

УДК 519.853

УСЛОВИЯ РЕГУЛЯРНОСТИ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Л. И. МИНЧЕНКО, А. Е. ЛЕЩЕВ

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
П. Бровка 6, Минск, 220013, Беларусь

Поступила в редакцию 22 января 2014

Условия регулярности играют важную роль в задачах нелинейного программирования, поскольку гарантируют выполнение необходимых условий оптимальности Куна-Таккера. Среди условий регулярности наиболее известным и широко применяемым является условие Мангасаряна-Фромовица. В то же время, несмотря на сравнительную эффективность условий Мангасаряна-Фромовица, существуют достаточно широкие классы задач оптимизации, в которых это условие не выполняется, однако для которых можно указать более слабые условия регулярности, гарантирующие справедливость необходимых условий Куна-Таккера. Целью данной статьи является исследование задач оптимизации, удовлетворяющих ослабленным условиям регулярности.

Ключевые слова: оптимизация, нелинейное программирование, условия регулярности.

Введение

Пусть h_i $i=1, \dots, p$ – непрерывно дифференцируемые функции из R^m в R . Введем непустое множество допустимых точек

$C = \{y \in R^m \mid h_i(y) \leq 0 \quad i \in I, \quad h_i(y) = 0 \quad i \in I_0\}$, где $I = \{1, \dots, s\}$, $I_0 = \{s+1, \dots, p\}$ или $I_0 = \emptyset$, и рассмотрим задачу *NLP* минимизации непрерывно дифференцируемой целевой функции $f(y)$ на множестве C .

Пусть $I(y) = \{i \in I \mid h_i(y) = 0\}$ – множество индексов активных в точке $y \in C$ ограничений типа неравенства. Для задачи *NLP* определим в точке $y \in C$ множество множителей Лагранжа

$$\Lambda(y) = \{\lambda \in R^p \mid \nabla f(y) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(y) = 0, \lambda_i \geq 0 \quad i \in I(y), \lambda_i = 0 \quad i \in I \setminus I(y)\}.$$

Известно, что основным необходимым условием оптимальности для задачи *NLP* является условие Куна-Таккера: если точка $y \in C$ является локальным решением задачи *NLP*, то в данной точке существуют множители Лагранжа, то есть $\Lambda(y) \neq \emptyset$. Проверка выполнения условия Куна-Таккера позволяет исключить из рассмотрения неоптимальные допустимые точки. Ключевое значение условия Куна-Таккера заключается также в том обстоятельстве, что на его основе строятся многочисленные вычислительные алгоритмы для нахождения оптимальных точек. Однако условие Куна-Таккера справедливо только при выполнении некоторых дополнительных требований к структуре ограничений множества допустимых точек C , так называемых условий регулярности (constraint qualifications or regularity conditions). Таким образом, условие Куна-Таккера теряет свой смысл в исследовании задачи оптимизации *NLP*, если в данной задаче не выполнены условия регулярности.

Наиболее общие условия регулярности формулируются в терминах касательных конусов к множеству допустимых точек. Введем касательный и контингентный конусы

(называемые также в литературе соответственно нижним и верхним касательными конусами) к множеству C в точке $y \in C$:

$$T_C(y) = \{\bar{y} \in R^m \mid \exists \text{ число } t_0 > 0 \text{ и функция } o(t) \text{ такие,}$$

$$\text{что } o(t)/t \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0 \text{ и } y + t\bar{y} + o(t) \in C \quad \forall t \in [0, t_0]\},$$

$$\hat{T}_C(y) = \{\bar{y} \in R^m \mid \exists t_k \downarrow 0 \text{ и } \bar{y}_k \rightarrow \bar{y} \text{ такие, что } y + t_k \bar{y}_k \in C \quad k=1, 2, \dots\},$$

и касательный конус Кларка

$$T_C^{Cl}(y) = \{\bar{y} \in R^m \mid \forall t_k \downarrow 0 \text{ и } \forall y^k \xrightarrow{c} y$$

$$\exists \text{ последовательность } \bar{y}^k \rightarrow \bar{y} \text{ такая, что } y^k + t_k \bar{y}^k \in C \quad \forall k=1, 2, \dots\}.$$

В точке $y \in C$ также построим множество

$$\Gamma_C(y) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle \leq 0 \quad i \in I(y), \quad \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0, \quad i \in I_0\},$$

которое будем называть линейризованным касательным конусом к множеству C в данной точке. Известно, что все введенные выше касательные конусы замкнуты и $T_C^{Cl}(y^0) \subset T_C(y^0) \subset \hat{T}_C(y^0) \subset \Gamma_C(y^0)$.

Говорят, что в точке $y \in C$ выполнено условие регулярности Абади (Abadie), если $\hat{T}_C(y) = \Gamma_C(y)$. Хотя условие Абади имеет весьма общий характер и накладывает на ограничения множества C сравнительно нежесткие требования, это условие практически не проверяемо. Одним из наиболее известных простых в проверке условий регулярности является условие линейной независимости в точке $y \in C$ градиентов $\nabla h_i(y) \quad i \in I(y) \cup I_0$ всех активных в этой точке ограничений (будем обозначать его как LICQ). К достоинствам данного условия регулярности относится также простота множества множителей Лагранжа в случае его выполнения в точке y , именно $\Lambda(y) = \{\lambda\}$. Недостатком условия LICQ является его жесткий характер, данное условие может не выполняться уже в достаточно простых задачах. Более общий характер носит условие регулярности Мангасаряна-Фромовица (MFCQ), выполнение которого в точке $y \in C$ требует, чтобы в этой точке система векторов $\nabla h_i(y) \quad i \in I_0$ была линейно независимой и существовал вектор \bar{y}^0 такой, что $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}^0 \rangle = 0, \quad i \in I_0,$
 $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}^0 \rangle < 0, \quad i \in I(y)$.

При выполнении условия MFCQ в точке $y \in C$ множество $\Lambda(y)$ ограничено и замкнуто. Введем множество вырожденных множителей Лагранжа в точке $y \in C$:

$$\Lambda_0(y) = \{\lambda \in R^p \mid \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(y) = 0, \quad \lambda_i \geq 0 \quad i \in I(y), \quad \lambda_i = 0 \quad i \in I \setminus I(y)\}.$$

Известно, что условие регулярности Мангасаряна-Фромовица (MFCQ) в точке $y \in C$ равносильно требованию $\Lambda_0(y) = \{0\}$. Несмотря на широкую общность условия MFCQ и то, что оно достаточно удобно для проверки, существуют целые классы задач нелинейного программирования, в которых это условие не выполняется и для которых требуются условия регулярности более слабые в отношении жесткости требований к ограничениям задачи. Дальнейшая цель данной статьи – предложить слабые условия регулярности, обобщающие условие MFCQ, и исследовать взаимосвязь данных условий.

Ранговые условия регулярности

В литературе известны условия регулярности независимые от MFCQ и имеющие природу отличную от MFCQ. В частности, к ним относятся условие постоянного ранга (CRCQ) и обобщающее его условие ослабленного постоянного ранга (RCRCQ) [1–4]. Говорят, что в точке $y^0 \in C$ выполняется условие регулярности постоянного ранга (CRCQ), если для любого

множества индексов $J = K \cup S$, где $K \subset I(y^0)$, $S \subset I_0$, система векторов $\{\nabla h_i(y), i \in J\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности этой точки.

Впервые условие регулярности постоянного ранга CRCQ было предложено при изучении дифференцируемости по направлениям функции оптимального значения в задаче нелинейного программирования с возмущениями параметров. В дальнейшем это условие использовалось в исследовании задач с равновесными ограничениями (equilibrium constraints), двухуровневой оптимизации (bilevel optimization), теории вариационных неравенств, необходимых условий второго порядка. Легко видеть, что данное условие, как и MFCQ, является обобщением условия регулярности LICQ. В то же время, примеры показывают, что условия CRCQ и MFCQ независимы друг от друга, то есть выполнение одного из них не влечет выполнение другого.

