OPEN ACCESS
MES: *Journal of Mathematics Education and Science*
ISSN: 2579-6550 (online) 2528-4363 (print)
Vol. 8, No. 1, Oktober 2022

Situs web: https://jurnal.uisu.ac.id/index.php/mesuisu
Email: jurnalmes@fkip.uisu.ac.id

PENERAPAN *INTEGER LINEAR PROGRAMMING* DENGAN MENGGUNAKAN METODE *BRANCH AND BOUND* UNTUK MENGOPTIMALKAN JUMLAH PRODUKSI ROTI ISI PADA FRANCE BAKERY BINJAI

Mhd Diky Setiawan*
Universitas Sumatera Utara, Medan-Indonesia 20155

Parapat Gultom*
Universitas Sumatera Utara, Medan-Indonesia 20155

Abstrak. *Permasalahan yang terjadi pada France Bakery Binjai yaitu jumlah masing-masing roti isi yang diproduksi bukan merupakan jumlah yang sesuai untuk memperoleh keuntungan yang maksimum berdasarkan keterbatasan bahan baku yang tersedia. Adapun tujuan dari penelitian ini adalah mengoptimalkan jumlah produksi untuk setiap jenis roti isi, sehingga dapat memaksimalkan keuntungan yang diperoleh dari penjualan roti isi. Permasalahan tersebut diselesaikan dengan menerapkan model integer linear programming menggunakan metode branch and bound. Hasil dari perhitungan menggunakan metode ini diperoleh jumlah produksi roti isi yang optimal adalah 732 kemasan roti rasa coklat, 470 kemasan roti rasa kacang hijau, 470 kemasan roti rasa kacang merah, 466 kemasan roti rasa tiramisu, dan 102 kemasan roti rasa melon coklat dengan keuntungan yang diperoleh yaitu sebesar Rp.7.922.000. Dengan menggunakan metode branch and bound keuntungan naik 10,03% atau sebesar Rp.722.000 dari keuntungan data awal selama satu bulan.*

Kata Kunci: *Integer Linear Programming, Metode Branch and Bound, Optimisasi*

Abstract. *The problem that occurs in France Bakery Binjai is that the amount of each bread produced is not an appropriate amount to obtain maximum profit based on the limitations of available raw materials. The purpose of this research is to optimize the amount of production for each type of bread, so that it can maximize the profits obtained from selling breads. This problem is solved by applying an integer linear programming model using the branch and bound method. The results of the calculation using this method obtained that the optimal amount of bread productions are 732 packages of chocolate-flavored bread, 470 packages of green bean-flavored bread, 470 packages of red bean-flavored bread, 466 packages of tiramisu-flavored bread, and 102 packages of chocolate melon-flavored bread with the profit obtained that is equal to Rp.7,922,000. By using the branch and bound method, the profit increased by 10.03% or Rp.722,000 from the initial data profit for one month.*

Keywords: *Branch and Bound Method, Integer Linear Programming, Optimization*

Sitasi: Setiawan, M.D., & Gultom, P. 2022. Penerapan *Integer Linear Programming* dengan Menggunakan Metode *Branch and Bound* Untuk Mengoptimalkan Jumlah Produksi Roti Isi pada France Bakery Binjai. *MES* (*Journal of Mathematics Education and Science*), 8(1): 32-46.

Submit:	**Revisi:**	**Publish:**
28 September 2022	10 Oktober 2022	20 Oktober 2022

*Corresponding Author: mdikysetiawan09@gmail.com

PENDAHULUAN

Perusahaan melakukan aktivitas ekonomi dengan tujuan untuk menghasilkan barang atau jasa, yang terletak di gedung atau suatu tempat tertentu, dan memiliki catatan administrasi sendiri untuk produksi serta terdapat satu atau lebih orang yang bertanggung jawab atas struktur biaya dan upayanya." Semakin berkembangnya waktu, jumlah industri di Indonesia semakin meningkat. Peningkatan jumlah industri mengakibatkan semakin ketat persaingan dalam dunia bisnis. Sehingga mempengaruhi keuntungan semua perusahaan. Ide-ide baru sangat dibutuhkan untuk lebih mengembangkan dunia usaha agar dapat bersaing dengan persaingan yang semakin meningkat. Perusahaan meningkatkan kualitas produk yang dihasilkannya untuk melakukan yang terbaik. Peningkatan kinerja dan pengembangan ide didukung dengan melihat peluang bisnis yang ada dan sangat penting bagi setiap bisnis untuk mencapai efektivitas dan efisiensi (Ibrahim et al., 2021).

