Tampereen yliopisto

Joni-Pekka Lintunen

KONTRAKTIOKUVAUKSET METRISESSÄ AVARUUDESSA

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Kandidaattitutkielma
Lokakuu 2022

TIIVISTELMÄ

Joni-Pekka Lintunen: Kontraktiokuvaukset metrisessä avaruudessa
Kandidaattitutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastollisen data-analyysin kandidaattiohjelma
Lokakuu 2022

Tässä tutkielmassa tutkitaan kontraktiokuvauksia. Kontraktiokuvaukset ovat erikoistapaus Lipschitz-kuvauksista. Kontraktiokuvauksessa kahden pisteen etäisyys pienenee aina vähintään jonkin vakiokertoimen verran. Tämän lisäksi tutkitaan kiintopisteitä eli pisteitä, joissa kuvaus ei muuta saamaansa arvoa. Tutkitaan myös kiintopisteiden ja kontraktiokuvausten välistä suhdetta. Kontraktiokuvauksia tutkitaan metrisissä avaruuksissa. Metriset avaruudet ovat avaruuksia, joissa kahden pisteen etäisyys voidaan laskea, sekä kolmioepäyhtälö pätee. Tutkielman alussa esitetään valmistelevia tarkasteluja, joita käytetään myöhemmin tulevien lauseiden todistamiseen. Tässä määritellään metriikka, metrinen avaruus sekä metrisen avaruuden ominaisuuksia. Esitetään myös myöhemmin tarvittavia lauseita ja annetaan esimerkki metriikasta, jota käytetään myöhemmässä todistuksessa. Tutkielman kolmannessa luvussa määritellään kontraktiokuvaus sekä kiintopiste, ja tutkitaan näiden ominaisuuksia. Näitä ominaisuuksia käytetään todistamaan Banachin kiintopistelause. Lause kertoo, että täydellisessä metrisessä avaruudessa kontraktiokuvauksella on täsmälleen yksi kiintopiste. Todistuksen jälkeen sovelletaan kontraktiokuvausten ominaisuuksia sekä Banachin kiintopistelausetta esimerkissä, jossa arvioidaan neliöjuuri kahden arvoa. Esimerkin jälkeen todistetaan Banachin kiintopistelauseen seurauksia. Näiden seurauksien avulla voidaan laskea esimerkissä tehdyn arvion tarkkuuttaa sekä nopeutta. Tutkielman viimeisessä luvussa siirrytään yleistyksiin, ja yhtenä suurena kontraktiokuvausten sovelluksena todistetaan Picardin lause. Yleistyksissä todistetaan, että vain kuvauksen jonkin iteraation täytyy olla kontraktiokuvaus, jotta voidaan soveltaa Banachin kiintopistelausetta. Todistetaan myös lause, joka takaa kiintopisteen yksikäsitteisyyden, jos kuvausta käytettäessä jokaisen pisteen etäisyys pienenee, ja avaruus on jonokompakti. Näissä yleistyksissä kuvaus, jolla aloitetaan, ei välttämättä ole kontraktiokuvaus. Näiden yleistyksien jälkeen esitetään alkuarvo-ongelma. Tämän jälkeen esitetään aputuloksia, joiden avulla todistetaan Picardin lause. Picardin lause määrää tavallisten differentiaaliyhtälöiden olemassaolon ja yksikäsitteisyyden. Tutkielman lopuksi käytetään Picardin lausetta löytämään ratkaisu alkuarvo-ongelmalle.

Avainsanat: kontraktiokuvaus, kiintopiste, metrinen avaruus, alkuarvo-ongelma

Sisällys

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa tutkitaan kontraktiokuvauksia. Kontraktiokuvaukset ovat erikoistapaus Lipschitz-kuvauksista. Kontraktiokuvauksessa kahden pisteen etäisyys pienenee aina vähintään jonkin vakiokertoimen verran. Tämän lisäksi tutkitaan kiintopisteitä eli pisteitä, joissa kuvaus ei muuta saamaansa arvoa. Tutkitaan myös kiintopisteiden ja kontraktiokuvausten välistä suhdetta. Kontraktiokuvauksia tutkitaan metrisissä avaruuksissa. Metriset avaruudet ovat avaruuksia, joissa kahden pisteen etäisyys voidaan laskea, sekä kolmioepäyhtälö pätee. Tutkielman alussa esitetään valmistelevia tarkasteluja, joita käytetään myöhemmin tulevien lauseiden todistamiseen. Tässä määritellään metriikka, metrinen avaruus sekä metrisen avaruuden ominaisuuksia. Esitetään myös myöhemmin tarvittavia lauseita ja annetaan esimerkki metriikasta, jota käytetään myöhemmässä todistuksessa. Tutkielman kolmannessa luvussa määritellään kontraktiokuvaus sekä kiintopiste, ja tutkitaan näiden ominaisuuksia. Näitä ominaisuuksia käytetään todistamaan Banachin kiintopistelause. Lause kertoo, että täydellisessä metrisessä avaruudessa kontraktiokuvauksella on täsmälleen yksi kiintopiste. Todistuksen jälkeen sovelletaan kontraktiokuvausten ominaisuuksia sekä Banachin kiintopistelausetta esimerkissä, jossa arvioidaan neliöjuuri kahden arvoa. Esimerkin jälkeen todistetaan Banachin kiintopistelauseen seurauksia. Näiden seurauksien avulla voidaan laskea esimerkissä tehdyn arvion tarkkuuttaa sekä nopeutta. Tutkielman viimeisessä luvussa siirrytään yleistyksiin, ja yhtenä suurena kontraktiokuvausten sovelluksena todistetaan Picardin lause. Yleistyksissä todistetaan, että vain kuvauksen jonkin iteraation täytyy olla kontraktiokuvaus, jotta voidaan soveltaa Banachin kiintopistelausetta. Todistetaan myös lause, joka takaa kiintopisteen yksikäsitteisyyden, jos kuvausta käytettäessä jokaisen pisteen etäisyys pienenee, ja avaruus on jonokompakti. Näissä yleistyksissä kuvaus, jolla aloitetaan, ei välttämättä ole kontraktiokuvaus. Näiden yleistyksien jälkeen esitetään alkuarvo-ongelma. Tämän jälkeen esitetään aputuloksia, joiden avulla todistetaan Picardin lause. Picardin lause määrää tavallisten differentiaaliyhtälöiden olemassaolon ja yksikäsitteisyyden. Tutkielman lopuksi käytetään Picardin lausetta löytämään ratkaisu alkuarvo-ongelmalle.

