Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Propiedades de selección tipo Menger y Rothberger

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

Licenciado en Matemáticas

por

Ramos Laguna Luis Angel

Asesorado por

Dr. Alejandro Ramírez Páramo y Dr. Iván Martínez Ruiz

Puebla Pue.
Marzo de 2022

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Propiedades de selección tipo Menger y Rothberger

Tesis presentada al

Colegio de Matemáticas

como requisito parcial para la obtención del grado de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

por

Ramos Laguna Luis Angel

Asesorado por

Dr. Alejandro Ramírez Páramo y Dr. Iván Martínez Ruiz

Puebla Pue.
Marzo de 2022

Título: Propiedades de selección tipo Menger y Rothberger
Estudiante: Ramos Laguna Luis Angel

COMITÉ

Dr. Raúl Escobedo Conde
Presidente

Dr. Jesús Fernando Tenorio Arvide
Secretario

Dr. Ricardo Cruz Castillo
Vocal

Dr. Alejandro Ramírez Páramo y Dr. Iván Martínez Ruiz
Asesor

Agradecimientos

La culminación de una etapa extraordinaria de mi vida no habría sido posible sin el apoyo incondicional de mi familia, por ello quiero agradecer principalmente a mis padres, Miguel Antonio y María Lucia, Por su amor, trabajo y sacrificio en todos estos años, gracias a ustedes he logrado llegar hasta aqui y convertirme en lo que soy. Ha sido un orgullo y privilegio de ser su hijo.
También agradezco el apoyo y motivación que me dieron mis compañeros de la facultad. A mí jurado por su valiosa retroalimentación.
Finalmente le agradezco al Dr. Alejandro Ramírez Páramo por su paciencia, apoyo y dirección en el desarrollo de este trabajo y de sus enseñanzas en el aula, sin las cuales no tendría claro cuál es el camino profesional que deseo seguir.
A todos ustedes, muchas gracias.

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Resumen

Sea (X, τ) un espacio topológico, los subespacios $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ y $\mathbb{CS}(X)$ dotados con alguna topología, se le conoce como hiperespacio.
Se define la topología hit-and-miss en $CL(X)$ con respecto a Δ, denotada por τ_{Δ}^{+}, donde $\Delta \subseteq CL(X)$ tal que Δ es cerrada bajo uniones finitas y que contiene a los conjuntos singulares. Dada la relación entre los subespacios $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ y $\mathbb{CS}(X)$, se tomara a $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ y $\mathbb{CS}(X)$ como subespacios de $(CL(X), \tau_{\Delta}^{+})$. La topología hit-and-miss es una generalización de las topologías de Vietoris y Fell denotados como τ_V y τ_F respectivamente.
Las propiedades que se definen en este trabajo de tesis, toman la colección de cubiertas abiertas $\mathcal{O}$ de un espacio topológico X. Los cuales son:

1. Propiedad de Rothberger $\mathbf{S}_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$.
2. Propiedad de Menger $\mathbf{S}_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$.
3. Propiedad estrella Rothberger $\mathbf{S}_1^*(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ (SR).
4. Propiedad estrella de Menger $\mathbf{S}_{fin}^*(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ (SM).
5. Propiedad fuertemente estrella Rothberger $\mathbf{SS}_1^*(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ (SSR).
6. Propiedad fuertemente estrella Menger $\mathbf{SS}_{fin}^*(\mathcal{O}, \mathcal{O})(SSM)$.

Se prueba que al tomar colecciones de cubiertas abiertas $\mathcal{O}$, es equivalente como si tomáramos colecciones de cubiertas abiertas conformado por básicos $\mathcal{O}_b$.

Para poder caracterizar las propiedades, se define el concepto de $\pi_{\Delta}(\Lambda)$-red de X, donde $\Delta \subseteq CL(X)$ y $\Lambda \subseteq CL(X)$, donde Λ es cerrada bajo uniones finitas y $\emptyset \notin \Lambda$. Se tiene que la definición $\pi_{\Delta}(\Lambda)$-red de X es una generalización de las nociones de π_V-red y π_F-red en X. Además, se prueba que si $\Delta = \mathbb{K}(X)$ y $\Lambda = CL(X)$, entonces la noción de $\pi_{\Delta}(\Lambda)$-red de X coincide con la definición de π_F-red de X y si $\Delta = \Lambda = CL(X)$, entonces:

1. Cada $\pi_{\Delta}(\Lambda)$-red de X induce una π_V-red de X
2. Si ζ' es una π_V-red de X, entonces $\zeta = \{(\bigcap_{i=1}^{n} V_i^c; V_1, \ldots, V_n) : (V_1, \ldots, V_n) \in \zeta'\}$ es una $\pi_{\Delta}(\Lambda)$-red de X.

Posteriormente se prueba el Lema 2.8, que dice:
Sea X un espacio topológico. Una familia $\zeta = \{(B; V_1, \ldots, V_m) : (V_1, \ldots, V_m)_B^+ \in \mathcal{U}\}$ es una $\pi_{\Delta}(\Lambda)$-red de X si y solo si la familia
$\mathcal{U} = \left\{(V_1, \ldots, V_m)_B^+ : (B; V_1, \ldots, V_m) \in \zeta\right\}$ es una cubierta abierta de $(\Lambda, \tau_{\Delta}^{+})$.
Este es de gran ayuda para las pruebas de las caracterizaciones tanto para las propiedades de Rothberger y Menger.

En la sección de Rothberger, primero se prueba el Teorema 2.9, que dice:
Sea (X, τ) un espacio topológico, las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) (Λ, τ^+_Δ) tiene la propiedad de Rothberger;

(2) (X, τ) satisface $\mathbf{S}_1(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$.

Este es la caracterización de la propiedad de Rothberger.
Posteriormente se mencionan los Corolarios 2.11, 2.12 y 2.13. Tomando a Δ y Λ como $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ o $\mathbb{CS}(X)$.
Se definen los principios $\mathbf{S}^*_R(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$ y $\mathbf{S}_R(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$ (Def. 2.19 y 2.14). Con estos conceptos se prueban los Teoremas 2.20 y 2.15, que dicen lo siguiente:

i) Sea (X, τ) un espacio topológico. Supongamos además que por cada $x \in X$, $\{x\} \in \Lambda$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

   (1) (Λ, τ^+_Δ) es SR;
   (2) X satisface $\mathbf{S}^*_R(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$.

ii) Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes:

   (1) (Λ, τ^+_Δ) es SSR;
   (2) (X, τ) satisface $\mathbf{S}_R(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$.

Estos son las caracterizaciones de la propiedad estrella y fuertemente estrella de Rothberger, respectivamente.
De igual manera se mencionan los Corolarios 2.21, 2.22, 2.23, 2.16, 2.17 y 2.18. Tomando a Δ y Λ como $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ o $\mathbb{CS}(X)$.

En la sección de Menger, primero se prueba el Teorema 2.24, que dice:
Sea (X, τ) un espacio topológico, las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) (Λ, τ^+_Δ) tiene la propiedad Menger;

(2) (X, τ) satisface $\mathbf{S}_{fin}(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$.

Este es la caracterización de la propiedad de Menger.
Posteriormente se mencionan los Corolarios 2.26, 2.27 y 2.28. Tomando a Δ y Λ como $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ o $\mathbb{CS}(X)$.
Se definen los principios, $\mathbf{S}^*_M(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$ y $\mathbf{S}_M(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$ (Def. 2.34 y 2.29), con estos principios, se prueban los Teoremas 2.35 y 2.30, que dicen lo siguiente:

i) Sea (X, τ) un espacio topológico. Supongamos además que por cada $x \in X$, $\{x\} \in \Lambda$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

   (1) (Λ, τ^+_Δ) es SM;
   (2) X satisface $\mathbf{S}^*_M(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$.

ii) Sea (X, τ) un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes:

   (1) (Λ, τ^+_Δ) es SSM;
   (2) (X, τ) satisface $\mathbf{S}_M(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$.

Estos son las caracterizaciones de la propiedad estrella y fuertemente estrella de Menger, respectivamente. De igual manera se mencionan los Corolarios 2.36, 2.37, 2.38, 2.31, 2.32 y 2.33. Tomando a Δ y Λ como $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ o $\mathbb{CS}(X)$.

Por ultimo tomamos a $\mathcal{D}$ como la familia de todos los subconjuntos densos de cualquier espacio topológico X, se define el concepto $c_\Delta(\Lambda)$-*cubierta de* X (Definición 2.41). Se muestra la relación existente entre las nociones k_F-cubierta y c_V-cubierta de un espacio topológico X.
Se prueba el Lema 2.44, que dice:
Sea (X,τ) un espacio topológico. Una familia $\mathcal{U} \subseteq \Lambda^c$ es una $c_\Delta(\Lambda)$-cubierta de X si y solo si $\mathcal{U}^c$ es un subconjunto denso de (Λ, τ_Δ^+).
Ya que es de mucha utilidad para demostrar los Teoremas 2.46 y 2.50, que dicen lo siguiente:

i) Sea (X,τ) un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes:
   (1) (Λ, τ_Δ^+) satisface $\mathbf{S}_1(\mathcal{D},\mathcal{D})$;
   (2) (X,τ) satisface $\mathbf{S}_1(\mathbb{C}_\Delta(\Lambda), \mathbb{C}_\Delta(\Lambda))$.

ii) Sea (X,τ) un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes:
   (1) (Λ, τ_Δ^+) satisface $\mathbf{S}_{fin}(\mathcal{D},\mathcal{D})$;
   (2) (X,τ) satisface $\mathbf{S}_{fin}(\mathbb{C}_\Delta(\Lambda), \mathbb{C}_\Delta(\Lambda))$.

Estos son las caracterizaciones de $\mathcal{S}_1(\mathcal{D},\mathcal{D})$ y $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{D},\mathcal{D})$ respectivamente.
Posteriormente de cada teorema, se dan los Corolarios 2.47, 2.52, 2.53, 2.51, 2.52 y 2.53. Tomando a Δ y Λ como $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ o $\mathbb{CS}(X)$.

Palabras clave: *Hiperespacios, Topología hit-and-miss, Propiedad de Rothberger, Propiedad de Menger, Propiedad estrella de Rothberger, Propiedad estrella de Menger, Propiedad fuertemente estrella de Rothberger, Propiedad fuertemente estrella de Menger, Principio de selección* $\mathcal{S}_1(\mathcal{D},\mathcal{D})$*, Principio de selección* $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{D},\mathcal{D})$.

Introducción

En este trabajo de tesis caracterizamos la propiedad de Rothberger, Menger y los principios de selección estrella y fuertemente estrella de Rothberger, Menger, en los hiperespacios $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ y $\mathbb{CS}(X)$, con la topología hit-and-miss.
Para caracterizar el principio estrella y fuertemente estrella, presentamos un par de principios tanto para Rothberger y Menger que hemos denotado por $\mathcal{S}_R(\Pi_\Delta(\Lambda),\ \Pi_\Delta(\Lambda))$, $\mathcal{S}_M(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$, $\mathcal{S}_R^*(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$ y $\mathcal{S}_M^*(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Gamma))$.
Además, damos una equivalencia del principio de selección $\mathcal{S}_1(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ y $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ en los mismos hiperespacios, utilizando $c_\Delta(\Lambda)$-cubierta de un espacio.
Los Autores Borel [2], Menger [13], Hurewicz [7], Rothberger [16] iniciaron el estudio de los principios de selección a principios del siglo XX. De hecho, Scheepers [21] inició una investigación sistemática sobre los principios de selección, que condujo a una gran cantidad de investigación sobre los principios de selección y sus aplicaciones. Una de las líneas de investigación generadas por los principios de selección son los principios de selección estrella. En 1999, [8] inició un importante estudio sobre estos principios. Actualmente, muchos autores han trabajado con estos conceptos para obtener resultados en hiperespacios. Además, esta teoría tiene ahora aplicaciones en varios campos de las matemáticas, por ejemplo, teoría de conjuntos, espacios funcionales e hiperespacios.
Por otro lado, la teoría del hiperespacio comenzó con los trabajos de D. Pompeiu [15], F. Hausdorff [6], L. Vietoris [32] y E. Michael [14].
Recordamos que dado un espacio topológico X, $CL(X)$ denota el conjunto de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de X. El conjunto $CL(X)$, dotado de alguna topología, generalmente se conoce como *hiperespacio de X*.
Se han estudiado ampliamente numerosas relaciones entre las propiedades del espacio X y sus hiperespacios. En particular, muchas propiedades topológicas se definen o caracterizan en términos de los principios de selección clásicos ([4, 10, 3, 19]).
Se ha mejorado el estudio de las relaciones entre los principios de selección y los hiperespacios. Por ejemplo, en [4] los autores usan π-red para caracterizar espacios topológicos cuyo hiperespacio, dotado de la topología Fell, satisface la propiedad de Rothberger. Más tarde, Li definió los conceptos de π_F-red ([12, Definición 3.7]) y π_V -red ([12, Definición 3.11]) para un espacio X. Con estas nociones, Li, caracteriza las propiedades de Rothberger y Menger para $(CL(X), \tau_F)$ y $(CL(X), \tau_V)$, respectivamente. Posteriormente, Casas de la Rosa ([34]) generalizan la noción de π_F-red y π_V-red e introducen principios de selección que les permiten caracterizar las propiedades estrella y de Rothberger y Menger. Además la propiedad fuertemente estrella de Rothberger y Menger . En esta tesis, presentamos la noción genérica de $\pi_\Delta(\Lambda)$, que generaliza π_F-red π_V-red , definida por Li en [12]. Además, usamos este concepto para obtener:

A) En los teoremas 2.9 y 2.24 hay una caracterización de la propiedad de Rothberger y Menger, respectivamente en el hiperespacio $CL(X)$ y algunos subespacios de éste, con la topología hit-and-miss. Además, en el teorema 2.9 y 2.24 obtenemos una generalización común para [12, Teoremas 4.6, 4.7].

B) Un par de principios de selección genéricos, que hemos indicado con los símbolos $\mathbf{S}_R(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$ y $\mathbf{S}_R^*(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$, $\mathbf{S}_M(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$ y $\mathbf{S}_M^*(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$ (ver

Definiciones 2.14 , 2.19 2.29 y 2.34), respectivamente para caracterizar las propiedades de Rothberger y Menger en $CL(X)$ y algunos subespacios de la misma, dotados con la topología hit-and-miss (ver Teoremas 2.15 ,2.20,2.30 y 2.35).

Nuevamente, siguiendo las ideas de Li, cerramos la tesis con los Teoremas 2.46 y 2.50, del cual se sigue [12, Teoremas 4.2 y 4.4], como casos particulares.

Cuando X es un espacio de Hausdorff y paracompacto, Ko č inac mostró que las propiedades de Rothberger, Menger, principio etrella y fuertemente estrella de Rothberger y Menger son equivalentes [8, Teorema 2.8]. La figura 1 proporciona relaciones entre las propiedades definidas previamente. Estos se derivan inmediatamente de las definiciones y no son reversibles.

$$\begin{tikzcd}
SR \arrow[r] & SM \\
SSR \arrow[u] \arrow[r] & SSM \arrow[u] \\
\text{Rothberger} \arrow[u] \arrow[r] & \text{Menger} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Figura 1: Relación de las propiedades Rothberger, Menger, principio estrella y fuertemente estrella de Rothberger y de Menger. [34]

Como mencionamos anteriormente, los principios de selección son muy útiles en la teoría de los hiperespacios. En este trabajo de tesis vamos a suponer que todos los espacios son no compactos de Hausdorff e incluso, no paracompactos.

Capítulo 1

Preliminares

El material que se requiere para la lectura del presente trabajo de tesis, es bastante básico, lo cual no lo lleva a un grado de trivial, simple o evidente. De modo que cualquier persona que posea conocimientos básicos de topología, podrá leer el contenido de esta obra. No haremos una exposición mínima sobre topología, el lector interesado puede encontrar en cualquier texto de topología las nociones empleadas aquí.
La existencias de trabajos que exponen ampliamente, en la teoría de hiperespacios nos permite presentar aquí, brevemente, las nociones que emplearemos a lo largo de este trabajo de tesis.

Nota 1.1. *Dado un espacio topológico (X, τ), denotamos $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ y $\mathbb{CS}(X)$, a la familia de todos los subconjuntos cerrados no vacíos, la familia de todos los subconjuntos compactos no vacíos, la familia de todos los subconjuntos finitos y la familia de todas las sucesiones convergentes de X respectivamente.*

Dado un espacio topológico de Hausdorff (X, τ), todo conjunto finito es un conjunto compacto, es decir $\mathbb{F}(X) \subseteq \mathbb{K}(X)$. Además tenemos que todo conjunto compacto en un espacio de Hausdorff es un conjunto cerrado, entonces $\mathbb{F}(X) \subseteq \mathbb{K}(X) \subseteq CL(X)$. Además tenemos que toda sucesión convergente con su punto de convergencia en un conjunto cerrado, es decir que $\mathbb{CS}(X) \subseteq CL(X)$. En el siguiente ejemplo mostraremos que estas contenciones son propias.

Ejemplo 1.2. *Tomemos $X = \mathbb{R}$; con su topología usual.*

1. *Los intervalos cerrados $[a, b]$ son conjuntos compactos en $\mathbb{R}$. Entonces $[0, 1] \in \mathbb{K}(\mathbb{R})$, como todo conjunto compacto en $\mathbb{R}$ es cerrado, se tiene que $[0, 1] \in CL(\mathbb{R})$.*
2. *Los conjuntos unitarios $\{a\}$ son finitos en $\mathbb{R}$. Entonces $\{8\} \in \mathbb{F}(\mathbb{R})$, como todo conjunto finito en $\mathbb{R}$ es cerrado, se tiene que $\{8\} \in CL(\mathbb{R})$.*
3. *Las sucesiones de la forma $\{\frac{a}{n}\}_1^\infty$ son convergentes en $\mathbb{R}$. Entonces $\{\frac{2}{n}\}_1^\infty \in \mathbb{CS}(\mathbb{R})$, como toda sucesión convergente en $\mathbb{R}$ es cerrado, entonces $\{\frac{2}{n}\}_1^\infty \in CL(\mathbb{R})$.*

Por la relación dada anteriormente en algunos casos hablaremos solo de $CL(X)$.
A continuación vamos a definir las topologías en los espacios antes mencionados, pero antes, vamos a introducir la notación que usaremos a lo largo de este trabajo.