В работах [1–4] получено ослабленное условие постоянного ранга (RCRCQ), которое слабее в своих требованиях по сравнению с CRCQ и существенно легче для проверки. Говорят, что в точке $y^0 \in C$ выполняется ослабленное условие постоянного ранга (RCRCQ), если для любого множества индексов $K \subset I(y^0)$ система векторов $\{\nabla h_i(y), i \in K \cup I_0\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки y^0 .

Таким образом, в отличие от CRCQ в условии RCRCQ рассматривается существенно меньшее множество различных систем градиентов $\nabla h_i(y)$. Отметим, что на RCRCQ переносится справедливость основных приложений CRCQ. В частности, при выполнении условия RCRCQ в работе [4] были доказаны теоремы о дифференцируемости по направлениям функции оптимального значения в задаче с возмущениями параметров и получены сильные достаточные условия оптимальности второго порядка. Большой интерес в свое время вызвала работа L. Qi и Z. Wei, в которой для доказательства сходимости численных алгоритмов оптимизации было введено условие постоянной положительно-линейной зависимости (CPLD), обобщающее одновременно условие регулярности Мангасаряна-Фромовица и условие постоянного ранга.

Говорят, что допустимая точка y^0 удовлетворяет условию CPLD, если она удовлетворяет условию регулярности Мангасаряна-Фромовица или, в противном случае, для всех подмножеств индексов $J_1 \subset I(y^0)$, $J_2 \subset I_0$, и чисел λ_i $i \in J_1 \cup J_2$ таких, что

$$\lambda_i \geq 0 \quad i \in J_1 \quad \text{и} \quad \sum_{i \in J_1 \cup J_2} \lambda_i \nabla h_i(y^0) = 0, \quad \sum_{i \in J_1} \lambda_i + \sum_{i \in J_2} |\lambda_i| > 0,$$

система векторов $\nabla h_i(y)$ $i \in J_1 \cup J_2$ является линейно зависимой при всех y из некоторой окрестности y^0 .

L. Qi и Z. Wei выдвинули предположение, что CPLD должно быть условием регулярности, т.е. гарантировать существование множителей Лагранжа в точках локального минимума задачи NLP. Позже R. Andreani, J. M. Martinez и M. Schuverdt доказали справедливость данной гипотезы. Различные аспекты приложений RCRCQ и CPLD и их связь с другими условиями изучались в [5–9].

Хотя условие CPLD обладает широкой общностью, его выполнение не влечет за собой выполнение RCRCQ и возникает вопрос о его соотношении с известными ранее условиями регулярности ослабленного постоянного ранга. Позже на основе развитого в [3–4] метода было получено новое условие, названное ослабленным CPLD (или RCPLD). Однако в работе [10] было предложено и обосновано новое условие регулярности, названное ослабленным (обобщенным) условием Мангасаряна-Фромовица (RMFCQ). RMFCQ представляет собой условие не только более слабое по отношению к MFCQ, но и относительно CRCQ и RCRCQ, а также CPLD и RCPLD. Условие RMFCQ также обладает значительным преимуществом в практическом применении по сравнению с CRCQ, RCRCQ, CPLD и RCPLD, сохраняя при этом их основные достоинства, к которым, в первую очередь, относится хорошая обусловленность

(сохранение условия регулярности и в некоторой окрестности исследуемой точки) и наличие эффективных оценок расстояния до множества допустимых точек.

Отметим, что несколько позже условие регулярности, RMFCQ было независимо введено в работе [11] под названием CRSC (constant rank of the subspace component condition). Следуя [10], дадим определение условия RMFCQ и исследуем некоторые свойства точек, в которых RMFCQ выполняется.

Представим множество индексов $I(y)$ в точке $y \in C$ в виде разбиения на два множества $I(y) = I^a(y) \cup I^+(y)$, где $I^a(y) \cap I^+(y) = \emptyset$ и множество $I^a(y)$ состоит из тех и только тех индексов $i \in I(y)$, для которых $\langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0$ для всех $\bar{y} \in \Gamma_C(y)$, а $I^+(y) = I(y) \setminus I^a(y)$.

Определение 1. Будем говорить, что в точке $y^0 \in C$ выполнено ослабленное условие регулярности Мангасаряна-Фромоваца RMFCQ, если система векторов $\{\nabla h_i(y), i \in I_0 \cup I^a(y)\}$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности этой точки. Непосредственно из определения индексного множества $I^a(y)$ вытекает следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $y^0 \in C$. Тогда существует вектор \bar{y}^0 , такой, что $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y}^0 \rangle = 0$ $i \in I_0 \cup I^a(y^0)$, $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y}^0 \rangle < 0$ $i \in I^+(y^0)$.

Доказательство. В случае если $I^+(y) = \emptyset$, оно будет выполнено тривиально. Пусть $I^+(y) \neq \emptyset$. Пусть $i \in I^+(y)$. Тогда $\langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle \leq 0$ для всех $\bar{y} \in \Gamma_C(y)$. С другой стороны $i \notin I^a(y)$, следовательно, найдется вектор $\bar{y}^i \in \Gamma_C(y)$, такой, что $\langle \nabla h_i(y), \bar{y}^i \rangle < 0$. Построим вектор $\bar{y}^0 = \sum_{i \in I^+(y)} t_i \bar{y}^i$, где все $t_i > 0$. Тогда $\bar{y}^0 \in \Gamma_C(y)$, и для любого $k \in I^+(y)$.

$$\text{Получим } \langle \nabla h_k(y), \bar{y}^0 \rangle = \sum_{i \in I^+(y)} t_i \langle \nabla h_k(y), \bar{y}^i \rangle = \sum_{i \in I^+(y) \setminus k} t_i \langle \nabla h_k(y), \bar{y}^i \rangle + t_k \langle \nabla h_k(y), \bar{y}^k \rangle < 0.$$

Из леммы 1 следует, что для любой точки $y^0 \in C$ имеет место

$$\begin{aligned} ri\Gamma_C(y^0) &= \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \ i \in I_0 \cup I^a(y^0), \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle < 0 \ i \in I^+(y^0)\}, \\ aff\Gamma_C(y^0) &= \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \ i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}. \end{aligned}$$

Будем называть ограничения с индексами $i \in I^a(y)$ существенно активными для множества $\Gamma_C(y)$.

Следующая лемма получается незначительной модификацией теоремы 17.7 [12].

Лемма 2 . Пусть $y \in C$. Для того чтобы $i \in I^a(y)$ достаточно, чтобы существовал вектор $\lambda \in \Lambda_0(y)$ такой, что $\lambda_i > 0$. Если $I^a(y) \neq \emptyset$, то данное условие является и необходимым.

Пусть $y^0 \in C$. Рассмотрим индексное множество $I^\#$ такое, что $I^a(y^0) \subset I^\# \subset I(y^0)$. Введем множество $C_\# = \{y \in R^m \mid h_i(y) \leq 0 \ i \in I^\#, h_i(y) = 0 \ i \in I_0\}$. И его линейаризованный касательный конус в точке $y^0 \in C_\#$ $\Gamma_{C_\#}(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle \leq 0 \ i \in I^\#, \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, \ i \in I_0\}$.

Обозначим через $I^{a\#}(y^0)$ множество индексов всех существенно активных ограничений для $\Gamma_{C_\#}(y^0)$. Иными словами, пусть $I^{a\#}(y^0) = \{i \in I^\# \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \ \forall \bar{y} \in \Gamma_{C_\#}(y^0)\}$.

Лемма 3. Пусть $I^a(y^0) \subset I^\# \subset I(y^0)$. Тогда $I^a(y^0) = I^{a\#}(y^0)$.

