haben, diese wichtige Idee zu generieren. In der Folge gelingt es ihm leider nur den Spezialfall, dass A vollen Rang hat, zu beweisen. Zwar kommt ihm noch die (richtige) Idee, dies durch Widerspruch zu zeigen, was man als *Rückwärtsarbeiten* interpretieren könnte, wo genau diese Idee herkommt, ist der Bearbeitung nicht zu entnehmen, er sagt aber: „Für ‚gleich‘ habe ich’s jetzt gezeigt [...], wenn ich jetzt das andersrum zeigen möchte, dass es quasi kleiner sein muss [...], ich könnte ja mal annehmen, dass der Rang von A größer sein kann [...] (18:09)." Die Folgerung, dass es dann in den Matrizen A_1 und A_2 mehr unabhängige Zeilen geben muss als in A, findet er leider nicht mehr. In diesem Beispiel wurde also die wichtigste Idee bereits durch die *Analysis* der Aufgabe kreiert.

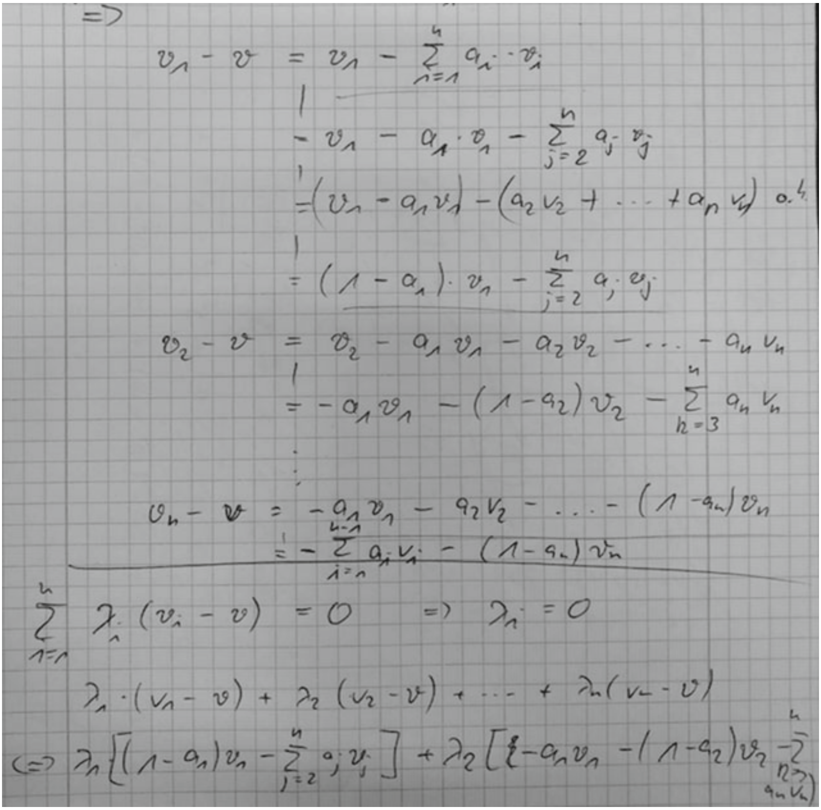

Abbildung 5.18 Andreas' Überlegungen zur linearen Unabhängigkeit

Auch Andreas kommt bei seiner Bearbeitung der Aufgabe zur *linearen Unabhängigkeit* relativ früh (bei 06:39) auf die Idee, eine Linearkombination der Vektoren $v_i - v$ zu bilden, deren Koeffizienten nach Voraussetzung gleich Null sein müssen (vgl. Abbildung 5.18 unten nach der horizontalen Linie). Zusätzlich zur *Analysis*-Phase (00:00–01:06), in der er im Wesentlichen die Aufgabe mit eigenen

Formulierungen aufgeschrieben hat, wurden in einer ersten *Exploration* noch die Vektoren $v_i - v$ systematisch mit einer *Gleichung* umgeformt (siehe Abbildung 5.18 oben). Möglicherweise war bereits vor dem Aufstellen dieser Gleichungen die Idee vorhanden, eine Linearkombination aufzustellen, da es sich hierbei um ein Standardverfahren zur linearen Unabhängigkeit handelt, sie wurde aber erst im Anschluss geäußert. Des Weiteren sagt er hierzu: „Die Vermutung liegt ja nahe, dass wir irgendwas haben mit ‚Eins minus' und dann addieren wir die einzelnen a_i-s auf (09:25)" wodurch die Bedingung, dass diese Summe nicht gleich Eins sein darf, erfüllt ist. Es folgt eine lange Umformung, bei der ihm ein Fehler unterläuft (18:10). Dieser Fehler ist auf einen falschen Umgang mit der Doppelsumme zurückzuführen. Andreas nimmt an, dass $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_j v_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i v_i$ ist (vgl. Abbildung 5.19). Diese Umformung macht die Aufgabe im Endeffekt leichter, so dass kein korrekter Beweis erreicht wird. Derselbe Fehler unterläuft ihm erneut beim Beweis der Rückrichtung (24:13). Auch bei dieser Bearbeitung wird eine wichtige Idee im Zusammenhang mit dem systematischen Aufschreiben der gegebenen Voraussetzungen generiert.

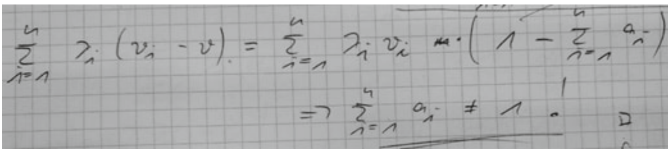

Abbildung 5.19 Fehler bei der Umformung

Obwohl Julia am Beweis der Aufgabe zur *Monotonie* scheitert, erreicht sie immerhin ein informelles Verständnis der Aufgabe. Auch hier ist dies ein Ergebnis einer *Analysis*-Episode. Nachdem Julia sich in der ersten *Analysis*-Phase (00:31–06:23) die Definitionen der wichtigsten Begriffe (Stetigkeit, Injektivität und Monotonie) vergegenwärtigt hat, kehrt sie nach einer zunächst erfolglosen *Exploration*-Phase (06:23–09:28) zur *Analysis* (09:28–11:35) zurück. Hier wiederholt sie nochmal die Definition der Injektivität und fertigt eine Skizze an (10:54), woraufhin ihr klar wird: „Jeder Wert auf meiner y-Achse wird nur einmal getroffen, weil's ja injektiv ist und dann kann ich auch dazwischen keinen Graphen haben, der irgendwie so hin- und hertanzt (11:08)." Auch die folgende Idee (11:35), dass der Beweis mit dem Zwischenwertsatz zu führen ist wird vermutlich mit Hilfe der Skizze generiert.

Maliks Bearbeitung zur *Quetschlemma*-Aufgabe wird weiter unten im Kontrast zu einem weniger erfolgreichen Prozess von Jonas ausführlich beschrieben. Bei seiner Bearbeitung der Aufgabe zur *n-ten Wurzel* führt, wie bereits in Abschnitt 5.5.4 beschrieben, das Betrachten eines *Spezialfalls* (02:26 – $N = 2$ bzw. $N = 3$) zu der Vermutung, dass der Grenzwert der Folge a_N sein muss (03:52). Man muss allerdings erwähnen, dass Malik schon vorher (01:49) sagt: „Entweder müsste die Lösung so sein, dass alle außer das Größte unrelevant sind oder alle as sind relevant.“ Die Idee, dass der Grenzwert nur von a_N abhängt, steht also vor Betrachten des *Spezialfalls* schon im Raum, eine Vermutung, was genau der Grenzwert ist, allerdings noch nicht. Es folgt eine lange Phase (09:22–28:21), in der Malik sich dem Beweis des Spezialfalls $N = 2$ widmet, auf die aber im Detail nicht eingegangen werden soll, da es sich um langwierige Termmanipulationen[22] handelt, bei denen in den meisten Fällen auch nicht klar ist, wie Malik auf die Idee gekommen ist, so vorzugehen. Nachdem er den Spezialfall erfolgreich (mit kleinen Schönheitsfehlern) bewiesen hat, stellt er fest, dass er hierbei verwendet hat, dass $a_1 < a_2$ ist (und damit $(\frac{a_1}{a_2})$ eine Nullfolge ist), nach Voraussetzung aber auch $a_1 = a_2$ sein könnte (29:07). Wenig später (30:08) fällt ihm ein (*Vorwissen*), dass $\sqrt[k]{2}$ gegen 1 konvergiert, so dass auch bei Gleichheit der Grenzwert a_2 wäre (vgl. Abbildung 5.20). Anschließend versucht er (31:05–44:56) erfolglos den *Spezialfall* zu verallgemeinern. Ein vielversprechender Ansatz ist das *Induktionsprinzip* , also die Idee, Schritt für Schritt einen Summanden hinzuzufügen, der jeweils kleiner als a_N ist, wodurch sich der Grenzwert nicht verändern dürfte. Bei (44:56) kommt ihm eine weitere Idee: „Ich hab jetzt überlegt: Würde sich was ändern, wenn wir einfach alle Werte gleich a_N setzen? Das ist ja der größte Wert, den wir rausbekommen. [...] Und dass der kleinste Wert, also sozusagen, der kann ja nicht kleiner sein als nur a_N zu haben und damit hätten wir eigentlich hier schon die Lösung.“ Wie auch seine folgenden Ausführungen und Rechnungen (vgl. Abbildung 5.21) bestätigen, möchte

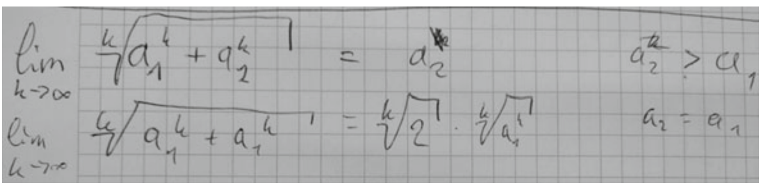

Abbildung 5.20 Spezialfall $N = 2$

[22] Die eleganteste Methode, die sich auch leicht auf beliebige N übertragen ließe, wäre, aus der Summe unter der Wurzel a_N auszuklammern. Auf diese Idee kommt Malik aber nicht.

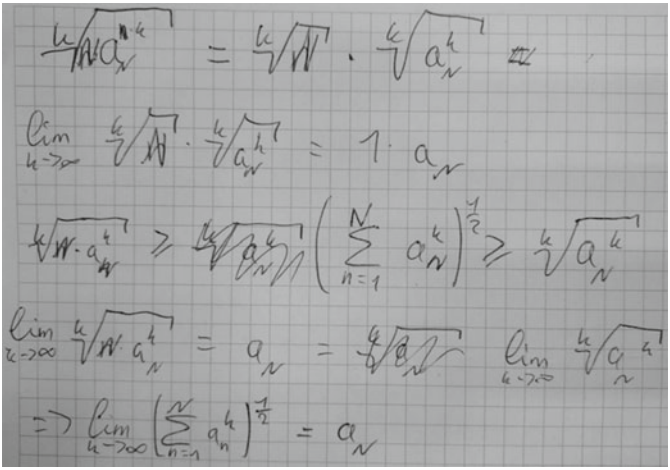

Abbildung 5.21 Implementation der Idee, das Quetschlemma anzuwenden

Malik also das Quetschlemma anwenden. Nach knapp fünf Minuten (49:20) hat er die Aufgabe gelöst. Diese Idee erscheint auf den ersten Blick recht unvermittelt und man fragt sich, warum sie an dieser Stelle kommt. Auf der anderen Seite bekommt man den Eindruck, dass ein Großteil (die 19 Minuten, die zum Beweis des *Spezialfalls* aufgewendet wurden sowie die fast 14 Minuten erfolgloser Versuche zu dessen Verallgemeinerung) des etwa 50-minütigen Prozesses unnötig waren. Auch Malik sieht das ähnlich: „Ich hab etwa gerade ne Stunde gerechnet und hab die Lösung in zehn Minuten komplett neu berechnet (49:08).“ Ganz so ist es sicherlich nicht. Es ist davon auszugehen, dass die lange Beschäftigung mit der Aufgabe den Einfall, das Quetschlemma anzuwenden, vorbereitet hat. Zumindest die in Abbildung 5.20 dargestellte Gleichung für $a_1 = a_2$ wird Einfluss auf die Abschätzung nach oben (bei der alle a_i gleich sind) gehabt haben. Zusammenfassend haben die Vermutung (die nach Beweis des Spezialfalls sehr stark war), dass a_N der Grenzwert sein muss, die Vergewisserung, dass dies auch bei Gleichheit der Summanden gilt (begründet auf das Vorwissen, dass die n-te Wurzel einer Konstanten gegen Eins konvergiert) und die gute Kenntnis des Quetschlemmas zu dieser entscheidenden Idee beigetragen. Sicherlich hätten metakognitive Kontrollstrategien (vgl. 5.5.6) den Prozess an der ein oder anderen Stelle abkürzen können.

Die Bearbeitung derselben Aufgabe (*n-te Wurzel*) von Niklas wurde in Abschnitt 5.5.1 bereits ausführlich dargestellt. Da er vergleichsweise wenig redet, ist bei ihm schwer zu erkennen, welche Überlegungen seinen Ideen vorangehen. Eine wichtige Idee äußert er bei (38:41): Hier klammert er den größten Summanden aus, was ihn zur Abschätzung nach oben führt (vgl. Abbildung 5.11). Diese Idee wurde durch den vorherigen Versuch des Ausklammerns des kleinsten Summanden (20:11 – vgl. Abbildung 5.9) und die Idee, dass die Ungleichung aus der Voraussetzung genutzt werden muss (21:49) vorbereitet. Die Abschätzung führt dann zur Idee, das Quetschlemma anzuwenden (42:40). Auch hier helfen also Vorüberlegungen, die zunächst nicht zum Ziel geführt haben, neue Ideen zu generieren. Auch der Heurismus *Nutzen aller Voraussetzungen* war sehr hilfreich.

Zur Beantwortung von **Frage 5** lässt sich sagen: Es gibt einige Prozesse, bei denen gute Ideen während einer oder im Anschluss an eine *Analysis*-Phase, in Verbindung mit entsprechenden *heuristischen Hilfsmitteln* (Anfertigen einer *Tabelle* oder *Skizze*, Betrachten eines *Spezialfalls* etc.) entstanden sind. Auch andere Heurismen, wie das *Nutzen aller Voraussetzungen* oder das *Rückführungsprinzip*[23] liefern wichtige Ideen. Bei letzterem ist klar, dass ein gewisses Vorwissen vorhanden sein muss, aber auch in den anderen Fällen ist dies meist Voraussetzung (oder entsprechendes Wissen muss während des Prozesses erarbeitet werden). Wichtige Vorstellungen zu den grundlegenden Begriffen (Rang, lineare Unabhängigkeit, Stetigkeit, Injektivität, Monotonie, Konvergenz) und Werkzeugen (Quetschlemma, Zwischenwertsatz, Verfahren zum Beweis linearer Unabhängigkeit, Rechenregeln etc.) scheinen notwendig zu sein.

Während man bei erfolgreichen Bearbeitungen Gefahr läuft, Vorwissen als selbstverständlich hinzunehmen, zeigt sich bei weniger erfolgreichen, dass der Mangel hieran die Prozesse sehr erschweren oder gar komplett stören kann. Hieraus ergibt sich die

Frage 6: Welchen Einfluss hat Vorwissen bzw. der Mangel daran auf den Bearbeitungserfolg beim Problemlösen?

Auch diese Aussage steht im Einklang mit der Theorie, schließlich ist Vorwissen (bzw. *Ressources*) einer der vier Einflussfaktoren auf das Problemlösen nach Schoenfeld (1985). Allerdings wurde dieser Aspekt bei vielen empirischen Untersuchungen bewusst ausgeblendet, um sich auf die anderen Faktoren fokussieren zu können. Umso interessanter ist es, in unserem Kontext mit authentischen Übungsaufgaben, den Einfluss des Vorwissens genauer zu betrachten. Exemplarisch wer-

[23] Sicherlich sind das nicht die einzigen hilfreichen Heurismen. Diese sind aber bei den wenigen betrachteten Prozessen aufgefallen.

den zunächst drei Bearbeitungen der *Quetschlemma*-Aufgabe (vgl. Abschnitt 5.2.1) betrachtet, beginnend mit dem wenig erfolgreichen Prozess von Tim.

Ein Hinweis darauf, dass Tim starke begriffliche Schwierigkeiten hat, wird bereits durch die Episodenkodes gegeben (vgl. Abbildung 5.22): Zum einen wird ein Großteil der Bearbeitungszeit (knapp 33 von 49 Minuten) mit *Analysis* zugebracht, zum anderen wird mehr als 36 Minuten mit dem Skript gearbeitet. Dieser Eindruck verstärkt sich noch, wenn man sich den Prozess genauer anschaut. Im Folgenden werden ausgewählte Fehler, die bezeichnend sind für das mangelnde Verständnis herausgearbeitet. Nachdem er einige Zeit stumm im Skript geblättert hat, fertigt Tim eine *Skizze* (09:29) an (vgl Abbildung 5.23). Hierzu sagt er: „Den Grenzwert für a setzen wir links hin, den Grenzwert für c setzen wir ganz rechts hin und in der Mitte ist dann eben der Grenzwert für b, der dazwischen liegt.“ Später im Prozess sagt er in diesem Zusammenhang: „Ich stelle mir das so vor: Es ist ja so, dass wir drei Werte haben. Da auf dem Zahlenstrahl positiv und minus Unendlich ist, muss man eben überlegen, wie diese Werte – vor allem wenn sie Grenzwerte haben, das heißt, dass sie nur in einem bestimmten Bereich gelten – diesen Zahlenstrahl der reellen

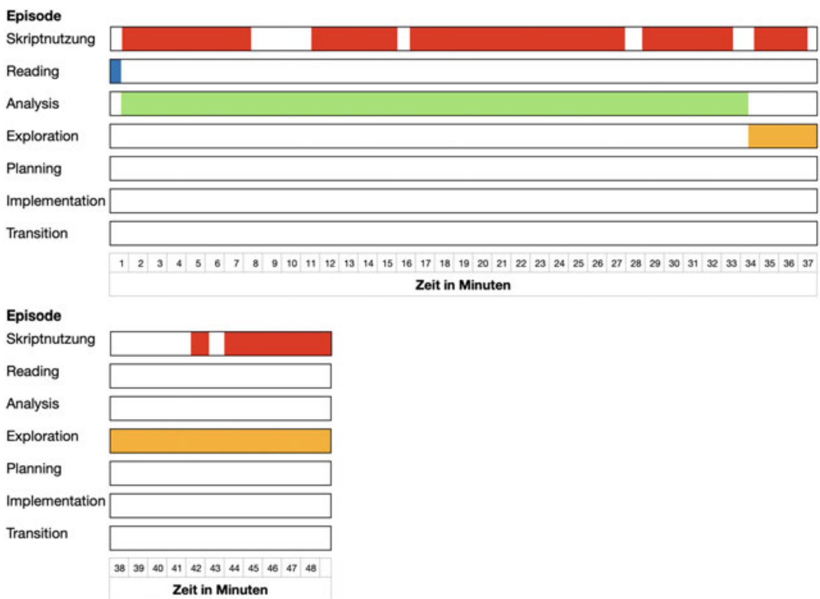

Abbildung 5.22 Episoden Tim (*Quetschlemma*)

Zahlen abdecken. Für mich würde das heißen, dass zum Beispiel der erste Wert a links bis c geht und bis minus Unendlich, dann eben die Lücke kommt, die b erfüllt, dann eben rechts – b ist ja beschränkt [...], durch den Wert c, [der] auf der rechten Seite von c bis positiv Unendlich geht. Dass eben a und c diese Bereiche abdecken ist schon durch die Aufgabe gegeben. [...] Die Frage, die ich beantworten [muss], ob b auch dagegen konvergiert. Jetzt müsste ich eben nur zeigen, dass es dazwischen liegt, dass es keine Überschneidungen gibt. (37:31).“ Ein anderer Ausschnitt aus seiner Niederschrift (34:37) ist in Abbildung 5.24 zu sehen.

Die beiden Ausschnitte sowie das Zitat offenbaren einige fachliche Mängel. Zum einen geht Tim davon aus, dass a_n und c_n Nullfolgen sind (bzw. schreibt zumindest eine entsprechende Ungleichung auf). Wäre dies das einzige Problem, dann hätte er zumindest noch diesen *Spezialfall* (c=0) beweisen können. Es zeigen sich aber weitere grundlegende Missverständnisse zum Grenzwertbegriff im Allgemeinen und zur Aufgabe im Speziellen. Abgesehen davon, dass er von „Werten“ statt von „Folgen“ spricht und sprachlich nicht zwischen c und c_n unterscheidet, geht er davon aus, dass die drei Folgen die reellen Zahlen disjunkt abdecken. Das kann schon deswegen nicht stimmen, weil konvergente Folgen beschränkt sind. Außerdem gilt die Ungleichung $a_n \leq b_n \leq c_n$ nur punktweise, es kann also sehr wohl Elemente aus a_n geben, die größer sind als Elemente aus b_n oder c_n. Dann kommt der Wert c zweimal in der Skizze vor, es wird also nicht beachtet, dass a_n und c_n gegen denselben Grenzwert konvergieren. Auch die Vorstellung, dass die Folgen durch ihren Limes beschränkt sind, trifft in der Regel nicht zu. Schließlich stimmt auch die Aussage, dass zu zeigen ist, dass b_n zwischen a_n und c_n liegt, nicht, denn das ist ja bereits die Voraussetzung. Es zeigen sich also erhebliche Fehlvorstellungen und so ist es nicht verwunderlich, dass Tim keinen einzigen Ansatz findet. Auch

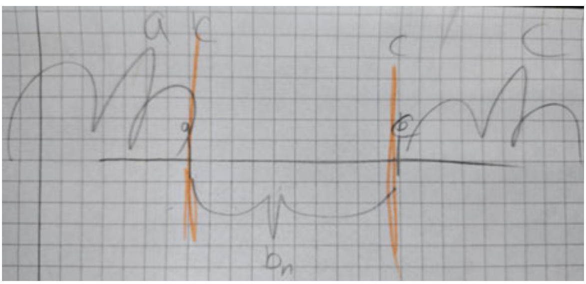

Abbildung 5.23 Tims Skizze zur *Quetschlemma*-Aufgabe

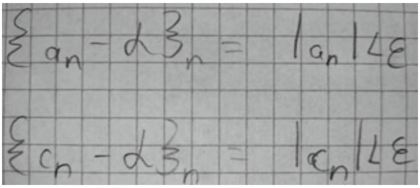

Abbildung 5.24 Weiterer Ausschnitt aus Tims Mitschrift

der Heurismeneinsatz, wie das Anfertigen einer sinnvollen *Skizze* wird dadurch unmöglich gemacht.

Ähnlich sieht es bei Jonas aus. Auch hier lässt bereits die Episodenkodierung auf große Schwierigkeiten schließen (vgl. Abbildung 5.25). Die *Analysis*-Phase nimmt mit knapp der Hälfte der Zeit (etwa 20 von 44 Minuten) einen ungewöhnlich hohen Anteil an und es wird 19 Minuten mit dem Skript gearbeitet. Zur Nachvollziehbarkeit der Verständnisprobleme seien ausgewählte Fehler im Folgenden unkommentiert

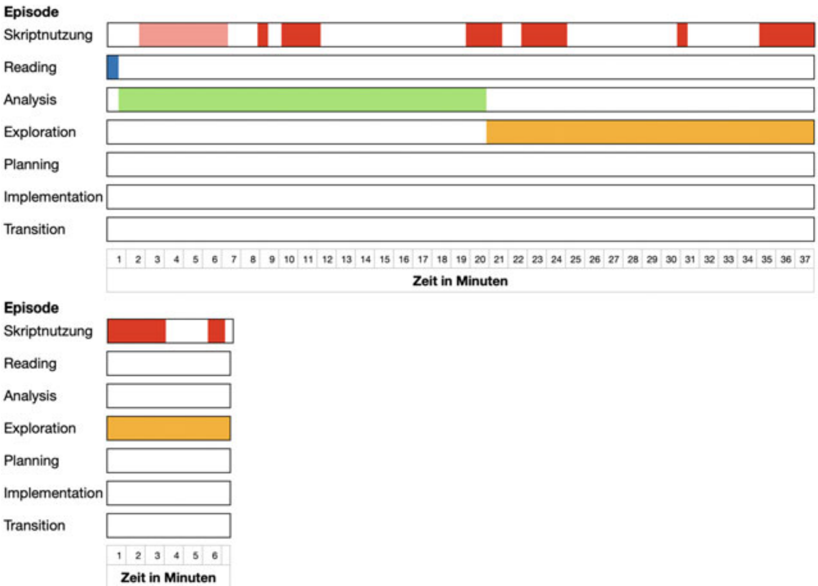

Abbildung 5.25 Episoden Jonas (*Quetschlemma*)

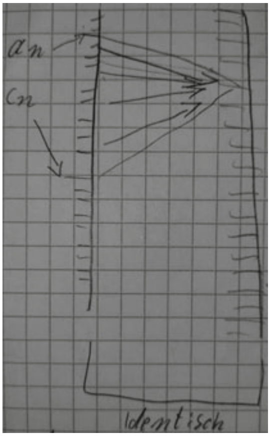

Abbildung 5.26 Jonas' Skizze zur *Quetschlemma*-Aufgabe

dargestellt: Auch er fertigt eine fragwürdige Skizze (06:37) an (vgl. Abbildung 5.26). Dann (16:10) schreibt er auf: „$a_n \leq b_n \leq c_n \leq c$“ und schließlich (19:57) notiert er: „a_n, b_n, c_n Nullfolgen.“ Auch Jonas scheint so massive Verständnisprobleme zu haben, dass er keine Ideen hat und auch im Heurismeneinsatz stark eingeschränkt ist.

Zu Maliks Bearbeitung derselben Aufgabe zeichnen bereits die Episodenkodierungen ein ganz anderes Bild: Von über 45 Minuten werden nur eine Minute und vierzig Sekunden für die *Analysis* aufgewendet (vgl. Abbildung 5.27). Bis auf eine kurze Phase (23:11–24:37) wird auch nicht mit dem Skript gearbeitet. Beides deutet auf Sicherheit im Umgang mit den Begriffen hin. Dennoch stößt Malik auf einige Schwierigkeiten, die im Folgenden beschrieben werden:

Analysis (00:22–02:09)

Zunächst stellt er sich den Sachverhalt mit Hilfe einer *imaginären Figur* vor: „Wenn a_n [und] c_n gegen den gemeinsamen Grenzwert c konvergieren, jetzt versuche ich mir das ein bisschen zu visualisieren, das heißt ja, dass zwischen a_n und c_n sozusagen kein Abstand mehr herrscht und dann muss auch, jetzt nur von der logischen Sicht, auch b_n gegen c konvergieren, weil das ja zwischen a_n und c_n ist und dass vom Abstand her ja zwischen a_n und c_n kein Abstand herrschen kann (00:35)“. Anschließend notiert er die Konvergenz von a_n und c_n in Formelgestalt (vgl. Abbildung 5.28). Wenngleich Malik keine *Skizze* anfertigt, scheint er sich die wesentlichen Zusammenhänge visualisiert zu haben und notiert diese auch formal.

Exploration (02:09–35:47)

Nach einer kurzen Überlegung (03:39), die er nicht weiter verwendet (er stellt die gegebene Gleichung zu $a_n - b_n \leq 0$ und $b_n - c_n \leq 0$ um), geht er wieder zu seiner *imaginären Figur* zurück: „Jetzt versuche ich gerade erstmal wieder, weil bei meiner ersten Vorstellung war das ja relativ klar, zu überlegen, ob [...] ich das irgendwie aus dieser graphischen Vorstellung leichter ins Mathematische übersetzen könnte (04:24).“ Etwas später deutet er eine Idee an: „Wenn jetzt $c_n - c$ immer kleiner als Epsilon ist, dann ist ja auch $b_n - c$ kleiner als Epsilon und dasselbe gilt dann mit dem a_n-Bereich (05:20).“ Er erkennt allerdings, dass es hier ein Problem mit dem Betrag gibt, entschließt sich, dieses aber zunächst zu ignorieren: „Da ich eine Idee hatte ohne Betrag, versuch ich es erstmal ohne Betrag und überlege dann, wie man das mit dem Betrag machen könnte (06:05).“ Nach weiteren Überlegungen (Malik notiert sein Ziel, dass $|b_n - c| < \varepsilon$ für alle

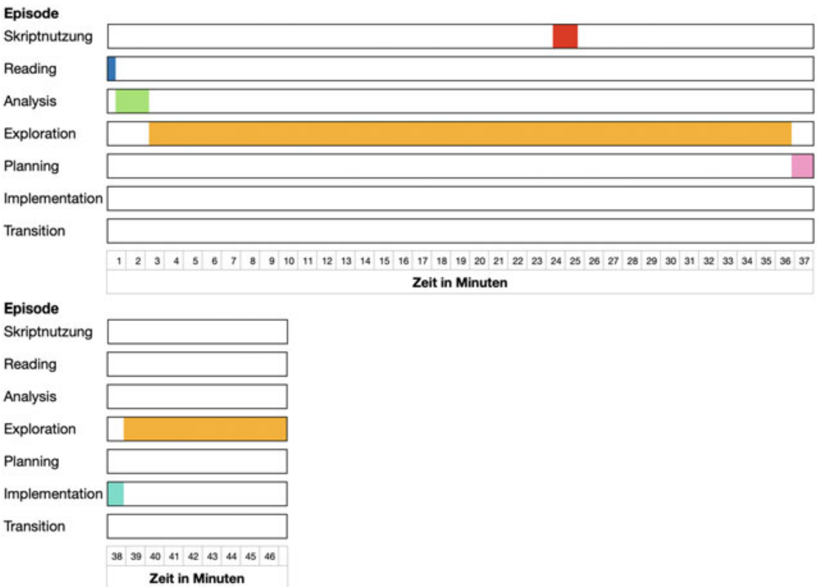

Abbildung 5.27 Episoden Malik (*Quetschlemma*)

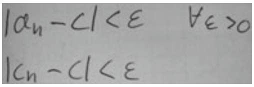

Abbildung 5.28 Konvergenz der Folgen a_n und c_n

ε sein muss und schreibt die Gleichung $|a_n| - |c| < c$[24] auf, die er im weiteren Verlauf ebenfalls nicht mehr verwendet), geht er erneut auf die visuelle Vorstellung zurück: „Ich hab mir das wieder versucht graphisch vorzustellen und bin auf den Schluss gekommen, dass wir einmal nur zeigen müssen, dass es ja größer ist und einmal zeigen müssen, dass es kleiner ist (09:52).“ Anschließend (10:40–12:49) notiert er eine Abschätzung nach oben (vgl. Abbildung 5.29 – die mittlere Zeile wurde sofort nach dem Notieren durchgestrichen).

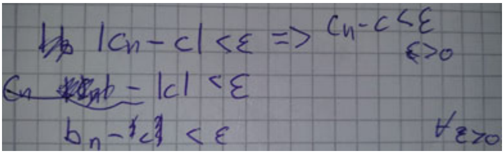

Abbildung 5.29 Abschätzung nach oben

Dies stellt bereits nach knapp 13 Minuten die Hälfte des Beweises dar. In der Folge werden aber einige Schwierigkeiten mit dem Betragsbegriff deutlich, so dass die zweite Hälfte (es muss noch gezeigt werden, dass auch $c - b_n < \varepsilon$ ist) sehr viel mehr Zeit und Energie in Anspruch nimmt. Zwar ist Malik, wie eben gesehen, sich dessen bewusst, dass $|x| > x$ ist, die Fallunterscheidung, dass $|x|$ entweder gleich x oder gleich $-x$ ist (Abbildung 5.30 zeigt die entsprechende Stelle aus dem während der Bearbeitung vorliegenden Skript), kommt ihm aber nicht in den Sinn.

