Fondo Editorial FEPOL
https://editorialfondo.com/

SIGNIFICADOS DE LA POTENCIACIÓN EN $\mathbb{R}$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{m}=\begin{cases}\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\ldots\sqrt[n]{a} \quad (a\geq 0)(n\in\mathbb{N}^{+}) \\ (m\,factores)(m\in(\mathbb{Z}^{+}\cup\{0\})) \\ \\ \frac{1}{\sqrt[n]{a}}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\cdot\ldots\frac{1}{\sqrt[n]{a}} \quad (a\geq 0)(n\in\mathbb{N}^{+}) \\ (-m\,factores)(m\in\mathbb{Z}^{-})(a\neq 0)\end{cases}$$

Enrique Quiroz Quiroz
Florencio Flores Ccanto

Professionals On line S.A.C

SIGNIFICADO DE LA POTENCIACIÓN EN $\mathbb{R}$

Enrique Quiroz Quiroz
Florencio Flores Ccanto

Lima - 2022

SIGNIFICADO DE LA POTENCIACIÓN EN ℝ

© Enrique Quiroz Quiroz
Dirección: Residencia Universitaria de docentes, La Cantuta. Chosica
equiroz@une.edu.pe
Tel. de contacto: +51 988 088 909

Florencio Flores Ccanto
Dirección: Cooperativa de vivienda Pablo Patrón, Chosica. Lima
fflores@une.edu.pe
Tel. de contacto: +51 999 256 875

Editada por:

© Professionals On Line SAC. (FEPOL) - Fondo Editorial.
Dirección: Av. La Marina Nro: 2900, San Miguel - Perú
professionalsonline.net@gmail.com
Teléf. móvil: +51 999 140 920
Web: https://professionalsonline.net/

Primera edición digital: Agosto 2022
Libro digital disponible en: https://editorialfondo.com/

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2022-07389
ISBN: 978-612-48981-2-9

Corrección de estilo: Luis Pablo Diaz Tito
luisp.diaz@upsjb.edu.pe / Tel. de contacto: +51 955 129 801

Diseño y Diagramación: Gráfica “imagen”
Manuel Enrique Sampen Antonio
sampen25@gmail.com / Tel. de contacto: +51 990 064 589

COTENIDO

AGRADECIMIENTOS

Agradecimiento a todos aquellos que contribuyeron en este trabajo.

PRÓLOGO

Este Libro presenta los significados de la potenciación en $\mathbb{R}$, a partir de la potencia de base real y exponente natural, luego describe la potencia de base real y exponente entero, finalizando con la definición de potencia de base real positiva y exponente racional. En las tres descripciones subyace el concepto de ley de composición interna, extraído de las prácticas matemáticas encontradas en los textos escolares analizados y los algoritmos utilizados en dos calculadoras, una hoja de cálculo y un sitio web. De los hallazgos descritos resalta el hecho que un número o una variable elevada a un exponente natural, significa un producto repetido, convirtiendo a este hecho en la esencia de la potenciación.

Énfasis en la propiedad fundamental

El énfasis a lo largo de la mayor parte de este libro y fundamentalmente en el capítulo III, en el que se formula el significado de referencia está en el producto de potencias de la misma base y exponentes naturales, a lo que llaman propiedad fundamental de la potenciación, pues permite demostrar las otras propiedades: potencia de potencia, cociente de potencias de la misma base, potencia de un producto y potencia de un cociente. Permite, además que hay una sola forma de definir la potencia de base real cualquiera y exponente cero y exponente uno. También la potencia de base real no nula y exponente entero negativo y la potencia de base real positiva y exponente fraccionario, Todas estas definiciones no son meros convenios, sino deducciones, suponiendo que debe mantenerse la propiedad fundamental.

Análisis y formulación de conjeturas

El capítulo II es el espacio de análisis, tanto de las definiciones y representaciones que resultan ambiguas, por ejemplo, algunos dicen que la cuarta potencia de menos dos se representa por $(-2)^4$ y no por -2^4, otros en cambio afirman que -2^4 no es una potencia sino el opuesto de $-(2^4)$; así como las conjeturas que resultan plausible son demostradas en el capítulo III. También se muestran los inconvenientes de utilizar radicales con números negativos y aceptar las denominadas leyes de los exponentes que nos otra cosa que las propiedades de la potenciación. El método seguido es el de análisis-síntesis que usaron los griegos de la antigüedad y que fue formulado por Lakatos (1981):

> "Saca conclusiones de tu conjetura, una tras otra, suponiendo que la conjetura es verdadera. Si llegas a una conclusión falsa, entonces tu conjetura era falsa. Si llegas a una conclusión

> indudablemente verdadera, tu conjetura quizá haya sido verdadera. En este caso, invierte el proceso, trabaja hacia atrás, e intenta deducir tu conjetura original por el camino inverso, desde la verdad indudable hasta la conjetura dudosa. Si tienes éxito, habrás probado tu conjetura." (p. 70)

Significados de referencias

En el capítulo III se presentan los significados de referencia sobre la potencia de base real cualquiera y exponente natural, luego la potencia de base real no nula y exponente entero, finalmente la potencia de base real positiva y exponente racional. En todas estas definiciones recata el sentido de una potencia: producto repetido. Para la potencia de exponente natural se trata de productos repetidos no de la base sino del opuesto de la base y el exponente se ha transformado en el opuesto del primer exponente. De forma análoga, para la potencia de base positiva y exponente fraccionario es el producto repetido de la raíz enésima (denominador de la fracción) y exponente numerador positivo o negativo.

Utilidad del libro

Este libro es útil para la educación matemática, pues pone en el centro que una potencia es un producto repetido, excepto para exponentes 0, 1 o –1, analiza y resuelve los conflictos semióticos como las descritas de tres prácticas matemáticas muy difundidas: potencia de base negativa y exponente natural, radicales de números negativo y la potencia cero de cero.

Daniel M. Chirinos M.

Vicerrector de Investigación de la UNE

RESUMEN

El recojo de las prácticas matemáticas sobre la potenciación, los diferentes autores definen, primero la potencia de base real y exponente natural. Su significado no es otro que un producto repetido, excepto para exponentes 0 y 1. Algunos autores establecen que -3^4 no es una potencia, sino el opuesto de la potencia 3^4. También ambiguo al decir que 0^0 es una expresión indeterminada o que existe radicales de números negativos como $\sqrt[3]{-8}$. Después de resolver las representaciones y definiciones ambiguas se deja camino abierto para formular el significado institucional.

Se describe el significado de la potencia de base real y exponente natural mostrando que se trata de un producto repetido, excepto para 1 y 0. Para la definición de la potencia con exponente fraccionario primero se describe el significado del denominador n del exponente fraccionario $\frac{m}{n}$. Además, se demuestra que el exponente fraccionario será cualquier fracción equivalente a $\frac{m}{n}$, pues de lo contrario será una definición ambigua, que es origen de algunas prácticas matemáticas erróneas.

Teniendo en cuenta los argumentamos de tres prácticas matemáticas erróneas. Se refiere a la representación y significado de potencia de base real y exponente negativo como $-a^n = -(a^n), a \in \mathbb{R}$, esta expresión solo es cierta si n es impar. Luego, se prueba que utilizar radicales de índice impar de números negativos como $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[5]{-32}$ nos conducen a situaciones paradójicas como $a = -a, \forall a \in \mathbb{R}$. Finalmente mostramos que 0^0 es 1.

Palabras clave: potencia de base real, exponente, natural, entero, fraccionario, raíz enésima de un número real.

CAPÍTULO I

Los significados en textos, revistas didácticas, hojas de cálculo y calculadoras

Para el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento (EOS) el significado de un objeto matemático puede ser personal, si corresponde individual o institucional, si es compartido por un conjunto de personas que realizan prácticas matemáticas. El significado institucional puede ser de *referencia* (elaborado por las instituciones, los expertos, autores de texto, investigadores, etc.), el *pretendido* (al formular un proceso de instrucción matemática), *implementado* (ejecutado en un proceso de instrucción) y el evaluado (el que muestran los estudiantes, después de la instrucción respectiva). (Godino, Batanero, & Font (2007).

Por existir en la potenciación en $\mathbb{R}$, prácticas matemáticas ambiguas o contradictorias nuestro estudio no parte de un significado de referencia, sino que, este será un producto de este trabajo.

Analizamos los significados propuestos en ocho textos escolares, una revista, una hoja de cálculo, dos calculadoras y un sitio web:

1. *Math Matters. An Integrated Approach*. Book 3; Cincinnati. Ohio. USA. (Lynch y Olmstead)
2. *Mathematics*. Course 3. Pearson. Prentice Hall. New Jersey. USA. (Charles et al)

3. *Discovering Algebra. An Investigative Approach. Teacher's* Edition; California. USA. (Murdock et al)
4. *Geometry*. Pearson. Prentice Hall Mathematics. New Jersey. USA. (Bass et al.)
5. *Mathematics Core Topics SL 1* for use with IB Diploma Programme. Australia. (Haese et al)
6. *Matemática. 2do de secundaria. Manual para docentes*. Lima. Perú. (Gálvez, R)
7. *La Matemática de la Enseñanza Media. Volumen 1*. (Lages Lima Elon y otros)
8. *Álgebra Básica*. Vicens-Vives. Barcelona. España. (Queysanne, M)
9. Revista do Professor de Matemática Números 1, 7 y 11. (Sociedade Brasileira de Matemática).
10. Excel. Hoja de cálculo de Microsoft Office.
11. Calculadora de Microsoft Windows.
12. Calculadora Casio Fx-570EX.
13. Sitio web: https://ekuatio.com

Los cuatro primeros son textos de Norteamericanos, con fuerte influencia del NCTM, el quinto texto es australiano y aplicable al programa del Bachillerato Internacional, el sexto es una traducción de un texto de 3 volúmenes del

Brasil liderado por Elon Lages Lima, el séptimo es un libro de texto que el Ministerio de Educación de Perú enregó a los docentes y estudiantes peruanos de la educación pública entre los años 2009-2014 y el octavo es un libro francés de educación superior, cuyo autor es Michael Queysanne matemático que expresa las posturas del famoso grupo Bourbaki. La revista brasileña está orientada a mostrar las contribuciones de profesores de primaria, secundaria y superior. Del Office utilizamos el Excel, de Windows su calculadora y el sitio web es español: ekuatio.