Доказательство. Покажем, что $I^a(y^0) \subset I^{a\#}(y^0)$. Действительно, если $I^a(y^0) = \emptyset$, то данное включение выполняется. Пусть $I^a(y^0) \neq \emptyset$ и $i \in I^a(y^0)$. Тогда по лемме 2 существует вектор $\lambda \in \Lambda_0(y^0)$ такой, что $\lambda_i > 0$, при этом $\lambda_j = 0$ как для всех $j \in I \setminus I(y^0)$, так и для $j \in I(y^0) \setminus I^a(y^0)$ (иначе в силу леммы 2 эти ограничения были бы тоже существенно активными для $\Gamma_C(y^0)$, что невозможно в виду определения множества $I^a(y^0)$). Тогда существует вектор $\lambda \in \Lambda_0^\#(y^0) = \{\lambda \in \mathbb{R}^p \mid \sum_{j \in I_0 \cup I^\#} \lambda_j \nabla h_j(y) = 0, \lambda_j \geq 0 \ j \in I^\#\}$ такой, что $\lambda_i > 0$. В таком случае по лемме 2 $i \in I^{a\#}(y^0)$. Таким образом, $I^a(y^0) \subset I^{a\#}(y^0)$. Обратно, поскольку $\Gamma_{C^\#}(y^0) \supset \Gamma_C(y^0)$, то все существенно активные ограничения для $\Gamma_{C^\#}(y^0)$ останутся существенно активными и для $\Gamma_C(y^0)$. Следовательно, $I^a(y^0) \supset I^{a\#}(y^0)$.

Лемма 4 ([10,11]). Если в точке $y^0 \in C$ выполнено условие *RMFCQ*, то

- 1) $T_C(y^0) = \Gamma_C(y^0)$;
- 2) условие *RMFCQ* выполняется и в некоторой окрестности этой точки на C ;
- 3) существует окрестность $V(y^0)$ точки y^0 такая, что $h_i(y) = 0$ при $i \in I^a(y^0)$ для всех точек $y \in C \cap V(y^0)$.

Лемма 5. Пусть условие *RMFCQ* выполнено в точке $y^0 \in C$. Тогда для всех $y \in C$ из некоторой окрестности y^0 справедливо включение $I^a(y^0) \subset I^a(y)$.

Доказательство. Пусть в точке $y^0 \in C$ выполнено условие *RMFCQ*. Тогда в силу леммы 4 оно выполнено и для любой точки $y \in C$ из достаточно малой окрестности точки y^0 , причем $T_C(y) = \Gamma_C(y)$. Принимая во внимание определение касательного конуса $T_C(y)$, получим $y + t\bar{y} + o(t) \in C$ при достаточно малых $t > 0$ для любого $\bar{y} \in \Gamma_C(y)$. Отсюда по лемме 4 $h_i(y + t\bar{y} + o(t)) = 0$, $h_i(y) = 0$ и, следовательно, $\langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle = 0$ при всех $i \in I^a(y^0)$. Последнее означает, что $I^a(y^0) \cap I(y) \subset I^a(y)$. Но поскольку $h_i(y) = 0$ для всех $i \in I^a(y^0)$, то $I^a(y^0) \subset I(y)$ и, следовательно, $I^a(y^0) \subset I(y)$, что означает $I^a(y^0) \subset I^a(y)$.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим многозначное отображение $G: x \mapsto G(x)$, ставящее в соответствие каждому $x \in X$ множество $G(x) \subset \mathbb{R}^m$. Следуя [13], определим топологические нижний и верхний пределы многозначного отображения G .

Нижним топологическим пределом многозначного отображения G в точке $x^0 \in clX$ на множестве X называется множество

$$\liminf_{x \rightarrow x^0} G(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \forall x^k \rightarrow x^0, x^k \in X, \text{ найдется}$$

последовательность $y^k \in G(x^k) \ k = 1, 2, \dots$ такая, что $y^k \rightarrow y\}$.

Верхним топологическим пределом многозначного отображения G в точке $x^0 \in clX$ на множестве X называется множество

$$\limsup_{x \rightarrow x^0} G(x) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \text{существуют последовательность } x^k \rightarrow x^0, x^k \in X,$$

и последовательность $y^k \in G(x^k) \ k = 1, 2, \dots$ такая, что $y^k \rightarrow y\}$.

Многозначное отображение G называется полунепрерывным снизу (п.н.сн.) в точке $x^0 \in cIX$ на множестве X , если $\liminf_{x \rightarrow x^0} G(x) \supset G(x^0)$. Многозначное отображение G называется полунепрерывным сверху (п.н.св.) в точке $x^0 \in cIX$ на множестве X , если $\limsup_{x \rightarrow x^0} G(x) \subset G(x^0)$.

Пусть $K \subset R^m$ выпуклый конус. Обозначим $K^* = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \bar{y}, y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in K\}$ конус двойственный к конусу K .

Рассмотрим многозначное отображение $K(\cdot)$, ставящее в соответствие каждой точке $y \in C$ конус $K(y) \subset R^m$, и многозначное отображение $K^*(\cdot)$, ставящее в соответствие каждой точке $y \in C$ конус $K^*(y)$.

Лемма 6. Пусть многозначное отображение $K(\cdot)$ п.н.сн. в точке $y^0 \in C$ на множестве $Y \subset C$. Тогда отображение $K^*(\cdot)$ п.н.св. в данной точке на данном множестве.

Доказательство. Возьмем любой вектор $\bar{y} \in K(y^0)$. Пусть $\hat{y} \in \limsup_{y \rightarrow y^0} K^*(y)$. Тогда найдутся последовательности $y^k \rightarrow y^0$ такая, что $y^k \in Y$ при всех $k=1,2,\dots$, и $\hat{y}^k \rightarrow \hat{y}$ такая, что $\hat{y}^k \in K^*(y^k)$ $k=1,2,\dots$. С другой стороны, поскольку $\bar{y} \in K(y^0)$, из полунепрерывности снизу многозначного отображения $K(\cdot)$ в точке $y^0 \in C$ на множестве Y следует, что существует последовательность $\bar{y}^k \in K(y^k)$ $k=1,2,\dots$ такая, что $\bar{y}^k \rightarrow \bar{y}$. В таком случае $\langle \hat{y}^k, \bar{y}^k \rangle \leq 0$ при всех $k=1,2,\dots$, откуда $\langle \hat{y}, \bar{y} \rangle \leq 0$ для любого $\bar{y} \in K(y^0)$. Следовательно, $\hat{y} \in K^*(y^0)$ и $\limsup_{y \rightarrow y^0} K^*(y) \subset K^*(y^0)$.

Условие R-регулярности

При исследовании задач оптимизации важную роль играет также следующее условие, являющееся достаточно общим условием регулярности, и одновременно обладающее полезным в практическом плане свойством, которое позволяет оценить расстояние до множества допустимых точек. Условию R-регулярности (или error bound property во многих публикациях) и его приложениям посвящено большое число исследований [13–17].

Пусть $|y|$ — евклидова норма вектора y , $d_C(y) = \inf_{v \in C} |y - v|$. Через $V_\delta(y)$ будем обозначать окрестность точки y радиуса δ .

Определение 2. Следуя [13–17], будем говорить, что множество C R-регулярно в точке $y^0 \in C$ (или в данной точке имеет место error bound property), если найдутся число $\alpha > 0$ и окрестность $V(y^0) = V_\delta(y^0)$ точки y^0 , такие, что $d_C(y) \leq \alpha \max\{0, h_i(y) \mid i \in I, |h_i(y)| \mid i \in I_0\}$ для всех $y \in V(y^0)$.

В работах [3, 4] при дополнительных предположениях на ограничения задачи получено двойственное описание определения R-регулярности в терминах множителей Лагранжа. Докажем его справедливость, не прибегая к дополнительным предположениям о виде ограничений.

