UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Atención al alumnado de altas capacidades matemáticas dentro del aula

Autor/es

ALBERTO CALLEJA PASCUAL

Director/es

CLARA JIMÉNEZ GESTAL

Facultad

Escuela de Máster y Doctorado de la Universidad de La Rioja

Titulación

Máster Universitario en Profesorado, especialidad Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2020-21

Atención al alumnado de altas capacidades matemáticas dentro del aula, de
ALBERTO CALLEJA PASCUAL
(publicada por la Universidad de La Rioja) se difunde bajo una Licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported.
Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los titulares del copyright.

© El autor, 2021
© Universidad de La Rioja, 2021
publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

Trabajo de Fin de Máster

Atención al alumnado de altas capacidades matemáticas dentro del aula

Attention to the mathematically gifted students in the classroom

Autor:

Alberto Calleja Pascual

Tutora:

Clara Jiménez Gestal

MÁSTER:

Máster en Profesorado Matemáticas

Escuela de Máster y Doctorado

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

AÑO ACADÉMICO: 2020/2021

ÍNDICE

RESUMEN

En este trabajo se desarrolla una propuesta de innovación que pretende dar respuesta a las necesidades educativas que el alumnado de altas capacidades matemáticas presenta dentro del aula, mientras se trabajan los distintos contenidos del currículo. Para ello se ha llevado a cabo una investigación que permita conocer diferentes aspectos sobre este alumnado y formas de trabajar con ellos, así como cuál es la realidad actual sobre el tema y que propuestas y métodos de trabajo se aplican en las aulas donde este alumnado está presente. Se muestra además un ejemplo de aplicación de la propuesta desarrollada y se ha realizado una discusión sobre que inconvenientes y ventajas conlleva su aplicación.

Palabras clave: Propuesta de innovación, alumnado de altas capacidades matemáticas, resolución de problemas, atención a la diversidad, inclusión.

ABSTRACT

In this work an innovative proporsal is developed, it pretends to give an answer to the educational needs presented by the mathematically gifted students in the classroom, at the same time, they will study the contents of the curriculum. An investigation has been done in order to know the different aspects related with this type of students, the ways of working with them and also which is the current reality about this topic and what kind of proporsals and methods are being applied in the groups where these students are present. It is going to be shown an application example of the proporsal and a discussion about the advantages and disadvantages of applying it.

Key words: Innovative proporsal, mathematically gifted students, problems resolution, attention to diversity, inclusion.

1. INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

En el siguiente trabajo se presenta una propuesta de innovación que tratará de atender a la diversidad en las aulas, concretamente al alumnado de altas capacidades matemáticas. Se ha desarrollado esta propuesta de manera que pueda ser aplicada en cualquier curso, aunque en el trabajo se presenta un ejemplo para el curso de 3º de la ESO, de la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, en La Rioja.

Con esta propuesta se pretende atender las necesidades educativas del alumnado de altas capacidades matemáticas, tal y como marca la ley de educación vigente (LOMCE, Ley Orgánica 8/2013).

Si bien existen diferentes medidas y propuestas que tratan de cumplir este objetivo, la gran mayoría de ellas se desarrollan en horario extraescolar. Esta es la principal razón por la que se plantea la presente propuesta, ya que al realizar estas actividades de manera extraescolar el alumno puede sentirse excluido de su grupo de compañeros.

Uno de los problemas detectados durante el periodo de prácticas, fue la falta de atención en el aula a los alumnos de altas capacidades matemáticas. Al desarrollar las clases de la asignatura en uno de los grupos, se pudo observar que uno de los alumnos mostraba falta de interés en las actividades. Al preguntarle a qué se debía contestó que él ya conocía estos contenidos y que los problemas resueltos le resultaban muy sencillos. Esto nos lleva a plantearnos la importancia de ofrecer la atención educativa que estos alumnos requieren para su evolución.

En numerosas ocasiones estos alumnos no son atendidos de manera correcta al suponer que sus altas capacidades aseguran el éxito escolar, sin embargo algunos de ellos terminan en abandono o fracaso escolar, ya que pierden el interés en los estudios. Esto es algo que el sistema educativo no puede permitir.

Atender a estos alumnos en un horario extraescolar no implica que se les ofrezca la atención necesaria durante el horario escolar, además, muchos de ellos no pueden acudir a estas medidas extraescolares por diferentes motivos.

Es por ello que en esta propuesta educativa se tratará de crear una forma de atención a este alumnado dentro del aula, logrando mantener su motivación con la asignatura sin hacer que queden excluidos y que puedan beneficiarse de las diferentes capacidades y formas de enfrentarse al aprendizaje todos los integrantes del grupo.

2. OBJETIVOS:

A través de este trabajo se pretende cumplir con la normativa que indica la necesidad de atender a todo el alumnado planteando una serie de objetivos que persiguen cubrir las necesidades detectadas. Estos objetivos serían los siguientes:

1. Dar una respuesta educativa por medio de una propuesta de innovación que cubra las necesidades específicas entre los alumnos de altas capacidades matemáticas en el horario escolar.

2. Utilizar los problemas y la resolución de problemas como un medio de enriquecimiento curricular y profundización en la materia

3. Relacionar los diferentes conocimientos adquiridos durante el máster.

4. Desarrollar una propuesta innovadora basada en investigaciones previas sobre el tema, tratando de aportar un nuevo punto de vista y soluciones al problema mencionado.

5. Valorar la atención a la diversidad, mostrando las diferentes formas de ofrecerla,

6. Utilizar medios tecnológicos, aplicaciones informáticas y otras tecnologías para dar respuesta a un problema.

Tras realizar un estudio sobre la atención a los alumnos de altas capacidades matemáticas, y en concreto sobre las medidas tomadas para satisfacer sus necesidades educativas, se ha llegado a la conclusión de que, en general, estas medidas ofrecen la atención de manera extraescolar. Es por eso que se ha pretendido desarrollar una propuesta de innovación que permita atender a estos alumnos durante el horario escolar y sin que tengan que dejar el aula.

Cuando estos alumnos salen del aula para ser atendidos, están también abandonando el grupo de compañeros con quienes deben relacionarse en el resto de asignaturas. Mediante esta propuesta se intenta atender a estos alumnos sin olvidar sus relaciones sociales y la necesidad de que trabajen las diferentes competencias sociales que aparecen reflejadas en el currículo. Se trata de practicar el principio de inclusión con estos alumnos.

Además, gracias al estudio realizado sobre este tema, se ha llegado a la conclusión de que la realización de actividades de resolución de problemas es muy beneficiosa para ellos. Es por ello que se ha incluido la resolución de problemas como eje de la propuesta.

Finalmente, se ha tratado de desarrollar una propuesta que sea innovadora, buscando aportar un nuevo punto de vista sobre el tema, logrando así una solución distinta y que favorezca el desarrollo integral de este alumnado y de todo su grupo de referencia.

3. MARCO TEÓRICO:

Debido a que este trabajo trata de desarrollar una propuesta de innovación, que permita atender a los alumnos de altas capacidades matemáticas, nos disponemos en primer lugar a definir de manera adecuada este término, basándonos en trabajos previos y referentes de este ámbito.

Resulta interesante abordar esta definición teniendo en cuenta el modelo de las inteligencias múltiples de Gardner (1998). En este modelo se define una inteligencia, como la habilidad necesaria para hacerle frente a un problema resolviéndolo, o la habilidad de crear un producto importante en un determinado contexto cultural o en una determinada comunidad. Gardner además distinguirá entre siete inteligencias: la musical, la cinético-corporal, la lingüística, la espacial, interpersonal, intrapersonal, y la lógico-matemática. Esta última destaca especialmente en los estudiantes clasificados como "talentos matemáticos".

Es importante también diferenciar entre: los sujetos clasificados como "superdotados", definidos de la siguiente manera por Torrego et al. (2011):

> "Estos sujetos presentan un nivel de rendimiento intelectual superior en una amplia gama de capacidades y aprenden con facilidad cualquier área o materia. Las diferencias son fundamentalmente cualitativas, es decir, presentan un modo de funcionamiento diferente a la hora de enfrentarse y resolver una tarea. Hay autores que distinguen los casos de superdotación extrema y así hablan de «superdotación de primer orden» (sujetos con productividad superior y CI mayor de 155) y «segundo orden» (CI entre 125 y 130).

Y los sujetos clasificados como "talentos", que se describen por Fernández y Antonio (2011) como aquellos alumnos con una capacidad de rendimiento superior en un área concreta. Muestran ciertas habilidades en áreas muy concretas. Hay muchos tipos de talento, en esta propuesta tendremos en cuenta a los talentos matemáticos, que podemos definir como:

> "son capaces de proporcionar resoluciones inusualmente rápidas y exactas ante la propuesta de problemas matemáticos. Así mismo, cuentan con

suficientes habilidades para estableces relaciones entre tópicos, conceptos e ideas sin una orientación educativa formal y dirigida."

(Fernández et al, 2008)

La terminología puede resultar algo confusa, así que se ha optado por utilizar en esta propuesta, el término de "alumnado con altas capacidades". Dentro de este grupo se incluye a aquellos alumnos que muestran superdotación general y además a aquellos estudiantes que presentan talento excepcional.

Siguiendo la definición dada por Rodríguez (2013), podemos definir a los estudiantes de altas capacidades como aquellos que poseen habilidades potenciales o demostradas que manifiestan una inteligencia superior a la media, y habilidades como una gran capacidad de imagen, buena capacidad creativa, motivación intrínseca por el aprendizaje y, entre otros aspectos, capacidad de realización académica.

Todos estos alumnos requieren de una atención específica, tratando de desarrollar sus aptitudes matemáticas, tanto por el bien de la comunidad como por el bien de ellos, tal y como se menciona en Segovia y Castro (2004). La realidad es que estos alumnos suelen sufrir diversos problemas y muchos de ellos pierden el interés en la asignatura.

Por otra parte estos alumnos y alumnas con altas capacidades necesitan enfrentarse a retos y propuestas, que les permitan utilizar sus habilidades, poniéndose a prueba ellos mismos. Cuando realizan tareas que resultan sencillas para ellos de manera recursiva, se generan importantes niveles de baja motivación y esto acaba provocando que dejen de participar en las actividades del aula e incluso no sigan las clases (Molina et al, 2009).

Otros autores como Castro, Ruiz-Hidalgo y Castro-Rodríguez (2015) señalan que, mientras la asignatura de matemáticas puede resultar aburrida, de forma general, para los estudiantes, aquellos estudiantes con talento pueden sufrirlo todavía más y recalcan la importancia de ofrecer a este alumnado tareas desafiantes, que muchas veces no son consideradas en el currículo.

Acosta y Alsina (2017) exponen que los docentes y el sistema educativo deberían ser conscientes de que un perfil de altas capacidades no garantiza el éxito académico, por lo que se debe atender a este alumnado, con un modelo de enseñanza-aprendizaje en las aulas, que desarrolle actividades y prácticas inclusivas para todos ellos. Muchas veces estos alumnos no son atendidos, tal y como dice Benavides (2008) “la atención a los alumnos con un nivel de desarrollo superior ha sido uno de los deberes pendientes del sistema educativo.”

Esta opinión es reforzada por Gutiérrez y Jaime (2013), pues ellos también exponen que, la atención específica a los alumnos con talento o altas capacidades, en el área de las matemáticas y dentro del aula, es muy deficiente, y opinan que uno de los motivos principales de esta situación es la falta de material educativo, diseñado para la formación matemática de estos estudiantes.

Será por lo tanto fundamental, identificar que alumnos están dentro de estos perfiles. Diversos autores han investigado sobre ello y generado diferentes modelos de identificación. Un ejemplo sería el modelo de la teoría de los tres anillos de J. S. Renzulli (1978). En este modelo se nombran tres componentes, creando una representación gráfica de tres anillos entrelazados, uno de ellos corresponde a la capacidad intelectual superior a la media, otro a la alta creatividad y el último a la motivación o el compromiso con la tarea.

Otros modelos que destacan serían el ya mencionado modelo de las inteligencias múltiples de Gardner (1998) y el modelo de la teoría triárquica de la inteligencia de Sternberg (1988). Un punto común en todos estos modelos es que se plantea que los test que permiten determinar el coeficiente intelectual, no son la forma correcta de determinar la inteligencia de una persona.

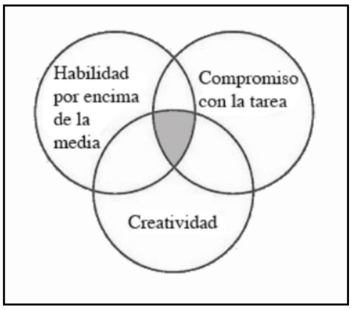

Figura 1. Modelo de los tres anillos de Renzulli. Fuente: Jaime, Gutiérrez (2014).

En cuanto a la detección de las altas capacidades, es importante destacar que es una labor en la que deben intervenir no solo los docentes, sino también los padres del alumno e incluso sus compañeros (Fernández y Antonio, 2011).

Existen un gran número de test y métodos que permiten evaluar las capacidades intelectuales del alumnado, logrando identificar a aquellos que pueden ser clasificados como altas capacidades en matemáticas.

Como dicen Castro, Benavides y Segovia (2006) “el proceso de identificación de niños con talento matemático supone el empleo de métodos cualitativos y cuantitativos de manera complementaria.” Estos mismos autores defienden que mediante la resolución de problemas, se puede diagnosticar con bastante precisión si un alumno es de altas capacidades matemáticas.