Lukijalta edellytetään analyysin perusasioiden eli kurssien Analyysi A-C asioiden tuntemista sekä kurssin Euklidiset avaruudet asioiden tuntemisen. Myös differentiaaliyhtälöiden perusteet on hyvä tietää. Tutkielmassa käytetään lähdekirjoina Fitzpatrickin kirjaa Advanced Calculus: Second Edition sekä Thomas, Bruckner ja

Brucknerin kirjaa Elementary Real Analysis. Lähteenä toimii myös Conradin The Contraction Mapping Theorem.

2 Valmistelevia tarkasteluja

2.1 Tarvittavien käsitteiden määritelmiä

Luvussa 2 esitetään lyhyesti muutamia pääaiheen käsittelyssä tarvittavia apuneuvoja. Tässä pykälässä esitetään kolme määritelmää: metrinen avaruus, Cauchy-jono, täydellinen metrinen avaruus sekä jonokompakti metrinen avaruus.

Määritelmä 2.1 (Ks. [2, s. 314])**.** Olkoon X epätyhjä joukko. Kuvaus $d\colon X \times X \to [0, \infty)$ on metriikka joukossa X, jos sillä on seuraavat ominaisuudet:

1. $d(p, q) = 0$, jos ja vain jos $p = q$
2. $d(p, q) = d(q, p)$ kaikilla $p, q \in X$
3. $d(p, q) \leq d(p, w) + d(w, q)$ kaikilla $p, q, w \in X$.

Pari (X, d) on metrinen avaruus.

Määritelmä 2.2 (Ks. [2, s. 322])**.** Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Joukon X jono (p_k) on Cauchy-jono, jos kaikilla luvuilla $\epsilon > 0$ on olemassa $K \in \mathbb{N}$, jolle

$$d(p_k, p_j) < \epsilon \quad \text{kaikilla } k, j \geq K.$$

Tätä ehtoa kutsutaan Cauchyn ehdoksi.

Määritelmä 2.3 (Ks. [2, s. 323])**.** Metrinen avaruus on täydellinen, jos sen jokainen Cauchy-jono suppenee.

Määritelmä 2.4 (Ks. [2, s. 342])**.** Metrinen avaruus X on jonokompakti, jos jokaisella sen jonolla on osajono, joka suppenee kohti avaruuden X pistettä.

2.2 Tarvittavia lauseita ja tarvittava esimerkki

Esitetään seuraavaksi kaksi lausetta sekä annetaan esimerkki metriikasta, jota tullaan käyttämään myöhemmin Picardin lauseen todistamiseen.

Lause 2.1. *Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus ja $Y \subset X$ epätyhjä. Tällöin (Y, d) on täydellinen metrinen avaruus, jos ja vain jos Y on suljettu joukon X osajoukko.*

Todistus (Ks. [2, s. 323]). □

Lause 2.2. *Olkoon X epätyhjä jonokompakti avaruus ja kuvaus $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ jatkuva. Nyt kuvauksella $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ on minimi- ja maksimiarvo joukossa X.*

Todistus (Ks. [2, s. 342]). □

Esimerkki 2.1 (Vrt. [3, s. 545])**.** Merkitään $C[a, b]$ tarkoittamaan joukkoa, jossa on kaikki välillä $[a, b]$ määritellyt jatkuvat funktiot. Lasketaan kahden jatkuvan funktion f ja g etäisyydeksi niiden pisteiden suurin vertikaalinen (eli y-akselin suuntainen) etäisyys eli käytetään metriikkaa

$$d(f, g) = \sup_{a \le t \le b} |f(t) - g(t)|.$$

Tätä metriikkaa kutsutaan yleensä sup-metriikaksi. Käytetään tälle metriikalle merkintää $|| \cdots ||_{sup}$.

3 Kontraktiokuvausten ominaisuuksia

3.1 Kontraktiokuvaus ja kiintopiste

Seuraavaksi annetaan määritelmä Lipschitz-kuvaukselle sekä sen erikoistapaukselle kontraktiokuvaukselle.

Määritelmä 3.1 (Vrt. [3, s. 582])**.** Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja kuvaus $f: X \to X$. Jos on olemassa luku $\alpha \geq 0$ siten, että

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Niin f on Lipschitz-kuvaus. Jos $\alpha \in (0, 1)$, niin kuvausta kutsutaan kontraktiokuvaukseksi.

Määritelmä 3.2 (Ks. [3, s. 582])**.** Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $f: X \to X$ kuvaus. Pistettä $x \in X$, jolle $f(x) = x$ kutsutaan kuvauksen f kiintopisteeksi.

Osoitetaan seuraavaksi kontraktiokuvausten yksinkertaisia ominaisuuksia kuten jatkuvuus sekä se, että jos kontraktiokuvauksella on kiintopiste, niin se on yksikäsitteinen.

Lause 3.1. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $f: X \to X$ kontraktiokuvaus, jolla on kiintopiste. Tämä kiintopiste on yksikäsitteinen.*

Todistus (Vrt. [3, s. 582]). Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $f: X \to X$ kontraktiokuvaus, ja olkoot pisteet x, y kuvauksen f kiintopisteitä. Nyt, koska f on kontraktiokuvaus ja x, y ovat sen kiintopisteitä

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

Koska $\alpha < 1$ täytyy olla $d(x, y) = 0$, sillä muuten $d(x, y) < d(x, y)$, jolloin $x = y$. Joten, koska $x = y$ mielivaltaisille kiintopisteille, on kuvauksen kiintopiste yksikäsitteinen. □

Apulause 3.1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $f: X \to X$ kuvaus. Jos f on kontraktiokuvaus, niin f on jatkuva.

Todistus (Vrt. [1, s. 3]). Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $f \colon X \to X$ kontraktiokuvaus ja olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) < \epsilon$$

kaikilla $x, y \in X$, joille $d(x, y) < \epsilon/\alpha =: \delta$. □

Eräs kontraktiokuvausten ja kiintopisteiden välisen suhteen ominaisuus on se että jos f on kontraktiokuvaus, niin kuvauksen f iteraatioiden lukujono

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \ldots$$

suppenee kohti kuvauksen f kiintopistettä tai hajaantuu, jos kuvauksella f ei ole kiintopistettä.