Para pengusaha pada umumnya akan selalu menerapkan prinsip ekonomi, yaitu melakukan proses produksi dengan modal yang sekecil-kecilnya untuk mendapatkan laba sebesar-besarnya. France Bakery Binjai memiliki permasalahan terkait proses memaksimalkan keuntungan yaitu mencari solusi untuk mencapai jumlah produksi yang optimal. France Bakery Binjai adalah sebuah industri yang bergerak di bidang usaha berbagai jenis roti yang beralamat di Jalan Jendral Ahmad Yani, Kelurahan Kartini, Kecamatan Binjai Kota, Kota Binjai, Sumatera Utara. France Bakery Binjai memproduksi berbagai roti isi dengan rasa yang berbeda-beda. Masing-masing rasa roti isi yang diproduksi adalah coklat, kacang hijau, kacang merah, tiramisu, dan melon coklat. Banyaknya roti isi yang diproduksi oleh France Bakery Binjai selalu habis terjual. Hanya saja masalah yang dihadapi oleh France Bakery Binjai yaitu sulitnya menentukan jumlah produksi untuk setiap jenis roti isi yang optimal dengan adanya berbagai batasan bahan baku yang tersedia. Melihat hal tersebut tentu saja mempengaruhi besarnya keuntungan yang diperoleh. Dalam mengatasi permasalahan ini maka diperlukan model *integer linear programming* dengan pendekatan metode *branch and bound* untuk mengoptimasi jumlah produksi roti isi.

Optimasi adalah proses meminimalkan biaya untuk mendapatkan keuntungan maksimal dari suatu masalah. *Linear programming* adalah "cabang ilmu matematika terapan yang berurusan di kelas tertentu dari masalah terkait bisnis untuk optimasi" (Oyekan & Temisan, 2019). Pemrograman linier (*linear programming*) sebagai model riset operasi dalam penelitian matematika terapan tersebar luas di organisasi industri dan bisnis yang dapat digunakan untuk menemukan solusi dan memecahkan masalah optimasi. Hanya saja hasil yang diperoleh memiliki kemungkinan tidak dalam bentuk bilangan bulat (*integer*) jika penyelesaiannya menggunakan *linear programming*. Karena roti isi tidak mungkin diproduksi dalam jumlah yang tidak bulat, maka diperlukan *integer linear programming* yang merupakan penyelesaian masalah khusus dari *linear programming*.

Integer linear programming atau program linier bilangan bulat merupakan "suatu *linear programming* dengan variabel keputusannya merupakan bilangan bulat (*integer*), sehingga pada bentuk umum *linear programming* terdapat tambahan syarat bahwa variabel keputusannya harus bilangan bulat". Salah satu metode penyelesaian dalam *integer linear programming* adalah dengan menggunakan metode pencabangan dan pembatasan (*branch and bound*) (Basriati, 2018).

Sebelumnya penelitian mengenai metode ini pernah dibahas oleh beberapa peneliti yang menjelaskan bagaimana perencanaan untuk mengoptimalkan jumlah produksi menggunakan metode *branch and bound*. Dan berdasarkan penelitian yang telah dilakukan tersebut, mengoptimalkan jumlah produksi dengan menggunakan metode *branch and bound* menunjukkan hasil bahwa laba yang diperoleh perusahaan akan lebih besar. Oleh karena itu penelitian ini membahas penerapan *integer linear programming* dengan menggunakan metode *branch and bound* untuk mengoptimalkan jumlah produksi roti isi pada France Bakery Binjai.

METODE

Jenis penelitian ini adalah kuantitatif yang dilakukan pada France Bakery Binjai yang beralamat di Jalan Jendral Ahmad Yani, Kelurahan Kartini, Kecamatan Binjai Kota, Kota Binjai, Sumatera Utara. Peneliti melakukan studi kasus pada France Bakery Binjai untuk pengambilan data sekunder dengan cara survei ke lokasi untuk mengamati permasalahan yang terjadi, selanjutnya membuat daftar data apa saja yang diperlukan, kemudian data tersebut diisi oleh pihak France Bakery Binjai. Adapun data yang diperlukan yaitu sebagai berikut:

1. Jenis dan harga roti isi yang diproduksi di France Bakery Binjai.
2. Bahan baku utama yang digunakan untuk membuat roti isi yaitu tepung terigu, gula, susu cair, pengembang, coklat, kacang hijau, kacang merah, perasa tiramisu, dan melon.
3. Jumlah persediaan bahan baku utama digunakan untuk membuat roti isi yaitu tepung terigu, gula, susu cair, pengembang, coklat, kacang hijau, kacang merah, perasa tiramisu, dan melon dalam satu bulan.
4. Biaya produksi dan keuntungan yang diperoleh dari penjualan roti isi.
5. Jumlah produksi roti isi dalam satu bulan.