Definición 1.3. *Para un subconjunto $U \subseteq X$ y una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X, escribimos:*

$$\begin{aligned} U^- &= \{A \in CL(X) : A \cap U \neq \emptyset\}; \\ U^+ &= \{A \in CL(X) : A \subseteq U\}; \\ U^c &= X \setminus U; \\ \mathcal{U}^c &= \{U^c : U \in \mathcal{U}\}. \end{aligned}$$

Dos de las topologías definidas para hiperespacios son la topología de Vietoris y la topología de Fell, estas topologías se definen de la siguiente manera.

Definición 1.4. *(Topología de Vietoris), tiene por base a la familia*

$$\{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle : n \in \mathbb{N} \text{ y } U_1, \ldots, U_n \subseteq X \text{ son abiertos de } X\},$$

donde $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ *denota al conjunto:*

$$\{A \in CL(X) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i,\ A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

En el presente trabajo nos referiremos a $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ como Vietórico.

Definición 1.5. *(Topología de Fell), tiene por base a la familia*

$$\{(U_1, \ldots, U_n)_B^+ : n \in \mathbb{N} \text{ y } U_1, \ldots, U_n \subseteq X \text{ son abiertos de } X\},$$

donde B es un compacto en X y $(U_1, \ldots, U_n)_B^+$ *denota al conjunto:*

$$\{A \in CL(X) : A \subseteq B^c,\ \text{ y } \ A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Nos referimos a $(U_1, \ldots, U_n)_B^+$ como Felórico.
En algunos textos se emplean las notaciones siguientes:

- El vietórico $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$; se denota como: $(\bigcup_{i=1}^{n} U_i)^+ \cap (\bigcap_{i=1}^{n} U_i^-)$.
- Es usual denotar al felórico $(U_1, \ldots, U_n)_B^+$ por $\langle B; U_1, \ldots, U_n \rangle$ o $(B^c)^+ \cap (\bigcap_{i=1}^{n} U_i^-)$.

Una de las cuestiones naturales en la teoría de espacios topológicos es comparar las diversas topologías definidas sobre un mismo conjunto, la topología que introducimos a continuación es una generalización de las dos topologías definidas anteriormente.

Definición 1.6. *Sea $\Delta \subseteq CL(X)$ una familia de $CL(X)$ cerrada bajo uniones finitas y que contiene a los conjuntos singulares, entonces la topología hit-and-miss en $CL(X)$ con respecto a Δ, denotada por τ_Δ^+, tiene como base, la familia*

$$\left\{(U_1, \ldots, U_m)_B^+ : B \in \Delta \text{ y } V_i \in \tau \text{ con } i \in \{1, \ldots, m\}\right\}.$$

donde $(V_1, \ldots, V_m)_B^+$ *denota al conjunto:*

$$\{A \in CL(X) : A \subseteq B^c,\ \text{ y } \ A \cap V_i \neq \emptyset \text{ para } i \in \{1, \ldots, m\}\}.$$

Notemos que si $\Delta = \mathbb{K}(X)$, la topología dada en la definición anterior es justamente la topología de Fell.
Por otro lado, si $\Delta = CL(X)$, entonces obtenemos la topología de Vietoris. En efecto solo basta tomar a $B = \bigcap_{i=1}^{n} V_i^c$.
En la literatura existen varios topologías que se pueden definir en $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ y $\mathbb{CS}(X)$, a lo largo de este trabajo de tesis las consideraremos como subespacios de $(CL(X), \tau_\Delta^+)$.
Vamos a ilustrar las topologías definidas anteriormente con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.7. *Tomemos a $X = \mathbb{R}$ con su topología usual. Sean $A = \{1, 3, 5, 9\}$, $B = \{1, 3, 11\}$, $C = \{1, 3, 6\}$ y $D = [0{,}1, 1] \cup \{3, 5, 8\}$. Tenemos que, $A, B, C, D \in CL(\mathbb{R})$. Recordemos, además, que los conjuntos finitos, los intervalos cerrados y las sucesiones convergentes y su punto de convergencia son conjuntos compactos en $\mathbb{R}$.*

1. *Tomemos el vietórico (básico en la topología de Vietoris)* $U = \langle (0,2),(2,4),(4,8),(7,10)\rangle$. *Ahora veamos qué ocurre con los puntos A, B, C y D y el Vietorico U.*

   a) $A \in U$. *Efectivamente,* $\{1,3,5,9\} \subseteq (0,2) \cup (2,4) \cup (4,8) \cup (7,10)$ *y también* $\{1,3,5,9\}\cap(0,2) \neq \emptyset$, $\{1,3,5,9\}\cap(2,4) \neq \emptyset$, $\{1,3,5,9\}\cap(4,8) \neq \emptyset$ *y* $\{1,3,5,9\}\cap(7,10) \neq \emptyset$. *Esto es:*
   $\{1,3,5,9\} \in \langle (0,2),(2,4),(4,8),(7,10)\rangle$.

   b) $B \notin U$. *Lo cual ocurre por el hecho de que* $\{1,3,11\} \not\subseteq (0,2)\cup(2,4)\cup(4,8)\cup(7,10)$.

   c) $C \notin U$. *Si bien* $\{1,3,6\} \subseteq (0,2)\cup(2,4)\cup(4,8)\cup(7,10)$, *pero no ocurre que* $\{1,3,6\}\cap(7,10) \neq \emptyset$.

   d) $D \in U$, *puesto que* $[0{,}1,1] \cup \{3,5,8\} \subseteq (0,2)\cup(2,4)\cup(4,8)\cup(7,10)$ *y también* $([0{,}1,1]\cup\{3,5,8\})\cap(0,2) \neq \emptyset$, $([0{,}1,1]\cup\{3,5,8\})\cap(2,4) \neq \emptyset$, $([0{,}1,1]\cup\{3,5,8\})\cap(4,8) \neq \emptyset$ *y* $([0{,}1,1]\cup\{3,5,8\})\cap(7,10) \neq \emptyset$. *Esto es:* $([0{,}1,1]\cup\{3,5,8\}) \in \langle (0,2),(2,4),(4,8),(7,10)\rangle$.

2. *Consideremos un básico en la topología de Fell* V= $([-1,0];(0,2),(2,4),(4,8),(7,10))^{+}_{[-1,0]}$. *Ahora veamos qué ocurre con los puntos A, B, C y D y el felórico V*

   a) $A \in V$. *Efectivamente,* $\{1,3,5,9\} \subseteq ([-1,0])^c$ *y también* $\{1,3,5,9\}\cap(0,2) \neq \emptyset$, $\{1,3,5,9\}\cap(2,4) \neq \emptyset$, $\{1,3,5,9\}\cap(4,8) \neq \emptyset$ *y* $\{1,3,5,9\}\cap(7,10) \neq \emptyset$. *Esto es:*
   $\{1,3,5,9\} \in ([-1,0];(0,2),(2,4),(4,8),(7,10))^{+}_{[-1,0]}$.

   b) $B \notin V$. *Porque si bien es cierto que* $\{1,3,11\} \subseteq ([-1,0])^c$, *y también ocurre que* $\{1,3,11\}\cap(0,2) \neq \emptyset$, $\{1,3,11\}\cap(2,4) \neq \emptyset$, *pero no ocurre que* $\{1,3,11\}\cap(4,8) \neq \emptyset$.

   c) $C \notin V$. *Esto se debe a que si bien es cierto que* $\{1,3,6\} \subseteq ([-1,0])^c$, *y también ocurre que* $\{1,3,6\}\cap(0,2) \neq \emptyset$, $\{1,3,6\}\cap(2,4) \neq \emptyset$ *y* $\{1,3,6\}\cap(4,8) \neq \emptyset$, *pero no ocurre que* $\{1,3,6\}\cap(7,10) \neq \emptyset$.

   d) $D \in V$, *dado que* $([0{,}1,1] \cup \{3,5,8\}) \subseteq ([-1,0])^c$, *además se tiene que* $([0{,}1,1]\cup\{3,5,8\})\cap(0,2) \neq \emptyset$, $([0{,}1,1]\cup\{3,5,8\})\cap(2,4) \neq \emptyset$, $([0{,}1,1]\cup\{3,5,8\})\cap(4,8) \neq \emptyset$ *y* $([0{,}1,1]\cup\{3,5,8\})\cap(7,10) \neq \emptyset$. *Esto es:*
   $([0{,}1,1]\cup\{3,5,8\}) \in ([-1,0];(0,2),(2,4),(4,8),(7,10))^{+}_{[-1,0]}$.

3. *Consideremos un básico en la topología de hit-and-miss* $W = (\{\frac{-1}{n}\}_1^{\infty} \cup \{0\};(0,2),(2,4),(4,8),(7,10))^{+}_{\{\frac{-1}{n}\}_1^{\infty}\cup\{0\}}$.
   Ahora veamos qué ocurre con los puntos A, B, C y D y el básico W

   a) $A \in W$. *Efectivamente,* $\{1,3,5,9\} \subseteq (\{\frac{-1}{n}\}_1^{\infty} \cup \{0\})^c$ *y también* $\{1,3,5,9\}\cap(0,2) \neq \emptyset$, $\{1,3,5,9\}\cap(2,4) \neq \emptyset$, $\{1,3,5,9\}\cap(4,8) \neq \emptyset$ *y* $\{1,3,5,9\}\cap(7,10) \neq \emptyset$. *Esto es:*
   $\{1,3,5,9\} \in (\{\frac{1}{n}\}_1^{\infty} \cup \{0\};(0,2),(2,4),(4,8),(7,10))^{+}_{\{\frac{-1}{n}\}_1^{\infty}\cup\{0\}}$.

   b) $B \notin W$. *Porque si bien es cierto que* $\{1,3,11\} \subseteq (\{\frac{-1}{n}\}_1^{\infty} \cup \{0\})^c$, *y también ocurre que* $\{1,3,11\}\cap(0,2) \neq \emptyset$, $\{1,3,11\}\cap(2,4) \neq \emptyset$, *pero no ocurre que* $\{1,3,11\}\cap(4,8) \neq \emptyset$.

c) $C \notin W$. *Esto se debe a que si bien es cierto que* $\{1,3,6\} \subseteq (\{\frac{-1}{n}\}_1^\infty \cup \{0\})^c$, *y también ocurre que* $\{1,3,6\} \cap (0,2) \neq \emptyset$, $\{1,3,6\} \cap (2,4) \neq \emptyset$ *y* $\{1,3,6\} \cap (4,8) \neq \emptyset$, *pero no ocurre que* $\{1,3,6\} \cap (7,10) \neq \emptyset$.

d) $D \in V$, *dado que* $([0{,}1,1] \cup \{3,5,8\}) \subseteq (\{\frac{-1}{n}\}_1^\infty \cup \{0\})^c$, *además se tiene que* $([0{,}1,1] \cup \{3,5,8\}) \cap (0,2) \neq \emptyset$, $([0{,}1,1] \cup \{3,5,8\}) \cap (2,4) \neq \emptyset$, $([0{,}1,1] \cup \{3,5,8\}) \cap (4,8) \neq \emptyset$ *y* $([0{,}1,1] \cup \{3,5,8\}) \cap (7,10) \neq \emptyset$. *Esto es:*
$([0{,}1,1] \cup \{3,5,8\}) \in (\{\frac{-1}{n}\}_1^\infty \cup \{0\}; (0,2),(2,4),(4,8),(7,10))^+_{\{\frac{-1}{n}\}_1^\infty \cup \{0\}}$.

Finalmente definiremos los principios de selección con los que trabajaremos en el capítulo siguiente, el cual es el principal objetivo de este trabajo.

Definición 1.8.
Sean X *un conjunto infinito,* $\mathscr{A}$ *y* $\mathscr{B}$ *colecciones de familias de subconjuntos de* X.

- $\mathbf{S}_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$ *denota el principio: Para cualquier sucesión* $\{\mathcal{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$ *de elementos de* $\mathscr{A}$, *hay una sucesión* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ *tal que para cada* $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{A}_n$ *y* $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es un elemento de* $\mathscr{B}$.
- $\mathbf{S}_{fin}(\mathscr{A},\mathscr{B})$ *denota el principio: para cualquier sucesión* $\{\mathcal{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$ *de elementos de* $\mathscr{A}$ *hay una sucesión*$\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ *tal que* $\mathcal{F}_n$ *es un subconjunto finito de* $\mathcal{A}_n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n \in \mathscr{B}$.

Para concluir los preliminares, recordemos que la notación $[A]^{<\omega}$ denota la colección de todos los subconjuntos finitos del conjunto A. Además si X es un espacio toplógico, una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X se llama cubierta de X si $\bigcup\mathcal{U} = X$. Como es usual, una cubierta abierta de X, es una cubierta cuyos elementos son conjuntos abiertos en X.
Denotamos por $\mathcal{O}$ a la colección de cubiertas abiertas del espacio topológico X. Si en la definición anterior consideramos el caso particular $\mathscr{A} = \mathscr{B} = \mathcal{O}$ los principios $\mathbf{S}_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$ y $\mathbf{S}_{fin}(\mathscr{A},\mathscr{B})$ son conocidos como *propiedad de Rothberger* y la *Propiedad de Menger*, respectivamente. Esto es, la propiedad de Rothberger es el principio $\mathbf{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ y la propiedad de Menger es $\mathbf{S}_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O})$.
Como en muchas propiedades de cubiertas abiertas, como la compacidad por ejemplo, las propiedades Rothberger y Menger se satisfacen, si estas son validas en términos de básicos. Para verlo, denotamos $\mathcal{O}_b$ a la colección de cubiertas abiertas del espacio X, formadas por abiertos básicos del espacio.

Proposición 1.9. *Sea* (X,τ) *un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) X *satisface* $S_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O})$ $(S_1(\mathcal{O},\mathcal{O}))$.

(2) X *satisface* $S_{fin}(\mathcal{O}_b,\mathcal{O}_b)$ $(S_1(\mathcal{O}_b,\mathcal{O}_b))$.

Demostración.
Haremos la demostración para la propiedad de Menger.
$[(1) \Rightarrow (2)]$ Sea $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de cubiertas abiertas conformada por básicos, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\mathcal{U}_n \in \mathcal{O}$, es decir que la familia, $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión en $\mathcal{O}$, por (1), existe para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}_n \subseteq [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$ tal que $\bigcup\{\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta, además conformada por básicos.
Por lo tanto X satisface $S_{fin}(\mathcal{O}_b,\mathcal{O}_b)$.

$[(2) \Rightarrow (1)]$ Sea $\mathcal{B}$ una base arbitraria para la topología de X y consideremos una sucesión de cubiertas abiertas, $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$, de X. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la colección $\mathcal{U}'_n$ como sigue: Sea $x \in X$, puesto que $\mathcal{U}_n$ es cubierta de X, fijamos $U^n_x \in \mathcal{U}_n$ y $B^n_x \in \mathcal{B}$ de tal manera que $x \in B^n_x \subseteq U^n_x$. Entonces $\mathcal{U}'_n$ es la colección formada por los B^n_x así construidos. Claramente, para cada $n \in \mathbb{N}$, la colección $\mathcal{U}'_n$ es una cubierta abierta de X formada por abiertos básicos. Aplicamos

(2) a la sucesión $\{\mathcal{U}'_n : n \in \mathbb{N}\}$, para obtener, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}'_n \in [\mathcal{U}'_n]^{<\omega}$, de tal forma que $\bigcup\{\mathcal{V}'_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de X. Ahora bien, notemos que por cada $B^n_x \in \mathcal{V}'_n$ tenemos $U^n_x \in \mathcal{U}_n$ tal que $B^n_x \subseteq U^n_x$. Denotemos $\mathcal{V}_n$ a la colección formada por los U^n_x correspondientes a los elementos de $\mathcal{V}'_n$. Es claro que $\mathcal{V}_n \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$ y que la colección $\bigcup\{\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es cubierta abierta de X.
Por lo tanto X satisface $S_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$. □

Kočinac introdujo en [8] algunos principios de selección usando el operador estrella St; hoy en día, esta área se conoce como *teoría de los principios de selección de estrellas*. El operador estrella St se define de la siguiente manera.

Definición 1.10. *Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$ y una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X, la estrella de A con respecto a $\mathcal{U}$ se denota por $St(A,\mathcal{U})$ y definido como el conjunto $\bigcup\{U \in \mathcal{U} : U \cap A \neq \emptyset\}$.*

Escribimos $St(x,\mathcal{U})$ en lugar de $St(\{x\},\mathcal{U})$, si $x \in X$
. En la definición siguiente recordamos las versiones estrella y fuertemente estrella para los principios $\mathbf{S}_1(\mathscr{A},\mathscr{B})$ y $\mathbf{S}_{fin}(\mathscr{A},\mathscr{B})$.

Definición 1.11.
Sean X un conjunto infinito, $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ colecciones de familias de subconjuntos de X.