Utilizamos el análisis de contenido y el método de análisis-síntesis de Lakatos (1981):

> "Saca conclusiones de tu conjetura, una tras otra, suponiendo que la conjetura es verdadera. Si llegas a una conclusión falsa, entonces tu conjetura era falsa. Si llegas a una conclusión indudablemente verdadera, tu conjetura quizá haya sido verdadera. En este caso, invierte el proceso, trabaja hacia atrás, e intenta deducir tu conjetura original por el camino inverso, desde la verdad indudable hasta la conjetura dudosa. Si tienes éxito, habrás probado tu conjetura." (p. 70)

Las prácticas matemáticas diversas nos permitió poner de manifiesto los significados de:

En Lynch & Olmstead (1998, p 26) expresan "Los exponentes se usan como una forma abreviada de indicar la multiplicación repetida de un número o factor. Un número escrito en forma exponencial tiene una base y un exponente".

La base dice qué factor se está multiplicando. El exponente indica cuántos factores iguales hay. La expresión a^4 se lee como "*a* elevado a la cuarta potencia".

Charles et al. (2004, p.40) afirma que "Usar un exponente es una forma abreviada de mostrar un producto de factores iguales. Un exponente indica cuántas veces un número, o base, se usa como factor. Una expresión que usa una base y un exponente es una potencia"

$$\boldsymbol{exponente}$$

$$\boldsymbol{potencia} \rightarrow \mathbf{2^5} = \underbrace{\mathbf{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}}_{\textbf{5 factores de 2}} = \mathbf{32} \leftarrow \textbf{valor de la expresión}$$

$$\boldsymbol{base}$$

Una potencia con un exponente 1 significa que la base es utilizada como un factor solo una vez. Por ejemplo. $3^1 = 3.$ (p. 39)

Haes et al. (2019, p. 70) nos dicen:

En lugar de escribir $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$, podemos escribir este producto como 3^5.

Si n es un entero positivo, entonces a^n es el producto de n factores de a.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ factores}}$$

Los tres textos, de los cuales dos norteamericanos y un australiano siguen la tradición que una potencia de base real y exponente natural es un producto repetido. Este significado es abandonado inmediatamente por los tres textos analizado para la potencia de base real negativa y exponente natural.

Para Lynch & Olmstead (1998, p 26)

> Cuando la base sea un número negativo, enciérralo entre paréntesis Las expresiones $(-3)^2$ y -3^2 representan números diferentes.
>
> $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$ y $-3^2 = -(3)(3) = -9$

Para Charles et al. (2004, p.40):

> La expresión $(-5)^4$ significa la cuarta potencia de -5, la cual es 625. La expresión -5^4 significa el opuesto de la cuarta potencia de 5, la cual es -625. (p. 40)

Para Haese et al. (2019, p. 70) sobre las bases negativas, se tiene:

$(-1)^1 = -1$ $\qquad$ $(-2)^1 = -2$ $\qquad$ $(-3)^1 = -3$

$(-1)^2 = (-1) \times (-1) = -1 \qquad (-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$

$(-3)^2 = (-2) \times (-2) = 9$

Para la calculadora Casio Fx-570EX significa:

$(-2)^4 = 16 \qquad (-2)^5 = -32$

$-2^4 = -16 \qquad -2^5 = -32$

Sin embargo, encontramos otras propuestas diferentes:

Para la Calculadora Windows:

$-2^4 = 16\ (-2 \wedge 4 = 16) \qquad -2^5 = -32\ (-2 \wedge 5 = -32)$

Para la hoja de cálculo Excel

Potencias de base negativa y exponente natural

$-2^4 = 16 \qquad -2^5 = -32$

Las prácticas matemáticas de Excel y de la calculadora de Windows, contradicen las cuatro primeras: de los tres textos y la calculadora Casio Fx-570EX.

Todos los textos analizados describen las siguientes propiedades de las potencias de base real y exponente natural (Estas propiedades, nosotros las demostraremos en el capítulo II):

1. Producto de potencias de la misma base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $(\forall m, n \in \mathbb{N})$

2. Potencia de potencia: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

3. Cociente de potencias de la misma base: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(\forall a \neq 0)(\forall m, n \in \mathbb{N}), (m \geq n)$

4. Potencia de un producto: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, $(\forall m \in \mathbb{N})$.

5. Potencia de un cociente: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, $(b \neq 0)(\forall m \in \mathbb{N})$

Más adelante se analizarán en detalle la potencia de base negativa y exponente natural.

La potencia de base real y exponente entero:

Los textos analizados definen la potencia real a y exponente negativo n, a^n como $\frac{1}{a^{-n}}$.

Es decir, 3^{-4} será igual a $\frac{1}{3^4}$, lo que es lo mismo que $\frac{1^4}{3^4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{81}$.

La potencia de exponente negativo a^n es un producto repetido. Pero del inverso de la base a y cuyo exponente es el opuesto del exponente negativo. Prevalece el significado de producto repetido.

Las propiedades de las potencias de base real y exponente natural se extienden, también para las potencias con exponente entero.

1.3 La potencia de base real y exponente racional:

Para la potencia de exponente racional, hay que definir la raíz enésima de un número real:

Bass, L. (2004, p. 256) nos dice:

> "La raíz cúbica de x, $\sqrt[3]{x}$, es el número cuya tercera potencia es x".

Murdock, J. et al, (2007, p. 503) afirman :

> "**Raíz cúbica**. La raíz cúbica de un número a es el número b, tal que $a = b^3$. La raíz cúbica de a es denotada por $\sqrt[3]{a}$. Por ejemplo $\sqrt[3]{64} = 4$ y $\sqrt[5]{-125} = -5$. " (p. 698)

Para calculadoras como: Casio Fx-570EX, Windows y la hoja de cálculo Excel:

$$\sqrt[3]{-125} = -5 \qquad\qquad \sqrt[5]{-32} = -2$$

Sin embargo, Queysanne, M. (1971, p. 227) dice:

> **Raíces n-ésimas de *x***
>
> Las propiedades de la aplicación $x \to x''$ ($n > 0$) de ℝ en ℝ muestran que las soluciones de $y'' = x$, es decir, las *raíces n-ésimas* de x son, en ℝ (n entero estrictamente positivo),
>
> Si n es par:
>
> $x > 0 \quad y' = +\sqrt[n]{x}, \qquad y'' = -\sqrt[n]{x}$
>
> $x > 0$ no hay solución.
>
> Si n es impar:

$x > 0 \quad y = \sqrt[n]{x},$

$x < 0 \quad y = -\sqrt[n]{-x}$

Para todo $n > 0$: $x = 0, y = 0$.

Observemos que $\sqrt[n]{x}$, así como x, son positivos por definición en particular

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Se demuestra fácilmente que, cualesquiera que sean los números reales *x* e *y* positivos, y los enteros naturales *m* y *n* estrictamente positivos,

$$\sqrt[m]{x} = \sqrt[mn]{x^{mn}} \qquad \sqrt[m]{x \cdot y} = \sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[m]{y^n}$$

$$\left(\sqrt[m]{x}\right)^n = \sqrt[m]{x^n}$$

Observación

Estas fórmulas pueden ser inexactas si, *x* o *y* son negativos; por ejemplo, si se designa la *raíz* cubica de -8 con la notación $\sqrt[3]{-8} = -2$ *(notación incorrecta* según la definición de un radical, se tiene

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[6]{(-8)^2} = 2.$$

Estas prácticas diferentes requieren de un análisis más detallado.

1.4 La potencia 0 de 0

Para Lynch & Olmstead (1998), Charles et al. (2004), la Calculadora Casio Fx 570 y Excel no están definidas, pues definen la potencia de base cero y exponente diferente de cero.

> Sin embargo, la calculadora de Windows y Lages (1982) en la revista Do Profesor de Matemática (RPM 01) dice que 0^0 es indeterminado, sin embargo, en RPM 7 (1985) el profesor Euclides Rosa expresa no encontrar error alguno en lo propuesto por el profesor Elon, pero que tampoco hay error en el razonamiento de que 0^0 es 1.

En RPM 11 (1987) el profesor Libramento reformula la pregunta ¿existe z tq $z = y^x$? en la expresión y^x, si $x = 0$, $y = 0$. Libramento dice que, si x e y son cardinales, entonces y^x es 1. No es una convención, sino un teorema y cita autores como Bourbaki, Godement y otros. Pero que si x e y son números reales es una expresión indeterminada. En la parte final, del capítulo II, en la cual analizamos esta práctica, damos una demostración de $0^0 = 1$, para cardinales y analizamos y demostramos que la función $y = x^x$, se define para x real mayor o igual que cero.

CAPÍTULO II

Análisis de ambigüedades, conflictos semióticos y errores

2.1 ¿Cuál es el significado de la potencia de base negativa con exponente entero negativo?

Si n es un número entero no negativo, a^n es el producto de n factores iguales a a si n es mayor que 2; es igual a a, si n es igual a 1 y es igual a 1 si n es cero.

Si n es un número entero negativo, a^n es el producto de $-n$ factores iguales al inverso de a si n es menor o igual que -2; es igual al inverso de a si n es igual a -1. Si a es cero no existe la potencia de exponente negativo, pues 0 no tiene inverso.

Por tanto, una potencia de un número real a con exponente entero n es igual a un producto repetido si n es diferente de 1, 0 o -1.

Por ejemplo:

$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$. Cuatro factores iguales a la base 5.

$4^{-3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$. Tres factores iguales al inverso de la base 4.

$-2^4 = -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 = 16$. Cuatro factores iguales a la base -2.

Sin embargo, encontramos una definición regla de la potencia de base real negativa:

En Galvez (2008) (p. 32) está: $-3^2 = -(3)\ (3) \Rightarrow\ 9$ y $(-3)^2 = (-3)\ (-3) \Rightarrow 9$.

En la página web española ekuatio.com encontramos:

> *Potencias con base negativa*
>
> *Las potencias pueden tener un signo menos en la base, pero mucho cuidado porque hay que diferenciar 2 casos:*
>
> *El signo menos está afectado por el exponente.*
>
> *Sabemos que el signo menos está afectado por el exponente porque el número o la variable y el signo menos están encerrados entre paréntesis.*
>
> $$(-3)^2 = 9 \qquad\qquad (-2)^3 = -8$$
>
> *El signo menos NO está afectado por el exponente. El signo menos NO pertenece a la potencia y es totalmente independiente.*
>
> $$-2^2 = -4$$
>
> *¿Cómo sabemos si el signo menos está afectado o no por el exponente? Porque no está encerrado entre paréntesis.*
>
> > *El signo menos NO pertenece a la potencia y es totalmente independiente.* (https://ekuatio.com/potencias-de-exponente-negativo/)

Si el exponente no afecta al signo, ¿por qué está el signo -? ¿Alguien diría es el signo de la sustracción?