Lause 3.2. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $f \colon X \to X$ kontraktiokuvaus ja $x_0 \in X$ ja olkoon lukujono x_n määritelty iteratiivisesti:*

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ x_3 = f(x_2),\ \ldots$$

Tällöin on voimassa:

1. *Jos kuvauksella f on kiintopiste x, niin $x_n \to x$.*
2. *Jos $x_n \to x$, niin x on kuvauksen f kiintopiste.*

Todistus (Vrt. [3, s. 583]). Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $f \colon X \to X$ kontraktiokuvaus, ja olkoot $s, t \in X$. Merkitään, että f^n tarkoittaa yhdistettyä kuvausta, jossa f yhdistetään itsensä kanssa n kertaa. Huomataan, että kontraktion määritelmän nojalla

$$d(f(s), f(t)) \leq \alpha d(s, t)$$

sekä

$$d(f^2(s), f^2(t)) \leq \alpha d(f(s), f(t)) \leq \alpha^2 d(s, t)$$

ja näin jatkaen

$$d(f^n(s), f^n(t)) \leq \alpha^n d(s, t) \tag{3.1}$$

kaikille n. Korvataan nyt s arvolla x_0 ja t arvolla x, missä x on kuvauksen f kiintopiste, jolloin $x = f(x) = f^2(x) = \cdots = f^n(x)$. Nyt saadaan

$$d(f^n(x_0), f^n(x)) = d(f^n(x_0), x) \leq \alpha^n d(x_0, x) \to 0$$

kun $n \to \infty$, koska $\alpha \in (0, 1)$. Joten $x_n \to x$, sillä $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ ja tämä todistaa ensimmäisen väitteen.

Oletetaan, että $x_n \to x$, jolloin $x_{n+1} = f(x_n)$ ja $x_{n+1} \to x$. Koska apulauseen 3.1 nojalla kaikki kontraktiokuvaukset ovat jatkuvia, jolloin $f((x_n)) \to f(x)$, joten $f(x) = x$, eli x on kuvauksen f kiintopiste. □

Nämä lauseet eivät kuitenkaan takaa, että kontraktiokuvauksella olisi kiintopiste. Huomataankin, että jotta kontraktiokuvauksella on välttämättä kiintopiste, täytyy kuvauksen olla täydellisessä metrisessä avaruudessa.

3.2 Banachin kiintopistelause

Osoitetaan seuraavaksi Banachin kiintopistelause, joka takaa täydellisessä metrisessä avaruudessa olevan kontraktiokuvauksen kiintopisteen olemassaolon sekä sen yksikäsitteisyyden.

Lause 3.3 (Banachin kiintopistelause)**.** *Olkoon* (X, d) *täydellinen metrinen avaruus ja* $f : X \to X$ *kontraktiokuvaus. Tällöin kontraktiokuvauksella* f *on yksikäsitteinen kiintopiste.*

Todistus (Vrt. [3, s. 584]). Kontraktiokuvauksen f kiintopiste voidaan etsiä aloittamalla jostain pisteestä $x_0 \in X$ ja iteroimalla kuvausta f. Olkoon $x_0 \in X$, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1) = f^2(x_0) \ldots$ jolloin yleisesti $x_n = (f(x_{n-1})) = f^n(x_0)$ kun $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Osoitetaan, että lukujono (x_n) on Cauchy-jono. Olkoon $n \leq m$. Nyt käyttämällä epäyhtälöä (3.1) saadaan

$$d(x_n, x_m) = d(f^n(x_0), f^m(x_0)) = d(f^n(x_0), f^n(f^{m-n}(x_0))) \leq \alpha^n d(x_0, x_{m-n}).$$

Jälkimmäistä termiä voidaan arvioida käyttämällä kolmionepäyhtälöä sekä epäyhtälöä (3.1),

$$\begin{aligned} d(x_0, x_{m-n}) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n}) \\ &\leq d(x_0, x_1)(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-n-1}). \end{aligned}$$

Nyt $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-n-1}$ on geometrinen sarja ja koska $|\alpha| < 1$ ja summa on vain termiin $m - n - 1$ asti, niin

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-n-1} \leq \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Joten

$$d(x_0, x_1)(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-n-1}) \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \alpha}.$$

Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan N siten, että

$$\alpha^N d(x_0, x_1) < \epsilon(1 - \alpha).$$

Tällöin jos $m \geq n \geq N$ saadaan

$$d(x_n, x_m) \leq \alpha^n d(x_0, x_{m-n}) \leq \frac{\alpha^n d(x_0, x_1)}{1 - \alpha} \leq \frac{\alpha^N d(x_0, x_1)}{1 - \alpha} < \epsilon \tag{3.2}$$

Joten Cauchy-jonon määritelmän nojalla (x_n) on Cauchy-jono. Nyt, koska X on täydellinen avaruus, on olemassa $x \in X$, jolle $x_n \longrightarrow x$. Joten lauseen 3.2 nojalla x on kuvauksen f kiintopiste ja lauseen 3.1 nojalla tämä kiintopiste on yksikäsitteinen. □

Seuraus 3.1. *Kun $f\colon X \longrightarrow X$ on kontraktio täydellisessä metrisessä avaruudessa (X, d) ja $Y \subset X$ on sellainen joukon X suljettu osajoukko, että $f(Y) \subset Y$, kuvauksen f yksikäsitteinen kiintopiste on joukossa Y.*

Todistus (Vrt. [1, s. 4]). Koska Y on täydellisen metrisen avaruuden X suljettu osajoukko, lauseen 2.1 nojalla Y on täydellinen metrinen avaruus. Joten lauseen 3.3 nojalla kuvauksella $f\colon Y \longrightarrow Y$ on kiintopiste joukossa Y. Tällöin, koska kuvauksella f on yksikäsitteinen kiintopiste joukossa X täytyy tämän olla joukossa Y. □

Esimerkki 3.1. (Vrt. [1, s. 1-2]) Eräs tapa arvioida ratkaisua reaalilukujoukossa $\mathbb{R}$ yhtälölle $g(x) = 0$, jossa funktio g on derivoituva, on käyttää Newtonin menetelmää, eli löytää likimääräinen ratkaisu x_0 ja sitten laskea rekursiivisesti käyttäen kaavaa

$$x_n = x_{n-1} - \frac{g(x_{n-1})}{g'(x_{n-1})}.$$

Tämä rekursio on funktion $f(x) = x - g(x)/g'(x)$ iteroimista alkaen pisteestä $x = x_0$. Ratkaisu yhtälölle $g(x) = 0$ on sama kuin ratkaisu yhtälölle $f(x) = x$, joka on funktion f kiintopiste.

Käytetään nyt Newtonin menetelmää estimoimaan lukua $\sqrt{2}$. Määritellään $g(x) = x^2 - 2$ ja etsitään funktion $g(x)$ positiivinen nollakohta. Nyt Newtonin rekursio on

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^2 - 2}{2x_{n-1}} = \frac{x_{n-1}^2 + 2}{2x_{n-1}} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right),$$

joten $f(x) = (1/2)(x + 2/x)$. Funktion f kiintopisteet ovat kahden neliöjuuret. Seuraavassa taulukossa esitetään funktion f iteraatioita luvun x_0 eri arvoilla.

n	x_n	x_n	x_n
0	1	1.5	20
1	1.5	1.41667...	10, 05
2	1.4166...	1.41422...	2.75739...
3	1.41422...	1.41421356...	1.74136...
4	1.4142135...	1.4142135623...	1, 44494...
5	1.414213523...	1.4142135623...	1, 41454...

