

Estimador de estado óptimo en tiempo discreto

Optimal state estimator in discrete time

Fernando Mesa^{1a}, Rogelio Ospina-Ospina², Germán Correa-Vélez^{1b}

¹ Matemáticas Aplicadas y Educación, GIMAE, Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia. Correos electrónicos: ^a femesa@utp.edu.co, ^b gecove@utp.edu.co

Orcid: ^a [0000-0002-3418-5555](https://orcid.org/0000-0002-3418-5555), ^b [0000-0002-5244-3095](https://orcid.org/0000-0002-5244-3095)

² Ciencia de Materiales Biológicos y Semiconductores, Departamento de Física, Universidad Industrial de Santander, Colombia. Correo electrónico: rospinao@uis.edu.co. Orcid: [0000-0002-7392-8059](https://orcid.org/0000-0002-7392-8059)

Recibido: 21 marzo, 2021. Aceptado: 15 septiembre, 2021. Versión final: 14 febrero, 2022.

Resumen

Se realizó un estudio de estimación de estados sobre modelos con ruido en sistemas de control considerando el diseño del observador y la realimentación de estados. Para esto, se consideró el ruido sobre el modelo de espacio de estados del sistema y se realizó el diseño del mejor observador posible, es decir, el que mejor rechaza el efecto del ruido. Estos observadores suelen llamarse estimadores; en este trabajo se desarrolló un estimador conocido como el filtro de Kalman.

Palabras clave: control cuadrático; función objetivo; optimización.

Abstract

A study of state estimation was performed on models with noise in control systems considering the observer design and the state feedback. For this purpose, noise on the state space model of the system was considered, and the best possible observer was designed: that is to say, the one that better rejects the noise effect. These observers are usually called estimators. In this work an estimator known as the Kalman filter was developed.

Keywords: quadratic control; objective function; optimization.

1. Introducción

Cuando se analiza el desempeño de los sistemas de control, en la mayoría de los casos, no se tiene en cuenta el efecto que presentan las perturbaciones y el ruido, los cuales resultan ser muy importantes para aspectos como la estabilidad del sistema [1]. Todos los sistemas, de alguna manera, están siempre sujetos a ruido o perturbaciones que pueden originarse en

dinámicas no modeladas, señales de entrada no deseadas, alinealidades en las entradas no modeladas, entre otros [2]. A continuación, se presenta la deducción y formulación de las ecuaciones que rigen los estimadores de estado para sistemas en tiempo discreto y se obtiene la estimación para el modelo de espacio de estados de una planta hidráulica.

2. Modelamiento de sistemas con ruido

En las ecuaciones 1 y 2 se considera el modelo de espacio de estados de un sistema en tiempo discreto con ruido [3]:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Gv_k \quad (1)$$

$$y_k = Cx_k + w_k \quad (2)$$

$$E[v_k^T v_k] = V \quad (3)$$

$$E[v_k^T v_j] = 0 \quad (4)$$

$$E[v_k] = 0 \quad (5)$$

$$E[v_k^T v_k] = 0 \quad (6)$$

para todo j, k

Donde:

- La entrada v_k es el ruido de la planta o del proceso, y la entrada w_k es el ruido en la medición que actúa sobre la salida del proceso.
- La función $E[\cdot]$ denota la media estadística

$$E\left[(x_0 - E[x_0])(x_0 - E[x_0])^T\right] \triangleq S_0 \quad (7)$$

Se asume que x_0 no está correlacionada con las variables v_k y w_k . La Figura 1 presenta un ejemplo de dos señales contaminadas con ruido.

3. Filtro de Kalman discreto

Se desea obtener la matriz de ganancia del observador del sistema (L), la cual debe elegirse de forma que se obtenga la mejor estimación de estados del sistema, de tal manera que rechace cualquier ruido presente en el proceso (v_k y w_k) [3].

4. Filtro de Kalman discreto

Para el caso del sistema en tiempo discreto, la ecuación que define el observador de estados está dada por la ecuación 8:

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + L(y_k - C\hat{x}_k) \quad (8)$$

Las señales de entrada v_k y w_k que se relacionan en el anterior modelo hacen referencia a ruido blanco estacionario con media cero y no están correlacionadas entre sí, lo que significa que presentan las siguientes propiedades [4].

$$E[w_k^T w_j] = W \quad (9)$$

$$E[w_k^T w_j] = 0 \quad (10)$$

$$E[w_k] = 0 \quad (11)$$

Inicialmente, se considera el sistema sin ruidos. Se realiza una modificación del observador separando el proceso de observación en dos etapas [5]:

- Predicción del estado estimado en $k + 1$ con base en datos de k .