Luego: -2^2 sería una resta, ¿quién es el minuendo? ¡Bingo! Es cero, dicen.

El cero es elemento neutro de la adición, no de la sustracción.

$0 - 2^2$ es la diferencia de 0 y el cuadrado de 2. El minuendo es 0 y el sustraendo es 2^2.

En textos norteamericanbos, también consideran que $-a^n = -(a^n)$. La explicación por qué -4^4 es un número negativo y $(-4)^4$ es un número positivo; la respuesta es: "-4^4 significa $-1 \cdot 4^{4,}$ y $(-4)^4$ significa $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$". Charles et al. (2004, p. 370).

En Lynch & Olmstead (1998) encontramos que expresiones $(-3)^2$ y -3^2 representan números diferentes: "$(-3)^2 = (-3)\ (-3) = 9$ y $-3^2 = -(3)\ (3) = -9$" (p.26).

Por qué tendrían que representar números diferentes, si ambas expresiones son el cuadrado de -3.

Por lo tanto, para esta práctica matemática, muy difundida en el mundo, la expresión $-a^n$ es el opuesto de la potencia a^n. Veamos si la expresión: $-a^n = -(a^n)$, a la que llamaremos *práctica extendida* 1 verifica las propiedades de la potenciación (también denominada teoría de exponentes).

¿Cuál es el valor de $-2^2 \times -2^3$?

Aplicando la práctica extendida 1: $-2^2 \times -2^3 = -(2^2) \times -(2^3) = -(4) \times -(8) = 32$

Aplicando la propiedad fundamental y luego la práctica extendida 1:

$-2^2 \times -2^3 = -2^{2+3} = -2^5 = -(2^5) = -(32) = -32.$

Obtenemos resultados contradictorios, si utilizamos la teoría de exponentes.

¿Cuál es el valor de $\frac{-3^5}{-3^2}$?

Aplicando la *práctica extendida* 1:

$$\frac{-3^5}{-3^2} = \frac{-(3^5)}{-(3^2)} = \frac{(3^5)}{(3^2)} = \frac{243}{9} = 27$$

Si usamos la propiedad del cociente de potencias y la *práctica extendida* 1:

$$\frac{-3^5}{-3^2} = -3^{5-2} = -3^3 = -27$$

Obtenemos resultados contradictorios, si utilizamos la teoría de exponentes.

¿Cuál es el valor de $(-2 \times 3)^2$?

Si aplicamos la propiedad: potencia de un producto y luego la *práctica extendida* 1:

$$(-2 \times 3)^2 = -2^2 \times 3^2 = -(2^2) \times 3^2 = -4 \times 9$$
$$= -36$$

Si primero efectuamos el producto:

$$(-2\times 3)^2=(-6)^2=36.$$

Obtenemos resultados contradictorios, si utilizamos la teoría de exponentes.

¿Cuál es el valor de $\left(\frac{-2}{3}\right)^2$?

Si usamos la propiedad: potencia de un cociente y luego la *práctica extendida* 1.

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^2=\frac{-2^2}{3^2}=\frac{-(2^2)}{3^2}=\frac{-4}{9}=-\frac{4}{9}$$

Si usamos la propiedad de los números reales.

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^2=\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

Obtenemos resultados contradictorios, si utilizamos la teoría de exponentes.

¿En qué caso $-a^n=-(a^n)$?

Teorema 1

Si $a>0$ y n es un número entero, entonces $-a^{2n+1}=-(a^{2n+1})\wedge -a^{2n}=a^{2n}$.

Demostración

Consideremos los casos: *a*) $n\geq 0$ *b*) $n<0$

a) $n\geq 0$

Para $n=0$

$-a^{2\cdot 0+1} = -a^1 \wedge -a^{2\cdot 0} = a^0$

$= -a \qquad \wedge \qquad = a^{2\cdot 0}$

$= -(a^{2\cdot 0+1}) \wedge \quad = a^{2\cdot 0}$

Suponemos que es verdadera para $n = h$:

$-a^{2h+1} = -(a^{2h+1}) \wedge -a^{2h} = a^{2h}$, (Hipótesis inductiva)

$-a^{2(h+1)+1} = -a \cdot [-a^{2h+2}] \wedge -a^{2(h+1)} = -a^{2h+2}$,

(Def. 3 ∧ 2(h + 1) = 2h + 2)

$= -a \cdot \left[-a^{(2h+1)+1}\right] \wedge \qquad = -a^{(2h+1)+1}$, (2h + 2 = 2[h+1]+1)

$= -a \cdot [-a \cdot -a^{2h+1}] \wedge \qquad = -a^1 \cdot [-a^{2h}]$, ((2h + 1) + 1 = 2h)

$= [-a \cdot -a] \cdot -a^{2h+1} \wedge \qquad = -a \cdot [-a^{2h}]$,

(Propiedad de ℝ)

$= -a^2 \cdot -a^{2h+1} \qquad \wedge \qquad = -a \cdot [-a^{2h}]$,

$(-a \cdot -a = -a^2)$

$= [a^2 \cdot -(a^{2h+1})] \qquad \wedge \qquad = -(a) \cdot [a^{2h}]$,

(Hipótesis inductiva)

$= -(a^2 \cdot a^{2h+1}) \qquad \wedge \qquad = [-(a) \cdot -a^{2h}]$,

(Propiedad de ℝ)

$= -\left(a^{2(h+1)+1}\right) \qquad \wedge \qquad = a^{2(h+1)}$,

(2h+2+1=2(h+1)+1)

b) n < 0

$-a^{2n+1} = -a \cdot -a^{2n} \wedge -a^{2n} = -a^{2n}$ (Definición 1)

$= -a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)^{-2n} \wedge \quad = \left(-\frac{1}{a}\right)^{-2n}$ (Definición 3)

$= -a \cdot \left[\left(-\frac{1}{a}\right)^2\right]^{-n} \wedge \quad = \left[\left(-\frac{1}{a}\right)^2\right]^{-n}$ (Teorema $2_{\mathbb{Z}}$)

$= -a \cdot \left[\left(\frac{1}{a}\right)^2\right]^{-n} \wedge \quad = \left[\left(\frac{1}{a}\right)^2\right]^{-n}$ $(x^2 = (-x)^2)$

$= -a \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{-2n} \wedge \quad = \left(\frac{1}{a}\right)^{-2n}$ (Teorema $2_{\mathbb{Z}}$)

$= -a \cdot (a^{2n}) \wedge \quad = a^{2n}$ (Definición 3)

$= -(a \cdot a^{2n}) \wedge \quad = a^{2n}$ (Propiedad de $\mathbb{R}$)

$= -(a^{2n+1}) \quad \wedge \quad = a^{2n}$ (Definición 1)

Hemos demostrado que una potencia de base negativa y exponente entero es positiva si el exponente es par y es negativa si el exponente es impar, por tanto, realizar la definición $-a^n = -(a^n)$ para todo entero n es un error. (Solo es verdad si n es impar). Este error se mantiene por mucho tiempo.

2.2 ¿Cuál es el significado de radicales tipo: $\sqrt[n]{a}$, tal que *a* es negativo y *n* impar?

En Gálvez (2008a, 37) encontramos:

$$\sqrt[3]{(-243 \cdot 16)} = \sqrt[3]{-243} \cdot \sqrt[3]{16} \Rightarrow ((-3)^5)^{1/3} \cdot 2^{4/3}$$

$$\Rightarrow (-3)[(-3)^2]^{1/3} \cdot 2 \cdot 2^{1/3}$$

$$= (-3) \cdot 2 \cdot \left(9^{1/3} \cdot 2^{1/3}\right) \Rightarrow -6 \cdot (9 \cdot 2)^{1/3} \Rightarrow -6 \cdot 18^{1/3} \Rightarrow -6\sqrt[3]{18}$$

Utilicemos las propiedades de la potenciación;

$$\sqrt[3]{(-243 \cdot 16)} = \sqrt[3]{-3888} = \sqrt[3]{(-216 \cdot 18)} = \sqrt[3]{-216} \cdot \sqrt[3]{18} = -6\sqrt[3]{18}.$$

¿Tiene sentido la expresión $\sqrt[3]{-216}$?

$$-6 = \sqrt[3]{-216} = (-216)^{1/3} = (-216)^{2/6} = \sqrt[6]{(-216)^2}$$

$$= \sqrt[6]{46656} = 6$$

Bass et al. (2004) afirma "La raíz cúbica de *x*, $\sqrt[3]{x}$, es el número cuya tercera potencia es *x*". (p. 560)

Murdock et al. (2007) dice "**Raíz cúbica**. La raíz cúbica de un número *a* es el número *b*, tal que $a = b^3$. La raíz cúbica de *a* es denotada por $\sqrt[3]{a}$. Por ejemplo $\sqrt[3]{64} = 4$ y $\sqrt[5]{-125} = -5$" (p. 698)

Analicemos este seudo teorema:

$$\forall a \in \mathbb{R}, -a = -a^1 = -a^{\frac{2n}{2n}} = \sqrt[2n]{(-a)^{2n}} = \sqrt[2n]{((-a)^2)^n}$$

$$= \sqrt[2n]{((a)^2)^n} = \sqrt[2n]{(a)^{2n}} = a$$

El origen del error está en designar a dos objetos matemáticos distintos con el mismo símbolo: raíz enésima del número a ($x^n = a$) y raíz enésima positiva de a $\left(\sqrt[n]{a}\right)$.

Considerar radicales de orden impar de números negativos nos lleva a demostrar que todo número real es igual a su opuesto. Esto es inadmisible.

Una muestra de las consecuencias de mantener este error se manifiesta, por ejemplo, en problemas planteados en Gálvez (2008a, p.35):

a. $81^{-2^{-8^{3^{-1}}}}$ b. $\sqrt{2}^{-27^{3^{-1}}}$ c. $\left(-\frac{1}{64}\right)^{-3^{-80^{8^3}}}$

b. d. $16^{2^{-5^0}}$ $81^{-2^{-8^{3^{-1}}}} = 81^{-2^{-8^{\frac{1}{3}}}} = 81^{-2^{\sqrt[3]{-8}}}$

Estamos infringiendo la potencia de base real y exponente fraccionario. La base debe ser no negativa, que en este caso es -8. Que lleva al error $\sqrt[3]{-8}$.