Taulukosta näkee, että kaikki kolme iteraatiota näyttävät suppenevan kohti pistettä $\sqrt{2} \approx 1,41421356237$. Huomataan myös, että koska viimeisen iteraation alkupiste oli paljon kauempana kiintopisteestä, tarvitaan enemmän iteraatioita ennen kuin iteraatiot alkavat näyttämään samalta kuin $\sqrt{2}$.

Jotta voidaan perustella Banachin kiintopistelauseen 3.3 käyttöä täytyy löytää täydellinen metrinen avaruus, jossa funktio $f(x) = (1/2)(x + 2/x)$ on kontraktio. Suljettu väli $X_t[t, \infty)$ on täydellinen kaikilla $t > 0$ arvoilla, joten täytyy löytää t, jolla $f(X_t) \subset X_t$ sekä f on kontraktio välillä X_t. Funktion f pienin arvo välillä $(0, \infty)$ on $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, joten kaikilla $t \leq \sqrt{2}$ saadaan $x \geq t \implies f(x) \geq \sqrt{2} \geq t$, joten $f(X_t) \subset X_t$. Etsitään t, jolla f on kontraktio välillä X_t. Kaikilla positiivisilla x ja x' pätee

$$f(x) - f(x') = \frac{x - x'}{2} \cdot (1 - \frac{2}{xx'}).$$

Jos $x \geq t$ ja $x' \geq t$, niin $1 - 2/t^2 \leq 1 - 2(xx') < 1$, joten $|1 - 2/(xx')| < 1$ jos $1 - 2/t^2 > -1 \Leftrightarrow t^2 > 1$. Valitaan nyt $1 < t \leq \sqrt{2}$, jolloin $f : X_t \to X_t$ ja $f(x) - f(x') \leq (1/2)|x - x'|$ kaikilla $x, x' \in X_t$. Nyt Banachin kiintopistelauseen 3.3 nojalla mistä tahansa pisteestä $x_0 \geq$ funktion f iteraatiot suppenevat kohti pistettä $\sqrt{2}$.

Seuraus 3.2. *Olkoon f kontraktiokuvaus metrisessä avaruudessa (X, d), jonka kontraktiovakio on α ja kiintopiste x. Jokaiselle $x_0 \in X$, saadaan f-iteraatiolla $\{x_n\}$ estimaatit, jotka toteuttavat epäyhtälön*

$$d(x_n, x) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, f(x_0)), \tag{3.3}$$

$$d(x_n, x) \leq \alpha d(x_{n-1}, x) \tag{3.4}$$

ja

$$d(x_n, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{n-1}, x_n). \tag{3.5}$$

Todistus (Vrt. [1, s. 4]). Epäyhtälöstä 3.2 nähdään, että kun $m > n$ saadaan

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1) = \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, f(x_0))$$

Huomataan, että yhtälön oikeaa puoli on riippumaton vakiosta m. Olkoon $m \to \infty$, nyt

$$d(x_n, x) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, f(x_0))$$

Joten epäyhtälö 3.3 pätee.

Epäyhtälö 3.4 voidaan päätellä siitä, että x on kiintopiste, sillä

$$d(x_n, x) = d(f(x_{n-1}), f(x)) \leq \alpha d(x_{n-1}, x). \tag{3.6}$$

Joten epäyhtälö 3.4 pätee.

Käytetään kolmioepäyhtälöä etäisyyteen $d(x_{n-1}, x)$ epäyhtälön 3.6 oikealla puolella käyttäen pisteitä x_{n-1}, x_n ja x,

$$\begin{aligned}
d(x_n, x) &\leq d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x) \leq \alpha(d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x)) \\
&\Leftrightarrow d(x_n, x) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) + \alpha d(x_n, x) \\
&\Leftrightarrow (1-\alpha) d(x_n, x) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) \\
&\Leftrightarrow d(x_n, x) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{n-1}, x_n)
\end{aligned}$$

Joten myös epäyhtälö 3.5 pätee. □

Seurauksen kolmella epäyhtälöllä on erilaiset tarkoitukset. Epäyhtälö 3.3 kertoo kuinka monta kertaa täytyy iteroida kuvausta f, että ollaan enintään tietyn etäisyyden päässä kuvauksen kiintopisteestä. Tämä on yläraja sille, kuinka kauan täytyy laskea. Tätä kutsutaan priori estimaatiksi. Epäyhtälö 3.4 taas näyttää, että kun on löydetty iteroimalla termi, joka on tietyn halutun etäisyyden päässä kiintopisteestä kaikki seuraavat iteraatiot ovat maksimissaan näin kaukana kiintopisteestä. Epäyhtälö 3.5 kertoo jokaisen laskun jälkeen, kuinka paljon lähempänä kiintopistettä ollaan edelliseen kahteen iteraatioon verrattuna. Tätä estimaattia kutsutaan posteriori estimaatiksi. Tämä estimaatti on tärkeä, sillä jos kaksi peräkkäistä iteraatiota ovat hyvin lähellä toisiaan, epäyhtälö 3.5 takaa, että ollaan hyvin lähellä kiintopistettä.

Esimerkki 3.2. (Vrt. [1, s. 5]) Käytetään nyt esimerkin 3.1 tapaa laskemaan $\sqrt{2}$ ainakin 7 numeron tarkkuudella. Tiedetään, että $\sqrt{2}$ on funktion $f(x) = (1/2)(x + 2/x)$ kiintopiste. Esimerkissä huomattiin myös, että funktion f kontraktiovakio välillä $[1, \infty)$ on $\alpha = 1/2$. Valitaan $x_0 = 1$, jolloin $|x_0 - f(x_0)| = \frac{1}{2}$, jolloin epäyhtälöstä 3.4 tulee

$$|x_n - \sqrt{2}| \leq \frac{(1/2)^n}{1 - 1/2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$$

Epäyhtälön oikea puoli on pienempi kuin $\frac{1}{10^7}$, kun $n \geq 24$. Eli x_{24} on vakion $\frac{1}{10^7}$ etäisyydellä pisteestä $\sqrt{2}$. Kannattaa kuitenkin huomata, että tämä iteraatio antaa seitsemän desimaalin tarkkuuden huomattavasti aiemmin, sillä $x_4 \approx 1.4142135623731$ ja $x_5 \approx 1.4142135623731$, joten $|x_4 - x_5| \leq 1/10^{13}$. Epäyhtälön 3.6 mukaan, kun $\alpha = 1/2$, niin $|x_4 - \sqrt{2}| \leq |x_4 - x_3|$, joten x_4 antaa meille arvon $\sqrt{2}$ ainakin seitsemän desimaalin tarkkuudella.