Satz 1.4: *Zu einem $x \in \mathbb{K}$ aus dem angeordneten Körper $\mathbb{K}$ erklären wir den* (Absolut-)Betrag *als*

$$|x| := \begin{cases} x, & \textit{falls } x \geq 0 \\ -x, & \textit{sonst} \end{cases} . \tag{1.5}$$

Abbildung 5.30 Skriptausschnitt zum Betrag

[24] gemeint ist auf der rechten Seite sicherlich ε.

Nun sucht Malik zunächst mehr als 20 Minuten vergeblich nach einer Möglichkeit, den zweiten Teil der Aufgabe zu beweisen. Im Folgenden sollen die wesentlichen Ideen nur kurz skizziert werden. Einen guten Eindruck in Maliks Überlegungen gibt seine Niederschrift ab diesem Zeitpunkt, die in Abbildungen 5.31–5.36 vollständig abgebildet ist.

Zunächst (12:59) fasst er zusammen: „Wir wissen ja jetzt, es ist $b_n - c$ kleiner als ε, wir wissen nur nicht, dass der Betrag kleiner ist.“ Ein (erfolgloser) Ansatz ist anschließend (14:58), zu zeigen, dass $b_n - c \geq 0$ (vgl. Abbildung 5.31) ist (dann wäre dieser Ausdruck gleich seinem Betrag). Das muss aber nicht so sein. Ab (18:33) fasst er noch einmal zusammen, was er bereits gezeigt hat und was gegeben ist (vgl Abbildung 5.32 und 5.33 oben). Ein weiterer Ansatz, der nicht zum Ziel führt (ab 21:23), ist der, die beiden gegebenen Ungleichungen

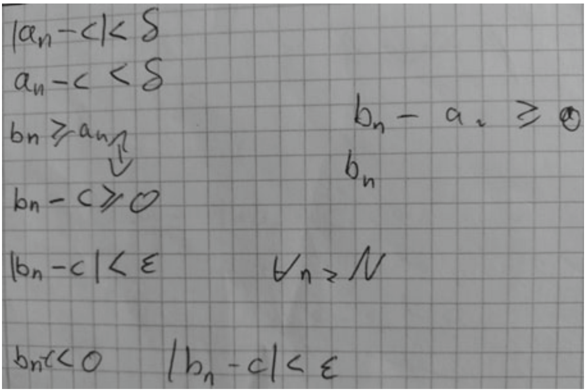

Abbildung 5.31 Maliks Notizen zum Quetschlemma (Teil 1)

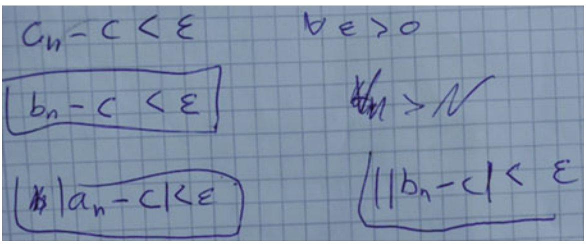

Abbildung 5.32 Maliks Notizen zum Quetschlemma (Teil 2)

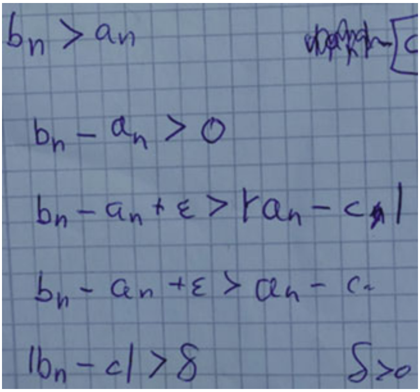

Abbildung 5.33 Maliks Notizen zum Quetschlemma (Teil 3)

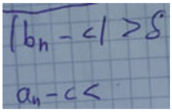

Abbildung 5.34 Maliks Notizen zum Quetschlemma (Teil 4)

($b_n - a_n \geq 0$ und $|a_n - c| < \varepsilon$) durch Addition mit einander zu verknüpfen (vgl. Abbildung 5.33). Nach einem kurzen Blick ins Skript (23:11–24:30), kommt Malik auf die Idee, einen Beweis durch Widerspruch zu führen (24:50)[25], also zunächst anzunehmen, dass es ein δ gibt, so dass $|b_n - c| > \delta$ ist (vgl. Abbildung 5.34). Bei (25:48) sagt er: „Jetzt überleg ich, ob das graphisch auch Sinn macht vielleicht, ob ich wirklich nur so viel wissen kann mit der Aussage. Also das sind ja zwei Teilaussagen, die wir eigentlich haben: b_n kleiner gleich c_n und a_n kleiner gleich b_n und zum einen gehe ich, weil die Aufgabe das sagt, davon aus, dass ich beides brauche und zum anderen kann ich mir das gut graphisch vorstellen, dass ich beides brauche und überlege, ob ich wirklich auch alle Informationen sozusagen mit dem b_n kleiner gleich c_n, die ich daraus bekommen kann, ob ich das schon hab.“ Aus dieser Aussage wird zum Ersten deutlich, dass Malik nach wie vor auf visuelle Vorstellungen zurückgreift, zum Zweiten verweist er darauf, dass er *alle Voraussetzungen nutzen* muss und zum Dritten teilt er die

[25] Obwohl diese Idee direkt auf die Skriptnutzung folgt, ist nicht zu erkennen, dass der Blick ins Skript zur ihrer Generierung beigetragen hat. Malik schaut sich die Grenzwertsätze an, die weder direkt etwas mit dieser Idee zu tun haben, noch durch Widerspruch bewiesen werden.

Aufgabe in zwei *Teilaufgaben* auf. In der Folge vergewissert er sich, dass er die Informationen zu c_n bereits ausgeschöpft hat. „Das heißt, dass ich [...] mich auf diese Teilaussage gar nicht mehr konzentriere und überlege, was kann ich jetzt nochmal wirklich aus a_n ist kleiner gleich b_n rausholen (26:58)?“ Bereits vorher hat er nur die Informationen zu a_n verwendet (wie aus der Niederschrift deutlich wird), hinterfragt und bestätigt dieses Vorgehen hier aber noch einmal. Wenig später sagt Malik: „Diese Aussage $|b_n - c|$ größer als δ können wir eigentlich mit der Aussage $|a_n - c|$[26] ist kleiner als ε widerlegen. Das kann ich mir jetzt gerade wieder vorstellen, aber ich überlege gerade auch noch mal, wie das mathematisch aussehen muss (29:11).“ Auch hier nutzt er weiterhin eine visuelle Vorstellung. Der Ansatz des indirekten Beweises scheint ihm gedanklich ebenfalls zu helfen, wenngleich er diesen formal nicht weiter verwendet. Er präzisiert seine Idee weiter: „Wir haben im Prinzip ja schon fast gezeigt, dass b_n maximal so groß ist, wie c, bzw. $c + \varepsilon$. Jetzt müssen wir eigentlich nur beweisen, dass es mindestens so groß ist, wie $c - \varepsilon$ und das können wir ja [...] damit, dass ja a_n gegen c konvertiert (sic) (30:04).“ Malik betont noch einmal: „Ich weiß auf jeden Fall, dass ich ja die Aussage brauche $a_n - c < \varepsilon$. Das macht für mich einfach auch von der Vorstellung Sinn. Das heißt, ich muss auch auf jeden Fall mit dieser Aussage im mathematischen Bereich arbeiten (31:12).“ Anschließend (31:28) notiert er erneut, was er zeigen möchte ($|b_n - c| < \varepsilon$) und aus der „Vorstellung, ohne das mathematisch zu haben (32:36)“, dass $c - \varepsilon < a_n$ ist (vgl. Abbildung 5.35). Es folgt ein Versuch, dies formal zu beweisen, der zunächst aber auch nicht zum Ziel führt (33:41 – vgl. Abbildung 5.36 links). Das fällt ihm aber recht schnell auf (*Evaluation*): „Jetzt haben wir genau die falsche Seite (34:41)“ (Denn es wurde gezeigt, dass $c + \varepsilon > a_n$ ist).

Planning (35:47–36:57)

Schließlich fasst Malik doch den Plan, das Negative des Terms im Betrag zu betrachten: „Wenn $a_n - c$ kleiner als ε ist, der Betrag davon, dann ist ja auch der Betrag des Negativen davon kleiner als ε (35:47).“ Er erklärt noch, wie er auf diese Idee gekommen ist: „Ich habe gesehen, dass am Ende irgendwie das Vorzeichen sich geändert hat. [...] Also ich hab hier $c + \varepsilon > a_n$. Hab gesehen, dass ich einmal $+\varepsilon$ hab statt $-\varepsilon$ und die anderen beiden haben halt nicht verdrehtes Vorzeichen und ich hab größer gleich statt kleiner gleich, wodurch ich halt gemerkt habe, dass ich zum Teil ein Minus brauche, also zum Teil die Vorzeichen

[26] Die Betragsstriche spricht Malik nicht mit, er zeigt aber auf die entsprechenden Ungleichungen in seiner Niederschrift.

ändern muss und zum Teil nicht, und deswegen habe ich mir schon gedacht, dass es irgendwie im Betrag liegen muss (36:19).“

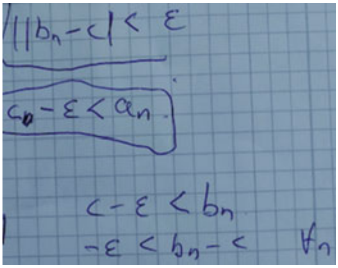

Abbildung 5.35 Maliks Notizen zum Quetschlemma (Teil 5)

In der folgenden *Implementation* (36:57–37:52) wird dieser Plan recht schnell in die Tat umgesetzt (vgl. Abbildung 5.36 Mitte oben). Es folgt eine weitere *Exploration*-Phase, in der noch recht lange (37:52–46:25) braucht, um die beiden bewiesenen Aussagen, die er zu Beginn dieser Phase (38:12) notiert (vgl. Abbildung 5.35 unten), in die gesuchte Betragsungleichung zu überführen. Auch hier hätte ein gefestigteres Verständnis des oben angesprochenen Aspektes des Betragsbegriffs (dass $|b_n - c| < \varepsilon$ äquivalent ist zu $b_n - c < \varepsilon \wedge c - b_n < \varepsilon$) den Vorgang deutlich abkürzen können.

Zusammenfassend ergibt die Betrachtung dieses Problemlöseprozesses Folgendes: Malik hat noch nicht alle Aspekte des Betragsbegriffes verinnerlicht, was die Bearbeitung der Aufgabe erschwert. Dennoch gelingt es ihm nach einiger Zeit, diese Schwierigkeiten zu überwinden und die Aufgabe zu lösen. Hierbei haben ihm ein gutes Verständnis des zugrunde liegenden Grenzwertbegriffes (*Vorwissen*), geschickter *Heurismeneinsatz* (*imaginäre Figur*, *Nutzen aller Voraussetzungen*, *Zerlegung in Teilaufgaben* etc.) sowie eine gute *metakognitive Steuerung* durch *Zielsetzung* (Was ist noch zu zeigen?) und *Evaluation* der gewählten Ansätze geholfen. Es ist also durchaus möglich, gewisse Lücken während des Problembearbeitungsprozesses zu schließen. Häufig ist es sogar erwünscht, dass durch die Aufgabenbearbeitung neue Inhalte oder Aspekte eines Begriffs erschlossen werden. Vermutlich wird Malik durch diesen Prozess einen tieferen Einblick in den Betragsbegriff bekommen haben, als wenn er den oben zitierten Skriptausschnitt (vgl. Abbildung 5.30) auswendig gelernt hätte.

Im Folgenden werden exemplarisch einige Verständnisprobleme der anderen Bearbeitungen aufgeführt, die ebenfalls den Erfolg verhindern.

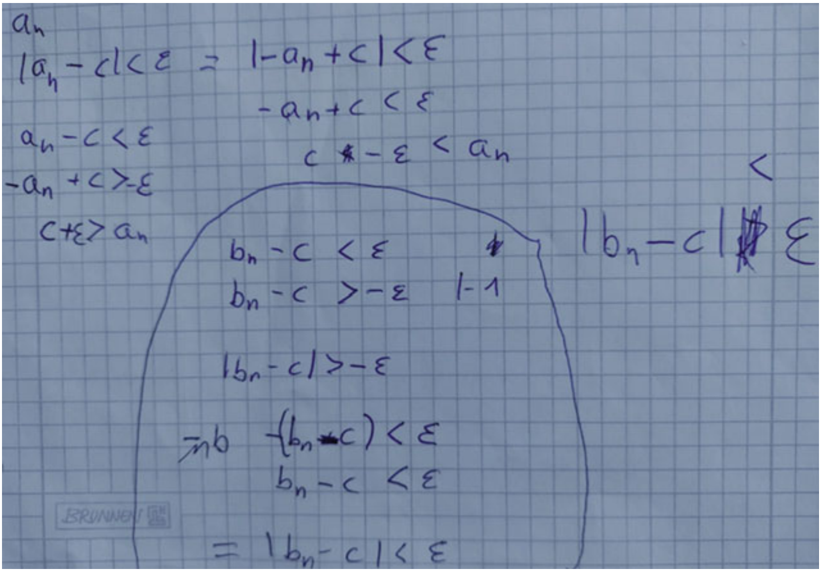

Abbildung 5.36 Maliks Notizen zum Quetschlemma (Teil 6)

Patrick (*Umkehrung der Grenzwertsätze*) hat Schwierigkeiten mit dem Konvergenzbegriff. So sagt er: „Konvergent ist, wenn [die Folge] gegen einen Wert konvergiert, also größer als Null definitiv (11:48).“ Natürlich wäre auch eine Nullfolge oder eine Folge, die gegen einen negativen Grenzwert geht, konvergent. Noch größere Probleme ergeben sich aber mit dem Divergenzbegriff. Bei (11:24) sagt er: „Wenn eine der Folgen divergiert, dann geht die gegen Null. Nee moment, divergent, geht die gegen Null oder geht die gegen unendlich?“ Ersteres ist schlicht falsch und auch die Vorstellung, dass divergente Folgen gegen Unendlich (oder minus Unendlich) gehen, stimmt nicht immer. Auch alternierende Folgen können divergent sein. Mit diesem Wissen könnte man leicht ein Gegenbeispiel zu der Behauptung finden (etwa $x_n = \frac{1}{n}$ und $y_n = (-1)^n$). Seine Schwierigkeiten mit dem Begriff zeigen sich auch darin, dass er mehrfach (bei 03:09 und bei 14:09) nach einem Beispiel für divergente Folgen sucht und keines findet, obwohl das Skript mehrere Beispiele[27] liefert.

[27] So stehen etwa direkt nach der bereits in Abschnitt 5.5.3 erwähnten Definition der *bestimmten Divergenz*, die Patrick sogar vorliest, die Beispiele „Die Folge $\{n\}_n$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$“ und „Die Folge $\{(-1)^n\}_n$ ist divergent aber nicht bestimmt divergent“.

Niklas hat bei der Bearbeitung der Aufgabe zur *konstanten Funktion* (vgl. Abschnitt 5.2.2) einige Schwierigkeiten mit dem Stetigkeitsbegriff, die sich in folgenden Aussagen offenbaren: „[Aus der Definition der Stetigkeit] folgt ja, es muss ein $\delta > 0$ existieren mit der Eigenschaft, dass der Betrag von $f(x) - f(x_0)$ quasi gleich Null ist für alle x, die in diesem Intervall liegen (24:08)“ und „Die Funktionswerte, wenn ich mir die jetzt auf der y-Achse vorstelle [...], können sich nicht weiter von einander entfernen, wenn die Werte auf der x-Achse sich auch näher kommen.“ Zwar ließe sich diese Aufgabe mit Hilfe des Folgenstetigkeitskonzepts auch trotz dieser Fehlvorstellungen lösen, ein alternativer Ansatz ohne dieses Konzept wird aber auch hier verhindert.

Bei den Prozessen zum *Grenzwert von Quotient und Wurzel* (vgl. Abschnitt 5.2.3) ist beiden Bearbeitern der in einer vorherigen Übung bewiesene Zusammenhang, dass für jede Konstante k gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$, ohne den die Aufgabe kaum zu lösen ist, nicht bekannt. Zwar ist grundsätzlich denkbar, dass diese Aussage selbst hergeleitet wird, was aber den Aufwand noch um einiges erhöhen würde. Erschwerend kommt in diesem Fall hinzu, dass der Zusammenhang nicht im Skript, sondern in alten Übungen zu finden ist, sonst hätte Julia, die gut mit dem Skript arbeitet, diesen evtl. gefunden.

Auch prozedurale Mängel führen zu unvollständigen Bearbeitungen, wie das weiter oben in diesem Abschnitt bereits behandelte Beispiel von Andreas’ Umgang mit Doppelsummen zeigt. Dieser Fehler hat allerdings nicht zu völligem Misserfolg geführt.

Zusammenfassend lässt sich in Bezug auf **Frage 6** sagen, dass gerade Schwierigkeiten auf begrifflicher Ebene die Prozesse (und auch den Einsatz von Heurismen) erheblich erschweren können. Bei Malik haben wir allerdings gesehen, dass solche Schwierigkeiten durch guten Heurismeneinsatz und Metakognition auch überwunden werden können. Auch fehlendes Zusammenhangs- oder prozedurales Wissen kann zu Schwächen in der Bearbeitung führen.

5.5.6 Metakognitive Aktivitäten

Wie die Heurismen wurden auch die metakognitiven Aktivitäten in einer Tabelle 5.3 dargestellt. Außerdem wurde hier noch der durch die Leitfragen (vgl. Abschnitt 5.3.7) bestimmte Grad der Metakognition aufgeführt. Da Tim während seiner Bearbeitung so wenig gesprochen hat, dass kaum metakognitive Aktivitäten zu erkennen waren, wurde sein Prozess zur besseren Übersicht an das Ende der Tabelle verschoben. Dasselbe gilt, in etwas schwächerem Maße, auch für Jonas.

Tabelle 5.3 Übersicht über die metakognitive Aktivitäten

Prozess	Aufgabe	Grad	Klär	Ziel	PA	Vor	Ev	Fort	Kontr	Schw	Reg	inVer	eigFäh
Patrick 1	Umkehrung GWS	M1	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x
Jan 1	Fixpunkt	M1		x		x	x	x	x	x			
Jan 2	Rangungleichung	M2		x		x	x	x	x	x	x	x	
Andreas 2	lin. Unabhg.	M0		x		x	x	x	x	x		x	
Malik 1	Quetschlemma	M2		x	x		x	x	x	x	x	x	
Malik 2	n-te Wurzel	M1		x	x	x	x	x	x	x	x	x	
Niklas 1	n-te Wurzel	M0		x	x	x	x	x	x	x	x	x	
Niklas 2	konstant	M0			x	x	x	x	x	x			
Manuel 1	Grenzwert L	M1		x		x	x	x	x	x	x	x	x
Julia 1	Grenzwert L	M1		x		x	x	x	x	x			x
Julia 2	Monotonie	M2		x	x	x			x	x	x	x	
Jonas 1	Quetschlemma	M0		x		x			x				
Tim 1	Quetschlemma	M0		x									

Lässt man diese beiden Bearbeitungen außen vor, fällt auf, dass ein Großteil der Kategorien in fast jedem Prozess vorkommt. Dies könnte ein Hinweis darauf sein, dass insgesamt im beobachteten Kontext die Metakognition auf einem hohen Niveau ist (was angesichts des Alters der Probanden im Vergleich etwa zu Schülern durchaus plausibel wäre). Da das Kategoriensystem allerdings eigens für diese Arbeit entwickelt wurde und es somit keine Vergleichsmöglichkeiten zu anderen Kontexten gibt, könnte es auch bedeuten, dass die Wahl der Kategorien zu grob ist (davon abgesehen, dass die Betrachtung von nur elf Prozessen ohnehin nur eine Orientierung und keine verallgemeinerbaren Aussagen zulässt). Auch trägt die Dauer der Prozesse, die mit bis zu einer Stunde deutlich höher ist als andere bekannte Beobachtungen von Problembearbeitungen, möglicherweise dazu bei, dass viele verschiedene Aktivitäten auftreten. Trotzdem (oder gerade deshalb) ist es interessant, die Lücken in dieser Tabelle genauer unter die Lupe zu nehmen.

In jedem Prozess tritt entweder *Zielsetzung* oder *Planungsaktivität* auf. Wie bereits beschrieben (vgl. S. 108 f.), unterscheiden sich diese beiden Kategorien nur darin, dass bei letzterer noch ein grober Plan genannt wird, wie das gesetzte Ziel zu erreichen ist. *Zielsetzung* ist also in *Planungsaktivität* enthalten. Deswegen macht es auch keinen großen Unterschied, dass bei Niklas' zweitem Prozess nur letztere, erstere aber nicht vorkommt. Es stellt sich aber die

Frage 7: Inwiefern wirken sich *Planungsaktivitäten* auf die Bearbeitungsqualität aus?

Betrachtet man nur die Zahlen, so sind sowohl bei Prozessen mit Planungsaktivität als auch bei solchen ohne alle Grade der Metakognition von M0 bis M2 vertreten. Bei der Lösungsqualität sieht es ähnlich aus, wobei nur Malik, der in beiden Prozessen Planungsaktivitäten durchführt, die beste Lösungsqualität L3 erreicht, was auch auf individuelle Faktoren zurückzuführen sein könnte. Hieraus lassen sich also kaum Vermutungen ableiten. Um einen besseren Eindruck von *Planungsaktivitäten* zu bekommen, wird im Folgenden aus jedem Prozess, der eine solche enthält, ein Beispiel betrachtet.

Malik sagt bei der Bearbeitung der *Quetschlemma*-Aufgabe (vgl. Abschnitt 5.2.1), dass er eine „Idee hatte ohne Betrag“, weswegen er plant, die Behauptung zunächst ohne Betrag zu beweisen, um anschließend zu überlegen, „wie man das mit dem Betrag machen könnte (06:04).“ Gemeint ist, in diesem Zusammenhang, zunächst zu zeigen, dass $b_n - c < \varepsilon$ ist. Dies ist das gewählte Zwischenziel. Der Weg hierhin wird zwar nicht explizit benannt, es wird aber aus der weiteren Bearbeitung deutlich, dass die Idee für den Studenten ziemlich klar war. In diesem Fall wurde das benannte Ziel mit den geplanten Mitteln erreicht (bei 12:38) und hat wesentlich zur Lösung der Aufgabe beigetragen.

Bei der Bearbeitung der Aufgabe zur *n-ten Wurzel* (vgl. Anhang D) sagt Malik: „Jetzt überlege ich, wie das bei $2^n + 3^n$ aussieht, wenn man da die n-te Wurzel zieht (03:54).“ Außerdem sagt er in diesem Zusammenhang, dass er dies tut, um mehr über den gesuchten Grenzwert zu erfahren, unter anderem, um seine Vermutung zu bestätigen, dass dieser nur von a_N abhängt. Es wird also ein klares Ziel benannt und als Weg ein *Spezialfall* gewählt. Diese Planung führt dazu, dass als Grenzwert a_N vermutet wird, was Malik letztlich auch beweisen kann.

Bei derselben Aufgabe fasst Niklas den Plan: „Ich überlege halt gerade, ob ich eine Möglichkeit finde, unter der Klammer[28] irgendetwas auszuklammern, damit ich halt ein Produkt unter der Klammer habe, wodurch ich dann die Möglichkeit habe, etwas aus der Wurzel herauszuziehen (15:15).“ Das Ziel ist also, einen Faktor aus der Wurzel herausziehen zu können, was durch ausklammern mit Hilfe des Distributivgesetzes geschehen soll. Zwar ist an dieser Stelle noch nicht klar, welcher Faktor das sein soll, aber auch diese Idee trägt wesentlich zur Lösung des Problems bei.

Dass eine *Planungsaktivität* aber nicht zum Ziel führen muss, zeigen die nächsten beiden Beispiele. Bei der Aufgabe *Konstante Funktion* sagt Niklas: „Jetzt würde ich probieren, das halt irgendwie über das Delta zu nem Widerspruch zu bringen (25:55).“ Das Ziel (Widerspruch) soll also mit Hilfe des Deltas aus der Stetigkeitsdefinition erreicht werden. Julia nennt während ihres Prozesses zur *Monotonie* (siehe Anhang D) mehrfach den Zwischenwertsatz als Mittel zur Erreichung des (nicht explizit genannten) Ziels, die Monotonie der Funktion zu zeigen (was kein Zwischenziel, sondern Gesamtziel der Aufgabe ist). So sagt sie beispielsweise: „[...], dann denke ich, dass das das irgendwie mit dem Zwischenwertsatz zu zeigen sein wird (11:36).“ Sowohl bei Niklas als auch bei Julia wird bei diesen Plänen kein Fortschritt erzielt. Beide Probanden haben zwar Mittel zur Erreichung ihrer Ziele benannt, sie scheinen aber, im Gegensatz zu den vorher genannten Beispielen keine genauere Vorstellung davon zu haben, wie diese Mittel eingesetzt werden sollen, was schon an der Verwendung des Wortes „irgendwie“ in beiden Zitaten deutlich wird. Während bei Niklas der Plan zumindest nicht der üblichen Lösung dieser Aufgabe entspricht, wäre Julias Idee bei konsequenter Umsetzung tatsächlich zielführend. In beiden Fällen hat mangelndes Fachwissen die Umsetzung der Pläne verhindert.

In Bezug auf **Frage 7** zeigt sich also, dass *Planungsaktivitäten* wichtige Elemente von Problemlöseprozessen sein können. Ob sie wirklich weiterhelfen, ist aber stark von der Situation abhängig. Neben dem Fachwissen scheint es besonders darauf

[28] gemeint ist hier sicherlich die Wurzel

anzukommen, wie konkret der Plan bereits im Kopf des Probanden vorhanden ist. Dieser Faktor ist von außen nur schwer zu erfassen. Allerdings konnten bei den oben genannten Beispielen die genauen Formulierungen bereits Hinweise darauf geben.

Es folgt eine kurze Untersuchung weiterer Beobachtungen zu metakognitiven Aktivitäten, die auch nach genauerer Betrachtung weniger wichtig zu sein scheinen. Diesen Aktivitäten wird deswegen keine eigene Fragestellung gewidmet.

Die metakognitive Aktivität der *Zielsetzung* kann ähnliche Funktionen erfüllen, auch wenn hier die Mittel zur Erreichung nicht direkt benannt werden. Es ist auch möglich, dass zunächst ein Ziel genannt wird und erst später eine *Idee* zu dessen Erreichung auftritt. In den Abschnitten zu Schoenfeld-Episoden (5.5.2) und Ideengenerierung (5.5.5) wurde beschrieben, wie sich Planung auf den Lösungserfolg auswirkt und welche Aktivitäten zur Generierung von Ideen beigetragen haben.

Bei Julias Bearbeitung der Aufgabe zur *Monotonie* wurde (wie auch bei Jonas und Tim) weder *Einschätzen des Lösungsfortschritts* noch *Evaluation* kodiert. Beide Aktivitäten sind rückblickend auf die bisherigen Tätigkeiten. Da bei den drei genannten Prozessen kein Ansatz durchgeführt und damit auch kein Lösungsfortschritt, der über die mehr oder weniger erfolgreiche Analyse der Aufgabe hinausgeht, erzielt wurde, waren diese metakognitiven Aktivitäten gar nicht möglich.

Die *Einschätzung der eigenen Fähigkeiten* wurde von den metakognitiven Aktivitäten am seltensten durchgeführt. Hierbei haben die Probanden fast ausschließlich negative Aussagen über sich selbst getätigt: Patrick, der insgesamt große Verständnisschwierigkeiten hat, tätigt mehrfach Aussagen wie: „Mir fällt auf, dass mir da doch ein bisschen die Kenntnis fehlt (10:20)“ (ohne genauer zu spezifizieren, worauf sich diese Kenntnis bezieht) oder „Da vertue ich mich öfter mal mit (11:38)“ (in Bezug auf die Definition der Divergenz). Auch die Aussagen von Manuel („Ich stehe ein bisschen gerade auf dem Schlauch (18:59)“) und Julia („Ich glaub, das ist zu kompliziert für meinen kleinen Kopf (25:54)“) kommentieren nur grundsätzliche Schwierigkeiten, ohne diese genauer zu spezifizieren und sind daher für die Bearbeitung des jeweiligen Problems wenig hilfreich. Alle diese Aussagen fanden nach mindestens 10 Minuten der Beschäftigung der Aufgabe statt und stehen dementsprechend nicht als Einschätzung der (individuellen) Aufgabenschwierigkeit am Anfang der Prozesse. Ein positiver Einfluss auf den Bearbeitungsprozess ist damit höchst unwahrscheinlich. Zwar geben solche Aussagen einen Hinweis auf Schwierigkeiten bei der Bearbeitung und hängen daher mit dem Lösungserfolg zusammen, auf die Qualität der metakognitiven Aktivitäten geben sie aber kaum einen Hinweis. In allen drei Fällen wurden aber *Schwierigkeiten* konkreter *benannt*, woran sich eine grundsätzlich positive Reflexion der Bearbeitung erkennen lässt.

Auch bei Äußerungen zum *intuitiven Verständnis* konnten keine Vor- oder Nachteile für die Problembearbeitung ausgemacht werden. Die Tabelle suggeriert einen Zusammenhang mit der *Regulation des Vorgehens*, aber auch hierfür konnten keine Bestätigungen oder mögliche inhaltliche Begründungen gefunden werden.

Wie bereits in Abschnitt 5.3.5 beschrieben, lassen sich die Aktivitäten *Voraussicht*, *Evaluation* und *Regulation* zu Kontrollstrategien im Sinne von Schoenfeld (1985) zusammenfassen, also solchen Strategien, die direkt mit Richtungsentscheidungen zusammenhängen. Wie die folgenden Beispiele zeigen werden, wurde eine *Regulation* (also eine Entscheidung, das Vorgehen zu verändern) häufig in einem Atemzug mit einer Beurteilung eine Ansatzes in Form von *Voraussicht* (a priori) oder *Evaluation* (a posteriori) durchgeführt. In solchen Fällen wurde *Regulation* nicht gesondert kodiert. Das Fehlen dieser Aktivität hat also (ähnlich wie bei der *Zielsetzung*) keinen wesentlichen Einfluss auf die Bearbeitung der Aufgaben, sofern die entsprechenden Aktivitäten durchgeführt wurden.

Im Zusammenhang mit Kontrollstrategien spricht Schoenfeld auch die *Wild-Goose-Chase*-Prozesse (vgl. Abschnitt 5.5.2) an. In solchen Prozessen schlagen die Bearbeiter einen Weg ein und behalten diesen für längere Zeit bei, ohne diese Wahl mit Hilfe von Kontrollstrategien weiter zu hinterfragen (Schoenfeld, 1985, S. 192). Ein solches Verhalten war, wie bereits erwähnt, bei den betrachteten Prozessen kaum zu beobachten. Meist hatten die Probanden eher Schwierigkeiten damit, überhaupt einen Lösungsansatz zu finden, den es sich (aus ihrer Sicht) lohnte, weiter zu verfolgen. Das hängt sicherlich auch mit der Wahl der Aufgaben zusammen, da hier (mit wenigen Ausnahmen), im Gegensatz zu den Problemen von Schoenfeld, aber auch vergleichbaren Untersuchungen aus dem Schulkontext, weniger konkrete Berechnungen als konzeptionelles Verständnis und logisches Schließen im Mittelpunkt stehen. Allerdings könnte das seltene Auftreten solcher *Wild Goose Chases* auch als Zeichen guter Metakognition (oder Kontrolle im Sinne Schoenfelds) gesehen werden.