- $\mathbf{S}_1^*(\mathscr{A},\mathscr{B})$, *si para cualquier sucesión $\{\mathcal{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$ de elementos de $\mathscr{A}$, hay una sucesión $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{A}_n$ y $\{St(A_n, \mathcal{A}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un elemento de $\mathscr{B}$.*
- $\mathbf{S}_{fin}^*(\mathscr{A},\mathscr{B})$, *si para cualquier sucesión $\{\mathcal{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$ de elementos de $\mathscr{A}$, hay una sucesión $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n \in [\mathcal{A}_n]^{<\omega}$ y $\{St(\bigcup \mathcal{F}_n, \mathcal{A}_n) : n \in \mathbb{N}\} \in \mathscr{B}$.*
- $\mathbf{SS}_1^*(\mathscr{A},\mathscr{B})$, *si para cualquier sucesión $\{\mathcal{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$ de elementos de $\mathscr{A}$, hay una sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ en X tal que $\{St(x_n, \mathcal{A}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un elemento de $\mathscr{B}$.*
- $\mathbf{SS}_{fin}^*(\mathscr{A},\mathscr{B})$, *si para cualquier sucesión $\{\mathcal{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$ de elementos de $\mathscr{A}$, hay una sucesión $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos finitos de X tal que $\{St(F_n,\mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un elemento de $\mathscr{B}$.*

Los casos particulares generados por la definición anterior para cuando
$\mathscr{A} = \mathscr{B} = \mathcal{O}$; esto es, $\mathbf{S}_1^*(\mathscr{O},\mathscr{O})$, $\mathbf{S}_{fin}^*(\mathscr{O},\mathscr{O})$, $\mathbf{SS}_1^*(\mathscr{O},\mathscr{O})$ y $\mathbf{SS}_{fin}^*(\mathscr{O},\mathscr{O})$, se conocen como propiedad estrella Rothberger (SR), propiedad estrella de Menger (SM), propiedad fuertemente estrella Rothberger (SSR) y la propiedad fuertemente estrella Menger (SSM), respectivamente.
Igual que en el caso de las propiedades Rothberger y Menger, las propiedades estrella y fuertemente estrella que inducen Rothberger y Menger se verifican si estas se satisfacen para cubiertas de abiertos básicos.

Proposición 1.12. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) X satisface $S_{fin}^*(\mathcal{O},\mathcal{O})$ ($S_1^*(\mathcal{O},\mathcal{O})$).

(2) X satisface $S_{fin}^*(\mathcal{O}_b,\mathcal{O}_b)$ ($S_1^*(\mathcal{O}_b,\mathcal{O}_b)$).

Demostración.
Haremos la demostración para la propiedad estrella Menger.
[(1) ⇒ (2)] Sea $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de cubiertas abiertas conformada por básicos, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\mathcal{U}_n \in \mathcal{O}$, es decir que la familia, $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión en $\mathcal{O}$, por (1), hay una sucesión $\{\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}_n \in [\mathcal{U}_n]^{<}\omega$ y $\{St(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n,\mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$, es una cubierta abierta, además conformada por básicos.

Por lo tanto X satisface $S^*_{fin}(\mathcal{O}_b, \mathcal{O}_b)$.

[(2) $\Rightarrow$ (1)] Sea $\mathcal{B}$ una base arbitraria para la topología de X y consideremos una sucesión de cubiertas abiertas, $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$, de X. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la colección $\mathcal{U}'_n$ como sigue: Sea $x \in X$, puesto que $\mathcal{U}_n$ es cubierta de X, fijamos $U^n_x \in \mathcal{U}_n$ y $B^n_x \in \mathcal{B}$ de tal manera que $x \in B^n_x \subseteq U^n_x$. Entonces $\mathcal{U}'_n$ es la colección formada por los B^n_x así construidos. Claramente, para cada $n \in \mathbb{N}$, la colección $\mathcal{U}'_n$ es una cubierta abierta de X formada por abiertos básicos. Aplicamos (2) a la sucesión $\{\mathcal{U}'_n : n \in \mathbb{N}\}$, para obtener, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}'_n \in [\mathcal{U}'_n]^{<\omega}$, de tal forma que $\left\{St(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}'_n, \mathcal{U}'_n) : n \in \mathbb{N}\right\}$ es una cubierta abierta de X. Ahora bien, notemos que por cada $B^n_x \in \mathcal{V}'_n$ tenemos $U^n_x \in \mathcal{U}^n$ tal que $B^n_x \subseteq U^n_x$. Denotemos $\mathcal{V}_n$ a la colección formada por los U^n_x correspondientes a los elementos de $\mathcal{V}'_n$. Es claro que $\mathcal{V}_n \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$ y que la colección $\left\{St(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\right\}$ es cubierta abierta de X.
Por lo tanto X satisface $S_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$. $\square$

Proposición 1.13. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1 X satisface $SS^*_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ ($SS^*_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$).

2 X satisface $SS^*_{fin}(\mathcal{O}_b, \mathcal{O}_b)$ S($S^*_1(\mathcal{O}_b, \mathcal{O}_b)$).

Demostración.
Haremos la demostración para la propiedad fuertemente estrella Menger.
[(1) $\Rightarrow$ (2)] Sea $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de cubiertas abiertas conformada por básicos, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\mathcal{U}_n \in \mathcal{O}$, es decir que la familia, $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión en $\mathcal{O}$, por (1), existe $\{\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}_n \in [X]^{<\omega}$ y $\{St(\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$, es una cubierta abierta, además conformada por básicos.
Por lo tanto X satisface $SS^*_{fin}(\mathcal{O}_b, \mathcal{O}_b)$.

[(2) $\Rightarrow$ (1)] Sea $\mathcal{B}$ una base arbitraria para la topología de X y consideremos una sucesión de cubiertas abiertas, $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$, de X. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la colección $\mathcal{U}'_n$ como sigue: Sea $x \in X$, puesto que $\mathcal{U}_n$ es cubierta de X, fijamos $U^n_x \in \mathcal{U}_n$ y $B^n_x \in \mathcal{B}$ de tal manera que $x \in B^n_x \subseteq U^n_x$. Entonces $\mathcal{U}'_n$ es la colección formada por los B^n_x así construidos. Claramente, para cada $n \in \mathbb{N}$, la colección $\mathcal{U}'_n$ es una cubierta abierta de X formada por abiertos básicos. Aplicamos (2) a la sucesión $\{\mathcal{U}'_n : n \in \mathbb{N}\}$, para obtener, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}'_n \in [X]^{<\omega}$, de tal forma que $\{St(\mathcal{V}'_n, \mathcal{U}'_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de X. Ahora bien, notemos que por cada $B^n_x \in \mathcal{V}'_n$ tenemos $U^n_x \in \mathcal{U}_n$ tal que $B^n_x \subseteq U^n_x$. Denotemos $\mathcal{V}_n$ a la colección formada por los U^n_x correspondientes a los elementos de $\mathcal{V}'_n$. Es claro que $\mathcal{V}_n \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$ y que la colección $\{St(\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es cubierta abierta de X.
Por lo tanto X satisface $SS_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$. $\square$

Capítulo 2

Resultados principales

Como mencionamos anteriormente el principal objetivo de este trabajo de tesis es caracterizar las propiedades de selección de tipo Rothberger y Menger, así como las versiones estrella y fuertemente estrella de estas en los hiperespacios $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ y $\mathbb{CS}(X)$. Para ésto, a o largo de este trabajo y a menos que digamos lo contrario, tomaremos una familia $\Lambda \subseteq CL(X)$ la cual supondremos que es cerrada bajo uniones finitas y $\emptyset \notin \Lambda$. Evidentemente las familias $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ y $\mathbb{CS}(X)$, satisfacen esta condición.
Recordemos que Li define la noción de π_V-red y π_F-red en X como veremos a continuación.

Definición 2.1.
Sea la familia ζ=$\{(V_1, \dots, V_n) : V_1, \dots, V_n$ *son abiertos en* $X, \quad n \in \mathbb{N}\}$.
Entonces ζ *es una* π_V*-red para* X*, si para cada* U *abierto en* X *con* $U \neq X$*, si existen* $(V_1, \dots, V_n) \in \zeta$ *y* $F \in [X]^{<\omega}$ *tal que:*

1. $\bigcap_{i=1}^{n} V_i^c \subseteq U$;
2. $F \cap V_i \neq \emptyset$ $(1 \leq i \leq n)$
3. $F \cap U = \emptyset$.

Definición 2.2.
Sea la familia $\zeta = \{(B; V_1, \dots, V_n) : B \in \mathbb{K}(X)$, $V_1, \dots, V_n$ *son abiertos en* X, $n \in \mathbb{N}$ *y* $V_i \cap B^c \neq \emptyset$ $(1 \leq i \leq n)\}$.
Entonces ζ *es una* π_F*-red para* X*, si para cada* U *abierto en* X *con* $U \neq X$*, si existen* $(B; V_1, \dots, V_n) \in \zeta$ *con* $B \subseteq U$ *y* $F \in [X]^{<\omega}$ *tal que* $F \cap U = \emptyset$ *y para cada* $i \in \{1, \dots, n\}$, $F \cap V_i \neq \emptyset$.

Las familias de todas las π_F-redes y las π_V-redes se denotan mediante Π_F y Π_V, respectivamente.

La definición que introducimos a continuación es una generalización de las nociones de π_V-red y π_F-red en X.
De ahora en adelante, mientras no se diga lo contrario, ζ denota a la familia de la forma :
$\zeta = \{(B; V_1, \dots, V_n) : B \in \Delta$, $V_1, \dots, V_n$ son abiertos en X, $n \in \mathbb{N}$ y
$V_i \cap B^c \neq \emptyset$ $(1 \leq i \leq n)\}$.

Definición 2.3. *Una familia* ζ *se llama* $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X*, si para cada* $U \in \Lambda^c$*, existen* $(B; V_1, \dots, V_n) \in \zeta$ *con* $B \subseteq U$ *y* $F \in [X]^{<\omega}$ *tal que* $F \cap U = \emptyset$ *y para cada* $i \in \{1, \dots, n\}$, $F \cap V_i \neq \emptyset$*. La familia de todas las redes* $\pi_\Delta(\Lambda)$*-red se denota como* $\Pi_\Delta(\Lambda)$.

Demostraremos a continuación la relación existente entre las nociones definidas por Li y la dada en la definición anterior.

Proposición 2.4.
Si $\Delta = \mathbb{K}(X)$ y $\Lambda = CL(X)$, entonces la noción de $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X coincide con la definición de π_F-red de X

Demostración.
Es inmediato ya que al tomar cada $U \in \Lambda^c$ se tiene que U es un abierto en X con $U \neq X$, además aplicando la hipótesis, existe $(B; V_1, \ldots, V_n) \in \zeta$ y $F \in [X]^{<\omega}$ que satisfacen la Definición 2.3. Los mismos $(B; V_1, \ldots, V_n)$ y F satisfacen la Definición 2.2. $\square$

Proposición 2.5.
Si $\Delta = \Lambda = CL(X)$, entonces:

1. *Cada $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X induce una π_V-red de X*
2. *Si ζ' es una π_V-red de X, entonces $\zeta = \{(\bigcap_{i=1}^n V_i^c; V_1, \ldots, V_n) : (V_1, \ldots, V_n) \in \zeta'\}$ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X.*

Demostración.

1. Sea ζ una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X y consideremos $\zeta' = \{(B^c, V_1, \ldots, V_n) : (B; V_1, \ldots, V_n) \in \zeta\}$. Afirmamos que ζ' es una π_V-red de X. Para verlo, sea U un subconjunto abierto de X tal que $U \neq X$. Entonces $U^c \in CL(X) = \Lambda$; luego, U $\in \Lambda^c$. Dado que ζ una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X, existen $(B; V_1, \ldots, V_n) \in \zeta$ y $F \in [X]^{<\omega}$ tales que $B \subseteq U$, $F \cap U = \emptyset$ y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $F \cap V_i \neq \emptyset$. Con esto obtenemos que $U^c \subset B^c$ y $F \subseteq U^c$, entonces $F \subseteq B^c$. Ahora como $(B; V_1, \ldots, V_n) \in \zeta$ se tiene que $B \in \Delta = CL(X)$ es decir que B^c es un abierto en X, entonces $(B^c, V_1, \ldots, V_n) \in \zeta'$. Claramente $\bigcap_{i=1}^n V_i^c \cap B \subseteq U$, en resumen tenemos que:

   a) $\bigcap_{i=1}^n V_i^c \cap B \subseteq U$;
   b) $F \cap V_i \neq \emptyset$ $(1 \leq i \leq n)$, y $F \cap B^c \neq \emptyset$
   c) $F \cap U = \emptyset$.

   Por lo tanto $\zeta' = \{(B^c, V_1, \ldots, V_n) : (B; V_1, \ldots, V_n) \in \zeta\}$ es una π_V-red de X.

2. Es inmediato, solo basta tomar a $B = \bigcap_{i=1}^n V_i^c$ y además al tomar cada $U \in \Lambda^c$ se tiene que U es un abierto en X con $U \neq X$ y coincide con la Definición 2.1.

$\square$

Una cuestión natural, derivada de la definición anterior y su nota es: ¿Son iguales las nociones $\pi_\Delta(\Lambda)$-red y π_F-red o π_V-red?. En los ejemplos siguientes se muestra que la respuesta a esta interrogante es negativa.

Ejemplo 2.6. *Sea $X = (0, 1) \cup (3, \infty)$ como subespacio de $\mathbb{R}$ y denote $Q = \mathbb{N} \cap (3, \infty)$. Sea Λ la familia formado con los $A \subseteq X$ que satisfacen que A es compacto en X y $A \subseteq (0, 1) \cup Q$. Para cualquier $x \in X$, consideramos $\mathcal{V}_x = \left\{\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \cap X : n \in \mathbb{N}\right\}$ y $\mathcal{V} = \bigcup\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$. Sea Δ la colección cuyos elementos son $B \subseteq X$ tal que $B \subseteq (0, 1)$ y B compacto. Finalmente, sea $\zeta = \{(B; V_1, \ldots, V_m) : B \in \Delta, V_1, \ldots, V_m \in \mathcal{V}$ y $m \in \mathbb{N}\}$. Entonces tenemos:*

- *ζ es una red $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X. Si $U \in \Lambda^c$, entonces $U^c \in \Lambda$; Luego, existen $A \subseteq (0, 1)$ y $Q' \in [Q]^{<\omega}$ tal que A es un subconjunto compacto de X y $U^c = A \cup \{x : x \in Q'\}$. Como A es compacto, existen $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_i$ y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$,*

$A \cap V_i \neq \emptyset$. Además, dado que Q' es un subconjunto finito, podemos renumerar Q' como $Q' = \{x_{n+1}, \ldots, x_m\}$. Para cada $x_j \in Q'$, $j \in \{n+1, \ldots, m\}$, fijamos $V_j \in \mathcal{V}$ de manera que $x_j \in V_j$ y $A \cap V_j = \emptyset$. Como A es un conjunto compacto en X, existe $p \in (0,1) \setminus A$. Observe que $(\{p\}, V_1, \ldots, V_m) \in \zeta$. Ahora, para cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$, tomamos $x_i \in A \cap V_i$ y ponemos $F = \{x_i : i \in \{1, \ldots, n\}\} \cup Q'$. Claramente, $F \in [X]^{<\omega}$. Además se tiene que $\{p\} \subseteq U$, $F \cap V_i \neq \emptyset$, para cualquier $i = \{1, \ldots, n\}$ y $F \cap U = \emptyset$. Por lo tanto, concluimos que ζ es una red $\pi_\Delta(\Lambda)$- de$X$.

- *ζ no es una red π_F-red en X. Pues no existe $(B; V_1, \ldots, V_m) \in \zeta$ tal que $B \subseteq (3, \infty)$.*

Ejemplo 2.7. *Sean X, Q, Λ y $\mathcal{V}$ como en el ejemplo anterior. y consideremos a $\zeta = \{(\bigcap_{i=1}^m V_i^c; V_1, \ldots, V_m)^+_{\bigcap_{i=1}^m V_i^c} : V_1, \ldots, V_m \in \mathcal{V}$ y $m \in \mathbb{N}\}$.*

- *ζ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X. En efecto, tome cualquier $U \in \Lambda^c$. Existen $A \subseteq (0,1)$ y $Q' \in [Q]^{<\omega}$ tales que A es un subconjunto compacto de X y $U^c = A \cup \{x : x \in Q'\}$. Como A es compacto, existen $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_i$ y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $A \cap V_i \neq \emptyset$. Además, dado que Q' es un subconjunto finito, podemos renumerar Q' como $Q' = \{x_{n+1}, \ldots, x_m\}$. Para cada $x_j \in Q'$, $j \in \{n+1, \ldots, m\}$, fijemos $V_j \in \mathcal{V}$ de manera que $x_j \in V_j$ y $A \cap V_j = \emptyset$. No es difícil demostrar que $U^c \in \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$. Observe que $(\bigcap_{i=1}^m V_i^c; V_1, \ldots, V_m)^+_{\bigcap_{i=1}^m V_i^c} \in \zeta$. Por otro lado, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, tomamos $x_i \in A \cap V_i$ y ponemos $F = \{x_i : i \in \{1, \ldots, n\}\} \cup Q'$. Claramente $F \in [X]^{<\omega}$, $F \cap U = \emptyset$ y para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, $F \cap V_i \neq \emptyset$. Además, dado que $U^c \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_i$, tenemos que $\bigcap_{i=1}^m V_i^c \subseteq U$. Por lo tanto, ζ es una $\pi_V(\Lambda)$-red de X.*

- *ζ no es una π_V- red de X. Para verlo, sea $U = (0,1)$. Está claro que $U^c \notin \Lambda$. Supongamos que $\bigcap_{i=1}^m V_i^c \subseteq U$, por algunos $(V_1, \ldots, V_m) \in \zeta$. Por lo tanto, $(3, \infty) \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_i$, lo cual no es posible.*

En los resultados siguientes tomaremos cubiertas abiertas de básicos en el espacio (Λ, τ_Δ^+); es decir, los elementos de cada cubierta abierta, van a estar representados por abiertos $(V_1, \ldots, V_m)^+_B$. El lema siguiente será de gran ayuda en diversas pruebas.