4 Yleistyksiä ja Picardin lause

4.1 Yleistyksiä

Joskus kuvaus ei ole kontraktiokuvaus, mutta jokin sen iteraatio on. Tämä riittääkin Banachin kiintopistelauseen soveltamiseen alkuperäisessä kuvauksessa.

Lause 4.1. *Jos (X, d) on metrinen avaruus ja $f : X \to X$ on sellainen kuvaus, että jokin sen iteraatio $f^N : X \to X$ on kontraktiokuvaus, niin kuvauksella f on yksikäsitteinen kiintopiste x. Tämän kiintopisteen voi löytää iteroimalla kuvausta f mistä tahansa pisteestä $x_0 \in X$.*

Todistus (Vrt. [1, s. 7]). Lauseen 3.3 nojalla kuvauksella f^N on yksikäsitteinen kiintopiste x, joten $f^N(x) = x$. Kuvauksen f ainoa mahdollinen kiintopiste on x, sillä kuvauksen f kiintopiste on kuvauksen f^N kiintopiste, ja koska kuvauksella f^N on yksikäsitteinen kiintopiste, tämän täytyy olla x. Jotta voidaan todistaa, että x on kuvauksen f kiintopiste huomataan, että $f(x) = f(f^N(x)) = f^N(f(x))$, joten $f(x)$ on kuvauksen f^N kiintopiste. Täten x ja $f(x)$ ovat kuvauksen f^N kiintopisteitä ja, koska kuvauksella f^N on yksikäsitteinen kiintopiste, $f(x) = x$.

Osoitetaan seuraavaksi, että jokaisella $x_0 \in X$ pisteet $f^n(x_0)$ suppenevat kohti pistettä x, kun $n \to \infty$. Tutkitaan iteraatioita $f^n(x_0)$, kun n käy läpi kongruenssiluokan modulo N, eli valitaan $0 \leq r \leq N - 1$ ja tutkitaan pisteitä $f^{Nk+r}(x_0)$, kun $k \to \infty$. Koska

$$f^{Nk+r}(x_0) = f^{Nk}(f^r(x_0)) = (f^N)^k(f^r(x_0))$$

nämä pisteet ovat (jokaiselle r) kuvauksen f^N iteraatioita alkaen pisteestä $y_0 = f^r(x_0)$. Koska kuvaus f^N on kontraktiokuvaus, näiden mistä tahansa pisteestä alkavien kuvauksen f^N iteraatioiden täytyy lauseen 3.3 nojalla suppeneta kohti pistettä x. Tämä raja-arvo on riippumaton vakion r arvosta, kun se on välillä $1, \ldots, N - 1$, joten kaikki N lukujonot $f^{Nk+r}(x_0)_{k\geq 1}$ suppenevat kohti pistettä x, kun $k \to \infty$, joten

$$f^n(x_0) \to x, \quad \text{kun } n \to \infty. \tag{4.1}$$

□

Lausetta 4.1 käytetään myöhemmin Picardin lauseen todistuksessa. Banachin kiintopistelauseen todistuksessa oli tärkeää, että kontraktiovakio $\alpha < 1$, sillä silloin voitiin hallita kuvauksen $f^n(x_0)$ suppenemistahtia kohti kiintopistettä, sillä

$\alpha^n \to 0$, kun $n \to \infty$. Jos kuvaus f ei olekaan kontraktiokuvaus vaan päteekin $d(f(a), f(a')) < d(a, a')$, kun $a \neq a'$ metrisessä avaruudessa X, niin menetetään tämä hallinta ja kuvauksella f ei välttämättä ole kiintopistettä. Tästä huolimatta on kuitenkin olemassa lause, joka takaa yksikäsitteisen kiintopisteen olemassaolon kuvaksessa f, kun $d(f(a), f(a')) < d(a, a')$ kaikilla $a \neq a'$, jos avaruus X on jonokompakti.

Lause 4.2. *Olkoon X jonokompakti metrinen avaruus. Jos kuvauksessa $f : X \to X$ pätee $d(f(a), f(a')) < d(a, a')$, kun $a \neq a'$ avaruudessa X, niin kuvauksella f on yksikäsitteinen kiintopiste avaruudessa X ja tämä kiintopiste voidaan löytää raja-arvona $f^n(x_0)$ kun $n \to \infty$ kaikilla $x_0 \in X$.*

Todistus (Vrt. [1, s. 9]). Osoitetaan ensin, että kuvauksella f on enintään yksi kiintopiste avaruudessa X. Oletetaan, että kuvauksella f on kaksi kiintopistettä $x \neq x'$. Nyt $d(x, x') = d(f(x), f(x')) < d(x, x')$, tässä on ristiriita joten kuvauksella f on enintään yksi kiintopiste.

Kuvauksen f kiintopisteen olemassaolon todistamiseksi tutkitaan kuvausta $X \to [0, \infty)$, jossa $a \longmapsto d(a, f(a))$. Tämä kuvaus mittaa jokaisen pisteen ja sen f-arvon etäisyyden. Kuvauksen f kiintopiste on siinä pisteessä, jossa tämä kuvaus saa arvon 0. Koska avaruus X on jonokompakti, kuvaus $d(a, f(a))$ saavuttaa lauseen 2.2 nojalla pienimmän arvonsa eli on olemassa piste $x \in X$ siten, että $d(x, f(x)) \leq d(a, f(a))$ kaikilla $a \in X$. Osoitetaan ristiriidalla, että piste x on kuvauksen f kiintopiste. Jos $f(x) \neq x$, niin valitsemalla $a = x$ ja $a' = f(x)$ saadaan

$$d(f(x), f(f(x))) < d(x, f(x)).$$

Tämä on ristiriidassa kuvauksen $d(x, f(x))$ minimaalisuuden kanssa kaikkien lukujen $d(a, f(a))$ joukossa, joten $f(x) = x$.

