NKUBAP.01.GA.17.108 nolu proje L-ZAYIF VE
M-ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLER İÇİN
MERKEZİN İNCELENMESİ

Yürütücü: Yrd.Doç.Dr. Erdal BAYRAM
2017

ÖNSÖZ

T.C. Namık Kemal Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından desteklenen "Hemen hemen benzerlik kavramı ile bazı operatör sınıfları için değişmez alt uzay problemi" isimli, NKUBAP.01.GA.17.108 numaralı projemize ait sonuç raporudur.

ÖZET

L-zayıf ve M-zayıf Kompakt Operatörler İçin Merkezin İncelenmesi

E sıralı vektör uzayı üzerinde tanımlı T operatörü özdeşlik dönüşümünün bir skalar katı olarak yazılabiliyorsa, yani her bir $x \in E^+$ için $-\alpha x \leq Tx \leq \alpha x$ olacak biçimde bir $\alpha > 0$ skalar sayısı varsa, T 'ye merkez operatörü denir. Tüm merkez operatörleri sınıfı E 'nin merkezi denir ve $Z(E)$ ile gösterilir. Özellikle vektör örgülerinin merkezleri üzerine yapılan çok sayıda çalışma arasında, regüler operatörlerin çeşitli sınıflarının merkezlerinin tanımlama çabaları vardır. E ve F Banach örgüsü ve $Z(E) \odot Z(F)$ injektif tensör çarpım normu ile verildiğinde $Z(E) \odot Z(F)$ den $Z\left(L^r(E,F)\right)$ içine bir izometrik gömme dönüşümünün var olduğu verilmiştir. Üstelik bu ve benzer gömme dönüşümlerine ilişkin bazı yoğunluk sonuçları da verilmiştir. Ayrıca, kompakt ve zayıf kompakt operatörler için ilgili sonuçlarda elde edilmiştir.

Bu çalışmada, Banach örgüleri arasında tanımlı regüler, kompakt ve zayıf kompakt operatörlerin merkezleri için verilen sonuçları L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörler bağlamında genişlettik. Ayrıca, bir Banach örgüsünün merkezindeki kompakt operatörler ile L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörlerin çakıştıklarını ispatladık.

ABSTRACT

Investigating the Center of L-weakly and M-weakly Compact Operators

An operator T on an ordered vector space E, with positive cone E^{+}, is called central if it is bounded by a multiple of the identity operator, i.e., there exists some scalar $\alpha > 0$ such that $-\alpha x \leq Tx \leq \alpha x$ holds for all $x \in E^{+}$. The collection of all central operators on E is called the centre of E and denoted by $Z(E)$. Amongst many works on the centre, especially in the context of vector lattices, there have been attempts to identify the centre of various spaces of regular operators. Some isometric results were given showing that if E and F are Banach lattices then there is an embedding of the algebraic tensor product $Z(E) \odot Z(F)$ into $Z(L^{r}(E,F))$ which is an isometry when $Z(E) \odot Z(F)$ is given the injective tensor product norm. Furthermore, it is also given some density results regarding this, and similar, embeddings. Also, some related results are obtained for spaces of compact and weakly compact operators.

In this study we extend and modified known results concerning the centre of spaces of regular (resp. weakly compact or compact) operators between two Banach lattices to the setting of L-weakly compact and M-weakly compact operators. We also show that the L-weakly compact, M-weakly compact and compact operators lying in the centre of a Banach lattice coincide.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$x \vee y$	x ve y elemanlarının supremumu
$x \wedge y$	x ve y elemanlarının infimumu
$x_\alpha \uparrow x$	Yukarı yönlendirilmiş ve supremumu *x* olan x_α ağı
$x_\alpha \downarrow x$	Aşağı yönlendirilmiş ve infumumu *x* olan x_α ağı
E^+	E uzayının pozitif kısmı
E^*	E uzayının sürekli duali
E^a	E normlu vektör örgüsünün sıra sürekli kısmı
S'	S operatörünün adjointi
ST	S ile T operatörlerinin bileşkesi
$L(E,F)$	E uzayından F uzayına tanımlı sürekli operatörler
$L(E)$	$L(E,E)$
$L(E,F)_+$	E uzayından F uzayına tanımlı pozitif operatörler
$L(E)_+$	$L(E,E)_+$
$L^r(E,F)$	E uzayından F uzayına tanımlı regüler operatörler
$L^r(E)$	$L^r(E,E)$
$W(E,F)$	E uzayından F uzayına tanımlı zayıf kompakt operatörler
$K(E,F)$	E uzayından F uzayına tanımlı kompakt operatörler
$W_M(E,F)$	E uzayından F uzayına tanımlı M-zayıf kompakt operatörler
$W_L(E,F)$	E uzayından F uzayına tanımlı L-zayıf kompakt operatörler
$W_M(E,F)_+$	$W_M(E,F) \cap L(E,F)_+$
$W_L(E,F)_+$	$W_L(E,F) \cap L(E,F)_+$
${W^r}_M(E,F)$	$W_M(E,F)_+ - W_M(E,F)_+$
${W^r}_L(E,F)$	$W_L(E,F)_+ - W_L(E,F)_+$
$x \otimes y$	x ile y elemanlarının tensör çarpımı
$Z(E)$	E vektör örgüsünün merkezi

$Z(E) \odot Z(F)$	E ile F in merkezlerinin cebirsel tensör çarpımı
$\|T\|_o$	T operatörünün sıra birim normu
$T\|_A$	T operatörünün A ‘ya kısıtlanması

1. GİRİŞ

Proje çalışmamızın temel odak noktası, Banach örgüleri üzerinde tanımlı zayıf kompakt operatörlerin alt sınıfları olan L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörler sınıfının, ideal merkez kavramı açısından irdelenmesidir. E sıralı vektör örgüsü üzerinde tanımlı $T : E \to E$ operatörü, eğer özdeşlik operatörünün bir skalar katı ile sınırlandırılmış ise, bu operatöre merkez operatör adı verilir. Yani $T : E \to E$ operatörünün bir merkez operatör olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in E$ için $\pm Tx \leq \lambda x$ olacak biçimde bir $\lambda > 0$ sayısının olmasıdır. E üzerinde tanımlı tüm merkez operatörlerin kümesine E 'nin merkezi denir ve $Z(E)$ ile gösterilir.

Bir çok bakımdan $Z(E)$ 'nin yapısı E 'nin yapısından daha basittir. Bazı durumlarda ise $Z(E)$, E hakkında bilgiler verir. Örneğin E topolojik sıra birime sahipse E 'nin σ-Dedekind tam olması için gerekli ve yeterli koşul $Z(E)$ 'nin de σ-Dedekind tam olmasıdır. Diğer taraftan merkezin önemli bir özelliği bileşke işlemi altında değişmeli cebir olmasıdır. Aslında, bir vektör örgüsünün merkezi, bir X kompakt Hausdorff uzayı için $C(X)$ 'in yoğun altcebirine izometrik izomorftur. Bu izomorfizm aynı zamanda sıralı vektör örgülerinin de izomorfizmidir. Eğer E üniform tam ise $Z(E)$ 'in görüntüsü $C(X)$ 'in tamamı olacaktır. Bu özelliklerin çoğu Buck 'a aittir (Buck, 1961).

L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörler ilk defa (Meyer-Nieberg, 1974) tarafından tanımlanmış ve bir çok özellikleri verilmiştir. Daha sonraları (Dodds-Fremlin, 1979), L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörlerin birbirleriyle çakıştığı veya kompakt operatörlerle çakıştığı bazı durumları göstermiştir. (Chen ve Wickstead 1999), bu operatörlerin modüllerinin var olduğu durumları ve bu operatörler yardımıyla Shur özelliğine sahip Banach uzaylarının karakterizasyonu ile ilgili sonuçlar elde etmiştir. Daha sonraları, bir çok araştırmacı tarafından, bu operatör sınıflarının özellikleri veya diğer operatör sınıfları ile ilişkileri incelenmiştir. Proje yürütücüsü tarafından da, bu operatörler üzerine bazı çalışmalar yapılmıştır. Örneğin; bu operatör sınıflarının bazı durumlarda ki kompaktlık durumları ve regüler operatörler içinde çift taraflı ideal olma şartları verilmiştir (Tonyalı ve Bayram 2011; Bayram ve Wnuk, 2013). Ayrıca, sıra sürekli norma sahip olmayan Banach örgüleri üzerinde tanımlı ve herhangi bir L- veya M-zayıf kompakt operatör ile değişmeli olan tüm sınırlı operatörlerin özdeş olmayan kapalı değişmez alt uzaylara sahip olduğu gösterilmiştir (Tonyalı ve Bayram, 2011, 2013). Ayrıca bu operatör sınıflarının Banach örgü yapısı hakkındaki çalışma proje yürütücüsü tarafından yapılmıştır (Bayram ve Wickstead, 2017).