Lema 2.8. *Sea X un espacio topológico. Una familia $\zeta = \{(B; V_1, \ldots, V_m) : (V_1, \ldots, V_m)^+_B \in \mathcal{U}\}$ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X si y solo si la familia $\mathcal{U} = \left\{(V_1, \ldots, V_m)^+_B : (B; V_1, \ldots, V_m) \in \zeta\right\}$ es una cubierta abierta de (Λ, τ_Δ^+).*

Demostración.
[$\Rightarrow$]: Si U $\in \Lambda$ entonces $U^c \in \Lambda^c$. Puesto que ζ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red para X existen $(B; V_1, \ldots, V_m) \in \zeta$ y F $\in [X]^{<\omega}$ tales que, B $\subseteq U^c$; Luego $U \subseteq B^c$. Además $F \cap V_i \neq \emptyset$ $(1 \leq i \leq m)$ y $F \cap U^c = \emptyset$. Es decir que $F \subseteq U$, entonces $U \cap V_i \neq \emptyset$ $(1 \leq i \leq m)$. Concluimos que U $\in (V_1, \ldots, V_m)^+_B$, por lo cual U $\in \bigcup \mathcal{U}$. Por lo tanto $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta para (Λ, τ_Δ^+).

[$\Leftarrow$]: Sea U $\in \Lambda^c$ entonces $U^c \in \Lambda$. Dado que $\mathcal{U}$ es una cubierta para (Λ, τ_Δ^+), existe $(V_1, \ldots, V_m)^+_B \in \bigcup \mathcal{U}$ tal que $U^c \in (V_1, \ldots, V_m)^+_B$, entonces $U^c \subseteq B^c$ y $U^c \cap V_i \neq \emptyset$ $(1 \leq i \leq m)$, por lo cual B$\subseteq U$ y $B^c \cap V_i \neq \emptyset$ $(1 \leq i \leq m)$, por lo tanto, se tiene que $(B; V_1, \ldots, V_m) \in \zeta$.
Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, tomemos un punto $x_i \in U^c \cap V_i$ y consideremos $F = \{x_i : i \in \{1, \ldots, m\}\}$. Claramente F es Finito y $F \cap V_i \neq \emptyset$ $(1 \leq i \leq m)$. Además F $\subseteq U^c$ por lo cual se tiene que F $\cap$ $U = \emptyset$. Por lo tanto ζ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red para X.

□

2.1. Rothberger

En esta sección presentamos tres resultados (genéricos); a saber, Teorema 2.6, Teorema 2.11 y

Teorema 2.16, que tienen como consecuencias las caracterizaciones de las propiedades Rorthberger, fuertemente estrella Rothberger y estrella Rothberger, respectivamente en diversos hiperespacios; particularmente en $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ y $\mathbb{CS}(X)$, dotados con la topología hit-and-mis.

Teorema 2.9. *Dado un espacio topológico (X, τ), las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) (Λ, τ_Δ^+) *tiene la propiedad de Rothberger;*

(2) (X, τ) *satisface* $\mathbf{S}_1(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$.

Demostración.
[(1) $\Rightarrow$ (2)]: Sea $\{J_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión en $\Pi_\Delta(\Lambda)$. Denotemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n = \{(V_1^n, \ldots, V_m^n)_{B^n}^+ : (B^n; V_1^n, \ldots, V_m^n) \in J_n\}$. Por el Lema 2.8, tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n$ es una cubierta abierta de (Λ, τ_Δ^+). Luego, aplicando (1) a la secesión $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$, hay, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(V_1^n, \ldots, V_{m_n}^n)_{B_n}^+ \in \mathcal{U}_n$ tal que la colección $\mathcal{U} = \{(V_1^n, \ldots V_{m_n}^n)_{B^n}^+ : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de (Λ, τ_Δ^+). Por el Lema 2.8, la colección $\mathcal{J} = \{(B^n; V_1^n, \ldots, V_{m_n}^n) : (V_1^n, \ldots V_{m_n}^n)_{B^n}^+ \in \mathcal{U}\}$ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X. Además notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $(B^n; V_1^n, \ldots, V_{m_n}^n) \in J_n$. Por lo tanto, (X, τ) satisface $\mathbf{S}_1(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$.

[(2) $\Rightarrow$ (1)]: Sea $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de cubiertas abiertas de Λ. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la cubierta abierta $\mathcal{U}_n$ consta de subconjuntos básicos abiertos. Denotemos para cada $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \{(B^n; V_1^n, \ldots, V_m^n) : (V_1^n, \ldots, V_m^n)_{B^n}^+ \in \mathcal{U}_n\}$. Por el Lema 2.8, tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, J_n es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X. Aplicando (2) a la sucesión $\{J_n : n \in \mathbb{N}\}$, hay, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(B^n; V_1^n, \ldots, V_{m_n}^n) \in J_n$ tal que la colección $\mathcal{J} = \{(B^n; V_1^n, \ldots, V_{m_n}^n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X. Por el Lema 2.8 la colección $\mathcal{U} = \{(V_1^n, \ldots V_{m_n}^n)_{B^n}^+ : (B^n; V_1^n, \ldots, V_{m_n}^n) \in \mathcal{J}\}$ es una cubierta abierta de (Λ, τ_Δ^+). Además notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $(V_1^n, \ldots V_{m_n}^n)_{B^n}^+ \in \mathcal{U}_n$. Por lo tanto, (Λ, τ_Δ^+) tiene la propiedad de Rothberger. $\square$

Li caracterizó la propiedad de Rothberger en el hiperespacio $CL(X)$, dotado de las topologías de Fell y Vietoris, usando $\mathbf{S}_1(\Pi_F, \Pi_F)$, $\mathbf{S}_1(\Pi_V, \Pi_V)$ respectivamente. Como veremos a continuación, el Teorema 2.9, es una generalización común a los resultados de Li. Pero antes demostraremos el siguiente resultado.

Proposición 2.10. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $\Lambda = CL(X) = \Delta$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) (X, τ) *satisface* $\mathbf{S}_1(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$.

(2) (X, τ) *satisface* $\mathbf{S}_1(\Pi_V(\Lambda), \Pi_V(\Lambda))$.

Demostración.
[(1) $\Rightarrow$ (2)] Sea $\{J_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión en $\Pi_V(\Lambda)$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \{(V_{1,s}^n, \ldots, V_{m_s,s}^n) : s \in S_n\}$. Denotemos para cada $n \in \mathbb{N}$, $J_n' = \{(\bigcap_1^{m_s}(V_{i,s}^n)^c; V_{1,s}^n, \ldots, V_{m_s,s}^n) : s \in S_n\}$. Por la Proposición 2.5 se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$, J_n' es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X. Aplicamos (1) a la sucesión $\{J_n' : n \in \mathbb{N}\}$, entonces hay, $(\bigcap_1^{m_{s_0}}(V_{i,s_0}^n)^c; V_{1,s_0}^n, \ldots, V_{m_{s_0},s_0}^n) \in J_n'$, tal que la colección $\{(\bigcap_1^{m_{s_0}}(V_{i,s_0}^n)^c; V_{1,s_0}^n, \ldots, V_{m_{s_0},s_0}^n) : s_0 \in S_n\}$ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X. No es difícil verificar que, por la Proposición 2.5 la colección $\{(V_{1,s_0}^n, \ldots, V_{m_{s_0},s_0}^n) : s_0 \in S_n\}$ es una $\pi_V(\Lambda)$-red de X. Por lo tanto (X, τ) satisface $\mathbf{S}_1(\Pi_V(\Lambda), \Pi_V(\Lambda))$.

[(2) $\Rightarrow$ (1)] Sea $\{J_n' : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión en $\Pi_\Delta(\Lambda)$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $J_n' = \{(B^n; V_{1,s}^n, \ldots, V_{m_s,s}^n) : s \in S_n\}$. Denotemos para cada $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \{((B^n)^c, V_{1,s}^n, \ldots, V_{m_s,s}^n) : s \in S_n\}$. Por la Proposición 2.5 se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$, J_n es una $\pi_V(\Lambda)$-red de X.

Aplicamos (2) a la sucesión $\{J_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces hay, $((B^n)^c, V^n_{1,s_0}, \ldots, V^n_{m_{s_0},s_0}) \in J_n$, tal que la colección $\{((B^n)^c, V^n_{1,s_0}, \ldots, V^n_{m_{s_0},s_0}) : s_0 \in S_n\}$ es una $\pi_V(\Lambda)$-red de X. No es difícil verificar que, por la Proposición 2.5 la colección $\{(B^n; V^n_{1,s_0}, \ldots, V^n_{m_{s_0},s_0}) : s_0 \in S_n\}$ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X. Por lo tanto (X, τ) satisface $\mathbf{S}_1(\Pi_V(\Lambda), \Pi_V(\Lambda))$. □

Corolario 2.11. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $\Lambda = Cl(X)$ y $\Delta = \mathbb{K}(X)$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $(CL(X), \tau_F)$ *tiene la propiedad Rothberger.*

(2) (X, τ) *satisface* $\mathbf{S}_1(\Pi_F(CL(X)), \Pi_F(CL(X)))$.

Corolario 2.12. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $\Delta = \Lambda = Cl(X)$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $(CL(X), \tau_V)$ *tiene la propiedad Rothberger.*

(2) (X, τ) *satisface* $\mathbf{S}_1(\Pi_V(CL(X)), \Pi_V(CL(X)))$.

Demostración.
$[(1) \Rightarrow (2)]$: Sea $\{J_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión en $\Pi_V(CL(X))$, por la Proposición 2.5, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$, J_n induce una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X digamos J'_n, luego la sucesión $\{J'_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Pi_\Delta(\Lambda)$. Por (1) y aplicando el Teorema 2.9, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $A'_n \in J'_n$ tal que la colección $\{A'_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X. Como cada $A'_n \in J'_n$ induce una $A_n \in J_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Aplicando la Proposición 2.5 se tiene que la colección $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una $\pi_V(CL(X))$-red de X. Por lo tanto (X, τ) satisface $\mathbf{S}_1(\Pi_V(CL(X)), \Pi_V(CL(X)))$.

$[(2) \Rightarrow (1)]$: Sea $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de cubiertas abiertas de (Λ, τ^+_Δ). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la cubierta abierta $\mathcal{U}_n$ consta de subconjuntos básicos abiertos.
Por (2) y aplicando la Proposición 2.10, se tiene que (X, τ) satisface
$\mathbf{S}_1(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$. Aplicando el Teorema 2.9 existe para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in \mathcal{U}_n$ tal que la colección $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta para $(CL(X), \tau_V)$. Por lo tanto $(CL(X), \tau_V)$ tiene la propiedad Rothberger. □

En el corolario siguiente tenemos otra consecuencia del Teorema 2.9

Corolario 2.13. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si Λ es cualquiera de los hiperespacios $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ o $\mathbb{CS}(X)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) (Λ, τ^+_Δ) *tiene la propiedad Rothberger.*

(2) (X, τ) *satisface* $\mathbf{S}_1(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$.

Por las Proposiciones 2.4 y 2.5 se desprenden, de este Corolario 2.13 caracterizaciones para la propiedad de Rothberger en los hiperespacios $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ y $\mathbb{CS}(X)$ dotados con la topología de Vietoris y Fell, en términos de las propiedades $S_1(\Pi_v, \Pi_v)$ y $S_1(\Pi_F, \Pi_F)$ respectivamente.

A continuación daremos una propiedad para caracterizar a la noción fuertemente estrella de Rothberger. Antes de eso, definimos otro principio relacionado con $\pi_\Delta(\Lambda)$ - redes de X.

Definición 2.14. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que (X, τ) satisface el principio $\mathbf{S}_R(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$, si para cualquier sucesión $\{J_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Pi_\Delta(\Lambda)$, existe una sucesión $\{V_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Lambda^c$, tal que*
$\mathcal{J} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ (B^n_s; V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}) \in J_n : B^n_s \subseteq V_n, V^n_{i,s} \nsubseteq V_n (1 \leq i \leq m_s) \right\}$ *es un elemento de* $\Pi_\Delta(\Lambda)$.

Como veremos en el siguiente, el principio de selección dado en la definición anterior permite caracterizar a la propiedad fuertemente estrella de Rothberger.

Teorema 2.15. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) (Λ,τ_Δ^+) *es* SSR*;*

(2) (X,τ) *satisface* $\mathbf{S}_R(\Pi_\Delta(\Lambda),\Pi_\Delta(\Lambda))$.

Demostración.
[(1) $\Rightarrow$ (2)]: Sea $\{J_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de $\Pi_\Delta(\Lambda)$ de X. Denotemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \{(B_s^n; V_{1,s}^n, \dots, V_{m_s,s}^n) : s \in S_n\}$. Por el Lema 2.8, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n = \left\{(V_{1,s}^n, \dots, V_{m_s,s}^n)^+_{B_s^n} : s \in S_n\right\}$ es una cubierta abierta de (Λ,τ_Δ^+). Aplicando (1) a la sucesión $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$, existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \Lambda$, tal que la sucesión $\{St(A_n,\mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de (Λ,τ_Δ^+). Denotemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $V_n = (A_n)^c$. Entonces, $\{V_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Lambda^c$. Afirmamos que la colección:
$\mathcal{J} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{(B_s^n; V_{1,s}^n, \dots, V_{m_s,s}^n) \in J_n : B_s^n \subseteq V_n, V_{i,s}^n \nsubseteq V_n (1 \le i \le m_s)\right\}$, is a $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X.
En efecto, sea $U \in \Lambda^c$, luego $U^c \in \Lambda$ y, por lo tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U^c \in St(A_{n_0},\mathcal{U}_{n_0})$. Entonces existe $\left(V_{1,s_0}^{n_0}, \dots, V_{m_{s_0},s_0}^{n_0}\right)^+_{B_{s_0}^{n_0}} \in \mathcal{U}_{n_0}$ tal que $\{U^c, A_{n_0}\} \subseteq \left(V_{1,s_0}^{n_0}, \dots, V_{m_{s_0},s_0}^{n_0}\right)^+_{B_{s_0}^{n_0}}$. Como $A_{n_0} \in \left(V_{1,s_0}^{n_0}, \dots, V_{m_{s_0},s_0}^{n_0}\right)^+_{B_{s_0}^{n_0}}$, se tiene que $B_{s_0}^{n_0} \subseteq (A_{n_0})^c = V_{n_0}$ y para cualquier $i \in \{1,\dots,m_{s_0}\}$, $V_{i,s_0}^{n_0} \cap A_{n_0} \neq \emptyset$, es decir que $V_{i,s_0}^{n_0} \nsubseteq (A_{n_0})^c = V_{n_0}$.
Por tanto, obtenemos $\left(B_{s_0}^{n_0}; V_{1,s_0}^{n_0}, \dots, V_{m_{s_0},s_0}^{n_0}\right) \in \mathcal{J}$.
Dado que $U^c \in \left(V_{1,s_0}^{n_0}, \dots, V_{m_{s_0},s_0}^{n_0}\right)^+_{B_{s_0}^{n_0}}$ podemos tomar $x_i \in U^c \cap V_{i,s_0}^{n_0}$, para cada $i \in \{1,\dots,m_{s_0}\}$, y consideramos $F = \{x_i : i \in \{1,\dots,m_{s_0}\}\}$. Claramente $F \in [X]^{<\omega}$ y cumple que $F \cap V_{i,s_0}^{n_0} \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1,\dots,m_{s_0}\}$. También, dado que $F \subseteq U^c$ obtenemos que $F \cap U = \emptyset$. Finalmente, como $U^c \subseteq (B_{s_0}^{n_0})^c$, tenemos que $B_{s_0}^{n_0} \subseteq U$. Así, $\mathcal{J}$ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X. Por lo tanto (X,τ) satisface $\mathbf{S}_R(\Pi_\Delta(\Lambda),\Pi_\Delta(\Lambda))$.

[(2) $\Rightarrow$ (1)]: Sea $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de cubiertas abiertas de (Λ,τ_Δ^+). Sin pérdida de generalidad, suponemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n$ consta de conjuntos abiertos básicos y $\mathcal{U}_n = \left\{(V_{1,s}^n, \dots, V_{m_s,s}^n)^+_{B_s^n} : s \in S_n\right\}$, donde $B_s^n \in \Delta$ y $V_{i,s}^n$ es un subconjunto abierto de X con $V_{i,s}^n \cap (B_s^n)^c \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1,\dots,m_s\}$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $J_n = \left\{\left(B_s^n; V_{1,s}^n, \dots, V_{m_s,s}^n\right) : s \in S_n\right\}$. Por el Lema 2.8, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, J_n es una $\pi_\Delta(\Lambda)$- red de X. Luego, por la condición (2), aplicada a la sucesión $\{J_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Pi_\Delta(\Lambda)$, existe una sucesión $\{V_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Lambda^c$ tal que la colección
$\mathcal{J} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{(B_s^n; V_{1,s}^n, \dots, V_{m_s,s}^n) \in J_n : B_s^n \subseteq V_n, V_{i,s}^n \nsubseteq V_n (1 \le i \le m_s)\right\}$ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X.
Denotemos para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n = (V_n)^c$. Por lo tanto, $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Lambda$.
Claramente $\{St(A_n,\mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de (Λ,τ_Δ^+). En efecto, sea $A \in \Lambda$, ya que $\mathcal{J}$ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X y $A^c \in \Lambda^c$, existe $\left(B_{s_0}^{n_0}; V_{1,s_0}^{n_0}, \dots, V_{m_{s_0},s_0}^{n_0}\right) \in \mathcal{J}$ (con $n_0 \in \mathbb{N}$, $s_0 \in S_{n_0}$) y $F \in [X]^{<\omega}$ de tal manera que $F \cap V_{i,s_0}^{n_0} \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1,\dots,m_{s_0}\}$, además $B_{s_0}^{n_0} \subseteq A^c$ y $F \cap A^c = \emptyset$.
De esto obtenemos que $A \subseteq (B_{s_0}^{n_0})^c$ y, para cada $i \in \{1,\dots,m_{s_0}\}$, $V_{i,s_0}^{n_0} \cap A \neq \emptyset$. Es decir, $A \in \left(V_{1,s_0}^{n_0}, \dots, V_{m_{s_0},s_0}^{n_0}\right)^+_{B_{s_0}^{n_0}}$.
Finalmente, como $\left(B_{s_0}^{n_0}; V_{1,s_0}^{n_0}, \dots, V_{m_{s_0},s_0}^{n_0}\right) \in \mathcal{J}$, se tiene que $B_{s_0}^{n_0} \subseteq V_{n_0}$ y $V_{i,s_0}^{n_0} \nsubseteq V_{n_0}$ para cada $i \in \{1,\dots,m_{s_0}\}$, entonces $A_{n_0} = (V_{n_0})^c \subseteq (B_{s_0}^{n_0})^c$ y $V_{i,s_0}^{n_0} \cap A_{n_0} \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1,\dots,m_{s_0}\}$;

luego, $A_{n_0} \in \left(V^{n_0}_{1,s_0}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s_0},s_0}\right)^+_{B^{n_0}_{s_0}}$.