Osoitetaan vielä, että kaikilla $x_0 \in X$ lukujono $x_n = f^n(x_0)$ suppenee kohti kiintopistettä x, kun $n \to \infty$. Tätä ei voida tehdä samoin kuin lauseen 3.3 todistuksessa, sillä ei voida käyttää kontraktiovakiota. Tämän sijasta käytetään avaruuden X jonokompaktiutta. Jos jollakin $k \geq 0$ saadaan $x_k = x$, niin $x_{k+1} = f(x_k) = f(x) = x$ ja yleisemmin $x_n = x$ kaikilla $n \geq k$, joten $x_n \to x$, sillä suurilla indeksin n arvoilla lukujonon termit ovat yhtäsuuria pisteen x kanssa. Oletetaan seuraavaksi, että $x_n \neq x$ kaikilla indeksin n arvoilla. Nyt

$$0 < d(x_{n+1}, x) = d(f(x_n), f(x)) < d(x_n, x),$$

joten lukujono $d(x_n, x)$ on vähenevä ja positiivinen. Joten sillä on raja-arvo

$$\ell = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) \geq 0.$$

Osoitetaan, että $\ell = 0$ eli $d(x_n, x) \to 0$, joka tarkoittaa, että $x_n \to x$ avaruudessa X. Koska X on jonokompakti, lukujonolla x_n on sellainen suppeneva lukujono x_{n_i}, että $x_{n_i} \to y \in X$. Koska kuvaus f on jatkuva, niin $f(x_{n_i}) \to f(y)$, joka tarkoittaa, että $x_{n_i+1} \to f(y)$, kun $i \to \infty$. Koska $d(x_n, x) \to \ell$, kun $n \to \infty$, niin $d(x_{n_i}, x) \to \ell$ ja $d(x_{n_i+1}, x) \to \ell$, kun $i \to \infty$. Koska metriikka on jatkuva, niin $d(x_{n_i}, x) \to d(y, x)$ ja $d(x_{n_i+1}, x) = d(f(x_{n_i})) \to d(f(y), x)$. Koska nämä raja-arvot ovat kaikki yhtäsuuria kuin ℓ, niin

$$d(y, x) = \ell = d(f(y), x) = d(f(y), f(x)). \tag{4.2}$$

Jos $y \neq x$, niin $d(f(y), f(x)) < d(y, x)$, mutta tämä on ristiriidassa yhtälön 4.2 kanssa, joten $y = x$ jolloin $\ell = d(y, x) = 0$. Tämä osoittaa, että $d(x_n, x) \to 0$, kun $n \to \infty$. □

Tämän lauseen todistuksesta ei seuraa minkäänlaista virhe-estimaattia kiintopisteeseen suppenemisnopeudelle, koska todistettiin suppeneminen kiintopisteeseen ilman että tehtiin arvioita. Voisi ajatella, että avaruuden X jonokompaktius johtaisi siihen, että kuvaus f on kontraktio, jolloin Banachin kiintopistelause 3.3 pätisi, sillä esimerkiksi osamäärät $\frac{d(f(a), f(a'))}{d(a,a')}$ kun $a \neq a'$ ovat aina pienempiä kuin 1, jolloin niiden pitäisi olla pienempiä tai yhtäsuuria kuin jokin vakio $\alpha < 1$, sillä lauseen 2.2 mukaan jatkuva kuvaus f saavuttaa supremuminsa jonokompaktissa avaruudessa X. Tämä ei kuitenkaan pidä paikkaansa, sillä $\frac{d(f(a), f(a'))}{d(a,a')}$ ei ole määritelty jonokompaktissa joukossa $X \times X$ vaan joukossa $X \times X \setminus \{(a, a) : a \in X\}$, jossa diagonaali on poistettu. Tämä joukko ei ole kompakti.

4.2 Picardin lause

Seuraavaksi sovelletaan kontraktiokuvausten ominaisuuksia ja aiempia lauseita ratkaisemaan alkuarvo-ongelma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \tag{4.3}$$

tietyt ehdot toteuttaville funktioille f. Ratkaisu alkuarvo-ongelmalle 4.3 on derivoituva funktio $y(t)$, joka on määritelty pisteen t_0 ympäristössä siten, että

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = t_0.$$

Ennen kuin voidaan antaa tällaisten alkuarvo-ongelmien ratkaisujen olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause täytyy todistaa muutama apulause, joita käytetään todistamaan tämä lause, jota kutsutaan myös Picardin lauseeksi. Jotta voidaan ratkaista alkuarvo-ongelma, täytyy tyytyä ratkaisuun, joka on olemassa vain lokaalisti sekä tarvitaan jokin rajoite kuvaukselle f, että saadaan yksikäsitteinen ratkaisu pisteen t_0 lähellä. Ehto, joka asetetaan kuvaukselle $f(t, y)$ lokaalin yksikäsitteisen ratkaisun varmistamiseksi, on Lipschitz-ehto toisen muuttujan suhteen, eli oletetaan, että on olemassa vakio $K > 0$ siten, että $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$, kaikilla y_1 ja y_2. Epäyhtälön oikealla puolella ei ole muuttujaa t, joten tämä on Lipschitz-ehto on riippumaton ensimmäisestä muuttujasta. Suurin osa funktioista eivät ole Lipschitz-funktioita, mutta differentioituvat funktiot, joiden ensimmäiset osittaisderivaatat ovat jatkuvia, ovat lokaalisti Lipschitz-funktioita.

Apulause 4.1. Olkoon $X \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko ja olkoon $f : X \to \mathbb{R}$ differentioituva funktio, jonka ensimmäiset osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Tällöin kuvaus f on Lipschitz-jatkuva toisen muuttujan suhteen. Kaikilla pareilla $(t_0, y_0) \in X$ on vakio $K > 0$ siten, että

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

kaikilla arvoilla t, jotka ovat lähellä pistettä t_0 ja kaikilla arvoilla y_1 ja y_2, jotka ovat lähellä pistettä y_0.

Todistus (Vrt. [1, s. 12]). Avoimessa joukossa X, on suorakulmio pisteen (t_0, y_0) ympärillä, merkitään tätä suorakulmiota $I \times J$. Tässä I ja J ovat suljettuja välejä, joilla on positiiviset pituudet ja $t_0 \in I$, $y_0 \in J$ ja $I \times J \subset X$. Käytetään differentiaalilaskennan väliarvolausetta kuvaukseen f sen toisessa muuttujassa: kaikille $t \in I$ ja $y_1, y_2 \in J$

$$f(t, y_1) - f(t, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y_3)(y_1 - y_2)$$

jollekin pisteelle y_3 joka on pisteiden y_1 ja y_2 välissä, joka riippuu mahdollisesti t:n arvosta. Nyt

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y_3)\right| |y_1 - y_2| \leq \sup_{p \in I \times J} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(p)\right| |y_1 - y_2|.$$

Valitaan nyt $K = \sup\limits_{p \in I \times J} |\frac{\partial f}{\partial y}(p)|$, joka on äärellinen, sillä jatkuva kuvaus jonokompaktissa joukossa on rajoitettu. □

Seuraava apulause hallitsee alkuarvo-ongelman 4.3 hypoteettisen ratkaisun kasvua lähellä pistettä t_0.