Uno de los test más utilizados es el “Test de Matrices Progresivas de Raven” publicado por primera vez en 1983, y es descrito por Neer et al (2002) como un test de capacidad intelectual, factorial, ya que evalúa el componente del factor G, que hace referencia a la capacidad educativa, dar sentido a la confusión, dar forma a constructos, ir más allá de lo obvio... Es un test no verbal y de selección múltiple. El sujeto debe completar series de dibujos en las que falta el último, eligiendo aquel que crea que es el correcto de entre varias opciones.

Otro de los test más aplicados es el “Cuestionario PEM”, Castro, Benavides y Segovia (2006) compararon resultados entre el test de Raven y el Cuestionario PEM, llegando a la conclusión de que los diagnósticos podrían variar.

Algunos otros test serían la “Batería de Aptitudes Diferenciales y Generales” o el “Progressive Achivement Test in Mathematics”, ambos mencionados en

Zarzar et al. (2016). Además, como se ha mencionado anteriormente, en la detección de las altas capacidades también debe intervenir el docente, tratando de identificar ciertas actitudes por parte del alumnado que indican que este puede pertenecer al grupo de las altas capacidades matemáticas.

Entre estas actitudes estarían las ennumeradas por Freiman (2006), los alumnos con altas capacidades matemáticas tienden a realizar preguntas espontáneas tras haberles encomendado una tarea matemática, identifican y buscan patrones y relaciones, son capaces de construir vínculos entre los conocimientos matemáticos, producen ideas originales y profundas, son capaces de mantener el control en una situación problemática, prestan una mayor atención a los detalles, desarrollan estrategias más eficientes, son capaces de cambiar de una estrategia a otro de una manera ágil, piensan de un modo crítico y por último son persistentes en alcanzar sus logros y metas.

Finalmente, se debe también mencionar, el estudio sobre cómo los alumnos se enfrentan y resuelven problemas puesto que a través de la resolución de problemas es posible diagnosticar si el alumno es de altas capacidades matemáticas. Muchos autores como Kruteskii (1969), Wilson y Briggs (2002) o Niederer et al (2003) entre otros defienden que la resolución de problemas es el método más eficaz.

Una vez identificados los alumnos pertenecientes a este grupo, se debe actuar tratando de promover el desarrollo de sus habilidades. Como dicen Acosta y Alsina (2017):

> “debemos ser conscientes de que el éxito no está directamente relacionado con un perfil de altas capacidades, por lo que hay que favorecer condiciones de activación mediante experiencias, motivaciones, propuestas significativas, etc., para obtener el máximo beneficio y evitar que estas capacidades o talentos queden latentes y no se desarrollen.”

Esto nos lleva al objetivo central de esta propuesta, atender al alumnado de altas capacidades en matemáticas, logrando que desarrollen sus habilidades y sientan motivación durante las clases de matemáticas.

Existen un gran número de estudios sobre la intervención en la educación y las formas de atender a este caso particular de diversidad en el aula. Se describirá por lo tanto a continuación el estado de la cuestión sobre este tema, y se tendrá en cuenta para el desarrollo de esta propuesta.

Si bien la ley educativa (Ley Orgánica 3/2020, 2020) indica la necesidad de ofrecer una educación de calidad que contemple medidas de atención individual también al alumnado de altas capacidades la realidad es, como Gutiérrez y Jaime (2013) describen, que de manera global, la atención específica para este alumnado está muy poco definida.

Autores como Benavides (2008), coinciden con la opinión que considera que estos alumnos no reciben la atención necesaria, a veces debido a que se presta una mayor atención a aquellos alumnos que presentan dificultades de aprendizaje.

Respecto a las medidas que se pueden tomar para atender a estos alumnos, veremos qué tipos existen y detallaremos cómo son cada una de ellas.

Siguiendo los trabajos de Navío (2017), de Fernández y Antonio (2011) y de Blanco, Benavides y Ríos (2004) se distinguen las siguientes medidas:

Por un lado estarían las medidas basadas en los agrupamientos. Dentro de este grupo de medidas se puede diferenciar entre los agrupamientos que comprenden la formación de las escuelas específicas para este grupo de alumnos. Esta es criticada por ser elitista y segregadora, según Genovard y Castelló (1990).

La atención individualizada del alumno en el aula común que según Blanco, Benavides y Ríos (2004) sería la opción más inclusiva, porque permite atender al alumno realizando las adaptaciones curriculares que sean necesarias y ofreciéndole el apoyo necesario, sin que deje el aula.

En esta propuesta hemos optado por utilizar una medida que siga esta idea de agrupamiento.

También se plantean la creación de grupos de aprendizaje externos al aula común, que pueden ser tanto fijos como parciales en el tiempo. Es decir, se agrupa a los alumnos de altas capacidades, aun siendo de diferentes cursos, para trabajar con todos ellos a la vez, ofreciéndoles la atención de maestros o profesores especializados y diferentes materiales que atiendan y cubran sus necesidades educativas.

Finalmente, están los grupos flexibles, que consisten en la agrupación de los alumnos de altas capacidades y de todos los alumnos de la escuela o parte de ellos, que compartan un determinado nivel de conocimientos en un área. Esta es quizá la más compleja de las agrupaciones.

Existen también medidas clasificadas como adaptaciones curriculares. En estas medidas el currículo será adaptado de manera. Fernández y Antonio (2011) describen las Adaptaciones Curriculares como:

> "El conjunto de ajustes o modificaciones que se realizan sobre los elementos de acceso o sobre los elementos propiamente curriculares -objetivos, contenidos, metodología y criterios de evaluación- del currículo que corresponde a un alumno/a por su edad, para responder a las necesidades educativas especiales que presente."

Se consideran generalmente dos tipos de Adaptaciones curriculares: el enriquecimiento curricular y la condensación o compactación curricular. Siguiendo la definición dada por Verhareen (1990) mencionada en Fernández y Antonio (2011), la condensación curricular consiste en asegurándose de que el alumno domina y comprende unos determinados contenidos que se trabajarán en una unidad didáctica, emplear este tiempo para que el alumno realice otro tipo de actividades que sirvan para que desarrolle sus habilidades. Se pretende evitar que el alumno se aburra durante las sesiones de clase.

El enriquecimiento "consiste en añadir nuevos contenidos que no estén cubiertos en el currículo oficial o trabajar determinados contenidos en un nivel mayor de profundidad" según Ramirez y Flores (2016). Es importante entender que no se avanza en los contenidos curriculares de cursos posteriores, sino que se amplían los contenidos del curso correspondiente al alumno, ofreciendo mayores niveles de abstracción y profundidad, tal y como se menciona en Blanco, Benavides y Ríos (2004).

En Genovard y Castelló (1990) se habla de dos vías de enriquecimiento curricular, la vía vertical basada en añadir contenidos al currículo y la vía horizontal, basada en la interconexión entre los conocimientos y materiales existentes, buscando desarrollar las competencias que se persiguen alcanzar con el proyecto de enseñanza-aprendizaje.

Según Blanco, Benavides y Ríos (2004): "El enriquecimiento curricular es, sin duda, la estrategia que más posibilidades y alternativas ofrece para la atención de la diversidad, y especialmente para la atención de niños con alta capacidad y talento", de hecho es una de las más comunes.

Por último existe también la estrategia conocida con el nombre de aceleración o flexibilización del periodo de escolarización, que consiste en ubicar al alumno en un contexto curricular que pueda satisfacer sus necesidades, siendo el nivel de dificultad y el ritmo de aprendizaje el adecuado para este.

Dentro de la aceleración se distinguen diferentes tipos de aplicaciones de la medida, estas son listadas en Rodrigues Maia-Pinto y de Souza Fleith (2012): "El alumno puede avanzar en una o más disciplinas, puede saltar un determinado año escolar, ser admitido precozmente a la escuela o universidad y completar dos o más años de estudio en un año."

Aunque esta es una de las medidas preferidas por los padres, debido a que comúnmente es concebida como la mejor opción (Pérez et al., 1998, p. 107 mencionados en Blanco, Benavides y Ríos, 2004), puede provocar una serie de problemas, mencionados en Fernández y Antonio (2011), relacionados con el currículo y los resultados académicos. Por ejemplo, lagunas en el aprendizaje o una mala adaptación individualizada del currículo al alumno, otros problemas relacionados con sus necesidades educativas, como la excesiva presión académica o relacionados con aspectos socio-emocionales, como la desadaptación con respecto al grupo y a momento de madurez socio-emocional.

Actualmente existen una gran cantidad de actividades, programas y otros medios que pueden ser utilizados para brindar la atención que estos alumnos requieren, se describirán brevemente a continuación algunos de ellos.

Uno de estos programas es ESTALMAT, un programa español que trata de atender a los talentos matemáticos. Según aparece descrito en Ramírez y Flores (2018):

> "ESTALMAT (Estímulo del talento matemático) es un proyecto de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Los objetivos fundamentales del proyecto fueron descritos por su fundador, Miguel de Guzmán. Tratamos de detectar, orientar y estimular de manera continuada el talento matemático excepcional de estudiantes de Secundaria y Bachillerato, sin desarraigarlos de su entorno, mediante una orientación semanal durante los dos primeros años, que llevamos a cabo cada semana del curso académico por tres horas, y continuando en la etapa de enseñanza secundaria y bachillerato con diferentes formatos en las distintas sedes"

Se lleva a cabo en primer lugar una selección de los alumnos que participarán en las jornadas y tras esto se desarrolla cada una de las sesiones. Este proceso está descrito junto con algún ejemplo de las tareas realizadas en Ramírez y Sánchez (2020).

Según Hernández y Sánchez (2008) "Estalmat es una experiencia alentadora, un portal de entrada a un mundo de juegos y actividades matemáticas con un profundo valor educativo. De gran interés para la sociedad y una delicia para todos los que participamos en ella."

Otra de las medidas más comunes sería la participación y preparación de los alumnos de altas capacidades en concursos matemáticos como las "Olimpiadas Matemáticas" o el "Concurso de Primavera" que se realiza en Madrid o en La Rioja (Gaspar Alonso-Vega, 2001). Este concurso consiste en la resolución de problemas matemáticos con un nivel de dificultad algo más elevado. Los contenidos teóricos que los alumnos deben conocer para resolver estos ejercicios no son diferentes a los del currículo, si bien existen Olimpiadas para los diferentes cursos.

Como aparece en Jaime y Gutiérrez (2014) el entrenamiento de los alumnos para este tipo de competencias, se lleva a cabo muchas veces como un actividad extraescolar. Esto supone que estos concursos no tan solo ofrecen una medida de atención a estos alumnos durante el día de la prueba sino que también durante el curso.

En España su organización depende de la Real Sociedad Matemática Española. Se realiza una fase de comunidades, donde los ganadores de cada comunidad son seleccionados para participar en una fase nacional. Los ganadores de la fase nacional participan en las Olimpiadas Matemáticas Internacionales. (RSME, 2021).

Como se explica en Mihaela Singer et al. (2016), en otros países como Rusia o Estados Unidos existen desde hace años los conocidos como Círculos Matemáticos. Consisten en reuniones extraescolares entre alumnos, tanto de institutos como de universidades, en las que comparten su amor por las matemáticas y su experiencia. Realizan clases de enriquecimiento matemático, a veces de manera informal y por medio de actividades recreativas y otras veces de manera más seria.

Asociaciones como la National Association of Math Circles (NAMC, https://mathcircles.org/) en Estados Unidos, se encargan de ofrecer recursos y apoyo a estos programas.

Como se puede apreciar, muchas de las medidas de atención a la diversidad se desarrollan de manera extraescolar, es decir fuera del aula, lo que ha motivado el siguiente trabajo. Se describirá a continuación la propuesta sobre la que versa el mismo.

4. PROPUESTA DE INNOVACIÓN EDUCATIVA

4.1. Introducción

Se detallarán y describirán a continuación los diferentes aspectos relacionados con la propuesta de innovación que se pretende presentar en este trabajo.

Como ya se ha mencionado anteriormente, esta propuesta pretende cumplir con la vigente ley educativa (LOMCE, Ley Orgánica 8/2013), en concreto con la atención a la diversidad que se debe ofrecer a cada uno de los alumnos en el aula y específicamente al alumnado de altas capacidades matemáticas. Se ha optado por este perfil para trabajar desde la perspectiva del profesor de matemáticas.

En la propuesta se desarrolla un método que ofrece la atención que estos alumnos requieren. A través de la resolución de problemas en el aula se intentará satisfacer las necesidades de este grupo de alumnos. Esto implica que el docente deberá preparar previamente el conjunto de problemas que se trabajarán, seleccionando aquellos que sean los adecuados para cada una de las unidades docentes en las que se desee utilizar este método.

Esta propuesta de innovación ha sido desarrollada según el currículo de La Rioja, que aparece descrito en el BOR en su Decreto 19/2015, del día 12 de junio. Si bien podría ser adaptada a otras comunidades autónomas.

Dado que el alumnado de altas capacidades se encuentran en los diferentes niveles, se ha intentado desarrollar un método que pueda atender a estos alumnos en cualquier curso de la ESO o Bachillerato.