Ob bestimmte Kontrollstrategien wirklich verhindert haben, dass sich ein Proband zu lange mit einem Ansatz beschäftigt, lässt sich schwer sagen, da es höchst spekulativ ist, was passiert wäre, hätte die entsprechende Beurteilung des Ansatzes nicht stattgefunden. Im Folgenden sollen zunächst verschiedene Spielarten dieser Strategien benannt werden, bevor einige Stellen betrachtet werden, bei denen sich Studierende längere Zeit einem gewählten Ansatz gewidmet haben.

Die wesentlichen Kontrollstrategien sind die *Voraussicht* und die *Evaluation*. Beide lassen sich noch weiter unterteilen in die positive und die negative Einschätzung eines Ansatzes. So bedeutet etwa *negative Voraussicht*, dass ein Ansatz a priori als wenig hilfreich eingeschätzt (und dem entsprechend meistens auch nicht weiter verfolgt) wird. Die Paraphrase „Das hilft mir nicht weiter[29]“ ist typisch für diese Strategie. Ansätze werden hierbei, im Gegensatz zur *Evaluation* bereits sehr früh beurteilt. Interessant ist, dass diese Strategie häufig im Zusammenhang mit Aussagen aus dem Skript auftritt und eher selten im Bezug auf eigene Ideen. Ein Grund dafür liegt möglicherweise darin, dass eigene Ideen, sofern sie bereits sehr früh als wenig hilfreich eingeschätzt werden, gar nicht erst geäußert werden und deshalb auch keine explizite Einschätzung getätigt wird. Einige Ausnahmen gibt es allerdings: Malik etwa sagt, ohne das Skript zu benutzen bei seinen rechnerischen Manipulation zur Aufgabe *n-te Wurzel*: „Bernoulli-Ungleichung wird mir jetzt nicht weiterhelfen, vermutlich (20:03).“ Ein weiteres Beispiel wäre Niklas, der bei der Aufgabe *Konstante Funktion* die Idee hat eine *Skizze* anzufertigen, diese aber mit den Worten „Ich glaube, das führt zu ner Sackgasse (12:33)“ wieder verwirft. Auch Manuel beurteilt eine eigene Idee (bei der Aufgabe *Grenzwert von Quotient und Wurzel* diese beiden Grenzwerte $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ und $\lim \sqrt[n]{a_n}$ gleichzusetzen) mit den Worten „Kann ich mir, ehrlich gesagt, nicht vorstellen (19:36)“ Einige Male wird auch der Aufwand als Grund genannt, einen Ansatz nicht durchzuführen. Zitate wie „Das wäre zu mühselig, das jetzt alles mit der Hand auszurechnen (Andreas – 16:34),“ „Halte ich für unwahrscheinlich, weil die [Idee] sehr lange dauern würde (Niklas, n-te Wurzel – 59:06)“ und „Das sieht eigentlich auch sehr aufwändig aus (Malik, n-te Wurzel – 22:49)“ sind vermutlich weniger ein Ausdruck von Faulheit als vom Vertrauen darin, dass eine sinnvoll gestellte Aufgabe keine solch langwierigen Berechnungen erfordert. Insgesamt bleiben Begründungen, warum ein Ansatz als nicht hilfreich eingestuft wird, eher aus. Auf der anderen Seite steht die *positive Voraussicht*, bei der bereits vor seiner Durchführung ein Ansatz als hilfreich eingeschätzt wird. Hier ist es allerdings so, dass der direkte Bezug zum Skript („Satz 4.2 hilft mir, gehe ich von aus (Patrick – 06:08)“ oder „Das heißt, dass ich diese Idee und Definition von Intervallschachtelung und Häufungspunkt irgendwie brauchen werde (Julia, Grenzwert von Quotient und Wurzel – 19:01)“) eher die Ausnahme bildet. Vielmehr werden eigene Ideen mit Aussagen wie „Mit der Überlegung müsste das funktionieren (Jan, Rangungleichung – 05:45)“ beurteilt. Häufig geschehen diese Einschätzungen bereits in einem Atemzug mit der Benennung der Idee, etwa: „Ich glaub, wenn ich [die] n-te Wurzel ziehe, hätten wir’s bewiesen (Malik, n-te Wurzel – 15:40)“ oder „Wenn ich das hier so aufschreibe, dann denke ich, dass das irgendwie mit dem Zwischenwertsatz zu zeigen sein wird (Julia, Monotonie – 11:49).“ Auch bei der *positiven Voraussicht* werden selten Begründungen geliefert, warum eine

[29] Meist im Sinne von „Das wird/würde mir nicht weiterhelfen“ gemeint, aber im Präsens Indikativ formuliert, weswegen für eine Unterscheidung von *Voraussicht* und *Evaluation* der Wortlaut meist nicht ausreicht und der Kontext zwingend mitbetrachtet werden muss.

Idee als hilfreich eingeschätzt wird. Außer den beiden bisher genannten Formen der *Voraussicht* gibt es noch eine dritte, bei der die Probanden sich selbst nach der Nützlichkeit einer Idee fragen, aber keine Antwort geben: „Ist die Monotonie in dem Fall überhaupt wichtig (Julia, Grenzwert von Quotient und Wurzel – 07:26)?“ oder „Ich weiß nicht, ob mich das weiterbringt (Niklas, n-te Wurzel – 53:03).“ In den wenigen Prozessen, in denen eine solche Aussage auftritt, wurden die entsprechenden Ansätze nicht weiter verfolgt, es ist also eine gewisse Nähe zur *negativen Voraussicht* zu vermuten, wenngleich die Einschätzung nicht explizit vorgenommen wird.

Im Gegensatz zur *Voraussicht* geschieht eine *Evaluation* erst, nachdem ein Ansatz zumindest ein wenig verfolgt wurde. Die hierbei getätigten Einschätzungen beruhen möglicherweise zum Teil auf den Erfahrungen, die dabei gemacht wurden. Bei diesen *Evaluationen* entscheidet sich, ob der gewählte Weg beibehalten oder abgeändert wird. Hier kann verhindert werden, dass man sich in einen nicht-zielführenden Ansatz verbeißt. Eine Richtungsänderung kann unter anderem durch eine *negative Evaluation*, also die Einschätzung, dass dieser Ansatz nicht weiterhilft, herbeigeführt werden. Typisch hierfür ist etwa Jans Aussage (Aufgabe: Fixpunkt): „Ich glaub, dieser Ansatz, den ich jetzt gerade habe, der verläuft irgendwie gefühlt im Nichts (19:38).“ Anders als die Aussagen zur *Voraussicht* präzisieren die zur *Evaluation* aber häufiger, warum die entsprechenden Ansätze als nicht hilfreich eingestuft werden. Beispiele hierfür sind: „Ach nein, das ist ja ein Kreisschluss (Jan, Rangungleichung – 20:15),“ „Jetzt haben wir genau die falsche Seite (Malik, Quetschlemma – 34:31),“ „Aber dann haben wir nicht bewiesen, dass wir hinzuaddieren können (Malik, n-te Wurzel – 42:45)“ und „Damit hab ich einfach nur die Aufgabenstellung nochmal... (Niklas, konstante Funktion – 18:36)“. Auf die Zusammenhänge dieser Zitate wird weiter unten genauer eingegangen. Interessanterweise kommt eine positive Evaluation fast gar nicht vor. Eine solche Selbstbestätigung, auf dem richtigen Weg zu sein, ist zwar implizit in der Tatsache, dass ein Ansatz weiterverfolgt wird, enthalten, explizit geäußert wird sie allerdings äußerst selten. Im Hinblick auf die von Schoenfeld (1985) benannte Gefahr, dass mangelnde metakognitive Steuerung zum verharren auf einem nicht-zielführenden Weg führen kann, wären solche expliziten Begründungen interessant zu beobachten gewesen. Tatsächlich war positive Evaluation nur an zwei Stellen zu beobachten. Zum einen bleibt Malik (Aufgabe: Quetschlemma) an seinem Anfangs gewählten Ansatz dran (die Ungleichung $b_n \leq c_n$ zu verwenden, um zu zeigen, dass $b_n - c < \varepsilon$ ist), „weil das vom Gefühl her mir zeigt, dass ich auf dem richtigen Weg bin (06:52).“ Leider wird nicht deutlich, was genau zu diesem Gefühl führt. Der Autor vermutet, dass dieses Gefühl von der mehrfach erwähnten graphischen Vorstellung des mathematischen Sachverhalts gespeist wird (vgl. Abschnitt 5.5.5). Zum anderen sagt

Niklas, nachdem der Interviewer (da gegen Ende des Prozesses die Ideen immer weniger zielführend wurden) eingegriffen und darauf hingewiesen hat, dass den jüngsten Überlegungen ein Denkfehler zugrunde lag, „Ich glaube, dass ich damit trotzdem evtl. weiterkomme[30] (41:19).“ Hier hat also eine Perturbation von außen dazu geführt, dass der beschrittene Weg nochmal genauer hinterfragt wird, was zur expliziten *positiven Evaluation* geführt hat. Insgesamt bleibt es aber bei diesen beiden Beispielen. Auch bei der *Evaluation* gibt es neben der positiven und der negativen auch eine unbestimmte Variante. So sagt etwa Andreas nach Abschluss einer längeren Rechnung: „Ist nur die Frage, ob mir das jetzt wirklich weiterhilft (09:35).“ Niklas (Aufgabe: konstante Funktion) fährt nach seiner Aussage „Ich bin mir da aber jetzt gerade nicht sicher [...], ob ich da überhaupt den richtigen Ansatz habe (26:06)“ mit genau diesem Ansatz fort, worin sich diese Variante klar von der *negativen Evaluation* unterscheidet, die immer zu einer Regulation des Vorgehens geführt hat.

Eine *Regulation* kann auch auftreten, ohne dass ein Ansatz oder Lösungsweg explizit hinterfragt wird: „Ich probiere einfach mal einen anderen Ansatz aus (Niklas, n-te Wurzel – 26:24)“ oder „Nö, ich mach jetzt mal weiter (Julia, Monotonie – 08:33).“ Ob der vorhergehende Ansatz dabei als nicht hilfreich eingeschätzt wurde oder der jeweilige Bearbeiter hier schlicht nicht weiterkam, lässt sich hieraus nicht erkennen. Darüber hinaus kam es nicht selten vor, dass eingeschlagene Wege kommentarlos abgebrochen wurde. Das ist ein starker Hinweis darauf, dass hier metakognitive Aktivitäten abliefen, die von außen, trotz lautem Denkens, nicht zu erkennen waren.

Die *Klärung der Handlungsoptionen*, die nur bei Patrick kodiert wurde, kann man bei entsprechender Betrachtungsweise als Aufzählung möglicher Ansätze bezeichnen. Solche Aufzählungen sind auch bei anderen Probanden vorgekommen, allerdings wurde hier in der Regel zu jedem dieser Ansätze eine kurze Einschätzung (*Voraussicht*) abgegeben. Hierzu schien Patrick nicht in der Lage gewesen zu sein, als er sagt: „Ob ich das explizit an dem machen kann oder ob ich mir da jetzt ein Beispiel für konstruieren müsste, das ist dann wieder die nächste Frage (02:34).“

Frage 8: Welchen Einfluss haben Kontrollstrategien auf die Problembearbeitungsprozesse?

Im Folgenden werden also einige Prozesse hinsichtlich der Kontrollstrategien genauer unter die Lupe genommen. Hierbei wird auf eine Betrachtung der *Ana-*

[30] Nach reiflicher Prüfung ist der Autor zu dem Schluss gekommen, dass die Einschätzung des Interviewers korrekt war und dieser Ansatz wirklich nicht hilfreich war.

lysis-Phasen verzichtet, da die hier durchgeführten Aktivitäten sich in der Regel als notwendig erweisen (zumindest war dies bei den betrachteten Prozessen der Fall) und deswegen keiner größeren metakognitiven Kontrolle bedürfen. Der Fokus der folgenden Absätze liegt auf Phasen, in denen sich die Probanden längere Zeit (ab circa 3 Minuten) einer Idee widmen.

Zunächst soll Andreas' Bearbeitung der Aufgabe zur *linearen Unabhängigkeit* (vgl. Abschnitt 5.5.5 und Anhang D) betrachtet werden. Diese Aufgabe ist ein Beispiel dafür, wie längere Rechenoperationen, in denen man sich leicht verirren kann, auch in der universitären Fachmathematik eine wichtige Rolle spielen können (bei den meisten hier betrachteten Aufgaben war dies nicht der Fall). Andreas bildet, nachdem er sich in der *Analysis*-Phase die Gestalt der Vektoren $v_i - v$ vor Augen geführt hat, aus diesen zunächst eine Linearkombination (07:09–09:11). Auf seine folgenden Umformungen vorausblickend sagt er: „Die Vermutung liegt ja nahe, dass wir irgendwas haben mit ‚Eins minus' und dann addieren wir die einzelnen a_i's auf (09:25)." Ein solches Ergebnis würde sehr gut zu der Eigenschaft aus der Aufgabenstellung, dass $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 1$ ist, passen. Nach einer längeren Rechnung hat er die aufgestellte Gleichung korrekt umgeformt, das Ergebnis sieht aber aufgrund der Pünktchenschreibweise relativ unübersichtlich aus (vgl. Abbildung 5.37). Er *evaluiert* dieses Zwischenergebnis mit „Ist nur die Frage, ob mir das jetzt wirklich weiterhilft (15:36)" und bricht diese Rechnung wenig später, zugunsten eines erneuten Versuchs in Summenschreibweise mit den Worten „Das wäre zu mühselig, das jetzt alles mit der Hand auszurechnen (16:24)" ab. Bei der folgenden Umformung unterläuft ihm der in Abschnitt 5.5.5 bereits genannte Fehler (vgl. Abbildung 5.19), dass $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_j v_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i v_i$ ist. Bei (18:00) beendet er seine Rechnung, im Glauben die Hinrichtung bewiesen zu haben. Beim Beweis der Rückrichtung führt er interessanterweise dieselbe Rechnung nochmal durch (20:49–25:04) und macht auch denselben Fehler.

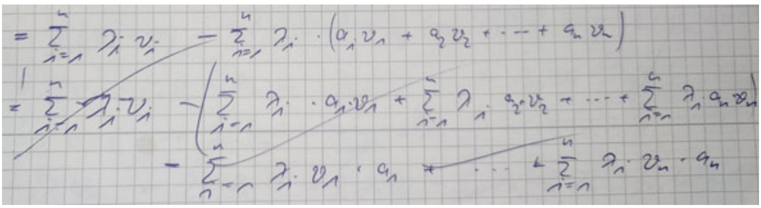

Abbildung 5.37 Ergebnis der Umformung in Pünktchenschreibweise

In diesem Prozess hat es wenig Kontrollprozesse gegeben, allerdings wäre der eingeschlagene Weg zum einen richtig gewesen, hätte es den Umformungsfehler nicht gegeben, zum anderen war dieser typisch für Aufgaben zur linearen Unabhängigkeit, so dass kein Grund zum Zweifel an der Wahl des Weges vorlag. Interessant ist, dass die Richtungsentscheidung nicht mit der langwierigen und unübersichtlichen Pünktchenschreibweise fortzufahren, möglicherweise zu diesem Fehler geführt hat. Zumindest hätte ein Vergleich des Zwischenergebnisses mit den späteren Ergebnissen zu einem Konflikt führen können.

Als Nächstes wird ein Blick auf Jans Bearbeitung der *Fixpunkt*-Aufgabe geworfen (vgl. Anhang D). Nach der Analyse der Aufgabe sucht der Proband zunächst nach Ideen. Als Erstes (04:10) betrachtet er den Fall, dass $n = 1$ ist, stellt aber bald fest: „[Damit] komme ich nicht weiter," da $f^1(m)$ nicht gleich m sein muss. Dann macht er sich nochmal klar, dass $f \circ f = f^2$ ist. Auch hier kommentiert er: „Das bringt mich jetzt aber auch noch nicht so viel weiter (06:32)." Zwar ist diese Information zum Bearbeiten der Aufgabe zwingend notwendig, sie scheint ihn aber noch nicht zu einem Lösungsansatz zu führen. Wenig später (07:11) sagt er: „Ich weiß aber nichts Genaueres über die Menge M." Das ist deswegen besonders interessant, weil die Endlichkeit von M entscheidend für die Richtigkeit der zu beweisenden Aussage ist. Hier wird also deutlich, dass diese Eigenschaft von Jan übersehen oder als nicht wichtig eingestuft wurde[31]. Es scheint sich hierbei also weniger um eine Richtungsentscheidung als um eine fachliche Fehleinschätzung zu handeln (es wurde ja nicht bewusst entschieden, die Endlichkeit der Menge zu vernachlässigen). Stattdessen beginnt Jan ab (07:44) mit der Umkehrabbildung zu arbeiten (die Existenz einer solchen ist nicht unbedingt gegeben). Zwar evaluiert er diese Idee nach etwa fünf Minuten (12:30) mit den Worten „Ich glaub, dieser Ansatz, der verläuft gefühlt irgendwie im Nichts", ändert aber die Richtung seiner Überlegungen nicht (möglicherweise aus Mangel an alternativen Ideen). Sein Weg führt ihn zunächst (13:36) dazu, $m = f^{-1}(m)$ zu „wählen[32]", woraus sich $\mathrm{Id}(m) = f^1(m)$ ergibt. Da aber $m = f^n(m)$ zu zeigen ist, gibt er sich damit nicht zufrieden[33]. Bei (15:40) „wählt" er also $m = f^{-n}(m)$. Um die Korrektheit seiner Umformungen stützen zu können, beweist Jan (etwa 17:00 bis 20:00), dass es sich bei Abbildungen mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung um eine

[31] Bei vielen Aufgaben stehen zu Beginn Informationen, die den Gültigkeitsbereich einer Aussage bestimmen, darüber hinaus aber wenig bis keine Relevanz für den Beweis haben. Beispiele hierfür sind „Sei $x \in \mathbb{R}$", „Sei V ein K-Vektorraum" oder eben „Sei M eine Menge"

[32] Dieser Ansatz führt letztlich zu einem Zirkelschluss, da man nicht einfach davon ausgehen kann, dass es ein m mit dieser Eigenschaft gibt.

[33] Da die Aufgabe nur zu zeigen verlangt, dass es ein n gibt, für das diese Gleichung gilt, würde dieses Ergebnis mit $n = 1$ schon genügen, wäre es kein Zirkelschluss

Gruppe handelt[34]. Anschließend zeigt er durch Rechenumformungen (ab 20:11), dass $f^m(f^{-m}(m)) = \mathrm{Id}(m)$ ist. Ab (20:56) beschäftigt er sich noch weiter damit, zu zeigen, dass $\mathrm{Id}(m) = m$ ist. Zuletzt (23:55) schreibt Jan noch seinen Antwortsatz auf und bei (25:09) endet der Prozess.

Von den betrachteten Prozessen kann dieser am ehesten als *Wild Goose Chase* bezeichnet werden: Von (07:44) bis (25:09) beschäftigt Jan sich mit einem Ansatz, der nicht zu einer korrekten Lösung der Aufgabe führt. Zwar schätzt er diesen selber bei (12:30) als „im Nichts" verlaufend ein, diese *Evaluation* führt ihn aber nicht zu einer Richtungsänderung. Am Ende des Prozesses ist Jan davon überzeugt, die Aufgabe richtig gelöst zu haben, was auch erklärt, warum er so lange auf dem gewählten Pfad geblieben ist. Im Gegensatz zu Andreas, der sich grundsätzlich auf dem richtigen Weg befand, bei dem aber ein Rechenfehler zum Scheitern geführt hat, führte Jans Ansatz komplett in eine falsche Richtung. Hierbei spielten zwei Fehleinschätzungen eine Rolle: Zum einen existiert eine Umkehrabbildung nur bei bijektiven (oder zumindest injektiven) Funktionen, zum anderen wurde eine zielführende Möglichkeit (das Ausnutzen der Endlichkeit von M) nicht erkannt. Jans Ergebnis stellt sich außerdem bei genauerer Betrachtung als Zirkelschluss heraus.

Die zweite Aufgabe, die Jan bearbeitet, ist die zur *Rangungleichung* (vgl. Anhang D und Abschnitt 5.5.2). Nachdem er sich in der *Analysis*-Phase die Gestalt der Matrizen genauer vor Augen geführt hat, betrachtet er zunächst (04:09–09:13) den Spezialfall, dass alle Zeilen der Matrix A linear unabhängig voneinander sind, die Matrix also vollen Rang hat. Diesen Spezialfall kann er recht schnell argumentativ belegen[35] und es werden auch keine Zweifel an diesem Ansatz geäußert. Das weitere Vorgehen ist nicht mehr so zielstrebig. Im Skript findet Jan die Information, dass sich Zeilen- und Spalten-Rang bei Durchführung des Gauss-Verfahrens nicht ändern, was er aber mit den Worten „Das bringt grad nicht viel (10:35)" zunächst abtut[36]. Jan verbringt noch etwas Zeit (11:12–12:09) damit, den oben genannten Spezialfall zu konkretisieren, etwa indem er den Rängen der Matrizen Variablen zuordnet. Ab (13:12) überlegt er dann, was passiert, wenn (mindestens) eine Zeile

[34] dass dies nur für bijektive Abbildungen gilt, wird nicht beachtet, die Existenz von Umkehrfunktionen vorausgesetzt, ist der Beweis aber korrekt

[35] Da alle Zeilen linear unabhängig sind, wird dies auch so bleiben, wenn diese Zeilen in zwei Teilmatrizen aufgeteilt werden.

[36] Mit dieser Information ist das Problem aber durchaus leichter anzupacken, etwa dadurch, dass sich nach Durchführung des Gauss-Verfahrens die linear abhängigen Zeilen als Nullzeilen am unteren Ende der Matrizen wiederfinden oder dadurch, dass, wenn zuerst das Gauss-Verfahren bei A_1 und A_2 durchgeführt wird, Zeilen in A_1 mit Zeilen in A_2 übereinstimmen können, was bedeuten würde, dass der Rang von A kleiner wäre als die Summe der Ränge von A_1 und A_2.

linear abhängig ist[37]. Bei (15:14) kommt ihm die Idee (zu erkennen an einem lauten „Ah!“), dass sich zwei linear abhängige Zeilen in A auf A_1 und A_2 aufteilen. Diese beurteilt er mit der Voraussicht: „Das müsste funktionieren“. Es wird im kompletten Prozess nicht erkennbar, ob Jan klar ist, dass sich solche Zeilen aufteilen können, aber nicht müssen. Wie diese Idee formal umzusetzen ist, wird Jan während des gesamten Prozesses nicht klar. Zunächst versucht er, die lineare Abhängigkeit in Formeln darzustellen (16:17). Diesen Versuch bricht er aber wenig später mit den Worten „Ich weiß nicht genau, wie man das aufschreiben müsste (17:14)“ ab. Anschließend (18:24) versucht er sich an einem Beweis durch Widerspruch, indem er zunächst annimmt, dass $\text{Rang}(A) > \text{Rang}(A_1) + \text{Rang}(A_2)$ ist. Die folgenden Überlegungen (19:01–19:50) sind schwierig zu interpretieren und werden deswegen wörtlich wiedergegeben: „Hier (zeigt auf die rechte Seite der Ungleichung) müssen Zeilen dazugekommen sein. Jede linear unabhängige Zeile in A muss zwangsläufig linear unabhängig in A_1 bzw. A_2 sein. Wenn der Rang von A größer wäre als der Rang [von] A_1 plus der Rang von A_2, das würde implizieren, dass das eben nicht so ist.“ Geht man davon aus, dass mit den Zeilen, die auf der rechten Seite der Ungleichung dazugekommen sind, linear abhängige Zeilen (die in A linear unabhängig waren) gemeint sind, so stecken in diesen Aussagen bereits alle wesentlichen Elemente für einen Widerspruchsbeweis drin. Dennoch bricht Jan diese Überlegung mit dem Kommentar „Ach nein, das ist ja ein Kreisschluss (20:15)“ ab. Das ist vor allem vor dem Hintergrund, dass in Jans erstem Prozess (s. o.) ein Kreisschluss zum falschen Ergebnis geführt hat, interessant. Möglicherweise ist er (zumindest in der Situation vor demselben Interviewer und der Kamera) hierfür besonders sensibel geworden. Die Idee des Widerspruchsbeweises wird etwas später (21:47) komplett abgebrochen. Bis zum Ende des Prozesses (32:21) versucht Jan, ohne Erfolg und ohne dass er Kontrollüberlegungen äußert, die Behauptung direkt zu beweisen. Insgesamt werden hier mehr Regulationsstrategien angewandt als bei Jans erstem Prozess, allerdings wird auch eine anscheinend zielführende Überlegung aufgrund einer Fehleinschätzung abgebrochen.

Die Bearbeitung der Aufgabe zur *n-ten Wurzel* von Niklas wurde bereits in Abschnitt 5.5.1 ausführlich beschrieben. An dieser Stelle soll eine kurze Zusammenfassung im Hinblick auf die Kontrollstrategien gegeben werden. Die erste Idee, die Niklas verfolgt (ab 13:24), ist die, etwas aus der Wurzel auszuklammern. Zunächst ist ihm noch nicht klar, was das sein kann. Diese Idee wird bis (26:24) nicht explizit hinterfragt. Insgesamt haben *Evaluationen* nur stattgefunden, wenn es hier erwähnt

[37] Natürlich braucht es mindestens zwei Zeilen für eine lineare Abhängigkeit, wenn es sich nicht gerade um eine Nullzeile handelt. Hier und im Folgenden wird die Sprechweise des Studenten übernommen, der während des Prozesses durchgehend den Eindruck macht, als wüsste er um die Verkürzung dieser Darstellung.

wird. Bei (17:56) konkretisiert er, dass er a_1^n ausklammern möchte und erkennt später (21:49), dass dann für die dadurch entstehenden Summanden $\frac{a_n}{a_1} \geq 1$ gelten muss[38]. Bei (26:24) entscheidet sich Niklas für eine *Regulation*: „Ich probiere einfach mal einen anderen Ansatz aus", auch hier ohne den Ansatz des Ausklammerns explizit zu *evaluieren*. Die nächste Idee ist, die Folge durch Multiplikation mit Eins zu manipulieren (etwa 28::30 bis 35:30 – vgl. Abbildung 5.10). Bei (38:41) kehrt er wieder zu der Idee des Ausklammerns zurück, diesmal mit dem Faktor a_k^n. Das führt ihn schließlich zur Idee, das Quetschlemma anzuwenden (42:40). Als Abschätzung nach oben gibt er direkt an, dass alle Summanden dem größten (also a_k) entsprechen. Eine Abschätzung nach unten zu finden fällt ihm allerdings schwer. Zunächst fällt ihm ein, dass Teilfolgen einer konvergenten Folge gegen denselben Grenzwert konvergieren (52:50). Hierzu sagt er allerdings schnell: „Ich weiß nicht, ob mich das weiterbringt (53:03)." Dann versucht er eine änhliche Idee, wie bei der Abschätzung nach oben (55:11), nämlich alle Summanden gleich dem kleinsten (a_1) zu setzen. Er zeigt Voraussicht, indem er sagt: „Das brauche ich nicht mehr zu machen[39], weil das ähnlich ablaufen wird (55:32)." Außerdem stellt er fest, dass ihm das noch kein Ergebnis, immerhin aber ein Intervall, in dem dieses liegen muss, liefert (Denn die Abschätzung nach unten führt zum Grenzwert a_1, die nach oben zu a_k). Die nächsten beiden Ideen werden nun explizit *evaluiert*: Zunächst (56:25) überlegt er, eine Folge aus Mittelwerten zu bilden, was er mit „Das bringt mich gerade nicht so weiter (57:50)" kommentiert. Dann hat er die Idee, die Summanden paarweise zusammenzufassen. Hierzu sagt er: „Halte ich für unwahrscheinlich, weil die sehr lange dauern würde (59:06)." Insgesamt gibt es in diesem Prozess eher wenig explizit geäußerte Einschätzungen der Ansätze. Bei (26:24) wird ein vielversprechender Ansatz (das Ausklammern) zunächst verworfen, der aber bei (38:41) wieder aufgegriffen wird.

Auch bei Niklas' zweiter Bearbeitung sind explizite Äußerungen über mögliche Ansätze eher selten. Bereits in der *Analysis*-Phase wird der Versuch, eine Skizze zu zeichnen mit den Worten „Ich glaub, das führt zu ner Sackgasse (12:33)" abgebrochen. Aus dem Kontext wird klar, dass die Ursache hierfür eine Fehlvorstellung zu Funktionen war, denn Niklas hat nach eigener Aussage Schwierigkeiten damit, dass jedem x-Wert zwei y-Werte zugeordnet werden[40]. Die erste Idee (13:05), die Niklas dann äußert, ist die Folgenstetigkeit zu nutzen. Konkretisiert wird diese erst vier Minuten später (17:05). Hier erklärt Niklas, dass wenn eine Folge x_k gegen x_0

[38] Eine Wahl, bei der die Summanden kleiner 1 wären, etwa wenn der größte Summand a_k ausgeklammert würde, wäre zielführender.

[39] gemeint ist vermutlich „auszurechnen".

[40] Dem ist ja nicht so, allerdings hat jeder y-Wert, der geroffen wird, mindestens zwei Urbilder (nämlich x und x^2).

konvergiert, nicht nur $f(x_k) \to f(x_0)$, sondern auch $f(x_0) \to f(x_0^2)$ gelten muss. Etwas später stellt er aber fest: „Damit hab ich einfach nur die Aufgabenstellung nochmal [...] (18:36)“[41]. Eine Idee, die er im Folgenden etwas länger verfolgt (ca. 23:00 bis 29:00), lässt sich wie folgt zusammenfassen: Da $|f(x) - f(x^2)| = 0$ ist, muss für alle x_0 im Intervall $(x; x^2)$ gelten, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ist. Diese Fehlvorstellung wiederholt Niklas später in ähnlicher Form (27:52) nochmal, indem er behauptet, dass die Abstände in y-Richtung sich nicht vergrößern können, wenn die Abstände in x-Richtung kleiner werden. In den sechs Minuten, in denen er diesen Ansatz verfolgt, sagt er zwar einmal „Ich bin mir da aber jetzt gerade nicht sicher [...], ob ich da überhaupt den richtigen Ansatz habe (26:06)“, fährt aber trotzdem auf diesem Weg fort. Die nächste Idee, ist mit einem Mittelwert zu arbeiten (35:03): Wenn x_0 in einer δ-Umgebung um x liegt, dann muss das auch für den Mittelwert von den beiden gelten. Auch dieser Weg ist nicht zielführend, da aus diesen Überlegungen zu den x-Werten keinerlei Folgerungen für die y-Werte abzuleiten sind. Als seine ersten Überlegungen fehlschlagen, sagt er: „Ich glaube, dass ich damit trotzdem eventuell weiterkomme (41:19).“ Wenig später (42:47) bricht er die Bearbeitung ab. Ein Großteil der in diesem Prozess gefällten Richtungsentscheidungen kann man zumindest als fragwürdig einschätzen. Dass der Versuch einer Skizze erfolglos abgebrochen wird ist vielleicht noch nicht einmal eine Entscheidung, sondern resultiert eher aus Unvermögen. Als nächstes wird der objektiv sinnvolle Weg über Folgenstetigkeit abgebrochen, weil eine Teilüberlegung sich im Kreis dreht. Die weiteren Überlegungen basieren allesamt auf Fehlvorstellungen zur Stetigkeit, werden aber recht lange verfolgt und zum Teil auch als zielführend eingeschätzt. Hier sieht man, dass erfolgreiche Metakognition sehr eng mit gutem Vorwissen verknüpft sein kann.