El error en el ejercicio b. está en proponer potencias de exponente fraccionario y base negativa.

$$\left(-\frac{1}{64}\right)^{-3^{-80^{8^3}}} = \left(-\frac{1}{64}\right)^{-3^{-8^0}} = \left(-\frac{1}{64}\right)^{-3^1} = \left(-\frac{1}{64}\right)^{-3} = -64^3 = -262\,144.$$

$$16^{2^{-5^0}} = 16^{2^1} = 16^2 = 256$$

Pero las respuestas en el solucionario son: a) $\frac{1}{3}$ b)$\frac{\sqrt{2}}{4}$ c) -4 d) 4 (Gálvez, 2008a). Los dos primeros problemas están mal formulados y las respuestas de los dos últimos son erróneas.

2.3 ¿Cuál es el significado de 0^0?

Hay una tercera práctica matemática muy extendida en grandes sectores de la educación secundaria. Definen la potencia de exponente cero como $a^0 = 1, \forall a \neq 0$. Gálvez (2008a p. 33), Charles et al. (2004, p. 377): Lynch & Olmstead (1998, p. 27); Murdock et al (2007, p. 351). ¿Por qué descartan a la expresión 0^0? En nuestra Definición 1, con base en la propiedad fundamental, adoptamos $a^0 = 1$, para todo número real a. En particular cuando $a = 0$, es decir $0^0 = 1$ Es inmediata la pregunta ¿es suficiente aceptar la propiedad fundamental para argumentar que $0^0 = 1$?

Lages (1982) en la sección *Conceitos e Controvérsias de la Revista do Professor do Matemática* (RPM 01). *E*scribió*:*

¿Cuál es el valor de 0^0?

Si escribiéramos $\frac{0}{0} = x$ y $\frac{1}{0} = y$, el significado sería que $0 \cdot x = 0$ y $1 = 0 \cdot y$

TODO número x es tal que $0 \cdot x = 0$ y NINGÚN número y es tal que $0 \cdot y = 1$.

Luego, $\frac{0}{0}$ es una "expresión indeterminada". $\frac{1}{0}$ es una "división imposible".

(En general, toda división del tipo $\frac{a}{0}$, con $a \neq 0$ es imposible.)

Potencias de exponente cero fueron introducidas a propósito de la fórmula

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, que es evidente cuando $m > n$, continúa aún válida para $m = n$.

Si $a^m = b$ tendremos en $\frac{b}{b} = b^0$, luego $b^0 = 1$, si $b \neq 0$.

En el caso $b = 0$, la igualdad $\frac{b}{b} = b^0$ tomaría la forma $\frac{0}{0} = 0^0$, que lleva a considerar 0^0, como una expresión indeterminada.

Esto se refuerza por el siguiente argumento:

Como $0^y = 0$, $\forall y \neq 0$, sería natural poner $0^0 = 0$.

Y como $x^0 = 1$, $\forall x \neq 0$, es también natural poner $0^0 = 1$.

Esto, nos lleva a considerarlo una expresión indeterminada. (p. 8)

Del profesor Lages (1982) aceptamos que: $\frac{0}{0}$ es una expresión indeterminada y que $\frac{1}{0}$ es una división imposible. Discrepamos que las potencias de exponente cero se introducen por la fórmula $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, para $a \neq 0$.

Partir de $\frac{b}{b} = b^0$, para b = 0. Eso está prohibido.

En la RPM 11 (1982, p. 17) tampoco halla error alguno en dos razonamientos que llevan a concluir que $0^0 = 1$.

Primero: Una función f: X $\rightarrow$ Y/ $f \subset$ X $\times$ Y con las propiedades:

- $\forall x \in$ X, $\exists$ $(x, y) \in f$ cuyo 1° elemento es x;
- Si $(x, y') \in f$ y $(x, y'') \in f$, entonces $y' = y''$.
- Si X es vacío, existe una única función: la función vacía.
- X = f $\Rightarrow \exists! \, f: X \rightarrow Y$, a saber, f, f $\subset$ (X $\times$ Y).
- Dados m y n enteros no negativos, la potencia n^m es el número de funciones definidas de un conjunto con m elementos en un conjunto con n elementos.
- Si $m \neq 0$, no hay función definida en un conjunto con m elementos y tomando valores en el conjunto vacío, luego $0^m = 0$ para $m \neq 0$, además, si $n = 0$, existe una única función definida en el conjunto vacío.
- Luego, $n^0 = 1, \forall n \geq 0$. En particular, $0^0 = 1$.

- Segundo: El símbolo $\binom{n}{p}$: número de subconjuntos con p elementos de un conjunto con n elementos. $\binom{n}{0}$ = 1.
- $(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-1} b^i$, Tal que $n \geq 0$, *Si* $a = 1$ y $b = -1$
- $0^n = (1 - 1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i$. *Si* $n = 0$, entones $0^0 = 1$. (p. 17)

Definición

Si A y B son conjuntos, B^A es el conjunto de todas las funciones de A en B.

$$B^A = \{f \in A \times B / f \text{ es función de A en B}\}$$

Teorema 2

Si A y B son conjuntos finitos de cardinales n y m, respectivamente, entonces el cardinal de B^A es m^n (El cardinal del conjunto E se representa por #E). $\mathbf{0^0}$ (Si A = □ y B = □, entonces #(□$^{□}$) = ?)

Supongamos que $m = 0$ y $n \neq 0$. Es decir, B = □ $\wedge$ A $\neq$ □. ¿Cuál es el cardinal de B^A? Si A es no vacío, pero B sí, entonces falla la condición i) de la definición. No importa qué función intentemos definir la condición i) nos pide que dado algún x en A exista algún y en B que cumpla algo, pero tal y no puede existir porque B es vacío.

Luego, B^A no contiene algo, $\#(B^A) = 0$ y por consiguiente $0^n = 0$. ($n \neq 0$)

Supongamos ahora que $A = \phi \wedge B = \phi$.

¿Cuál es el cardinal de B^A? Ahora sí hay un conjunto f que cumple la definición de función: el conjunto vacío.

Una implicación cuyo antecedente es falso resulta ser siempre verdadera, por lo tanto, si A y B son vacíos ambas condiciones de la definición de función se cumplen. Por otra parte, dado que A es vacío, no hay otras funciones posibles. Nótese que en el caso anterior ni siquiera el vacío servía como función, no había alguna, pero en este caso sí hay una (la *función vacía*) y por lo tanto B^A tiene un elemento.

Hemos probado en $\mathbb{N}$, que $0^0 = 1$.

En la RPM 11 (1987, p. 17) Volviendo al caso 0^0, *Moacyr* (1987) expresa:

> Reformulemos la pregunta: dada la expresión y^x, si $x = 0$, $y = 0$, ¿existe z tq $z = y^x$?
>
> Respondamos: si x e y son CARDINALES, con $x = 0$, $y = 0$, entonces existe un único cardinal z tq. $z = 0^0$, que es $z = 1$, esto es $0^0 = 1$.
>
> Esta afirmación NO ES UNA CONVENCIÓN, es un TEOREMA (ver Bourbaki, Théorie des Ensembles,

Hermann, p. E. III, 29, Proposición 11; Godement, Cours d' Algèbre, Hermann, p. 90; Kamke, E., Mengenlehre, Walter de Gruyter, § 16, cap. 2; Suppes, P., Axiomatic Set Theory, Dover, p. 116, teorema 68, § 4.3, cap. 4; Rosser, J. B., Logic for Mathematicians, Chelsea, 2. Ed., p. 385, teorema XI.2.49, § 2°, cap, XI). En suma, en este caso, se tiene, necesariamente, $0^0 = 1$, al contrario (decir, que 0^0 es otra cosa diferente de 1) es matemáticamente imposible.

Por otro lado, se puede responder, también, la pregunta propuesta así: si x e y son reales, entonces la expresión, y^x, NO ESTÁ DEFINIDA si $x = 0$ e $y = 0$. Aún, esa expresión 0^0, puede ser considerada por el símbolo de $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} y^x$,

Caso en el que ella es una expresión INDETERMINADA (conforme demostró el profesor Elon Lages Lima en RPM 7, p. 17). El motivo de la expresión y^x no está definida cuando $x = 0$ e $y = 0$, siendo x e y REALES, provienen del hecho que la potenciación entre reales es completamente diferente de la definición de potenciación entre números naturales. La definición de la potenciación de reales, basada en la función exponencial es hecha a partir de la función logarítmica. Esta última, a su vez, es definida por la integral ln$x$ = $\int_1^x \frac{1}{t}$dt (ver Elon Lages Lima, Logaritmos, Fundamentos de Matemática Elemental, IMPA, LCT, p. 35.)

Libramento concluye que tanto los razonamientos de Euclides Rosa como el de Elon Lima son correctos y que 0^0 es 1 en ℕ, (la potenciación definida en ℕ), pero que es una expresión indeterminada en ℝ. (Es decir, la potenciación definida en ℝ)

Analicemos la función definida en ℝ por

$f(x) = x^x$ y determinemos $\lim_{x\longrightarrow 0} x^x$

Hagamos la gráfica en GeoGebra de la función $y = x^x$

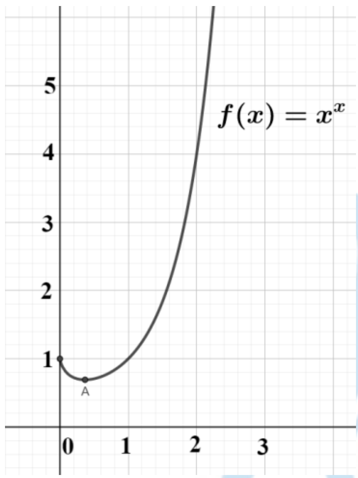
$\boldsymbol{f}[0, \infty[\longrightarrow$ ℝ, el dominio de $\boldsymbol{f}$ es [0, ∞[.

Esta función es continua en todo el intervalo]0, ∞[.

f es continua a derecha en 0.

Luego, es continua en todo el intervalo [0, ∞[.

Por tanto $\lim_{x^+\longrightarrow 0} x^x = 1.$



x	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
x^x	$0.1^{0.1}$	$0.01^{0.01}$	$0.001^{0.001}$	$0.0001^{0.001}$	
$f(x)$	0.7943…	0.9549…	0.9931…	0.99907…	…

$0^0 = 1$, tanto en $\mathbb{N}$ como en $\mathbb{R}$ y para definir la potenciación en $\mathbb{R}$ no requiero de la función logaritmo, sino de la función potencial x^n, n $\in \mathbb{N}$.