En este trabajo se ha decidido realizar un ejemplo de aplicación de este método para el curso de 3º de la ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas, en el que se trabajarán contenidos del bloque I y II, de manera que quede más claro cómo aplicar este método en las diferentes unidades didácticas.

Se detallarán a continuación los objetivos específicos de esta propuesta, los contenidos y competencias que se trabajarán, la metodología a seguir tanto por parte del docente como por parte del alumnado, la estructura de la propuesta junto al ejemplo de aplicación y la evaluación de la misma.

Es necesario comunicarse con el equipo de orientación del centro, coordinándose con este para el correcto desarrollo de la propuesta y la evaluación de la misma.

4.2. Objetivos

En primer lugar, el objetivo general de la propuesta, será:

- Dar una respuesta educativa que cubra las necesidades específicas entre el alumnado de altas capacidades matemáticas en el horario escolar y en concreto durante las clases de matemáticas en los niveles de la ESO y Bachillerato.

Otros objetivos más específicos que se buscan lograr serían:

- Utilizar la resolución de problemas y los problemas en sí mismos, como un medio de enriquecimiento curricular y profundización en los contenidos del currículo.
- Implementar las competencias claves entre los conocimientos adquiridos por los alumnos.
- Construir un sentido de inclusión entre el alumnado.
- Solucionar la falta de atención educativa específica al alumnado de altas capacidades matemáticas.
- Usar aplicaciones informáticas y medios tecnológicos en la resolución de problemas.
- Contribuir al sentido de la iniciativa y de la investigación del alumnado.
- Relacionar la resolución de problemas con las técnicas basadas en las representaciones gráficas.
- Explicar los contenidos de la asignatura desde una perspectiva adecuada para el alumnado con el perfil de altas capacidades matemáticas.

Como se indica en este último objetivo se alcanzarán también una serie de objetivos matemáticos, estos dependerán del curso y los contenidos que se trabajen siguiendo la propuesta, por lo tanto deberán ser adaptados. Se listarán a continuación los que se trabajarían en el ejemplo que se ha realizado para este trabajo:

- Enriquecer los contenidos sobre sucesiones numéricas.
- Fundamentar las operaciones con fracciones y decimales.
- Relacionar las fracciones, las potencias y las sucesiones.
- Interpretar la idea de sucesión numérica.
- Distinguir patrones en diferentes contextos.

Se podrá apreciar como estos objetivos pueden ser alcanzados por medio de la resolución de los diferentes problemas seleccionados en el ejemplo.

4.3. Contenidos

Como se ha comentado en apartados anteriores esta propuesta está pensada para ser aplicada en los diferentes cursos de matemáticas de la ESO y Bachillerato, por lo tanto los contenidos que se trabajarán por medio de la propuesta dependerán del curso en que esté siendo aplicada.

En el caso del ejemplo desarrollado para este trabajo se ha optado por adaptar la propuesta al curso de 3º de la ESO, para las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. En concreto se trabajarán contenidos del bloque I y del bloque II. Los contenidos serán:

- Planificación del proceso de resolución de problemas.

- Estrategias y procedimientos puestos en práctica: uso del lenguaje apropiado (gráfico, numérico, algebraico, etc.), reformulación del problema, resolver subproblemas, recuento exhaustivo, empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.

- Reflexión sobre los resultados: revisión de las operaciones utilizadas, asignación de unidades a los resultados, comprobación e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación, búsqueda de otras formas de resolución, etc.

- Planteamiento de investigaciones matemáticas escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.

- Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.

- Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.

- Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje para:

a) la recogida ordenada y la organización de datos.

b) la elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos.

c) facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico.

d) el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas.

e) la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos.

f) comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.

Y del bloque II:

- Potencias de números racionales con exponente entero. Significado y uso.

-Raíces cuadradas. Raíces no exactas. Expresión decimal. Expresiones radicales: transformación y operaciones.

-Operaciones con fracciones y decimales. Cálculo aproximado y redondeo. Cifras significativas. Error absoluto y relativo.

- Investigación de regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números. Expresión usando lenguaje algebraico.

- Sucesiones numéricas. Sucesiones recurrentes, Progresiones aritméticas y geométricas.

- Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Resolución (método algebraico y gráfico).

Mediante los problemas que se realizarán en las actividades los alumnos interiorizarán y comprenderán estos contenidos. Dado que se ha optado por la vía del enriquecimiento curricular y la profundización en los contenidos del currículo, para ofrecer la respuesta educativa que estos alumnos demandan, se profundizará en estos contenidos por medio de algunos problemas como el problema 1 y el problema 2.

Por medio de los problemas 3 y 4 se pretende enriquecer el currículo, ampliándolo con contenidos como el teorema de Nicómaco, que sigue guardando relación con contenidos como las sucesiones o las operaciones con potencias y con un problema sobre la sucesión de Fibonacci.

4.4. Competencias

Se trabajarán en la propuesta que se presenta en este TFM varias de las competencias claves que aparecen en la ley educativa actual, la LOMCE (Ley Orgánica 8/2013). Es importante que todos los alumnos adquieran estas competencias, lo que les permitirá desenvolverse adecuadamente tanto en el mundo laboral como en el mundo académico.

C1. Competencia en comunicación lingüística (CCL): Los alumnos deberán comunicarse con el docente, expresar sus dudas y atender a las diferentes explicaciones dadas por el profesor. También deberán ser capaces de expresar sus ideas durante la resolución de problemas. En el caso de que haya varios alumnos con el perfil de altas capacidades matemáticas, deberán comunicarse entre ellos durante la actividad y también deberán ser capaces de comunicarse con el resto de compañeros durante la resolución de problemas de manera colaborativa.

C2. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT): Para la resolución de los problemas los alumnos deberán aplicar diferentes contenidos matemáticos, técnicas y habilidades que pertenecen al área de las matemáticas. Se trabajarán también competencias básicas en ciencia y tecnología debido a que los problemas estarán contextualizados en diferentes situaciones que requieran de estas competencias.

C3 Competencia Digital (CD): Para la resolución de los problemas que componen esta actividad los alumnos podrán e incluso en algún caso deberán, utilizar diferentes aplicaciones informáticas como Geogebra. También podrán utilizar el ordenador o dispositivos móviles para buscar información.

C4. Competencia para Aprender a Aprender (CAA): Los alumnos deberán ser autodidactas, deberán investigar por sí mismos, comprobar sus resultados y reflexionar sobre los razonamientos y planteamientos que realicen. Además deberán realizar una evaluación de la actividad y autorregularse a la hora de realizar las tareas.

C5. Competencias Sociales y Cívicas (CSC): Los alumnos deberán colaborar e interactuar con el docente y entre ellos durante las actividades. Se trabajarán aspectos como el respeto hacia los demás, los turnos de palabra o la empatía.

C6. Sentido de la Iniciativa y Espíritu Emprendedor (SIE): Durante las actividades que los alumnos deberán completar, tendrán que realizar planteamientos, resoluciones y comprobaciones ellos solos y además deberán organizarse cuando trabajen en grupo.

C7. Conciencia y expresiones culturales (CEC): Durante la propuesta y a través de las diferentes actividades se pretende que los alumnos conozcan algunos de los referentes culturales en el área de las matemáticas. Se mostrará la relación directa de las matemáticas con otras materias como las artes plásticas.

4.5. Tipo de modelo procesual

En el caso de esta propuesta se ha seguido un modelo de resolución de problemas, en concreto se trata de resolver el problema de la falta de atención educativa específica a los alumnos de altas capacidades matemáticas durante el horario escolar.

Estos alumnos serán el centro de la propuesta, ellos serán los usuarios de la innovación. Se trata de ofrecer una solución al problema que supone la falta de atención a los alumnos de este perfil dentro del aula.

Para dar respuesta a este problema se propone el uso de la resolución de problemas matemáticos mediante los cuales se realice una profundización de los contenidos o un enriquecimiento del currículo. De esta manera el alumnado desarrollará sus capacidades y sus niveles de motivación respecto a las matemáticas aumentarán.

Es importante que el docente elija correctamente los problemas que se resolverán. Puede utilizar páginas como NRICH (https://nrich.maths.org/) en la que se publican problemas de los diferentes cursos y contenidos, que resultan adecuados para esta propuesta. También se pueden utilizar problemas de la Olimpiada Matemática, seleccionando aquellos que permitan aplicar los contenidos que se deseen introducir en la unidad didáctica, o los problemas del Concurso de Primavera.

De igual manera el docente puede crear los problemas en caso de querer introducir un contexto concreto o modificar algunos de los que aparecen en los recursos ya mencionados.

Cabe destacar que en la propuesta, además de solucionar el problema previamente mencionado, se promoverá que los alumnos adquieran las competencias claves y se trabajarán diferentes contenidos que aparecen en el currículo.

4.6. Metodología

Para el diseño de la metodología se tendrá muy presente la importancia de ofrecer al alumnado un aprendizaje de calidad, individualizado y basado en la inclusión.

La propuesta seguirá una metodología basada en la resolución de problemas matemáticos, mediante los cuales se pueden introducir los diferentes contenidos y trabajarlos de una manera que resulte interesante al alumnado. Esta metodología permitirá además cumplir con las características que se acaban de describir.

Además se utilizarán otros métodos de enseñanza-aprendizaje gracias a los cuales se podrán atender las diversas necesidades de cada uno de los alumnos.

Se apoyará en metodologías más tradicionales, como puede ser el modelo de clase expositiva que se utilizará para explicar la parte teórica de los contenidos y los enunciados de los problemas, y también se aplicarán metodologías más innovadoras, como el uso de aplicaciones informáticas o el uso de estrategias colaborativas.

En cada una de las unidades didácticas en las que se aplique esta propuesta de atención a los alumnos con altas capacidades matemáticas, se deberá contemplar que se resuelva al menos uno de los problemas de manera colaborativa, aplicando los principios del aprendizaje colaborativo. El docente deberá separar a los alumnos formando grupos heterogéneos, contemplando cada una de las individualidades de los alumnos y buscando crear los grupos de manera adecuada para que puedan ayudarse entre ellos.

Será necesario que durante el desarrollo de la propuesta los alumnos puedan expresar sus dudas y aportar sus puntos de vista. Se les permitirá por lo tanto participar durante el desarrollo de la actividad, siempre que lo hagan con respeto. El docente escuchará sus dudas y opiniones, actuando como guía para ellos y orientándolos para que estos desarrollen al máximo sus habilidades.

La resolución de problemas ofrece una vía para llegar a los contenidos de una manera que resulta atractiva para el alumnado, especialmente en el caso del alumnado de altas capacidades matemáticas. Deberán dedicarse dos sesiones a la propuesta en cada una de las unidades didácticas en las que vaya a ser aplicada.

Estas sesiones pueden ser desarrolladas de manera simultánea a las sesiones teóricas, ya que, como se ha comentado, mediante los problemas pueden introducirse y trabajar los diferentes contenidos de una unidad. El docente debe decidir en qué momento desarrollarlas. Dependiendo de cuáles sean los contenidos de la unidad puede ser más eficaz trabajarlos por medio de problemas (por ejemplo los contenidos relacionados con las funciones o la probabilidad) o de una manera más teórica. Otra opción sería realizar estas sesiones al final de la unidad, de forma que se afiancen los contenidos.

Durante estas sesiones se entregará a todos los alumnos una serie de enunciados de problemas que deberán resolver, además de estos enunciados se entregará al alumnado de altas capacidades los enunciados de los problemas adicionales desarrollados en la propuesta. Los alumnos de altas capacidades completarán los primeros problemas en un tiempo menor que el resto de alumnos de la clase, en torno a unos 15 o 20 minutos, por lo que suponiendo que las sesiones sean de 55 minutos, podrán dedicar el resto de la sesión a resolver los problemas adicionales que recibirán.

En los últimos 10 minutos se resolverán en la pizarra algunos de los problemas de la serie que todos los alumnos de la clase recibirán y al menos uno de los problemas adicionales que los alumnos de altas capacidades reciben. Para ello alguno de los alumnos saldrá a la pizarra y escribirá y explicará los razonamientos y la solución que ha obtenido.

En la segunda de las sesiones, tras dedicar los primeros 25 minutos a la resolución de los problemas, se utilizarán los 30 minutos restantes para la resolución de uno de los problemas adicionales de la propuesta de manera colaborativa.

El docente deberá apoyar a todo el alumnado durante estas sesiones, guiándolos durante la resolución de los problemas. Los alumnos podrán preguntar dudas sobre los enunciados. También es importante que el docente les oriente para que puedan alcanzar por si mismos las otras vías que permiten llegar a la solución, una vez el alumnado haya expuesto sus procedimientos, y se hayan analizado los errores, ya que los problemas adicionales elegidos en la propuesta tendrán, en general, diferentes procesos mediante los cuales llegar a la misma.

Se deberá por tanto tener en cuenta el número de problemas que se utilizarán para cada una de las unidades didácticas. En el ejemplo desarrollado se ha elegido la unidad didáctica correspondiente a los contenidos de sucesiones, del curso de 3º de ESO de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. Se han desarrollado 4 problemas adicionales.

Se dedicarán dos sesiones de 55 minutos para la propuesta. En este ejemplo los problemas permiten introducir y explicar contenidos sobre las sucesiones, por lo que es recomendable desarrollar las sesiones al principio de la unidad.