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k \quad (12)$$

- Corrección de la estimación en $k + 1$ con los datos medidos en $k + 1$.

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1} + L(y_{k+1} - C\hat{x}_{k+1}) \quad (13)$$

En observadores determinísticos, la ganancia del observador L es seleccionada para asignar la dinámica del error de estimación.

El filtro de Kalman optimiza el proceso a través de la estimación de estados y la minimización del efecto que producen los ruidos en el sistema. Dicha optimización surge de minimizar el error de estimación *a posteriori* ($e_k = x_k - \hat{x}_k$). Como e_k está afectado por ruido, y por lo tanto depende de variables aleatorias, su valor en un instante dado puede no ser representativo de las bondades de la estimación. Se busca, entonces, tratar de minimizar su valor “en promedio” para todo el conjunto de ruidos posibles [6]. Se define entonces

la covarianza *a posteriori* $S_k \triangleq E[e_k e_k^T]$. Cuanto menor sea la matriz de covarianza S_k , menor será la variabilidad del error de estimación debida a ruidos, y mejor será el rechazo de estos. El estimador con todas las consideraciones puede simplificar la ecuación, x_{k+1} es el estado siguiente, el cual solo depende del estado anterior (proceso de Markov) [7] [8].

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= A\hat{x}_k + Bu_k + L(\hat{y}_{k+1} - C(A\hat{x}_k + B\hat{u}_k)) \\ &= (A - LCA)\hat{x}_k + (B - LCB)u_k + L\hat{y}_{k+1} \end{aligned} \quad (14)$$

Para el observador discreto mostrado anteriormente, la dinámica del error está dada por:

$$\hat{x}_{k+1} = (A - LCA)\hat{x}_k \quad (15)$$

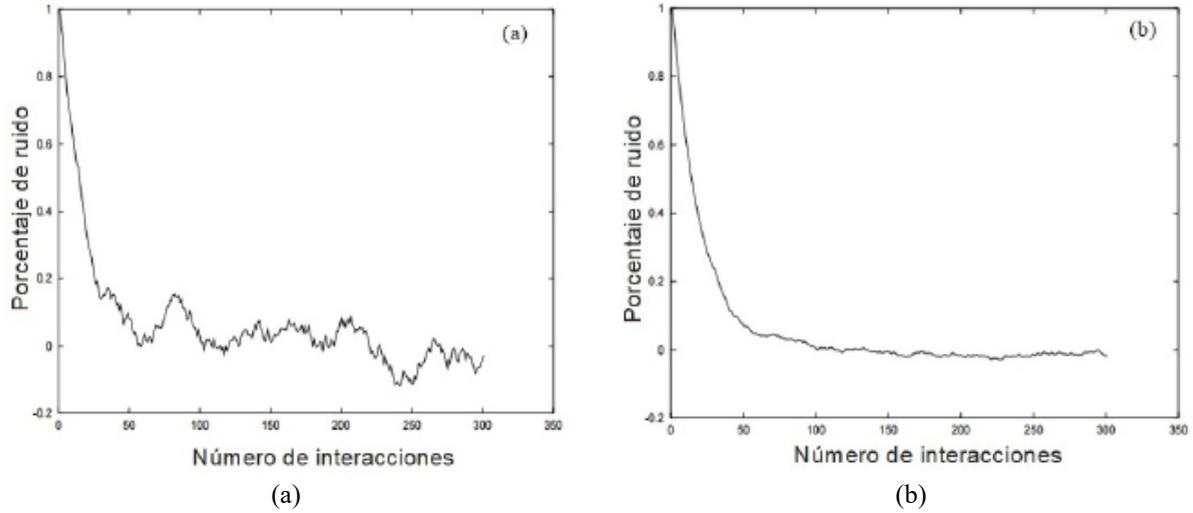


Figura 1. Señales contaminadas con ruido

Si la matriz A es de rango completo, el rango CA es el mismo que el de C , por lo que se puede considerar $C \triangleq CA$ como una nueva matriz de salida y asignar los autovalores de $(A-LC)$, como se hace en tiempo continuo.

5. Estructura del observador

Se usa la ecuación presentada para el “observador actual” para derivar el filtro de Kalman [9]. La mejor predicción de estado que se puede hacer cuando hay ruido es el valor esperado.