Betrachtet man die Übersicht (Abbildung 5.3), fällt auf, dass in Maliks Bearbeitung der *Quetschlemma*-Aufgabe keine *Voraussicht* aufgetreten ist. In Abschnitt 5.5.5 wurde dieser Prozess bereits ausführlich beschrieben, die folgenden Betrachtungen konzentrieren auf die Anwendung von Kontrollstrategien. Nachdem sich Malik in der *Analysis*-Phase ein graphische Vorstellung von der Situation gemacht hat, ist seine erste Idee, die Voraussetzung $b_n \leq c_n$ zu verwenden (05:14). Er präzisiert sogar, dass $b_n - c \leq c_n - c < \varepsilon$ ist, stört sich aber noch daran, dass in dieser Ungleichungskette kein Betrag vorkommt. Trotzdem entscheidet er sich (*Evaluation*) dazu, diese Idee weiter zu verfolgen „weil das vom Gefühl her mir zeigt, dass ich auf dem richtigen Weg bin (06:52).“ Schriftlich umgesetzt wird diese, bis dahin nur mündlich formulierte Idee etwas später (etwa von 10:30 bis 13:00), so dass damit bereits bewiesen ist, dass $b_n - c < \varepsilon$ ist (ohne genauere Präzisierung, für welche

[41] Denn hieraus folgt nur, dass $f(x_0) = f(x_0^2)$ ist

n diese Ungleichung gilt). Ab (14:16) beginnt Malik, die Voraussetzung $b_n \geq a_n$ zu nutzen. Zunächst folgert er daraus, dass $b_n \geq c$ ist (was nicht stimmen muss). Hieraus würde folgen, dass $|b_n - c| = b_n - c$ ist. Bei (17:01) stellt Malik aber fest: „$b_n - c$ ist auch gar nicht größer gleich Null, das muss gar nicht der Fall sein." Aufgrund dieser *Evaluation* bricht er die Überlegungen in diese Richtung ab. Die nächste Idee, die Malik verfolgt, ist, die Ungleichungen $a_n \leq b_n$ und $|a_n - c| < \varepsilon$ zu addieren (vgl. Abbildung 5.33). Diese wird etwas später kommentarlos abgebrochen und bei (23:04) sucht Malik im Skript nach weiteren Ideen. Ohne dass eine Verbindung zu dem, was er im Skript gelesen hat, zu erkennen ist, benennt Malik bei etwa (25:00) die Idee eines Beweises durch Widerspruch, indem er schreibt: $|b_n - c| > \delta$. Diese Idee wird aber im weiteren Verlauf nicht weiter kommentiert oder aufgegriffen. Seitdem er bei Minute 13 gezeigt hat, dass $b_n - c < \varepsilon$ ist, hat Malik die Ungleichung $b_n \leq c_n$ nicht mehr verwendet. Dieses Vorgehen evaluiert er mit den Worten: „Das ist tatsächlich auch vermutlich alles, was ich aus dieser Teilaussage $b_n \leq c_n$ bekommen kann (26:41)." Nach dieser (korrekten) Einschätzung konzentriert er sich weiterhin auf die Voraussetzung $a_n \leq b_n$. Etwa bei Minute 30 verdeutlich er nochmal, dass er $b_n < c - \varepsilon$ zeigen möchte. Bei (32:52) sagt er, dass er hierfür zeigen muss, dass $c - \varepsilon < a_n$ ist, was er sich graphisch bereits verdeutlicht hat. Der nächste Versuch einer Umformung der Ungleichung $|a_n - c| < \varepsilon$ (33:41) führt ihn auf $c + \varepsilon > a_n$ (vgl. Abbildung 5.36 links). Hierzu stellt er schnell fest: „Jetzt haben wir genau die falsche Seite (34:41)." Wenig später kommt er aber auf die Idee, den „Betrag des Negativen" zu betrachten (vgl. Abbildung 5.36 Mitte oben), was schließlich (etwa bei Minute 38) zu der gesuchten Aussage führt. Den Rest des Prozesses (immerhin noch bis 46:25) benötigt Malik, um die beiden Teilaussagen zu der zu zeigenden Behauptung zusammenzufassen. Die gewählte Richtung, mit den bewiesenen Ungleichungen und dem Betrag zu arbeiten (vgl. Abbildung 5.36 unten) wird nicht mehr hinterfragt, ist aber auch eine sinnvolle Möglichkeit.

In diesem Prozess gibt es relativ wenige explizite Beurteilungen des Vorgehens (nur die hier erwähnten). Allerdings ist die Qualität dieser wenigen Aussagen sehr hoch: Bereits zu Beginn (06:52) äußert Malik die Einschätzung, dass er sich auf dem richtigen Weg befindet. Ein falscher Ansatz (14:16) wird nach recht kurzer Zeit (17:01) als solcher erkannt. Etwa in der Mitte des Prozesses (26:41) wird *evaluiert*, dass das bisherige Vorgehen gut war und ein kleiner Umweg bei einer Rechnung (33:41) wird erkannt (34:41) und es werden daraus richtige Konsequenzen gezogen (35:47). Auch nicht explizit erwähnte Richtungsentscheidungen sind gut, denn es werden ungünstige Lösungsversuche schnell abgebrochen. Interessant ist auch, dass Malik hier an keiner Stelle explizit eine *Voraussicht* erwähnt. Vor dem Hintergrund, dass seine Kontrollstrategien von guter Qualität sind, lässt sich das dadurch erklären, dass Malik sich seiner Sache von Beginn an durch die graphische Vorstellung sehr sicher war, so dass ihm, ähnlich wie bei der positiven *Evaluation* aller Probanden, eine Bestärkung nicht notwendig erschien.

Auch Maliks Bearbeitung der Aufgabe (vgl. Abschnitt 5.5.5) zur *n-ten* Wurzel soll hier im Hinblick auf Kontrolle betrachtet werden. Nach einer kurzen *Analysis*-Phase beginnt Malik mit der Betrachtung von Spezialfällen (02:26). Bevor er hierzu konkret etwas aufschreibt, erinnert er sich daran, dass $\sqrt[n]{c}$ für konstante c gegen 1 konvergiert, trifft dazu aber die *Voraussicht*: „Das hilft uns eigentlich auch nicht weiter (03:33).“ Später zeigt sich, dass diese Einschätzung nicht ganz richtig ist, zu diesem Zeitpunkt in der Bearbeitung ist diese Information allerdings tatsächlich noch nicht hilfreich. Malik betrachtet nun die konkrete Folge $\sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n}$ und vermutet bald, dass der erste Summand für große n nicht mehr ins Gewicht fällt, weil er immer gleich 1 ist. Daraufhin (04:42) stellt er sich die Frage, ob das auch für den zweiten Summanden 2^n gilt und möchte dementsprechend zeigen, dass $\sqrt[n]{2^n + 3^n} \to 3$ gilt. In *Voraussicht* auf diesen Ansatz sagt er: „Das müsste vermutlich dann auch für beliebige Zahlen gelten (05:06).“ Um seine Vermutung zu unterstützen, rechnet er im Kopf Beispielwerte für $n = 2$ aus, plant dasselbe für $n = 3$, bricht diese Rechnung aber mit den Worten „Rechne ich nicht aus (06:55)“ ab, möglicherweise, weil die exakte Rechnung im Kopf recht aufwändig ist. Von (09:22) bis (28:21) widmet Malik sich dem Beweis des Spezialfalls $N = 2$. Es soll hier nicht jede Rechnung im einzelnen dokumentiert werden, der grundlegende Ansatz besteht darin $x^n := a_1^n + a_N^n$ zu setzen und diese Gleichung umzuformen, mit dem Ziel, zu zeigen, dass sich x^n für große n an a_N^n annähert[42]. Eine der ersten Ideen besteht darin, beide Seiten durch a_1^n zu dividieren, so dass die Gleichung $(\frac{a_N}{a_1})^n = (\frac{x}{a_1})^n - 1$ herauskommt. An dieser Stelle sei angemerkt, dass es geschickter gewesen wäre, hier durch a_N^n zu dividieren, denn hätte in der Gleichung $(\frac{a_1}{a_N})^n = (\frac{x}{a_N})^n - 1$ auf der linkens Seite eine Nullfolge gestanden und es wäre deutlich leichter gewesen, die Behauptung zu zeigen. Dies wurde von Malik leider nicht erkannt. Insgesamt wurden bei den Berechnungen kaum *Evaluationen* vorgenommen. Nach einiger Zeit ist Malik auf folgende Gleichung gekommen:

$$\frac{\frac{a_N}{a_1}}{\sqrt[n]{(\frac{x}{a_1})^n - 1}} = 1$$

An dieser Stelle sagt er: „Vielleicht denke ich einfach in die falsche Richtung (21:07).“ Dies ist die einzige Stelle in den fast 20 Minuten, die sich Malik mit dem

42 Streng genommen muss man hier aufpassen, da durchaus beide Folgen gegen unendlich gehen können. Letztlich zeigt Malik eher, dass $(\frac{x}{a_N})^n$ gegen 1 konvergiert.

Beweis des Spezialfalls beschäftigt, an der er kurz das reine Rechnen unterbricht. Bei (22:49) überlegt er zu zeigen, dass es sich um eine monotone und beschränkte Folge handelt, nimmt davon aber mit den Worten „Das sieht eigentlich auch sehr aufwändig aus (23:46)“ Abstand und kehrt wieder zu seinen vorherigen Überlegungen zurück. Diese beiden Aussagen bleiben die einzigen Einschätzungen von Ansätzen in diesem Zeitraum. Tatsächlich gelingt es Malik, die kompliziert anmutende Gleichung so umzuformen, dass am Ende (28:21) die gesuchte Behauptung gezeigt wird. Anschließend (29:07 bis 30:58)) betrachtet er noch den Fall, dass $a_1 = a_N$ ist (vgl. Abbildung 5.20). Es folgen einige Ansätze, das Ergbenis zu verallgemeinern: Malik überlegt, den Limes unter die Wurzel zu bringen (33:09), induktiv immer einen Summanden hinzuzufügen (34:18 bis 37:10), die vorherigen Rechnungen mit drei Summanden zu wiederholen (39:53 – wird nicht verfolgt), bei den Rechnungen erreichte Zwischenergebnisse zu verwenden (41:08) und mit N Summanden zu beginnen und induktiv immer einen zu eliminieren (43:27). Hiervon wird nur die erste explizit bewertet, mit den Worten „Nee, das macht auch gar keinen Sinn (33:48)“, trotzdem aber auch nur die zweite eine Zeitlang verfolgt. Schließlich (44:56) kommt Malik auf die Idee, die Folge nach oben abzuschätzen, indem er alle Summanden gleich a_N setzt. Das führt ihn schließlich dazu, das Quetschlemma anzuwenden, mit dessen Hilfe er die Aufgabe bis (49:20) gelöst hat (vgl Abbildung 5.21).

In diesem Prozess kann man die längste fragwürdige Phase von fast 20 Minuten beobachten. Während dieser Zeit werden nur zwei explizite Aussagen zu Kontrollprozessen getätigt. Auch der anschließende Versuch der Verallgemeinerung hat fast 15 Minuten gedauert und beinhaltet nur eine solche Aussage. Zwar lässt sich darüber diskutieren, ob und wie stark diese lange Rechnung zu der Idee, das Quetschlemma anzuwenden, beigetragen hat, dennoch lässt sich beobachten, dass sehr viel Zeit aufgewendet wird, ohne dass die Richtungsentscheidung wesentlich hinterfragt wird. Am Ende des Prozesses stellt Malik dasselbe fest: „Ich hab etwa gerade ne Stunde gerechnet und hab die Lösung in zehn Minuten komplett neu berechnet (49:08).“ Dass dies der einzige Prozess ist, in dem derartig viel Zeit in eine fragwürdige Richtung gearbeitet wird, lässt sich möglicherweise mit der Gestalt der Aufgabe erklären, da diese, im Gegensatz zu den meisten anderen Aufgaben, überhaupt erst lange Termmanipulationen zulässt.

Zur Beantwortung von **Frage 8**: Im Gegensatz zu Schoenfeld (1985), der (zumindest bei untrainierten Probanden) recht häufig beobachtet, dass diese eine Richtung wählen und diese über eine lange Zeit verfolgen, ohne diese Entscheidung zu hinterfragen (*Wild Goose Chases*), kommen bei der vorliegenden Arbeit vergleichsweise häufig Kontrollstrategien zum Einsatz. Insgesamt hat es aber nur drei Prozesse gegeben, in denen über einen längeren Zeitraum ein Ansatz verfolgt wurde, der nicht oder nicht ganz zum Ziel geführt hat: Maliks Bearbeitung der Aufgabe zur *n-ten Wurzel* ist der Prozess, der am ehesten von kritischerem Hinterfragen profitiert hätte. Nicht nur wird viel Zeit (fast 20 Minuten) auf einen rechnerischen Beweis des Spezialfalls aufgewendet, dessen Nutzen diesen langen Zeitaufwand wahrscheinlich nicht rechtfertigt, auch innerhalb dieses Ansatzes werden ungünstige Richtungsentscheidungen nicht hinterfragt oder rückgängig gemacht. Dennoch gelingt es Malik letztlich, das Problem zu lösen. Andreas' Ansatz dauert zwar lange und führt nicht zu einem korrekten Ergebnis, das liegt aber an einem Rechenfehler. Grundsätzlich ist die eingeschlagene Richtung durchaus sinnvoll. Auch Jan hat bei der *Fixpunkt*-Aufgabe einen falschen Weg gewählt, der von der falschen Voraussetzung, es gäbe ein $m := f^{-n}(m)$ ausgeht. Zwar benennt er zwischendurch Zweifel an seinem Ansatz, führt diesen dennoch weiter fort. Da er seinen Fehler aufgrund mangelndem Fachwissens nicht erkennt, hat er auch nicht die Möglichkeit, den Ansatz richtig einzuschätzen, denn ohne diesen Fehler ist er tatsächlich zielführend. Auch die Feststellung, dass es zur Menge M keine Informationen gibt (die letztlich das korrekte Lösen der Aufgabe unmöglich macht), kann als fachliche Fehleinschätzung angesehen werden. Vorwissen und das Treffen von Richtungsentscheidungen können also eng mit einander verknüpft sein. Das zeigt sich zum Teil auch bei solchen Entscheidungen, die zum Abbruch eines guten Weges geführt haben: Jan diagnostiziert bei dem Versuch, zur *Rangungleichung* einen indirekten Beweis zu führen, einen Kreisschluss, der nicht nachzuvollziehen ist, Andreas bricht die für ihn vertraute Berechnung in Pünktchenschreibweise ab, obwohl diese korrekt ist und es gelingt ihm nicht, die Diskrepanz zur falschen Berechnung in Summenschreibweise zu erkennen und Niklas verwirft bei der Aufgabe zur *konstanten Funktion* den Ansatz über Folgenstetigkeit, weil eine Teilidee nicht funktioniert. Dies sind nur einige Beispiele, die zeigen, dass Regulation auch in die falsche Richtung führen kann. Insgesamt scheint die Verbesserung dieser Entscheidungen ein wichtiges Ziel von Problemlösetraining zu sein. Wie gesagt, scheint dieser Faktor ebenfalls stark mit dem Vorwissen zusammenzuhängen.

5.5.7 Mögliche Auswirkungen der Interventionsmaßnahme

Frage 9: Welche Auswirkungen hat die Interventionsmaßnahme auf die Problembearbeitungsprozesse der Teilnehmer?

Zur Beantwortung dieser Frage werden keine neuen Untersuchungen angestellt. Lediglich die bisherigen Betrachtungen werden aus diesem Blickwinkel zusammengefasst. Hierzu werden die Bearbeitungen von Malik, Julia und Jan mit einander verglichen. Grundsätzlich konnten Veränderungen beobachtet werden, allerdings müssen diese nicht auf die Maßnahme zurückzuführen sein, da die Probanden sich über ein Semester hinweg mit einigen Problemen auseinander gesetzt haben. Eine positive Entwicklung kann also verschiedene Gründe haben. Dennoch lassen sich einige Veränderungen erkennen, die, um es mit Schoenfelds Worten zu sagen, als Existenzbeweis dienen können. D. h. es gibt Veränderungen, diese müssen aber zum einen nicht bei jedem Probanden auftreten, zum anderen nicht zwingend auf die Maßnahme zurückzuführen sein. Da sich die Aufgaben stark von einander unterscheiden, kann auch das ein wichtiger Faktor sein.

In Bezug auf Heurismeneinsatz wurden keine wesentlichen Unterschiede zwischen dem ersten und dem zweiten Messzeitpunkt erkannt. Eine solche Änderung war, wie bereits in Abschnitt 2.4.5 beschrieben, auch nicht zu erwarten, da kurzfristige Heurismentrainings kaum Erfolge bringen.

Bei Jan lässt sich allerdings eine starke Verbesserung der metakognitiven Aktivitäten erkennen (vgl. S. 170 f.). Nicht nur haben sich diese quantitativ mehr als verdoppelt (von 19 auf 45, bei einer Zeitsteigerung von nur knapp acht Minuten von etwa 26 auf 34[43]), was für sich genommen nicht bedeuten muss, auch die Qualität hat sich erhöht: Wurde beim ersten Prozess noch ein Weg eingeschlagen, der nicht zu einem richtigen Ergebnis führt, und dieser nur einmal hinterfragt und trotzdem weiter verfolgt, wird der zweite deutlich besser gesteuert. Zwar wird hier ein vielversprechender Ansatz verworfen, aber insgesamt kommt es zu vielen guten Einschätzungen, die auch mit einer Teillösung des Problems belohnt werden.

Auch bei Julia ist die grundsätzliche Steuerung ihrer Aktivitäten deutlich besser geworden (auch wenn es quantitativ relativ zur Zeit nur eine leichte Veränderung von 24 Aktivitäten in 41 Minuten zu 13 Aktivitäten in 18 Minuten). Dies zeigt sich vor allem in der Arbeit mit dem Skript (vgl. S. 131), die beim zweiten Mal zum einen sehr viel zielstrebiger ist (es wird nicht mehr das Skript Seite für Seite durchgegangen), zum anderen werden hier die vom Skript aufgeschnappten Begriffe besser in Bezug auf ihre Nützlichkeit eingeschätzt, was letztlich sogar zu der richtigen Vermutung führt, dass der Zwischenwertsatz das richtige Werkzeug sein muss, die aber leider nicht umgesetzt werden kann.

Bei Malik sieht die Sache nicht so eindeutig aus. Wie auf Seite 176 f. beschrieben, ist bereits bei seiner ersten Bearbeitung die Qualität der Kontrollstrategien sehr hoch. Allerdings kommt hier noch keine explizite *Voraussicht* vor und rein quantitativ

[43] Die hier angegebenen Zahlen können nur eine grobe Orientierung geben. Obwohl ein Vergleich zweier Prozesse derselben Person sich eher rechtfertigen lässt, als der Verglich verschiedener Personen, können die verschiedenen Aufgaben unterschiedliche Anforderungen an die reine Menge der Aktivitäten liefern. Trotzdem sollen die Zahlen hier nicht verschwiegen werden.

hat sich die Zahl der metakognitiven Aktivitäten von 28 deutlich auf 67 (mit 47 bzw. 50 Minuten in fast derselben Zeit) erhöht. Auf der anderen Seite ist dies der Prozess, bei dem die meiste Zeit (fast 20 Minuten) für einen Ansatz aufgewendet wird, der zwar einen Spezialfall beweist, dessen Nützlichkeit aber (wahrscheinlich) in keinem guten Verhältnis zum Aufwand steht. Kurz gesagt: Es zeigen sich beim zweiten Durchgang zwar mehr und auch vielfältigere Aktivitäten als beim ersten Mal, die Qualität scheint aber eine geringere zu sein.

Es wurde also gezeigt, dass es Probanden gibt, bei denen sich die metakognitiven Aktivitäten nach Durchführung der Intervention verbessert haben, bei Malik war aber, was die Qualität angeht, eher das Gegenteil der Fall. Der einzige Proband aus der Kontrollgruppe, von dem zwei Prozessen untersucht wurden (Niklas) hat sich bezüglich der metakognitiven Aktivitäten eher verschlechtert.

5.6 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurden die qualitativen Auswertungen des bei aufgabenbasierten Interviews gesammelten Videomaterials dargestellt. Es wurden insgesamt 13 Problembearbeitungsprozesse von neun verschiedenen Studienanfängern betrachtet. Hierbei wurden drei der vier Aspekte des Problemlösens nach Schoenfeld (1985) betrachtet: Die Rolle des Vorwissens (oder *Ressources*, Abschnitt 5.3.6 und 5.5.5), der Einsatz von *Heurismen* (Abschnitt 5.3.4 und 5.5.4) und *metakognitive Aktivitäten* (Abschnitt 5.3.5 und 5.5.6). Die Qualität der beiden letztgenannten wurde auch in Form von Leitfragen eingeschätzt (Abschnitt 5.3.7 bzw. 5.3.7). Der vierte Aspekt, die *Beliefs*, wurde hier nicht untersucht, da er zwar Einfluss auf die Prozesse hat, sich aber hierin nicht unmittelbar beobachten lässt. Darüber hinaus wurden Schoenfeld-Episoden (ebd.) betrachtet (Abschnitt 5.3.1 und 5.5.2). Hierbei haben sich insbesondere die Episoden des *Planning* und der *Implementation* als interessant herausgestellt. Zusätzlich wurde die Nutzung externer Ressourcen (im Wesentlichen handelt es sich hierbei um Arbeit mit dem Skript) untersucht (Abschnitt 5.3.2 und 5.5.3). Außerdem wurde mit Hilfe der gesammelten Materialien untersucht, welche Aktivitäten hilfreichen Ideen vorausgegangen sind (Abschnitt 5.5.5).

Ziel dieses Abschnittes ist die Beantwortung der

Forschungsfrage 2: Wie laufen Problembearbeitungsprozesse bei Studienanfängern der Mathematik an authentischen Übungsaufgaben ab und welchen Einfluss hat dabei die Teilnahme an der Fördermaßnahme?

Diese Forschungsfrage wurde im Verlauf der Betrachtungen[44] in neun Teilfragen unterteilt, die sich in den entsprechende Unterabschnitten von Abschnitt 5.3 wiederfinden und im Folgenden referenziert werden.

Die bemerkenswerteste Erkenntnis aus den Untersuchungen ist die enorme Bedeutung des *Vorwissens* bei der Bearbeitung von Problemen in der Studieneingangsphase. Sicherlich ist nicht überraschend, dass dieses eine Rolle spielt (schließlich ist es einer der von Schoenfeld genannten Aspekte), bei der Betrachtung der Prozesse hat genau das sich aber als der *entscheidende* Faktor herausgestellt. Das ist besonders interessant, da die meisten Untersuchungen zum Problemlösen die Hürde des Vorwissens aus nachvollziehbaren Gründen möglichst gering halten.

Frage 6 hat gezeigt, dass mangelndes Vorwissen das Problemlösen erheblich erschweren oder eine erfolgreiche Bearbeitung komplett verhindern kann. Acht der betrachteten 13 Prozesse wurden durch fachliche Mängel behindert, teilweise in dem Maße, dass guter *Heurismeneinsatz* unmöglich gemacht wurde. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, inwiefern Lernen durch Problemlösen (vgl. etwa Holzäpfel, Lacher, Leuders und Rott (2018)) stattfinden kann, wenn zum Problemlösen erst bestimmtes Vorwissen aufgebaut werden muss. Malik zeigt, dass es durchaus möglich ist, sich während des Problemlösens neues Wissen zu erarbeiten. Möglicherweise müssen Probleme und Vorwissen auch stärker auf einander abgestimmt werden.

Darüber hinaus stellt sich bei Beantwortung der **Frage 5** heraus, dass für die Generierung hilfreicher Ideen grundlegendes Begriffswissen meist notwendige Voraussetzung ist. Darüber hinaus sind die Gründe für entstehende Ideen vielschichtig und oft auch nicht erkennbar. Allerdings hat sich eine systematische *Analysis* (Schoenfeld, 1985) bzw. gutes *Understanding the Problem* (Pólya, 1945) als wichtige Grundlage für die Ideenfindung erwiesen, weswegen den *heuristischen Hilfsmittel* großer Nutzen zukommt.

Bei der *Skriptnutzung* (**Frage 2**) hat sich gezeigt, dass die Probanden, die weniger auf externe Ressourcen zurückgreifen, bessere Erfolgsaussichten haben. Ein möglicher Grund liegt darin, dass diese Studierenden bereits eine gute mentale Repräsentation (*Vorwissen*) der fachlichen Inhalte haben, so dass sie nicht auf das Skript angewiesen sind und sich entsprechend leichter tun. Auch können Schlagwörter aus dem Skript leicht auf eine falsche Fährte führen, insbesondere, wenn die Bearbeiter ohnehin schon unsicher sind. Hier, wie bei jeder Richtungsentscheidung, kann eine gute *metakognitive Kontrolle* helfen.

Auch auf *metakognitive Aktivitäten* hat das *Vorwissen* Einfluss, wie **Frage 8** zeigt. Die Studierenden setzen erstaunlich viele *Kontrollstrategien* ein, das heißt

[44] nicht a priori, da der ganzheitliche Blick nicht verstellt werden sollte

sie hinterfragen ihre Richtungsentscheidungen (im Gegensatz etwa zu Schoenfelds Probanden) regelmäßig. Nicht-zielführende Aktivitäten dauern selten länger als ein paar Minuten an: Bei zwei Probanden (Andreas und Jan) haben fachliche Fehler dazu geführt, dass jeweils ein länger verfolgter Ansatz nicht zur korrekten Lösung geführt, bei Malik wurde zu viel Zeit für die aufwändige Berechnung eines Spezialfalls aufgewendet, letztlich aber trotzdem das Ziel erreicht. Anderseits gab es ein paar Situationen, in denen das Vorgehen *kontrolliert*, also ein Ansatz hinterfragt wurde, dann aber die ungünstige Entscheidung getroffen wurde, eine zielführende Idee zu verwerfen. Auch diese Entscheidungen sind letztlich auf fachliche Fehleinschätzungen, also mangelndes *Vorwissen* zurückzuführen.

Planung wurde auf zwei verschiedene Arten betrachtet: Zum Einen in Form der Schoenfeld-Episoden *Planning* und *Implementation* (**Frage 1**), zum Anderen als metakognitive *Planungsaktivität* (**Frage 7**). Beide haben sich in gewisser Weise als vorteilhaft für den Problemlöseprozess erwiesen. Die Bearbeitungen, die *Planning* und *Implementation* enthalten, haben insgesamt höhere Lösungsqualitäten erreicht. Wie bereits diskutiert, ist dieses Ergebnis aber mit Vorsicht zu genießen, da die Art der Kodierung (sprich: ob *Planning* kodiert wird, möglicherweise von späteren (Teil-)Erfolgen beeinflusst wird. Beim Auftreten von *Planungsaktivitäten* hängt der Nutzen im Wesentlichen davon ab, wie konkret der Plan (möglicherweise auch nach außen hin unsichtbar) in den Gedanken des Probanden ist.

In Bezug auf den *Heurismeneinsatz* haben sich bisherige Erkenntnisse bestätigt: Zum Einen sind viele Heurismen stark aufgabenabhängig (**Frage 3**), wobei hier zu betonen ist, dass sich *heuristische Hilfsmittel* für sehr viele Aufgaben eignen oder, wenn das nicht der Fall ist, sich die Frage, ob ein solches Hilfsmittel sinnvoll ist, meist eindeutig verneinen lässt. Wie bereits erwähnt (**Frage 5**) sind es gerade diese Heurismen, die Ideengenerierung vorbereiten. Zum Anderen ist *Heurismeneinsatz* aber auch vom Bearbeiter abhängig. Bei den hier betrachteten Prozessen sind persönliche Vorlieben vor allem aber nicht ausschließlich beim Einsatz von *Hilfselementen* und *Systematisierungshilfen* aufgefallen.

Frage 9 beschäftigt sich mit den Effekten der Interventionsmaßnahme. Insgesamt scheint diese, wie viele kurzfristige Heurismentrainings (vgl. Abschnitt 2.4.5), keine Auswirkungen auf die Qualität des Heurismeneinsatzes zu haben. Allerdings zeigen sich bei zwei der drei betrachteten Fälle aus der Kontrollgruppe Verbesserungen bezüglich der Metakognition. Der dritte Fall war der erfolgreichste Problembearbeiter und hat auch im zweiten Prozess, trotz etwas schwächerer Metakognition, die Aufgabe vollständig gelöst. Vor allem das Beispiel von Jan kann als Existenzbeweis für Fortschritte während der Maßnahme gesehen werden. Ob diese Fortschritte auch ohne die Maßnahme gemacht worden wären, lässt sich allerdings nicht sagen.

Insgesamt konnte in einzelnen Prozessen der positive Einfluss von *Heurismen* und *Metakognition* bzw. Schwachstellen durch das Fehlen derselbigen ausgemacht werden. Besonders auffällig ist aber die überwältigende Bedeutung des *Vorwissens* das im authentischen Setting der gängigen universitären Übungspraxis nicht nur für sich genommen von großer Wichtigkeit ist, sondern auch die anderen Aspekte (*Heurismeneinsatz* und *metakognitive Aktivitäten*) mitbestimmt. Dieses Ergebnis passt zu den Erkenntnissen von Chi et al. (1989), die gezeigt haben, dass Experten in einem Gebiet stärker im Problemlösen sind, vor allem weil sie in der Lage sind, wichtige von unwichtigen Informationen zu unterscheiden.

6 Weiterentwicklung der Maßnahme

Dieses Kapitel beschreibt die Weiterentwicklung des in Abschnitt 4.4 beschriebenen theoriebasierten Entwurfs des ersten Zyklus der Intervention. Hierbei werden weniger kleine Modifikationen der dort genannten Einzelmaßnahmen dargestellt, sondern im Wesentlichen zwei größere Veränderungen: Zum einen wurde modifiziert, welche Strategien bereits vor der Bearbeitung der Hausaufgaben zur Verfügung gestellt wurden (beschrieben in Abschnitt 6.1), zum anderen wurde ein auf die Universitätsmathematik zugeschnittenes Lernstrategietraining ergänzt (siehe Abschnitt 6.2). Die vorgenommenen Veränderungen haben sich aus Lehrerfahrungen, die der Autor in der Rolle eines Übungsgruppenleiters gesammelt hat, systematischen Rückmeldungen der anderen beteiligten Tutoren, sowie der in Kapitel 5 beschriebenen qualitativen Erhebung ergeben[1]. In Abschnitt 6.3 werden einige Überlegungen zur Organisationsform der Präsenzübung in Abgrenzung zur Hausübung präsentiert und in Abschnitt 6.4 wird die Intervention zusammengefasst und reflektiert.

[1] Die in Kapitel 7 beschriebenen quantitativen Ergebnisse hatten planungsgemäß keinerlei Einfluss auf die Weiterentwicklung. Zwar lassen diese auf die Wirksamkeit der Gesamtmaßnahme schließen, jedoch ergeben sich kein Aussagen über Einzelmaßnahmen oder Hinweise auf Verbesserungspotenzial

Ergänzende Information Die elektronische Version dieses Kapitels enthält Zusatzmaterial, auf das über folgenden Link zugegriffen werden kann https://doi.org/10.1007/978-3-658-39052-5_6.