Regüler operatörlerin çeşitli uzaylarının merkezlerinin özdeşleştirme çabaları (Buskes ve arkd. 1986) tarafından yapılan çalışmalara dayanmaktadır. Çalışmalarında kullandıkları teknikler ise (dePagter, 1983; Aliprantis ve Burkinshaw, 1983) 'ın pozitif operatörlerin komponentleri hakkındaki çalışmalarında ortaya çıkmıştır. Fakat bu çalışmaların hiçbiri merkezlerle ilgili izometrik sonuçları elde etmek için değildir. Bu bağlamda ilk sonuç (Jefferies ve Okada, 1996) tarafından çok özel bir durum için verilmiştir. Bu özel durum için verilen sonuçları, (Wickstead, 2002) regüler operatörler, kompakt ve zayıf kompakt operatörler için genişletmiştir.

Bu proje kapsamında ise Banach örgüleri üzerinde tanımlı zayıf kompakt operatörlerin alt sınıfları olan L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörler sınıfı, Banach örgüleri için verilen ideal merkez kavramı açısından irdelenmiştir. Bu konu iki ana bağlamda düşünülmüş ve Wickstead 'ın sonuçları temel olarak alınmıştır. Bunlardan ilki, regüler norm ile Banach örgüsü olabilen pozitif L-zayıf ve pozitif M-zayıf kompakt operatörler ile üretilen operatör uzayının merkezinin ile ilgili injektif tensör çarpımı yardımıyla bazı izometrik gömme sonuçlarının elde edilmesidir. Ayrıca bu gömme sonuçlarının uygun olanları ile yoğunluk sonuçları, dolayısıyla yaklaşım sonuçları elde edilmeye çalışılmıştır. Araştırılan ikinci nokta ise, herhangi bir Banach örgüsünün merkezinde bulunan L-zayıf veya M-zayıf kompakt operatörlerdir. Bu tip operatörler için kompakt merkez operatörlere benzer bir temsilin yapılıp yapılamayacağı araştırılmıştır.

Literatürde Banach örgülerin merkezlerinin özellikleri ve bazı operatör sınıflarının merkezlerinin temsilleri ile ilgili birçok çalışmanın var olmasına karşın L- ve M-zayıf kompakt operatör sınıfları ile ideal merkez arasındaki ilişkileri veren herhangi bir çalışma yapılmamıştır. Çalıştığımız proje ile literatürde ki eksik olan kısım tamamlanmaya çalışılmıştır. Ayrıca, Banach örgüleri teorisine çok önemli katkıları olan ve merkez operatörleri hakkında bir çok çalışma yapmış A.W. Wickstead (Queen's University Belfast, Pure Mathematics Research Center) ile birlikte çalışma imkanı bulunmuştur.

Matematik alanında yapılan çalışmalarda, belli bir hedef doğrultusunda yola çıkılmasına rağmen, yapılan gözlemler veya karşılaşılan zorluklar sonucu farklı konularla ilişkiler kurulup farklı sonuçlar elde edilebildiği doğaldır. Bu proje çalışmasında da operatör sınıflarımızı daha iyi anlayabilmek adına, operatör özellikleri ve sıra yapısı hakkında çalışmalar da yapılmaya gayret edilmiştir. Operatörlerimizin regüler operatörler içinde band olduğu ve KB-uzay olduğu durumlar için bazı gözlemler yapılmıştır.

2. GEREÇ ve YÖNTEM

Merkez operatörler üzerine her zaman yeni çalışmalar yapılsa da, L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörler ile ilgili bir çalışma halen yapılmamıştır. Fakat regular operatörler ve zayıf kompakt operatörlerin ideal merkezlerinin temsilleri özellikle Wickstead ın çalışmalarında verilmiştir. Dolayısıyla, bu çalışmaların L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörler için de yapılabilirliğini sorgulamak doğaldır. Bu bağlamda, proje yürütücüsünün önceden elde ettiği sonuçlar da bu projenin alt yapısını oluşturmaktadır.

Bu bölümde, elde ettiğimiz sonuçların daha anlaşılır olabilmesi adına çalışmalarımızda kullandığımız temel araçlar, bağıntılar ve hedeflerimizin çıkış noktaları verilmeye çalışılmıştır. Bu bölümü üç kısımda incelemeyi uygun bulduk. İlk kısımda, projenin genelinde kullanılan temel kavramlar ve notasyon ayrıntıya girilmeden verilmiş; ikinci kısım gerek ideal merke kavramı gerekse ele aldığımız operatörler ile ilgili literatürün kısa bir özetine ayrılmış; son kısımda ise çalışmalarımızda izlediğimiz metodoloji ve çıkış noktalarımız ele alınmıştır.

2.1. Temel kavramlar ve Notasyon

E gerçel vektör uzayı üzerinde “ $\leq$ ” bir sıralama bağıntısı olsun. Her $x, y \in E$ için,

- Her bir $z \in E$ için $x \leq y$ iken $x + z \leq y + z$
- Her bir $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ için $x \leq y$ iken $\alpha x \leq \alpha y$

koşulları sağlanıyorsa, E uzayına sıralı vektör uzayı denir. E sıralı vektör uzayının $0 \leq x$ özelliğini sağlayan x elemanına pozitiftir denir ve E ’nin tüm pozitif elemanlarının kümesi E^+ ile gösterilir. E sıralı vektör uzayına, her bir $x, y \in E$ için $x \vee y := \sup \ x,y \ \in E$ ve $x \wedge y := \inf \ x,y \ \in E$ koşullarını sağlıyor ise vector örgüsü veya Riesz uzayı denir. E Riesz uzayı ve $G \subset E$ alt vektör uzayı olmak üzere $x, y \in G$ iken $x \vee y \in G$ ise G’ye Riesz alt uzayı denir.

Her bir $x \in X^+$ için $Tx \in Y^+$ olacak biçimdeki $T : X \to Y$ lineer dönüşümüne pozitif operatör denir ve $T \geq 0$ (veya $0 \leq T$) ile gösterilir. Açıktır ki $T : X \to Y$ operatörü pozitif ise, $x \leq y$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için $Tx \leq Ty$ sağlanır. E ve F Riesz uzayları olmak üzere, $T = R - S$ olacak biçimde $R, S : E \to F$ pozitif operatörleri bulunabiliyorsa $T \in \mathcal{L} \ E, F$ operatörüne regülerdir denir. E uzayından F uzayına tanımlı tüm regüler operatörler sınıfı $\mathcal{L}_r \ E, F$ şeklinde gösterilir.

E Riesz uzayı olmak üzere, $|x| \leq |y|$ olacak biçimdeki her $x, y \in E$ için $\|x\| \leq \|y\|$ sağlanıyorsa, E üzerinde tanımlanan $\|.\|$ normuna örgü normu denir ve $E, \|.\|$ ikilisine normlu Riesz uzayı denir. Eğer, E normlu Riesz uzayı bu örgü normuna göre tam ise, E uzayına Banach örgüsü denir. Fonksiyonel analizde kullanılan klasik dizi ve fonksiyon uzayları (kendi bilindik normlarına gore) Banach örgülerinin tipik örnekleridir.

Bir Riesz uzayı üzerinde $\|.\|$ örgü normu tanımlansın. $x_\alpha \downarrow 0$ olacak şekildeki her x_α ağı için $\|x_\alpha\| \downarrow 0$ sağlanıyorsa, $\|.\|$ normuna sıra sürekli norm denir. Bu koşulu sağlayan normlu Riesz uzayına da sıra sürekli norma sahip normlu Riesz uzayı denir. Örnek olarak $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, $L^p\ \mu$ fonksiyon uzayları sıra sürekli norma sahip Banach örgüleri iken C[0,1], $L^\infty\ \mu$ ve ℓ_∞ uzayları sıra sürekli norma sahip olmayan Banach örgüleridir.

E normlu Riesz uzayının;

$$E^a := \ x \in E : \text{Her} \ \ x_n \ \subseteq [0,|x|] \text{ monoton dizisi norm yakınsak}$$

şeklinde tanımlanan kümesi, E içinde sıra sürekli norma sahip kapalı maksimal idealdir (Meyer, 1991). Bu ideal, E 'nin sıra sürekli kısmı olarak ta adlandırılır. Eğer E sıra sürekli norma sahip ise $E^a = E$ sağlanır. Örneğin, $\left(L_p[0,1]\right)^a = L_p[0,1]$ $(1 \leq p < \infty)$. Sıra sürekli norma sahip olmayan uzaylarda ise, $E^a \neq E$ olur. Örnek olarak, μ ölçü uzayı bir atom içermiyorsa $\left(L_\infty(\mu)\right)^a = \{\theta\}$ veya $\left(\ell_\infty\right)^a = c_0$ dır.