CAPÍTULO III

Significado de referencia de la potenciación en $\mathbb{R}$

3.1 Potencia de base real y exponente natural

Definición 0

> Sea a un número real, la potencia a^n, de base a y exponente n, (*natural*, $n \geq 2$) se define como el producto de n factores iguales a a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{n \text{ veces}}, \qquad (n \geq 2)$$

Esta definición nos permite mostrar la propiedad fundamental de la potenciación: el producto de potencias de la misma base de exponentes m y n.

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots a)}_{m \text{ veces}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots a)}_{n \text{ veces}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a)}_{m+n \text{ veces}}$$

El producto de dos potencias de la misma base y exponentes naturales es igual a la potencia de la misma base, cuyo exponente es la suma de los exponentes de las primeras potencias.

Potencia de exponente 1

¿Cómo definimos a^1, asumiendo que debe mantenerse la propiedad fundamental?

$$a^1 \cdot a^1 = a^{1+1} = a^2 = a \cdot a$$

Es decir, $a^1 \cdot a^1 = a \cdot a$

Luego, la única definición posible es $a^1 = a$.

Potencia de exponente 0

¿Cómo definimos a^0, asumiendo que debe mantenerse la propiedad fundamental?

$$a^0 \cdot a^1 = a^{0+1} = a^1 = a$$

Es decir, $a^0 \cdot a = a$

Luego la única definición posible es $a^0 = 1$.

Por tanto:

$$\forall a \in \mathbb{R}, a^n = \begin{cases} a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \ \ (n\ veces)\ (n \geq 2) \\ a, \qquad\qquad (n = 1) \\ 1 \qquad\qquad (n = 0) \end{cases}$$

La ***potencia natural de un número real a y exponente n*** (a^n) es: el producto de n factores iguales a a si n es mayor o igual que 2; a, si n es 1 y 1 si n es cero.

Debemos dar una definición formal de potencia de base real y exponente natural.

Definición 1

Sea a un número real, la potencia a^n, de base a y exponente natural n, se define como el producto de n por la potencia de base a y exponente $n - 1$.

$$a^0 = 1$$

$$a^n = a \cdot a^{n-1}, \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Propiedades de potencias con exponente natural

Teorema $\mathbf{1}_{\mathbb{N}}$: Producto de potencias con la misma base

El producto de dos potencias de la misma base y exponentes naturales, es igual a la potencia de la misma base, cuyo exponente es la suma de los exponentes de las primeras potencias.

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (\forall m, n \in \mathbb{N})}$$

Demostración

Demostraremos $(\forall n \in \mathbb{N})$ el caso de *m* es similar y queda como ejercicio.

Para $n = 0$

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^0 &= a^m \cdot 1 && \text{(Definición 1)} \\ &= a^m && \text{(Propiedad del 1)} \\ &= a^{m+0} && \text{(Propiedad del 0)} \end{aligned}$$

Suponemos que es verdadera para $n = h$

$$a^m \cdot a^h = a^{m+h} \qquad \text{(Hipótesis inductiva)}$$

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^{h+1} &= a^m \cdot (a \cdot a^h) && \text{(Definición 1)} \\ &= a^m \cdot (a^h \cdot a) && \text{(Propiedad Conmutativa)} \\ &= (a^m \cdot a^h) \cdot a && \text{(Propiedad Asociativa)} \\ &= a^{m+h} \cdot a && \text{(Hipótesis inductiva)} \\ &= a^{m+h+1} && \text{(Definición 1)} \end{aligned}$$

Teorema $\mathbf{2}_{\mathbb{N}}$: Potencia de potencia

La potencia de exponente m elevada al exponente n es igual a la potencia de la misma base y cuyo exponente es $m \cdot n$.

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \forall m, n \in \mathbb{N}.}$$

Demostración

Demostraremos ($\forall n \in \mathbb{N}$) el caso de m es similar y queda como ejercicio.

Para $n = 0$

$$
\begin{aligned}
(a^m)^0 &= 1, && \text{(Definición 1)} \\
&= a^0 && \text{(Definición 1)} \\
&= a^{m \cdot 0} && (m \cdot 0 = 0, \forall m \in \mathbb{N})
\end{aligned}
$$

Suponemos que es verdadera para $n = h$.

$$
\begin{aligned}
(a^m)^h &= a^{m \cdot h} && \text{(Hipótesis inductiva)} \\
(a^m)^{h+1} &= a^m \cdot (a^m)^h && \text{(Definición 1)} \\
&= a^m \cdot a^{m \cdot h} && \text{(Hipótesis inductiva)} \\
&= a^{m+m \cdot h} && \text{(Propiedad 1)} \\
&= a^{m(1+h)} && \text{(Propiedad Distributiva)} \\
&= a^{m \cdot (h+1)} && (x + y = y + x)
\end{aligned}
$$

Teorema $\mathbf{3}_{\mathbb{N}}$: Cociente de potencias de la misma base

El cociente de dos potencias de la misma base ($a \neq 0$), con exponentes naturales, es igual a la potencia de la misma base y cuyo exponente es la diferencia de los exponentes de dichas potencias.

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, (\forall a \neq 0)(\forall m, n \in \mathbb{N}), (m \geq n)}$$

Demostración

Demostraremos ($\forall n \in \mathbb{N}$) el caso de *m* es similar y queda como ejercicio.

Para *n* = 0

$$\frac{a^m}{a^0} = \frac{a^m}{1} \qquad \text{(Definición 1)}$$

$$= a^m, \qquad \text{(Definición 1)}$$

$$= a^{m-0} \qquad (m = m - 0)$$

Suponemos que es verdadera para *n* = *h*:

$$\frac{a^m}{a^h} = a^{m-h} \qquad \text{(Hipótesis inductiva)}$$

$$\frac{a^m}{a^{h+1}} = \frac{a^m}{a \cdot a^h} \qquad \text{(Definición 1)}$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{a^m}{a^h} \qquad \left(\frac{y}{x \cdot z} = \frac{1}{x} \cdot \frac{y}{z}\right)$$

$$= \frac{1}{a} \cdot a^{m-h} \text{(Hipótesis inductiva)}$$

$$= \frac{1}{a} \cdot (a \cdot a^{m-h-1}) \text{ (Definición 1)}$$

$$= \left(\frac{1}{a} \cdot a\right)(a^{m-h-1}) \text{ (Propiedad Asociativa)}$$

$$= a^{m-(h+1)}, \qquad (m–h–1=m– (h+1))$$

Teorema $\mathbf{4}_{\mathbb{N}}$: Potencia de un producto

La potencia de un producto, con exponente natural, es igual al producto de las potencias de los factores con el mismo exponente natural.

$$\boxed{(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m, (\forall m \in \mathbb{N})}$$

Demostración

Para $n = 0$

$$(a \cdot b)^0 = 1, \qquad \text{(Definición 1)}$$

$$= 1 \cdot 1, \qquad \text{(Definición 1)}$$

$$= a^0 \cdot b^0 \qquad \text{(Definición 1)}$$

Suponemos que es verdadera para $n = h$:

$$(a \cdot b)^h = a^h \cdot b^h, \qquad \text{(Hipótesis inductiva)}$$

$$(a \cdot b)^{h+1} = (a \cdot b)(a \cdot b)^h, \qquad \text{(Definición 1)}$$

$$= (a \cdot b)(a^h \cdot b^h), \qquad \text{(Hipótesis inductiva)}$$

$$= a \cdot [b \cdot (a^h \cdot b^h)], \qquad \text{(Propiedad Asociativa)}$$

$$= a \cdot [(b \cdot a^h) \cdot b^h], \qquad \text{(Propiedad Asociativa)}$$

$$= a \cdot [(a^h \cdot b) \cdot b^h], \qquad \text{(Propiedad Conmutativa)}$$

$$= a \cdot [a^h \cdot (b \cdot b^h)], \qquad \text{(Propiedad Asociativa)}$$

$$= (a \cdot a^h) \cdot (b \cdot b^h), \quad \text{(Propiedad Asociativa)}$$

$$= a^{h+1} \cdot b^{h+1}, \qquad \text{(Definición 1)}$$

Teorema $\mathbf{5}_{\mathbb{N}}$: Potencia de un cociente

La potencia, con exponente natural, de un cociente es igual al cociente de las potencias con mismo exponente natural.

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \quad (b \neq 0)(\forall m \in \mathbb{N})}$$

Demostración

Para $n = 0$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1, \qquad \text{(Definición 1)}$$

$$= \frac{1}{1}, \qquad \left(\frac{1}{1} = 1\right)$$

$$= \frac{a^0}{b^0} \cdot \qquad (\forall a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0)$$

Suponemos que es verdadera para $n = h$:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^h = \frac{a^h}{b^h}, \qquad \text{(Hipótesis inductiva)}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{h+1} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^h, \qquad \text{(Definición 1)}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{a^h}{b^h}, \qquad \text{(Hipótesis inductiva)}$$

$$= \frac{a \cdot a^h}{b \cdot b^h} \qquad \left(\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{x \cdot z}{y \cdot w}\right)$$

$$= \frac{a^{h+1}}{b^{h+1}} \qquad \text{(Definición 1)}$$

Exponente negativo

Si queremos extender la potencia para un exponente entero negativo y que mantenga la propiedad fundamental $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, ,

¿cómo definir a^{-n}, si x es real distinto de cero y n es un número natural?

$$1 = a^0 = a^{-n+n} = a^{-n} \cdot a^n$$

Luego, la única definición posible es: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, (n > 0)$

$$\frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = (a^{-1})^n$$

Definición 2

Si a es un número real diferente de cero y n es un entero positivo, la potencia a^{-n} es igual al inverso de a $(\frac{1}{a})$ elevado al exponente $-n$.

$$\boxed{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, (\forall n \in \mathbb{N}^*)}$$

Potencia de base real y exponente entero

Definición 3

Sea a un número real, la potencia a^n, de base a y exponente entero n, se define como:

$$\forall a \in \mathbb{R}, a^n = \begin{cases} a \cdot a^{n-1}, & (n \in \mathbb{Z}^+) \\ 1, & (n = 0) \\ \left(\frac{1}{a}\right)^{-n}, & (n \in \mathbb{Z}^-) \end{cases}$$

Potencia entera de un número real

a^n es el producto de n factores iguales a a, si n es positivo; es igual a 1, si n = 0 y es igual al inverso de a elevado al exponente $-n$, si n es negativo.