Apulause 4.2. Olkoon joukko U avoin ja kuvaus $f : U \to \mathbb{R}$ jatkuva. Jokaiselle pisteelle $(t_0, y_0) \in U$ on olemassa $r, R > 0$ siten, että suorakulmio $[t_0 - r, t_0 + r] \times [y_0 - R, y_0 + R]$ on joukossa U, ja jokaiselle $\delta \in (0, r]$ yhtälön 4.3 ratkaisun $y(t)$, joka on määritelty välillä $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ täytyy toteuttaa ehto $|y(t) - y_0| \leq R$ kun $|t - t_0| \leq \delta$.

Todistus (Vrt. [1, s. 13]). Oletetaan, että $y(t)$ toteuttaa alkuarvo-ongelman 4.3 lähellä pistettä t_0. Pisteen t lähellä oleville pisteille t_0 pätee $(t, y(t)) \in U$, koska U on avoin ja $y(t)$ on jatkuva, joten $f(t, y(t))$ on määritelty. Pisteen t_0 läheisyydessä oleville pisteille t integraalilla $\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$ on t-derivaatta $f(t, y(t))$ joka on myös kuvauksen $y(t)$ t-derivaatta, joten yhtälön 4.3 nojalla kuvauksen $y(t)$ ja integraalin $\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$ ero on jokin vakio pistettä t_0 lähellä oltaessa. Pisteessä $t = t_0$ ero on $y(t_0) - 0 = y_0$, joten

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \tag{4.4}$$

pisteille t, jotka ovat pisteen t_0 lähellä. Valitaan suorakulmio

$$[t_0 - r, t_0 + r] \times [y_0 - R, y_0 + R],$$

joka on joukossa U siten, että sen keskipiste on (t_0, y_0). Olkoon $B > 0$ kuvauksen $|f|$ yläraja suorakulmiossa. Nyt koska $\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \leq B|t - t_0|$, pisteen t lähellä oleville pisteille t_0 yhtälöstä 4.4 seuraa, että

$$|y(t) - y_0| \leq B|t - t_0|. \tag{4.5}$$

Huomataan, että B, R ja r ovat kokonaan kuvaksen f määrittelemiä eikä minkään ongelman 4.3 ratkaisun. Kutistetaan vakiota r siten, että $Br \leq R$ eli muutetaan vakio r vakioksi $\min(r, R/B)$. Valitaan $\delta \in (0, r]$ ja oletetaan että on olemassa ratkaisu $y(t)$ ongelmalle 4.3 kun $|t - t_0| \leq \delta$. Erityisesti $(t, y(t)) \in U$ kun $|t - t_0| \leq \delta$. Epäyhtälön 4.5 nojalla $|y(t) - y_0| \leq B|t - t_0| \leq B\delta \leq Br \leq R$, joten $(t, y(t))$ on suorakulmiossa kun $|t - t_0| \leq r$. □

Seuraavaksi esitetään tavallisten differentiaaliyhtälöiden olemassaolon ja yksikäsitteisyyden määräävä lause eli Picardin lause.

Lause 4.3. *Olkoon* $N = [a, b] \times [y_0 - R, y_0 + R] \subset \mathbb{R}^2$ *suorakulmio ja* $f : N \to \mathbb{R}$ *Lipschitz-jatkuva kuvaus suorakulmiossa. Olkoon* $B > 0$ *yläraja kuvaukselle* $|f|$ *suorakulmiossa* N. *Olkoon* $t_0 \in [a, b]$ *ja* $r = \min(|t_0 - a|, |t_0 - b|)$. *Alkuarvo-ongelmalla*

4.3 on yksikäsitteinen ratkaisu välillä $[t_0 - r_0, t_0 + r_0]$*, missä* $r_0 = \min(r, R/B)$*. Erityisesti jos* $U \subset \mathbb{R}^2$ *on avoin ja* $f : U \to \mathbb{R}$ *on differentioituva ja sen ensimmäiset osittaisderivaatat ovat jatkuvia, niin alkuarvo-ongelmalla 4.3 on yksikäsitteinen lokaali ratkaisu sen määrittelyjoukossa.*

Todistus (Vrt. [1, s. 13-15]). Olkoon joukko M

$$M = \{h \in C[a, b] : |h(t) - y_0| \leq R, \text{kun } t \in [a, b]\}$$

Vakiokuvaus $h(t) = y_0$ on joukossa M, joten $M \neq \emptyset$. Kaikilla $h \in M$ kuvaaja $\{(t, h(t)) : t \in [a, b]\}$ on suorakulmiossa N. Annetaan joukolle $C[a, b]$ supremum normi $|| \cdots ||_{sup}$, nyt joukko M on joukon $C[a, b]$ suljettu osajoukko. Koska $C[a, b]$ on täydellinen supremum normin kanssa, niin myös M on täydellinen supremum normin kanssa. Tutkitaan kaavaa 4.4. Olkoon $F : M \to M$ määritelty kaavalla

$$(Fh)(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, h(s))ds \tag{4.6}$$

Integraali on määritelty, sillä $(s, h(s)) \in N$ kaikilla $s \in [a, b]$. Lisäksi

$$|(Fh)(t) - y_0| \leq B|t - t_0| \leq Br \leq R,$$

joten $F(M) \subset M$. Osoitetaan että voidaan käyttää Banachin kiintopistelausetta 3.3 löytämään kuvauksen F kiintopiste joukossa M. Kuvauksen F kiintopiste on ratkaisu alkuarvo-ongelmaan 4.3 analyysin peruslauseen nojalla. Ratkaisu alkuarvo-ongelmalle 4.3 ja yhtälölle 4.4 on sama. Yhtälö 4.4 on parempi, sillä jatkuvilla kuvauksilla on jatkuvat antiderivaatat, mutta niillä ei välttämättä ole derivaattaa.