La temporalización del ejemplo sería pues la siguiente:

Primera sesión: Al comienzo de la sesión se dará a todos los alumnos de la clase la serie de enunciados de los problemas comunes. A continuación, tras unos 15 minutos, cuando los alumnos de altas capacidades hayan resuelto esta serie de problemas comunes, se les darán los enunciados de los primeros dos problemas adicionales. Dispondrán de 15 minutos para cada uno.

Durante este tiempo el docente además de ayudar y resolver las dudas del resto de los compañeros, guiará a estos alumnos durante la resolución de los problemas. En los últimos 10 minutos de la sesión el docente recogerá las soluciones que los alumnos han dado para su evaluación y el alumnado resolverá en la pizarra los problemas, explicando además, si las hubiera, las diferentes formas de hacerlo.

Segunda sesión: Durante los 10 primeros minutos resolverán de nuevo ejercicios y problemas de forma conjunta todos los alumnos. Cuando el alumnado de altas capacidades termine con estos problemas se les dará el enunciado del problema 3, dispondrán de 15 minutos para resolverlo. El resto del alumnado de la clase continuará haciendo los otros problemas, más adecuados a su nivel. En los 30 minutos restantes, se realizará una actividad basada en la resolución del cuarto problema de manera cooperativa. Los alumnos se repartirán en grupos formados por el docente y deberán obtener la solución del cuarto problema. Tras esto los alumnos explicarán el problema y las soluciones halladas en cada uno de sus grupos.

Para la resolución de los problemas los alumnos podrán utilizar el programa Geogebra y las herramientas disponibles en Mathigon (https://es.mathigon.org/).

4.7. Diseño de las actividades

Las actividades que se llevarán a cabo en el aula se basan en la resolución de problemas. Esto implica que los problemas adicionales seleccionados deben ayudar a cumplir con los objetivos de la propuesta.

Para poder atender a los alumnos de altas capacidades matemáticas, los problemas adicionales planteados para este alumnado tendrán unos enunciados específicos, y la manera de resolverlos permitirá enriquecer el currículo de los alumnos o profundizar en unos contenidos determinados.

Muchos de los problemas utilizados en esta actividad seguirán el modelo de “suelo bajo y techo alto”. Estos problemas permiten sacar los mínimos y llegar a cotas exigentes, generando un enriquecimiento horizontal.

Además será importante seleccionar aquellos que permitan aplicar recursos informáticos y manipulativos.

Los problemas elegidos por lo general, tendrán diferentes formas de ser resueltos, cada una de estas formas debe ser alcanzada por el alumno, con la orientación del profesor o colaborando con otros compañeros

Debe tenerse en cuenta durante el diseño de las actividades el tiempo que los alumnos tendrán para resolver cada uno de los problemas, los recursos disponibles y las dificultades que podrían surgirles.

También será necesario considerar las competencias que los alumnos deben adquirir, creando los enunciados necesarios para contextualizar los problemas en entornos que permitan visualizar en qué áreas las matemáticas pueden ser aplicadas y de qué forma.

Se muestran a continuación los enunciados, la forma de presentarlos y cómo trabajar los problemas seleccionados para el ejemplo de aplicación que se ha desarrollado en este trabajo.

En el primero de ellos se pretende que los alumnos profundicen en los conceptos de sucesión, trabajando además la resolución de problemas por medio de representaciones gráficas y por medio de los cálculos algebraicos, mostrando así las diferentes representaciones que permiten llegar a la solución en un problema. Se intenta que los alumnos manejen contenidos sencillos para comprender conceptos abstractos como la suma de infinitos términos.

En el segundo problema se trabajarán habilidades como la identificación de patrones, que suele resultar interesante para estos alumnos. Además en el problema se aplican los contenidos que se ha decidido trabajar en este ejemplo de aplicación de la propuesta. Este problema es especialmente interesante por las múltiples formas de hallar la solución que existen.

El tercer problema pretende enriquecer el currículo, presentando el teorema de Nicómaco. Se trabajan las sucesiones, el cálculo con potencias y, de nuevo, el uso de representaciones gráficas para la resolución de problemas y para la explicación del algebra.

En el cuarto problema se pretende enriquecer el currículo presentando contenido relacionados con la sucesión de Fibonacci.

En todos los problemas los alumnos podrán utilizar aplicaciones informáticas. En los tres primeros es posible utilizar Geogebra o Mathigon. En el último problema, además, podrían utilizarse programas destinados al cálculo como Mathematica. También sería posible adaptar los problemas 1, 2, y 3 para utilizar materiales manipulativos.

Los problemas 1 y 2 han sido obtenidos de la página Nrich y se han adaptado ligeramente con el fin de hacerlos comprensibles en español. El primer problema se encuentra en la página https://nrich.maths.org/8096 y el segundo en https://nrich.maths.org/steelcables .

4.7.1. Problema 1. Sobre sucesiones convergentes

Carlos ha estado sumando las fracciones de la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$... donde cada fracción es la mitad de la anterior. Ha realizado las siguientes sumas:

a. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

c. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$

Calculando los resultados anteriores, ¿Crees que la suma se aproximará a un valor concreto? ¿Cómo explicarías este comportamiento? ¿Serías capaz de hallar una expresión para la suma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}$?

Solución:

Primero se calculan los resultados de esas sumas de fracciones que son:

a. $\frac{3}{4}$

b. $\frac{7}{8}$

c. $\frac{15}{16}$

Se puede ver que se acerca a 1. Se trata de la suma de n términos en una sucesión geométrica, cuyo primer término es $\frac{1}{2}$, y su razón $r = \frac{1}{2}$. Dado que $r < 1$ la suma será convergente, de hecho convergerá a $s_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

Para hallar la expresión de la suma de n términos se presentan al menos dos opciones o vías:

Opción 1: Dado que se trata de una sucesión geométrica, se puede hallar la expresión geométrica de la siguiente manera. En las sucesiones geométricas el término general es $a_n = a_1 * r^{n-1}$. Ahora se llama $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, a la suma de los n primeros términos de la sucesión. Notar que $rs_n - s_n = (r-1)s_n = a_1 * r^n - a_1$, si reorganizamos la ecuación, tendremos que la suma de los n primeros términos es $s_n = \frac{a_1(r^n-1)}{(r-1)}$. Si sustituimos los valores de la sucesión del problema tendremos que $s_n = 1 - \frac{1}{2^n}$.

Opción 2: Para esta opción se utilizará un folio, que se irá coloreando de la manera que se mostrará a continuación o el programa Geogebra, donde se creará la siguiente figura:

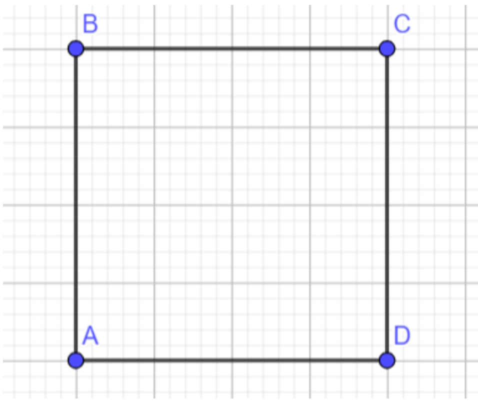

Figura 2: Cuadrado dibujado en geogebra. Fuente: Elaboración propia.

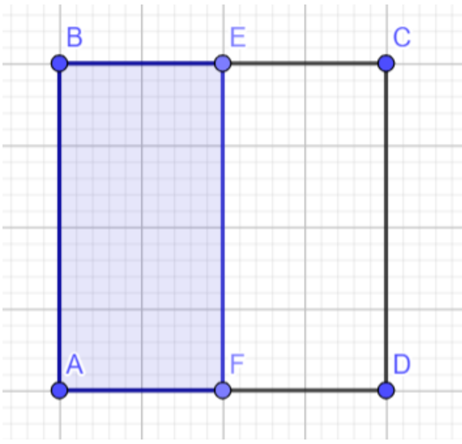

Figura 3: $\frac{1}{2}$ *del área tomada. Fuente: Elaboración propia.*

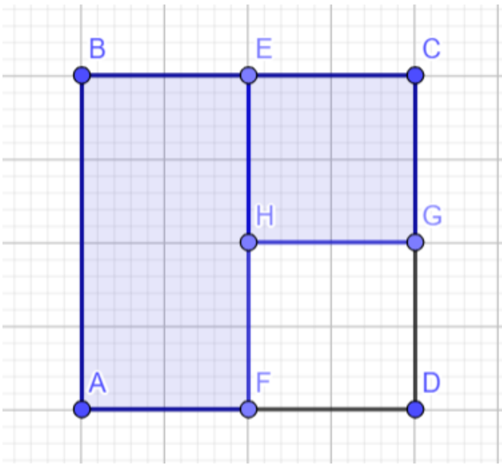

Figura 4: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ *del área tomada. Fuente: Elaboración propia.*

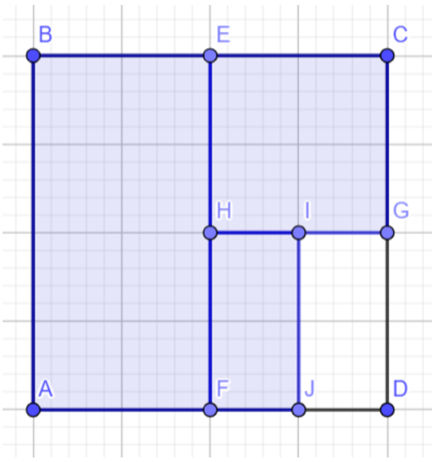

Figura 5: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ *del área tomada. Fuente: Elaboración propia.*

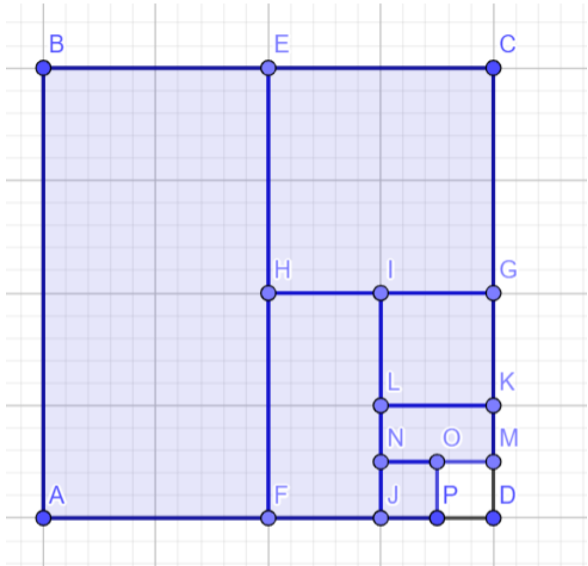

Figura 6: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$ *del área tomados. Fuente: Elaboración propia.*

Por medio de las figuras se extrae la idea de que $s_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, ya que se ve que en cada una de las iteraciones se toma el total del área menos una parte que se corresponde con $\frac{1}{2^n}$. Se podría realizar una prueba por inducción de la igualdad.

4.7.2. Problema 2. Sucesiones en los cables.

La resistencia de los cables puede mejorarse si se compactan según una distribución hexagonal. Un cable de "tamaño 5" formado por 61 hebras seguiría la siguiente distribución:

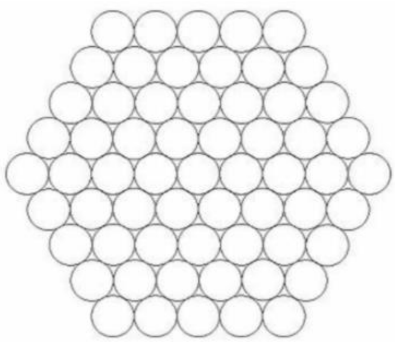

Figura 7: Ilustración del problema disponible en Nrich. Fuente: https://nrich.maths.org/steelcables

¿Cuántas hebras se utilizarían en un cable de "tamaño 7"? ¿Y en uno de "tamaño n"? ¿Por qué?

Solución:

Para el caso de n=7, podría dibujarse la estructura, bien utilizando algún programa informático como Geogebra, o bien a mano. Esto puede hacerse porque todavía no hay muchas hebras. Se puede ver que serían 127 hebras.