Ejemplos:

a. $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ **b.** $-2^4 = -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 = 16$ **c.** $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Propiedades de potencias con exponente entero

Las propiedades de potencias con exponentes naturales, las extenderemos con exponentes enteros:

Teorema $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}}$: Producto de potencias de la misma base

El producto de dos potencias de la misma base y exponentes enteros, es igual a la potencia de la misma base, cuyo exponente es la suma de los exponentes de las primeras potencias.

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \forall m, n \in \mathbb{Z}.}$$

Demostración

Consideremos los casos: **a)** $m \geq 0$ y $n \geq 0$; **b)** $m \geq 0$ y $n < 0$; **c)** $m < 0$ y $n \geq 0$; **d)** $m < 0$ y $n < 0$.

a) $m \geq 0$ y $n \geq 0$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \text{ (Teorema } 1_{\mathbb{N}})$$

b) $m \geq 0$ y $n < 0$

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^m \cdot \frac{1}{a^{-n}} && \text{(Definición 2)} \\ &= \frac{a^m}{a^{-n}} && \text{(Propiedad de } \mathbb{R}) \\ &= a^{m-(-n)} && \text{(Teorema } 4_{\mathbb{N}}) \\ &= a^{m+n} && \text{(Propiedad de } \mathbb{R}) \end{aligned}$$

c) $m < 0$ y $n \geq 0$

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= \frac{1}{a^{-m}} \cdot a^n && \text{(Definición 2)} \\ &= \frac{a^n}{a^{-m}} && \text{(Propiedad de } \mathbb{R}) \\ &= a^{n-(-m)} && \text{(Teorema } 4_{\mathbb{N}}) \\ &= a^{n+m} && \text{(Propiedad de } \mathbb{R}) \end{aligned}$$

d) $m < 0$ y $n < 0$

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{a^{-n}} && \text{(Definición 2)} \\ &= \frac{1}{a^{-m} \cdot a^{-n}} && \text{(Propiedad de } \mathbb{R}) \\ &= \frac{1}{a^{-m+(-n)}} && \text{(Teorema } 1_{\mathbb{N}}) \\ &= \frac{1}{a^{-(m+n)}} && \text{(Propiedad de } \mathbb{Z}) \\ &= a^{m+n} && \text{(Definición 2)} \end{aligned}$$

Teorema $\mathbf{2}_{\mathbb{Z}}$:Potencia de potencia

La potencia de exponente entero elevada a otro exponente entero es igual a la potencia de la misma base y cuyo exponente es el producto de dichos exponentes.

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m\cdot n}, \forall m, n \in \mathbb{Z}.}$$

Consideremos los casos: **a)** $m \geq 0$ y $n \geq 0$; **b)** $m \geq 0$ y $n < 0$; **c)** $m < 0$ y $n \geq 0$; **d)** $m < 0$ y $n < 0$.

a) $m \geq 0$ y $n \geq 0$

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n}, \qquad \text{(Teorema } 2_{\mathbb{N}})$$

b) $m \geq 0$ y $n < 0$

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= \frac{1}{(a^m)^{-n}} && \text{(Definición 2)} \\ &= \frac{1}{a^{m(-n)}} && \text{(Teorema } 2_{\mathbb{N}}) \\ &= \frac{1}{a^{-(m\cdot n)}} && \text{(Propiedad de } \mathbb{R}) \\ &= a^{m\cdot n} && \text{(Definición 2)} \end{aligned}$$

c) $m < 0$ y $n \geq 0$

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= \left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^n && \text{(Definición 2)} \\ &= \frac{1^n}{(a^{-m})^n} && \text{(Teorema } 5_{\mathbb{N}}) \\ &= \frac{1}{a^{(-m)n}} && (1^n = 1 \wedge \text{Teorema } 2_{\mathbb{N}}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a^{-(m\cdot n)}} \quad \text{(Propiedad de } \mathbb{R}\text{)}$$

$$= a^{m\cdot n} \quad \text{(Definición 2)}$$

d) $m < 0$ y $n < 0$

$$(a^m)^n = \frac{1}{(a^m)^{-n}} \quad \text{(Definición 2)}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{-m}}\right)^{-n}} \quad \text{(Definición 2)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1^{-n}}{(a^{-m})^{-n}}} \quad \text{(Teorema } 4_{\mathbb{N}}\text{)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{a^{(-m)\cdot(-n)}}} \quad \text{(Teorema } 4_{\mathbb{N}}\text{)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{a^{m\cdot n}}} \quad \text{(Propiedad de } \mathbb{R}\text{)}$$

$$= \frac{1}{a^{-(m\cdot n)}} \quad \text{(Definición 2)}$$

$$= a^{m\cdot n} \quad \text{(Definición 2)}$$

Teorema **3**$_{\mathbb{Z}}$: Cociente de potencias de la misma base

El cociente de dos potencias de la misma base ($a \neq 0$), con exponentes enteros, es igual a la potencia de la misma base y cuyo exponente es la diferencia de los exponentes de dichas potencias.

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, (\forall a \neq 0)(\forall m \in \mathbb{Z}), (\forall n \in \mathbb{Z})}$$

Demostración

Consideremos los casos: **a)** $m \geq 0$ y $n \geq 0$; **b)** $m \geq 0$ y $n < 0$; **c)** $m < 0$ y $n \geq 0$; **d)** $m < 0$ y $n < 0$.

a) $m \geq 0$ y $n \geq 0$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad \text{(Teorema } 3_{\mathbb{N}}\text{)}$$

b) $m \geq 0$ y $n < 0$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{\frac{1}{a^{-n}}} \qquad \text{(Definición 2)}$$

$$= a^m \cdot a^{-n} \qquad \text{(Propiedad de } \mathbb{R}\text{)}$$

$$= a^{m+(-n)} \qquad \text{(Teorema } 1_{\mathbb{N}}\text{)}$$

$$= a^{m-n} \qquad \text{(Propiedad de } \mathbb{R}\text{)}$$

c) $m < 0$ y $n \geq 0$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\frac{1}{a^{-m}}}{a^n} \qquad \text{(Definición 2)}$$

$$= \frac{1}{a^{-m} \cdot a^n} \qquad \text{(Propiedad de } \mathbb{R}\text{)}$$

$$= \frac{1}{\cdot a^{-m+n}} \qquad \text{(Teorema } 1_{\mathbb{N}}\text{)}$$

$$= \frac{1}{\cdot a^{-(m-n)}} \qquad \text{(Propiedad de } \mathbb{R}\text{)}$$

$$= a^{m-n} \qquad \text{(Definición 2).}$$

d) $m < 0$ y $n < 0$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\frac{1}{a^{-m}}}{\frac{1}{a^{-n}}} \qquad \text{(Definición 2)}$$

$$= \frac{a^{-n}}{a^{-m}} \qquad \text{(Propiedad de } \mathbb{R}\text{)}$$

$$= a^{-n-(-m)} \qquad \text{(Teorema } 5_{\mathbb{N}}\text{)}$$

$$= a^{-n+m} \qquad \text{(Propiedad de } \mathbb{R}\text{)}$$

$$= a^{m-n} \qquad \text{(Propiedad de } \mathbb{R}\text{)}$$

Teorema **4**$_{\mathbb{Z}}$: Potencia de un producto

La potencia de un producto, con exponente entero, es igual al producto de las potencias de los factores con el mismo exponente entero.

$$\boxed{(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m, \ (\forall m \in \mathbb{Z})}$$

Demostración

Consideremos los casos: **a)** $m \geq 0$ **b)** $m < 0$

a) $m \geq 0$

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m \qquad \text{(Teorema } 4_{\mathbb{N}}\text{)}$$

b) $m < 0$

$$(a \cdot b)^m = \frac{1}{(a \cdot b)^{-m}} \qquad \text{(Definición 2)}$$

$$= \frac{1}{a^{-m} \cdot b^{-m}} \qquad \text{(Teorema } 4_{\mathbb{N}}\text{)}$$

$$= \frac{1}{a^{-m}} \cdot \frac{1}{b^{-m}} \qquad \text{(Propiedad de } \mathbb{R}\text{)}$$

$$= a^m \cdot b^m \qquad \text{(Definición 2)}$$

Teorema $\mathbf{5}_{\mathbb{Z}}$: Potencia de un cociente

La potencia, con exponente entero, de un cociente es igual al cociente de las potencias con el mismo exponente entero.

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \quad (b \neq 0)(\forall m \in \mathbb{Z})}$$

Demostración

Consideremos los casos: **a)** $m \geq 0$ **b)** $m < 0$

a) $m \geq 0$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \qquad \text{(Teorema } 4_{\mathbb{N}}\text{)}$$

b) $m < 0$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{b}{a}\right)^{-m} \qquad \text{(Definición 3)}$$

$$= \frac{b^{-m}}{a^{-m}} \qquad \text{(Teorema } 5_{\mathbb{N}}\text{)}$$

$$= \frac{a^m}{b^m} \qquad \text{(Definición 2)}$$

Función potencial de exponente positivo *n*

Definición 4

Si n es un número natural positivo ($n > 0$), denominamos función potencial de exponente n, a la función que a cada x de $\mathbb{R}$ le corresponde x^n.

$$f_n(x) = x^n$$

Características de la función potencia f_n

1. Si *n* es par, entonces

   a. f_n es creciente en $]0, \infty[$, pues:

   $n = 1$

   $x_1 < x_2 \Longrightarrow (x_1)^1 < (2)^1 \Longrightarrow f_1(x_1) < f_1(x_2)$.

   Suponiendo verdadera para *c* = *k*, $x_1 < x_2 \Longrightarrow f_k(x_1) < f_k(x_2)$. (Hipótesis inductiva)

$$\left.\begin{array}{r} x_1 < x_2 \Longrightarrow x_1 \cdot x_1^n < x_2 \cdot x_1^n \\ \wedge \\ x_2^{n+1} \Longrightarrow f_1(x_1) < f_1(x_2). \end{array}\right\} \Longrightarrow x_1 \cdot x_1^n < x_2 \cdot x_2^n \Longrightarrow x_1^{n+1} <$$

$$x_1^n < x_2^n \Longrightarrow x_2 \cdot x_1^n < x_2 \cdot x_2^n$$

   b. f_n es simétrica, respecto del eje *y*.