T. Stenzel, *Mathematisches Problemlösen in der Studieneingangsphase*, Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik, https://doi.org/10.1007/978-3-658-39052-5_6

6.1 Bereitstellen von Strategien

Wie bereits in Abschnitt 4.4 angesprochen wurde, ist die Vorgabe von Heurismen seitens der Tutoren kritisch zu sehen. Zusätzlich zu den in Abschnitt 2.4.5 beschriebenen theoretischen Überlegungen hat sich dies auch in der Durchführung der Übungen gezeigt, bei denen die Studierenden zurückmeldeten, dass sie mit manchen der in Abschnitt 4.4 benannten Strategien nichts anfangen können. Nach genauerer Nachfrage berichteten sie, dass sie sich unter *Ähnlichkeiten suchen* und *Variieren der Aufgabe* auch am Ende des ersten Zyklus nicht viel vorstellen konnten. Diese Heurismen wurden zu Beginn des Semesters anhand von Beispielen eingeführt, sind aber bei der Bearbeitung der Hausaufgaben eher selten zum Tragen gekommen. Sicherlich ist bei größerem zeitlichem Aufwand ein Einüben denkbar, im vorliegenden Fall hat die Vorgabe aber eher zu Verwirrung geführt, als zu helfen. Darüber hinaus haben die qualitativen Aufgabenbeobachtungen bereits zu dem Zeitpunkt[2] ergeben, dass die Aufforderung, nach Ähnlichkeiten zu suchen, die Aufmerksamkeit zu sehr auf die Vorlesungsunterlagen richtet, in denen sehr viele Informationen stehen, die für die Aufgabe nicht relevant sind. Das kann gerade Studierende, die die fachlichen Inhalte noch nicht gut verstanden haben, ablenken (vgl. Abschnitt 5.5.3). Es wurde beobachtet, dass diese sich eher auf oberflächliche Merkmale konzentrieren. Ein Student hat sich für den Beweis des Quetschlemmas sehr auf Äquivalenzrelationen konzentriert, weil die Transitivität der Beschreibung der mittleren Folge ähnelt.

Als Reaktion darauf wurde zunächst komplett auf das Bereitstellen von Strategien verzichtet, die nicht in der Zusammenfassungsphase als hilfreiche Strategien gesammelt wurden. Allerdings ist in der Folge einigen Tutoren unabhängig von einander aufgefallen, dass gerade zu Beginn des Semesters mehrere Studierende bei der Benennung von Schwierigkeiten in der Diskussionsphase Äußerungen wie: „Ich weiß gar nicht, wie ich anfangen soll" tätigten. Um dem Abhilfe zu schaffen, wurde entschieden, in den ersten Semesterwochen auf diese Problematik einzugehen. Gemeinsam mit den Studierenden wurden Ideen gesammelt, wie man sich einem unbekannten Problem nähern kann, wenn man auf Anhieb keine Idee hat. Die hierbei auftretenden Strategien entsprechen im Wesentlichen den in Abschnitt 2.4.5 beschriebenen *heuristischen Hilfsmitteln* (z. B.. *Begriffe klären*, *Voraussetzung und Behauptung systematisch festhalten*, *Darstellungswechsel* etc.) sowie dem *Betrachten von Beispielen*, also solchen Heurismen, die in der Phase *Understanding the Problem* zum Tragen kommen. Einen guten Eindruck, wie die daraus resultierenden Tipps ausgesehen haben, vermittelt die Handreichung *Hilfe zur Bearbeitung von*

[2] Hierbei handelt es sich um Beobachtungen aus frühen Zyklen, die in Kapitel 5 nicht dargestellt wurden.

Übungsblättern (Teil 2) in Anhang B, in der auch auf andere, bereits in Abschnitt 4.4 angesprochene Aspekte eingegangen wird. An dieser Stelle stellt sich die Frage, ob diese Art der expliziten Vermittlung ausgewählter Strategien nicht dem Prinzip des entdeckenden Lernens widerspricht. Wie aber in Abschnitt 2.4.1 diskutiert, ist selbstständiges Bearbeiten von Problemen nur dann sinnvoll, wenn eine Chance auf Erfolg besteht. Da die Studierenden hier aber schon Schwierigkeiten angemeldet haben, scheint diese Chance nicht bei allen gegeben zu sein. Eine Hilfestellung beim Verstehen der Aufgabe scheint angebracht zu sein. Darüber hinaus gelten die heuristischen Hilfsmittel als vergleichsweise leicht vermittelbar (vgl. König, 1992) und deren Nutzen ist schnell einzusehen (Bruder & Collet, 2011). Außerdem bergen diese weniger als andere Heurismen die Gefahr, dass sie zu sehr ablenken oder in eine falsche Richtung führen. So ist beispielsweise das Klären aller Begriffe fast immer notwendig zum Lösen eines Problems, und die Entscheidung, ob eine Skizze hilfreich sein könnte oder nicht, ist in der Regel schnell getroffen. Letzteres gilt auch für andere Darstellungswechsel und das Betrachten von Beispielen. Als Konsequenz daraus wurden zu Beginn des Semesters diese heuristischen Hilfsmittel vorgestellt. Darüber hinaus gab es weiterhin eine gemeinsame Vorbereitungsphase, in der die Tutoren beim Verstehen des Problems Hilfestellungen gaben (vgl. Abschnitt 4.4), die im Sinne des *Fading Out* (vgl. Abschnitt 2.4.3) im Laufe des Semesters zugunsten größerer Eigenaktivität der Studierenden abgebaut wurden. Die Erfahrung der späteren Zyklen zeigt, dass die Studierenden mit diesen Hilfestellungen gut umgehen konnten: Es wurden deutlich weniger Schwierigkeiten beim Einstieg in ein Problem genannt und am Ende des Semesters gaben die Studierenden an, dass sie mit den vorgegebenen Heuristischen Hilfsmitteln gut zurecht kamen. Die Wichtigkeit dieser Hilfsmittel im Problemlöseprozess wird in Abschnitt 5.5.5 deutlich.

6.2 Training von Lernstrategien

Bei der qualitativen Untersuchung (Kapitel 5) wurde festgestellt, dass gerade bei authentischen Übungsaufgaben das benötigte Vorwissen einen entscheidenden Einfluss auf den Erfolg des Problembearbeitungsprozesses hat, aber bei einigen Studierenden noch nicht hinreichend ausgebildet ist. Diese Erkenntnis hat dazu geführt, diesen Aspekt stärker in die Intervention mit einzubeziehen. Zwar wurde schon in den ersten Zyklen ein kurzes Training zum Lesen mathematischer Texte (siehe Abschnitt 4.4) durchgeführt, dieses war aber zu wenig auf die Anwendung im Bereich des Problemlösens bezogen und hatte eher die Organisation und Elaboration größerer Skriptabschnitte im Blick. Daher wurde eine Konzeption entwickelt, mit dem Ziel, dass die Studierenden für die Bearbeitung von Übungsaufgaben notwendiges Vorwissen selbstständig aufbauen können. Diese basiert auf den auf

Abschnitt 2.3.1. beschriebenen Überlegungen von Prediger et al. (2011) zu Arten und Facetten des Wissens in der Mathematik, die bei der Einführung von neuen Begriffen (Definitionen) und Zusammenhängen (Sätzen) zu beachten sind. Neue Verfahren wurden an dieser Stelle ausgeklammert, da algorithmische Verfahren den Studierenden erfahrungsgemäß weniger Schwierigkeiten machen und nicht-algorithmische Verfahren über das ausführliche Beschäftigen mit Problemen abgedeckt waren. Auch die Facette der *konventionellen Festlegungen* wurde ausgespart, da sich die Studierenden in der Regel recht schnell an sie gewöhnen. Das Training bestand schlicht darin, dass die Studierenden bei neuen Definitionen und Sätzen (oder bei älteren, die noch immer Schwierigkeiten machten) dazu angeregt wurden, sich die drei Facetten des Wissens *explizite Formulierungen*, *Konkretisierung und Abgrenzung* und *Bedeutung und Vernetzung* (ebd. – vgl. Abschnitt 2.3.1) genau anzuschauen. Dies wurde in Form von vorgegebenen Fragestämmen (ähnlich der Pólya'schen Liste) getan. Die Fragen lauteten: Kann ich die Aussage in eigenen Worten wiedergeben (explizite Formulierung)? Welche Beispiele kenne ich? Kann ich selbst weitere Beispiele konstruieren? Kenne ich Gegenbeispiele/Nicht-Beispiele[3]? Kann ich welche konstruieren (Konkretisierung und Abgrenzung)? Kann ich den Sachverhalt anders darstellen (Skizze, Tabelle, Graph, Gleichung etc.)? Zu welchen anderen Definitionen und Sätzen kann ich Verbindungen finden (Bedeutung und Vernetzung)? Diese Fragen wurden zum Teil vom Tutor demonstrativ beantwortet und zum Teil gemeinsam betrachtet. Auf Gruppenarbeit wurde aus Zeitgründen verzichtet. Größtenteils wurden die Studierenden aber dazu aufgefordert, sich selbst diese Fragen in Heimarbeit zu stellen und zu beantworten, und erst wenn es hierbei zu Schwierigkeiten kam, konnte der Tutor gefragt werden und der entsprechende Begriff oder Zusammenhang wurde gemeinsam thematisiert. Dadurch sollte die Eigenständigkeit gefördert werden und sichergestellt werden, dass die für die Bearbeitung der Übungsaufgaben notwendigen Grundlagen weitestgehend verstanden wurden.

In der oben beschriebenen Konzeption wurde das Betrachten von Beweisen ausgespart, da dieses anderweitig abgedeckt wurde: Aus Zeitgründen wurde in späteren Zyklen teilweise dazu übergegangen, zu den Aufgaben, die nicht ausführlich diskutiert wurden, Musterlösungen auszugeben. Dadurch war es nicht notwendig, in der Präsenzzeit eine Lösung zu präsentieren, die aufgrund des Zeitdrucks ohnehin kaum über das hinausging, was auch schriftlich kommuniziert werden konnte. Da die Art des Umgangs mit solchen Lösungsbeispielen für den hieraus resultierenden Lerneffekt entscheidend ist (Wittwer & Renkl, 2010) und das Verständnis von

[3] Hiermit sind Beispiele gemeint, die die Bedingung einer Definition nur beinahe erfüllen (z. B. ist die Relation *kleiner gleich* keine Äquivalenzrelation, obwohl sie reflexiv und transitiv ist).

Beweisen eine große Rolle für die Vernetzung des Wissens spielt (vgl. Prediger et al., 2011, Liebendörfer et al., 2020), wurde das in Abschnitt 2.4.6 beschriebene *Self-Explanation Training* nach Hodds et al. (2014), das beim selbstständigen Nachvollziehen von Musterlösungen und Beweisen helfen kann, umgesetzt. Hierbei wurde den Studierenden ein Arbeitsblatt (siehe Anhang B: *Hilfen zum Beweis-Verständnis*) ausgehändigt, das die Prinzipien des Trainings beschreibt und diese anhand eines Beispielbeweises[4] durchführt. Diese Prinzipien sollten zu Hause auf einen Beweis aus der Vorlesung oder eine Musterlösung einer Übungsaufgabe übertragen werden. In der nächsten Übungsstunde wurden gemeinsam Fragen zum Vorgehen geklärt. Ein vertieftes Einüben im Plenum war aus Zeitgründen in der Regel nicht möglich. Durch dieses Training sollte zum einen das Verständnis der schriftlichen Musterlösungen gestärkt werden, die in späteren Zyklen aufgrund der Erfahrungen mit dem Zeitmangel häufiger verwendet wurden, zum anderen sollte durch Bilden von Verknüpfungen das (teilweise mangelhafte – vgl. Kapitel 5) Begriffsverständnis gestärkt werden.

6.3 Präsenzübungen

In zwei der durchgeführten sieben Zyklen der Intervention war die Durchführung der Gruppenübungen von den verantwortlichen Dozenten in Form von Präsenzübungen vorgegeben. Das bedeutet, dass Hausaufgaben nicht erst nach der Bearbeitung besprochen werden. Stattdessen werden sie durch das gemeinsame Betrachten ähnlicher Aufgaben vorbereitet. Da diese Art der Durchführung den in Abschnitt 4.4 beschriebenen Konzepten teilweise widerspricht, soll an dieser Stelle eine kurze Reflexion dieses alternativen Vorgehens erfolgen.

Der große Vorteil solcher Übungen ist, dass die Studierenden hier über einen kompletten Problemlöseprozess begleitet werden können. Bei der anderen Organisationsform ist es ja so, dass der Großteil eines Prozesses komplett in Eigenarbeit durchgeführt wird. Bei Präsenzübungen können Konzepte, wie die von Bruder & Collet (2011) oder Schoenfeld (1985), wie sie in Abschnitt 2.4.5 und 2.4.7 ausführlich beschrieben sind, umgesetzt werden. Zusammenfassend bedeutet das: Bei Arbeit in Gruppen oder nach dem Ich-Du-Wir-Prinzip können als Hilfen Orientierungsfragen à la Pólya oder, weniger steuernd, metakognitive Kontrollfragen nach Schoenfeld zum Vorgehen gestellt werden. Außerdem kann beim anschließenden

[4] Damit die Studierenden dieses Beispiel auch zu Beginn des Studiums das Beispiel gut nachvollziehen können, wurde ein Beweis aus der elementaren Zahlentheorie („Keine ungerade Zahl kann als Summe dreier gerader Zahlen ausgedrückt werden“) gewählt, der minimales schulisches Wissen voraussetzt.

Vorstellen verschiedener Lösungswege das Vorgehen gemeinsam reflektiert und es können genutzte Strategien festgehalten werden. Beim Vorrechnen durch den Tutor kann dieser demonstrativ laut Denken und hierbei auch Entscheidungsprozesse einbeziehen. Werden Aufgaben gemeinsam bearbeitet, können zunächst Ideen gesammelt werden, dann kann ein Weg ausgewählt und dieser nach fünf Minuten evaluiert werden.

Die Erfahrung zeigt allerdings, dass in 90 Minuten maximal zwei Aufgaben ausführlich bearbeitet und besprochen werden können (vgl. auch McKee et al., 2010). Da in der Regel aber auch hier vier Aufgaben pro Woche auf dem Übungszettel stehen, muss der Übungsgruppenleiter bei jeder Aufgabe entscheiden, welche Aspekte fokussiert werden sollen. So muss nicht jede Aufgabe komplett gelöst werden. Oft genügt es, sich gezielt auf das Verstehen der Aufgabe oder bestimmte Eigenheiten zu konzentrieren. In Abstimmug mit den Studierenden kann auch ganz auf die Besprechung einzelner Aufgaben verzichtet und stattdessen ein Lösungsbeispiel ausgeteilt werden. Grundsätzlich gibt es auch die Möglichkeit, von den Studierenden ein wenig, aber nicht zu viel, Vorarbeit zu erwarten. So hat sich herausgestellt, dass das Klären von Begriffen etwas ist, was vorher erledigt werden kann. Die Studierenden sehen ein, dass die Übungsgruppe primär zum Bearbeiten von Aufgaben da ist und dass jeder selbst die Verantwortung dafür trägt, vorher die benötigten Begriffe verstanden zu haben. Mit Hilfe des in Abschnitt 6.2 vorgestellten Konzepts und einer wöchentlichen Mail des Tutors, in der steht, welche Begriffe als Voraussetzung für die nächste Präsenzübung gesehen werden, konnte die zur Klärung von Begriffen verwendete Präsenzzeit auf ein Mindestmaß (z. B. wenn trotz guter Vorbereitung etwas nicht verstanden wurde, oder wenn zu Beginn des Semesters das Verfahren der Begriffsklärung exemplarisch gemeinsam eingeübt wurde) reduziert werden. Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass der Vorteil einer Präsenzübung darin liegt, dass der komplette Problemlöseprozess begleitet werden kann, der Nachteil darin, dass weniger Zeit für Diskussionsphase und Zusammenfassung bleibt. Eine Diskussion der Hausaufgaben[5] kann zwar in Ausnahmefällen mal geschehen, wird aber in der Regel gar nicht, bzw. nur als schriftliche Rückmeldung zu den abgegebenen Bearbeitungen durchgeführt.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich nur am Rande mit diesen Präsenzübungen, eine systematische Untersuchung scheint aber in Zukunft lohnenswert zu sein, zumal nicht offensichtlich ist, ob die Vor- oder Nachteile überwiegen. Etablierter scheint aus den Erfahrungen der begleiteten Zyklen aber die Gruppenübung zur Besprechung der Hausaufgaben zu sein.

[5] Hierbei handelt es sich in der Regel um Aufgaben, die den in der vorherigen Präsenzübung besprochenen ähneln.

6.4 Zusammenfassung und Reflexion der Interventionsmaßnahme

In diesem Abschnitt soll zusammenfassend die

Forschungsfrage 1: Inwiefern lassen sich bestehende Vermittlungskonzepte zum Problemlösen sinnvoll auf den Kontext der universitären Übungsgruppe übertragen?

beantwortet werden. Hierzu werden nicht nur die in diesem Kapitel beschriebenen Modifikationen der Intervention zusammengefasst, sondern auch die in Abschnitt 4.4 aufgeführten Elemente der ursprünglichen Version, die sich bis zuletzt gehalten haben. Als erstes soll aber erwähnt werden, welche Konzeptionen aufgrund der Rahmenbedingungen der Maßnahme nicht umgesetzt wurden.

Neben der grundsätzlich knapp bemessenen Zeit lag die größte Einschränkung darin, dass die gegebenen Probleme von den Studierenden als Hausaufgaben bearbeitet werden sollten. Eine ausführliche Begleitung der Prozesse durch einen Tutor war deswegen nicht möglich. Konzepte, wie sie etwa von Bruder & Collet (2011) oder Schoenfeld (1985) durchgeführt wurden (Demonstrative Bearbeitung von Aufgaben durch den Tutor, Gemeinsames Brainstorming, Organisation von und Beratung bei Gruppenarbeit sowie das Stellen von Reflexionsfragen – vgl. Abschnitt 2.4.5 und 2.4.7), konnten deshalb nicht umgesetzt werden. Hinzu kam, dass auf die vom jeweiligen verantwortlichen Dozenten gestellten Aufgaben keinerlei Einfluss genommen wurde. Ein Einüben neu zu erlernender Heurismen anhand eigens dafür ausgewählter Aufgaben war also ebenfalls nicht möglich, wobei dies ohnehin nicht unumstritten ist (vgl. Abschnitt 2.4.5).

An Stelle der Schoenfeld'schen Reflexionsfragen (1985) wurde eine Dokumentation der häuslichen Problembearbeitungsprozesse nach Mason et al. (2011) angeregt (siehe Anhang B: *Hilfe zur Bearbeitung von Übungsblättern (Teil 1)* – vgl. auch Abschnitt 4.4: *Eigenarbeitsphase*): Hierbei stand zusätzlich zur generellen Reflexion (Was habe ich gemacht? Warum habe ich das gemacht?) die Identifikation von Schwierigkeiten und „Aha-Effekten" im Mittelpunkt.

Um Studierenden den Einstieg in ein Problem zu erleichtern, gab es zwei Maßnahmen. Zum einen wurden zu Beginn des Semesters *heuristische Hilfsmittel* im Sinne von Bruder und Collet (2011) vorgestellt (vgl. Anhang B: *Hilfe zur Bearbeitung von Übungsblättern (Teil 2)*). Obwohl das Einführen von Heurismen ohne Verknüpfung zu Beispielaufgaben kritisch zu sehen ist (vgl. Abschnitt 2.4.5), wurden in der beschriebenen Maßnahme gute Erfahrungen gemacht. Das deckt sich mit der Aussage von König (1996), dass heuristische Hilfsmittel grundsätzlich leichter zu erlernen sind als andere Heurismen. Zum anderen wurden bereits in frühen Zyklen ausgewählte Probleme in den oben genannten verschiedenen Sozialformen (Demonstration, Brainstorming und Gruppenarbeit) in der Gruppenübungen vorbereitet.

Den Großteil der Maßnahme nahm seit jeher die gemeinsame Diskussion der Bearbeitungsprozesse ein. Hierbei wurde der Fokus auf die individuellen Herangehensweisen gerichtet. Unterstützt durch die angefertigten Dokumentationen konnten Schwierigkeiten, Aha-Effekte, heuristische Strategien etc. reflektiert und durch die Erfahrungen der Kommilitonen ergänzt werden.

Nach dieser Besprechung der Probleme wurden verwendete Strategien explizit benannt und separat aufgeführt. Im Sinne eines *Strategiebaukastens* nach Leuders (2017) konnten so die Studierenden eine individuelle Sammlung hilfreicher Strategien zusammenstellen.

Zusätzlich zu diesen direkt mit dem Problemlösen zusammenhängenden Maßnahmen wurde in den späteren Zyklen aufgrund der großen Bedeutung von Vorwissen für den Problemlöseprozess (vgl. auch Kapitel 5) der eigenständige Aufbau mathematischen Wissens durch kurze Lernstrategietrainings gefördert (vgl. Abschnitt 6.2). Hierbei wurden die Studierenden angeregt, die verschiedenen *Facetten mathematischen Wissens* (vgl. Prediger et al., 2011) genauer zu betrachten. Dies sind die *explizite Formulierung* (Definition), die *Konkretisierung und Abgrenzung* (Beispiele und alternative Darstellungen) sowie die *Bedeutung und Vernetzung* (Verbindung zu anderen Definitionen und Sätzen). Eine spezielle Art der Vernetzung kann sich durch das Betrachten von Beweisen ergeben. Um dies zu fördern, wurde ein *Self-Explanation Training* nach Hodds et al. (2014) (vgl. Anhang B) durchgeführt, bei dem es darum geht, zum einen die wesentlichen Ideen des Beweises zu identifizieren und zum anderen den Beweis Zeile für Zeile nachzuvollziehen und die Verbindungen zwischen den verschiedenen Zeilen zu erkennen.

Zum Abschluss dieses Kapitels soll eine kurze Reflexion der Maßnahme stehen, in der vor allem Schwierigkeiten beschrieben werden sollen, die auch nach sieben Zyklen immer noch bestehen: Das größte Problem besteht weiterhin in der äußerst begrenzt zur Verfügung stehenden Zeit. Werden nur zehn Minuten für die Vorbereitungsphase aufgewendet, so bleiben für die Reflexion der Hausaufgaben durchschnittlich zwanzig Minuten pro Aufgabe. Möchte man auf alle Schwierigkeiten und Strategien eingehen, ist diese Zeit knapp bemessen. Auch die eben erwähnten zehn Minuten zur Vorbereitung auf eine Hausaufgabe sind sehr wenig, wenn man nicht nur Ideen vorgeben möchte, sondern die Aktivität der Studierenden, etwa durch Gruppenarbeit, anregen möchte. In der Praxis wurde deswegen häufig eher eine Demonstration des Tutors (zu Beginn des Semesters) oder ein gemeinsames Brainstorming (nachdem die Studierenden ein paar Mal das Vorgehen des Tutors beobachten konnten) umgesetzt. Das Lernstrategietraining ist von den Studierenden gut aufgenommen worden, wenngleich auch hier nur zu Beginn des Semesters ausreichend Zeit vorhanden war, auf einzelne Aspekte genauer einzugehen.

Ein weiteres Problem lag in der Dokumentation der Bearbeitungsprozesse. Da die Studierenden mit der Nachbereitung der Vorlesung und der Bearbeitung der Hausaufgaben bereits viel Zeit investieren müssen, ist es schwierig, sie zu überzeugen, diesen zusätzlichen Aufwand auf sich zu nehmen. Da diese aufgrund mangelnder Ressourcen auch nicht eingesammelt und mit einer Rückmeldung versehen werden konnte, ist zu vermuten, dass viele Studierende sich gegen die (schriftliche) Durchführung einer solche Dokumentation entschieden haben. Aus demselben Grund konnte dies aber nicht nachgeprüft werden. Zwar wurden die Fragen bei der Diskussion der Aufgaben wieder aufgegriffen, wodurch zumindest anzunehmen ist, dass die Studierenden sich Gedanken über ihr Vorgehen gemacht haben, eine schriftliche Fixierung konnte aber nicht sichergestellt werden.

Tabelle 6.1 gibt einen Überblick über die durchgeführten Maßnahmen und ihre Ziele. Diese sind nach den Einflussfaktoren auf das Problemlösen nach Schoenfeld

Tabelle 6.1 Zusammenfassung der durchgeführten Einzelmaßnahmen

Aspekt	Maßnahme	Ziel
Vorwissen	Genaues Betrachten der Facetten mathematischen Wissens	Tieferes Verständnis neuer Begriffe durch Organisation und Elaboration
	Self-Explanation Training	Beweisverständnis durch aktives Nachvollziehen
Heurismen	Vorgabe von heuristischen Hilfsmitteln	Erleichterter Einstieg in das Probemlösen durch Einnahme verschiedener Blickwinkel
	Gemeinsame Planungsphase	Einblick in Ideenfindungsprozesse der Anderen und erleichterter Einstieg in ein konkretes Problem
	Explikation und Sammlung von verwendeten Heurismen	Bewusstmachen wiederkehrender Strategien zur einfacheren Internalisierung
Metakognition	Dokumentation der Prozesse	Reflexion des eigenen Vorgehens
	Diskussion der individuellen Vorgehensweisen	Thematisierung von Schwierigkeiten und deren Beseitigung sowie Einblick in Denkprozesse der Kommilitonen

(vgl. Abschnitt 2.3) sortiert. Natürlich gibt es hierbei auch Überschneidungen. So wird etwa bei der gemeinsamen Planungsphase durch die Artikulation der Ideen auch deren Reflexion, also ein metakognitiver Aspekt gefördert. Andererseits sind die Objekte der Metakognition häufig die Heurismen. Vereinfachend wurden in der Tabelle aber die Hauptaspekte vorangestellt.

Quantitative Forschung

7

In diesem Kapitel werden die quantitativen Erhebungen beschrieben, die für die Messung der Auswirkungen der Intervention verwendet wurden. Zunächst wird in Abschnitt 7.1 beschrieben, welche Daten erhoben wurden. Abschnitt 7.2 beschreibt die Zusammensetzung der Stichprobe. In Abschnitt 7.3 werden die quantitativ zu beantwortenden Forschungsfragen präzisiert, bevor in Abschnitt 7.4 die Vergleichbarkeit von Kontroll- und Interventionsgruppe anhand der Ergebnisse des Prätests diskutiert wird. Daran schließt die eigentliche Auswertung an. In Abschnitt 7.5 wird der Einfluss der Intervention auf die Klausur beschrieben, Abschnitt 7.6 ermittelt den Einfluss auf die Bearbeitung der Hausaufgaben und in Abschnitt 7.7 wird die Teilnahme an den Übungsgruppen untersucht. Zuletzt werden in Abschnitt 7.8 die Ergebnisse zusammengefasst.

7.1 Erhebung der Daten

Ziel der Intervention war es, die Problemlösekompetenz der Teilnehmenden zu verbessern. Allerdings ist diese nicht ohne Weiteres messbar. Dafür hätte man zumindest eine statistisch relevante Stichprobe aller Probanden mehrere Probleme bearbeiten lassen müssen. Die in Kapitel 5 betrachteten Prozesse haben, wenn sie nicht frühzeitig abgebrochen wurden, mindestens eine halbe Stunde, häufig eher eine Stunde pro Aufgabe in Anspruch genommen. Möchte man mehr als nur eine Aufgabe dieser Art testen, braucht man entsprechend viel Zeit, die im Rahmen der Lehrveranstal-

Ergänzende Information Die elektronische Version dieses Kapitels enthält Zusatzmaterial, auf das über folgenden Link zugegriffen werden kann https://doi.org/10.1007/978-3-658-39052-5_7.

T. Stenzel, *Mathematisches Problemlösen in der Studieneingangsphase*, Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-39052-5_7

tung, vor allem gegen Ende des Semesters, wenn alle mit der Klausurvorbereitung beschäftigt sind, nicht zur Verfügung stand (auch da immer unterschiedliche Dozenten hätten überzeugt werden müssen, hierfür Zeit ihrer Lehrveranstaltung abzutreten). Ein zusätzlicher Termin, an dem ein Großteil der Studierenden teilnimmt, war ohne zusätzliche Anreize ebenfalls nicht denkbar. Die Problemlösekompetenz an sich zu messen, kam also nicht in Frage.

Um mit vertretbarem Aufwand trotzdem eine Aussage zur Wirkung der Maßnahme treffen zu können, wurde an Stelle eines Posttests der Erfolg bei der jeweiligen Klausur am Ende des Semesters gemessen. Zwar ist fraglich, ob und inwiefern die hier gestellten Aufgaben tatsächlich Probleme darstellen[1], es ist aber auch interessant zu klären, ob die Fokussierung von Strategien und die Reflexion der Prozesse, durch die sicherlich andere Aspekte (z. B. das Aufbauen von Routinen durch Üben) vernachlässigt werden, nicht auch negative Auswirkung auf den Klausurerfolg haben können.

Auch ein klassischer Prätest, der entweder Problemlösekompetenz oder dasselbe wie der Posttest (also die Klausur) misst, war nicht möglich. Hier war ebenfalls die zur Verfügung gestellte Zeit ein Hauptfaktor. In Anbetracht der im Universitätsalltag verfügbaren Zeit war es nötig, Wege zu finden, den Aufwand gering zu halten. Daher war es, auch im Hinblick auf das Vorwissen der Studierenden zu Beginn des Semesters, nicht sinnvoll, klausurähnliche Aufgaben zu stellen. Stattdessen wurde in einer der Vorlesungen der ersten Semesterwoche ein Test mit Aufgaben auf Schulniveau gestellt[2], um einen Anhaltspunkt dafür zu haben, ob die Studierenden aus Interventions- und Kontrollgruppe sich in Hinsicht auf ihrer mathematische Fähigkeiten wesentlich unterscheiden. Um hierbei die Testzeit bestmöglich auszunutzen, wurden durch die Aufgabenauswahl Schwierigkeiten, die auf Rechenfertigkeiten zurückzuführen sind, weitgehend eliminiert. Der Test hat im Wesentlichen das Vorwissen der Probanden abgefragt. Auch bei den hier gestellten Aufgaben handelt es sich eher um Routine- als Problemaufgaben. Ein Beispiel für einen solchen Test für die Analysis ist in Anhang C zu finden. In manchen Zyklen wurden zusätzlich Fragebögen zu Lernstrategien bzw. zu *Need for Cognition* ausgegeben (diese werden in Abschnitt 7.4 beschrieben).

[1] Meist handelt es sich eher um Aufgaben, die in ähnlicher Form bereits als Übungsaufgaben gestellt wurden. Sehr gut vorbereitete Studierende sollten also wenig Schwierigkeiten bei der Bearbeitung haben. Zwar werden durchaus auch Problemaufgaben gestellt, die meisten sind aber, schon aus Zeitgründen, eher Routineaufgaben.

[2] Die Tests unterschieden sich von Semester zu Semester, zum einen, da die verantwortlichen Dozenten persönliche Vorlieben einbringen konnten, zum anderen, weil in Analysis und linearer Algebra unterschiedliche Inhalte fokussiert wurden.

Um die Teilnahme an Interventions- und Kontrollgruppe nachvollziehen zu können, wurden Anwesenheitslisten geführt. Darüber hinaus wurden, wie in Anfängervorlesungen üblich, die wöchentlich abzugebenden Hausaufgaben[3] bepunktet, um eventuelle Verbesserungen erkennen zu können.

Zusätzlich dazu wurde untersucht, ob die Zugehörigkeit zur Interventions- oder Kontrollgruppe auf die Teilnahme an den Übungsstunden oder an der Klausur ausgewirkt hat.