Пусть $v \in R^m$, $v \notin C$. Обозначим через $\Pi_C(v)$ множество точек из C , ближайших к точке v . Очевидно, эти точки являются решениями задачи нелинейного программирования $f_v(y) \rightarrow \min$, $y \in C$, где $f_v(y) = |y - v|$. Обозначим $L_v(y, \lambda) = f_v(y) + \sum_{i=1}^p \lambda_i h_i(y)$, где $\lambda_i \geq 0$ $i \in I$.

Пусть

$$\Lambda_v(y) = \{\lambda \in \mathbb{R}^p \mid \nabla f_v(y) + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(y) = 0, \lambda_i \geq 0 \ i \in I(y), \lambda_i = 0 \ i \in I \setminus I(y)\},$$

$$\Lambda_v^M(y) = \{\lambda \in \Lambda_v(y) \mid \sum_{i=1}^p |\lambda_i| \leq M\}.$$

Теорема 1. Следующие утверждения равносильны:

a) множество C R -регулярно в точке $y^0 \in C$;

b) существуют числа $M > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\Lambda_v^M(y) = \{\lambda \in \Lambda_v(y) \mid \sum_{i=1}^p |\lambda_i| \leq M\} \neq \emptyset \text{ для всех } v \in V_\delta(y^0) \setminus C \text{ и всех } y = y(v) \in \Pi_C(v).$$

Доказательство. 1) (a) \Rightarrow (b). Возьмем $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ из определения R -регулярности. Пусть $v \in V_\delta(y^0) \setminus C$ и $y = y(v) \in \Pi_C(v)$. Тогда в силу предложения 2.4.3 [18] $y = y(v)$ является решением следующей задачи: $f_v(z) + d_C(z) \rightarrow \min, z \in \mathbb{R}^m$.

$$\text{Положим } M = \alpha, \bar{\Lambda}_M(y) = \{\lambda \in \mathbb{R}^p \mid \lambda_i h_i(y) = 0, \lambda_i \geq 0 \ i \in I, \sum_{i=1}^p |\lambda_i| \leq M\}.$$

Возьмем положительное число ε такое, что $\varepsilon < \delta$, $V_\varepsilon(y) \subset V_\delta(y^0)$ и $h_i(z) < 0$ для всех $z \in V_\varepsilon(y)$ и всех $i \in I(y)$. Тогда

$$\begin{aligned} f_v(y) &\leq f_v(z) + d_C(z) \leq f_v(z) + \alpha \max\{0, h_i(z) \ i \in I, |h_i(z)| \ i \in I_0\} = \\ &= f_v(z) + M \max\{0, h_i(z) \ i \in I(y), |h_i(z)| \ i \in I_0\} = \\ &= f_v(z) + \max\{\sum_{i=1}^p \lambda_i h_i(z) \mid \lambda \in \bar{\Lambda}_M(y)\} = \\ &= \max\{L_v(z, \lambda) \mid \lambda \in \bar{\Lambda}_M(y)\}, \end{aligned}$$

для всех $z \in V_\varepsilon(y)$.

Поскольку $L_v(y, \lambda) = f_v(y)$, функция $Q(z) = \max\{L_v(z, \lambda) \mid \lambda \in \bar{\Lambda}_M(y)\}$ имеет локальный минимум в точке y и, следовательно, ее производная по направлениям неотрицательна в данной точке, то есть $Q'(y; \bar{y}) \geq 0$ для всех $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$. Принимая во внимание [13], что $Q'(y; \bar{y}) = \max\{\langle \nabla L_v(y, \lambda), \bar{y} \rangle \mid \lambda \in \bar{\Lambda}_M(y)\}$, получаем $\delta^*(\bar{y} \mid \nabla L_v(y, \bar{\Lambda}_M(y))) \geq 0$ для всех $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$, где через $\delta^*(\bar{y} \mid A)$ обозначена опорная функция множества A . Данное неравенство означает, что $0 \in \nabla L_v(y, \bar{\Lambda}_M(y))$ или иными словами $\Lambda_v^M(y) \neq \emptyset$.

2) (b) \rightarrow (a). Если $y^0 \in \text{int } C$, утверждение (a) верно. Пусть $y^0 \in \text{bd } C$. Возьмем $v \in V_\delta(y^0) \setminus C$ и $y = y(v) \in \Pi_C(v)$. Тогда $y = y(v) \in V_\delta(y^0)$ и существует вектор $\lambda \in \Lambda_v(y)$ такой, что

$$\frac{y-v}{|y-v|} + \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(y) = 0, \lambda_i \geq 0 \ i \in I(y), \lambda_i = 0 \ i \in I \setminus I(y).$$

Отсюда следует, что найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon \leq \delta$ и для всех $v \in V_\varepsilon(y^0) \setminus C$ и соответствующих $y = y(v) \in \Pi_C(v)$ справедливо следующее:

$$\begin{aligned}
|y-v| &= \left\langle \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla h_i(y), v-y \right\rangle \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i (h_i(v) - h_i(y) + o(|v-y|)) = \\
&= \sum_{i=1}^p \lambda_i h_i(v) + \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \right) o(|v-y|) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i h_i(v) + \frac{1}{2} |v-y|.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$d_C(v) = |v-y| \leq 2 \sum_{i \in I} |\lambda_i| \max(0, h_i(v)) + \sum_{i \in I_0} |\lambda_i| |h_i(v)| \leq 2M \left(\sum_{i \in I} \max(0, h_i(v)) + \sum_{i \in I_0} |h_i(v)| \right).$$

Из последнего неравенства следует, что $d_C(v) \leq 2Mp \max\{0, h_i(v) \mid i \in I, |h_i(v)| \mid i \in I_0\}$ для всех $v \in V_\varepsilon(y^0)$.

Теорема 2. Пусть множество C R -регулярно в точке $y^0 \in C$. Тогда $T_C^{Cl}(y^0) = T_C(y^0) = \widehat{T}_C(y^0) = \Gamma_C(y^0)$.

Доказательство. Пусть $\bar{y} \in \Gamma_C(y^0)$ и $\bar{y} \neq 0$. Из R -регулярности множества C в точке $y^0 \in C$ следует его R -регулярность в некоторой δ_0 -окрестности этой точки на множестве C . Возьмем число δ такое, чтобы $0 < \delta < 2^{-1}\delta_0$ и при всех $i \notin I(y^0)$ выполнялось неравенство $h_i(y) < 0$ для всех $y \in V_{2\delta}(y^0)$. Положим $t_0 = \delta|\bar{y}|^{-1}$. Тогда при всех $i \notin I(y^0)$ выполняется неравенство $h_i(y+t\bar{y}) < 0$ для всех $y \in V_\delta(y^0)$ и всех $t \in [0, t_0]$. В таком случае при всех $y \in V_\delta(y^0) \cap C$ и всех $t \in [0, t_0]$ в силу R -регулярности множества C справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
d_C(y+t\bar{y}) - d_C(y) &\leq \alpha \max\{0, h_i(y+t\bar{y}) \mid i \in I, |h_i(y+t\bar{y})| \mid i \in I_0\} = \\
&= \alpha \max\{0, h_i(y+t\bar{y}) \mid i \in I(y^0), |h_i(y+t\bar{y})| \mid i \in I_0\} = \\
&= \alpha \max\{0, h_i(y) + t\langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle + t\gamma_i \mid i \in I(y^0), |h_i(y) + t\langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle + t\gamma_i| \mid i \in I_0\} \leq \\
&\leq t\alpha \max\{0, \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle \mid i \in I(y^0), |\langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle| \mid i \in I_0\} + t\gamma,
\end{aligned}$$

где

$$\gamma_i = \langle \nabla h_i(y + \tau_i \bar{y}) - \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle, \quad \tau_i \in (0, 1), \quad \gamma = \max\{|\gamma_i| \mid i \in I_0 \cup I(y^0)\}.$$

Из данного неравенства следует

$$\begin{aligned}
\xi(\bar{y}) &= \limsup_{y \xrightarrow{C} y^0, t \downarrow 0} t^{-1} [d_C(y+t\bar{y}) - d_C(y)] \leq \\
&\leq \alpha \max\{0, \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle \mid i \in I(y^0), |\langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle| \mid i \in I_0\} = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, для любых последовательностей $t_k \downarrow 0$ и $y^k \xrightarrow{C} y^0$ справедливо $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k^{-1} d_C(y^k + t_k \bar{y}) = 0$.