E Banach örgüsünün boştan farklı bir alt kümesi A olsun. Her $(x_n) \subset \text{sol } A$ dik dizisi için $\lim \|x_n\| = 0$ sağlanıyorsa, A kümesine L-zayıf kompakt küme denir. E Banach örgüsü, X Banach uzayı ve $T : X \to E$ bir sürekli operatör olsun. T operatörü X uzayının norm sınırlı kümelerini E uzayının L-zayıf kompakt kümelerine resmediyorsa, T operatörüne L-zayıf kompakt operatör denir. Tüm L-zayıf kompakt operatörler $W_L(X,E)$ ile gösterilecektir. E Banach örgüsü, X Banach uzayı ve $T : E \to X$ bir sürekli operatör olsun. Her bir $(x_n) \subset E$ norm sınırlı dik dizisi için, $\lim \|Tx_n\| = 0$ koşulunu sağlayan T operatörüne de M-zayıf kompakt operatör denir. Tüm M-zayıf kompakt operatörler $W_M(X,E)$ ile gösterilecektir.

E^a tüm L-zayıf kompakt kümeleri kapsadığından çalışmalarımızda her zaman $E^a \neq \{0\}$ kabulü olacaktır. Çünkü, $E^a = \{0\}$ olması durumunda, E Banach örgüsü üzerinde tanımlı yegane L-zayıf kompakt operatör sıfır operatörü olacaktır. Aynı nedenle, M-zayıf kompakt operatörler ile ilgili durumlarda $\left(E'\right)^a \neq \{0\}$ kabulü olacaktır.

E reel veya kompleks Riesz uzayı üzerinde tanımlı $T : E \to E$ operatörü, özdeşlik operatörünün bir skalar katı ile sınırlandırılmış ise, bu operatöre merkez operatör adı verilir. Yani $T : E \to E$ operatörünün bir merkez operatör olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in E$ için $\pm Tx \leq \lambda x$ olacak biçimde bir $\lambda > 0$ sayısının olmasıdır. E üzerinde tanımlı tüm merkez operatörlerin kümesine E'nin ideal merkezi veya kısaca merkezi denir ve $Z(E)$ ile gösterilir. Yani;

$$Z(E) = \left\{ T \in L(E) : \exists \lambda > 0 \text{ sayısı için } \mp T \leq \lambda Id(E) \right\}.$$

E Riesz uzayı olmak üzere, regüler operatörler uzayı $L^r(E)$ genelde Riesz uzayı olamasa da $Z(E)$ her zaman bir Riez uzayıdır (Abramovich ve Aliprantis, 2002). Üstelik $Z(E)$, regüler operatörler içinde bir ideal yapısındadır. E Banach örgüsü olması durumunda ise $Z(E)$ 'nin

$$\|T\| = \| \, |T| \, \| = \inf \{ \lambda > 0 : |T| \leq \lambda Id(E) \}$$

normu ile birimli AM-uzay olduğu Wickstead tarafından gösterilmiştir (Abramovich ve Aliprantis, 2002). Dahası E Dedekind tam Banach örgüsü olduğunda ise merkez $L^r(E)$ 'de özdeşlik operatörü ile üretilen banddir ve $L^r(E) = Z(E) \oplus Id(E)^d$ eşitliği sağlanır. Bu durumda bir $P : L^r(E) \to Z(E)$ projeksiyonu tanımlanabilir ve Voight, bu projeksiyon için $\|P\| \leq 1$ olduğunu göstermiştir (Abramovich ve Aliprantis, 2002).

E vektör örgüsünün Archimedean olması durumunda $Z(E)$ 'nin bir örgü yapısı olduğu kadar bileşke işlemi ile cebir yapısı da vardır. Çünkü, Kakutani-Krein temsil teoremi ile bir tek kompakt Hausdorff uzayı K vardır ve $Z(E)$ ile $C(K)$ Riesz izomorfiktir. Kuşkusuz bu sonuç E 'nin özel durumlarında merkezin çok iyi temsil edilmesini ortaya çıkarır. Örneğin E 'nin birimli AM-uzayı olması durumunda $Z(E) = E$ 'dir. E, S topolojik uzayı üzerinde genişletilmiş reel değerli sürekli fonksiyonların bir örgüsü olarak temsil edilebilirse E 'nin merkezi S üzerinde tanımlı sınırlı sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı ile özdeşleştirilebilir. Örneğin; μ ölçüsü σ-sonlu olduğunda hemen hemen her yerde sağlanan $Tf(x) = \phi(x) f(x)$ eşitliğini sağlayan $\phi \in L^\infty(\mu)$ için

$$Z(L^p(\mu)) \ni T \leftrightarrow \phi \in L^\infty(\mu)$$

dönüşümü ile $Z(L^p(\mu))$ merkezi $L^\infty(\mu)$ ile özdeşleştirilebilir. Benzer olarak, Σ lokal kompakt Hausdorff uzay ise $Z(C_0(\Sigma))$ merkezi sürekli sınırlı fonksiyonların uzayı $C^b(\Sigma)$ ile özdeşleştirilebilir.

X, Y ve Z vector uzayları olmak üzere $A : X \times Y \to Z$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bilinear olarak adlanırılır.

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 A(x_1, y) + \alpha_2 A(x_2, y)$$

$$A(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A(x, y_1) + \alpha_2 A(x, y_2)$$

Bu şekilde tanımlı tüm bilneer dönüşümlerin kümesi $B(X \times Y, Z)$ ile, Z nin scalar cisim olarak alınması halinde ise kısaca $B(X \times Y)$ ile gösterilir. X ve Y vector uzaylarının tensor çarpımı $X \otimes Y$, $B(X \times Y)$ üzerinde tanımlı liner fonksiyonellerin bir uzayı olarak inşa edilebilir. $x \in X,\ y \in Y$ olmak üzere $x \otimes y \in B(X \times Y)^*$ aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$x \otimes y(A) = A(x, y)$$

Böylece $X \otimes Y$ de bir tensor $x_i \in X,\ y_i \in Y$ ve $\lambda_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\sum_{i=}^{n} \lambda_i x_i \otimes y_i$

formundadır. Dolayısyla X ve Y Banach uzaylarının cebirsel tensor çarpımı $X \odot Y$ nin φ elemanı $\phi = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k$ formundadır ve injektif normu

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k \right\| = \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \otimes g(y_k) \right| : f \in X^*, g \in Y^*, \|f\|, \|g\| \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. $X \odot Y$ injektif norm ile donatılmış ise $X \odot_{\lambda} Y$ ile, tamlanışı ise $X \otimes_{\lambda} Y$ ile gösterilir.

Eğer E sıralı vektör uzayı Arşimedyan ise $Z(E)$ üzerindeki sıra birim norm

$$\|T\|_o = \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : -\alpha I_E \leq T \leq \alpha I_E \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.2. Öncül Çalışmalar

Sıralı vektör uzaylarının merkezleri hakkında literatürde olduça fazla çalışma görülebilir. Hatta son yıllarda Banach örgülerinin merkezleri ile bağlantılı olarak dolu merkez, topolojik dolu merkez, topolojik zengin merkez gibi farklı tanımlamalar yapılmış ve bir takım özellikler verilmiştir. Kısım 2.1 de de değinildiği üzere merkezin Banach örgü yapısı olduğu kadar cebirsel yapısından da bahsedilebilir. Bu ise Arşimedyan Riesz uzaylarının merkezlerinin bir $C(K)$ uzayına Riesz izomorfik olmasını gerektirir. İdeal merkezin bu gibi fonksiyonel temsilleri merkezin kolayca kavranmasını sağlayan basit hesaplamalar yapılmasına olanak verir.

Merkez operatörler aslında çarpım operatörlerin bir genelleştirilmesi olarak düşünülebilir. Açıktır ki özdeşlik operatörü bir merkez operatörüdür ve hem sıra birim hem de cebirsel birimdir. Diğer taraftan merkez operatörler regüler operatörlerdir ve ortomorfizmlerin özel bir sınıfını oluştururlar. Genelde band koruyan operatörler sıra sınırlı olmak zorunda olmasa da Banach örgüleri için bu durum farklıdır. Çünkü Banach örgüleri üzerinde tanımlı merkez operatörlerin, ortomorfizmlerin ve band koruyan operatörlerin aynı olduklarını Abramovich, Veskler ve Koldunov göstermişlerdir (Abramovich ve Aliprantis, 2002).