7.2 Stichprobe

Die hier vorgestellten Erhebungen beschränken sich auf die letzten drei Zyklen der Maßnahme (zwei Wintersemester und ein Sommersemester). Das hängt zum einen damit zusammen, dass in den ersten Durchgängen die Interventionsgruppe nur aus ein oder zwei Übungsgruppen bestand, wodurch quantitative Messungen wenig sinnvoll erschienen (unter anderem ist hier der Einfluss der Tutorenpersönlichkeit auf die zu messenden Merkmale als zu stark eingeschätzt worden), zum anderen wurde die Interventionsmaßnahme in den letzten Zyklen als vergleichsweise stabil eingeschätzt, d. h. die größten Modifikationen wurden in den vorherigen Durchgängen vorgenommen, während es nach dem fünften Zyklus nur noch kleine Veränderungen gab. Insgesamt haben sich im betrachteten Zeitraum 598 Studierende in eine Übungsgruppe eingetragen. Leider ist es nicht gelungen, von allen Übungsgruppen Anwesenheitslisten zu bekommen, um zu überprüfen, ob diese Studierenden auch wirklich dort erschienen sind. Zieht man die Studierenden, von denen diese Information nicht vorlag, und diejenigen, von denen man weiß, dass sie nie zu einer Übung erschienen sind, ab, so bleiben 367 Probanden übrig. Da hier aber Auswirkungen von Interventions- und Kontrollgruppe betrachtet werden sollen, wurden nur Studierende berücksichtigt, die mindestens an der Hälfte der Übungsstunden teilgenommen haben. Durch dieses Ausschlusskriterium bleiben noch insgesamt $N = 177$ Probanden übrig, $N_I = 95$ aus der Interventionsgruppe und $N_K = 82$ aus der Kontrollgruppe[4]. Selbstverständlich handelt es sich hierbei um eine Positiv-Auswahl, da Studierende, die frühzeitig abbrechen oder aus anderen Gründen nicht regelmäßig zu den Übungen erscheinen können, ausgeschlossen werden, aber eine Wirkung der Maßnahme kann nur bei Teilnahme gemessen werden.

[3] In allen betrachteten Zyklen gab es ein Bonussystem, das Extrapunkte für die Klausur gewährte, wenn ein bestimmter Prozentsatz der Hausaufgaben richtig bearbeitet wurde.

[4] Je nach Messung reduziert sich diese Zahl noch einmal. Wird beispielsweise der Klausurerfolg gemessen, werden nur Studierende betrachtet, die an der Klausur teilgenommen haben ($52 + 70 = 122$).

7.3 Präzisierung der Forschungsfragen

Die in Kapitel 3 gestellte Frage

Forschungsfrage 3: Welche Auswirkungen hat die Intervention auf den Klausurerfolg sowie die Teilnahme an den Übungsgruppen und die Bearbeitung der Hausaufgaben im ersten Semester?

soll an dieser Stelle genauer ausdifferenziert werden. Jede Teilfrage wird im entsprechenden Abschnitt ausführlicher erläutert. Die ersten drei Teilfragen beziehen sich auf die Klausur am Ende des Semesters:

Forschungsfrage 3a: Wirkt sich die Teilnahme an der Intervention auf das Bestehen der Klausur aus?

Forschungsfrage 3b: Wirkt sich die Teilnahme an der Intervention auf die Punktzahl in der Klausur aus?

Forschungsfrage 3c: Wirkt sich die Teilnahme an der Intervention auf die Teilnahme an der Klausur aus?

Diese ersten drei Teilfragen werden in Abschnitt 7.5 behandelt.

Neben den Auswirkungen auf die Klausur werden auch mögliche Veränderungen während des Semesters in Augenschein genommen:

Forschungsfrage 3d: Wirkt sich die Teilnahme an der Intervention auf die Punktzahl der Hausaufgaben aus?

Dieser Frage wird in Abschnitt 7.6 nachgegangen.

Forschungsfrage 3e: Wirkt sich die Teilnahme an den ersten Einheiten der Intervention auf die weitere Teilnahme an den Übungsgruppen aus?

Da in dieser Frage nach der Teilnahme an Übungsgruppen gefragt wird kann diese nicht vorher schon als Auswahlkriterium verwendet werden. Näheres zur Filterung der Probanden findet sich mit der weiteren Besprechung dieser Frage in Abschnitt 7.7.

7.4 Vergleichbarkeit der Gruppen

Bevor die oben genannten Fragen beantwortet werden, soll in diesem Abschnitt sichergestellt werden, ob Interventions- und Kontrollgruppe ähnliche Eingangsvoraussetzungen haben. Da die Probanden nicht zufällig den beiden Gruppen zugeteilt wurden[5], ist dies nicht selbstverständlich. Hierzu werden die Ergebnisse aus dem in Abschnitt 7.1 beschriebenen Prätest herangezogen. Bei der Bewertung der Aufgaben gab es nur die Möglichkeit, einen Punkt für eine komplett richtige Aufgabe oder keinen Punkt zu vergeben. Wie bereits erwähnt, wurden hier Mathematikaufgaben auf Schulniveau gestellt und dabei darauf geachtet, dass Rechenfertigkeiten keine zu große Rolle spielen. Exemplarisch ist in Anhang C der Test aus dem sechsten Zyklus dargestellt. Der Prätest aus dem fünften Zyklus unterscheidet sich hiervon nicht wesentlich, wenngleich die Inhalte eher auf die Lineare Algebra abgestimmt sind und aufgrund einer längeren Bearbeitungszeit mehr Fragen aufgenommen werden konnten. Zur besseren Vergleichbarkeit der beiden Jahrgänge wird die Punktzahl als Prozentsatz der Maximalpunktzahl betrachtet und liegt somit zwischen 0 und 100 %. Wie auch in den folgenden Abschnitten wurden nur diejenigen Studierenden bei der Auswertung beachtet, die mindestens an der Hälfte der Übungsstunden teilgenommen hatten. Um zu prüfen, ob sich Interventions- und Kontrollgruppe bezüglich der Leistung im Prätest unterscheiden, wurden die Ergebnisse einem t-Test unterzogen (vgl. Döring & Bortz, 2016):

Tabelle 7.1 Ergebnisse des Prätests im fünften und sechsten Zyklus

Prätest	N	$\bar{x}$	σ	p	d
Kontrollgruppe	48	64, 80 %	24, 12 %	0, 431	0, 159
Interventionsgruppe	52	68, 31 %	20, 18 %		

Tabelle 7.1 stellt die Anzahl N der Probanden, den Mittelwert $\bar{x}$ als Anteil von der maximal erreichbaren Punktzahl, die Standard-Abweichung σ, die Signifikanz p sowie die Effektstärke (Cohen's) d dar. Hierbei gibt der p-Wert für die Signifikanz die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die Unterschiede zwischen den Gruppen zufällig bedingt sind. Ein Gruppenunterschied gilt als signifikant, wenn er kleiner

[5] Die teilnehmenden Tutoren haben sich freiwillig gemeldet und haben sich einen Zeitslot ausgesucht. Ebenso haben die Studierenden (ohne zu dem Zeitpunkt zu wissen, dass es eine Intervention gibt) sich in eine der Übungsgruppen eingeschrieben. Eine ungleiche Verteilung, etwa aufgrund der gewählten Uhrzeit bzw. des Wochentags ist zwar unwahrscheinlich, aber nicht von vornherein auszuschließen.

als (willkürlich festgelegte) Grenzwerte ist, meist 0, 01, 0, 05 oder 0, 1 (vgl. Döring & Bortz, 2016). Wie man sieht, liegt zwar der Mittelwert bei der Interventionsgruppe etwas höher als bei der Kontrollgruppe, da der hier berechnete p-Wert von 0, 431 aber deutlich über den genannten Grenzen liegt, ist dieser Unterschied nicht signifikant, sondern vermutlich zufällig bedingt. Bei Cohens d spricht man ab Werten von 0, 2 von kleinen Effekten, ab 0, 5 von mittleren und ab 0, 8 von großen (vgl. Cohen, 2013). Der hier gemessene Wert von 0, 159 liegt also unterhalb dieser Schwellen. Hinzu kommt, dass es bei so deutlich nicht-signifikanten Unterschieden nicht sinnvoll ist, von Effekten zu sprechen. Man kann also davon ausgehen, dass sich Interventions- und Kontrollgruppe bezüglich der hier gemessenen Leistung nicht wesentlich unterscheiden.

Die hier betrachtete Stichprobe von 100 Probanden unterscheidet sich deutlich von den in Abschnitt 7.2 genannten 177 Studierenden. Hierfür gibt es zwei Gründe. Zum Einen wurde der Prätest im siebten Zyklus auf Wunsch des verantwortlichen Dozenten anonym durchgeführt. Dadurch sind zwar keine Rückschlüsse auf die Anwesenheit in den Gruppenübungen möglich, allerdings wurde die Zugehörigkeit zur Übungsgruppe und damit zur Interventions- oder Kontrollgruppe erfasst. Der Prätest dieses Zyklus wurde daher separat ausgewertet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 7.2 dargestellt. Zum anderen haben nicht alle Probanden am Prätest teilgenommen. 23 Studierende haben zwar an mindestens 50 % der Übungen, nicht aber am Prätest teilgenommen. Dieser hat in der Regel in einer der ersten Vorlesungsstunden stattgefunden. Es gibt keine Hinweise darauf, dass die Teilnahme am Prätest Einfluss auf die betrachteten Faktoren (Klausurteilnahme, Klausurerfolg, Klausurpunktzahl, Anwesenheit in den Übungen[6], Übungspunkte) hat. Deshalb werden diese 23 Studierenden nicht von den weiteren Analysen ausgeschlossen. Dasselbe gilt für die Probanden aus dem siebten Zyklus, von denen nicht bekannt ist, ob sie am Prätest teilgenommen haben. Signifikante Unterschiede lassen sich auch hier nicht feststellen.

Tabelle 7.2 Ergebnisse des Prätests im siebten Zyklus

Prätest Zyklus 7	N	$\bar{x}$	σ	p	d
Kontrollgruppe	88	37, 41 %	14, 69 %	0, 743	0, 052
Interventionsgruppe	72	38, 22 %	16, 64 %		

[6] Dies ist der einzige Faktor, bei dem ein Einfluss denkbar wäre, da eine Abwesenheit in der ersten Vorlesungswoche möglicherweise auf eine Tendenz zur Abwesenheit hindeuten könnte.

Zusätzlich zum mathematischen Teil der Prätests wurde im fünften Zyklus eine verkürzte Form des LIST-Fragebogens (Wild & Schiefele, 1994) im fünfstufigen Likert-Format gestellt, der ebenfalls in Anhang C zu finden ist. Hier wurden die Dimensionen *Organisation* (Items 1, 6, 13 und 21), *Kollaboration* (Items 2, 7, 12 und 16), *Literaturnutzung* (Items 3, 5 und 8), *Metakognition* (Items 4, 14, 18, 19 und 20), *Elaboration* (Items 9, 11, 15, 21 und 23) und *Anstrengung* (Items 10 und 17) erfasst. Tabelle 7.3 zeigt die Ergebnisse dieser Befragung.

Wie man sieht, gibt es auch hier keine signifikanten Unterschiede zwischen den beiden Gruppen. Zwar gibt es einen kleinen Effekt bei der Anstrengung zu Gunsten der Interventionsgruppe, dieser kann aber bei einem derartig hohen p-Wert vernachlässigt werden.

Im Zuge der zyklischen Weiterentwicklung der Maßnahme wurden auch die Messinstrumente modifiziert: Da die Aussagekraft eines Fragebogens, der die Lernstrategien im Studium abfragen soll, aber zu Beginn des ersten Semesters ausgefüllt wird, fraglich ist, wurde im sechsten Zyklus stattdessen ein Konstrukt gewählt, das „Engagement und Freude bei Denkaufgaben" (Bless, Wänke, Bohner, Fellhauer & Schwarz, 1994) erfassen soll, die *Need for Cognition*. Der zugehörige Fragebogen befindet sich ebenfalls in Anhang C. Da es sich bei diesem Zyklus um ein Sommersemester handelt, sind die Fallzahlen entsprechend gering (vgl. Tabelle 7.4). Auch hier sind keine signifikanten Unterschiede zu erkennen. Im siebten Zyklus wurde auf Wunsch des Verantwortlichen Professors kein vergleichbarer Fragebogen verwendet.

Tabelle 7.3 Ergebnisse des LIST-Fragebogens im fünften Zyklus

LIST		N	$\bar{x}$	σ	p	d
Organisation	Kontrollgruppe	33	3, 34	0, 62	0, 427	0, 186
	Interventionsgruppe	40	3, 46	0, 67		
Kollaboration	Kontrollgruppe	33	3, 44	0, 90	0, 649	0, 117
	Interventionsgruppe	40	3, 53	0, 65		
Literaturnutzung	Kontrollgruppe	33	4, 33	0, 65	0, 629	−0, 103
	Interventionsgruppe	40	4, 27	0, 53		
Metakognition	Kontrollgruppe	33	3, 68	0, 56	0, 807	0, 052
	Interventionsgruppe	40	3, 71	0, 61		
Elaboration	Kontrollgruppe	30	3, 68	0, 72	0, 798	0, 055
	Interventionsgruppe	40	3, 72	0, 73		
Anstrengung	Kontrollgruppe	30	4, 2	0, 60	0, 247	0, 268
	Interventionsgruppe	40	4, 35	0, 52		

Tabelle 7.4 Ergebnisse zur Need for Cognition im sechsten Zyklus

Need for Cognition	N	$\bar{x}$	σ	p	d
Kontrollgruppe	13	4, 68	0, 717	0, 826	0, 092
Interventionsgruppe	12	4, 74	0, 604		

Insgesamt wurden bezüglich der gemessenen Eingangsvoraussetzungen keine signifikanten Unterschiede zwischen Interventions- und Kontrollgruppe gefunden. Der Vergleich beider Gruppen kann also wie geplant statistisch durchgeführt werden.

7.5 Auswirkungen auf die Klausur

In diesem Abschnitt sollen die Forschungsfragen 3a bis 3c (vgl. Abschnitt 7.3) behandelt werden. Es geht also um den Einfluss der Maßnahme auf die Bestehensquoten der Klausur (a), die Punktzahl in der Klausur (b) sowie die Teilnahme an der Klausur (c). In allen drei Fällen, wie auch in den folgenden Abschnitten, geht es um den Vergleich der Interventionsgruppe mit der Kontrollgruppe. Neben einem positiven Einfluss der Intervention ist, vor allem da sich diese auf Problemlösekompetenzen konzentriert, die Klausur aber eher Routineaufgaben beinhaltet, auch ein negativer denkbar. In Bezug auf die Klausurteilnahme ist ein positiver Einfluss denkbar, wenn etwa die Teilnehmer der Maßnahme sich aufgrund der intensiven Reflexion von Bearbeitungsprozessen eher zutrauen, die Klausuraufgaben zu lösen.

Nimmt man die Punktzahl in der Klausur als Maß, so eignet sich hierfür wieder ein t-Test (vgl. Döring & Bortz, 2016). Da es sich beim Bestehen der Klausur und bei der Teilnahme daran aber um duale (Ja/Nein), also insbesondere keine metrischen Ereignisse handelt, eignet sich hierfür eher ein χ^2-Test. Tabelle 7.5 stellt die Bestehensquote der beiden Gruppen dar. Hier und in den folgenden Abschnitten werden die Ergebnisse der Zyklen fünf bis sieben betrachtet (vgl. Abschnitt 7.2).

Tabelle 7.5 Ergebnisse der Klausur gemäß Forschungsfrage 3a

Bestehensquote	N	bestanden	Quote	χ^2	p	ϕ
Kontrollgruppe	52	18	34, 62 %	0, 368	0, 544	0, 055
Interventionsgruppe	70	28	40, 00 %			

Hier wird ein anderes Maß für die Effektstärke verwendet als bisher. An Stelle des bei t-Tests üblichen d wird hier (Cramers) ϕ verwendet, was bei 2×2-Ereignissen wie hier Cramers V entspricht. Es ist zu beachten, dass hier bereits ab Werten von $0,1$ von kleiner Effektstärke, ab $0,3$ von einer mittleren und ab $0,5$ von einer starken gesprochen wird (Cohen, 2013). Im vorliegenden Fall liegt allerdings kein signifikanter Unterschied vor.

In Tabelle 7.6 wird gemäß Forschungsfrage 3b (vgl. Abschnitt 7.3) bei den Klausurergebnissen nicht nur zwischen bestanden und nicht bestanden unterschieden, sondern auch die Punktzahlen betrachtet. Auch hier wurde die Punktzahl als Anteil der maximal möglichen Punkte berechnet, um die verschiedenen Semester vergleichbar zu machen. Zum Bestehen der Klausur wurden zwischen 43,75 % (35 von 80) und 50 % (30 von 60) Punkte benötigt. Der Mittelwert beider Gruppen liegt unterhalb dieser Grenze. Ein signifikanter Unterschied konnte nicht festgestellt werden.

Tabelle 7.6 Ergebnisse der Klausur gemäß Forschungsfrage 3b

Klausurpunkte	N	$\bar{x}$	σ	p	d
Kontrollgruppe	52	$35,70\,\%$	$17,29\,\%$	$0,477$	$0,125$
Interventionsgruppe	70	$38,36\,\%$	$23,86\,\%$		

Zum Abschluss dieses Abschnitts soll die Teilnahme an der Klausur betrachtet werden (vgl. Tabelle 7.7). Auch wenn hier ein etwas deutlicherer Unterschied zu Gunsten der Interventionsgruppe mit einer kleinen Effektstärke ($\phi > 0,1$) zu sehen ist, ist dieser nicht signifikant.

Tabelle 7.7 Teilnahme an der Klausur

Teilnahme	N	teilgenommen	Quote	χ^2	p	ϕ
Kontrollgruppe	82	52	$63,41\,\%$	$2,167$	$0,141$	$0,111$
Interventionsgruppe	95	70	$73,68\,\%$			

Insgesamt wirkt sich die Frage, ob ein Proband der Interventionsgruppe oder der Kontrollgruppe angehört, nicht signifikant auf den Klausurerfolg oder die Klausurteilnahme aus. Es gibt also in dieser Hinsicht durch die Intervention weder Vorteile noch Nachteile. Also scheint sich die Fokussierung auf Probleme und die damit zusammenhängende Vernachlässigung von Routinetätigkeiten in der Übung zumindest nicht negativ auszuwirken.

7.6 Auswirkungen auf die Punkte bei den Hausaufgaben

In diesem Abschnitt wird Forschungsfrage 3*d* behandelt. Da es bei der Intervention um die Bearbeitung problemhafter Aufgaben geht, ist es naheliegend einen möglichen Einfluss auf die Bearbeitung der Hausaufgaben zu untersuchen, bei denen es sich in der Regel auch um Probleme handelt (vgl. Abschnitt 2.2.1). Da diese Aufgaben vor Abschluss der Intervention bearbeitet werden, ist ein verminderter Effekt zu erwarten. Deshalb wurden in der folgenden Auswertung nur Hausaufgaben ab dem sechsten[7] Übungsblatt berücksichtigt. Vorher besteht wenig Grund zu der Annahme, dass die Maßnahme bereits Wirkung zeigt. Außerdem ist zu beachten, dass die Abgabe der Hausaufgaben freiwillig war, wenngleich hierdurch Bonuspunkte für die Klausur gesammelt werden konnten und im fünften Zyklus eine Mindestpunktzahl Voraussetzung für die Teilnahme an der Klausur war. Gerade zum Ende des Semesters, wenn klar war, dass eine solche Schwelle bereits erreicht wurde, ging die Zahl der abgegebenen Aufgaben deutlich zurück. Auch hier wurden die Punkte als Anteil der maximal erreichbaren Punktzahl berechnet (vgl. Tabelle 7.8). Es zeigt sich ein kleiner Effekt zu Gunsten der Interventionsgruppe, der allerdings wieder nicht signifikant ist.

Tabelle 7.8 Einfluss auf die Punkte bei Hausaufgaben

Übungspunkte	N	$\bar{x}$	σ	p	d
Kontrollgruppe	74	32, 70 %	22, 86 %	0, 116	0, 247
Interventionsgruppe	91	38, 59 %	24, 51 %		

7.7 Auswirkungen auf die Teilnahme an den Übungsgruppen

Als letztes wurde zur Beantwortung der Forschungsfrage 3*e* untersucht, ob die Interventionsmaßnahme Studierende dazu bewegen konnte, regelmäßiger zu den Gruppenübungen zu kommen, was ein Signal dafür wäre, dass diese Art der Übung als hilfreicher empfunden wird als die klassische Form[8]. Im Gegensatz zu den ande-

[7] Diese Grenze ist willkürlich nach den hier genannten Kriterien gewählt.

[8] An dieser Stelle sei daran erinnert, dass die Studierenden nicht wussten, dass sie an einer Intervention teilnahmen. Eine erhöhte Anwesenheit wäre also nicht auf ein Gefühl der sozialen Verpflichtung zurückzuführen. Sicherlich gibt es aber andere Faktoren (etwa das Engagement der Tutoren), die die Teilnahme beeinflussen können.

ren Erhebungen, ist hierbei das Herausfiltern derjenigen Probanden, die weniger als die Hälfte der Übungsstunden besucht haben, nicht sinnvoll. Auf der anderen Seite ergibt es aber auch wenig Sinn, alle Studierenden, die sich in Übungsgruppen eingeschrieben haben, zu betrachten: Wer die Übung nie oder nur einmal besucht hat, kann deren Nutzen schwerlich einschätzen. Deshalb wurde entschieden, diejenigen Studierenden zu betrachten, die in den ersten fünf Übungsstunden mindestens dreimal anwesend waren. Daher ist die Grundgesamtheit dieser Auswertung mit $N = 269$ größer als zuvor. Auch bei dieser Auswertung ist kein signifikanter Unterschied zwischen den beiden Gruppen zu erkennen (vgl. Tabelle 7.9).

Tabelle 7.9 Einfluss auf die Anwesenheit in den Übungen

Teilnahme	N	$\bar{x}$	σ	p	d
Kontrollgruppe	125	$61,16\,\%$	$28,60\,\%$	$0,462$	$0,090$
Interventionsgruppe	144	$63,72\,\%$	$28,13\,\%$		

7.8 Zusammenfassung

Die Ergebnisse aus dem Prätest zeigen, dass sich Interventions- und Kontrollgruppe bezüglich der hier erhobenen Eingangsvoraussetzungen nicht wesentlich unterscheiden. Bei der Betrachtung der Variablen *Klausurergebnis* (Bestehensquote und Durchschnittpunktzahl), *Teilnahme an der Klausur*, *Punkte bei Hausaufgaben* und *Anwesenheit in Übungsgruppen* zeigen sich zwar bei allen Betrachtungen leichte Vorteile für die Interventionsgruppe (bei der Klausurteilnahme und den Übungspunkten auch mit kleiner Effektstärke), allerdings ist keiner dieser Vorteile signifikant. Diese Unterschiede könnten also auch zufällig sein.

Insgesamt ist dieses Ergebnis wenig überraschend, da die Maßnahme als minimalinvasiv zu betrachten ist: Von 6 bis 10 Semesterwochenstunden (vier Stunden Vorlesung, zwei Stunden Übung, zwei Stunden Ergänzung für Fachbachelor-Studierende, ggf. Globalübung oder Tutorium) wurde nur die Übung (2 SWS) modifiziert, d. h. sie wurde so umgestaltet, dass sie noch immer die bisherigen Funktionen erfüllt. Effektiv wurde also maximal eine halbe Stunde pro Woche überhaupt verändert. Große Effekte waren deswegen von vornherein nicht zu erwarten. Allerdings konnte die Befürchtung, die Fokussierung auf strategische Herangehensweisen und Reflexion und eine daraus resultierende Vernachlässigung des Einübens von Routinen könnte sich negativ auswirken, nicht bestätigt werden.

8 Verdichtung und Diskussion der Ergebnisse

In der Einleitung (Kapitel 1) wurde die Motivation zur vorliegenden Arbeit beschrieben: Da viele Studierende vor allem zu Beginn ihres Studiums große Schwierigkeiten bei der Bearbeitung von Übungsaufgaben und daraus resultierend auch von Klausuraufgaben haben, sollte eine Fördermaßnahme entwickelt werden, die hier Abhilfe schafft. Es sollte aber hierfür keine zusätzliche Präsenzzeit aufgewendet werden, da die Studierenden ohnehin viel für ihr Studium tun müssen und großer Wert auf eigenständiges Arbeiten gelegt wird. Da außerdem über das Problemlösen in der Studieneingangsphase im Vergleich zu anderen Situationen noch recht wenig bekannt ist, ergaben sich folgende Forschungsfragen:

Forschungsfrage 1: Inwiefern lassen sich bestehende Vermittlungskonzepte zum Problemlösen sinnvoll auf den Kontext der universitären Übungsgruppe übertragen?

Forschungsfrage 2: Wie laufen Problembearbeitungsprozesse bei Studienanfängern der Mathematik an authentischen Übungsaufgaben ab und welchen Einfluss hat dabei die Teilnahme an der Fördermaßnahme?

Forschungsfrage 3: Welche Auswirkungen hat die Intervention auf den Klausurerfolg sowie die Teilnahme an den Übungsgruppen und die Bearbeitung der Hausaufgaben im ersten Semester?

Ergänzende Information Die elektronische Version dieses Kapitels enthält Zusatzmaterial, auf das über folgenden Link zugegriffen werden kann https://doi.org/10.1007/978-3-658-39052-5_8.

T. Stenzel, *Mathematisches Problemlösen in der Studieneingangsphase*,
Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-39052-5_8

Ausgangssituation war also, dass zum einen die klassische Form der Übungsgruppe modifiziert und zum anderen grundlegende Erkenntnisse über Problemlöseprozesse zu Studienbeginn gesammelt werden sollten.

Grundidee des Interventionskonzeptes war die gemeinsame Reflexion individueller Problembearbeitungen, d. h. aus eigenständigen Bearbeitungen sollte durch systematische Betrachtung gelernt werden. Hierzu wurden verschiedene theoretische Überlegungen und Erfahrungen aus universitärer (z. B. Schoenfeld, 1985) und schulischer (Bruder & Collet, 2011; Leuders, 2017) Praxis herangezogen (vgl. Abschnitt 2.4). Einerseits wurde die gemeinsame Reflexion durch Dokumentation der Hausaufgabenbearbeitung im Sinne von Mason et al. (2011) (vgl. Anhang B) vorbereitet, die auch den Fokus stärker auf die Ideengenerierung und das Überwinden von Schwierigkeiten lenkte, andererseits wurden zum Ende der Reflexion die von den Studierenden als hilfreich eingeschätzten Strategien separat festgehalten. So konnten die Studierenden sich individuelle Wissensspeicher im Sinne von Leuders (2017) erstellen und pflegen. Um den Einstieg in einzelne Probleme zu erleichtern, wurde das Vorgehen unter Berücksichtigung von Erkenntnissen zum kooperativen Lernen (vgl. Abschnitt 2.4.4) gemeinsam geplant. Die hier beschriebene Maßnahme stellt eine insgesamt gelungene Möglichkeit der Übertragung bekannter Konzepte auf den universitären Kontext dar. Auf Ergänzungen dieser Ideen, die sich aus der Behandlung der Forschungsfrage 2 ergeben, wird weiter unten eingegangen.

Zur Beantwortung der zweiten Forschungsfrage wurden Studierende bei der Bearbeitung authentischer Übungsaufgaben gefilmt und die dabei entstandenen Aufnahmen unter Berücksichtigung folgender Aspekte ausgewertet:

- Ablauf der Prozesse (durch Einteilung in Schoenfeld-Episoden)
- Nutzung des Skriptes und anderer externer Ressourcen
- Heurismeneinsatz
- Metakognitive Aktivitäten
- Fachwissen und Fehler
- Verschiedene Lösungsansätze
- Lösungsqualität

Hierbei wurden zum einen bestehende Erkenntnisse bestätigt bzw. gezeigt, dass diese auch im Kontext der Studieneingangsphase gelten: Das Vorhandensein von Planungsprozessen (kodiert in Form der Schoenfeld-Episoden *Planning* und *Implementation* oder als metakognitive *Planungsaktivität*) wirkt sich positiv auf den Lösungserfolg aus, wenn der Plan konkret und nicht fehlerhaft ist und auch in die Tat umgesetzt wird (ein möglicher Bias aufgrund der Art der Kodierung wurde in Abschnitt 5.5.2 bereits diskutiert). Darüber hinaus gibt es Prozesse, bei denen der positive Einfluss von Heurismen und Metakognition zu erkennen ist und solche, bei denen der Einsatz heuristischer und metakognitiver Aktivitäten vermutlich geholfen hätte (vgl. z. B. Rott, 2013; Schoenfeld, 1985). Ebenso ist zu erkennen, dass der Nutzen vieler Heurismen, ähnlich wie bei Rott (2013), von der Beschaffenheit der Aufgabe abhängig ist. Es wurden aber auch Heurismen entdeckt, deren Einsatz von den Gewohnheiten und vermutlich dem Nützlichkeitsempfinden des Bearbeiters abhängt. Insgesamt haben sich die *Heuristischen Hilfsmittel* (Bruder & Collet, 2011) als besonders hilfreich erwiesen.

Zum Anderen gibt es aber auch einige neue Erkenntnisse: Der wesentliche Punkt besteht in der Rolle, die das Vorwissen spielt. In acht von 13 Prozessen wurde deutlich, dass schwach ausgebildetes Fachwissen das Vorwärtskommen stark behindert, teilweise so stark, dass keine brauchbaren Argumente in Richtung einer Lösung entstanden sind und auch ein sinnvoller Heurismeneinsatz verhindert wurde. Der Aspekt des Vorwissens sollte also in Zukunft noch genauer betrachtet werden. Eng mit dem Vorwissen zusammenhängend hat sich gezeigt, dass Studierende, die sich während des Problembearbeitungsprozesses stark auf das Skript oder andere Ressourcen stützen, oft größere Schwierigkeiten haben als Probanden, die ohne externe Ressourcen auskommen und selbstständig Ideen generieren.

In diesem Zusammenhang stellt sich eine interessante Frage: In welchem Maße müssen Problemlöseprozesse durch den Aufbau von Vorwissen vorbereitet werden und in welchem Maße können Problemlöseprozesse den Aufbau von Wissen unterstützen? Im Zusammenhang mit letzterem wird gerne von *Lernen durch Problemlösen* gesprochen (z. B. Heinrich et al., 2015; Holzäpfel et al., 2018). Dabei sollen während eines Problemlöseprozesses Lernaktivitäten angeregt werden. Wie auf S. 31 f. beschrieben, werden beim Problemlösen ähnliche kognitive Aktivitäten durchgeführt wie beim Tiefenlernen. Ein Beispiel dafür ist der Bearbeitungsprozess von Malik zum Quetschlemma. Er hat hier Schwierigkeiten, weil er den Umgang mit Beträgen nicht gewöhnt ist. Dadurch wird der Prozess um etwa eine halbe Stunde in die Länge gezogen. Am Ende hat er sich die ihm vorher fehlende Erkenntnis selbst hergeleitet und dadurch gute Wissensstrukturen geknüpft. Er hat sich also einen unbekannten Aspekt des Betragsbegriffs selbst erschlossen. Das Lernen durch Problemlösen und das Lernen zum Problemlösen greift also ineinander. Es bleibt die Frage zu klären, wann für eine Bearbeitung notwendiges Wissen aufgebaut werden sollte: vor oder während des Prozesses? In der universitären Praxis haben Studierende aufgrund der längeren Bearbeitungszeit der Hausübung (im Gegensatz zu der Stunde, die in etwa bei den beobachteten Prozessen genutzt wurde, steht hier eine Woche zur Verfügung) aber die Möglichkeit, flexibler zwischen der Aneignung von Wissen und der Bearbeitung von Problemen hin- und herzuwechseln, als das bei den beschriebenen Interviews der Fall war: Es besteht die Möglichkeit, sich vom Problem zu entfernen und erstmal in Ruhe unklare Begriffe zu erarbeiten.

Wie zu erwarten war, hat die Intervention, wie andere kurzfristige Heurismentrainings (siehe Abschnitt 2.4.5), keinen großen Einfluss auf die Qualität des Heurismeneinsatzes gehabt. Allerdings zeigt sich bei zwei Probanden (Jan und Julia) die Tendenz, dass Metakognition besser eingesetzt wird, die Praxis in den Interventionsgruppen also hilfreich ist.