En conclusión se tiene que $\{A_{n_0}, A\} \subseteq \left(V^{n_0}_{1,s_0}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s_0},s_0}\right)^+_{B^{n_0}_{s_0}} \subseteq St(A_{n_0}, \mathcal{U}_{n_0})$. Esto muestra que la sucesión $\{St(A_n, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de (Λ, τ^+_Δ). Por lo tanto (Λ, τ^+_Δ) es *SSR* □

A continuación mostraremos este resultado a diferentes elecciones de las familias Λ y Δ,los cuales obtenemos los siguientes casos particulares.

Corolario 2.16. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si Λ es cualquiera de los hiperespacios $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ o $\mathbb{CS}(X)$. entonces (Λ, τ^+_Δ) es* SSR *si y solo si X satisface el principio* $\mathbf{S}_R(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$.

Corolario 2.17. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\Delta = \mathbb{K}(X)$. Si Λ es cualquiera de los hiperespacios $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ o $\mathbb{CS}(X)$, entonces (Λ, τ_F) es* SSR *si y solo si X satisface el principio* $\mathbf{S}_R(\Pi_{\mathbb{K}(X)}(\Lambda), \Pi_{\mathbb{K}(X)}(\Lambda))$.

Corolario 2.18. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\Delta = CL(X)$. Si Λ es cualquiera de los hiperespacios $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ o $\mathbb{CS}(X)$, entonces (Λ, τ_V) es* SSR *si y solo si X satisface el principio* $\mathbf{S}_R(\Pi_{CL(X)}(\Lambda), \Pi_{CL(X)}(\Lambda))$.

Ahora, damos una caracterización de la propiedad estrella de Rothberger para $CL(X)$ y sus subespacios dotados de la topología hint-and-mis. Antes de eso, definimos otro principio relacionado con $\pi_\Delta(\Lambda)$ - redes de X.

Definición 2.19. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Decimos que (X, τ) satisface el principio $\mathbf{S}^*_R(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$, si para cada sucesión $\{J_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Pi_\Delta(\Lambda)$, con $J_n = \left\{\left(B^n_s; V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}\right) : s \in S_n\right\}$, hay una sucesión $\{s(n) : n \in \mathbb{N}\}$, con $s(n) \in S_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que*
$\mathcal{J} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \left(B^n_s; V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}\right) \in J_n : \text{ hay } U \in \Lambda^c \text{ tal que } (B^n_s \cup B^n_{s(n)}) \subseteq U,\ V^n_{i,s} \nsubseteq U (1 \leq i \leq m_s) \text{ y } V^n_{j,s(n)} \nsubseteq U (1 \leq j \leq m_{s(n)}) \right\}$ *es un elemento de $\Pi_\Delta(\Lambda)$.*

Como veremos en el siguiente, el principio de selección dado en la definición anterior permite caracterizar a la propiedad estrella de Rothberger.

Teorema 2.20. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Supongamos además que por cada $x \in X$, $\{x\} \in \Lambda$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) (Λ, τ^+_Δ) *es* SR*;*

(2) X satisface $\mathbf{S}^*_R(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$.

Demostración.
[(1) $\Rightarrow$ (2)]: Sea $\{J_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de $\pi_\Delta(\Lambda)$-redes de X. Denotemos para cada $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \left\{(B^n_s; V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}) : s \in S_n\right\}$, por Lema 2.8, obtenemos que la sucesión, $\mathcal{U}_n = \left\{\left(V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}\right)^+_{B^n_s} : s \in S_n\right\}$ es una cubierta abierta de (Λ, τ^+_Δ), para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Aplicando (1) a la sucesión $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$, elegimos para cada $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \left(V^n_{1,s(n)}, \ldots, V^n_{m_{s(n)},s(n)}\right)^+_{B^n_s} \in \mathcal{U}_n$ tal que $\{St\,(V_n, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de (Λ, τ^+_Δ).
Consideremos la sucesión $\{s(n) : n \in \mathbb{N}\}$ y $\mathcal{J}$ como en la Definición 2.19. afirmamos que $\mathcal{J}$, es una $\pi_\Delta(\Lambda)$ - red de X. En efecto, dado cualquier $W \in \Lambda^c$, se deduce que $W^c \in \Lambda$, por lo tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $W^c \in St\,(V_{n_0}, \mathcal{U}_{n_0})$. Por lo tanto, existe $\left(V^{n_0}_{1,s}, \ldots, V^{n_0}_{m_s,s}\right)^+_{B^{n_0}_s} \in \mathcal{U}_{n_0}$ tal que:

(a) $W^c \in \left(V^{n_0}_{1,s}, \ldots, V^{n_0}_{m_s,s}\right)^+_{B^{n_0}_s}$; y

(b) $\left(V^{n_0}_{1,s}, \ldots, V^{n_0}_{m_s,s}\right)^+_{B^{n_0}_s} \bigcap V_{n_0} \neq \emptyset$.

Notemos que $V_{n_0} = \left(V^{n_0}_{1,s(n_0)}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s(n_0)},s(n_0)}\right)^+_{B^{n_0}_{s(n_0)}}$. De (b) y la hipótesis de Λ, podemos tomar
$E \in \left[\left(V^{n_0}_{1,s}, \ldots, V^{n_0}_{m_s,s}\right)^+_{B^{n_0}_s} \cap \left(V^{n_0}_{1,s(n_0)}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s(n_0)},s(n_0)}\right)^+_{B^{n_0}_{s(n_0)}}\right] \cap \Lambda$.
Denotemos $U = E^c$. Entonces $U \in \Lambda^c$. Ahora como $E \in \left(V^{n_0}_{1,s}, \ldots, V^{n_0}_{m_s,s}\right)^+_{B^{n_0}_s} \cap \left(V^{n_0}_{1,s(n_0)}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s(n_0)},s(n_0)}\right)^+_{B^{n_0}_{s(n_0)}}$.
Se tiene que $E \subseteq (B^{n_0}_s)^c$ y $E \subseteq (B^{n_0}_{s(n_0)})^c$, además $E \cap V^{n_0}_{i,s} \neq \emptyset$ y $E \cap V^{n_0}_{j,s(n_0)} \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, m_s\}$ y $j \in \{1, \ldots, m_{s(n_0)}\}$. Entonces $(B^{n_0}_s \cup B^{n_0}_{s(n_0)}) \subseteq U$, $V^{n_0}_{i,s} \nsubseteq U$ y $V^{n_0}_{j,s(n_0)} \nsubseteq U$ para cada $i \in \{1, \ldots, m_s\}$ y $j \in \{1, \ldots, m_{s(n_0)}\}$. En conclusión se tiene , $\left(B^{n_0}_s; V^{n_0}_{1,s}, \ldots, V^{n_0}_{m_s,s}\right) \in \mathcal{J}$.
Ahora, por (a), podemos tomar $x_i \in W^c \cap V^{n_0}_{i,s}$, para cada $i \in \{1, \ldots, m_s\}$. Denotemos a $F = \{x_i : i \in \{1, \ldots, m_s\}\}$. Por lo tanto, $F \in [X]^{<\omega}$ y satisface $F \cap V^{n_0}_{i,s} \neq \emptyset$ y $F \cap W = \emptyset$. Además, $B^{n_0}_s \subseteq W$. Concluimos que $\mathcal{J} \in \Pi_\Delta(\Lambda)$. Por lo tanto X satisface $\mathbf{S}^*_R(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$.

[(2) $\Rightarrow$ (1)]: Sea $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de cubiertas abiertas de (Λ, τ^+_Δ). Suponemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n$ consta de subconjuntos básicos, es decir, $\mathcal{U}_n = \left\{\left(V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}\right)^+_{B^n_s} : s \in S_n\right\}$, donde $B^n_s \in \Delta$ y $V^n_{i,s}$ es un subconjunto abierto de X con $V^n_{i,s} \cap (B^n_s)^c \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, m_s\}$. Del Lema 2.8, tenemos que cada para cada $n \in \mathbb{N}$ $J_n = \left\{(B^n_s; V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}) : \left(V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}\right)^+_{B^n_s} \in \mathcal{U}_n\right\}$ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$- red de X. Aplicamos la condición (2) a la sucesión $\{J_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Pi_\Delta(\Lambda)$, entonces hay una sucesión $\{s(n) : n \in \mathbb{N}\}$, con $s(n) \in S_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que
$\mathcal{J} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big\{ (B^n_s; V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}) \in J_n :$ hay U $\in \Lambda^c$ tal que $(B^n_s \cup B^n_{s(n)}) \subseteq U, V^n_{i,s} \nsubseteq U(1 \leq i \leq m_s)$ y $V^n_{j,s(n)} \nsubseteq U(1 \leq j \leq m_{s(n)})\Big\}$ es un elemento de $\Pi_\Delta(\Lambda)$.
Denotemos a $V_n = \left(V^n_{1,s(n)}, \ldots, V^n_{m_{s(n)},s(n)}\right)^+_{B^n_{s(n)}}$.
Afirmamos que $\{St\,(V_n, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de (Λ, τ^+_Δ). En efecto sea $A \in \Lambda$. Como $\mathcal{J}$ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X y $A^c \in \Lambda^c$, existen
$\left(B^{n_0}_{s_0}; V^{n_0}_{1,s_0}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s_0},s_0}\right) \in \mathcal{J}$, (con $n_0 \in \mathbb{N}$, $s_0 \in S_{n_0}$) y $F \in [X]^{<\omega}$ con $F \cap V^{n_0}_{i,s_0} \neq \emptyset$, para $i \in \{1, \ldots, m_{s_0}\}$. Además $B^{n_0}_{s_0} \subset A^c$ y $F \cap A^c = \emptyset$.
Por eso, $A \subseteq \left(B^{n_0}_{s_0}\right)^c$ y para cada $i \in \{1, \ldots, m_{s_0}\}$, $A \cap V^{n_0}_{i,s_0} \neq \emptyset$. Como consecuencia, tenemos $A \in \left(V^{n_0}_{1,s_0}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s_0},s_0}\right)^+_{B^{n_0}_{s_0}}$. Ahora, por definición, para $\left(B^{n_0}_{s_0}; V^{n_0}_{1,s_0}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s_0},s_0}\right)$, existe $U \in \Lambda^c$ tal que $\left(B^{n_0}_{s_0} \cup B^{n_0}_{s(n_0)}\right) \subseteq U$, $V^{n_0}_{i,s_0} \nsubseteq U$ y $V^{n_0}_{j,s(n_0)} \nsubseteq U$, para $i \in \{1, \ldots, m_{s_0}\}$ y $j \in \{1, \ldots, m_{s(n_0)}\}$.
Entonces tenemos que
$U^c \in \left(V^{n_0}_{1,s_0}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s_0},s_0}\right)^+_{B^{n_0}_{s_0}} \bigcap \left(V^{n_0}_{1,S(n_0)}, \ldots, V^{n_0}_{m_{S(n_0)},S(n_0)}\right)^+_{B^{n_0}_{S(n_0)}}$. En conclusión , $\{St\,(V_n, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de (Λ, τ^+_Δ). Por lo tanto (Λ, τ^+_Δ) es *SR*. $\square$

Considerando algunos casos particulares para las familias Λ y Δ, obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 2.21. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si Λ es cualquiera de los hiperespacios $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ o $\mathbb{CS}(X)$, entonces (Λ, τ^+_Δ) es* SR *si y solo si X satisface el principio*

$\mathbf{S}_R^*(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$.

Corolario 2.22. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico y sea* $\Delta = \mathbb{K}(X)$. *Si* Λ *es cualquiera de los hiperespacios* $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ *o* $\mathbb{CS}(X)$, *entonces* (Λ, τ_F) *es* SR *si y solo si* X *satisface el principio* $\mathbf{S}_R^*(\Pi_{\mathbb{K}(X)}(\Lambda), \Pi_{\mathbb{K}(X)}(\Lambda))$.

Corolario 2.23. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico y sea* $\Delta = CL(X)$. *Si* Λ *es cualquiera de los hiperespacios* $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ *o* $\mathbb{CS}(X)$, *entonces* (Λ, τ_V) *es* SR *si y solo si* X *satisface el principio* $\mathbf{S}_R^*(\Pi_{CL(X)}(\Lambda), \Pi_{CL(X)}(\Lambda))$.

2.2. Menger

En la presente sección emplearemos la noción de $\pi_\Delta(\Lambda)$-red , para caracterizar propiedades de selección de tipo Menger en hiperespacios.

Teorema 2.24. *Dado un espacio topológico* (X, τ), *las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) (Λ, τ_Δ^+) *tiene la propiedad Menger;*

(2) (X, τ) *satisface* $\mathbf{S}_{fin}(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$.

Demostración.
[(1) $\Rightarrow$ (2)]: Sea $\{J_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión en $\Pi_\Delta(\Lambda)$. Denotemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n = \{(V_1, \ldots, V_m)_B^+ : (B; V_1, \ldots, V_m) \in J_n\}$. Del Lema 2.8, tenemos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{U}_n$ es una cubierta abierta para (Λ, τ_Δ^+). Aplicando (1) a la sucesión $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$, podemos elegir, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}_n \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$ tal que la colección $\mathcal{V} = \bigcup\{\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de (Λ, τ_Δ^+).
Denotemos para cualquier n $\in \mathbb{N}$, $J_n^{'} = \{(B; V_1 \ldots V_{m_n}) : (V_1, \ldots V_{m_n})_B^+ \in \mathcal{V}_n\}$. Notemos que para cualquier n $\in \mathbb{N}$,$J_n^{'} \in [J_n]^{<\omega}$.
Afirmamos que $\bigcup\{J_n^{'} : n \in \mathbb{N}\}$ es una $\pi_\Delta(\Lambda) - red$ de X. En efecto, sea A $\in \Lambda^c$, entonces $A^c \in \Lambda$, por ser $\mathcal{V}$ una cubierta abierta de (Λ, τ_Δ^+), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A^c \in \mathcal{V}_{n_0}$, entonces existe $(V_1, \ldots V_{m_{n_0}})_B^+ \in \mathcal{V}_{n_0}$ tal que $A^c \in (V_1, \ldots V_{m_{n_0}})_B^+$,es decir, $A^c \subseteq B^c$ y $A^c \cap V_i \neq \emptyset$ para i $\in \{1, \ldots, m_{n_0}\}$. Entonces, se tiene que $B^c \cap V_i \neq \emptyset$ para $i \in \{1, \ldots, m_{n_0}\}$ y $B \subseteq A$. Por lo cual se tiene que $(B; V_1, \ldots V_{m_{n_0}}) \in J_{n_0}^{'}$.
Definamos a F=$\{x_i : x_i \in A^c \cap V_i$ con $i \in \{1, \ldots, m_{n_0}\}\}$, entonces F es un conjunto finito en X tal que $F \cap V_i \neq \emptyset$ para $i \in \{1, \ldots, m_{n_0}\}$ y F $\cap A = \emptyset$.
Por lo cual $\bigcup\{J_n^{'} : n \in \mathbb{N}\}$ es una $\pi_\Delta(\Lambda) - red$ de X y por lo tanto (X, τ) satisface $\mathbf{S}_{fin}(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$.