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= E[A\hat{x}_k + Bu_k + Gv_k] \\ &= A\hat{x}_k + Bu_k\end{aligned}\quad (16)$$

debido a que $E[v_k] = 0$

Se denomina estimación *a priori*, puesto que se realiza antes de medir la salida. Una vez que se dispone de la salida en $k+1$, se termina de construir el observador y se actualiza y obtiene la estimación *a posteriori*:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1} + L_{k+1}[y_{k+1} - C\hat{x}_{k+1}]\quad (17)$$

Se utiliza la ganancia del observador variante en el tiempo. L es seleccionada para asignar la dinámica del error de estimación y además para minimizar el efecto de los ruidos.

6. Criterio de optimización

El filtro de Kalman es óptimo en el sentido de que da la mejor estima del estado y al mismo tiempo minimiza el efecto de los ruidos. Su derivación surge de minimizar el error de estimación *a posteriori* [10].

$$e_k = x_k - \hat{x}_k\quad (18)$$

La variable error se encuentra afectada por ruido, por lo cual depende de variables aleatorias, y su valor podría no ser representativo en un determinado instante de tiempo por lo que se busca minimizar su valor “en promedio” para todo el conjunto de ruidos posibles. Se define entonces la covarianza *a posteriori* [11].

$$S_k \triangleq E[e_k e_k^T]\quad (19)$$

Cuanto menor sea la norma de la matriz S_k , menor será la variabilidad de error de estimación debido a ruidos, y menor, el rechazo de estos.

Se pretende determinar L_{k+1} para minimizar la variabilidad del error de estimación [12].

$$\begin{aligned}\min_{L_{k+1}} \|E[e_{k+1}]\|^2 &= \min_{L_{k+1}} E[e_{k+1}^T e_{k+1}] \\ &= \min_{L_{k+1}} E[\text{tr}(e_{k+1}^T e_{k+1})] \\ &= \min_{L_{k+1}} \text{tr} E[e_{k+1} e_{k+1}^T] \min_{L_{k+1}} \text{tr} E S_{k+1}\end{aligned}\quad (20)$$

Para obtener una expresión para S_{k+1} , se deriva la dinámica del error.

$$\begin{aligned}
 e_{k+1} &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1} \\
 &= Ax_k + Bu_k + Gv_k - A\hat{x}_k - Bu_k - \\
 &\quad L_{k+1} [Cx_{k+1} + w_{k+1} - C\hat{x}_{k+1}] \quad (21) \\
 &= Ax_k - A\hat{x}_k + Gv_k - L_{k+1} [C[Ax_k + Bu_k + \\
 &\quad Gv_k] + w_{k+1} - C[A\hat{x}_k + Bu_k]] \\
 &= [A - L_{k+1}CA]e_k + [G - L_{k+1}CG]v_k - \\
 &\quad L_{k+1}w_{k+1}
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$S_{k+1} = [I - L_{k+1}C][Ae_k + Gv_k] - L_{k+1}w_{k+1} \quad (22)$$

7. Determinación de la ganancia de estimación óptima

Para determinar el valor de la ganancia L_{k+1} que minimiza el criterio de optimización [13]:

$$\begin{aligned}
 trS_{k+1} &= tr[AS_kA^T] + tr[GVG^T] + \quad (23) \\
 &\quad tr[L_{k+1}C[AS_kA^T + GVG^T]C^TL_{k+1}^T] \\
 &= 2tr[L_{k+1}C[AS_kA^T + GVG^T]] + \\
 &\quad tr[L_{k+1}WL_{k+1}^T]
 \end{aligned}$$

Derivando con respecto a L_{k+1} , se obtiene:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial L_{k+1}} trS_{k+1} \\
 &= 2L_{k+1}C[AS_kA^T + GVG^T]C^T - \quad (24) \\
 &\quad 2[AS_kA^T + GVG^T]C^T + 2L_{k+1}W
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 L_{k+1} &= [AS_kA^T + GVG^T]C^T \quad (25) \\
 &\quad [C[AS_kA^T + GVG^T]C^T + W]
 \end{aligned}$$

la cual se conoce como ganancia de Kalman, que al depender de S_k es inestacionaria [14].

El algoritmo para computar el proceso anteriormente mostrado es:

- Calcular la estima *a priori* del estado.
- Calcular la ganancia de Kalman (L_{k+1}).
- Calcular la estima *a posteriori*.
- Calcular la matriz de covarianza para la siguiente iteración.