Bir Banach örgüsünün merkezi hakkında diğer önemli bir soru ne kadar geniş olabileceğidir. Örneğin E asli projeksiyon özelliğine sahipse merkez çok geniş olabilir. Zira band projeksiyonları merkez operatörleridir ve onlar aslında merkezin özdeşlik operatörünün bileşenleri olan idempotent elemanlarıdır. Diğer taraftan merkez sadece özdeşlik operatörünün skalar katları olan operatörlerinden oluşacak kadar dar da olabilir. Bu durumun en basit örneklerinden birini (Zaanen, 1975) vermiştir. Zaanen örneğinde [0,1] üzerinde tanımlı reel değerli sürekli parçalı lineer fonksiyonların oluşturduğu Banach örgüsünü kullanmıştır. Bu durum için bir diğer örnek Goullet de Rugy 'ye aittir (deRugy, 1972). de Rugy özdeş merkeze sahip bir AM-uzay örneği vermiş, Wickstead ise bu örneği sadeleştirerek tekrar vermiştir.

Merkez operatörler hakkındaki birçok araştırma arasında, operatör sınıflarının merkezleri hakkında yapılan çalışmalar sınırlıdır. Çünkü operatör sınıfları genelde sıralı vektör uzayları yapısında değildirler. Fakat bazı ek şartlar altında operatör sınıflarının merkezlerinin özdeşleştirme çalışmaları vardır. Bu proje çalışmasında elde ettiğimiz sonuçların temel dayanağı Wickstead tarafından verilen regüler, kompakt ve zayıf kompakt operatörlerin merkezlerinin izometrik gömülüşleri ile ilgili sonuçlardır (Wickstead, 2002). Wickstead ın bu sonuçları içerisinde bizim çalışmalarımız için önemli olan bazıları aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.2.1: E ve F uniform tam vektör örgüleri ve E nin sıra duali E nin noktalarını ayırsın. $\phi \in Z(E) \odot Z(F)$ tensörü için $\Phi \in Z\left(L^r(E,F)\right)$ dir. Üstelik $\|\Phi\|_o = \|\phi\|_\lambda$ sağlanır ve gömme dönüşümü; aynı zamanda cebir ve sıra izomorfizmi de olan

$$Z(E) \otimes_\lambda Z(F) \to Z\left(L^r(E,F)\right)$$

izometrisine genişletilebilir.

Teorem 2.2.2: E Dedekind σ-tam veya topolojik sıra birime sahip Banach örgüsü, F Dedekid tam Riesz uzayı ve Kabul edelim ki F üzerindeki sıra sürekli lineer fonksiyoneller F in noktalarını ayırsın. Bu durumda

$$\left\{W \in Z\left(L^r(E,F)\right) : 0 \le W \le I_{L^r(E,F)}\right\}$$
$$= DIDI\left\{\Phi : \phi \in Z(E) \otimes Z(F) \text{ ve } 0 \le \phi \le \mathrm{I}_E \otimes I_F\right\}$$

eşitliği sağlanır.

Pozitif zayıf kompakt operatörler tarafından üretilen $W^r(E,F) = \left\{T_1 - T_2 : T_1, T_2 \in W(E,F)\right\}$ operatör sınıfı $\|T\|_w = \inf\left\{\|S\| : \pm T \le S \in W^r(E,F)\right\}$ normu ile Banach örgüsüdür.

Teorem 2.2.3: E ve F Banach örgüleri için E^* sıra sürekli norma sahip olsun Bu durumda $\phi \in Z\left(E^{**}\right) \odot Z(F)$ tensörü için $\Phi \in Z\left(W^r(E,F)\right)$ dir. Üstelik $\|\Phi\|_o = \|\phi\|_\lambda$ sağlanır ve gömme dönüşümü; aynı zamanda cebir ve sıra izomorfizmi de olan

$$Z\left(E^{**}\right) \otimes_\lambda Z(F) \to Z\left(W^r(E,F)\right)$$

izometrisine genişletilebilir.

Teorem 2.2.4: E ve F Banach örgüleri için E^* ve F sıra sürekli norma sahip olsun. Bu durumda

$$\left\{W \in Z\left(L^r(E,F)\right) : 0 \le W \le I_{L^r(E,F)}\right\}$$
$$= DIDI\left\{\Phi : \phi \in Z(E) \otimes Z(F) \text{ ve } 0 \le \phi \le \mathrm{I}_{E^{**}} \otimes I_F\right\}$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla $\left\{\Phi : \phi \in Z\left(E^{**}\right) \otimes Z(F) \text{ ve } 0 \le \phi \le \mathrm{I}_{E^{**}} \otimes I_F\right\}$, $Z\left(W^r(E,F)\right)$ içinde τ-yoğundur.

Yukarıdaki son sonuç kompakt operatörler için düşünüldüğünde daha güçlü bir sonuç elde edilir.

Teorem 2.2.5: E ve F Banach örgüleri için E^* ve F sıra sürekli norma sahip olsun.

Bu durumda $\{\Phi:\phi\in {}^{*}Z(E^{*})\otimes Z(F)$ ve $0\le\phi\le \mathrm{I}_{E^{*}}\otimes I_F\}$, $Z(K^r(E,F))$ içinde güçlü operator topolojisine gore yoğundur.

Literatürde L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörler ile merkez kavramı arasındaki bağlantıları kuran herhangi bir çalışma yapılmamıştır. Bunun bir nedeni $W_{L,M}(E,F)$ (hatta $W_{L,M}(E,F)\cap L^r(E,F)$ ve $W_{L,M}(E,F)\cap L^r(E,F)$) genelde vektör örgüsü olmadıklarını gösteren örnekler verilmesidir (Chen ve Wickstead, 1999c). Dolayısıyla merkezlerinden bahsedilemez. Fakat önceki proje çalışmamızda daha dar bir sınıf olarak, pozitif L-zayıf ve pozitif M-zayıf kompakt operatörler ile üretilen $W^r{}_L(E,F)=\{T_1-T_2:T_1,T_2\in W_L(E,F)\}$ ve $W^r{}_M(E,F)=\{T_1-T_2:T_1,T_2\in W_M(E,F)\}$ alt uzayları düşünülmüş ve bu sınıfların Riesz uzayları oldukları, norm olarak regüler norm alındığında da Banach örgüsü olduklarına dair, merkezlerinin temsillerinde de kullanacağımız aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir (Bayram ve Wickstead, 2017).

Teorem 2.2.6: $W^r{}_L(E,F)$ Dedekind tam Riesz uzayıdır. Diğer taraftan, eğer F Dedekind tam ise $W^r{}_M(E,F)$ 'de Dedekind tam Riesz uzayıdır.

Sonuç 2.2.7: $(W^r{}_L(E,F),\|.\|_r)$ Dedekind tam Banach örgüsüdür. Eğer F Dedekind tam ise $(W^r{}_M(E,F),\|.\|_r)$ Dedekind tam Banach örgüsüdür.

Teorem 2.2.8: Kabul edelim ki $F^a\neq\{0\}$. Bu durumda, $W^r{}_L(E,F)$ üzerinde regüler normun sıra sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul dual uzay E' 'nün sıra sürekli norma sahip olmasıdır.

Teorem 2.2.9: Kabul edelim ki $(E')^a\neq\{0\}$. Bu durumda, $W^r{}_M(E,F)$ üzerinde regüler normun sıra sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul dual uzay F 'in sıra sürekli norma sahip olmasıdır.

Proje çalışmamızdaki amaçlarımızdan diğeri bir Banach örgüsünün merkezinde bulunan L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörlerin özelliklerini vermekti. Benzer çalışma yine Wickstead tarafından merkezdeki kompakt operatörlerin karakterize edilmesidir (Wickstead, 1976). Bu makalede merkezil operatörün kompakt olması için gerek ve yeter şartın E^+ nın tüm atomlarının gerdiği kapalı uzayda değer alması olduğu kanıtlanmıştır. Kanıtta, topolojik sıra birime sahip Banach örgülerinin $C^\infty(K)$ 'da sıra ideal olarak temsil edilebilir olduğu kullanılmıştır. Burada, K kompakt Hausdorff uzay ve $C^\infty(K)$ ise K 'nın yoğun bir alt kümesinde sonlu olan sürekli, genişletilmiş reel sayılarda değer alan fonksiyonlardır. Üstelik Banach örgüsünün sıra birimine, K üzerinde 1 sabit değerini alan fonksiyon karşılık gelir. Bu temsil (Davies, 1969) 'a aittir.