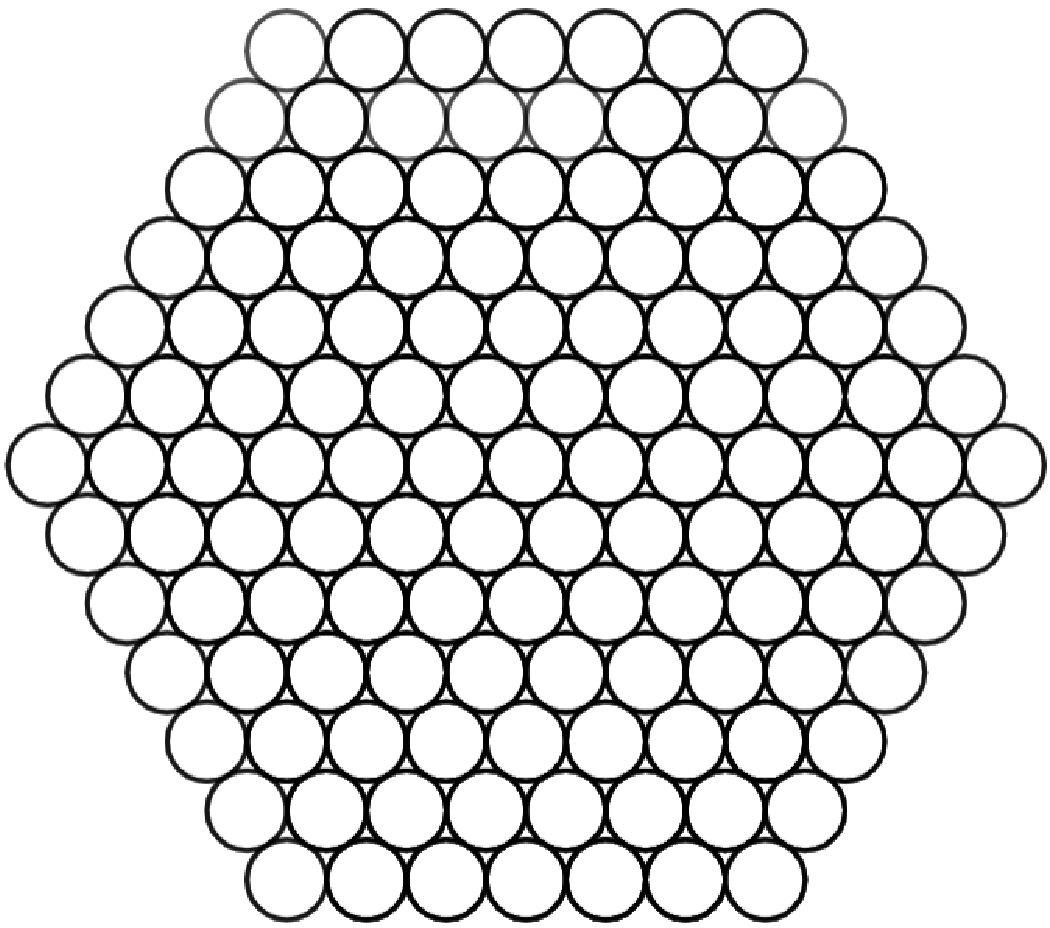

Figura 8: Representación del caso n=7 hecha en Geogebra. Fuente: Elaboración propia.

Para hallar el número de hebras se podría contar las del centro (que son 13), y después multiplicar por 2 el número de hebras en cada una de las filas superiores (se tendrían 24, 22, 20, 18, 16 y 14). Sumando todas estas quedaría 127.

En cuanto a cómo hallar una solución para el cable de “tamaño n”, en la página web de Nrich se muestras diferentes formas de llegar a la solución, se mostrarán a continuación 3 de ellas, si bien lo importante es que el alumno sea capaz de observar un patrón y traducirlo al lenguaje de las matemáticas, para después realizar las operaciones algebraicas necesarias para llegar a la solución.

Opción 1: En esta solución, se debe observar el siguiente patrón:

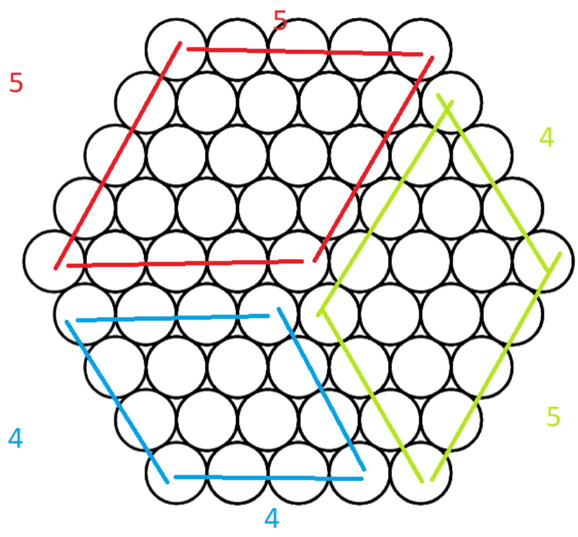

Figura 9: Dibujo de los patrones en el cable de tamaño 5. Fuente: Elaboración propia.

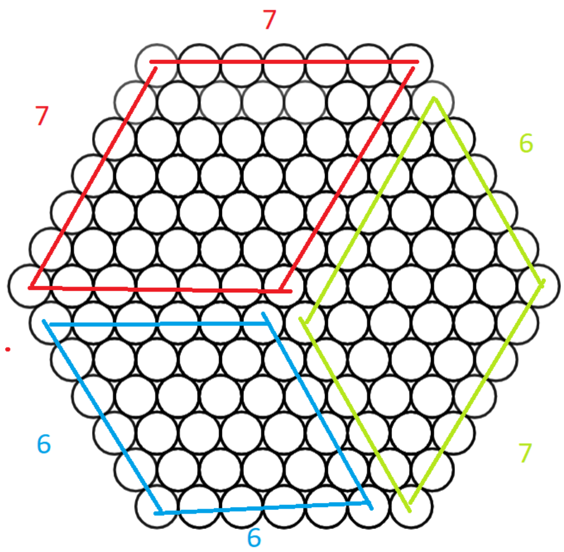

Figura 10: Dibujo de los patrones en el cable de tamaño 7. Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar en la figura del cable de tamaño 5 se tienen por un lado las hebras dentro de las líneas rojas, que serán $5 * 5 = 25$ hebras, las hebras dentro de las líneas azules que serán $4 * 4 = 20$ hebras y las hebras en las líneas verdes que son $4 * 5 = 20$ hebras. En el caso del cable de tamaño 7 se tienen las hebras dentro de las líneas rojas, que serán $7 * 7 = 49$ hebras, las hebras dentro de las líneas azules que serán $6 * 6 = 36$ hebras y las hebras en las líneas verdes que son $6 * 7 = 42$ hebras.

Como se puede intuir, el patrón que se sigue es que dentro de las líneas rojas quedan $n * n = n^2$ hebras, dentro de las líneas azules $(n-1)^2$ hebras y dentro de las líneas verdes $n * (n-1)$. Si sumamos todas las hebras se tiene:

$$n^2 + (n-1)^2 + n(n-1) = n^2 + n^2 - 2n + 1 + n^2 - n = 3n^2 - 3n + 1$$
$$= 3n(n-1) + 1$$

Por lo tanto el resultado para un cable de tamaño n será: $3n(n-1)+1$.

Opción 2: En esta solución se puede observar el siguiente patrón;

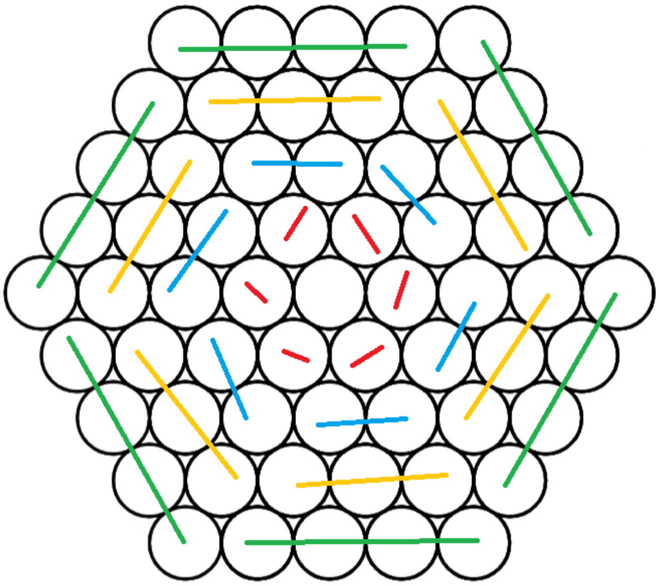

Figura 11: Dibujo del patrón de la opción 2 para el cable de tamaño 5. Fuente: Elaboración propia.

Se tienen $6 * 1 = 6$ hebras rojas, $6 * 2 = 12$ hebras azules, $6 * 3 = 18$ hebras amarillas, $6 * 4 = 24$ hebras verdes, y la hebra central. Si miramos el cable de tamaño 7.

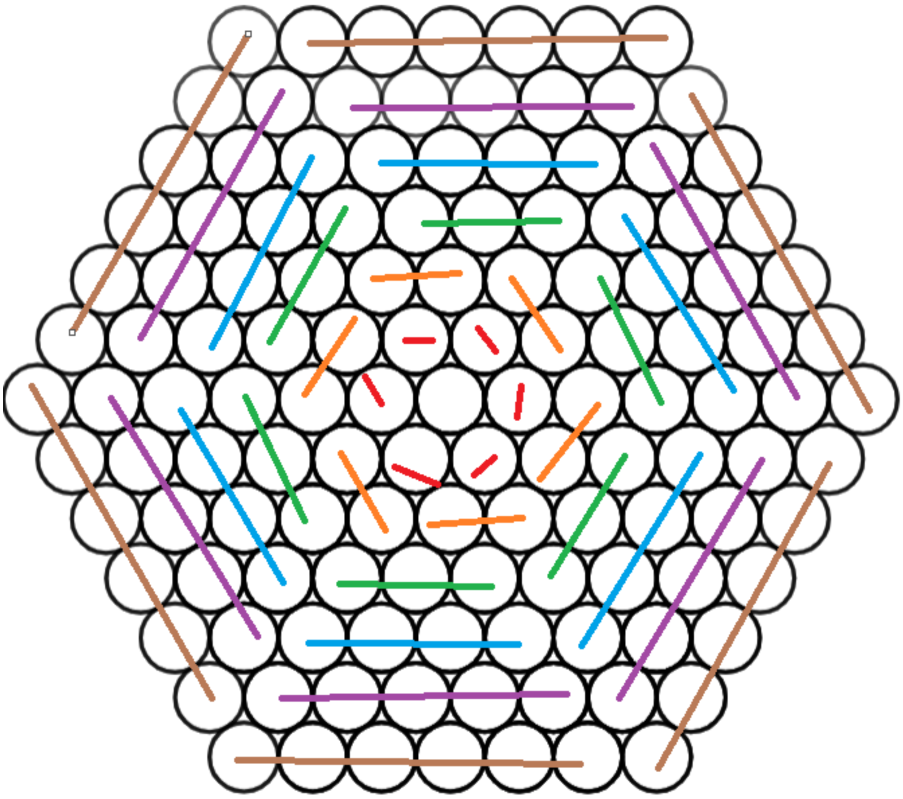

Figura 12: Patrón de la opción 2 en el cable de tamaño 7. Fuente: Elaboración propia.

En este caso se tienen las hebras anteriores más las hebras de color morado, que son $6 * 5 = 30$ hebras, $6 * 6 = 36$ hebras de color marrón.

Se puede observar que la suma de todas las hebras, para un cable de tamaño n será:

$$1 + 6 * (1) + 6 * (2) + 6 * (3) + \cdots + 6 * (n - 1)$$

Reordenando los términos:

$$1 + 6 * \big(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n - 1)\big) = 1 + 6\left(\frac{n * (n - 1)}{2}\right) = 1 + 3n(n - 1)$$

Existen otras opciones, una de ella se detallará en los anexos del trabajo.

4.7.3. Problema 3. Sobre el teorema de Nicómaco

Dada la sucesión $1, 8, 27, 64, 125, \ldots$ ¿Podrías indicar cuál es el término general de la sucesión? El matemático neopitagórico, Nicómaco de

Gerasa fue capaz de hallar una fórmula para expresar la suma de los términos de esta serie. Para $\mathbf{n}$ términos, Nicómaco descubrió que la suma de los términos sería $\mathbf{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2}$. Para el caso de los tres primeros términos se puede realizar el siguiente dibujo:

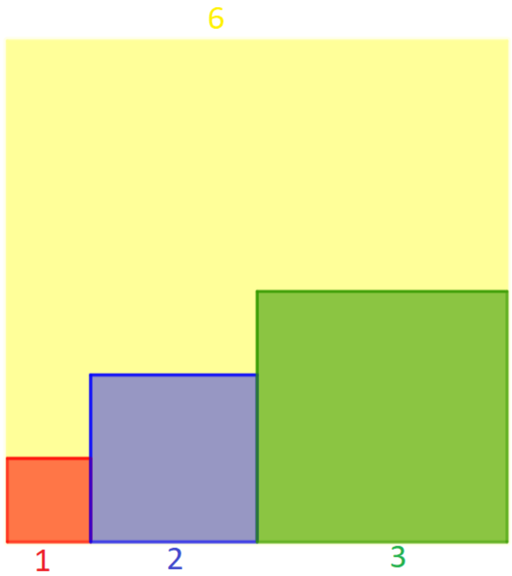

Figura 13: Representación del teorema de Nicómaco (cuadrado). Fuente: Elaboración propia.

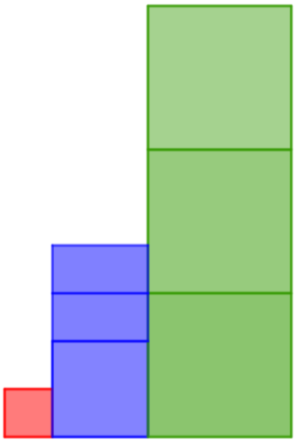

Figura 14: Representación del teorema de Nicómaco (suma de cubos). Fuente: Elaboración propia.