   $f_n(x) = x^n = x^{2k} = (x^2)^k = ((-x)^2)^k = (-x)^{2k} = (-x)^n = f_n(-x)$.

   c. f_n es continua, El rango de $f_n \subset \mathbb{R}_+ \wedge f_n$ es creciente:

   $\forall a \in]0, \infty[, \exists x \in \mathbb{R} / x^n = a,\ f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$, pues $f_n(x) = f_n(-x)$.

   Luego, $\forall a \in \mathbb{R}_+, f_n^{-1}(a) = \{x, -x\}$

2. Si n es impar, entonces f_n creciente $\wedge$ $f_n(-x) = -f_n(x)$.

   Luego f_n es biyectiva. Por tanto; $f_n^{-1}(a) = \{x\}, \forall a \in \mathbb{R}$.

Raíz enésima positiva de un número real no negativo

Definición 5

Si a es un número real positivo o cero y n un número natural mayor o igual que 1, la *raíz enésima positiva de a*, denotada por $\sqrt[n]{a}$, es el número real no negativo x, si a es igual a la enésima potencia de x.

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow a = x^n, (a \geq 0)\ (x \geq 0)\ (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)}$$

Es decir, $\sqrt[n]{a}$ representa a la única raíz positiva de la ecuación $x^n - a = 0$. Por tanto, las afirmaciones:

$$\left(\sqrt[n]{a} \geq 0\right) \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = x;\ (a \geq 0)(x \geq 0)\ (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

Constituyen la definición del número real $\sqrt[n]{a}$, llamado raíz enésima positiva del número real no negativo a.

Tratemos de definir la potencia de un número real $a \geq 0$, de manera de incluir a los exponentes racionales, de la forma $r = \frac{m}{n}$, tal que m, n son enteros y $n > 0$.

Raíz enésima de un número real no negativo

Definición 6:

Si a es un número real cualquiera y n un número natural mayor o igual que 1, decimos que x, si existe, es la raíz enésima de a si $x^n = a$.

Ejemplos

- 3 es la raíz cuadrada de 9, pues $3^2 = 9$.
- -5 es la raíz cúbica de -125, pues $5^3 = 125$.
- 0 es la raíz cuadrada de 0, pues $0^2 = 0$.
- No existe en $\mathbb{R}$, la raíz cuadrada de -4, pues ningún número real al cuadrado es igual a -4.

Raíz enésima positiva de un número real no negativo

Teorema 6

Si $n \in \mathbb{N}^*$ y a es positivo o cero denominamos raíz enésima positiva de a simbolizada por $\sqrt[n]{a}$ al número real no negativo x, tal que $x^n = a$.

$$x = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow x^n = a$$

Demostración

$\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \mathbb{R}_+$, tal que $x = f_n^{-1}(a)$. (Definición 4)

$x = \sqrt[n]{a}$ (Definición 5)

Ejemplos

$\sqrt[4]{16} = 2$ pues $2^4 = 16$ $\sqrt[3]{27} = 3$ pues $3^3 = 27$

$\sqrt{4} = 2$ pues $2^2 = 4$

Si n es par y a es cero:

$$x^n = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Si n es par y a es negativo

No existe x real.

En $\mathbb{R}$, no existe la raíz enésima de índice par de un número negativo.

Si n es impar y a es positivo o cero:

$$x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$$

Ejemplo

$$x^3 = 64 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{64} \Leftrightarrow x = 4$$

Si n es impar y a es negativo:

$$x^n = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[n]{-a}$$

Ejemplo

$$x^3 = -27 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{-(-27)} \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{27} \Leftrightarrow x = -3$$

Radicales

Definición 7

> Decir que $b\sqrt[n]{a}$ es un radical significa que b es un número real cualquiera y a es un número real no negativo
>
> Decir que $\sqrt[n]{a}$ o $-\sqrt[n]{a}$ son radicales irracionales significa que no existe racional alguno, tal que la enésima potencia sea igual que a.

Son radicales irracionales:

a. $\sqrt{3}$ **b.** $\sqrt{5}$ **c.** $-\sqrt[4]{32}$

d. $\sqrt{\pi^2}$ **e.** $-\sqrt[3]{16}$

Son radicales racionales:

a. $\sqrt[3]{27}$ **b.** $\sqrt{\frac{9}{4}}$ **c.** $-\sqrt[4]{81}$ **d.** $\sqrt{3600}$

e. $-\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$

La forma general de un radical es $b\sqrt[n]{a}$, tal que *b* es un racional no nulo y *a* es un número real no negativo.

Todo radical es un número racional o irracional.

Potencia de base real no negativa y exponente racional

¿Cuáles son las condiciones para generalizar una potencia con base real no negativa y exponente racional $r = \frac{m}{n}$, tal que $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}^*$, asumiendo que debe mantenerse la propiedad fundamental y tal que *r* depende de cualquier representante equivalente: $\frac{m \cdot p}{n \cdot p}$.

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}.$$

Definición 8

Definimos la potencia $a^{\frac{m}{n}}$ de manera de obtener un número real no negativo que satisface:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{n} = \underbrace{a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} \cdot \ldots a^{\frac{m}{n}}}_{n \text{ factores}} = a^{n\cdot\left(\frac{m}{n}\right)} = a^{m}$$

Luego $a^{\frac{m}{n}}$ debe ser un número real no negativo cuya enésima potencia es igual a a^{m}. Por definición de raíz enésima positiva, esto equivale a afirmar:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{m}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{m} = \left(\sqrt[n\cdot p]{a}\right)^{m\cdot p}$$

En particular $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Por lo tanto:

$$(\forall a \in \mathbb{R}), (\forall m, n \in \mathbb{Z})\ a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n} = (a \geq 0)\ (n > 0) \quad \begin{cases} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \sqrt[n]{a} (m\ factores)(m \in (\mathbb{Z}^{+} \cup \{0\})) \\ \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \cdot \ldots \frac{1}{\sqrt[n]{a}} (-m\ factores)(m \in \mathbb{Z}^{-})(a \neq 0) \end{cases}$$

Por lo tanto, la ***potencia racional de un número real a*** $\left(\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}}}\right)$ es: el producto de *m* factores iguales a $\sqrt[n]{a}$ si *m* es entero positivo o cero o el producto de –*m* factores iguales al inverso de $\sqrt[n]{a}$ si *m* es entero negativo.

Ejemplos:

a. $\mathbf{2^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{3} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}}$ **b**. $\mathbf{8^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^{4} =}$ $\mathbf{(2)^{4} = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 16}$

c. $\mathbf{\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^{4} = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 16}$ **d.** $\mathbf{\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} = (3)^{\frac{3}{2}} =}$ $\mathbf{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3\sqrt{3}}$

Propiedades de potencias con exponente fraccionario

Las propiedades de potencias con exponentes enteros, las extenderemos a las potencias de base no negativa con exponentes fraccionarios:

Teorema $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$: Producto de potencias de la misma base

El producto de dos potencias de la misma base y exponentes racionales, es igual a la potencia de la misma base, cuyo exponente es la suma de los exponentes de las primeras potencias.

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} \quad \left(\forall \frac{p}{q},\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}\right)}$$

Demostración

$$a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}} = \left(a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}\right)^{1} \qquad \text{(Definición 8)}$$

$$= \left(a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{qs}{qs}} \qquad \left(1 = \frac{q \cdot s}{q \cdot s} \ \wedge q \neq 0 \ \wedge \ s \neq 0\right)$$

$$= \left[\left[\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p} \cdot \left(a^{\frac{1}{s}}\right)^{r}\right]^{q \cdot s}\right]^{\frac{1}{q \cdot s}} \qquad \text{(Definición 8)}$$

$$= \left[\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p \cdot q \cdot s} \cdot \left(a^{\frac{1}{s}}\right)^{r \cdot q \cdot s}\right]^{\frac{1}{q \cdot s}} \qquad (\text{Teorema } 2_{\mathbb{Z}})$$

$$= \left(a^{\frac{p \cdot q \cdot s}{q}} \cdot a^{\frac{r \cdot q \cdot s}{s}}\right)^{\frac{1}{qs}} \qquad \text{(Definición 8)}$$

$$= \left(a^{p \cdot s} \cdot a^{r \cdot q}\right)^{\frac{1}{q \cdot s}} \qquad (\text{Propiedad de } \mathbb{R})$$

$$= \left(a^{p \cdot s + r \cdot s}\right)^{\frac{1}{q \cdot s}} \qquad (\text{Teorema } 1_{\mathbb{Z}})$$

$$= a^{\frac{p \cdot s + r \cdot q}{q \cdot s}} \qquad \text{(Definición 8)}$$

$$= a^{\frac{p}{q} + \frac{p}{s}} \qquad \left(\frac{p \cdot s + r \cdot q}{q \cdot s} = \frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right)$$

Ejemplo:

$$\boldsymbol{\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6}$$

Teorema $\mathbf{2}_{\mathbb{Q}}$: Potencia de potencia

La potencia de exponente racional elevada a otro exponente racional es igual a la potencia de la misma base y cuyo exponente es el producto de dichos exponentes.

$$\boxed{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}} \ \left(\forall \frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}\right)}$$

Demostración

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \left(a^{\frac{p\cdot s}{q\cdot s}}\right)^{\frac{q\cdot r}{q\cdot s}} \qquad \text{(Propiedad de } \mathbb{R}\text{)}$$

$$= \left[\left[\left(a^{\frac{1}{q\cdot s}}\right)^{p\cdot s}\right]^{q\cdot r}\right]^{\frac{1}{q\cdot s}} \qquad \text{(Definición 8)}$$

$$= \left[\left(a^{\frac{1}{q\cdot s}}\right)^{p\cdot s\cdot q\cdot r}\right]^{\frac{1}{q\cdot s}} \qquad \text{(Teorema } 2_{\mathbb{Z}}\text{)}$$

$$= \left(a^{\frac{p\cdot s\cdot q\cdot r}{q\cdot s}}\right)^{\frac{1}{q\cdot s}} \qquad \text{(Definición 8)}$$

$$= (a^{p\cdot r})^{\frac{1}{q\cdot s}} \qquad \left(\frac{p\cdot s\cdot q\cdot r}{q\cdot s} = p\cdot r\right)$$

$$= a^{\frac{p\cdot r}{q\cdot s}} \qquad \text{(Definición 8)}$$

$$= a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}} \qquad \left(\frac{p\cdot r}{q\cdot s} = \frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}\right)$$

Corolario $\mathbf{2}_{\mathbb{Q}}$:

Raíz enésima de una raíz emésima

La raíz enésima positiva de una raíz emésima positiva es igual a la raíz positiva de orden n·m.