Последнее означает, что существует последовательность $v^k \rightarrow 0$ такая, что $y^k + t_k \bar{y} + t_k v^k \in C$ при всех $k = 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что $\bar{y} \in T_C^{Cl}(y^0)$. Таким образом, $\Gamma_C(y^0) \subset T_C^{Cl}(y^0)$ и, поскольку обратное включение всегда справедливо, следовательно, $\Gamma_C(y^0) = T_C^{Cl}(y^0)$ и утверждение теоремы справедливо.

Лемма 7. Пусть множество C R -регулярно в точке $y^0 \in C$. Тогда $\liminf_{y \xrightarrow{C} y^0} \Gamma_C(y) = \Gamma_C(y^0)$.

Доказательство. Поскольку условие R -регулярности остается справедливым и в окрестности точки y^0 на множестве C , то в силу теоремы 2 $\Gamma_C(y) = T_C^{Cl}(y)$ для всех y из

данной окрестности. С другой стороны известно [13], что $\liminf_{y \xrightarrow{c} y^0} \hat{T}_C(y) = T_C^{Cl}(y^0)$. С учетом теоремы 2 получаем требуемое утверждение.

Ослабленное условие Мангасаряна-Фромова и R -регулярность

Докажем, что выполнение условия RMFCQ влечет наличие R -регулярности в исследуемой точке.

Теорема 3. Пусть множество C удовлетворяет в точке $y^0 \in C$ условию RMFCQ. Тогда множество C R -регулярно в данной точке.

Доказательство. Если $y^0 \in \text{int} C$, то доказываемое утверждение верно. Пусть $y^0 \in \text{bd} C$.

1. Будем рассуждать от противного и предположим, что множество C не является R -регулярным в точке $y^0 \in C$. Тогда существует последовательность $v^k \rightarrow y^0$, $v^k \notin C$, такая что $d_C(v^k) > k \max\{0, h_i(v^k) \mid i \in I, |h_i(v^k)| \mid i \in I_0\}$ для всех $k = 1, 2, \dots$.

Пусть $y^k = y(v^k) \in \text{Pr}_C(v^k)$, $\bar{v}^k = (v^k - y^k) |v^k - y^k|^{-1}$. Тогда $y^k \rightarrow y^0$, $|\bar{v}^k| = 1$.

Ввиду конечности индексного множества I можно извлечь из последовательностей $\{v^k\}$ и $\{y^k\}$ подпоследовательности, на которых $I(y^k) \subset I(y^0)$ и множество индексов $I(y^k)$ постоянно. Поэтому, для простоты записи сохранив для этих подпоследовательностей те же обозначения $\{v^k\}$ и $\{y^k\}$, можно положить $I(y^k) = I^\# \subset I(y^0)$, где $I^\#$ не зависит от y^k .

Без потери общности рассуждений мы можем также предположить, что $\bar{v}^k \rightarrow \bar{v}$. Тогда $|v^k - y^k| > k \max\{0, \langle \nabla h_i(\tilde{v}^k), v^k - y^k \rangle \mid i \in I^\#, \langle \nabla h_i(\tilde{v}^k), v^k - y^k \rangle \mid i \in I_0\}$, где $\tilde{v}^k = y^k + \tau_k(v^k - y^k)$, $0 \leq \tau_k \leq 1$. Из данного неравенства следует

$$\frac{1}{k} > \max\{0, \langle \nabla h_i(\tilde{v}^k), \bar{v}^k \rangle \mid i \in I^\#, \langle \nabla h_i(\tilde{v}^k), \bar{v}^k \rangle \mid i \in I_0\}$$

и, следовательно, $\max\{0, \langle \nabla h_i(y^0), \bar{v} \rangle \mid i \in I^\#, \langle \nabla h_i(y^0), \bar{v} \rangle \mid i \in I_0\} \leq 0$.

Положив $C_\# = \{y \in R^m \mid h_i(y) \leq 0 \mid i \in I^\#, h_i(y) = 0 \mid i \in I_0\}$, получаем из последнего неравенства:

$$\bar{v} \in \Gamma_{C_\#}(y^0), \text{ где } \Gamma_{C_\#}(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle \leq 0 \mid i \in I^\#, \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, \mid i \in I_0\}.$$

2. С другой стороны, поскольку условие RMFCQ в точке y^0 влечет в силу леммы 4 выполнение условия RMFCQ и в некоторой ее окрестности, то, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что RMFCQ выполняется и в точках y^k и, следовательно, существуют множители Лагранжа $\lambda^k \in R^p$, для которых

$$\frac{v^k - y^k}{|v^k - y^k|} = \sum_{i=1}^p \lambda_i^k \nabla h_i(y^k), \lambda_i^k \geq 0 \mid i \in I, \text{ и } \lambda_i^k = 0 \text{ для } i \in (I \setminus I^\#).$$

Последнее условие можно переписать в виде

$$\bar{v}^k = \sum_{i \in I_0 \cup I^\#} \lambda_i^k \nabla h_i(y^k), \lambda_i^k \geq 0 \mid i \in I^\#,$$

откуда с учетом теоремы о двойственном конусе многогранного конуса следует, что $\bar{v}^k \in [\Gamma_{C_\#}(y^k)]^*$.

Нетрудно видеть, что

$$\Gamma_{C_\#}(y^k) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^k), \bar{y} \rangle \leq 0 \mid i \in I^\#, \langle \nabla h_i(y^k), \bar{y} \rangle = 0, \mid i \in I_0\},$$

следовательно, $\Gamma_{C_{\#}}(y^k) = \Gamma_C(y^k)$ при всех $k = 1, 2, \dots$.

В силу леммы 4 $I^a(y^0) \subset I^{\#}$. Тогда по лемме 3, условия которой выполнены для выбранного множества $I^{\#}$, и согласно утверждению 1, получаем $ri\Gamma_{C_{\#}}(y^0) = \{\bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle < 0 \quad i \in I^{\#} \setminus I^a(y^0), \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}$.

Возьмем произвольный вектор $\bar{y} \in ri\Gamma_{C_{\#}}(y^0)$. Данный вектор удовлетворяет системе $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0, i \in I_0 \cup I^a(y^0), \langle \nabla h_i(y), \bar{y} \rangle < 0, i \in I^{\#} \setminus I^a(y^0)$.

В силу условия RMFCQ для множества C в точке $y^0 \in C$ можно, не ограничивая общности, считать, что $rank\{\nabla h_i(y^k) \mid i \in I_0 \cup I^a(y^0)\} = rank\{\nabla h_i(y^0) \mid i \in I_0 \cup I^a(y^0)\} = l$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Следовательно, существует максимальная линейно независимая подсистема $\{\nabla h_i(y^0) \mid i \in J \subset I_0 \cup I^a(y^0)\}$ системы $\{\nabla h_i(y^0) \mid i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}$, которая остается максимальной линейно независимой подсистемой $\{\nabla h_i(y^k) \mid i \in J \subset I_0 \cup I^a(y^0)\}$ в системе векторов $\{\nabla h_i(y^k) \mid i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}$. Для простоты будем считать, что $J = \{1, \dots, l\}$.