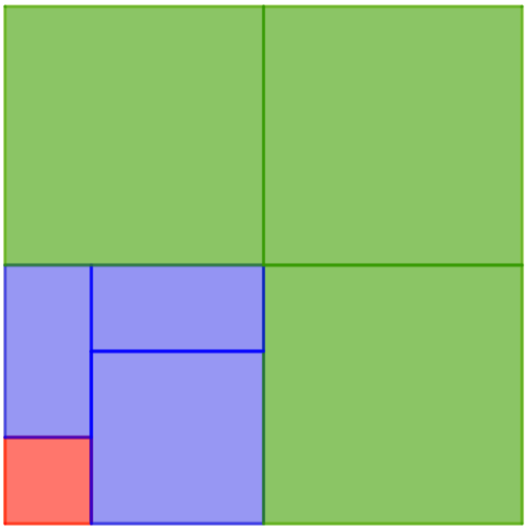

Figura 15: Representación del teorema de Nicómaco (igualdad). Fuente: Elaboración propia.

¿Podrías explicar que representa cada uno de los dibujos? Replica esta representación de la suma de términos de esta sucesión para $\mathbf{n = 5}$.

Solución:

Se puede observar que el término general de la sucesión es $a_n = n^3$.

El primer dibujo (Figura 13) muestra la expresión $(1+2+3)^2$, se trata de un cuadrado de lado 6, el segundo dibujo (Figura 14) se corresponde con la parte de la expresión $1^3 + 2^3 + 3^3$ y el tercer dibujo (Figura 15) demuestra la igualdad $(1+2+3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$.

Para realizar la representación del caso $n = 5$, se podría usar Geogebra:

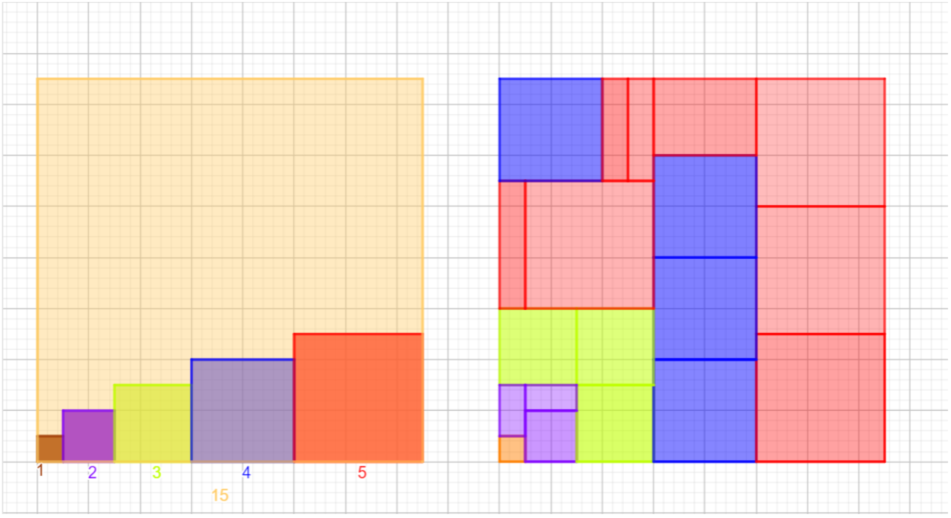

Figura 16: Representación para el caso de n=5. Fuente: Elaboración propia.

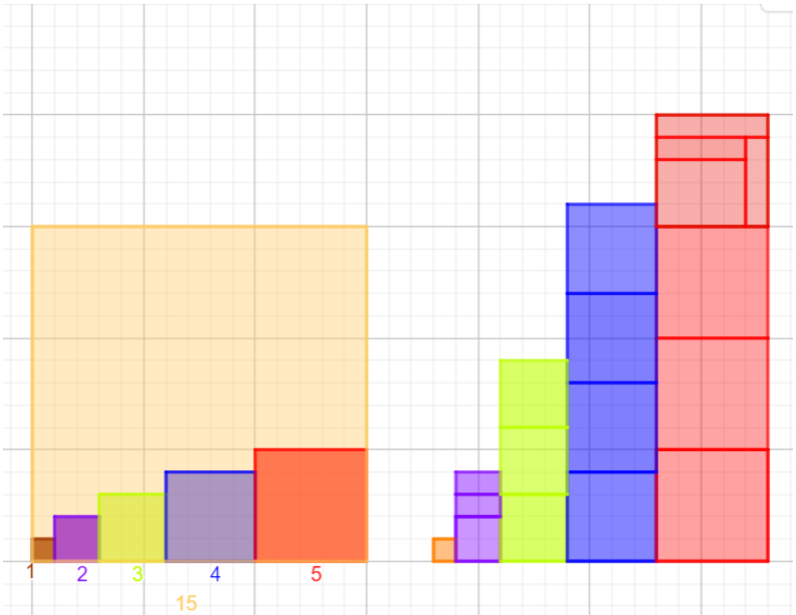

Figura 17: Representación para el caso n=5. (Segunda parte). Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 16, se muestra la igualdad $(1+2+3+4+5)^2 = 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$. En la Figura 17 se muestran la expresión $(1+2+3+4+5)^2$ y a su derecha la expresión $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$.

4.7.4. Problema 4. La sucesión de Fibonacci

La sucesión $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$ es conocida como la sucesión de Fibonacci, ¿Cuál es el término general de la sucesión? ¿Es una sucesión geométrica o aritmética? Utilizando la sucesión de Fibonacci se

puede generar la siguiente espiral, llamada espiral de Fibonacci, que es bastante recurrente en el arte. ¿De qué manera se utiliza la sucesión de Fibonacci? (Se ha empezado por el primer término de la sucesión) ¿Cuántos términos de la sucesión se han aplicado en la figura 18?

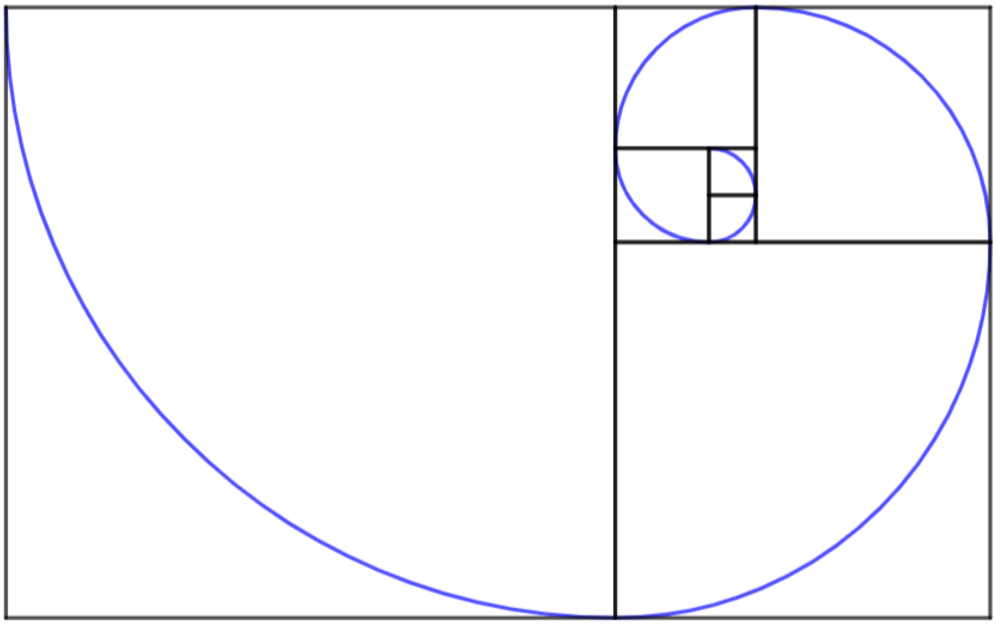

Figura 18: Espiral de Fibonacci. Fuente: Elaboración propia.

Una de las fórmulas para hallar el término general de la sucesión de Fibonacci es la fórmula de Binet $\mathbf{a_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}}$, donde $\boldsymbol{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$. ¿Podrías hallar el término 20? ¿Qué ventaja ofrece la fórmula del Binet para el término general?

Solución:

Una fórmula para hallar el término general es la siguiente: $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, teniendo en cuenta que $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$. No se trata de una sucesión geométrica ni de una sucesión aritmética.

Para generar la espiral de Fibonacci se dibujan los cuadrados cuyos lados miden los términos de la sucesión de manera contigua como en la figura 18. Después se dibuja el arco que une los puntos de la diagonal tal y como se ve en la figura 18. En la figura 18 se han utilizado 8 términos (teniendo en cuenta que el primer término es 0), se pueden observar dos cuadrados de lado 1 y después cuadrados de lados 2, 3, 5, 8 y 13.

El término $\mathbf{a_{20}} = \frac{\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{20}} - (\mathbf{1} - \boldsymbol{\varphi})^{\mathbf{20}}}{\sqrt{\mathbf{5}}} = 6765$. La ventaja que ofrece la fórmula de Binet es que no será necesario calcular las 2 términos anteriores para calcula un término cualquiera de la sucesión.

4.8. Recursos

Dado que la propuesta es aplicable en todos los cursos de la ESO y Bachillerato se deberá utilizar recursos acordes al curso y los contenidos en que se aplique la misma. Si bien se tendrán en cuenta los objetivos que se persiguen en la propuesta, esto motivará la elección de unos problemas u otros. Una vez elegidos, el docente deberá seleccionar que recursos se adaptan mejor a los mismos.

Es importante aplicar diferentes tipos de recursos, que permitan explicar los problemas y hacer que los alumnos aprendan a aplicar las matemáticas gracias a diferentes herramientas. Será interesante el uso de recursos informáticos y tecnológicos. Se deberá intentar que los alumnos aprendan a utilizar diferentes programas informáticos como Geogebra, las herramientas disponibles en páginas web como Mathigon, o dispositivos como los ordenadores, calculadoras o incluso sus dispositivos móviles.

También será necesario introducir recursos manipulativos que ayuden a los alumnos en el proceso de resolución de los problemas y de visualización de los contenidos matemáticos más abstractos. Se pueden utilizar modelos que representen ciertas figuras o cuerpos geométricos, dados, monedas o ruletas para los contenidos relacionados con la estadística y cualquier otro recurso que pueda ser manejado de manera que ayude en el proceso de comprensión de las matemáticas.

Además se debe tener en cuenta la utilidad de ciertos repertorios de problemas como los ofrecidos por el Concurso de Primavera, los problemas de Olimpiadas Matemáticas o páginas web como Nrich. Estos recursos permiten al docente encontrar problemas adecuados para la propuesta. Los alumnos también pueden beneficiarse de estas colecciones de problemas, si el docente se las presenta, ellos podrán trabajar desde casa.

En el ejemplo de aplicación de la propuesta que se mostrará se utilizarán materiales manipulativos como folios para representar algunas sucesiones y cartulinas, programas informáticos como Geogebra y las herramientas disponibles en Mathigon, esto conlleva que los alumnos deberán tener acceso a ordenadores en alguno de los problemas y las colecciones de problemas disponibles en Nrich.

4.9. Evaluación

Será necesario realizar una evaluación de la propuesta, que permita conocer el desempeño de los alumnos, el nivel de contenidos y las habilidades alcanzadas. También será importante que no solo los alumnos sean evaluados sino también la propuesta, tanto el docente como los alumnos deberán evaluarla tras su realización.

A través de la evaluación del alumnado y la propuesta podremos conocer su efectividad, si es capaz de cumplir los objetivos que se han marcado, qué cambios deben ser realizados para mejorarla y si los problemas utilizados y las metodologías aplicadas son los adecuados.

La evaluación del alumnado debe contemplar a cada uno de sus alumnos con sus diferencias, siendo por lo tanto una evaluación individualizada. Además se deberá llevar a cabo una evaluación cualitativa y continua, el docente deberá conocer la situación del alumnado antes de poner en práctica la propuesta, el desarrollo del alumnado durante su aplicación y también cuál es la situación al acabar, por lo que se deberá realizar una evaluación final.

Se utilizarán para la evaluación varias rubricas. Una para la evaluación del portafolios que los alumnos deberán realizar con los problemas y sus soluciones, lo que permitirá saber el nivel de contenidos y las habilidades matemáticas que el alumno ha alcanzado. Es importante tener en cuenta que esta rúbrica debe ser adaptada a los contenidos o la unidad didáctica en la que la propuesta ha sido utilizada. Se mostrará una que muestre los aspectos a evaluar de manera general.