2.3. Metodoloji

Bu çalışma esas olarak modern analizin sıralı vector uzayları, Banach örgüleri ve bunlar arasında tanımlı lineer operatörler teorisinin tekniklerini, araçlarını ve metodlarını kullanır. Proje başlangıcında, temel kavramlara ve literatürde elde edilen sonuçlara aşina olabilmek amacıyla bazı makale ve kitap bölümleri incelenmiş ve analiz edilmiştir. Özellikle önceki kısımda da belirtildiği üzere Wickstead ın Sıralı vektör uzaylarının merkezleri hakkında elde ettiği sonuçlar projemiz için temel olmuştur.

Kullandığımız önemli bir araç operatörlerimiz arasındaki dual ilişkidir. Bir sınırlı operatörün L-zayıf (M-zayıf) kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul dual (adjoint) operatörünün M-zayıf (L-zayıf) kompakt olmasıdır. Dolayısıyla bir operator sınıfıiçin elde edilen bazı özellikler bu dual ilişki yardımıyla diğeri için de verilebilmektedir.

Projenin ortaya çıkmasına yardımcı olan en önemli nedenlerden birisi önceki proje çalışmasında söz konusu operatör sınıflarının Banach örgü yapısı hakkında elde ettiğimiz sonuçlardır (Bayram ve Wickstead 2017). Bu operatör sınıflarının genelde vektör örgüsü olmadığını gösterir örnekler verilmiştir (Chen ve Wickstead, 1999c). Fakat, pozitif L- ve M-zayıf kompakt operatörlerin ürettiği sınıfın regüler norm ile Dedekind tam Banach örgüsü olduğunu ve bazı sıra özelliklerini ispatladık. Dolayısıyla merkezlerinin özdeş olmadığı hemen görülür.

Diğer taraftan $W_L(E,F)$ ve $W_M(E,F)$ genelde çift taraflı ideal değildir (Bayram, Wnuk 2013). Dolayısıyla Wickstead ın sonuçlarında verilen $\phi=\sum_{k=1}^{n}U_k\otimes V_k$ tensörüne karşılık gelen $\Phi(T)=\sum_{k=1}^{n}V_kTU_k$ operatörünün L- veya M-zayıf kompakt operator olamayacağı ve bunun sonucu olarak gömme dönüşümlerinin tanımlanamayacağı düşünülebilir. Ancak, bir çok operator sınıfının aksine $W_L(E,F)$ ve $W_M(E,F)$ nin baskınlık özelliğine sahip olması operatörlerin merkezleri hakkındaki ispatlarımızda kullandığımız önemli özelliklerden birisi olmuştur. Yani, $U\in Z(E)$, $V\in Z(F)$ ve $T\in W^r_{L,M}(E,F)$ ise $VTU\in W^r_{L,M}(E,F)$ olur. Gerçekten, $x\in E_+$ olmak üzere

$$|VTUx|\le\|V\|_o|TUx|\le\|V\|_oT\left(\|U\|_ox\right)=\|V\|_o\|U\|_oTx$$

sağlanacağından

$$-\|V\|_o\|U\|_oT\le VTU\le\|V\|_o\|U\|_oT$$

olur. Bu eşitsizlik ile birlikte baskınlık özelliği düşünüldüğünde $VTU\in Z\left(W^r_{L,M}(E,F)\right)$ olduğu görülür. Böylece,

$$Z(E)\odot Z(F)\ni\phi\to\Phi\in Z\left(W^r_{L,M}(E,F)\right)$$

dönüşümü tanımlanabilir. Burada $U_k \in Z(E),\ V_k \in Z(F)$ olmak üzere $\phi = \sum_{k=1}^{n} U_k \otimes V_k \in Z(E) \odot Z(F^a)$ tensörüne karşılık gelen operatör

$$\Phi : W_{L,M}^r(E,F) \to W_{L,M}^r(E,F), \Phi(T) = \sum_{k=1}^{n} V_k T U_k$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Fakat bu dönüşüm elde etmek istediğimiz sonuçlar için yine uygun olmadığı görülmüştür. Burada karşılaşılan sorun ise yukarıda tanımlanan dönüşümün izometri olup olmaması ile ilgilidir. Bu doğrultuda bir örnek verilmiştir. Bu yüzden tanım ve görüntü uzaylarına ek koşulların getirilmesi zorunluluğu ortaya çıkmıştır. Doğası gereği L-zayıf kompakt operatörler F Banach örgüsünün sadece sıra sürekli kısmında değerler aldığından görüntü uzayı daha dar alınmış ve dönüşüm yeniden formüle edilmiştir. Aynı durum M-zayıf kompakt operatörler için de geçerli olduğundan, dual ilişki sonucu tanım uzayının duali üzerinde bir kısıtlamaya gidilmiştir. Benzer şekilde operatörlerin tanımlandığı Banach örgüleri üzerine sıra süreklilik şartı getirilerek farklı izometri dönüşümleri elde edilmiştir. Bu dönüşümlere ilişkin ispatlarda kullandığımız en önemli araç (Wickstead, 1976) 'ın verdiği aşağıdaki denklik olmuştur.

"E Banach örgüsünün sıra sürekli norma sahip olması için gerekli ve yeterli koşul

$\{T^* : T \in Z(E)\} = Z(E^*)$ eşitliğinin var olmasıdır"

Farkli gömme dönüşümlerinin yapılmasının nedeni yoğunluk ve yaklaşım sonuçlarının elde edilmesidir. Uygun olmayanlar için örnekler de verilmiştir. Bu sonuçlar için kullandığımız araç ise (Buskes e ark., 1986) tarafından verilen aşağıdaki teoremdir. E vektör örgüsünün bir alt kümesi A olmak üzere; $D(A)$, A dan alınan azalan ailelerin tüm infumumlarını, $I(A)$ ise A dan alınan artan ailelerin tüm supremumlarını ifade etmektedir.

Teorem 2.3.1. E Dedekind σ-tam veya topolojik sıra birime sahip Banach örgüsü, F Dedekind tam Banach örgüsü olsun. Eğer F üzerinde tanımlı sıra sürekli lineer fonksiyoneller F i noktalarına ayırıyorsa aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\begin{aligned}&\left\{W \in Z\left(L^r(E,F)\right) : 0 \le W \le I_{L^r(E,F)}\right\}\\ &\qquad = DIDI\left\{\Phi : \phi \in Z(E) \otimes Z(F) \text{ ve } 0 \le \phi \le I_E \otimes I_F\right\}\end{aligned}$$

Operatörlerimizin merkezleri için temsil sonuçlarının elde edilmesinden sonraki süreç ise herhangi bir Banach örgüsünün merkez operatörlerinin L-zayıf ve M-zayıf kompakt olanlarının incelenmesi olmuştur. Buna benzer bir çalışma önceki kısımda da belirttiğimiz Wickstead ın ispatladığı diskret elemanlar yardımıyla kompakt merkez operatörlerinin karakterizasyonudur. Genelde kompakt operatörler ile L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörler arasında bir ilişki yoktur. Fakat bir Banach örgüsünün sıra sürekli kısmının tüm atomları içerdiği ve L-zayıf kompakt operatörlerin bu kısımda değerler aldığı gerçeği, kompakt operatörlerin karakterizasyonun L-zayıf kompakt operatörler için de yapılabileceğini çağrıştırmıştır. Dual ilişkilerinden dolayı M-zayıf kompakt operatörler için de aynısı geçerli olmuştur. Sonuç olarak bu doğrultuda dikkate değer bir çalışma yapılarak merkez operatörleri için bu üç kompaktlık çeşidinin denk olduğu ispatlanmıştır.

Her ne kadar proje konumuz ile birebir ilişkili olmasa da, elde edilen sonuçların farklı versiyonlarının elde edilmesi adına operatör sınıflarımızın sıra yapısının incelenmeside mümkün olmuştur. Bu minvalde $W_L(E,F)$ ve $W_M(E,F)$ nin $L^r(E,F)$ içinde KB-uzayı ve band olmasına dair bazı sonuçlarda elde edilmiştir.

3. BULGULAR

Bu bölümde, sadelik olması açısından aksi belirtilmedikçe E, F, G Banach örgüleri; X, Y, Z Banach uzayları olarak kabul edilecektir.