[(2) $\Rightarrow$ (1)]: Sea $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de cubiertas abiertas de (Λ, τ_Δ^+), para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la cubierta abierta $\mathcal{U}_n$ consta de subconjuntos básicos abiertos, es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{U}_n = \{(V_1, \ldots, V_m)_B^+ : m \in \mathbb{N}\}$
Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos $\mathcal{J}_n = \{(B; V_1, \ldots, V_m) : (V_1, \ldots, V_m)_B^+ \in \mathcal{U}_n\}$. De Lema 2.8 se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{J}_n$ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X. Aplicando (2) a la sucesión $\{\mathcal{J}_n : n \in \mathbb{N}\}$, es posible elegir, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{J}_n' \in [\mathcal{J}_n]^{<\omega}$ tal que la sucesión $\mathcal{J} = \bigcup\{\mathcal{J}_n' : n \in \mathbb{N}\}$ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$ -red de X.
Denotemos, para cada n $\in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n^{'} = \{(V_1 \ldots V_{m_n})_B^+ : (B; V_1 \ldots V_{m_n}) \in \mathcal{J}_n^{'}\}$.
Notemos para cualquier $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{U}_n^{'} \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$
Afirmamos que $\bigcup\{U_n^{'} : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta para (Λ, τ_Δ^+).
En efecto, sea A $\in \Lambda$, entonces $A^c \in \Lambda^c$, por ser $\mathcal{J}$ una $\pi_\Delta(\Lambda) - red$ de X, existe F $\in [X]^{<\omega}$ y $(B; V_1 \ldots V_{m_{n_0}}) \in J_{n_0}^{'}$ con $n_0 \in \mathbb{N}$ y $J_{n_0}^{'} \in \mathcal{J}$. Tal que $B \subseteq A^c$ entonces A $\subseteq B^c$, además $F \cap V_i \neq \emptyset$ con i $\in \{1, \ldots V_{m_{n_0}}\}$ y $F \cap A^c = \emptyset$, con esto se tiene que $F \subseteq A$, entonces $A \cap V_i \neq \emptyset$

con i $\in \{1, \ldots V_{m_{n_0}}\}$.
Por lo cual se tiene que A $\in (V1 \ldots V_{m_{n_0}})^+_B$. Entonces A $\in U'_{n_0}$, por lo cual $\bigcup\{U'_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta para (Λ, τ^+_Δ).
Por lo tanto (Λ, τ^+_Δ) tiene la propiedad Menger $\square$

Li caracterizó la propiedad de Rothberger en el hiperespacio $CL(X)$, dotado de las topologías de Fell y Vietoris, usando $\mathbf{S}_{fin}(\Pi_F, \Pi_F)$, $\mathbf{S}_{fin}(\Pi_V, \Pi_V)$ respectivamente. Veremos a continuación, que el Teorema 2.24, es una generalización común a los resultados de Li. Pero antes demostraremos el siguiente resultado. c

Proposición 2.25. *Sea (X, τ) un espacio topológico, si $\Lambda = CL(X) = \Delta$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) (X, τ) satisface $\mathbf{S}_{fin}(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$.

(2) (X, τ) satisface $\mathbf{S}_{fin}(\Pi_V(\Lambda), \Pi_V(\Lambda))$.

Demostración.
[(1) $\Rightarrow$ (2)] Sea $\{J_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión en $\Pi_V(\Lambda)$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \{(V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}) : s \in S_n\}$. Denotemos para cada $n \in \mathbb{N}$, $J'_n = \{(\bigcap_1^{m_s}(V^n_{i,s})^c; V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}) : s \in S_n\}$. Por la Proposición 2.5 se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$, J'_n es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X. Aplicamos (1) a la sucesión $\{J'_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces hay, una sucesión $\{\mathcal{F}'_n : n \in \mathbb{N}\}$, tal que $\mathcal{F}'_n \in [J'_n]^{<\omega}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}'_n$ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X. Denotemos para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n = \{(V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}) : (\bigcap_1^{m_s}(V^n_{i,s})^c; V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}) \in \mathcal{F}'_n\}$. Entonces $\mathcal{F}_n \in [J_n]^{<\omega}$. Además no es difícil verificar que, por la Proposición 2.5 la colección $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ es una $\pi_V(\Lambda)$-red de X. Por lo tanto (X, τ) satisface $\mathbf{S}_{fin}(\Pi_V(\Lambda), \Pi_V(\Lambda))$.

[(2) $\Rightarrow$ (1)] Sea $\{J'_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión en $\Pi_\Delta(\Lambda)$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $J'_n = \{(B^n; V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}) : s \in S_n\}$. Denotemos para cada $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \{((B^n)^c, V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}) : s \in S_n\}$. Por la Proposición 2.5 se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$, J_n es una $\pi_V(\Lambda)$-red de X. Aplicamos (2) a la sucesión $\{J_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces hay, una sucesión $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$, tal que $\mathcal{F}_n \in [J_n]^{<\omega}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ es una $\pi_V(\Lambda)$-red de X. Denotemos para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}'_n = \{(B^n; V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}) : ((B^n)^c, V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}) \in \mathcal{F}_n\}$. Entonces $\mathcal{F}'_n \in [J'_n]^{<\omega}$. Además no es difícil verificar que, por la Proposición 2.5 la colección $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}'_n$ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X. Por lo tanto (X, τ) satisface $\mathbf{S}_{fin}(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$. $\square$

Corolario 2.26. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $\Delta = \mathbb{K}(X)$ y $\Lambda = CL(X)$, entonces as siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $(CL(X), \tau_F)$ tiene la propiedad Menger.

(2) (X, τ) satisface $\mathbf{S}_{fin}(\Pi_F(CL(X)), \Pi_F(CL(X)))$.

Corolario 2.27. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $\Delta = CL(X) = \Lambda$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $(CL(X), \tau_V)$ tiene la propiedad Menger.

(2) (X, τ) satisface $\mathbf{S}_{fin}(\Pi_V(CL(X)), \Pi_V(CL(X)))$.

Demostración.
[(1) $\Rightarrow$ (2)]: Sea $\{J_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión en $\Pi_V(CL(X))$, por la Proposición 2.5, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$, J_n induce una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X digamos J'_n, luego la sucesión $\{J'_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Pi_\Delta(\Lambda)$. Por (1) y aplicando el Teorema 2.24, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$, hay $F'_n \in [J'_n]^{<\omega}$ tal que $\bigcup_1^n F'_n$ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X. Como cada $A'_n \in F'_n$ induce una $A_n \in J_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos a $F = \{A_n : A'_n \in F'\}$, entonces $F_n \in [J_n]^{<\omega}$. Aplicando la Proposición 2.5 se tiene que la colección

$\bigcup_1^n F_n$ es una $\pi_V(CL(X))$-red de X. Por lo tanto (X,τ) satisface $\mathbf{S}_1(\Pi_V(CL(X)),\Pi_V(CL(X)))$.

[(2) $\Rightarrow$ (1)]: Sea $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de cubiertas abiertas de (Λ,τ_Δ^+). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la cubierta abierta $\mathcal{U}_n$ consta de subconjuntos básicos abiertos.
Por (2) y aplicando la Proposición 2.25, se tiene que (X,τ) satisface $\mathbf{S}_{fin}(\Pi_\Delta(\Lambda),\Pi_\Delta(\Lambda))$. Aplicando el Teorema 2.24, hay para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$ tal que $\bigcup_1^n U_n$ es una cubierta abierta para $(CL(X),\tau_V)$. Por lo tanto $(CL(X),\tau_V)$ tiene la propiedad Menger. □

Como hemos visto en lo corolarios anteriores el Teorema 2.24 generaliza a los resultados obtenidos por Li, pero además permite obtener caracterizaciones de la propiedad de Menger en otros hiperespacios

Corolario 2.28. *Sea (X,τ) un espacio topológico.*
Si para cada Λ en $\{\mathbb{K}(X),\mathbb{F}(X),\mathbb{CS}(X)\}$,entonces:
(Λ,τ_Δ^+) tiene la propiedad Menger si y solo si (X,τ) satisface $\mathbf{S}_{fin}(\Pi_\Delta(\Lambda),\Pi_\Delta(\Lambda))$.

A continuación daremos una propiedad para caracterizar a la noción fuertemente estrella de Menger.

Definición 2.29. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Decimos que (X,τ) satisface el principio $\mathbf{S}_M(\Pi_\Delta(\Lambda),\Pi_\Delta(\Lambda))$, si para cualquier sucesión $\{J_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Pi_\Delta(\Lambda)$, existe una sucesión $\{\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq [\Lambda^c]^{<\omega}$, con $\mathcal{V}_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que*

$$\mathcal{J} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{(B_s^n; V_{1,s}^n, \ldots, V_{m_s,s}^n) \in J_n : \textit{existe } V \in \mathcal{V}_n \textit{ con } B_s^n \subseteq V, V_{i,s}^n \nsubseteq V (1 \le i \le m_s)\right\}$$

es un elemento de $\Pi_\Delta(\Lambda)$.

A continuación, usamos el principio $\mathbf{S}_M(\Pi_\Delta(\Lambda),\Pi_\Delta(\Lambda))$ para caracterizar, como un caso particular, la propiedad fuerte estrella de Menger para $CL(X)$ y sus subespacios dotados de la topología hit-and-miss.

Teorema 2.30. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) (Λ,τ_Δ^+) *es* SSM*;*

(2) (X,τ) *satisface* $\mathbf{S}_M(\Pi_\Delta(\Lambda),\Pi_\Delta(\Lambda))$.

Demostración.
[(1) $\Rightarrow$ (2)]: Sea $\{J_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de $\Pi_\Delta(\Lambda)$ de X. Denotemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \{(B_s^n; V_{1,s}^n, \ldots, V_{m_s,s}^n) : s \in S_n\}$. De Lema 2.8, para cada $n \in \mathbb{N}$, la colección $\mathcal{U}_n = \left\{\left(V_{1,s}^n, \ldots, V_{m_s,s}^n\right)_{B_s^n}^+ : s \in S_n\right\}$ es cubierta abierta de (Λ,τ_Δ^+). Ahora, aplicando (1) a la sucesión $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$, elegimos $\mathcal{A}_n \in [\Lambda]^{<\omega}$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, tal que la colección $\{St(\mathcal{A}_n,\mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de (Λ,τ_Δ^+). Denotemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{V}_n = \{A^c : A \in \mathcal{A}_n\}$. Entonces, $\{\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq [\Lambda^c]^{<\omega}$. Demostremos que si $\mathcal{J}$ es la colección

$$\mathcal{J} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{(B_s^n; V_{1,s}^n, \ldots, V_{m_s,s}^n) \in J_n : \text{existe } V \in \mathcal{V}_n \text{ con } B_s^n \subseteq V, V_{i,s}^n \nsubseteq V (1 \le i \le m_s)\right\},$$

entonces $\mathcal{J}$ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$ - red de X. Sea $U \in \Lambda^c$, luego $U^c \in \Lambda$ y, por lo tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U^c \in St(\mathcal{A}_{n_0},\mathcal{U}_{n_0})$. Luego, existe $A \in \mathcal{A}_{n_0}$ y $\left(V_{1,s_0}^{n_0}, \ldots, V_{m_{s_0},s_0}^{n_0}\right)_{B_{s_0}^{n_0}}^+ \in \mathcal{U}_{n_0}$ de modo que $\{U^c, A\} \subseteq \left(V_{1,s_0}^{n_0}, \ldots, V_{m_{s_0},s_0}^{n_0}\right)_{B_{s_0}^{n_0}}^+$.

Como $A \in \left(V^{n_0}_{1,s_0}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s_0},s_0}\right)^+_{B^{n_0}_{s_0}}$, se deduce que $B^{n_0}_{s_0} \subseteq A^c \in \mathcal{V}_{n_0}$ y para cualquier $i \in \{1, \ldots, m_{s_0}\}$, $V^{n_0}_{i,s_0} \nsubseteq A^c$. Por tanto, obtenemos $\left(B^{n_0}_{s_0}; V^{n_0}_{1,s_0}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s_0},s_0}\right) \in \mathcal{J}$. Además, para cada $i \in \{1, \ldots, m_{s_0}\}$, tomamos $x_i \in U^c \cap V^{n_0}_{i,s_0}$. Ponemos $F = \{x_i : i \in \{1, \ldots, m_{s_0}\}\}$. Por lo tanto, $F \in [X]^{<\omega}$ con $F \cap V^{n_0}_{i,s_0} \neq \emptyset$. Además, dado que $U^c \in ((B^{n_0}_{s_0})^c)^+$, obtenemos que $B^{n_0}_{s_0} \subseteq U$. Finalmente, $F \cap U = \emptyset$, y concluimos que $\mathcal{J} \in \Pi_\Delta(\Lambda)$.

[(2) $\Rightarrow$ (1)]: Sea $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de cubiertas abiertas de (Λ, τ^+_Δ). Para cada $n \in \mathbb{N}$, la cubierta abierta $\mathcal{U}_n = \left\{(V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s})^+_{B^n_s} : s \in S_n\right\}$, donde $B^n_s \in \Delta$ y $V^n_{i,s}$ es un subconjunto abierto de X con $V^n_{i,s} \cap (B^n_s)^c \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, m_s\}$.
Denotemos para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \left\{\left(B^n_s; V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}\right) : s \in S_n\right\}$. Entonces, de Lemma 2.8, tenemos que cada para cualquier n $\in \mathbb{N}$ J_n es una $\pi_\Delta(\Lambda)$- red de X. Aplicamos la condición (2) a la sucesión $\{J_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Pi_\Delta(\Lambda)$ para obtener una sucesión $\{\mathcal{V}_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq [\Lambda^c]^{<\omega}$ tal que la colección $\mathcal{J} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{(B^n_s; V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}) \in J_n : \text{existe } V \in \mathcal{V}_n \text{ con } B^n_s \subseteq V, V^n_{i,s} \nsubseteq V (1 \leq i \leq m_s)\right\}$ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$ - red de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{A}_n = \{V^c : V \in \mathcal{V}_n\}$. Por lo tanto, $\{\mathcal{A}_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq [\Lambda]^{<\omega}$. Demostremos que la colección $\{St(\mathcal{A}_n, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de (Λ, τ^+_Δ). Sea $A \in \Lambda$, ya que $\mathcal{J}$ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X y $A^c \in \Lambda^c$, hay $\left(B^{n_0}_{s_0}; V^{n_0}_{1,s_0}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s_0},s_0}\right) \in \mathcal{J}$ (con $n_0 \in \mathbb{N}$, $s_0 \in S_{n_0}$) y $F \in [X]^{<\omega}$ con $F \cap V^{n_0}_{i,s_0} \neq \emptyset$, para cualquier $i \in \{1, \ldots, m_{s_0}\}$, tal que $B^{n_0}_{s_0} \subseteq A^c$ y $F \cap A^c = \emptyset$. De esto, obtenemos que $B^{n_0}_{s_0} \subseteq A^c \in \mathcal{V}_{n_0}$ y para cada $i \in \{1, \ldots, m_{s_0}\}$, $V^{n_0}_{i,s_0} \nsubseteq A^c$. Significa que $A \subseteq \left(B^{n_0}_{s_0}\right)^c$ y, para cada $i \in \{1, \ldots, m_{s_0}\}$, $A \nsubseteq \left(V^{n_0}_{i,s_0}\right)^c$. Finalmente, como $\mathcal{V}_{n_0} \neq \emptyset$, existe $U \in \mathcal{V}_{n_0}$ y por lo tanto $A_{n_0} = U^c \in \mathcal{A}_{n_0}$ es tal que $A_{n_0} \in \left(V^{n_0}_{1,s_0}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s_0},s_0}\right)^+_{B^{n_0}_{s_0}}$. Por otro lado, como $A \subseteq \left(B^{n_0}_{s_0}\right)^c$ y $F \cap A^c = \emptyset$, obtenemos que $A \cap V^{n_0}_{i,s_0} \neq \emptyset$ para cualquier $i \in \{1, \ldots, m_{s_0}\}$. Así, $A \in \left(V^{n_0}_{1,s_0}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s_0},s_0}\right)^+_{B^{n_0}_{s_0}}$ y por lo tanto, $A \in St(\mathcal{A}_{n_0}, \mathcal{U}_{n_0})$. Esto muestra que la colección $\{St(\mathcal{A}_n, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de (Λ, τ^+_Δ). $\square$

Para diferentes elecciones de las familias Λ y Δ, obtenemos los siguientes casos particulares.

Corolario 2.31. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si Λ es cualquiera de los hiperespacios $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ o $\mathbb{CS}(X)$, entonces (Λ, τ^+_Δ) es* SSM *si y solo si X satisface el principio $\mathbf{S}_M(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$.*

Corolario 2.32. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\Delta = \mathbb{K}(X)$. Entonces, para cualquier Λ en $\{CL(X), \mathbb{K}(X), \mathbb{F}(X), \mathbb{CS}(X)\}$, (Λ, τ_F) es* SSM *si y solo si X satisface el principio $\mathbf{S}_M(\Pi_{\mathbb{K}(X)}(\Lambda), \Pi_{\mathbb{K}(X)}(\Lambda))$.*

Corolario 2.33. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\Delta = CL(X)$. Entonces, para cada Λ en $\{CL(X), \mathbb{K}(X), \mathbb{F}(X), \mathbb{CS}(X)\}$, (Λ, τ_V) es* SSM *si y solo si X satisface el principio $\mathbf{S}_M(\Pi_{CL(X)}(\Lambda), \Pi_{CL(X)}(\Lambda))$.*

A continuación, damos una caracterización de la propiedad estrella de para $CL(X)$ y sus subespacios dotados de la topología hit-and-miss. Antes de eso, definimos otro principio útil relacionado con $\pi_\Delta(\Lambda)$-redes de X.

Definición 2.34. *Sea (X, τ)un espacio topológico. Decimos que (X, τ) satisface el principio $\mathbf{S}^*_M(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$, si para cada sucesión $\{J_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Pi_\Delta(\Lambda)$, con $J_n = \left\{\left(B^n_s; V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}\right) : s \in S_n\right\}$, existe $D_n \in [S_n]^{<\omega}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que*
$J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big\{ (B^n_s; V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}) \in J_n :$ *existe $U \in \Lambda^c$ y $s' \in D_n$ tal que $(B^n_s \cup B^n_{s'}) \subseteq U, V^n_{i,s} \nsubseteq$*

$U(1 \leq i \leq m_s)$ *y* $V^n_{j,s'} \nsubseteq U$ $(1 \leq j \leq m_{s'})\Big\}$ *es un elemento de* $\Pi_\Delta(\Lambda)$.

Teorema 2.35. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico. Supongamos además que por cada* $x \in X$, $\{x\} \in \Lambda$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) (Λ, τ^+_Δ) *es* SM*;*

(2) X *satisface* $\mathbf{S}^*_M(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$.