Тогда система уравнений $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \quad i \in I_0 \cup I^a(y^0)$ равносильна системе

$$\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \quad i \in J. \quad (1)$$

Для определенности считаем, что базисный минор системы уравнений (1) расположен в верхнем левом углу соответствующей матрицы. Тогда систему (1) можно записать в виде

$$B_1(y^0)\bar{y}^1 + B_2(y^0)\bar{y}^2 = 0, \text{ где } \bar{y} = (\bar{y}^1, \bar{y}^2), \bar{y}^1 = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_l), \bar{y}^2 = (\bar{y}_{l+1}, \dots, \bar{y}_m),$$

$$B_1(y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_l(y)}{\partial y_l} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_l(y)}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial h_l(y)}{\partial y_l} \end{bmatrix}, \quad B_2(y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(y)}{\partial y_{l+1}} & \dots & \frac{\partial h_1(y)}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_l(y)}{\partial y_{l+1}} & \dots & \frac{\partial h_l(y)}{\partial y_m} \end{bmatrix}.$$

Отсюда $\bar{y}^1 = -B_1^{-1}(y^0)B_2(y^0)\bar{y}^2$. Построим вектор $\bar{y}^k = (\bar{y}^{1k}, \bar{y}^{2k})$ следующим образом: $\bar{y}^{1k} = -B_1^{-1}(y^k)B_2(y^k)\bar{y}^2$, $\bar{y}^{2k} = \bar{y}^2$. Тогда $\langle \nabla h_i(y^k), \bar{y}^k \rangle = 0 \quad i \in J$ и $\bar{y}^k \rightarrow \bar{y}$ при $k \rightarrow \infty$. Кроме того, при $i \in I^{\#} \setminus I^a(y^0)$ справедливо $|\langle \nabla h_i(y^k), \bar{y}^k \rangle - \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle| \rightarrow 0$ и, следовательно, $\langle \nabla h_i(y^k), \bar{y}^k \rangle < 0$ при достаточно больших k . Таким образом, для любого $\bar{y} \in ri\Gamma_{C_{\#}}(y^0)$ существует последовательность $\bar{y}^k \in \Gamma_{C_{\#}}(y^k)$ такая, что $\bar{y}^k \rightarrow \bar{y}$. Последнее означает, что $\liminf_{k \rightarrow \infty} \Gamma_{C_{\#}}(y^k) \supset ri\Gamma_{C_{\#}}(y^0)$, откуда с учетом замкнутости множеств $\liminf_{k \rightarrow \infty} \Gamma_{C_{\#}}(y^k)$ и $\Gamma_{C_{\#}}(y^0)$ получаем $\liminf_{k \rightarrow \infty} \Gamma_{C_{\#}}(y^k) \supset \Gamma_{C_{\#}}(y^0)$. Следовательно, многозначное отображение $\Gamma_{C_{\#}}(y)$ полунепрерывно снизу в точке y^0 на последовательности $y^k \rightarrow y^0$. В таком случае по лемме 6 конус $[\Gamma_{C_{\#}}(y)]^*$ двойственный к $\Gamma_{C_{\#}}(y)$ будет полунепрерывным сверху в точке y^0 на последовательности $y^k \rightarrow y^0$. С учетом доказанного ранее включения $\bar{v}^k \in [\Gamma_{C_{\#}}(y^k)]^*$ и того, что $\bar{v}^k \rightarrow \bar{v}$, отсюда следует $\bar{v} \in [\Gamma_{C_{\#}}(y^0)]^*$. Но, с другой стороны, в первой части доказательства получено включение $\bar{v} \in \Gamma_{C_{\#}}(y^0)$. Поскольку $|\bar{v}| \neq 0$, последнее невозможно. Полученное противоречие говорит о справедливости утверждения теоремы.

Следующий пример показывает, что утверждение теоремы 3 не допускает обращения и из R -регулярности в исследуемой точке вообще говоря не следует условие RMFCQ в этой точке.

Пример 1. Пусть $C = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_2 - y_1^3 \leq 0, -y_2 - y_1^3 \leq 0, y_1 = 0\}$, $y^0 = (0, 0)$. Тогда

$$\nabla h_1(y) = \begin{pmatrix} -3y_1^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla h_2(y) = \begin{pmatrix} -3y_1^2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla h_3(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\Gamma_C(y^0) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{y}_1 = \bar{y}_2 = 0\}$, то все ограничения типа неравенства являются существенно активными в точке y^0 .

$$\text{Далее, } \text{rank}\{\nabla h_1(y), \nabla h_2(y), \nabla h_3(y)\} = \text{rank} \begin{pmatrix} -3y_1^2 & -3y_1^2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

следовательно, выполнено условие RMFCQ. С другой стороны, возьмем последовательность положительных чисел $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Тогда для $v^k = (-\varepsilon_k, 0)$ получим $\max\{0, h_1(v^k), h_2(v^k), |h_3(v^k)|\} = \max\{0, \varepsilon_k^3, \varepsilon_k^3, |0|\}$, в то время как $d_C(v^k) = \varepsilon_k$. То есть, условие R -регулярности не может выполняться.

Лемма 8. Если в точке $y^0 \in C$ выполнено условие R -регулярности, то существует окрестность $V(y^0)$ точки y^0 такая, что $I^a(y) \subset I^a(y^0)$ для всех $y \in V(y^0) \cap C$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется последовательность $\{y^k\} \subset C$ такая, что $y^k \rightarrow y^0$ и для каждого k найдется индекс $i_k \in I^a(y^k)$ такой, что $i_k \notin I^a(y^0)$. Поскольку число элементов в I конечно, не ограничивая общности можно считать $I(y^k) = I^\# \subset I(y^0)$ и $I^a(y^k) = I^{\#a}$, где $I^\#$ и $I^{\#a}$ не зависят от k . Далее, из последовательности $\{i_k\}$ можно выделить постоянную подпоследовательность $\{i_0\}$ (для простоты обозначений можно считать, что это сама $\{i_k\}$, то есть $i_k = i_0$ для всех k). Таким образом, существует $i_0 \in I^{\#a}$, но $i_0 \notin I^a(y^0)$. Возьмем произвольный вектор $\bar{y} \in \Gamma_C(y^0)$. Тогда из леммы 7 следует, что существует последовательность $\bar{y}^k \in \Gamma_C(y^k)$ такая, что $\bar{y}^k \rightarrow \bar{y}$ при $k \rightarrow \infty$. Перейдем к пределу в системе равенств и неравенств

$$\langle \nabla h_i(y^k), \bar{y}^k \rangle = 0 \quad i \in I_0 \cup I^{\#a}, \quad \langle \nabla h_i(y^k), \bar{y}^k \rangle \leq 0 \quad i \in I^\# \setminus I^{\#a}$$

при $k \rightarrow \infty$. Получим $\langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle = 0 \quad i \in I_0 \cup I^{\#a}, \quad \langle \nabla h_i(y^0), \bar{y} \rangle \leq 0 \quad i \in I^\# \setminus I^{\#a}$, для любого $\bar{y} \in \Gamma_C(y^0)$. Таким образом, $\langle \nabla h_{i_0}(y^0), \bar{y} \rangle = 0$ для всех $\bar{y} \in \Gamma_C(y^0)$. Это означает, что $i_0 \in I^a(y^0)$. Полученное противоречие позволяет сделать вывод о справедливости утверждения леммы.

Следствие 1. Пусть в точке $y^0 \in C$ выполнено условие RMFCQ. Тогда существует окрестность $V(y^0)$ данной точки такая, что $I^a(y^0) = I^a(y)$ для всех $y \in V(y^0) \cap C$.

Справедливость следствия непосредственно следует из теоремы 3 с учетом лемм 5 и 8.

Следует отметить то обстоятельство, что условия регулярности описывают качество ограничений, дающих описание множества допустимых точек, а не свойства самого этого множества. В этом плане их суть точнее выражается термином constraint qualifications. Выше говорилось о том, что условия MFCQ и CRCQ независимы друг от друга, то есть существуют примеры, где выполняется MFCQ и не выполняется CRCQ и наоборот. В то же время в работе [19] показано, что если условие CRCQ выполнено в точке $y^0 \in C$, то удалением части ограничений и преобразованием некоторых ограничений из неравенств в равенства можно получить множество локально не отличающееся от C , для которого однако будет справедливо условие MFCQ в точке y^0 . Аналогичный характер, хотя и более сложный, имеют связи CRCQ

и RCRCQ. Если условие RCRCQ выполнено в точке $y^0 \in C$, то существуют локальные диффеоморфизмы, переводящие множество C в множества с другой параметризацией, для которых в отвечающей y^0 точке выполняются соответственно CRCQ и MFCQ. Следующее утверждение демонстрирует связь RMFCQ с MFCQ.