-	EXPERTO	AVANZADO	APRENDIZ	NOVEL	PESO
	4	3	2	1	
Uso del lenguaje matemático adecuado y capacidad para expresar sus ideas.	Es capaz de expresar todas sus ideas y además incorpora el nuevo lenguaje aprendido.	Puede expresar todas sus ideas utilizando el lenguaje matemático, aunque a veces comete ligeros errores o imprecisiones.	Tiene ciertos problemas para utilizar los nuevos símbolos, pero es capaz de hacerse entender es la mayoría de los casos.	Tiene problemas para expresar muchas de sus ideas utilizando el lenguaje matemático.	10%
Comprende los enunciados de los problemas, es capaz de resolverlos y explicar la solución y como llegar a ella.	Es capaz de resolver todos los problemas, puede explicar sus razonamientos y comprende el porqué de la solución.	Es capaz de resolver todos los problemas, aunque a veces le cuesta explicar los razonamientos seguidos y el porqué de la solución.	Resuelve la mayoría de los problemas, pero tiene problemas para explicar sus procedimientos y las soluciones halladas.	Tiene problemas para resolver los problemas y a veces no comprende porqué utiliza los diferentes procesos que le permiten llegar a la solución.	40%
Muestra originalidad y creatividad en la resolución de los problemas	Sus procesos de resolución son originales, es capaz de hallar la solución de varias maneras y explicar las diferencias en los procedimientos seguidos.	El alumno es original, puede hallar las diferentes soluciones en casi todos los problemas, sin embargo a veces no entiende las diferencias entre uno y otro método.	Es capaz de hallar formas originales de resolver algunos de los problemas, pero no identifica las diferencias en los procedimientos.	Tan solo es capaz de resolver los problemas de una manera, sus procedimientos son poco originales.	15%
Utiliza adecuadamente los materiales manipulativos y/o los programas informáticos en la resolución de los problemas.	Aplica estos recursos de la manera adecuada en cualquiera de los problemas. Utiliza el recurso más adecuado en cada una de las situaciones.	Logra resolver los problemas utilizando los recursos, aunque en algunos problemas no identifica que recursos son los óptimos.	Tiene problemas para utilizar los recursos en algunos problemas.	No sabe utilizar los recursos para la resolución de los problemas.	10%
Es capaz de profundizar en los contenidos	Sí, además muestra interés en	Sí, muestra especial interés en	Tiene problemas para comprender	En general no es capaz de trabajar con los	25%

y trabaja adecuadamente con los contenidos que enriquecen el currículo.	conocer más contenidos y aplicaciones de los mismos.	algunos contenidos.	algunos de los contenidos de enriquecimiento o la profundización en ciertos contenidos.	contenidos de enriquecimiento ni la profundización de los contenidos.	

Tabla 1: Rúbrica para la evaluación de los contenidos trabajados en la propuesta. Fuente: Elaboración propia.

Otra rubrica en la que se tendrán en cuenta aspectos como la motivación del alumno durante la actividad, su actitud en la actividad que deben realizar de manera colaborativa y durante la propuesta y la creatividad de estos.

	EXPERTO	**AVANZADO**	**APRENDIZ**	**NOVEL**	**PESO**
	4	**3**	**2**	**1**	
El alumno se ha mostrado motivado durante el desarrollo de la propuesta.	Se le ha visto concentrado durante la propuesta e incluso ha expresado deseos de realizar más actividades del estilo.	Si, además ha pedido más información sobre alguno de los contenidos trabajados	Ha mostrado interés durante alguna de las actividades, pero no en todas ellas.	El alumno estaba falto de motivación y no ha mostrado interés.	10%
Escucha al resto de compañeros en la actividad colaborativa y respeta los turnos de palabra	Sí, es muy respetuoso y siempre trata de escuchar las ideas de sus compañeros, debatiendo con ellos.	En general si, aunque a veces le cuesta llegar a acuerdos con sus compañeros.	A veces hace las cosas sin comunicarse con sus compañeros, pero si estos le preguntan es capaz de debatir con ellos y llegar a un acuerdo.	No escucha a sus compañeros y trata de hacerlo todo por sí mismo, sin colaborar.	25%
Explica sus ideas al resto de compañeros, consigue que le entiendan y les ayuda durante las actividades	Sí, consigue que sus compañeros entiendan todas sus ideas y siempre les ayuda durante las actividades colaborativas.	Ayuda a sus compañeros durante las actividades colaborativas pero a veces le cuesta que entiendan sus ideas.	A veces no ayuda a sus compañeros y le cuesta expresar sus ideas y opiniones.	No ayuda a sus compañeros ni les explica sus ideas,	25%
Investiga tratando de profundizar y conocer más cosas relacionadas con lo explicado.	Sí, durante todas las actividades ha mostrado interés en conocer detalles y aprender más, incluso lo ha buscado por sí	Sí, durante las actividades ha mostrado interés en conocer más detalles.	Tan solo en algunas actividades ha mostrado interés en conocer más detalles.	No ha mostrado sentido de la investigación durante las actividades.	10%

	mismo.				
Trabaja de manera autosuficiente, siendo capaz de aprender por sí mismo.	Sí, es capaz de resolver todas las actividades por si mismo y de corregir sus propios errores.	Sí, pero a veces precisa de ayuda para corregir sus fallos.	Durante algunas actividades no sabe cómo actuar ni localiza sus errores.	Necesita de ayuda durante todas las actividades.	30%

Tabla 2: Rubrica sobre el comportamiento del alumno durante la propuesta. Fuente: Elaboración propia.

Por último habrá una rúbrica destinada a la evaluación de la propuesta para que los alumnos realicen.

	MUCHO	**BASTANTE**	**POCO**	**NADA**	**PESO**
	4	**3**	**2**	**1**	
La propuesta ha hecho que me sienta más motivado/a durante las clases de matemáticas	Sí, me gustaría seguir trabajando de esta manera.	Sí, utilizaría estos métodos alguna vez más.	Solo me ha motivado	No, me ha parecido aburrida y no he disfrutado.	20%
Los problemas trabajados durante la propuesta me han parecido interesantes y de un nivel adecuado.	Sí, querría hacer más problemas de este tipo.	Sí, de vez en cuando querría hacer más problemas de este tipo.	Solo alguno de los problemas me ha parecido interesante.	No, ninguno de los problemas me ha gustado.	25%
Los nuevos contenidos introducidos por medio de la propuesta me han parecido interesantes.	Sí, querría trabajar más contenidos como los vistos y profundizar en los ya aprendidos durante la propuesta.	Sí, pero cambiaría alguno de los contenidos de enriquecimiento.	En general no me han parecido interesantes, a excepción de alguno de ellos.	No, ninguno de los contenidos era de mi interés.	25%
Creo que la forma de trabajar durante la propuesta ha sido interesante y adecuada.	Sí, me gustaría seguir aplicando estos métodos durante las clases.	Sí, aunque cambiaría algunos aspectos.	Cambiaría la forma de trabajar pero mantendría algunas de las actividades.	No, no he estado cómodo durante el desarrollo de la propuesta y los métodos no me parecen los adecuados.	10%

He disfrutado aprendiendo y manipulando los recursos que se han utilizado en la propuesta.	Sí, me han parecido muy útiles y sencillos de utilizar.	Sí, aunque alguno de los recursos no me ha gustado.	En general no me han gustado los recursos aunque creo que son útiles.	No me han gustado los recursos ni creo que sean útiles.	10%
Considero que el tiempo dedicado a la propuesta ha sido el adecuado.	Sí, se ha utilizado el tiempo adecuado.	Sí, aunque en alguna actividad habría sido necesario algo más o menos de tiempo.	Ha faltado o sobrado tiempo en mcuahs de las actividades	El tiempo usado en cada actividad no ha sido el adecuado.	10%

Tabla 3: Rúbrica de evaluación de la propuesta por parte del alumnado. Fuente: Elaboración propia.

5. DISCUSIÓN

Respecto a la viabilidad de la propuesta, no ha podido ser puesta en práctica en un aula todavía, sin embargo considero que es totalmente viable llevarla a cabo, siempre que se tengan en cuenta los diferentes aspectos ya comentados.

Como se ha explicado previamente, no serán necesarios unos recursos específicos, por lo que esto no supondrá un problema para la realización de la propuesta. El docente deberá elegir que recursos utilizar cuando la aplique en las diferentes unidades didácticas, por lo que deberá ser consciente de los recursos disponibles.

Si bien será necesario que los alumnos tengan acceso a ordenadores o dispositivos móviles que permitan trabajar las competencias digitales.

Tras la investigación realizada y teniendo en cuenta el marco teórico se ha optado por el uso de la resolución de problemas debido a las diferentes ventajas que este método tiene según diferentes autores. Además tras haber estudiado el estado de la cuestión se ha desarrollado una propuesta que permita trabajar en el aula, ya que son varias las propuestas que trabajan con los alumnos de manera extraescolar, pero pocas las que lo hacen dentro del aula.

Las ventajas que esta propuesta ofrece son varias. En primer lugar, se logra dar la atención necesaria a los alumnos de altas capacidades sin que estos deban abandonar el aula. Como se ha especificado en el marco teórico, muchas de las formas de atención a estos alumnos se llevan a cabo en un horario extraescolar. Esto puede suponer un problema para este alumnado, ya que les exige una sobrecarga de tiempo.

Por medio de la propuesta evitamos que estos alumnos dediquen tiempo a actividades y ejercicios que suelen ser repetitivos y desmotivadores para ellos, haciendo que dediquen su tiempo a problemas mediante los cuales se enriquece su currículo o se profundiza en los contenidos.

Además hacer que estos alumnos abandonen el aula durante las clases para ofrecerles esa atención que demandan hace que se aíslen del grupo. Se debe trabajar desde la inclusión, para que se dé un intercambio y colaboración entre todos los alumnos en el aula y esta propuesta permite hacerlo.

Otra clara ventaja es la posibilidad que se ofrece de dar atención a este alumnado durante todas las unidades didácticas del curso y de hecho, en todos los cursos. En este trabajo se ha mostrado la aplicación de la propuesta a unos contenidos concretos del curso de 3º de la ESO, sin embargo, como se ha explicado, es posible adaptar la propuesta a todos los cursos.

También puede aplicarse la propuesta en diferentes centros y comunidades autónomas, tan solo debe adaptarse al currículo de la comunidad correspondiente.

Otra de las ventajas que la propuesta tiene es la posibilidad de enriquecer el currículo de los alumnos de una manera motivadora para ellos. La resolución de problemas resulta muy interesante para el alumnado de altas capacidades matemáticas, por lo que presentar diferentes contenidos por medio de problemas es una buena manera de que estos alumnos sientan interés en las matemáticas y aprendan nuevos contenidos o profundicen en los ya aprendidos.

Además una gran cantidad de competencias clave pueden ser trabajadas por medio de ella.

Respecto a los inconvenientes que podrían surgir, el primero que se debe comentar es la dificultad de llevarla a cabo. Se ha planeado la propuesta de manera que las actividades de la misma deberán ser realizadas por los alumnos de altas capacidades matemáticas, mientras el resto de la clase realiza actividades similares. Esto puede provocar que el docente no pueda atender a todos los alumnos a la vez. Para tratar de resolver este problema se ha diseñado una actividad en la que todos los alumnos trabajarán de manera colaborativa (al menos uno de los problemas de la propuesta se resolverá de manera colaborativa).

Otra dificultad que puede surgir se dará en la elección de los problemas. Es importante que estos traten de profundizar en los contenidos o enriquezcan el currículo. Sin embargo, el docente debe ser cuidadoso con los problemas elegidos, siendo consciente del nivel de los alumnos para no elegir unos que resulten en exceso fáciles o difíciles.

La puesta en práctica de la propuesta supone un esfuerzo por parte del docente y de los alumnos, se debe ser consciente de ello y trabajar en consecuencia.

Una buena manera de solventar los inconvenientes que podrían surgir en el desarrollo de la propuesta será la realización de una correcta planificación por parte del docente, teniendo siempre en cuenta las opiniones del alumnado. También sería interesante la combinación de esta propuesta con otras que pretenden cumplir objetivos similares, como la participación de estos alumnos en talleres extraescolares, o la colaboración con proyectos como ESTALMAT.

Otra forma de solventar las dificultades sería trabajar a través de la docencia compartida, utilizando el recurso personal de dos docentes en el aula durante una de estas sesiones.

6. CONCLUSIONES

Gracias a la realización de este trabajo me he dado cuenta de la importancia de crear propuestas que permitan dar respuestas a las diferentes necesidades que los alumnos tienen. Sobretodo he comprendido a valorar la necesidad de la atención a la diversidad. Muchas veces estos alumnos no son atendidos como deberían, esto provoca muchos de los problemas que el sistema educativo sufre.

También me he dado cuenta del esfuerzo que conlleva realizar una propuesta de innovación en el aula. En primer lugar es necesario localizar un problema en el aula y los docentes muchas veces no disponen del tiempo y los recursos necesarios. Tras esto se debe realizar una investigación sobre la naturaleza del problema, la forma de tratarlo que otros autores proponen y valorar aquellas que sean las óptimas.

Sobre el contenido de mi propuesta, me ha sorprendido las diferentes opiniones que existen entre los autores sobre el tema. Muchas veces el sistema educativo trata de apoyar al alumnado que presenta dificultades de aprendizaje que no les permiten llegar a los niveles mínimos de contenidos, olvidando a aquel alumnado que muestra altas capacidades. Esto puede inducir a resultados de fracaso escolar o abandono escolar entre este tipo de alumnado, pese a sus altas capacidades.

Por otro lado, he podido aplicar gran parte de los conocimientos que he adquirido durante este año. Desde los conocimientos sobre las diferentes leyes educativas, la importancia de la inclusión y la atención a la diversidad a conocimientos más específicos sobre las matemáticas, como la forma de generar problemas útiles para el alumnado o los diferentes recursos y métodos con los que hemos estado trabajando.

En mi opinión es muy importante que el alumnado aprenda a utilizar las nuevas tecnologías y los diferentes recursos que estas nos ofrecen y para ello se les deben presentar actividades y contextos en lo que puedan comprender las ventajas que estas ofrecen.

Considero que todavía se debe continuar investigando en el campo de la atención a la diversidad, especialmente en la atención al alumnado de altas capacidades. Es necesario apoyar proyectos como ESTALMAT o los concursos que permiten a estos alumnos desarrollar sus capacidades y mantener su motivación en las matemáticas.