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n\cdot m]{x} \qquad (x \geq 0)}$$

Demostración

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n]{x^{\frac{1}{m}}} \qquad \text{(Definición 8)}$$

$$= \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad \text{(Definición 8)}$$

$$= x^{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}} \qquad \text{(Teorema } 2_{\mathbb{Q}}\text{)}$$

$$= x^{\frac{1}{m\cdot n}} \qquad \left(\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{m\cdot n}\right)$$

$$= \sqrt[n\cdot m]{\boldsymbol{x}} \qquad \text{(Definición 8)}$$

Teorema $\mathbf{3}_{\mathbb{Q}}$: Cociente de potencias de la misma base

El cociente de dos potencias de la misma base ($a \neq 0$), con exponentes racionales, es igual a la potencia de la misma base y cuyo exponente es la diferencia de los exponentes de dichas potencias.

$$\boxed{\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{p}{q}} \ (\forall a \neq 0)\left(\forall \frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}\right)}$$

Demostración

$$\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = \frac{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{1}}{\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{1}} \qquad \text{(Definición 8)}$$

$$= \frac{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{s}{s}}}{\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{q}{q}}} \qquad \left(\frac{s}{s} = 1 = \frac{q}{q}, [s \neq 0 \neq q]\right)$$

$$= \frac{a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{s}{s}}}{a^{\frac{r}{s}\cdot\frac{q}{q}}} \qquad \text{(Teorema } 2_{\mathbb{Z}}\text{)}$$

$$= \frac{\left(a^{\frac{1}{q\cdot s}}\right)^{p\cdot s}}{\left(a^{\frac{1}{q\cdot s}}\right)^{r\cdot q}} \qquad \text{(Definición 8)}$$

$$= \left(a^{\frac{1}{q\cdot s}}\right)^{p\cdot s-r\cdot q} \qquad \text{(Teorema } 3_{\mathbb{Z}}\text{)}$$

$$= a^{\frac{p\cdot s-r\cdot q}{q\cdot s}} \qquad \text{(Definición 8)}$$

$$= a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}} \qquad \frac{p\cdot s-r\cdot q}{q\cdot s} = \frac{p}{q}-\frac{r}{s}$$

Corolario $\mathbf{3}_{\mathbb{Q}}$:

Raíz enésima de un cociente

La raíz enésima positiva de un cociente es igual al cociente de las raíces enésimas positivas de los términos.

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \qquad (x \geq 0,\ y > 0)}$$

Demostración

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad \text{(Definición 8).}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}} \qquad \text{(Teorema } 3_{\mathbb{Q}}\text{)}$$

$$= \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \qquad \text{(Definición 8)}$$

Teorema $\mathbf{4}_{\mathbb{Q}}$: Potencia de un producto

La potencia de un producto, con exponente racional, es igual al producto de las potencias de los factores con el mismo exponente racional.

$$\boxed{(a\cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}\cdot b^{\frac{p}{q}},\ \left(\forall \frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\right)}$$

Demostración

$$(a\cdot b)^{\frac{p}{q}} = \left((a\cdot b)^{p}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{(Definición 8)}$$

$$= (a^{p}\cdot b^{p})^{\frac{1}{q}} \qquad \text{(Teorema } 4_{\mathbb{Z}}\text{)}$$

$$= \left(a^{\frac{p\cdot q}{q}}\cdot b^{\frac{p\cdot q}{q}}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \left(p = \frac{p\cdot q}{q},\ q\neq 0\right)$$

$$= \left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p\cdot q}\cdot\left(b^{\frac{1}{q}}\right)^{p\cdot q}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{(Definición 8)}$$

$$= \left(\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p}\cdot\left(b^{\frac{1}{q}}\right)^{p}\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{(Teorema } 2_{\mathbb{Z}}\text{)}$$

$$= \left(a^{\frac{p}{q}}\cdot b^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{q}{q}} \qquad \text{(Definición 8)}$$

$$= \left(a^{\frac{p}{q}}\cdot b^{\frac{p}{q}}\right)^{1} \qquad 1 = \frac{q}{q}\ ,\ (q\neq 0)$$

$$= a^{\frac{p}{q}}\cdot b^{\frac{p}{q}} \qquad \text{(Definición 7)}$$

Corolario $\mathbf{1.4}_{\mathbb{Q}}$:

Raíz enésima de un producto

Dados dos números reales nos negativos. La raíz enésima positiva de un producto es igual al producto de las raíces enésimas positivas de los factores.

$$\boxed{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \quad (a \geq 0,\ b \geq 0)}$$

Demostración

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} \qquad \text{(Definición 8)}$$

$$= a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \qquad \text{(Teorema } 1_{\mathbb{Q}})$$

$$= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \qquad \text{(Definición 8).}$$

Corolario 2. $\mathbf{4}_{\mathbb{Q}}$:

4. Producto de un número real no negativo por una raíz enésima positiva

El producto de un número real no negativo por una raíz enésima positiva de *x* es igual a la raíz enésima positiva del producto de la potencia enésima de *a* por *x*.

$$\boxed{a \cdot \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n \cdot x}, \quad (\mathrm{x} \geq 0,\ \mathrm{y} > 0)}$$

Demostración

$$a \cdot \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{x} \qquad \text{(Definición 8)}$$

$$= \sqrt[n]{a^n \cdot x} \qquad \text{(Corolario } 4_{\mathbb{Q}})$$

Teorema $\mathbf{5}_{\mathbb{Q}}$: Potencia de un cociente

La potencia, con exponente racional, de un cociente es igual al cociente de las potencias con el mismo exponente racional.

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}\ ,\ (b \neq 0)(\forall \tfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*)}$$

Demostración

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{(Definición 7)}$$

$$= \left(\frac{a^p}{b^p}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{(Teorema } 3_{\mathbb{Z}}\text{)}$$

$$= \left(\frac{a^{\frac{p\cdot q}{q}}}{b^{\frac{p\cdot q}{q}}}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \left(p = \frac{p\cdot q}{q} \land q \neq 0\right)$$

$$= \left(\frac{\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p\cdot q}}{\left(b^{\frac{1}{q}}\right)^{p\cdot q}}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{(Definición 8)}$$

$$= \frac{\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{p\cdot q}{q}}}{\left(b^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{p\cdot q}{q}}} \qquad \text{(Definición 8)}$$

$$= \frac{\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p}}{\left(b^{\frac{1}{q}}\right)^{p}} \qquad \left(p = \frac{p\cdot q}{q} \land q \neq 0\right)$$

$$= \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}} \qquad \text{(Definición 8)}$$

CONCLUSIONES

Potencia de base real y exponente natural

$$\boldsymbol{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\, factores}}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

$$\boldsymbol{a^n = \begin{cases} a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a, & n \geq 2 \\ a, & n = 1 \\ 1, & n = 0 \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{a^n = a \cdot a^{n-1}}, \text{ n} \geq \boldsymbol{1}$$

$$\boldsymbol{a^0 = 1}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Potencia de base real y exponente entero

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1^n}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

$$= \frac{1}{\boldsymbol{a}} \cdot \frac{1}{\boldsymbol{a}} \cdot \frac{1}{\boldsymbol{a}} \cdot \ldots \frac{1}{\boldsymbol{a}}$$

$$n\, factores$$

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Potencia de base real y exponente racional

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}} \cdot \underbrace{a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} \cdot \ldots a^{\frac{m}{n}}}_{n \text{ factores}} = a^{n \cdot \left(\frac{m}{n}\right)} = a^m$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(\sqrt[n\cdot p]{a}\right)^{m\cdot p}$$

En particular $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Por lo tanto:

$(\forall a \in \mathbb{R}), (\forall m, n \in \mathbb{Z})\ a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \ (a \geq 0)\ (n > 0)$ $\begin{cases} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \sqrt[n]{a} \quad (m\ factores)(m \in (\mathbb{Z}^+ \cup \{0\})) \\ \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \cdot \ldots \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \quad (-m\ factores)(m \in \mathbb{Z}^-)(a \neq 0) \end{cases}$

Referencias

Bass, L. E Charles, R. I. Johnson, A. & Kennedy, D. (2004). Geometry. Pearson. Prentice Hall Mathematics. Florida Teacher's Edition. Needham, Massachusetts. Upper Saddle River, New Jersey.

Charles, R. I., Branch-Boyd, J. C., Illingworth, M. Mills, D. & Reeves, A. (2004). Mathematics. Course 3. Pearson. Prentice Hall. New Jersey.

Gálvez, R, (2008ª). Matemática. 2do de secundaria. Ediciones E. Nocedal. S.A.C. Lima. Perú.

Gálvez, R, (2008b). Matemática. 2do de secundaria. Manual para docentes. Ediciones E. Nocedal. S.A.C. Lima. Perú.

Godino, J. D. Batanero, C. & Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135. Extraido el 22-08-2022 de: https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Haese M., Humpries, M., Sangwin, C., Vo, & N. (2019) Mathematics Core Topics SL 1 for use with IB Diploma Programme. Australia.

Lages, E, (1982). Revista do Professor de Matemática 01. Sociedade Brasileira de Matemática. S.P. Extraído el 25-07-2022 de https://ekuatio.com/

Lages, E, (1985). Revista do Professor de Matemática 7. Sociedade Brasileira de Matemática. S.P. Extraído el 25-07-2022 de: https://ekuatio.com/

Lages, E, (1987). Revista do Professor de Matemática 11. Sociedade Brasileira de Matemática. S.P. Extraído el 25-07-2022 de https://ekuatio.com/

Lages, E. Pinto, P., Wagner, E. & Morgado, A. (2000) La Matemática de la Enseñanza Media. IMCA. PUCP y UNI. Lima Perú.

Lakatos, I, (1981). Mathematics, science and epistemology, Philosophical papers vol.2

Lima, E. L. (1982). Alguns porquês. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v. 1, n. 1, São Paulo.

Lynch, C. & Olmstead, E. (1998). Math Matters. An Integrated Approach. Book 3. South-Western Educational Publishing. Cincinnati. Ohio.

Moacyr, L. (1987). Revista do Professor de Matemática N° 11). Sociedade Brasileira de Matemática. S.P. Extraído el 25-07-2022 de https://ekuatio.com/

Murdock, J. Kamishchke, E. & Kamischke, E. 2007. Discovering Algebra. An Investigative Approach. Teacher's Edition. Second Edition. Key Curriculum Press. Emeryville. CA. U.S.A.

Queysanne, M, 1971. Álgebra Básica. Primera edición. Editorial Vicen-Vives. España.