Osoitetaan seuraavaksi, että iteraatio F^n on kontraktiokuvaus joukossa M kun $n \gg 0$, jolloin lause 4.1 pätee. Kun $h_1, h_2 \in M$ ja $t \in [a, b]$, niin

$$(Fh_1(t)) - (Fh_2(t)) = \int_{t_0}^{t} (f(s, h_1(s)) - f(s, h_2(s)))ds,$$

joten

$$|(Fh_1(t)) - (Fh_2(t))| \leq \int_{|[t_0,t]|} |f(s, h_1(s)) - f(s, h_2(s))|ds, \tag{4.7}$$

missä merkintä $\int_{|[t_0,t]|}$ tarkoittaa $\int_{t_0}^{t}$, jos $t_0 \leq t$ ja $\int_{t}^{t_0}$, jos $t < t_0$. Oletuksen mukaan kuvaus f on Lipschitz-kuvaus, jolloin $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$, kun (t, y_1)

ja (t, y_2) kuuluvat suorakulmioon N. Nyt

$$|(Fh_1(t)) - (Fh_2(t))| \leq \int\limits_{|[t_0,t]|} K|h_1(s) - h_2(s)|ds \tag{4.8}$$

$$\leq K||h_1 - h_2||_{\sup}|t - t_0| \tag{4.9}$$

$$\leq K||h_1 - h_2||_{\sup}|a - b|.$$

Joten $||Fh_1 - Fh_2||_{\sup} \leq K(b - a)||h_1 - h_2||_{\sup}$. Jos $K(b - a) < 1$, niin kuvaus F on kontraktiokuvaus joukossa M. Tämä antaisi jo ratkaisulle lokaalin olemassaolon ja yksikäsitteisyyden jos kutistettaisiin väli $[a, b]$, niin pieneksi pisteen t_0 ympärille, että $b - a < 1/K$, jolloin $K(b - a) < 1$. Osoitetaan kuitenkin, että alkuperäisellä välillä $[a, b]$ on ratkaisu, joten jatketaan eri tavalla. Katetaan tilanne $K(b - a) \geq 1$ tutkimalla kuinka kuvauksen F iteraatiot pienentävät etäisyyksiä. Koska

$$(F^2h_1(t)) - (F^2h_2(t)) = \int\limits_{|[t_0,t]|} (f(s, (Fh_1)(s)) - f(s, (Fh_2)(s)))ds,$$

saadaan

$$\begin{aligned}
&|(F^2h_1(t)) - (F^2h_2(t))| \\
&\leq \int\limits_{|[t_0,t]|} K|(Fh_1(s)) - (Fh_2(s))|ds \quad \text{Lipschitz oletuksen takia} \\
&\leq \int\limits_{|[t_0,t]|} K * K||h_1 - h_2||_{\sup}|s - t_0|ds \quad \text{epäyhtälö 4.9} \\
&= K^2||h_1 - h_2||_{\sup} \int\limits_{|[t_0,t]|} |s - t_0|ds.
\end{aligned}$$

Nyt jos $t_0 < t$, niin $\int_{t_0}^{t} |s-t_0|ds = \frac{(t-t_0)*|t-t_o|}{2} = \frac{|t-t_o|^2}{2}$ ja jos $t < t_0$, niin $\int_{t}^{t_0} |s-t_0|ds = \frac{-(t-t_0)*|t-t_o|}{2} = \frac{(t_0-t)*|t-t_o|}{2} = \frac{|t_0-t|*|t-t_o|}{2} = \frac{|t-t_o|^2}{2}$, joten $\int_{|[t_0,t]|} |s - t_0|ds = \frac{|t-t_o|^2}{2}$. Tästä saadaan

$$|(F^2h_1(t)) - (F^2h_2(t))| \leq K^2||h_1 - h_2||_{\sup}\frac{|t - t_0|^2}{2} = \frac{(K|t - t_0|)^2}{2}||h_1 - h_2||_{\sup}.$$

Tehdään seuraavaksi induktiotodistus, jotta voidaan osoittaa, että

$$|(F^nh_1(t)) - (F^nh_2(t))| \leq \frac{(K|t - t_0|)^n}{n!}||h_1 - h_2||_{\sup}.$$

Todistuksessa käytetään kaavaa $\int_{|[t_0,t]|} |s - t_0|^n ds = \frac{|t-t_0|^{n+1}}{n+1}$, kun $n \geq 0$.

Perusaskel: Olkoon $n = 0$, nyt

$$|(F^0 h_1(t)) - (F^0 h_2(t))| = 0 \leq \frac{(K|t-t_0|)^0}{0!}||h_1 - h_2||_{\text{sup}} = ||h_1 - h_2||_{sup}$$

joten perusaskel toimii.

Induktio-oletus: Oletetaan, että epäyhtälö

$$|(F^n h_1(t)) - (F^n h_2(t))| \leq \frac{(K|t-t_0|)^n}{n!}||h_1 - h_2||_{\text{sup}} \tag{4.10}$$

pätee.

Induktioaskel: Nyt

$$\begin{aligned}
|(F^{n+1} h_1(t)) - (F^{n+1} h_2(t))| &\leq \int\limits_{|[t_0,t]|} K|(F^n h_1(t)) - (F^n h_2(t))|ds \\
&\leq \int\limits_{|[t_0,t]|} K * \frac{(K|t-t_0|)^n}{n!}||h_1 - h_2||_{\text{sup}} ds \\
&= \frac{K^{n+1} * \int_{|[t_0,t]|}(|t-t_0|)^n ds}{n!}||h_1 - h_2||_{\text{sup}} \\
&= \frac{K^{n+1}\frac{(|t-t_0|)^{n+1}}{(n+1)}}{n!}||h_1 - h_2||_{\text{sup}} \\
&= \frac{(K|t-t_0|)^{n+1}}{(n+1)!}||h_1 - h_2||_{\text{sup}}.
\end{aligned}$$

Joten induktioperiaatteen nojalla väite pätee. Nyt pätee

$$|(F^n h_1(t)) - (F^n h_2(t))| \leq \frac{(K|t-t_0|)^n}{n!}||h_1 - h_2||_{\text{sup}}$$

kaikilla $n \geq 0$ ja $t \in [a, b]$. Koska $|t - t_0| \leq b - a$,

$$||F^n h_1 - F^n h_2||_{\text{sup}} \leq \frac{(K|b-a|)^n}{n!}||h_1 - h_2||_{\text{sup}}.$$

Kun $n \gg 0$, niin $\frac{(K(b-a))^n}{n!} < 1$, joten F^n on kontraktiokuvaus joukossa M supremum normin kanssa. Joten lauseen 4.1 nojalla kuvauksella F on yksikäsitteinen kiintopiste joukossa M. □

Todistus Picardin lauseelle sanoo, että ratkaisu alkuarvo-ongelmalle 4.3 lähellä pistettä t_0 voidaan löytää raja-arvona lukujonolle $y_n(t)$, missä $y_0(t) = y_0$ on vakio funktio sekä

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))ds.$$

Näitä funktioita $y_n(t)$, jotka on määritelty rekursiivisesti integroimalla kutsutaan Picardin iteraatioiksi.

Lähteet

[1] Keith Conrad. *The Contraction Mapping Theorem*. Department of Mathematics, University of Connecticut, USA [Viitattu 1.11.2021] URL https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/analysis/contraction.pdf.

[2] Patrick M. Fitzpatrick. *Advanced Calculus: Second Edition*. Providence: American Mathematical Society, 2009. Print.

[3] Brian S. Thomson, Judith B. Bruckner, Andrew M. Bruckner. *Elementary Real Analysis, Second Edition*. Prentice Hall, 2008.