Die vorliegende Arbeit hat ihre Betrachtung von Problemlöseprozessen sehr breit angelegt, um einen holistischen Blick zu ermöglichen. Jeder einzelne der betrachteten Aspekte kann sehr viel tiefergehender betrachtet werden. Diese Verdichtung der Ergebnisse der qualitativen Erhebung ist bewusst kurz gehalten. Eine ausführlichere Zusammenfassung findet sich in Abschnitt 5.6.

Um auf Forschungsfrage 1 zurückzukommen: Die Erkenntnisse aus der qualitativen Untersuchung haben natürlich die Weiterentwicklung der Maßnahme beeinflusst. Speziell die große Bedeutung von Vorwissen hat dazu geführt, dass zu Beginn eines Semesters mathematikspezifische Lernstrategien eingeübt wurden. Hierzu zählte zum einen, dass die Studierenden angeregt wurden, sich die verschiedenen Facetten eines neuen Begriffs oder Satzes durch Organisation (Generierung von Beispielen, Darstellungswechsel etc.) und Elaboration (Verknüpfung mit bekannten Definitionen und Sätzen, Betrachten des Beweises) genauer anzuschauen (vgl. 6.2). Zum anderen wurde ein Training zum selbstständigen Nachvollziehen von Beweisen nach Hodds et al. (2014) durchgeführt (siehe Anhang B).

Zur Erleichterung des Einstiegs in das Problemlösen hat sich eine direkte, explizite Vermittlung von *heuristischen Hilfsmitteln* im Sinne von Bruder und Collet (2011) als effektiv erwiesen. Mit der direkten Vermittlung anderer Heurismen wurden aber von den beteiligten Tutoren schlechte Erfahrungen gemacht, weil Studierende durch stichwörtliche Zusammenfassungen einer Strategie eher abgelenkt und verwirrt wurden, als dass sie ihnen geholfen hätte. Die Hilfsmittel hingegen haben sich, wie schon König (1992) geschrieben hat, als leicht vermittelbar herausgestellt.

Eine ausführliche Diskussion über den letzten Stand der Intervention wurde bereits in Abschnitt 6.4 geführt. Da die Maßnahme sowohl in der Analysis als auch in der linearen Algebra getestet wurde, gibt es keine augenscheinlichen Gründe, diese nicht auch auf andere Veranstaltungen übertragen zu können.

Zur Beantwortung der Forschungsfrage 3 lässt sich sagen, dass die durchgeführten quantitativen Auswertungen allesamt leichte, aber nicht signifikante Vorteile der Interventionsgruppe gegenüber der Kontrollgruppe zeigen. Damit ist zumindest gesichert, dass die Veränderung der etablierten Übungsform sich nicht negativ auswirkt. Eine Weiterführung der Maßnahme wird also, auch aufgrund der leichten Umsetzbarkeit, empfohlen.

Im Zuge der Entwicklung der beschriebenen Intervention und der qualitativen Prozessanalysen wurde zur lokalen (auf das Problemlösen in der Studieneingangsphase bezogenen) Theoriebildung im Sinne der fachdidaktischen Entwicklungsforschung beigetragen. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass sich Erkenntnisse aus anderen Bereichen auf diesen Kontext übertragen lassen: Heuristische Hilfsmittel können leicht erlernt werden, Heurismeneinsatz hat positiven Einfluss auf Problemlöseprozesse, ist aber aufgabenabhängig, auch metakognitive Steuerung wirkt sich positiv aus und lässt sich einüben.

Bemerkenswert ist aber die Erkenntnis, dass Fachwissen einen erheblichen Einfluss auf den Problemlöseerfolg in authentischen Übungskontexten hat. In Anbetracht der wenigen Zeit, die zur Aneignung neuen Wissens und der Bearbeitung zugehöriger Übungsaufgaben zur Verfügung steht, stellen sich in dem Zusammenhang einige Fragen: Eine genauere Untersuchung von spezifischen Lernstrategien und eine mögliche Integration von *Lernen durch Problemlösen* (vgl. Holzäpfel et al., 2018) unter Berücksichtigung der Tatsache, dass eine gewisse Wissensbasis für die Problembearbeitung notwendig ist, wäre sicherlich gewinnbringend. Hierbei ist auch zu klären, ob man diese *notwendige* Wissensbasis genauer ermitteln kann. Da in der Problemlöseforschung die Rolle des Vorwissens häufig ausgeblendet wird (z. B. durch die Konstruktion entsprechender Probleme), ist es auch interessant, diesen Aspekt auch im schulischen Zusammenhang genauer zu untersuchen.

Es stellt sich auch die Frage, ob die in der vorliegenden Arbeit gewonnenen Erkenntnisse sich auf andere Übungsaufgaben mit größerem Routineanteil übertragen lassen. Die hier betrachteten Aufgaben waren ja bewusst so ausgesucht, dass sie für alle Probanden ein Problem darstellten (nur Malik war in der Lage, mindestens ein Problem vollständig zu lösen). Auf dem Spektrum von reiner Routine zum reinen Problem gibt es daher noch viele Abstufungen, die zu untersuchen sind.

Was die Intervention angeht, gibt es verschiedene Möglichkeiten der Modifikation, die bisher nicht getestet wurden, da sie die Kooperation des verantwortlichen Dozenten benötigen: Vom Stellen eigener Aufgaben über die Ausgabe strukturierter Lösungshilfen bis zur Korrektur und Bepunktung der von den Studierenden erstellten Dokumentationen ihrer Hausaufgaben gibt es einige Ansätze. Auch eine genauere Betrachtung der Vor- und Nachteile von Präsenzübungen ist denkbar. Gerade vor dem Hintergrund, dass Problemlösen als Vehikel zum Lernen dienen kann, stellt sich die Frage, ob das zu den hier betrachteten (und anderen authentischen) Problemen benötigte Vorwissen durch basalere Einstiegsprobleme erarbeitet werden kann. Hierbei kann es sich etwa um Beweise von für den Experten trivialen, aber den Novizen herausfordernden, Aussagen handeln oder aber um eine Erkundungsaufgabe, die im betrachteten universitären Kontext bisher zu wenig Beachtung findet (vgl. Stenzel, 2017).

Um den Einfluss dieser minimal-invasiven Maßnahme zu steigern, wäre auch denkbar, eine eigene Veranstaltung zu Problemlösen und Beweisen, ähnlich wie sie Kempen (2019) für Haupt-, Real- und Gesamtschulstudierende durchgeführt hat, für Fachstudierende oder Gymnasialstudierende umzusetzen. Eine Kombination der Erkenntnisse der vorliegenden Arbeit mit denen von Kempen (ebd.) wäre sicherlich sehr fruchtbar.

Literaturverzeichnis

Ableitinger, C. (2013). Demonstrationsaufgaben im Projekt „Mathematik besser verstehen“. In *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 17–38). Springer.

Aebli, H. (2019). *Zwölf Grundformen des Lehrens: eine allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage* (15. Aufl.). Stuttgart: Klett-Cotta.

Akker, J. Van den. (1999). Principles and methods of development research. In *Design approaches and tools in education and training* (S. 1–14). Springer.

Akker, J. Van den, Gravemeijer, K., McKenney, S. & Nieveen, N. (2006). *Educational design research.* London [u. a.]: Routledge.

Alcock, L. (2017). *Wie man erfolgreich Mathematik studiert: Besonderheiten eines nicht-trivialen Studiengangs.* Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Alcock, L. & Simpson, A. (2001). The Warwick analysis project: Practice and theory. In *The teaching and learning of mathematics at university level* (S. 99–111). Springer.

Alcock, L. & Weber, K. (2010). Undergraduates’ example use in proof construction: Purposes and effectiveness. *Investigations in Mathematics Learning*, *3*(1), 1–22.

Alexander, P. A. (1996). The past, present, and future of knowledge research: A reexamination of the role of knowledge in learning and instruction. *Educational Psychologist*, *31*(2), 89–92.

Anderson, R. C. & Pearson, P. D. (1984). A schema-theoretic view of basic processes in reading comprehension. *Handbook of reading research*, *1*, 255–291.

Arcavi, A., Kessel, C., Meira, L. & Smith, J. P. (1998). Teaching mathematical problem solving: An analysis of an emergent classroom community. *Research in collegiate mathematics education*, *3*(7), 1–70.

Artelt, C. (1998). Lernstrategien und Lernerfolg – Ein Methodenvergleich. *Lehr-Lern-Hefte der Universität Potsdam.*

Artelt, C. (2005). *Lernstrategien und Metakognition: Implikationen für Forschung und Praxis.* Münster: Waxmann.

Artigue, M. (2016). Mathematics education research at university level: Achievements and challenges. In *Proc. 1st conf. of indrum* (S. 11–27). Montpellier, France.

Atkinson, R. K., Renkl, A. & Merrill, M. M. (2003). Transitioning from studying examples to solving problems: Effects of self-explanation prompts and fading worked-out steps. *Journal of educational psychology*, *95*(4), 774.

Barab, S. A. & Squire, K. (2016). *Design-based research: Clarifying the terms. a special issue of the journal of the learning sciences.* Psychology Press.

T. Stenzel, *Mathematisches Problemlösen in der Studieneingangsphase*,
Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-39052-5

Barzel, B. (2006). Ich-Du-Wir ... sich mit einem Thema wirklich auseinandersetzen. *Mathematik lehren*, *139*, 19–21.

Bauer, T. (2019). Peer Instruction als Instrument zur Aktivierung von Studierenden in mathematischen Übungsgruppen. *Mathematische Semesterberichte*, *66*(2), 219–241.

Bauer, T. & Partheil, U. (2009). Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. *Mathematische Semesterberichte*, *56*(1), 85–103.

Bausch, I., Biehler, R., Bruder, R., Fischer, P. R., Hochmuth, R., Koepf, W., Schreiber, S. & Wassong, T. (2014). *Mathematische Vor-und Brückenkurse.* Wiesbaden: Springer.

Begle, E. G. (1979). *Critical variables in mathematics education: findings from a survey of the empirical literature.* Washington, DC: Math. Ass. of America.

Beitlich, J., Moll, G., Nagel, K. & Reiss, K. (2015). Fehlvorstellungen zum Funktionsbegriff am Beginn des Mathematikstudiums. *Fehler: Ihre Funktionen im Kontext individueller und gesellschaftlicher Entwicklung*, 211–223.

Belland, B. R. (2014). Scaffolding: Definition, current debates, and future directions. In *Handbook of research on educational communications and technology* (S. 505–518). New York: Springer.

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S. & Wickel, G. (2011). *Mathematik neu denken: Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten.* Wiesbaden: Springer.

Bielaczyc, K., Pirolli, P. L. & Brown, A. L. (1995). Training in self-explanation and self-regulation strategies: Investigating the effects of knowledge acquisition activities on problem solving. *Cognition and Instruction*, *13*(2), 221–252.

Biza, I., Jaworski, B. & Hemmi, K. (2014). Communities in university mathematics. *Research in Mathematics Education*, *16*(2), 161–176.

Bless, H., Wänke, M., Bohner, G., Fellhauer, R. F. & Schwarz, N. (1994). Need for cognition: eine Skala zur Erfassung von Engagement und Freude bei Denkaufgaben. *Zeitschrift für Sozialpsychologie*, *25*.

Blum, S. (2019). Diskontinuität in der Linearen Algebra: Was bedeutet der höhere Standpunkt? – Konkretisierung einer Denkfigur und qualitative Untersuchungen zu verschiedenen Zeitpunkten in der LehrerInnenbiografie. In M. Klinger, A. Schüler-Meyer & L. Wessel (Hrsg.), *Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2018. Beiträge zum gleichnamigen Symposium am 9. und 10. November 2018 an der Universität Duisburg-Essen* (S. 75–88). Münster: WTM.

Boekaerts, M. & Corno, L. (2005). Self-regulation in the classroom: A perspective on assessment and intervention. *Applied Psychology*, *54*(2), 199–231.

Boekaerts, M., Maes, S. & Karoly, P. (2005). Self-regulation across domains of applied psychology: Is there an emerging consensus? *Applied Psychology*, *54*(2), 149–154.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof*, *7*(8).

Borba, M. C., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadanidis, G., Llinares, S. & Aguilar, M. S. (2016). Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics education. *ZDM*, *48*(5), 589–610.

Boshuizen, H. P. A. (2004). Does practice make perfect? In *Professional learning: Gaps and transitions on the way from novice to expert* (S. 73–95). Dodrecht: Springer.

Brandell, G., Hemmi, K. & Thunberg, H. (2008). The widening gap – a swedish perspective. *Mathematics Education Research Journal*, *20*(2), 38–56.

Bressoud, D. & Zorn, P. (2018). *Improving the teaching and learning of calculus.* Taylor & Francis.

Brown, A. L. (1978). Knowing when, where, and how to remember; a problem of metacognition. *Advances in instructional psychology*, *1*.

Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of the learning sciences*, *2*(2), 141–178.

Bruder, R. (1992). Problemlösen lernen – aber wie: Ein altes, aber nicht befriedigend gelöstes Thema. In *Mathematik lehren* (Bd. 52, S. 6–12).

Bruder, R. (2000a). Eine akzentuierte Aufgabenauswahl und Vermitteln heuristischer Erfahrung – Wege zu einem anspruchsvollen Mathematikunterricht für alle. *Mathematik lehren und lernen nach TIMSS–Anregungen für die Sekundarstufen. Berlin: Volk und Wissen*.

Bruder, R. (2000b). Problemlösen im Mathematikunterricht – ein Lernangebot für alle. *Mathematische Unterrichtspraxis*, *1*, 2–11.

Bruder, R. & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Bruder, R., Elschenbroich, J., Greefrath, G., Henn, H.-W., Kramer, J. & Pinkernell, G. (2010). *Schnittstelle Schule Hochschule.* Gesellschaft für Didaktik der Mathematik.

Bruner, J. S. (1961). The act of discovery. *Harvard educational review*.

Bruner, J. S. (1975). *Toward a theory of instruction* (7. print Aufl.). Cambridge, Mass.: Harvard Univ. Pr.

Büchter, A. & Leuders, T. (2011). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln : Lernen fördern – Leistung überprüfen.* 5. Aufl., Berlin: Cornelsen Scriptor, 2011.

Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung. (1997). *Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“*. Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung.

Burkhardt, H. (2006). From design research to large-scale impact: Engineering research in education. *Educational design research*, 121–150.

Burkhardt, H. & Schoenfeld, A. H. (2003). Improving educational research: Toward a more useful, more influential, and better-funded enterprise. *Educational Researcher*, *32*(9), 3–14.

Chi, M. T., Bassok, M., Lewis, M. W., Reimann, P. & Glaser, R. (1989). Self-explanations: How students study and use examples in learning to solve problems. *Cognitive science*, *13*(2), 145–182.

Chi, M. T. H., Feltovich, P. J. & Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science*, *5*(2), 121–152.

Chorlay, R. (2019). A pathway to a student-worded definition of limits at the secondary-tertiary transition. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *5*(3), 267–314.

Clark, K. R. (2015). The effects of the flipped model of instruction on student engagement and performance in the secondary mathematics classroom. *Journal of Educators Online*, *12*(1), 91–115.

Clark, M. & Lovric, M. (2009). Understanding secondary–tertiary transition in mathematics. *International journal of mathematical education in science and technology*, *40*(6), 755–776.

Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9–13.

Cohen, J. (2013). *Statistical power analysis for the behavioral sciences.* Hillsdale, NJ: Academic press.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2007). *Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten beim schrittweise kontrollierten Argumentieren im Mathematikunterricht.* Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Cohors-Fresenborg, E. & Klieme, E. (2000). Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation – Eine Evaluationsstudie auf der Basis von TIMSS-Instrumenten. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 149–152). Franzbecker.

Collet, C. (2009). *Förderung von Problemlösekompetenzen in Verbindung mit Selbstregulation: Wirkungsanalysen von Lehrerfortbildungen.* Münster [u. a.]: Waxmann.

Collins, A., Brown, J. S. & Newman, S. E. (1988). Cognitive apprenticeship: Teaching the craft of reading, writing and mathematics. *Thinking: The Journal of Philosophy for Children*, *8*(1), 2–10.

Cooper, G. & Sweller, J. (1987). Effects of schema acquisition and rule automation on mathematical problem-solving transfer. *Journal of educational psychology*, *79*(4), 347.

Coppin, C. A., Mahavier, W. T., May, E. L. & Parker, E. (2009). *The Moore Method: A pathway to learner-centered instruction.* MAA.

Cowan, N. (2001). The magical number 4 in short-term memory: A reconsideration of mental storage capacity. *Behavioral and brain sciences*, *24*(1), 87–114.

Cramer, E., Walcher, S. & Wittich, O. (2015). Mathematik und die „INT“-Fächer. In *Übergänge konstruktiv gestalten* (S. 51–68). Wiesbaden: Springer.

Davis, E. A. (1996). Metacognitive scaffolding to foster scientific explanations.

DeBellis, V. & Goldin, G. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: a representational perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(2), 131–147.

Design-Based Research-Collective. (2003). Design-Based Research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5–8.

Dewey, J. (1997). *How we think.* Courier Corporation.

Dieter, M. (2012). Studienabbruch und Studienfachwechsel in der Mathematik: Quantitative Bezifferung und empirische Untersuchung von Bedingungsfaktoren. *Doktorarbeit*.

Di Martino, P. & Gregorio, F. (2019). The mathematical crisis in secondary–tertiary transition. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(4), 825–843.

Dinsmore, D., Alexander, P. & Loughlin, S. (2008). Focusing the conceptual lens on metacognition, self-regulation, and self-regulated learning. *Educational Psychology Review*, *20*(4), 391–409.

Döring, N. & Bortz, J. (2016). Forschungsmethoden und Evaluation.

Dorko, A. (2020). How students engage with online homework: Multiple tries and the ‘see similar example’ feature. In *2020 fall central sectional meeting.*

Dörner, D. (1979). *Problemlösen als Informationsverarbeitung.* Stuttgart: Kohlhammer Verlag.

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U. & Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of group theory. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(3), 267–305.

Dunlosky, J., Rawson, K. A., Marsh, E. J., Nathan, M. J. & Willingham, D. T. (2013). Improving students’ learning with effective learning techniques: Promising directions from cognitive and educational psychology. *Psychological science in the public interest*, *14*(1), 4–58.

Edwards, B. S. & Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis)use of mathematical definitions. *The American mathematical monthly*, *111*(5), 411–424.

Eley, M. & Meyer, J. (2004). Modelling the influences on learning outcomes of study processes in university mathematics. *Higher Education*, *47*(4), 437–454.

English, L. & Sriraman, B. (2010). Problem solving for the 21st century. In *Theories of mathematics education* (S. 263–290). Springer.

Entwistle, N. & Entwistle, A. (1991). Contrasting forms of understanding for degree examinations: the student experience and its implications. *Higher Education*, *22*(3), 205–227.

Entwistle, N. & Marton, F. (1994). Knowledge objects: understandings constituted through intensive academic study. *British Journal of Educational Psychology*, *64*(1), 161–178.

Epp, S. S. (2009). The use of logic in teaching proof. *Resources for Teaching Discrete Mathematics: Classroom Projects, History Modules, and Articles MAA notes*, *74*, 313–322.

Feuer, M., Philips, D., Shavelson, R. & Towne, L. (2003). On the science of educational design studies. *Educational Researcher*, *32*(1), 25–28.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach.* Dordrecht [u. a.]: Reidel.

Fischer, A., Heinze, A. & Wagner, D. (2009). Mathematiklernen in der Schule–Mathematiklernen an der Hochschule: die Schwierigkeiten von Lernenden beim Übergang ins Studium. *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium*, 245–264.

Fischer, M. & Spannagel, C. (2012). Lernen mit Vorlesungsvideos in der umgedrehten Mathematikvorlesung. *DeLFI 2012: Die 10. e-Learning Fachtagung Informatik der Gesellschaft für Informatik eV*.

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist*, *34*(10), 906–911.

Flavell, J. H. (1984). Annahmen zum Begriff Metakognition sowie zur Entwicklung von Metakognition. *Metakognition, Motivation und Lernen*, 23–31.

Flavell, J. H., Miller, P. H. & Miller, S. A. (1993). *Cognitive development* (3. ed. Aufl.). London: Prentice-Hall Internat.

Freeman, S., Eddy, S. L., Mcdonough, M., Smith, M. K., Okoroafor, N., Jordt, H. & Wenderoth, M. P. (2014). Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *111*(23), 8410.

Freudenthal, H. (1978). *Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht.* München [u. a.]: Oldenbourg.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures.* Dordrecht [u. a.]: Kluwer Academic Publ.

Friedrich, H. F. & Mandl, H. (2006). Lernstrategien: Zur Strukturierung des Forschungsfeldes. In H. Mandl & H. F. Friedrich (Hrsg.), *Handbuch Lernstrategien* (S. 1–26). Göttingen: Hogrefe.

Fritz, J. (2020). *Schülerfehler im Problemlöseunterricht. Empirische Erkundungen zum Umgang der Lehrperson mit Schülerfehlern im mathematischen Problemlöseunterricht.* phdthesis, Technische Universität Braunschweig.

Fritzlar, T. (2011). *Pfade trampeln statt über Brücken gehen: Lernen durch Problemlösen.*

Fukawa-Connelly, T., Mejía-Ramos, J. P., Wasserman, N. H. & Weber, K. (2020). An evaluation of ULTRA; an experimental real analysis course built on a transformative theoretical model. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *6*(2), 159–185.

Funke, J. & Zumbach, J. (2006). Problemlösen. In H. Mandl & H. F. Friedrich (Hrsg.), *Handbuch Lernstrategien* (S. 206–220). Göttingen: Hogrefe.

Geering, P. (1995). Aus Fehlern lernen im Mathematikunterricht. In E. Beck (Hrsg.), (S. 59–70). UVK, Fachverl. für Wiss. und Studium.

Ghiselin, B. (1985). *The creative process: Reflections on the invention in the arts and sciences.* Univ of California Press.

Gibson, D. (1998). Students' use of diagrams to develop proofs in an introductory analysis course. In *Research in collegiate mathematics education* (Bd. III, S. 284–307). A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky.

Glasersfeld, E. von. (1992). A constructivist's view of learning and teaching. *Research in physics learning: Theoretical issues and empirical studies*, 29–39.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. *Handbook of research design in mathematics and science education*, 517–545.

Göller, R. (2020). *Selbstreguliertes Lernen im Mathematikstudium* (1. Aufl.). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education = ontwikkelen van realistisch reken, wiskundeonderwijs.* Utrecht: Freudenthal Inst.

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In *Educational design research* (S. 29–63). Routledge.

Greefrath, G., Hoever, G., Kürten, R. & Neugebauer, C. (2015). Vorkurse und Mathematiktests zu Studienbeginn – Möglichkeiten und Grenzen. In *Übergänge konstruktiv gestalten* (S. 19–32). Wiesbaden: Springer.

Greefrath, G., Kirsten, K. & Kürten, R. (2019). Herausforderungen und Unterstützungsangebote im ersten Studienjahr. In *MU* (Bd. 65, S. 9–19). Hannover.

Greefrath, G., Koepf, W. & Neugebauer, C. (2017). Is there a link between preparatory course attendance and academic success? a case study of degree programmes in electrical engineering and computer science. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *3*(1), 143–167.

Grieser, D. (2013). *Mathematisches Problemlösen und Beweisen.* Wiesbaden: Springer.

Grieser, D. (2015). Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Entdeckendes Lernen in der Studieneingangsphase. In *Übergänge konstruktiv gestalten* (S. 87–102). Wiesbaden: Springer.

Grove, M. & Croft, T. (2019). Learning to be a postgraduate tutor in a mathematics support centre. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *5*(2), 228–266.

Grünwald, N., Kossow, A., Sauerbier, G. & Klymchuk, S. (2004). Der Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik: Erfahrungen aus internationaler und deutscher Sicht. *Global J. of Engng. Educ*, *8*(3), 12.

Habermas, J. (2004). *Wahrheit und Rechtfertigung : philosophische Aufsätze* (Erw. Ausg., 1. Aufl Aufl.). Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Hadamard, J. (1959). *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique* (1. éd. française, rev. et augm. Aufl.). Paris: Blanchard.

Hannafin, M., Land, S. & Oliver, K. (1999). Open learning environments: Foundations, methods, and models. *Instructional-design theories and models: A new paradigm of instructional theory*, *2*, 115–140.

Hannula, M. (1999). Cognitive emotions in learning and doing mathematics. In *Eighth european workshop on research on mathematical beliefs* (S. 57–66). Nicosia, Cyprus.

Hasdorf, W. (1976). Erscheinungsbild und Entwicklung der Beweglichkeit des Denkens bei älteren Vorschulkindern. *Verlaufsqualitäten der geistigen Tätigkeit. Berlin: Volk und Wissen*, 13–75.

Hasselhorn, M. & Artelt, C. (2018). Metakognition. In D. H. Rost (Hrsg.), *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (5. überarbeitete Auflage Aufl., S. 520–525). Weinheim, Basel: Beltz.

Hatano, G. & Inagaki, K. (1992). Desituating cognition through the construction of conceptual knowledge. *Context and cognition: Ways of learning and knowing*, 115–133.

Hattie, J., Biggs, J. & Purdie, N. (1996). Effects of learning skills interventions on student learning: A meta-analysis. *Review of educational research*, *66*(2), 99–136.

Hefendehl-Hebeker, L. (2013). Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 1–15). Springer.

Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Mathematische Wissensbildung in Schule und Hochschule. In *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 15–30). Springer.

Heinrich, F. (2004). Strategische Flexibilität beim Lösen mathematischer Probleme: theoretische Analysen und empirische Erkundungen über das Wechseln von Lösungsanläufen.

Heinrich, F., Bruder, R. & Bauer, C. (2015). Problemlösen lernen. In *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 279–301). Wiesbaden: Springer.

Heinze, A. (2007). Problemlösen im mathematischen und außermathematischen Kontext. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *28*(1), 3–30.

Helmholtz, H. v. (1898). An autobiographical sketch. *Popular lectures on scientific subjects, second series*, 266–291.

Heublein, U. (2015). *Die Entwicklung der Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen : statistische Berechnungen auf der Basis des Absolventenjahrgangs 2012 : Berichtszeitraum: 01.10.2013 bis 31.05.2014 : DZHW: Abschlussbericht.* Technische Informationsbibliothek (TIB).

Hodds, M., Alcock, L. & Inglis, M. (2014). Self-explanation training improves proof comprehension. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 62–101.

Holzäpfel, L., Lacher, M., Leuders, T. & Rott, B. (2018). *Problemlösen lehren lernen: Wege zum mathematischen Denken* (1. Aufl.). Seelze: Klett Kallmeyer.

Hoppenbrock, A., Biehler, R., Hochmuth, R. & Rück, H.-G. (2016). *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase.* Wiesbaden: Springer.

Houston, K. (2012). *Wie man mathematisch denkt: Eine Einführung in die mathematische Arbeitstechnik für Studienanfänger.* Berlin [u. a.]: Springer Spektrum.

Hoy, A. W. (2013). *Educational psychology* (12. ed. Aufl.). Boston, [Mass.] [u. a.]: Pearson.

Hunter-Blanks, P., Ghatala, E. S., Pressley, M. & Levin, J. R. (1988). Comparison of monitoring during study and during testing on a sentence-learning task. *Journal of Educational Psychology*, *80*(3), 279–283.

Hußmann, S. (2017). Umgangssprache – Fachsprache. In T. Leuders (Hrsg.), *Mathematik-Didaktik: Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (7. Aufl., S. 60–75). Berlin: Cornelsen.

Hußmann, S., Thiele, J., Hinz, R., Prediger, S. & Ralle, B. (2013). Gegenstandsorientierte Unterrichtsdesigns entwickeln und erforschen. *M. Komorek; S. Prediger (Hg.): Der lange Weg zum Unterrichtsdesign. Zur Begründung und Umsetzung fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme*, 25–42.

Iannone, P. & Simpson, A. (2019). The relation between mathematics students' discipline-based epistemological beliefs and their summative assessment preferences. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *5*(2), 147.

Ioannou, M. (2018). Commognitive analysis of undergraduate mathematics students' first encounter with the subgroup test. *Mathematics Education Research Journal*, *30*(2), 117–142.

Ioannou, M. (2019). On the learning of group isomorphisms. In M. Graven, H. Venkat, A. Essien & P. Vale (Hrsg.), *Proceedings of the 43rd conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Bd. 2, S. 400–407). Pretoria, South Africa.

Jamieson-Noel, D. & Winne, P. H. (2003). Comparing self-reports to traces of studying behavior as representations of students' studying and achievement. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, *17*(3/4), 159–171.

Jaworski, B., Potari, D., Rasmussen, C., Oates, G. & Kwon, O. (2016). Mathematics learning and teaching at university level. In *40th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Bd. 1, S. 375–381).

Jonassen, D. H. (1991). Objectivism versus constructivism: Do we need a new philosophical paradigm? *Educational technology research and development*, *39*(3), 5–14.

Jonassen, D. H. (2014). Assessing problem solving. In *Handbook of research on educational communications and technology* (S. 269–288). New York: Springer.

Kalyuga, S., Ayres, P., Chandler, P. & Sweller, J. (2003). The Expertise Reversal Effect. *Educational psychologist*, *38*(1), 23–31.

Kaminski, G. (1988). Ökologische Perspektiven in psychologischer Diagnostik. *Zeitschrift für differentielle und diagnostische Psychologie*, *9*, 155–168.

Kanfer, F. H., Reinecker, H. & Schmelzer, D. (2012). *Selbstmanagement-Therapie: ein Lehrbuch für die klinische Praxis* (5., korrigierte und durchges. Aufl.). Berlin [u. a.]: Springer.

Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, *8*(3), 163–180.

Kaune, C. & Cohors-Fresenborg, E. (2010). *Mathematik gut unterrichten: Analyse von Mathematikunterricht bezüglich metakognitiver und diskursiver Aktivitäten.* Osnabrück: Forschungsinst. für Mathematikdidaktik.

Kempen, L. (2019). *Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule.* Springer.

Kilpatrick, J. (1967). Analyzing the solution of word problems in mathematics: An exploratory study.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem solving. *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*, 1–15.

King, A. (1991). Effects of training in strategic questioning on children's problem-solving performance. *Journal of Educational Psychology*, *83*(3), 307–317.

King, A. (1994). Guiding knowledge construction in the classroom: Effects of teaching children how to question and how to explain. *American Educational Research Journal*, *31*(2), 338–368.

Kirschner, P. A., Sweller, J. & Clark, R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational psychologist*, *41*(2), 75–86.

Kirsten, K. (im Druck). *Beweisprozesse von Studierenden – Ergebnisse einer empirischen Untersuchung von Prozessverläufen und phasenspezifischen Aktivitäten.* Unveröffentlichte Dissertation, Westfälische Wilhelms-Universität Münster.

Klauer, K. J. (2000). Das Huckepack-Theorem asymmetrischen Strategietransfers. Ein Beitrag zur Trainings- und Transfertheorie. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und pädagogische Psychologie*, *32*(3), 153–165.

Klauer, K. J. & Leutner, D. (2007). *Lehren und Lernen: Einführung in die Instruktionspsychologie.* (1. Aufl.). Weinheim u. a: Beltz PVU.

Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus.* Leipzig: Teubner.

Klemm, J., Biehler, R., Schreiber, S. & Hochmuth, R. (2011). *Qualifizierung von Tutorinnen im LIMA-Projekt.* Gesellschaft für Didaktik der Mathematik.

Klimesch, W. et al.. (1995). Gedächtnispsychologische Repräsentationsannahmen und ihre möglichen neuronalen Grundlagen. In *Das Gedächtnis* (S. 3–18). Hogrefe.