3.1. L-zayıf Kompakt Operatörlerin Merkezi

$Z\left(L^r(E,F)\right)$ ve $Z\left(W^r(E,F)\right)$ üzerinde sıra birim norm ve $Z(E)\odot Z(F)$ üzerinde injektif norm tanımlı olmak üzere

$$Z(E)\odot Z(F)\ni\phi\to\Phi\in Z\left(L^r(E,F)\right)$$

ve

$$Z(E)\odot Z(F)\ni\phi\to\Phi\in Z\left(W^r(E,F)\right)$$

gömme dönüşümlerinin izometri oldukları (Wickstead, 2002) tarafından ispatlanmıştır. Ancak

$$Z(E)\odot Z(F)\ni\phi\to\Phi\in Z\left(W_L^r(E,F)\right)$$

Gömme dönüşümü izometri olmayabilir.

Örnek 3.1.1: $E\neq\{0\}$ ve $F=C([0,1])\oplus c_0$ ve $f\in C([0,1])$ ve $x\in c_0$ olmak üzere $V:F\to F, V(f,x)=(f,0)$ olsun. Bu durumda $F^a=\{0\}\oplus c_0$ olduğundan $V\big|_{F^a}=0$ ve $V\in Z(F)$ olur. Diğer taraftan $\phi=I_E\otimes V\in Z(E)\odot Z(F)$ tensörüne karşılık gelen operator $\Phi:T\to V\circ T\circ I_E=0$ operator için $\|\Phi\|_o=0$ elde edilir. Halbuki $\|\phi\|_\lambda\neq 0$ dır.

Dolayısıyla bazı kısıtlamalar getirmek gereklidir. Bu yüzden söz konusu operator sınıfları için gömme dönüşümü aynı alınmasına karşın daha küçük Banach örgüleri düşünülmüştür.

Teorem 3.1.2: $\phi\in Z(E)\odot Z\left(F^a\right)$ tensörü için $\Phi\in Z\left(W_L^r(E,F)\right)$ dir. Üstelik $\|\Phi\|_o=\|\phi\|_\lambda$ sağlanır ve gömme dönüşümü; aynı zamanda cebir ve sıra izomorfizmi de olan

$$Z(E)\otimes_\lambda Z\left(F^a\right)\to Z\left(W_L^r(E,F)\right)$$

izometrisine genişletilebilir.

Yoğunluk sonucunu vermeden once yukarıdaki teoreme benzer iki sonuç daha verilebilir. Fakat bunlar için gömme dönüşümü farklı şekilde tanımlanacaktır. Kabul edelimki $\phi=\sum_{k=1}^{n}U_k\otimes V_k\in Z\left(E^*\right)\odot Z\left(F^a\right)$ tensörü için

$$\Phi:W_L^r(E,F)\to W_L^r(E,F),\Phi(T)=\left(\sum_{k=1}^{n}V_kT^{**}U_k^*\Big|_E\right)$$

olsun.

Teorem 3.1.3: $\phi \in Z\left(E^*\right) \odot Z\left(F^a\right)$ tensörü için $\Phi \in Z\left(W_L^r\left(E,F\right)\right)$ dir. Üstelik $\|\Phi\|_o = \|\phi\|_\lambda$ sağlanır ve gömme dönüşümü; aynı zamanda cebir ve sıra izomorfizmi de olan

$$Z\left(E^*\right) \otimes_\lambda Z\left(F^a\right) \to Z\left(W_L^r\left(E,F\right)\right)$$

izometrisine genişletilebilir.

Verilen sonuçlardaki gömme dönüşümü yoğunluk sonuçlarını elde etmek için uygun değildir. Örneğin; *E* özdeş merkeze sahip sonsuz boyutlu Banach örgüsü ve $F = \mathbb{R}$ alınırsa, $Z\left(E\right) \odot Z\left(F^a\right)$ bir boyutlu olmasına karşın $Z\left(W_L^r\left(E,F\right)\right) = Z\left(E^*\right)$ sonsuz boyutlu olacaktır. Bu nedenle gömme dönüşümleri farklı bir biçimde tanımlanmalıdır.

E^* dual uzayı sıra sürekli ise $\left\{T^* : T \in Z\left(E^*\right)\right\} = Z\left(E^{**}\right)$ olduğu bilinmektedir. O halde E^* üzerine sıra süreklilik şartının konulmasıyla birlikte

$$Z\left(E^{**}\right) \otimes_\lambda Z\left(F^a\right) \to Z\left(W_L^r\left(E,F\right)\right)$$

yoğunluk sonuçları için daha uygun bir dönüşüm olacaktır. Kabul edelimki $\phi = \sum_{k=1}^{n} U_k \otimes V_k \in Z\left(E^{**}\right) \odot Z\left(F^a\right)$ tensörü için

$$\Phi : W_L^r\left(E,F\right) \to W_L^r\left(E,F\right), \Phi\left(T\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} V_k T^{**} U_k\Big|_E\right)$$

olsun.

Sonuç 3.1.4: E^* dual uzayı sıra sürekli norma sahip olsun. $\phi \in Z\left(E^{**}\right) \odot Z\left(F^a\right)$ tensörü için $\Phi \in Z\left(W_L^r\left(E,F\right)\right)$ dir. Üstelik $\|\Phi\|_o = \|\phi\|_\lambda$ sağlanır ve gömme dönüşümü; aynı zamanda cebir ve sıra izomorfizmi de olan

$$Z\left(E^{**}\right) \otimes_\lambda Z\left(F^a\right) \to Z\left(W_L^r\left(E,F\right)\right)$$

izometrisine genişletilebilir.

Sonuç 3.1.3 kullanılarak aşağıdaki yoğunluk sonucu elde edilir.

Teorem 3.1.5: E^* dual uzayı sıra sürekli norma sahip ise

$$\left\{W \in Z\left(W_L^r\left(E,F\right)\right) : 0 \le W \le I_{W_L^r\left(E,F\right)}\right\}$$
$$= DIDI\left\{\Phi : \phi \in Z\left(E^{**}\right) \odot Z\left(F^a\right) \text{ ve } 0 \le \phi \le \mathrm{I}_{E^{**}} \otimes I_{F^a}\right\}$$

eşitliği sağlanır. Bu durumda $\left\{\Phi : \phi \in Z\left(E^{**}\right) \odot Z\left(F^a\right)\right\}$ güçlü operatör topolojisine göre $Z\left(W_L^r\left(E,F\right)\right)$ içinde yoğundur.

3.2. M-zayıf Kompakt Operatörlerin Merkezi

L-zayıf kompakt operatörler sınıfına benzer olarak, $Z\left(W_M^r\left(E,F\right)\right)$ üzerinde sıra birim norm ve $Z(E)\odot Z(F)$ üzerinde injektif norm tanımlı olmak üzere

$$Z(E)\odot Z(F)\ni\phi\mapsto\Phi\in Z\left(W_M^r\left(E,F\right)\right)$$

gömme dönüşümü izometri olmayabilir.

Örnek 3.2.1: $F\neq\{0\}$ ve $F=L^1\left(\left[0,1\right]\right)\oplus\ell_1$ ve $f\in L^1\left(\left[0,1\right]\right)$ ve $x\in\ell_1$ olmak üzere $U:F\to F,U\left(f,x\right)=\left(f,0\right)$ olsun. Bu durumda $U^*\Big|_{\left(E^*\right)^a}=0$ sağlanırken $0\neq V\in Z\left(F\right)$ olur. Böylece $\phi=U\otimes I_F\in Z\left(E\right)\odot Z\left(F\right)$ tensörüne karşılık gelen operator $\Phi:T\to I_F\circ T\circ U=T\circ U$ olacaktır. Her bir M-zayıf kompakt T operatörü için adjoint operator L-zayıf kompakt olması sebebiyle $T^*\left(F^*\right)\subseteq\left(E^*\right)^a$ olur ki bu da $\Phi\left(T\right)^*=U^*\circ T^*=0$ olmasını gerektirir. Yani $\|\phi\|_\lambda\neq0$ olmasına karşılık $\|\Phi\|_o=0$ dır.

Diğer operator sınıfı için yapılanlara benzer olarak operatörlerin tanımlandığı uzayları küçültelim. Bu durumda gömme dönüşümlerini tekrar tanımlanması gerekir.

Kabul edelimki $\phi=\sum_{k=1}^{n}U_k\otimes V_k\in Z\left(\left(E^*\right)^a\right)\odot Z\left(F\right)$ tensörü için

$$\Phi:W_M^r\left(E,F\right)\to W_M^r\left(E,F\right),\Phi\left(T\right)=\left(\sum_{k=1}^{n}V_kT^{**}U_k^*\Big|_E\right)$$

olsun.