Demostración.
[(1) $\Rightarrow$ (2)]: Sea $\{J_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de $\pi_\Delta(\Lambda)$ - redes de X. Denotemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \{(B^n_s; V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}) : s \in S_n\}$.
Por Lema 2.8 obtenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ la colección
$\mathcal{U}_n = \left\{(V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s})^+_{B^n_s} : s \in S_n\right\}$ es una cubierta abierta de (Λ, τ^+_Δ). Por lo tanto, aplicando (1) a la sucesión $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$, elegimos para cada $n \in \mathbb{N}$,
$\mathcal{V}_n = \left\{(V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s})^+_{B^n_s} : s \in D_n\right\}$ en $[\mathcal{U}_n]^{<\omega}$ tal que la colección
$\{St\,(\bigcup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de (Λ, τ^+_Δ).
Demostremos que la colección $\mathcal{J}$, establecida como en Definición 2.34, es una $\pi_\Delta(\Lambda)$ - red de X.
Dado cualquier $W \in \Lambda^c$, se deduce que $W^c \in \Lambda$, por lo tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $W^c \in St\,(\bigcup \mathcal{V}_{n_0}, \mathcal{U}_{n_0})$. Por lo tanto, existe $\left(V^{n_0}_{1,s_0}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s_0},s_0}\right)^+_{B^{n_0}_{s_0}} \in \mathcal{V}_{n_0}$ y $(V^{n_0}_{1,s}, \ldots, V^{n_0}_{m_s,s})^+_{B^{n_0}_s} \in \mathcal{U}_{n_0}$ tal que :

(i) $W^c \in (V^{n_0}_{1,s}, \ldots, V^{n_0}_{m_s,s})^+_{B^{n_0}_s}$;

(ii) $(V^{n_0}_{1,s}, \ldots, V^{n_0}_{m_s,s})^+_{B^{n_0}_s} \bigcap \left(V^{n_0}_{1,s_0}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s_0},s_0}\right)^+_{B^{n_0}_{s_0}} \neq \emptyset$.

De (ii) y la hipótesis de Λ, podemos tomar
$E \in \left[(V^{n_0}_{1,s}, \ldots, V^{n_0}_{m_s,s})^+_{B^{n_0}_s} \cap \left(V^{n_0}_{1,s_0}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s_0},s_0}\right)^+_{B^{n_0}_{s_0}}\right] \cap \Lambda$. Denotemos $U = E^c$. Por lo cual se tiene que $U \in \Lambda^c$, $(B^{n_0}_s \cup B^{n_0}_{s_0}) \subseteq U$, $V^{n_0}_{i,s} \nsubseteq U$ y $V^{n_0}_{j,s_0} \nsubseteq U$, para $i \in \{1, \ldots, m_s\}$ y $j \in \{1, \ldots, m_{s_0}\}$. Por lo tanto, $(B^{n_0}_s; V^{n_0}_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}) \in \mathcal{J}$. Ahora, por (i), podemos tomar $x_i \in W^c \cap V^{n_0}_{i,s}$, para cada $i \in \{1, \ldots, m_s\}$. Denotemos a $F = \{x_i : i \in \{1, \ldots, m_s\}\}$. Claramente $F \in [X]^{<\omega}$ y satisface $F \cap V^{n_0}_{i,s} \neq \emptyset$ y $F \cap W = \emptyset$. Además, $B^{n_0}_s \subseteq W$. Concluimos que $\mathcal{J} \in \Pi_\Delta(\Lambda)$.

[(2) $\Rightarrow$ (1)]: Sea $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de cubiertas abiertas de (Λ, τ^+_Δ). Supongamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n = \left\{(V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s})^+_{B^n_s} : s \in S_n\right\}$, donde $B^n_s \in \Delta$ y $V^n_{i,s}$ es un subconjunto abierto de X con $V^n_{i,s} \cap (B^n_s)^c \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, \ldots, m_s\}$. Del Lema 2.8, tenemos que para cada n $\in \mathbb{N}$ $J_n = \left\{(B^n_s; V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}) : (V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s})^+_{B^n_s} \in \mathcal{U}_n\right\}$ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$ - red de X. Aplicamos la condición (2) a la sucesión $\{J_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Pi_\Delta(\Lambda)$ para obtener $D_n \in [S_n]^{<\omega}$, $n \in \mathbb{N}$, tal que: $\mathcal{J} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Big\{ (B^n_s; V^n_{1,s}, \ldots, V^n_{m_s,s}) \in J_n :$ existe $U \in \Lambda^c$ y $s' \in D_n$ tal que $(B^n_s \cup B^n_{s'}) \subseteq U, V^n_{i,s} \nsubseteq U(1 \leq i \leq m_s)$ y $V^n_{j,s'} \nsubseteq U(1 \leq j \leq m_{s'})\Big\}$ es un elemento de $\Pi_\Delta(\Lambda)$. Denotemos para cada $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{V}_n = \left\{\left(V^n_{1,s'}, \ldots, V^n_{m_{s'},s'}\right)^+_{B^n_{s'}} : s' \in D_n\right\}$, para cualquier. Demostraremos que $\{St\,(\bigcup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de (Λ, τ^+_Δ).
Sea $A \in \Lambda$. Como $\mathcal{J}$ es una $\pi_\Delta(\Lambda)$-red de X y $A^c \in \Lambda^c$,
existen $\left(B^{n_0}_{s_0}; V^{n_0}_{1,s_0}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s_0},s_0}\right) \in \mathcal{J}$ (con $n_0 \in \mathbb{N}$, $s_0 \in S_{n_0}$) y $F \in [X]^{<\omega}$ con $F \cap V^{n_0}_{i,s_0} \neq \emptyset$, para $i \in \{1, \ldots, m_{s_0}\}$. Además $B^{n_0}_{s_0} \subset A^c$ y $F \cap A^c = \emptyset$. Por eso, $A \subseteq \left(B^{n_0}_{s_0}\right)^c$ y para cada

$i \in \{1, \ldots, m_{s_0}\}$, $A \cap V^{n_0}_{i,s_0} \neq \emptyset$. Como consecuencia, tenemos que $A \in \left(V^{n_0}_{1,s_0}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s_0},s_0}\right)^+_{B^{n_0}_{s_0}}$.
Como $\left(B^{n_0}_{s_0}; V^{n_0}_{1,s_0}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s_0},s_0}\right) \in \mathcal{J}$, existe $U \in \Lambda^c$ y $s' \in D_{n_0}$ tales que $\left(B^{n_0}_{s_0} \cup B^{n_0}_{s'}\right) \subseteq U$, $V^{n_0}_{i,s_0} \nsubseteq U$ y $V^{n_0}_{j,s'} \nsubseteq U$, para $i \in \{1, \ldots, m_{s_0}\}$ y $j \in \{1, \ldots, m_{s'}\}$. Entonces, tenemos que:
$U^c \in \left(V^{n_0}_{1,s_0}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s_0},s_0}\right)^+_{B^{n_0}_{s_0}} \bigcap \left(V^{n_0}_{1,s'}, \ldots, V^{n_0}_{m_{s'},s'}\right)^+_{B^{n_0}_{s'}}$.
Por lo tanto, $\{St(\bigcup \mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de (Λ, τ^+_Δ). $\square$

Considerando algunos casos particulares para las familias Λ y Δ, obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 2.36. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Si Λ es cualquiera de los hiperespacios $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ o $\mathbb{CS}(X)$, entonces (Λ, τ^+_Δ) es* SM *si y solo si X satisface el principio* $\mathbf{S}^*_M(\Pi_\Delta(\Lambda), \Pi_\Delta(\Lambda))$.

Corolario 2.37. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\Delta = \mathbb{K}(X)$. Entonces, para cualquier Λ en $\{CL(X), \mathbb{K}(X), \mathbb{F}(X), \mathbb{CS}(X)\}$, (Λ, τ_F) es* SM *si y solo si X satisface el principio* $\mathbf{S}^*_M(\Pi_{\mathbb{K}(X)}(\Lambda), \Pi_{\mathbb{K}(X)}(\Lambda))$.

Corolario 2.38. *Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\Delta = CL(X)$. Luego, por cada Λ en $\{CL(X), \mathbb{K}(X), \mathbb{F}(X), \mathbb{CS}(X)\}$, (Λ, τ_V) es* SM *si y solo si X satisface el principio* $\mathbf{S}^*_M(\Pi_{CL(X)}(\Lambda), \Pi_{CL(X)}(\Lambda))$.

2.3. Equivalencias del principio de selección $\mathcal{S}_1(\mathcal{D},\mathcal{D})$ y $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{D},\mathcal{D})$

Denotamos por $\mathcal{D}$ a la familia de todos los subconjuntos densos de cualquier espacio (X,τ). Veremos a continuación las definiciones de Li de los conceptos de k_F-cubierta y c_V-cubierta de un espacio X para caracterizar los principios $\mathbf{S}_1(\mathcal{D},\mathcal{D})$ y $\mathbf{S}_{fin}(\mathcal{D},\mathcal{D})$ en $(CL(X),\tau_F)$ y $(CL(X),\tau_V)$ respectivamente.

Definición 2.39. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Una familia $\mathcal{U}\subseteq X$ $(X\notin\mathcal{U})$ se llama k_F-cubierta de X, si para cualquier subconjunto compacto K de X y conjuntos abiertos $V_1,\dots,V_n$ de X, con $V_i\cap K^c\neq\emptyset$ para cada $i\in\{1,\dots,n\}$, existe $U\in\mathcal{U}$ y $F\in[X]^{<\omega}$ tales que $F\cap V_i\neq\emptyset$ para cada $i\in\{1,\dots,n\}$, $K\subseteq U$ y $F\cap U=\emptyset$*

Definición 2.40. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Una familia $\mathcal{U}\subseteq X$ $(X\notin\mathcal{U})$ se llama c_V-cubierta de X, si para cualesquiera conjuntos abiertos $V_1,\dots,V_n$ de X, existe $U\in\mathcal{U}$ y $F\in[X]^{<\omega}$ tales que $F\cap V_i\neq\emptyset$ para cada $i\in\{1,\dots,n\}$, $\bigcap_{i=1}^n V_i^c\subseteq U$ y $F\cap U=\emptyset$*

Las familias de todas las k_F-cubiertas y todas las c_V-cubiertas se denotan como $\mathbb{K}_F$ y $\mathbb{C}_V$, respectivamente.
Realizamos una modificación a estos conceptos en la siguiente definición para caracterizar los principios $\mathbf{S}_1(\mathcal{D},\mathcal{D})$ y $\mathbf{S}_{fin}(\mathcal{D},\mathcal{D})$ en $(CL(X),\tau_\Delta^+)$. Requerimos la siguiente notación. Para $B\in\Delta$ y $V_1,\dots,V_m$ subconjuntos abiertos de X, Denotemos

$$\left[(V_1,\dots,V_m)_B^+\right]_\Lambda=\left[(V_1,\dots,V_m)_B^+\right]\cap\Lambda$$

para denotar subconjuntos abiertos relativos del subespacio $\Lambda\subseteq CL(X)$.

Definición 2.41. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Una familia $\mathcal{U}\subseteq\Lambda^c$ se llama* $c_\Delta(\Lambda)$-cubierta de X, *si para cualquier $B\in\Delta$ y conjuntos abiertos $V_1,\dots,V_m$ de X, con $B^c\cap V_i\neq\emptyset$ para cada $i\in\{1,\dots,m\}$, existen $U\in\mathcal{U}$ y $F\in[X]^{<\omega}$ tales que $B\subseteq U$, $F\cap U=\emptyset$ y para cada $i\in\{1,\dots,m\}$, $F\cap V_i\neq\emptyset$. Denotamos por $\mathbb{C}_\Delta(\Lambda)$ a la familia de todos los $c_\Delta(\Lambda)$ -cubiertas de X.*

Demostraremos a continuación la relación existente entre las nociones definidas por Li y la dada en la definición anterior.

Proposición 2.42. *Si $\Delta=\mathbb{K}(X)$ y $\Lambda=CL(X)$, entonces la noción de $c_\Delta(\Lambda)$ - cubierta de X coincide con la definición de k_F -cubierta de X.*

Demostración.
Es inmediato ya que al tomar la familia $\mathcal{U}\subseteq\Lambda^c$, una $c_\Delta(\Lambda)$-cubierta de X, entonces $X\notin\mathcal{U}$, además aplicando la hipótesis, para cualquier $K\in\mathbb{K}(X)$ y $V_1,\dots,V_n$ abiertos en X, obtenemos $U\in\mathcal{U}$ y $F\in[X]^{<\omega}$ que satisfacen la Definición 2.41. Los mismos U y F satisfacen la Definición 2.39. □

Proposición 2.43. *Si $\Delta=\Lambda=CL(X)$, entonces $\mathcal{U}$ es una $c_\Delta(\Lambda)$-cubierta de X si y solo si $\mathcal{U}$ es una c_V-cubierta de X.*

Demostración.
[$\Rightarrow$]: Sea $\mathcal{U}\subseteq\Lambda^c$ una $c_\Delta(\Lambda)$-cubierta de X, entonces $X\notin\mathcal{U}$. Sea $V_1,\dots,V_n$ subconjuntos abiertos de X. Aplicamos la hipótesis a los conjuntos $B=\bigcap_{i=1}^n V_i^c\in CL(X)$ y $V_1,\dots,V_n$, para obtener $U\in\mathcal{U}$ y $F\in[X]^{<\omega}$ que satisfacen la Definición 2.41. Los mismos U y F satisfacen la Definición 2.40.

[$\Leftarrow$]: Sea $\mathcal{U}$ una c_V-cubierta de X. Sean $B\in CL(X)$ y $V_1,\dots,V_n$ conjuntos abiertos tales que $B^c\cap V_i\neq\emptyset$, para cada $i\in\{1,\dots,n\}$. Consideramos los conjuntos abiertos no vacíos $V_1\cap B^c,\dots,V_n\cap B^c$. Por hipótesis, existen $U\in\mathcal{U}$ y $F\in[X]^{<\omega}$ que satisfacen la Definición 2.40. Los mismos U y F satisfacen la Definición 2.41. □

Lema 2.44. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Una familia $\mathcal{U}\subseteq\Lambda^c$ es una $c_\Delta(\Lambda)$-cubierta de X si y solo si $\mathcal{U}^c$ es un subconjunto denso de (Λ,τ^+_Δ).*

Demostración.
[⇒]: Sea la familia $\mathcal{U}$ una $c_\Delta(\Lambda)$-cubierta de X. Sean $B\in\Delta$ y $V_1,\ldots,V_n$ subconjuntos abiertos en X de manera que $\left[(V_1,\ldots,V_m)^+_B\right]_\Lambda\neq\emptyset$, tenemos que probar que la intersección $\left[(V_1,\ldots,V_m)^+_B\right]_\Lambda\cap\mathcal{U}^c$ es distinta del vacío. Por hipótesis, existen $U\in\mathcal{U}$ y $F\in[X]^{<\omega}$ tales que, $B\subseteq U$, $F\cap=\emptyset$ y por cada $i\in\{1,\ldots,m\}$, $F\cap V_i\neq\emptyset$. Sea $A=U^c$, como $U\in\Lambda^c$, se tiene que $\mathrm{A}\in\Lambda$ y $A\in\mathcal{U}^c$. Además se tiene que $A\subseteq B^c$ y $A\cap V_i\neq\emptyset$ con i $\{1,\ldots,m\}$. Entonces $A\in\left[(V_1,\ldots,V_m)^+_B\right]_\Lambda\cap\mathcal{U}^c$. Por lo tanto, concluimos que $\mathcal{U}^c$ es un subconjunto denso de Λ.

[⇐]: Sea $\mathcal{U}^c$ un subconjunto denso de Λ. Probaremos que $\mathcal{U}$ es una $c_\Delta(\Lambda)$-cubierta de X. Claramente $\mathcal{U}\subseteq\Lambda^c$. Sean $B\in\Delta$ y $V_1,\ldots,V_m$ subconjuntos abiertos de X tales que $B^c\cap V_i\neq\emptyset$ para cualquier $i\in\{1,\ldots,m\}$. Por hipótesis, tenemos que $\left[(V_1,\ldots,V_m)^+_B\right]_\Lambda\cap\mathcal{U}^c\neq\emptyset$. Sea $D\in\left[(V_1,\ldots,V_m)^+_B\right]_\Lambda\cap\mathcal{U}^c$. Entonces $D^c\in\mathcal{U}$, además D$\subseteq B^c$ y para cualquier i $\in\{1,\ldots,m\}$ se tiene que $D\cap V_i\neq\emptyset$, entonces $B\subseteq D^c$. Ahora, dado que para cada $i\in\{1,\ldots,m\}$, $D\cap V_i\neq\emptyset$, podemos considerar, para cualquier $i\in\{1,\ldots,m\}$, $x_i\in D\cap V_i$. Sea $F=\{x_i:i\in\{i,\ldots,m\}\}$. Claramente, $F\in[X]^{<\omega}$, $F\cap D^c=\emptyset$ y para cada $i\in\{1,\ldots,m\}$, $F\cap V_i\neq\emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{U}$ es una $c_\Delta(\Lambda)$-cubierta de X. □

Ejemplo 2.45. *Sea $X=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}\cup(3,\infty)$, como subespacio de $\mathbb{R}$, dotado de la topología usual. Considere $\Lambda=\Delta=\left[\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}\right]^{<\omega}$ y $\mathcal{U}=\Lambda^c$. Tenemos:*

- *$\mathcal{U}$ es una $c_\Delta(\Lambda)$-cubierta de X. De echo, dado cualquier conjunto abierto V en Λ se tiene que $V\cap\Lambda\neq\emptyset$, entonces $\Lambda=\mathcal{U}^c$ es un conjunto denso, aplicando el Lema 2.44, se tiene que $\mathcal{U}$ es una $c_\Delta(\Lambda)$-cubierta de X.*

- *$\mathcal{U}$ no es una k_F-cubierta de X. En efecto, noptemos que $K=\{0\}\cup\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$ es compacto en X y no puede existir un conjunto $U\in\Lambda^c$ tal que $K\subseteq U$, pues de lo contrario, tendremos que $U^c\subseteq K^c=(3,\infty)$, lo cual es imposible.*

Teorema 2.46. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) (Λ,τ^+_Δ) *satisface* $\mathbf{S}_1(\mathcal{D},\mathcal{D})$*;*

(2) (X,τ) *satisface* $\mathbf{S}_1(\mathbb{C}_\Delta(\Lambda),\mathbb{C}_\Delta(\Lambda))$*.*

Demostración.
[(1) ⇒ (2)]: Sea $\{\mathcal{U}_n:n\in\mathbb{N}\}$ una sucesión de $c_\Delta(\Lambda)$- cubiertas de X. Denotemos, para cada $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n=\mathcal{U}^c_n$. Del Lema 2.44, obtenemos que, para cada $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n$ es un subconjunto denso de (Λ,τ^+_Δ). Por lo tanto, aplicando (1) a la sucesión $\{\mathcal{A}_n:n\in\mathbb{N}\}$, obtenemos que para cualquier $n\in\mathbb{N}$, existe $A'_n\in\mathcal{A}_n$ tal que la sucesión $\mathcal{A}=\{A'_n:n\in\mathbb{N}\}$ es un subconjunto denso de (Λ,τ^+_Δ). Denotemos, para cada $n\in\mathbb{N}$, $U'_n=(A'_n)^c$, entonces se tiene que $U'_n\in\mathcal{U}_n$. Por el lema 2.44, tenemos que la colección $\{A^c:A\in\mathcal{A}\}\in\mathbb{C}_\Delta(\Lambda)$. Por lo tanto (X,τ) satisface $\mathbf{S}_1(\mathbb{C}_\Delta(\Lambda),\mathbb{C}_\Delta(\Lambda))$.