Klix, F. (1971). *Information und Verhalten: kybernetische Aspekte der organismischen Informationsverarbeitung; Einführung in naturwissenschaftliche Grundlagen der Allgemeinen Psychologie* (1. Aufl. Aufl.). Bern [u. a.]: Huber.

Kluwe, R. H. & Schiebler, K. (1984). Entwicklung exekutiver Prozesse und kognitiver Leistungen. *Metakognition, Motivation und Lernen*, 31–59.

Koichu, B., Berman, A. & Moore, M. (2007). Heuristic literacy development and its relation to mathematical achievements of middle school students. *Instructional Science*, *35*(2), 99–139.

Kolter, J., Blum, W., Bender, P., Biehler, R., Haase, J., Hochmuth, R. & Schukajlow, S. (2018). Zum Erwerb, zur Messung und zur Förderung studentischen (Fach-) Wissens in der Vorlesung „Arithmetik für die Grundschule“ – Ergebnisse aus dem KLIMAGS-Projekt. In *Innovative Konzepte für die Grundschullehrerausbildung im Fach Mathematik* (S. 95–121). Wiesbaden: Springer.

Komorek, E., Bruder, R., Collet, C. & Schmitz, B. (2006). Inhalte und Ergebnisse einer Intervention im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I mit einem Unterrichtskonzept zur Förderung mathematischen Problemlösens und von Selbstregulationskompetenzen. *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms*, *240*.

König, H. (1992). Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen. *Der Mathematikunterricht*, *38*(3), 24–38.

König, H. (1996). *Heuristik beim Lösen problemhafter Aufgaben aus dem außerunterrichtlichen Bereich.* Bezirkskomitee zur Förderung math.-nat. begabter und interessierter Schüler.

Kontorovich, I. (2019). What can be more challenging than square-rooting from squared things?. *Mathematics Education Research Group of Australasia*.

Kopp, B. & Mandl, H. (2005). *Wissensschemata.* Universitätsbibliothek der Ludwig-Maximilians-Universität München.

Kouvela, E., Hernandez-Martinez, P. & Croft, T. (2017). Secondary-tertiary transition: How messages transmitted by lecturers can influence students’ identities as mathematics learners. In *Proceedings of the 41st conference of the international group for the psychology of mathematics education* (S. 81–88). Singapore.

Kramarski, B. & Mevarech, Z. R. (2003). Enhancing mathematical reasoning in the classroom: The effects of cooperative learning and metacognitive training. *American Educational Research Journal*, *40*(1), 281–310.

Krause, U.-M., Stark, R. & Mandl, H. (2004). Förderung des computerbasierten Wissenserwerbs durch kooperatives Lernen und eine Feedbackmaßnahme. *Zeitschrift für pädagogische Psychologie*, *18*(2), 125–136.

Landmann, M., Perels, F., Otto, B. & Schmitz, B. (2009). Selbstregulation. In *Pädagogische Psychologie* (S. 49–70). Berlin, Heidelberg: Springer.

Larsen, S., Johnson, E. & Weber, K. (2013). The teaching abstract algebra for understanding project: Designing and scaling up a curriculum innovation. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*(4), 691–790.

Leder, G. C. & Gunstone, R. F. (1990). Perspectives on mathematics learning. *International Journal of Educational Research*, *14*(2), 105–120.

Lehn, M. (o. D.). *Wie bearbeitet man ein Übungsblatt?* Zugriff 20.11.2020 unter https://www.agtz.mathematik.uni-mainz.de/wie-bearbeitet-man-ein-uebungsblatt-von-prof-dr-manfred-lehn/

Lehtinen, E. (1992). Lern-und Bewältigungsstrategien im Unterricht. *Lern-und Denkstrategien*, 125–149.

Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem Solving and Modeling. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (S. 763–802). Charlotte: IAP.

Lesseig, K. & Krouss, P. (2017). Implementing a flipped instructional model in college algebra: profiles of student activity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(2), 202–214.

Lester Jr., F. K. (1989). *The role of metacognition in mathematical problem solving: A study of two grade seven classes. final report.*

Lester Jr., F. K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 660–675.

Lester Jr., F. K. & Kehle, P. E. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematical problem solving, learning, and teaching*.

Leuders, T. (2017). Problemlösen. In T. Leuders (Hrsg.), *Mathematik-Didaktik: Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (7. Aufl., S. 119–135). Berlin: Cornelsen.

Leutner, D., Barthel, A. & Schreiber, B. (2001). Studierende können lernen, sich selbst zum Lernen zu motivieren: Ein Trainingsexperiment. *Zeitschrift für pädagogische Psychologie*, *15*(3-4), 155–167.

Leutner, D. & Leopold, C. (2003). Selbstreguliertes Lernen als Selbstregulation von Lernstrategien – Ein Trainingsexperiment mit Berufstätigen zum Lernen aus Sachtexten. *Unterrichtswissenschaft*, *31*(1), 38–56.

Leutner, D. & Leopold, C. (2006). Selbstregulation beim Lernen aus Sachtexten. *Handbuch Lernstrategien*, 162–171.

Liebendörfer, M. (2018). *Motivationsentwicklung im Mathematikstudium.* Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.

Liebendörfer, M., Göller, R., Biehler, R., Hochmuth, R., Kortemeyer, J., Ostsieker, L., Rode, J. & Schaper, N. (2020). LimSt – Ein Fragebogen zur Erhebung von Lernstrategien im mathematikhaltigen Studium. *Journal für Mathematik-Didaktik*.

Liebendörfer, M., Hochmuth, R., Biehler, R., Schaper, N., Kuklinski, C., Khellaf, S., Colberg, C., Schürmann, M. & Rothe, L. (2017). A framework for goal dimensions of mathematics learning support in universities. In *Cerme 10.* Dublin, Ireland.

Liljedahl, P. (2013). Illumination: an affective experience? *ZDM*, *45*(2), 253–265.

Link, M. (2012). *Grundschulkinder beschreiben operative Zahlenmuster: Entwurf, Erprobung und Überarbeitung von Unterrichtsaktivitäten als ein Beispiel für Entwicklungsforschung.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational studies in mathematics*, *52*(1), 29–55.

Lou, Y., Abrami, P. C., Spence, J. C., Poulsen, C., Chambers, B. & d'Apollonia, S. (1996). Within-class grouping: A meta-analysis. *Review of educational research*, *66*(4), 423–458.

Lucas, J. F. (1974). The teaching of heuristic problem-solving strategies in elementary calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, *5*(1), 36–46.

Mamona-Downs, J. & Downs, M. (2005). The identity of problem solving. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(3–4), 385–401.

Mandl, H. & Friedrich, H. F. (2006). *Handbuch Lernstrategien.* Göttingen: Hogrefe.

Marks, R. & Eilks, I. (2010). Research-based development of a lesson plan on shower gels and musk fragrances following a socio-critical and problem-oriented approach to chemistry teaching. *Chemistry Education Research and Practice*, *11*(2), 129–141.

Marton, F. & Säljö, R. (1984). Approaches to learning. In F. Marton, D. Hounsell & N. Entwistle (Hrsg.), *The experience of learning* (S. 36–55). Edinburgh: Scottish Academic Press.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2011). *Thinking mathematically.* Pearson Higher Ed.

Masui, C. & Corte, E. (2005). Learning to reflect and to attribute constructively as basic components of self-regulated learning. *British Journal of Educational Psychology*, *75*(3), 351–372.

Mayer, R. E. (1999). Multimedia aids to problem-solving transfer. *International Journal of Educational Research*, *31*(7), 611–623.

Mayring, P. (2020). Qualitative Inhaltsanalyse. In *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie* (S. 495–511). Springer.

McKee, K., Savic, M., Selden, J. & Selden, A. (2010). Making actions in the proving process explicit, visible, and „reflectable". In *Proceedings of the 13th annual conference on research in undergraduate mathematics education.*

McLeod, D. B. (1989a). *Affect and mathematical problem solving : a new perspective.* New York [u. a.]: Springer.

McLeod, D. B. (1989b). Beliefs, attitudes, and emotions: New views of affect in mathematics education. In *Affect and mathematical problem solving* (S. 245–258). New York: Springer.

Mejia-Ramos, J., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K. & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(1), 3–18.

Melhuish, K. (2018). Three conceptual replication studies in group theory. *Journal for Research in Mathematics Education*, *49*(1), 9–38.

Mevarech, Z. R. & Kramarski, B. (1997). Improve: A multidimensional method for teaching mathematics in heterogeneous classrooms. *American Educational Research Journal*, *34*(2), 365–394.

Miller, G. A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, *63*(2), 81–97.

Moely, B. E., Santulli, K. A. & Obach, M. S. (1995). Strategy instruction, metacognition, and motivation in the elementary school classroom. *Memory performance and competencies: Issues in growth and development*, 301–321.

Molenaar, I., Boxtel, C. A. van & Sleegers, P. J. (2010). The effects of scaffolding metacognitive activities in small groups. *Computers in Human Behavior*, *26*(6), 1727–1738.

Moore, R. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(3), 249–266.

Nagel, K. (2017). *Modellierung begrifflichen Wissens als Grundlage mathematischer Argumentation am Übergang vom sekundären in den tertiären Bildungsbereich.* Unveröffentlichte Dissertation, Technische Universität München.

Nagel, K., Quiring, F., Deiser, O. & Reiss, K. (2016). Ergänzungen zu den mathematischen Grundvorlesungen für Lehramtsstudierende im Fach Mathematik – ein Praxisbericht. In *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 339–353). Springer.

Nardi, E. (2014). Reflections on visualization in mathematics and in mathematics education. In *Mathematics & mathematics education: Searching for common ground* (S. 193–220). Springer.

Neber, H. & Neuhaus, B. (2018). Entdeckendes Lernen. In D. H. Rost (Hrsg.), *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (5. überarbeitete Aufl., S. 520–525). Weinheim, Basel: Beltz.

Neubrand, M. (2015). Schulmathematik und Universitätsmathematik: Gegensatz oder Fortsetzung? Woran kann man sich orientieren? In *Übergänge konstruktiv gestalten* (S. 137–147). Wiesbaden: Springer.

Neuhaus, K. (2001). *Die Rolle des Kreativitätsproblems in der Mathematikdidaktik.* Berlin: Köster.

Newell, A. (1983). The heuristic of George Polya and its relation to artificial intelligence. *Methods of heuristics*, 195–243.

Nieminen, J. (2020). How does a mathematician fit in? a mixed-methods analysis of university students – sense of belonging in mathematics. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *6*(3), 475–494.

Niss, M. & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, *102*(1), 9–28.

Nowińska, E. (2016). *Leitfragen zur Analyse und Beurteilung metakognitiv-diskursiver Unterrichtsqualität.* Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik eV.

Nussbaum, A. & Leutner, D. (1986). Entdeckendes Lernen von Aufgabenlösungsregeln unter verschiedenen Anforderungsbedingungen. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, Jg. 18 (1986), Heft 2, S. 153–164, ISSN 0049-8637, Signatur: E10/22 Z 46*.

Ottinger, S., Ufer, S. & Kollar, I. (2016). *Mathematisches Argumentieren und Beweisen in der Studieneingangsphase – Analyse inhaltlicher und formaler Qualitätsindikatoren.* Gesellschaft für Didaktik der Mathematik.

Otto, B. (2007). Lässt sich das selbstregulierte Lernen von Schülern durch ein Training der Eltern optimieren? *Selbstregulation erfolgreich fördern. Praxisnahe Trainingsprogramme für ein effektives Lernen*, 164–183.

Paris, S. G. & Paris, A. H. (2001). Classroom applications of research on self-regulated learning. *Educational psychologist*, *36*(2), 89–101.

Pehkonen, E. (2001). How do we understand problem and related concepts. *Problem solving around the world*, 11–21.

Perels, F. (2003). *Ist Selbstregulation zur Förderung von Problemlösen hilfreich?: Entwicklung, Durchführung sowie längsschnittliche und prozessuale Evaluation zweier Trainingsprogramme.* Lang.

Perels, F. (2007). Training für Schüler der Sekundarstufe I: Förderung selbstregulierten Lernens in Kombination mit mathematischem Problemlösen bei der Bearbeitung von Textaufgaben. *Selbstregulation erfolgreich fördern. Praxisnahe Trainingsprogramme für effektives Lernen*, 33–52.

Perels, F., Gürtler, T. & Schmitz, B. (2005). Training of self-regulatory and problem-solving competence. *Learning and instruction*, *15*(2), 123–139.

Piaget, J. et al.. (1975). L'équilibration des structures cognitives. problème central du développement.

Pickl, C. (2004). *Selbstregulation und Transfer: Entwicklung und Evaluation eines Trainingsprogramms zum selbstregulierten Lernen und die Analyse von Transferdeterminanten in Trainingskontexten.* Weinheim : Beltz, PVU,.

Pintrich, P. R. (2000). The role of goal orientation in self-regulated learning. In *Handbook of self-regulation* (S. 451–502). Elsevier.

Plomp, T. (2013). Educational design research: An introduction. *Educational design research*, 11–50.

Poincaré, H. (1914). Science et méthode (1908). *Book II.*

Pol, J. van de, Volman, M. & Beishuizen, J. (2010). Scaffolding in teacher–student interaction: A decade of research. *Educational psychology review*, *22*(3), 271–296.

Pólya, G. (1945). How to solve it. *New Jersey: Princeton University*.

Pólya, G. (1979). *Vom Lösen mathematischer Aufgaben : Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren. 1* (2. Aufl.). Basel [u. a.]: Birkhäuser.

Polya, G. (1980). On solving mathematical problems in high school. *Problem solving in school mathematics*, 1–2.

Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül. *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden*, 213–234.

Prediger, S., Hußmann, S., Barzel, B. & Leuders, T. (2011). Systematisieren und Sichern: Nachhaltiges Lernen durch aktives Ordnen. *Mathematik lehren : erfolgreich unterrichten: Konzepte und Materialien (2011), Heft 164, S. 2–9, ISSN 0175-2235, Signatur: E30/61 Z 368.*

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Thiele, J. & Ralle, B. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen – fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. *Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Unterricht*, *65*(8), 452–457.

Pressley, M., Borkwski, J. G. & Schneider, W. (1989). Good information processing: What it is and how education can promote it. *International journal of educational research*, *13*(8), 857–867.

Pressley, M., Wood, E., Woloshyn, V. E., Martin, V., King, A. & Menke, D. (1992). Encouraging mindful use of prior knowledge: Attempting to construct explanatory answers facilitates learning. *Educational psychologist*, *27*(1), 91–109.

Prins, F. J., Veenman, M. V. J. & Elshout, J. J. (2006). The impact of intellectual ability and metacognition on learning: New support for the threshold of problematicity theory. *Learning and instruction*, *16*(4), 374–387.

Puntambekar, S. & Hubscher, R. (2005). Tools for scaffolding students in a complex learning environment: What have we gained and what have we missed? *Educational Psychologist*, *40*(1), 1–12.

Pustelnik, K. (2018). *Bedingungsfaktoren für den erfolgreichen Übergang von Schule zu Hochschule.* Unveröffentlichte Dissertation, Georg-August-Universität Göttingen.

Rämö, J., Oinonen, L., Vikberg, T. et al.. (2015). Extreme apprenticeship–emphasising conceptual understanding in undergraduate mathematics. In *Cerme9 proceedings of the ninth congress of the european society for research in mathematics education.*

Reichersdorfer, E. (2013). *Unterstützungsmaßnahmen am Beginn des Mathematikstudiums: Heuristische Lösungsbeispiele und Problemlösen in problembasierten Lernumgebungen zur Förderung mathematischer Argumentationskompetenz.* Unveröffentlichte Dissertation, Technische Universität München.

Renkl, A. (1997). *Intrinsic motivation, self-explanations, and transfer.*

Renkl, A. (2005). The worked-out-example principle in multimedia learning. *The Cambridge handbook of multimedia learning*, 229–245.

Renkl, A., Atkinson, R. K., Maier, U. H. & Staley, R. (2002). From example study to problem solving: Smooth transitions help learning. *The Journal of Experimental Education*, *70*(4), 293–315.

Renkl, A., Gruber, H., Weber, S., Lerche, T. & Schweizer, K. (2003). Cognitive Load beim Lernen aus Lösungsbeispielen. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie/German Journal of Educational Psychology*.

Renkl, A. & Nückles, M. (2006). Lernstrategien der externen Visualisierung. *Handbuch Lernstrategien*, 135–147.

Resnick, L. B. & Glaser, R. (1975). *Problem solving and intelligence.* Hillsdale, N. J: Erlbaum.

Reusser, K., Pauli, C. & Waldis, M. (2010). *Unterrichtsgestaltung und Unterrichtsqualität. Ergebnisse einer internationalen und schweizerischen Videostudie zum Mathematikunterricht.* Münster: Waxmann Verlag.

Roos, A.-K. (2017). ‘Grundvorstellungen’ and their application to the concept of extreme points.

Roth, J., Bauer, T., Koch, H. & Prediger, S. (2015). *Übergänge konstruktiv gestalten : Ansätze für eine zielgruppenspezifische Hochschuldidaktik Mathematik.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Rott, B. (2013). *Mathematisches Problemlösen: Ergebnisse einer empirischen Studie.* WTM, Verlag für Wiss. Texte und Medien.

Rott, B. (2014). Mathematische Problembearbeitungsprozesse von Fünftklässlern: Entwicklung eines deskriptiven Phasenmodells. *Journal für Mathematik-Didaktik, Jg. 35 (2014), Heft 2, S. 251–282, ISSN 0173-5322, ISSN 1869-2699, Signatur: 61 Z 191*.

Rott, B. (2015). Rethinking heuristics–characterizations and vignettes. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, *3*(1), 122–126.

Rott, B. (2018). Empirische Zugänge zu Heurismen und geistiger Beweglichkeit in den Problemlöseprozessen von Fünft- und Sechstklässlern. *Mathematica Didactica*, *41*.

Rott, B. & Gawlick, T. (2014). Explizites oder implizites Heurismentraining – was ist besser? *Mathematica didactica : Zeitschrift für Didaktik der Mathematik, Band 37 (2014), S. 191–212*.

Runco, M. A. & Chand, I. (1994). Problem finding, evaluative thinking, and creativity. In *Portions of this chapter were presented at the meeting of the American Psychological Assn in San Francisco, CA, Aug 1991.*

Salle, A., Schumacher, S. & Hattermann, M. (2016). The ping-pong-pattern – -usage of notes by dyads during learning with annotated scripts. In C. Csikos, A. Rausch & J. Szitányi (Hrsg.), *Proceedings of the 40th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Bd. 4, S. 147–154). Szeged, Hungary: International Group for the Psychology of Mathematics.

Samkoff, A., Lai, Y. & Weber, K. (2012). On the different ways that mathematicians use diagrams in proof construction. *Research in Mathematics Education*, *14*(1), 49–67.

Sandefur, J., Mason, J., Stylianides, G. & Watson, A. (2013). Generating and using examples in the proving process. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(3), 323–340.

Schiefele, U., Streblow, L., Ermgassen, U. & Moschner, B. (2003). Lernmotivation und Lernstrategien als Bedingungen der Studienleistung. Ergebnisse einer Längsschnittstudie. *Zeitschrift für pädagogische Psychologie*, *17*(3-4), 185–198.

Schmidt, H. (1983). Problem-based learning: rationale and description. *Medical Education*, *17*(1), 11–16.

Schmitz, B. & Schmidt, M. (2007). Einführung in die Selbstregulation. *Selbstregulation erfolgreich fördern. Praxisnahe Trainingsprogramme für effektives Lernen*, *1*, 9–19.

Schnotz, W., Böckheler, J., Grzondziel, H., Gaertner, I. & Waechter, M. (1998). Individual and co-operative learning with interactive animated pictures. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, *12*, 135–145.

Schoenfeld, A. (1985). *H.(1985). mathematical problem solving.* academic press, INC, Harcourt Brace Jovanovich, Publishers.

Schoenfeld, A. H. (1981). Episodes and executive decisions in mathematical problem solving.

Schoenfeld, A. H. (1989a). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for research in mathematics education*, 338–355.

Schoenfeld, A. H. (1989b). Teaching mathematical thinking and problem solving. *Toward the thinking curriculum: Current cognitive research*, 83–103.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense of mathematics. *Dalam Handbook of Reasearch on Mathematics Teaching and Learning*, 334–370.

Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. *Mathematical thinking and problem solving*, 53–70.

Schoenfeld, A. H. (1998). Reflections on a course in mathematical problem solving. *Research in collegiate mathematics education*, *3*(7), 81–113.

Schoenfeld, A. H. (2006). Design experiments. *Handbook of complementary methods in education research*, 193–206.

Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications.* Routledge.

Schoenfeld, A. H. (2015). How we think: A theory of human decision-making, with a focus on teaching. In *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (S. 229–243). Seoul, Korea.

Schreiber, B. (1998). *Selbstreguliertes Lernen: Entwicklung und Evaluation von Trainingsansätzen für Berufstätige.* Münster [u. a.]: Waxmann.

Schubring, G. (1978). *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik.* Stuttgart: Klett-Cotta.

Schunk, D. H., Meece, J. L. & Pintrich, P. R. (2014). *Motivation in education: theory, research, and applications* (4. ed., Pearson new international edition Aufl.). Harlow: Pearson.

Schwarz, B. & Herrmann, P. (2015). Bezüge zwischen Schulmathematik und Linearer Algebra in der hochschulischen Ausbildung angehender Mathematiklehrkräfte – Ergebnisse einer Dokumentenanalyse. *Mathematische Semesterberichte*, *62*(2), 195–217.

Selden, A., McKee, K. & Selden, J. (2010). Affect, behavioural schemas and the proving process. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(2), 199–215.

Selden, A. & Selden, J. (2009). Teaching proving by coordinating aspects of proofs with students' abilities.

Selden, A. & Selden, J. (2013). Proof and problem solving at university level. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1), 303–334.

Sfard, A. (2014). University mathematics as a discourse–why, how, and what for? *Research in Mathematics Education*, *16*(2), 199–203.

Siebert, H. (2005). *Pädagogischer Konstruktivismus : lernzentrierte Pädagogik in Schule und Erwachsenenbildung* (3. Aufl.). Weinheim [u. a.]: Beltz.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J.-L. Dorier (Hrsg.), *On the teaching of linear algebra* (S. 209–246). Springer.

Silver, E. A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: Some underrepresented themes and needed directions. *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*, 247–266.

Sitzmann, T. & Ely, K. (2011). A meta-analysis of self-regulated learning in work-related training and educational attainment: What we know and where we need to go. *Psychological Bulletin*, *137*(3), 421–442.

Smith, J. P. (1973). The effect of general versus specific heuristics in mathematical problem-solving tasks.

Sommerhoff, D. & Weixler, S. (2019). Studierende in Vorlesungen aktivieren – Classroom Response Systems im Bereich Mathematik und Didaktik der Mathematik. In *Methoden in der Hochschullehre* (S. 167–187). Wiesbaden: Springer.

Souvignier, E. & Mokhlesgerami, J. (2006). Using self-regulation as a framework for implementing strategy instruction to foster reading comprehension. *Learning and instruction*, *16*(1), 57–71.

Speer, N. M., Smith III, J. P. & Horvath, A. (2010). Collegiate mathematics teaching: An unexamined practice. *The Journal of Mathematical Behavior*, *29*(2), 99–114.

Springer, L., Stanne, M. E. & Donovan, S. S. (1999). Effects of small-group learning on undergraduates in science, mathematics, engineering, and technology: A meta-analysis. *Review of educational research*, *69*(1), 21–51.

Stangl, W. (2006). Mnemotechnik. In H. Mandl & H. F. Friedrich (Hrsg.), *Handbuch Lernstrategien* (S. 89–100). Göttingen: Hogrefe.

Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. *The teaching and assessing of mathematical problem solving*, *3*, 1–22.

Steiner, G. (2006). Wiederholungsstrategien. In H. Mandl & H. F. Friedrich (Hrsg.), *Handbuch Lernstrategien* (S. 101–116). Göttingen: Hogrefe.

Stenzel, T. (2017). Problemlösen und Beweisen im Mathematikstudium – eine Kategorisierung von Aufgaben der Analysis I. In M. Beyerl, J. Fritz, A. Kuzle, M. Ohlendorf & B. Rott (Hrsg.), *Mathematische Problemlösekompetenzen fördern : Tagungsband der Herbsttagung des GDM-Arbeitskreises Problemlösen in Braunschweig 2016* (Bd. 10, S. 167–179). Münster: WTM, Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Straw, S., Quinlan, O., Harland, J. & Walker, M. (2015). Flipped learning research report. *UK: National Foundation for Educational Research (NFER) and Nesta*.

Strayer, J. F. (2012). How learning in an inverted classroom influences cooperation, innovation and task orientation. *Learning environments research*, *15*(2), 171–193.

Stylianides, G. J. & Stylianides, A. J. (2017). Research-based interventions in the area of proof: the past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 119–127.

Stylianou, D. A. & Silver, E. A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Mathematical thinking and learning*, *6*(4), 353–387.

Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive science*, *12*(2), 257–285.

Sweller, J. (1999). Instructional design. In *Australian educational review.*

Sweller, J. (2006). The worked example effect and human cognition. *Learning and instruction*.

Sweller, J., Merrienboer, J. J. van & Paas, F. G. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational psychology review*, *10*(3), 251–296.

Tao, T. (o. D.). *Problem solving strategies.* Zugriff 19.10.2020 unter https://terrytao.wordpress.com/2010/10/21/245a-problem-solving-strategies/

Thoma, A. & Nardi, E. (2017). Discursive shifts from school to university mathematics and lecturer assessment practices: Commognitive conflict regarding variables. In *Cerme 10.* Dublin, Ireland.

Thomas, M., Klymchuk, S., Hong, Y. Y., Kerr, S., McHardy, J., Murphy, P., Spencer, S. & Watson, P. (2010). The transition from secondary to tertiary mathematics education. *Wellington: Teaching and Learning Research Initiative*.

Tietze, U.-P., Klika, M. & Wolpers, H. (2000). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II: Band 2 Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra.* Springer.

Toulmin, S. (2003). *The uses of argument* (Second edition. Aufl.). Cambridge: Cambridge University Press.

Veenman, M. (2011). Alternative assessment of strategy use with self-report instruments: a discussion. *Metacognition and Learning*, *6*(2), 205–211.

Veenman, M. V. (2013). Assessing metacognitive skills in computerized learning environments. In *International handbook of metacognition and learning technologies* (S. 157–168). Springer.

Veenman, M. V. J., Hout-Wolters, B. H. A. M. van et al.. (2003). The assessment of metacognitive skills: What can be learned from multi-method designs?

Voigt, M., Apkarian, N., Rasmussen, C. & the Progress through Calculus Team. (2020). Undergraduate course variations in precalculus through Calculus 2. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *51*(6), 858–875.

Vollrath, H.-J. (1992). Zur Rolle des Begriffs im Problemlöseprozeß des Beweisens. *Mathematische Semesterberichte*, *39*(2), 127–136.

Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe: 2. Aufl.* Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl.
Vygotskij, L. S. (1978). *Mind in society : the development of higher psychological processes.* Cambridge, Mass. [u. a.]: Harvard University Press.
Walker, D. (2006). Toward productive design studies. In *Educational design research* (S. 20–26). Routledge.
Wallas, G. (1926). The art of thought.
Wang, M. C., Haertel, G. D. & Walberg, H. J. (1990). What influences learning? A content analysis of review literature. *The Journal of Educational Research*, *84*(1), 30–43.
Weber, B.-J. & Lindmeier, A. (2020). Viel Beweisen, kaum Rechnen? Gestaltungsmerkmale mathematischer Übungsaufgaben im Studium. *Mathematische Semesterberichte*, 1–22.
Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*(2), 115–133.
Weber, K. & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, *56*(2), 209–234.
Weber, K. & Larsen, S. (2008). Teaching and learning group theory. *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education*, *73*, 139.
Weigand, H.-G. (2016). Zur Entwicklung des Grenzwertbegriffs unter stoffdidaktischer Perspektive. *Mathematische Semesterberichte*, *63*(1), 135–154.
Weinstein, C. E. & Mayer, R. E. (1983). The teaching of learning strategies. *Innovation Abstracts*, *5*(32).
Wild, K.-P. (2000). *Lernstrategien im Studium: Strukturen und Bedingungen.* Münster [u. a.]: Waxmann.
Wild, K.-P. (2005). Individuelle Lernstrategien von Studierenden. Konsequenzen für die Hochschuldidaktik und die Hochschullehre. *Beiträge zur Lehrerbildung*, *23*(2), 191–206.
Wild, K.-P. & Schiefele, U. (1994). Lernstrategien im Studium: Ergebnisse zur Faktorenstruktur und Reliabilität eines neuen Fragebogens. *Zeitschrift für differentielle und diagnostische Psychologie*.
Wilson, J. W. (1968). *Generality of heuristics as an instructional variable.* Unveröffentlichte Dissertation, ProQuest Information & Learning.
Wilzek, W. (2019). Interaktive dynamische Visualisierungen als Unterstützungsangebot im fachmathematischen Studium. Chancen und Gefahren der Anschauung. In M. Klinger, A. Schüler-Meyer & L. Wessel (Hrsg.), *Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2018. Beiträge zum gleichnamigen Symposium am 9. und 10. November 2018 an der Universität Duisburg-Essen* (S. 187–195). Münster: WTM.
Winsløw, C. (2013). The transition from university to high school and the case of exponential functions. In *Proceedings of the 8th conference of european research in mathematics education* (S. 2476–2485). Portorož, Slovenia.
Wirtz, M. A. (2017). *Dorsch – Lexikon der Psychologie* (18., Überarbeitete Auflage Aufl.). Bern: Hogrefe.
Wittmann, E. (1995). Mathematics education as a design science. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(4), 355–374.
Wittmann, E. C. (1992). Mathematikdidaktik als «design science». *Journal für Mathematik-Didaktik*, *13*(1), 55–70.

Wittmann, E. C. (1997). Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen als gesellschaftlicher Auftrag. *Schulverwaltung NRW*, *8*(5), 133–136.

Wittwer, J. & Renkl, A. (2010). How effective are instructional explanations in example-based learning? a meta-analytic review. *Educational Psychology Review*, *22*(4), 393–409.

Wood, D., Bruner, J. S. & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *17*(2), 89–100.

Woods, D. R., Hrymak, A. N., Marshall, R. R., Wood, P. E., Crowe, C. M., Hoffman, T. W., Wright, J. D., Taylor, P. A., Woodhouse, K. A. & Bouchard, C. G. K. (1997). Developing problem solving skills: The McMaster problem solving program. *Journal of Engineering Education*, *86*(2), 75–91.

Zazkis, D., Weber, K. & Mejía-Ramos, J. P. (2015). Two proving strategies of highly successful mathematics majors. *The Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 11–27.

Zech, F. (1996). *Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitung für das Lehren und Lernen von Mathematik.* Weinheim, Basel.

Zimmerman, B. J. (1998). Developing self-fulfilling cycles of academic regulation: An analysis of exemplary instructional models.

Zimmerman, B. J. (2000). Attaining self-regulation: A social cognitive perspective. In *Handbook of self-regulation* (S. 13–39). Elsevier.

Zimmerman, B. J. & Martinez-Pons, M. (1988). Construct validation of a strategy model of student self-regulated learning. *Journal of Educational Psychology*, *80*(3), 284–290.

Zimmerman, B. J. & Schunk, D. H. (2009). *Self-regulated learning and academic achievement : theoretical perspectives* (2. ed., reprint. Aufl.). New York [u. a]: Routledge.

Zumbach, J. (2003). *Problembasiertes Lernen.* Münster [u. a.]: Waxmann.