Teorem 3.2.2: $\phi\in Z\left(\left(E^*\right)^a\right)\odot Z\left(F\right)$ tensörü için $\Phi\in Z\left(W_M^r\left(E,F\right)\right)$ dir. Üstelik $\|\Phi\|_o=\|\phi\|_\lambda$ sağlanır ve gömme dönüşümü; aynı zamanda cebir ve sıra izomorfizmi de olan

$$Z\left(\left(E^*\right)^a\right)\otimes_\lambda Z\left(F\right)\mapsto Z\left(W_M^r\left(E,F\right)\right)$$

izometrisine genişletilebilir.

M-zayıf kompakt operatörlerin merkezleri için yoğunluk sonuçlarının elde edilebilmesi için iyi bilinen ${}^*Z\left(E^*\right)=\left\{T^*:T\in Z\left(E^*\right)\right\}\subset Z\left(E^{**}\right)$ eşitliği kullanılmıştır. Fakat gömme dönüşümü yukarıdaki teoremden farklı olarak

$${}^*Z\left(\left(E^*\right)^a\right)\odot Z\left(F\right)\mapsto Z\left(W_M^r\left(E,F\right)\right)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu gömme dönüşümü $\phi=\sum_{k=1}^{n}U_k\otimes V_k\in{}^*Z\left(\left(E^*\right)^a\right)\odot Z\left(F\right)$ tensörünü

$$\Phi: W_M^r(E,F) \to W_M^r(E,F), \Phi(T) = \left(\sum_{k=1}^{n} V_k T^{**} U_k \big|_E \right)$$

operatörüne dönüştürmektedir. Bu durumda aşağıdaki sonuç Teorem 3.2.1 den hemen elde edilir.

Sonuç 3.2.3: $\phi \in {}^*Z\left(\left(E^*\right)^a\right) \odot Z(F)$ tensörü için $\Phi \in Z\left(W_M^r(E,F)\right)$ dir. Üstelik $\|\Phi\|_o = \|\phi\|_\lambda$ sağlanır ve gömme dönüşümü; aynı zamanda cebir ve sıra izomorfizmi de olan

$${}^*Z\left(\left(E^*\right)^a\right) \otimes_\lambda Z(F) \mapsto Z\left(W_M^r(E,F)\right)$$

izometrisine genişletilebilir.

Sonuç 3.2.2 kullanılarak aşağıdaki yoğunluk sonucu elde edilir.

Teorem 3.2.4: F sıra sürekli norma sahip ise

$$\left\{ W \in Z\left(W_M^r(E,F)\right) : 0 \le W \le I_{W_M^r(E,F)} \right\}$$
$$= DIDI \left\{ \Phi : \phi \in {}^*Z\left(\left(E^*\right)^a\right) \odot Z(F) \text{ ve } 0 \le \phi \le \mathrm{I}^*_{\left(E^*\right)^a} \otimes I_F \right\}$$

eşitliği sağlanır. Bu durumda $\left\{ \Phi : \phi \in {}^*Z\left(\left(E^*\right)^a\right) \odot Z(F) \right\}$ güçlü operatör topolojisine göre $Z\left(W_M^r(E,F)\right)$ içinde yoğundur.

3.3. Merkezil L-zayıf ve M-zayıf Kompakt Operatörler

E Banach örgüsü quasi-interior nokta e yi içeriyorsa bir $C^\infty(K)$ uzayının ideali olacak şekilde bir temsili vardır (Davies, 1969). Üstelik bu temsilde e noktası K üzerinde sabit 1 değerleri alan 1_K fonksiyonu ile temsil edilebilir. Bu temsilde K kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere

$$C^\infty(K) = \left\{ f : K \to [-\infty, \infty] : f, \text{ K nın açık ve yoğun bir alt kümesinde sonlu} \right\}$$

şeklinde tanımlıdır. Diğer taraftan (Wickstead, 1976) merkezil kompakt operatörleri temsil etmiş ve bir merkezil operatörün kompakt olması için gerek ve yeter şartın E^+ nın tüm atomlarının gerdiği kapalı uzayda değer alması olduğunu ispatlamıştır.

Bilindiği üzere kompakt operatörler, L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörler genelde farklı sınıflardır. Fakat proje çalışmasının konusu olan operator sınıflarının kompakt operatörler için yapılan temsillere benzer temsillerin olabileceği düşünüldüğünde aşağıdaki önemli sonuç elde edilmiştir.

Teorem 3.3.1: $T \in Z(E)$ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şart L-zayıf kompakt (veya M-zayıf kompakt) olmasıdır. Yani

$$Z(E)\cap K(E)=Z(E)\cap W_L(E)=Z(E)\cap W_M(E).$$

3.4. L-zayıf ve M-zayıf Kompakt Operatörlerin Bazı Özellikleri

Genel anlamda aşağıdaki kapsamalar doğrudur.

$$W_{L,M}^r(E,F)\subseteq W_{L,M}(E,F)\cap L^r(E,F)\subseteq W_{L,M}(E,F)$$

Üztelik kapsamaların öz olabildiği örnekler de verilebilir. Aşağıdaki özellik ise kapsamaların eşitliğine dönüştüğü bir durumu belirtir.

Önerme 3.4.1: $T\in W_L(E,F)$ için $|T|$ modülü var ve $|T|\in W_L(E,F)$ olması için gerek ve yeterli koşul aşağıdaki eşitliklerin var olmasıdır.

$$W_L^r(E,F)=W_L(E,F)\cap L^r(E,F)=W_L(E,F).$$

Bu önermenin benzeri M-zayıf kompakt operatörler için ekstra şart ile mümkündür.

Önerme 3.4.2: F sıra tam ve $T\in W_L(E,F)$ olsun. Bu durumda $|T|$ modülü var ve $|T|\in W_M(E,F)$ olması için gerek ve yeterli koşul aşağıdaki eşitliklerin var olmasıdır.

$$W_M^r(E,F)=W_M(E,F)\cap L^r(E,F)=W_M(E,F).$$

Sonuç 3.4.3: Aşağıdaki önermelerden birisi doğru ise $W_L^r(E,F)$ Dedekind vektör örgüsüdür ve $W_L^r(E,F)=W_L(E,F)\cap L^r(E,F)=W_L(E,F)$ eşitliği sağlanır.

a. E bir AL-uzayına örgü izomorftur.
b. F bir AM-uzaydır.

Sonuç 3.4.4: Aşağıdaki önermelerden birisi doğru ise $W_M^r(E,F)$ Dedekind vektör örgüsüdür ve $W_M^r(E,F)=W_M(E,F)\cap L^r(E,F)=W_M(E,F)$ eşitliği sağlanır.

a. F güçlü birime sahip Dedekind tamdır.
b. E bir AL-uzaydır.

Önceki çalışmalarda ispatlandığı üzere F Dedekind tam olduğunda $W_L^r(E,F)$ ve $W_M^r(E,F)$ $L^r(E,F)$ içinde idealdirler. Fakat band olmak zorunda değildir. Örneğin; $W_{L,M}^r(c_0)$ da alınan $T_n:c_0\to c_0, T_n(\lambda_k)=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n,0,0,..)$ operator dizisi için $T_n\uparrow Id(c_0)$ sağlanmasına karşın $Id(c_0)\notin W_{L,M}^r(c_0)$ olur.

Teorem 3.4.5: E güçlü birime sahip AM-uzayı ve F sıra süreklinorma sahip ise $W_L^r(E,F)$ ve $W_M^r(E,F)$, $L^r(E,F)$ içinde banddir.

Bu operator sınıflarının ne zaman KB-uzayı olduklarını ispatlamak için aşağıdaki lemma kullanılmıştır.

Lemma 3.4.6: $(E^*)^a\neq\{0\}=F^a$ ise aşağıdaki önermeler sağlanır.

a. E^*, $W_L^r(E,F)$ içine pozitif şekilde gömülebilir.

b. E^* sıra sürekli norma sahip ise E^*, $W_M^r(E,F)$ içine pozitif şekilde gömülebilir.

c. F, $W_M^r(E,F)$ içine pozitif şekilde gömülebilir.

d. F sıra sürekli norma sahip ise E^*, $W_L^r(E,F)$ içine pozitif şekilde gömülebilir.

Teorem 3.4.7: $(E^*)^a \neq \{0\} = F^a$ ise aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

a. E^* ve F, KB-uzayları ve $W_L^r(E,F)$, $L^r(E,F)$ içinde banddir.

b. F sıra sürekli norma sahip ve $W_L^r(E,F)$ regüler norma göre KB-uzayıdır.

Teorem 3.4.8: $(E^*)^a \neq \{0\} = F^a$ ise aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

a. F KB-uzayı ve $W_M^r(E,F)$, $L^r(E,F)$ içinde banddir.

b. $W_M^r(E,F)$ regüler norma göre KB-uzayıdır.