8. Aplicación

El sistema de control es la conexión de dos tanques; la idea es diseñar un controlador que mantenga las especificaciones de nivel en los tanques [15] (Figura 2).

$$A_1 = A_2 = 2, R_1 = \frac{1}{3}, R_2 = \frac{1}{4} \quad (26)$$

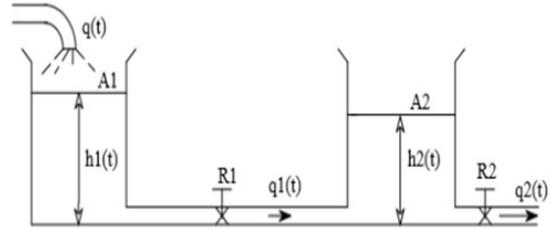


Figura 2. Planta hidráulica.

Donde, A es el área, q es el flujo, h es la altura y R son las válvulas.

Se considera el sistema de espacio de estados en tiempo discreto para una planta hidráulica mostrado a continuación:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0,7756229 & -0,1325538 \\ 0,0441846 & 0,9965460 \end{bmatrix} x_k \\
 &\quad + \begin{bmatrix} 0,0441846 \\ 0,0011513 \end{bmatrix} u_k \quad (27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\quad + \begin{bmatrix} 0,0476386 \\ -0,0487899 \end{bmatrix} v_k \\
 y &= [1 \ 0] x_k + w_k \quad (28)
 \end{aligned}$$

Para la planta propuesta, se desea construir un estimador en tiempo discreto para evaluar la evolución del estado del sistema cuando se aplica una entrada sinusoidal con un periodo de muestreo T . A partir de esto y de las ecuaciones anteriormente planteadas para el diseño del estimador [16], se obtienen los resultados expuestos a continuación.

La Figura 3 muestra la salida del sistema, la cual se encuentra al igual que los estados, perturbada por el ruido que presenta el sistema.

Con la simulación del sistema en tiempo discreto, se obtiene la estimación de los estados con la ayuda del observador y el filtro de Kalman, los cuales se muestran en la Figura 4, donde se observan la evolución de los estados del sistema y los estados estimados por el filtro de Kalman inestacionario [17]. Puede verse cómo las variables ruidosas son filtradas por el estimador.

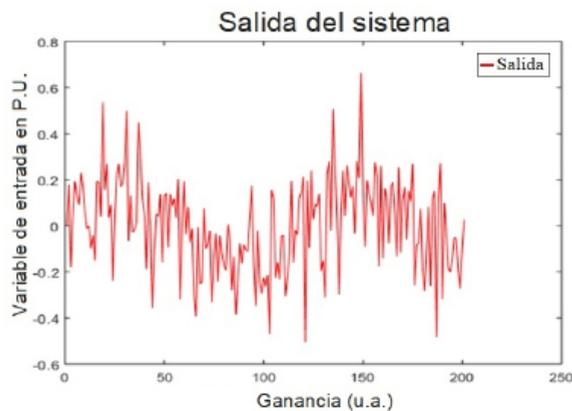


Figura 3. Salida del sistema contaminada con ruido

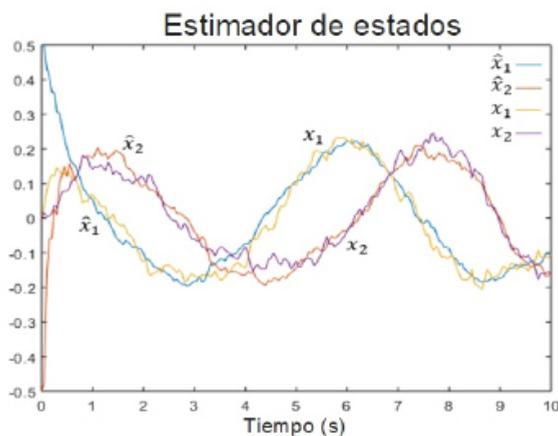


Figura 4. Estimación de estados

Finalmente, con la estimación de estados obtenida, se calcula la ganancia L para el diseño del filtro de Kalman [18].

$$L = \begin{bmatrix} -0,0440485 \\ 0,0536555 \end{bmatrix} \quad (29)$$

9. Conclusiones

El control óptimo es una técnica que requiere una formulación matemática un poco más estructurada que las técnicas clásicas, debido a la búsqueda de una función en un espacio de dimensión infinita, de tal forma que se encuentra una trayectoria sobre un dominio y no un punto sobre dicho dominio, tal como lo hacen las técnicas clásicas.

El documento presenta el diseño y simulación de un filtro de Kalman en tiempo discreto para la estimación de los estados en sistemas lineales e invariantes en el tiempo con salidas corrompidas con ruido blanco estacionario con media cero. Se presenta una simulación numérica del FK para el control de un sistema de tanques comunicantes.