(2) ⇒ (1)]: Sea $\{\mathcal{D}_n:n\in\mathbb{N}\}$ una sucesión de subconjuntos densos de (Λ,τ^+_Δ). Denotemos, Para cada $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n=\mathcal{D}^c_n$. Se sigue del Lema 2.44 que, por cada $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n$ es una $c_\Delta(\Lambda)$-cubierta de X. Por lo tanto, aplicando (2) a la sucesión $\{\mathcal{U}_n:n\in\mathbb{N}\}$, existe $U'_n\in\mathcal{U}_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$, tal que $\mathcal{U}=\{U'_n:n\in\mathbb{N}\}$ es una $c_\Delta(\Lambda)$-cubierta de X. Para cada $n\in\mathbb{N}$, denotemos $D'_n=(U'_n)^c$, entonces para cualquier $n\in\mathbb{N}$ se tiene que $D'_n\in\mathcal{D}_n$. Por el Lema 2.44, tenemos que la colección $\{U^c:U\in\mathcal{U}\}$ es un conjunto denso de (Λ,τ^+_Δ). Por lo tanto (Λ,τ^+_Δ) satisface $\mathbf{S}_1(\mathcal{D},\mathcal{D})$ □

Corolario 2.47. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Si Λ es cualquiera de los hiperespacios $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ o $\mathbb{CS}(X)$, entonces (Λ,τ_Δ^+) satisface $\mathbf{S}_1(\mathcal{D},\mathcal{D})$ si y solo si X satisface $\mathbf{S}_1(\mathbb{C}_\Delta(\Lambda),\mathbb{C}_\Delta(\Lambda))$.*

Corolario 2.48. *Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $\Delta=\mathbb{K}(X)$. Entonces*

1. *$(CL(X),\tau_F)$ satisface $\mathbf{S}_1(\mathcal{D},\mathcal{D})$ si y solo si X satisface $\mathbf{S}_1(\mathbb{K}_F,\mathbb{K}_F)$.*
2. *Para cada Λ en $\{\mathbb{K}(X),\mathbb{F}(X),\mathbb{CS}(X)\}$, (Λ,τ_F) satisface $\mathbf{S}_1(\mathcal{D},\mathcal{D})$ si y solo si X satisface $\mathbf{S}_1(\mathbb{C}_{\mathbb{K}(X)}(\Lambda),\mathbb{C}_{\mathbb{K}(X)}(\Lambda))$.*

Corolario 2.49. *Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $\Delta=CL(X)$. Entonces*

1. *$(CL(X),\tau_V)$ satisface $\mathbf{S}_1(\mathcal{D},\mathcal{D})$ si y solo si X satisface $\mathbf{S}_1(\mathbb{C}_V,\mathbb{C}_V)$.*
2. *Para cada Λ en $\{\mathbb{K}(X),\mathbb{F}(X),\mathbb{CS}(X)\}$, (Λ,τ_V) satisface $\mathbf{S}_{fin}(\mathcal{D},\mathcal{D})$ si y solo si X satisface $\mathbf{S}_1(\mathbb{C}_{CL(X)}(\Lambda),\mathbb{C}_{CL(X)}(\Lambda))$.*

Teorema 2.50. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) (Λ,τ_Δ^+) satisface $\mathbf{S}_{fin}(\mathcal{D},\mathcal{D})$;

(2) (X,τ) satisface $\mathbf{S}_{fin}(\mathbb{C}_\Delta(\Lambda),\mathbb{C}_\Delta(\Lambda))$.

Demostración.
[(1) $\Rightarrow$ (2)]: Sea $\{\mathcal{U}_n : n\in\mathbb{N}\}$ una sucesión de $c_\Delta(\Lambda)$-cubiertas de X. Denotemos, para cada $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n=\mathcal{U}_n^c$. Del Lema 2.44, obtenemos que, para cada $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n$ es un subconjunto denso de (Λ,τ_Δ^+). Por lo tanto, aplicando (1) a la sucesión $\{\mathcal{A}_n : n\in\mathbb{N}\}$, obtenemos que para cualquier $n\in\mathbb{N}$, existe $\mathcal{A}'_n\in[\mathcal{A}_n]^{<\omega}$ tal que la sucesión $\mathcal{A}=\bigcup\{\mathcal{A}'_n : n\in\mathbb{N}\}$ es un subconjunto denso de (Λ,τ_Δ^+). Si para cualquier $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{U}'_n=(\mathcal{A}'_n)^c$, entonces para cualquier $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{U}'_n\in[\mathcal{U}_n]^{<\omega}$.
Demostraremos que la colección $\mathcal{U}=\bigcup\{\mathcal{U}'_n : n\in\mathbb{N}\}$ es una $c_\Delta(\Lambda)$-cubierta de X. En efecto, sean $B\in\Delta$ y $V_1,\ldots,V_m$ subconjuntos abiertos de X con $B^c\cap V_i\neq\emptyset$ para cualquier $i\in\{1,\ldots,m\}$. Por ser $\mathcal{A}$ un conjunto denso en $(\Lambda.\tau_\Delta^+)$ se tiene que $\left[(V_1,\ldots,V_m)_B^+\right]_\Lambda\cap\mathcal{A}\neq\emptyset$. Sea $D\in\left[(V_1,\ldots,V_m)_B^+\right]_\Lambda\cap\mathcal{A}$. Con esto obtenemos que $D\in\mathcal{A}$, entonces existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que D $\in\mathcal{A}'_{n_0}$, entonces $D^c\in\mathcal{U}'_{n_0}=(\mathcal{A}'_{n_0})^c$, con esto obtenemos que $D^c\in\mathcal{U}$. Además $D\subseteq B^c$ y para cualquier i $\in\{1,\ldots,m\}$ se tiene que $D\cap V_i\neq\emptyset$, entonces $B\subseteq D^c$. Ahora, dado que para cada $i\in\{1,\ldots,m\}$, $D\cap V_i\neq\emptyset$, podemos considerar, para cualquier $i\in\{1,\ldots,m\}$, $x_i\in D\cap V_i$. Sea $F=\{x_i : i\in\{i,\ldots,m\}\}$. Claramente, $F\in[X]^{<\omega}$, $F\cap D^c=\emptyset$ y para cada $i\in\{1,\ldots,m\}$, $F\cap V_i\neq\emptyset$. En conclusión, $\mathcal{U}$ es una $c_\Delta(\Lambda)$-cubierta de X. Por lo tanto (X,τ) satisface $\mathbf{S}_{fin}(\mathbb{C}_\Delta(\Lambda),\mathbb{C}_\Delta(\Lambda))$.

[(2) $\Rightarrow$ (1)]: Sea $\{\mathcal{D}_n : n\in\mathbb{N}\}$ una sucesión de subconjuntos densos de (Λ,τ_Δ^+). Para cualquier $n\in\mathbb{N}$, denotemos $\mathcal{U}_n=\mathcal{D}_n^c$. Se sigue del Lema 2.44 que para cada $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n$ es una $c_\Delta(\Lambda)$-cubierta de X. Por lo tanto, aplicando (2) a la sucesión $\{\mathcal{U}_n : n\in\mathbb{N}\}$, para cada $n\in\mathbb{N}$ existe $\mathcal{U}'_n\in[\mathcal{U}_n]^{<\omega}$ tal que $\mathcal{U}=\bigcup\{\mathcal{U}'_n : n\in\mathbb{N}\}$ es una $c_\Delta(\Lambda)$-cubierta de X. Para cualquier $n\in\mathbb{N}$, denotemos $D'_n=(\mathcal{U}'_n)^c$, entonces para cualquier $n\in\mathbb{N}$ se tiene que $D'_n\in[\mathcal{D}_n]^{<\omega}$. Probaremos que la colección $\mathcal{A}=\bigcup\{D'_n : n\in\mathbb{N}\}$ es un subconjunto denso de (Λ,τ_Δ^+). En efecto, sean $B\in\Delta$ y V_i con i $\{1,\ldots,m\}$ subconjuntos abiertos en X de manera que $\left[(V_1,\ldots,V_m)_B^+\right]_\Lambda\neq\emptyset$, tenemos que probar que la intersección $\left[(V_1,\ldots,V_m)_B^+\right]_\Lambda\cap\mathcal{A}$ es no vacío. Como $\mathcal{U}$ es una $c_\Delta(\Lambda)$-cubierta, existe $U\in\mathcal{U}$ y $F\in[X]^{<\omega}$ tales que, $B\subseteq U$, $F\cap U=\emptyset$ y por cada $i\in\{1,\ldots,m\}$, $F\cap V_i\neq\emptyset$. Sea $A=U^c$, como $U\in\mathcal{U}$, existe $n_0\in\mathbb{N}$, tal que $U\in\mathcal{U}'_{n_0}$, entonces se tiene que se tiene que $A\in(\mathcal{U}'_{n_0})^c=D'_{n_0}$, entonces A $\in\mathcal{A}$. Además se tiene que $A\subseteq B^c$ y $A\cap V_i$ con i $\{1,\ldots,m\}$. Entonces $A\in\left[(V_1,\ldots,V_m)_B^+\right]_\Lambda\cap\mathcal{A}$. Concluimos que $\mathcal{A}$ es un subconjunto denso de (Λ,τ_Δ^+).
Por lo tanto (Λ,τ_Δ^+) satisface $\mathbf{S}_{fin}(\mathcal{D},\mathcal{D})$ $\square$

Generalizamos estos resultados, obtenidos por Li, y proporcionamos caracterizaciones a la propiedad $\mathbf{S}_{fin}(\mathcal{D},\mathcal{D})$ para otros hiperespacios.

Corolario 2.51. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Si Λ es cualquiera de los hiperespacios $CL(X)$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{F}(X)$ o $\mathbb{CS}(X)$, entonces (Λ,τ_Δ^+) satisface $\mathbf{S}_{fin}(\mathcal{D},\mathcal{D})$ si y solo si X satisface $\mathbf{S}_{fin}(\mathbb{C}_\Delta(\Lambda),\mathbb{C}_\Delta(\Lambda))$.*

Corolario 2.52. *Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $\Delta=\mathbb{K}(X)$. Entonces*

1. *$(CL(X),\tau_F)$ satisface $\mathbf{S}_{fin}(\mathcal{D},\mathcal{D})$ si y solo si X satisface $\mathbf{S}_{fin}(\mathbb{K}_F,\mathbb{K}_F)$.*
2. *Por cada Λ en $\{\mathbb{K}(X),\mathbb{F}(X),\mathbb{CS}(X)\}$, (Λ,τ_F) satisface $\mathbf{S}_{fin}(\mathcal{D},\mathcal{D})$ si y solo si X satisface $\mathbf{S}_{fin}(\mathbb{C}_{\mathbb{K}(X)}(\Lambda),\mathbb{C}_{\mathbb{K}(X)}(\Lambda))$.*

Corolario 2.53. *Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $\Delta=CL(X)$. Entonces*

1. *$(CL(X),\tau_V)$ satisface $\mathbf{S}_{fin}(\mathcal{D},\mathcal{D})$ si y solo si X satisface $\mathbf{S}_{fin}(\mathbb{C}_V,\mathbb{C}_V)$.*
2. *Por cada Λ en $\{\mathbb{K}(X),\mathbb{F}(X),\mathbb{CS}(X)\}$, (Λ,τ_V) satisface $\mathbf{S}_{fin}(\mathcal{D},\mathcal{D})$ si y solo si X satisface $\mathbf{S}_{fin}(\mathbb{C}_{CL(X)}(\Lambda),\mathbb{C}_{CL(X)}(\Lambda))$.*

Bibliografía

[1] P. Bal, S. Bhowmik, *Some New Star-Selection Principles in Topology*, Filomat 31:13 (2017) 4041-4050.

[2] E. Borel, *Sur la classification des ensembles de mesure nulle*, Bull. Soc. Math. de France. 47 (1919) 97-125.

[3] G. Di Maio, Lj.D.R. Kočinac, *Some covering properties of hyperspaces*, Topol. Appl. 155 (2008) 1959-1969.

[4] G. Di Maio, Lj.D.R. Kočinac, E. Meccariello, *Selection principles and hyperspaces topologies*, Topol. Appl. 153 (2005) 912-923.

[5] J. Fell, *Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non-Hausdorff spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962) 472-476.

[6] F. Hausdorff, *Grundzuge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.

[7] W. Hurewicz, *Über eine Verallgemeinerung des Borelschen Theorems*, Math. Z. 24 (1925) 401-421.

[8] Lj.D.R. Kočinac, *Star-Menger and related spaces*, Publ. Math. Debrecen 55 (1999) 421-431.

[9] Lj.D.R. Kočinac, *Star-Menger and related spaces II*, Filomat (Niš) 13 (1999) 129-140.

[10] Lj.D.R. Kočinac, *Selected results on selection principles*, in Proceedings of the 3rd Seminar on Geometry and Topology (Sh. Rezapour, ed.), July 15-17, Tabriz, Iran, (2004) 71-104.

[11] Lj.D.R. Kočinac, *Star selection principles: A survey*, Khayyam Journal of Mathematics, 1:1 (2015), 82-106.

[12] Z. Li, *Selection principles of the Fell topology and the Vietoris topology*, Topol. Appl. 212 (2016) 90-104.

[13] K. Menger, *Einige Überdeckungssätze der Punltmengenlehre*, Sitzungsberichte Abt. 2a, Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik (Wiener Akademie, Wien) 133 (1924) 421-444.

[14] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152-182.

[15] D. Pompeiu, *Sur la continuité des fonctions de variables complexes*, Ann. Fac. Sci. de Toulouse: Mathématiques, Sér. 2, Tome 7 (1905) no.3, 265-315.

[16] F. Rothberger, *Eine Verschärfung der Eigenschaft C*, Fundam. Math. 30 (1938) 50-55.

[17] M. Sakai, *Menger subsets of the Sorgenfrey line*, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009) 3129-3138.

[18] M. Sakai, *Star covering versions of the Menger property*, Topol. Appl. 176 (2014) 22-34.

[19] M. Sakai, M. Scheepers, *The combinatorics of open covers*, Recent Progress in General Topology III, (2013), Chapter, p. 751-799.

[20] B. Tsaban, *Some New Directions in Infinite-combinatorial Topology*, in Bagaria J., Todorcevic S. (eds) Set Theory. Trends in Mathematics. Birkhäuser Basel (2006).

[21] M. Scheepers, *Combinatorics of open covers I: Ramsey theory*, Topol. Appl. 69 (1996) 31-62.

[22] M. Scheepers, *Selection principles and covering properties in topology*, Note di Matematica 22 (2003) 3-41.

[23] Y. K. Song, *Absolutely strongly star-Menger spaces*, Topol. Appl. 160 (2013) 475-481.

[24] Y. K. Song, *Remarks on strongly star-Menger spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin. 54,1 (2013) 97-104.

[25] Y. K. Song, *A note on star-Rothberger spaces*, Houston J. Math. 40 (2014) 645–653.

[26] Y. K. Song, *Remarks on star-Menger spaces*, Houston J. Math. 40 (2014) 917-925.

[27] Y. K. Song, *Remarks on star-Menger spaces II*, Houston J. Math. 41 (2015) 355-364.

[28] Y. K. Song, *Remarks on neighborhood star-Menger spaces*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), 104(118) (2018) 183-191.

[29] Y. K. Song, W. F. Xuan, *A note on selectively star-ccc spaces*, Topol. Appl. 263 (2019) 343-349.

[30] Y. K. Song, W. F. Xuan, *Remarks on new star-selection principles in topology*, Topol. Appl. 268 (2019) 1-10.

[31] B. Tsaban, *Some new directions in infinite-combinatorial topology*, In: J. Bagaria, S. Todorčvić (eds.), Set Theory, Trends in Mathematics, Birkhäuser, (2006) 225-255.

[32] L. Vietoris, *Bereiche Zweiter Ordnung*, Monatshefte für Mathematik und Physik 33 (1923) 49-62.

[33] L. Zsilinszky, *Baire spaces and hyperspace topologies*, Proc. Amer. Math. Soc., 124 (1996) 3175-3184.

[34] J. Casa- de la Rosa I Martinez-Ruiz, A. Ramirez-Parámo, *Star versions of the property on Hyperspaces, Rothberger* Topol.App. 283(2020)