Теорема 4. Пусть условие регулярности RMFCQ выполнено в $y^0 \in C$. Тогда существует окрестность $V(y^0)$ такая, что множество $C \cap V(y^0)$ может быть записано с помощью ограничений, для которых в точке y^0 выполняется условие Мангасаряна-Фромовица.

Доказательство. Пусть RMFCQ выполнено в $y^0 \in C$. То существует окрестность $V(y^0)$ такая, что $\text{rank}\{\nabla h_i(y), i \in I_0 \cup I^a(y)\} = l$ для всех $y \in C \cap V(y^0)$. Следовательно, существует индексное множество $J \subset I_0 \cup I^a(y^0)$ такое, что $\text{rank}\{\nabla h_i(y) \ i \in J\} = l$ во всех точках $y \in C \cap V(y^0)$. Положим

$$C' = \{y \in R^m \mid h_i(y) \leq 0 \ i \in I \setminus I^a(y^0), h_i(y) = 0 \ i \in I_0 \cup I^a(y^0)\} \text{ и}$$

$$C'' = \{y \in R^m \mid h_i(y) \leq 0 \ i \in I \setminus I^a(y^0), h_i(y) = 0 \ i \in J\}.$$

Очевидно $C' \subset C$. С другой стороны в силу леммы 4 можно выбрать окрестность $V(y^0)$ столь малой, что $C \cap V(y^0) \subset C' \cap V(y^0)$. Следовательно, $C \cap V(y^0) = C' \cap V(y^0)$.

Для простоты будем считать, что $N = |I_0 \cup I^a(y^0)|$ и $J = \{1, \dots, l\}$. Тогда (см. [20], стр. 504-505) в системе функций $h_i(y) \ i \in I_0 \cup I^a(y^0)$ первые l уравнений функционально независимы, а остальные в некоторой окрестности точки y^0 (которую мы можем, не ограничивая общности, считать совпадающей с $V(y^0)$) выражаются через них

$$h_i(y) = G_i(h_1(y), \dots, h_l(y)) \ i = l+1, \dots, N,$$

где $G_i(z) \ i = l+1, \dots, N$ – гладкие в некоторой окрестности точки $z^0 = (h_1(y^0), \dots, h_l(y^0)) = (0, \dots, 0)$ функции. В таком случае $G_i(0, \dots, 0) = 0 \ i = l+1, \dots, N$ и система уравнений $h_i(y) = 0 \ i \in I_0 \cup I^a(y^0)$ в окрестности $V(y^0)$ равносильна системе $h_i(y) = 0 \ i \in J$ с дополнительными условиями $G_i(h_1(y), \dots, h_l(y)) = 0 \ i = l+1, \dots, N$. Следовательно, $V(y^0)$ можно выбрать столь малой, что при $y \in C'' \cap V(y^0)$ получаем $h_i(y) = 0 \ i \in J$ и значит $G_i(h_1(y), \dots, h_l(y)) = 0 \ i = l+1, \dots, N$. Это означает, что $y \in C'$ и, следовательно, $C'' \cap V(y^0) \subset C'$. Поскольку $C' \subset C''$, отсюда $C'' \cap V(y^0) = C' \cap V(y^0)$. Таким образом, существует окрестность $V(y^0)$ такая, что $C \cap V(y^0) = C'' \cap V(y^0)$. Тогда в силу леммы 1 в точке $y^0 \in C'' \cap V(y^0)$ выполняется условие MFCQ. ?

Отметим, что связь условий RMFCQ и R-регулярности и их приложения и обобщения изучались в работах [21–25].

R-регулярность и ограниченное ослабленное условие Мангасаряна-Фромовица

Недавно опубликованная работа [26] посвящена доказательству интересного результата, касающегося системы решений нелинейных уравнений. Именно в [26] доказано, что из R-регулярности множества с ограничениями типа равенства $C = \{y \in R^m \mid h_i(y) = 0 \ i = 1, \dots, p\}$ в точке y^0 этого множества следует выполнение условия

$rank\{\nabla h_i(y) \ i=1,\dots,p\} = rank\{\nabla h_i(y^0) \ i=1,\dots,p\}$ для всех точек y из некоторой окрестности точки y^0 на множестве C .

Цель работы – показать, что справедливо гораздо более общее утверждение, касающееся множества допустимых точек $C = \{y \in R^m \mid h_i(y) \leq 0 \ i \in I, \ h_i(y) = 0 \ i \in I_0\}$ в задаче NLP.

Определение 3. Будем говорить, что в точке $y^0 \in C$ выполнено ограниченное ослабленное условие регулярности Мангасаряна-Фромовица (RMF_C), если для всех точек y из некоторой окрестности y^0 на множестве C имеет место равенство $rank\{\nabla h_i(y) \ i \in I_0 \cup I^a(y^0)\} = rank\{\nabla h_i(y^0) \ i \in I_0 \cup I^a(y^0)\}$.

Следующий пример показывает, что условия $RMFCQ$ и RMF_C , вообще говоря, не совпадают.

Пример 2. Пусть $C = \{y \in R^2 \mid y_2 = 0, \ y_2^2 e^{y_1^2} \leq 0\}$, $y^0 = (1, 0)$. Тогда

$\Gamma_C(y^0) = \{\bar{y} \in R^2 \mid \bar{y}_2 = 0\}$. Далее, $h_1(y) = y_2$, $h_2(y) = y_2^2 e^{y_1^2}$, $\langle \nabla h_2(y^0), \bar{y} \rangle = 0$ для любого $\bar{y} \in \Gamma_C(y^0)$, и, следовательно, $I^a(y^0) = \{2\}$. Тогда

$$rank\{\nabla h_i(y) \ i=1,2\} = rank \begin{pmatrix} 0 & 2y_1 y_2^2 e^{y_1^2} \\ 1 & 2y_2 e^{y_1^2} \end{pmatrix} = 1 \text{ на множестве } C.$$

С другой стороны, на последовательности $y^k = (1, 1/k) \rightarrow y^0$ получаем $rank\{\nabla h_i(y^k) \ i=1,2\} = 2$.

Пусть $B = \{y \in R^m \mid |y| < 1\}$, $\bar{B} = \{y \in R^m \mid |y| \leq 1\}$.

Лемма 9. Пусть множество C R -регулярно в точке $y^0 \in C$. Тогда для любого положительного числа ε найдется число $\delta > 0$ такое, что $\Gamma_C(y^0) \cap \bar{B} \subset \Gamma_C(y) + \varepsilon B$ при всех $y \in (y^0 + \delta B) \cap C$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда существуют число $\mu > 0$ и последовательность $\{y^k\}$ в C , которая сходится к y^0 , причем для любого $k = 1, 2, \dots$ найдется $\bar{y}^{0k} \in \Gamma_C(y^0) \cap \bar{B}$ и $d_{\Gamma_C(y^k)}(\bar{y}^{0k}) \geq \mu > 0$. Поскольку последовательность $\{\bar{y}^{0k}\}$ ограничена, то, не ограничивая общности, можно считать, что $\bar{y}^{0k} \rightarrow \bar{y}^0$, где $\bar{y}^0 \in \Gamma_C(y^0) \cap \bar{B}$. Но из леммы 7 следует существование последовательности $\bar{y}^k \in \Gamma_C(y^k)$ такой, что $\bar{y}^k \rightarrow \bar{y}^0$. Следовательно, $0 < \mu \leq |\bar{y}^{0k} - \bar{y}^k| \leq |\bar{y}^{0k} - \bar{y}^0| + |\bar{y}^k - \bar{y}^0|$ для всех $k = 1, 2, \dots$, что невозможно.