7. REFERENCIAS

Acosta, Y., & Alsina, Á. (2017). *Conocimientos del profesorado sobre las altas capacidades y el talento matemático desde una perspectiva inclusiva.*

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa [en línea].* Tesis doctoral. Universidad de Granada. Granada. Recuperado de http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/1827/1/17349515.pdf

Blanco, R., Ríos, C. G., & Benavides, M. (2004). *Respuesta educativa para los niños con talento. La educación de niños con talento en Iberoamérica,* 49-60.

Castro, E., Ruiz-Hidalgo, J.F. y Castro-Rodríguez, E. (2015). *Retos, profesores y alumnos con talento matemático.* Aula, 21, 85-104.

Decreto 19/2015, de 12 de junio, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se regulan determinados aspectos sobre su organización así como la evaluación, promoción y titulación del alumnado de la Comunidad Autónoma de La Rioja, *Boletín Oficial de La Rioja,* 79 de 19 de junio de 2015, 12368-12730.

Fernández, M., & Antonio, P. (2011). *Las altas capacidades y el desarrollo del talento matemático. El proyecto Estalmat-Andalucía.* UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 27, 89-113.

Fernández, O. D., Castaño, M. T. S., Tojo, C. M. P., & Barreiros, M. F. (2008). *Talentos matemáticos: análisis de una muestra*. Faisca: revista de altas capacidades, 13(15), 30-39.

Freiman, V. (2006). *Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A challenging situations approach.* The Mathematics Enthusiast, 3(1), 51-75.

Gardner, H. (1998). *Inteligencias múltiples*. Barcelona: Paidós.

Gaspar Alonso-Vega, M. (2001). *V CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS.* Sigma-Revista de matemáticas, (19), 133-145.

Genovard, C. y Castelló, A. (1990*). El límite superior. Aspectos psicopedagógicos de la excepcionalidad intelectual.* Madrid: Pirámide.

Gutiérrez, Á., & Jaime, A. (2013). *Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas.* Departamento de didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia.

Hernández, E., & Sánchez, M. (2008). *ESTALMAT: Un programa para detectar y estimular el talento matemático precoz.* UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 16, 113-122.

Jaime, A., & Gutiérrez, A. (2014*). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas. Resolver problemas*. Estudios en memoria de Fernando Cerdán, 2(14), 147-190.

Krutetskii, V.A. (1969): *An analysis of the individual structure of mathematical abilities in schoolchildren.* En J. Kilpatrick, & I. Wirszup (Eds.), Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, Vol. II (pp. 59-104). The Structure of Mathematical Abilities. Chicago: University of Chicago Press.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. *Boletín Oficial del Estado,* 295 de 19 de diciembre de 2013, 1-64.

https://www.boe.es/buscar/pdf/2013/BOE-A-2013-12886-consolidado.pdf

Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado.* 340 de 30 de diciembre de 2020. 122868-122953.

https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3/con

Martínez, E. C., Benavides, M., & Alex, I. S. (2006). *Cuestionario para caracterizar a niños con talento en resolución de problemas de* *estructura multiplicativa.* Faisca: revista de altas capacidades, 11(13), 4-22.

Mihaela Singer, F., Jensen Sheffield, L., Freiman, V., & Brandl, M. (2016). *Research on and activities for mathematically gifted students.* Springer Nature.

Molina, E. C., Gómez, D. C., & Sánchez, L. P. (2009). *Inteligencias múltiples y altas capacidades.: Una propuesta de enriquecimiento basada en el modelo de Howard Gardner.* Faisca: revista de altas capacidades, 14(16), 4-13.

Navío, N. A. (2017). *Un estudiante con altas capacidades en mi aula,¿ Ahora qué?.* Revista de Educación Inclusiva, 10(1), 265-277.

Niederer, K.; Irwin, R. C.; Irwin, K. C. y Reilly, I. L. (2003) *Identification of Mathematically Gifted Children in New Zealand. High Ability Studies,* 14 (1), 71- 84. http://dx.doi.org/10.1080/13598130304088

Ramírez, R., & Sánchez, M. (2020). *El proyecto ESTALMAT. Más de 20 años estimulando el talento matemático.*

Real Sociedad Matemática Española (2021). *Olimpiada Matemática Española.* Recuperado el 13 de junio de 2021,

https://www.rsme.es/olimpiada-matematica-espanola/

Renzulli, J. (2001). *Un sistema práctico para identificar estudiantes excepcionales y talentosos.* Códice, 2(2), 38-44.

Rodrigues Maia-Pinto, R., & de Souza Fleith, D. (2012). *Aceleración de la enseñanza para alumnos superdotados: argumentos favorables y contrarios*. Revista de Psicología (PUCP), 30(1), 189-214.

Rodríguez, M. F. (2013). *Alumnado con altas capacidades: Un enfoque de la respuesta educativa*. Revista de Claseshistoria, (9), 6.

Rossi Casé, L. E., Neer, R. H., & Lopetegui, M. S. (2002). *Test de matrices progresivas de raven: construcción de baremos y constatación del" efecto flynn".* Orientación y sociedad.

Segovia, I. y Castro, E. (2004). *La educación de los niños con talento en España.* En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds.), *La Educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 115-126). Santiago (Chile): OREALC-Unesco.

Sternberg, R.J. (1988). *The triarchic mind: A new theory of human intelligence.* New York: Viking Penguin, Inc.

Torrego, J. C., Boal, M., & Bueno, A. (2011). *Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo. Un modelo de respuesta educativa*, 89-124.

Tourón, J., Marcos, G., y Tourón, M. (2010). *La educación online con alumnos de alta capacidad intelectual. Evaluación de una intervención en el ámbito de las Matemáticas.* Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado [en línea], 13(1), pp. 119-135. Recuperado de http://sid.usal.es/idcos/F8/ART15557/educacion_online_alumnos_alta_capacidad.pdf

Uclés, R. R., & Martínez, P. F. (2018). *El rincón de ESTALMAT.*

Universidad de Cambridge (2021). *Double Trouble.* NRICH. Recuperado el 16 de junio de 2021, https://nrich.maths.org/8096.

Universidad de Cambridge (2021). *Steel Cables.* NRICH. Recuperado el 16 de junio de 2021, https://nrich.maths.org/steelcables.

Wilson, K. y Briggs, M. (2002*). Able and gifted: a case study of year 6 children.* En A.D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceeding of the 26 th Conference of the nternational Group for the Psychology of Mathematics Education.* (vol. 1, .328). UEA Norwich, U.K

Zarzar, C. B., Gonzalez, A. A., & Ovando, M. Y. L. (2016). *Identificación de estudiantes con altas capacidades matemáticas en educación primaria.* Horizontes Pedagógicos, 18(2), 66-85.

8. ANEXOS

8.1. ANEXO 1

Se muestran a continuación otra solución posible al problema 2 mostrado en el ejemplo:

Opción 3:

Observando los siguientes patrones en los cables de tamaño 5 y tamaño 7:

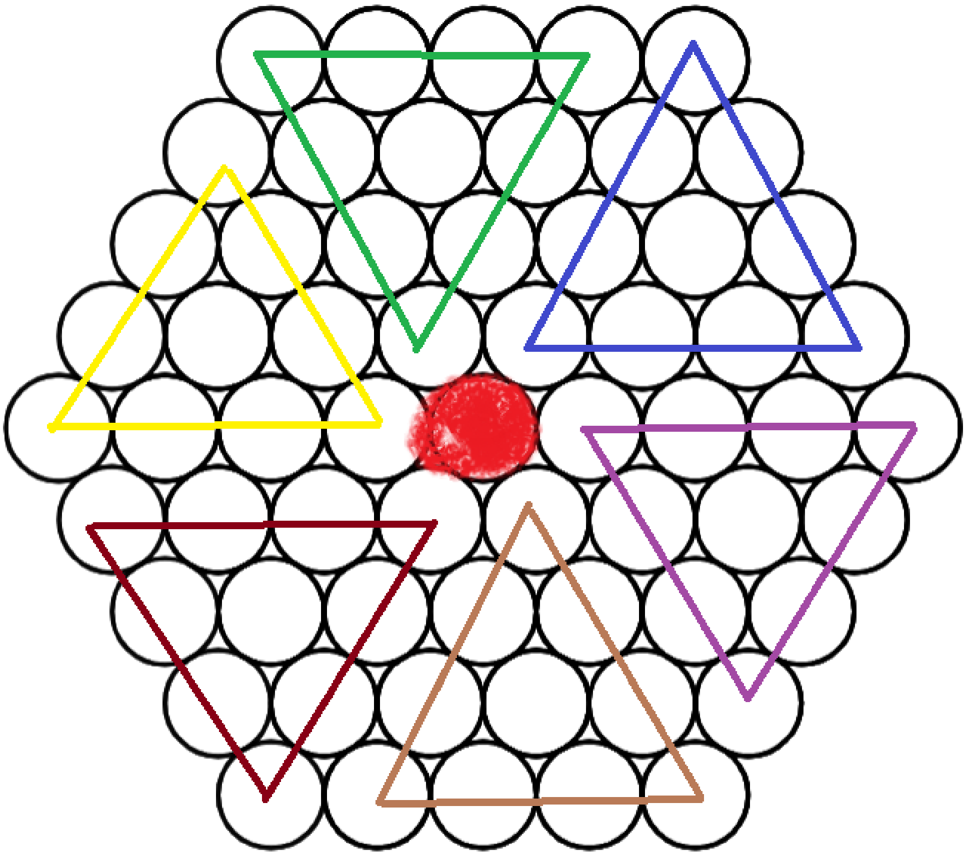

Figura 19: Patrón triangular en el cable de tamaño 5. Fuente: Elaboración propia.

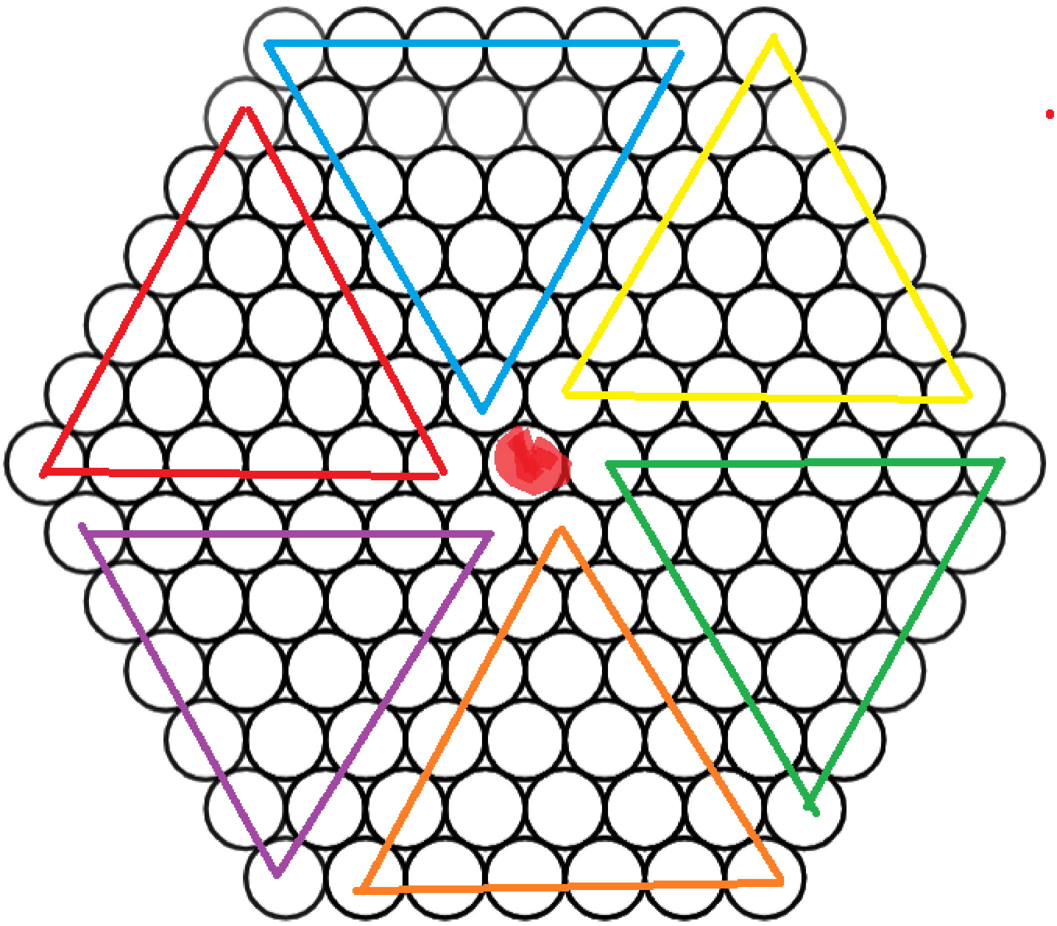

Figura 20: Patrones triangulares en el cable de tamaño 7. Fuente: Elaboración propia,

Se puede intuir que en un cable de tamaño n habrá 6 triángulos como los remarcados en las figuras 19 y 20. Además habrá una hebra extra. En cada uno de los triángulos hay $1+2+3+\cdots+\mathrm{n}-1$ hebras, utilizando la fórmula para sumar números naturales consecutivos, tendremos que entre los 6 triángulos de un cable de tamaño n habrá: $6*\frac{\mathrm{n}*(\mathrm{n}-1)}{2}$ hebras, además habrá que sumar la hebra del centro, luego en un cable de tamaño n habrá un total de $3(n^2-n)+1$ hebras.