Además del control óptimo LQ, con el filtro de Kalman también pueden calcularse soluciones estacionarias de la ecuación diferencial de Riccati, la cual determina la matriz de covarianza. La solución encontrada será aproximadamente óptima y única si (A^T, C^T) es estabilizable y (A^T, T^T) detectable, donde $GCG^T = TT^T$. La diferencia con el caso LQ es que la determinación de la matriz de covarianza se realiza hacia adelante, con lo que el filtro de Kalman puede implementarse en su forma estacionaria en tiempo real.

El filtro de Kalman puede obtenerse también en tiempo continuo, aunque raramente es usado en la práctica, ya que casi siempre se implementa en una computadora digital, por lo que la versión discreta es más natural. La derivación de las ecuaciones es similar al caso continuo y lleva a una ecuación diferencial de Riccati, dual al caso de control LQ.

Referencias

- [1] A. Dávila Gómez, A. Peña Palacio, P. A. Ortiz Valencia, E. Delgado Trejos, "Dinámica Estocástica o Compleja con Información Incompleta: Una Revisión desde el Control", *Iteckne*, vol.10 no.1, pp. 113-127, 2013, doi: <https://doi.org/10.15332/iteckne.v10i1.186>

- [2] D. González Montoya, P. A. Ortiz Valencia, C. A. Ramos-Paja, “Fixed-frequency implementation of sliding-mode controllers for photovoltaic systems”, *International Journal of Energy and Environmental Engineering*, vol. 10, pp. 287–305, 2019, doi: <https://doi.org/10.1007/s40095-019-0306-z>
- [3] M. M. Seron, J. H. Braslavsky, G.C. Goodwin, *Fundamental limitations in filtering and control*. Callaghan, Australia: Springer, 2007, doi: <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0965-5>
- [4] X. Wang, “Solving optimal control problems with MATLAB: Indirect methods”, *Ncsu.Edu.*, 2015.
- [5] H. Purnawan, E. B. Purwanto, “Design of linear quadratic regulator (LQR) control system for flight stability of LSU-05”, *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 890, no. 1, pp. 1-6, 2017, doi: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/890/1/012056>
- [6] G. C. Goodwin, K. S. Sin, “Adaptive filtering prediction and control”, *Courier Corporation, Dover Publications*, New York, 2014.
- [7] N. Safari-Shad, N. Abedi, S. Dehsarvi, “Nonlinear optimal control design experiments using the inverted pendulum on a cart paradigm”, *European Control Conference (ECC), Karlsruhe*, pp. 197-202, 1999, doi: <https://doi.org/10.23919/ECC.1999.7099299>
- [8] M. Athans, P. L. Falb, *Optimal control: an introduction to the theory and its applications*. New York, USA: Dover Publications, 2007.
- [9] T. Basar, P. Bernhard, *H ∞ Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamic Game Approach*. New York, USA: Springer, 2008.
- [10] R. G. Brown, P.Y. Hwang, *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering with Matlab Exercises*. New York, USA: Wiley, 2012.
- [11] W. Wang, C. Han, X. Wang, “Optimal Estimation for Continuous-Time Stochastic systems with Delayed measurements and Multiplicative noise,” *2020 IEEE 16th International Conference on Control & Automation (ICCA)*, 2020, pp. 961-966, doi: <https://doi.org/10.1109/ICCA51439.2020.9264532>
- [12] L. Pogorelyuk, C. W. Rowley, N. J., Kasdin, “An efficient approximation of the Kalman filter for multiple systems coupled via low-dimensional stochastic input”, *Automatica*, vol. 117, 2020, doi: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2020.108972>
- [13] S. Zhou, G. Feng, “H ∞ Filtering for Discrete-time Systems with Randomly Varying Sensor Delays”, *Automatica*, vol. 44, no. 7, pp. 1918- 1922, 2008, doi: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2007.10.026>
- [14] J. T. Monserrat, “Allocation of flow to plots in pressurized irrigation distribution networks: Analysis of the Clement and Galand method and a new proposal”, *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, vol. 135, pp. 1-6. 2009, doi: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9437\(2009\)135:1\(1\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9437(2009)135:1(1))
- [15] K. Ogata, *Dinámica de sistemas*. Prentice Hall Hispanoamericana, México, 1987.
- [16] R. C. Dorf, R. H. Bishop, “Modern control systems twelfth edition,” Pearson, 2011.
- [17] A. C. Harvey, “Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter”, *Cambridge University Press*, London, 2014. doi: <https://doi.org/10.1017/CBO9781107049994>
- [18] H. Zhang, G. Feng, C. Han, “Linear estimation for random delay systems,” *Systems & Control Letters*, vol. 60, no. 2, pp. 450-459, 2011, doi: <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2011.03.009>