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Çalışma kapsamında, Banach örgüleri arasında tanımlı zayıf kompakt operatörlerin alt sınıfları olan L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörler çalışılmıştır. Proje, ele alınan operatör sınıfları ile ideal merkez kavramı arasındaki ilişkileri daha iyi anlama noktasında başarılı olmuştur. Hedefleri tek tek incelediğimizde de, hedeflenen amaçların hepsi için bir takım sonuçların elde edildiği görülür. Aslında, öne çıkan en önemli hedef, L-zayıf veya M-zayıf kompakt operatör sınıflarının sıralı vektör uzayı olduğu durumlarda merkezleri ile ilgili birtakım izometrik gömülme sonuçlarının ve yaklaşım durumlarının ifade edilmesidir.

Bu doğrultuda, regüler operatörler, kompakt ve zayıf kompakt operatörler için (Wickstead, 2002) 'de verilen $Z(E)\odot Z(F)$ tensör çarpımının $Z\left(L^r\left(E,F\right)\right)$ içine izometrik olarak gömülme sonuçları L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörler için elde edilmiştir. Tabiki bu sonuçlar operatörlerimizin özelliklerine göre tanım ve görüntü uzayları üzerine kısıtlamalar getirilerek elde edilmiştir. Bazı durumlarda ise hiç kısıtlamaya gidilmeksizin izometrik sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca yoğunluk sonuçlarının elde edilmesi için farklı gömme dönüşümleri tanımlanmıştır. Diğer dönüşümlerin yoğunluk sonuçları için neden uygun olmadıklarına dair örnekler de verilmiştir.

İncelenen konulardan bir diğeri de herhangi bir Banach örgüsünün merkezinde bulunan L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörlerdir. Merkezde bulunan kompakt operatörler hakkında literatürde bulunan karakterizasyona benzer bir karakterizasyon çalıştığımız operatörler için de yapılmıştır. Bu karakterizasyona baktığımızda ise dikkate değer bir sonuç elde edilmiştir. Bilindiği üzere kompakt, L-zayıf kompakt ve M-zayıf kompakt operatörler genelde birbirinden bağımsız sınıflardır. Fakat merkez operatörler için bu üç kompaktlık çeşidinin denk olduğu gözlenmiştir.

Ulaşılan bulgular sonucu hem L-zayıf ve M-zayıf kompakt operatörler için literatürdeki bir boşluk doldurulmuş hem de çalışmalarımızı daha ilerletmek adına fayda sağlanmıştır. Elde edilen sonuçlar makale formatına dönüştürülerek indekste bulunan bir dergiye gönderilmiştir.

Üstelik, çalıştığımız operatör sınıflarını daha iyi anlayabilmek adına bu operatör sınıflarının sıra yapısı hakkında da bazı incelemeler yapılmıştır. Sonuç olarak operatör sınıflarımızın regular operatörler içinde band olma ve KB-uzay olma durumlarına dair bir takım bulgular elde edilmiştir. Fakat bu sonuçlar geliştirilmeye ihtiyaç duyduğundan, proje bir anlamda başka çalışmalara da zemin hazırlamıştır.Dolayısıyla bu proje kapsamında yapılan araştırmalar ile hedeflediğimiz amaçların elde edilmesinin yanı sıra farklı çalışma alanları için önemli veriler elde edilmiştir. Bu sayede projenin özgün değeri başlangıç aşamasında hedeflenenden daha üst bir seviyeye taşınmıştır.

5. KAYNAKLAR

ABRAMOVICH, Y.A., ve ALIPRANTIS, C.D., An Invitation to Operator Theory. Graduate Studies in Mathematics, vol 50, Amer. Math. Soc., Providence, (2002), 1-530.

ALIPRANTIS, C.D. ve BURKINSHAW, O., Locally Solid Riesz Spaces, vol. 76, Academic Pres, New-York-London, (1978), 1-210.

ALIPRANTIS, C.D., BURKINSHAW, O., The components of a positive operator, Math. Z. **184,** 245–257, (1983).

ALIPRANTIS, C.D., BURKINSHAW, O., Positive Operators, Academic press, London, (1985), 1-367.

BAYRAM, E. ve WNUK, W., Some Algebra Ideals Of Regular Operators, Commentationes Mathematicae, 53-2, 227-233, (2013).

BAYRAM, E. ve WICKSTEAD A.W., Banach lattices of L-weakly and M-weakly compact operators, Banach lattices of L- weakly and M-weakly compact Operators, Arch. Math. (Basel) 108, no. 3, 293-299, (2017).

BUCK, R.C., Multiplication operators, Pacific J. Math. 11, 95–104, (1961).

BUSKES, G.J.H.M., DODDS, P.G., de PAGTER, B., SCHEP, A.R., Up-down theorems in the centre of *Lb*(*E,F*), Indag. Math. 49, 1–9, (1986).

CHEN, Z.L. ve WICKSTEAD, A. W., Vector lattices of weakly compact operators on Banach lattices, Trans. Amer. Math. Soc., 352(1), 397-412, (1999a).

CHEN, Z.L. ve WICKSTEAD, A. W., Equalities involving the modulus of an operator, Math. Proc. R. Ir. Acad., 99A, no. 1, 85-92, (1999b).

CHEN, Z.L. ve WICKSTEAD, A. W., L-weakly and M-weakly compact operators, Indag. Math. (N.S.) 10, no. 3, 321-336, (1999c).

CHEN, Z.L. ve WICKSTEAD, A. W., The order properties of r-compact operators on Banach lattices, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), 23, no. 3, 457-466, (2007).

DAVIES, E.B., The Choquet theory and representation of ordered Banach spaces, Ill. J. Math., 13, 176-187, (1969).

JEFFERIES, B. ve OKADA, S., An operator bound related to regular operators, Arch. Math. **66,** 219–227, (1996).

LINDENSTRAUSS, J. ve TZAFRIRI, L., Classical Banach Spaces II (Function Spaces), vol. 97, Springer-Verlag, Berlin and New York, (1979), 1-243.

LOMONOSOV, V.I., Invariant subspaces of the family of operators that commute with a completely continuous operator, Funktsional. Anal. i Prilozhen, 7(3), 55-56, (1973).

MEYER-NIEBERG, P., Nieberg, Über klassen schwach kompakter operatoren in Banachverbänden, Math. Z., 138: 145-159, (1974).

MEYER-NIEBERG, P., Banach Lattices, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, (1991), 1-395.

dePAGTER, B., The components of a positive operator, Indag. Math. 46, 229–241, (1983).

deRUGY, G., La structure id´eale des M-espaces, J. Math. pures et appl., 51, 331–373, (1972)

SCHAEFER, H.H., Banach Lattices and Positive Operators, Springer-Verlag, Berlin, New york, (1974), 1-376.

TONYALI, C. ve BAYRAM, E., Invariant Subspace Problem for Positive L-weakly and M-weakly Compact Operators, Turkish Journal of Mathematics, 35, 267-273, (2011).

TONYALI, C. ve BAYRAM, E., Some Compactness Properties of L-weakly and M-weakly Compact Operators, Acta Mathematica Hungarica, 135 (1-2), 1-7, (2012).

TONYALI, C. ve BAYRAM, E., On The Invariant Subspace Problem, IJPAM, 89, 3, 295-303, (2013).

WICKSTEAD, A.W., The ideal centre of a Banach lattice. Proc. R. Ir.Acad. 76A, 15-23, (1976).

WICKSTEAD, A.W., Extensions of Orthomorphisms, Austral. Math. Soc. (Series A) 29, 87-98, (1980).

WICKSTEAD, A.W., Wickstead A.W., The centre of spaces of regular operators, Math. Z. 241, 165--179 (2002).

WICKSTEAD, A.W., AL-spaces and AM-spaces of operators, Positivity 4 (2000), no. 3, (1998).

WILS, W., The ideal centre of partially ordered vector spaces, Acta Math. 127, 41–77, (1971)

ZAANEN, A.C., Examples of Orthomorphisms, Journal of Approximation Theory, 13, 192 -204 (1975).

ZAANEN, A.C., Riesz Spaces II, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, (1983), 1-720.

TEŞEKKÜRLER

Bu çalışmanın gerçekleşmesini sağlayan Namık Kemal Üniversitesi Araştırma Projeleri Yönetim Birimi’ne (Proje no: NKUBAP.01.GA.17.108) ve projenin değişik safhalarında verdiği destekten ötürü Doç.Dr Deniz ŞİRİN'e (Namık Kemal Üniversitesi) teşekkürlerimi sunarım.