Теорема 5. Пусть множество C R -регулярно в точке $y^0 \in C$. Тогда в этой точке выполняется условие RMF_C .

Доказательство. Пусть множество C R -регулярно в точке $y^0 \in C$. Тогда в силу леммы 2 для любого вектора $\bar{y} \in \Gamma_C(y^0)$ и любой последовательности $y^k \rightarrow y^0$ такой, что $y^k \in C$, существует последовательность $\bar{y}^k \in \Gamma_C(y^k)$ такая, что $\bar{y}^k \rightarrow \bar{y}$. Будем рассуждать от противного и предположим, что условие RMF_C не выполняется в точке $y^0 \in C$. Последнее означает, что найдется последовательность $y^k \rightarrow y^0$, где $y^k \in C$, такая, что

$$rank\{\nabla h_i(y^k) \ i \in I_0 \cup I^a(y^0)\} > rank\{\nabla h_i(y^0) \ i \in I_0 \cup I^a(y^0)\} \text{ для всех } k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Ввиду конечности индексных множеств в (2) из последовательности $\{y^k\}$ можно извлечь подпоследовательность (для простоты обозначим ее также $\{y^k\}$) такую, что $I(y^k) = I^\# = \text{const}$, $I^a(y^k) = I^{\#a} = \text{const}$, $I^+(y^k) = I^{\#+} = \text{const}$, и чтобы ранг в левой части (2) был постоянным. Тогда из (2) следует, что $\dim \text{aff} \Gamma_C(y^k) < \dim \text{aff} \Gamma_C(y^0)$ при всех $k = 1, 2, \dots$. В то же время в силу леммы 9 для любого положительного числа ε найдется целое положительное k_0 такое, что $\Gamma_C(y^0) \cap \bar{B} \subset \Gamma_C(y^k) + \varepsilon B$ при всех $k > k_0$. Но в виду неравенства $\dim \text{aff} \Gamma_C(y^k) < \dim \text{aff} \Gamma_C(y^0)$ последнее невозможно, если $\varepsilon < d/2$, где d диаметр множества $\Gamma_C(y^0) \cap \{\bar{y} = 1\}$.

Замечание. В частном случае, когда $I = \emptyset$ (то есть $C = \{y \in R^m \mid h_i(y) = 0 \quad i \in I_0\}$), а теорема 5 содержит основной результат [26] (см. теорема 1 [26]).

Таким образом, доказанная выше теорема обобщает основной результат [26] на случай множества решений систем равенств и неравенств.

Следующий пример показывают, что обратное утверждение для теоремы 4 неверно, т.е. из RMFC_C не следует R -регулярность.

Пример 3. Пусть $C = \{y \in R^3 \mid y_1 + y_2 = 0, y_3^2 \leq 0\}$, $y^0 = (0, 0, 0)$. В данном примере условие RMFC_C выполняется, однако

$$\Gamma_C(y^0) = \{\bar{y} \in R^3 \mid \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = 0\} \neq \hat{T}_C(y^0) = \{\bar{y} \in R^3 \mid \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = 0, \bar{y}_3 = 0\}.$$

Следовательно, в исследуемой точке не выполнено условие регулярности Абади. Поскольку известно, что условие Абади справедливо при выполнении условия R -регулярности, отсюда можно сделать вывод, что множество C не R -регулярно в точке y^0 .

Заключение

Для задачи нелинейного программирования доказан двойственный критерий выполнения условия R -регулярности в терминах множителей Лагранжа без какого-либо рода дополнительных предположений о структуре ограничений. Доказано совпадение касательных конусов $T_C^{Cl}(y^0) = T_C(y^0) = \hat{T}_C(y^0) = \Gamma_C(y^0)$ в допустимых точках, в которых множество C R -регулярно. Без дополнительных предположений относительно ограничений доказано, что выполнение в допустимой точке ослабленного условия Мангасаряна-Фромовица влечет за собой выполнение условия R -регулярности. Доказано, что из условия R -регулярности в допустимой точке следует ограниченное ослабленное условие Мангасаряна-Фромовица. Таким образом, справедливо следующая взаимосвязь условий регулярности в точках множества C :
 $LICQ \Rightarrow MFCQ \Rightarrow CPLD \Rightarrow RCPLD \Rightarrow RMFCQ$,
 $LICQ \Rightarrow CRCQ \Rightarrow RCRCQ \Rightarrow RCPLD \Rightarrow RMFCQ$,
 $RMFCQ \Rightarrow R \Rightarrow RMFC$.

REGULARITY CODITIONS IN NONLINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

L.I. MINCHENKO, A.E. LESCHOV

Abstract

Weak regularity conditions are studied. Necessary and sufficient conditions of R -regularity are obtained. The relations between different types of regularity conditions are investigated.

Список литературы

1. Минченко Л.И., Стаховский С.М. // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т 53, №5. С. 26–51.
2. Минченко Л.И., Волосевич А.А., Стаховский С.М. // Докл. БГУИР. 2009. № 6. С. 81–87.
3. Minchenko L.I., Stakhovski S.M. // Optimization. 2011. Vol. 60, № 4. P. 429–440.
4. Minchenko L., Stakhovski S. // SIAM Journal on Optimization. 2011. № 21. P. 1314–1332.
5. Сиротко С.И., Стаховский С.М., Минченко Л.И. // Докл. БГУИР. 2009. №4. С. 87–92.
6. Минченко Л.И., Стаховский С.М. // Вести НАН Беларуси. Сер. физ.-матем. наук. 2010. № 1. С. 101–107.
7. Актанорович С.В., Минченко Л.И., Тараканов А.Н. // Докл. БГУИР. 2010. № 4. С.85–88.
8. Минченко Л.И., Волосевич А. Н., Тараканов А.Н. // Докл. БГУИР. 2009. № 8. С. 64–68.
9. Актанорович С.В., Минченко Л.И., Тараканов А.Н. // Докл. БГУИР. 2012. № 5. С. 103–109.
10. Минченко Л.И., Стаховский С.М. // Докл. БГУИР. № 8. 2010. С.104–109.
11. Andreani R., Haeser G., Schuverdt M.L. et. al. // SIAM J. on Optimization. 2012. Vol. 22, № 3. P. 1109–1125.
12. Гороховик В.В. Конечномерные задачи оптимизации. Минск, 2007.
13. Luderer B., Minchenko L., Satsura T. Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Dordrecht, 2002.
14. Minchenko L.I., Tarakanov A.N. // J. Optimiz. Theory and Appl. 2011. Vol. 148, № 3. P. 571–579.
15. Kruger A., Minchenko L., Oustrata J. // Positivity. 2013. № 17. P. 1–17.
16. Minchenko L.I., Tarakanov A.N. // Optimization. 2013. DOI: 10.1080/02331934.2012.754441.
17. Минченко Л.И., Актанарович С.В., Тараканов А.Н. // Докл. НАН Беларуси. 2010. № 6. С. 18–23.
18. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М., 1988.
19. Lu S. // Math. Program. 2009. № 126. P. 365–392.
20. Зорич В.А. Математический анализ. Ч.1. М., 1981.
21. Актанорович С.В., Богданов С.А., Лещев А.Е. и др. // Докл. БГУИР. 2013. № 2. С. 5–9.
22. Минченко Л.И., Лещев А.Е. // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 4. С. 38–42.
23. Минченко Л.И., Лещев А.Е. // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 6. С. 28–34.
24. Minchenko L. On // Int. Conference «Constructiv nonsmooth analysys and applications», S.-Peterbourg, June 18–23, 2012. P. 119–121.
25. Minchenko L. // Abstracts of 25th European conference on Operational Research (EURO-2012), Vilnius, July 8–11, 2012. P. 311.
26. Behling R., Iusem A. The // Math. Program. Ser. A. 2013. № 137. P. 155–165.