Data yang diperoleh dari France Bakery Binjai akan dianalisis dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Membuat model matematika dari data yang telah didapat menjadi bentuk umum program linier.
2. Mengubah model matematika yang telah dibuat ke dalam bentuk tabel simpleks.
3. Mengoptimalkan jumlah produksi dengan metode simpleks. Setelah itu menentukan solusi *integer* menggunakan metode *branch and bound*.
4. Membandingkan jumlah produksi dan keuntungan menurut data industri yang sudah dengan data yang diperoleh melalui metode *branch and bound*.
5. Membuat kesimpulan dan saran dari pembahasan yang telah dilakukan.

Langkah-langkah berikut ini digunakan untuk menghitung nilai optimum program linier dengan metode simpleks:

1. Mengubah terlebih dahulu fungsi tujuan dan fungsi kendala menjadi bentuk implisit.
2. Semua nilai disusun ke dalam table simpleks.
3. Menentukan kolom kunci (variabel keputusan) yang masuk sebagai variabel basis (*entering variable*). Kolom yang memuat nilai pada baris Z yang bernilai negatif dengan angka terbesar merupakan kolom kunci.
4. Menentukan baris kunci, untuk menentukan variabel yang akan keluar dari baris kunci (*leaving variable*). Baris dengan nilai indeks positif terkecil disebut baris kunci. Adapun perhitungan indeks adalah sebagai berikut:
$$\text{Indeks} = \frac{\text{Nilai kanan (NK)}}{\text{Nilai setiap baris pada kolom kunci}} \quad (1)$$
5. Nilai-nilai pada baris kunci kemudian diubah, caranya yaitu membagi nilai tersebut dengan angka kunci. Nilai yang terletak di perpotongan kolom kunci dan baris kunci disebut angka kunci.
$$\text{Nilai baru baris kunci} = \frac{\text{Nilai pada baris kunci lama}}{\text{Angka kunci}} \quad (2)$$

6. Membuat baris baru dengan mengubah nilai-nilai baris (selain baris kunci) sehingga nilai-nilai kolom kunci = 0, dengan perhitungan sebagai berikut:
$$\text{Nilai baris baru} = \text{Nilai baris lama} - (\text{KAKK} \times \text{NBBK}) \quad (3)$$
Keterangan:
KAKK : Koefisien Angka Kolom Kunci (nilai setiap baris kolom kunci)
NBBK : Nilai Baris Baru Kunci
7. Ulangi langkah di atas (langkah 3 – 6 atau disebut iterasi), sampai tidak terdapat nilai negatif pada baris Z (baris fungsi tujuan).
Catatan:
Apabila tabel sudah menunjukkan optimal maka iterasi dihentikan. Adapun kondisi yang menunjukkan bahwa sudah optimal yaitu:
    a. Semua nilai pada baris Z bernilai positif atau nol (untuk maksimasi).
    b. Bernilai negatif atau nol (untuk minimasi).

Dalam menyelesaikan persoalan dengan menggunakan metode *branch and bound* harus mengikuti langkah-langkah berikut ini (Basriati, 2018):
1. Selesaikan terlebih dahulu persoalan program linier dengan metode simpleks tanpa batasan *integer*.
2. Solusi optimal yang diperoleh kemudian diperiksa. Jika variabel keputusannya sudah bilangan bulat, maka sudah tercapai solusi optimal. Namun jika variabel keputusannya tidak bulat maka lanjut langkah 3.
3. Variabel dengan pecahan terbesar akan dipilih untuk menjadi pencabangan ke dalam sub masalah. Kemudian buat dua batasan baru untuk variabel ini, dengan batasan $\leq$ dan batasan $\geq$.
4. Solusi pada penyelesaian langkah 1 dijadikan sebagai batas atas dan solusi yang variabel keputusannya telah dibulatkan ke bawah dijadikan batas bawah.
5. Selesaikan model program linier dengan batasan baru yang ditambahkan pada setiap sub masalah.
6. Suatu solusi yang sama baik atau lebih baik dari batas atas untuk setiap sub masalah yang dicari disebut solusi *integer* fisibel (layak). Jika solusi yang demikian terjadi, suatu sub masalah dengan batas atas terbaik dipilih untuk dicabangkan. Kembali ke langkah 4.

Iterasi berhenti jika pencabangan memenuhi syarat berikut ini:
1. Tidak memiliki solusi fisibel.
2. Apabila semua variabel keputusannya berbentuk bilangan bulat positif.
3. Untuk persoalan memaksimalkan, pencabangan akan berhenti pada sub masalah jika batas atas dari sub masalah tersebut lebih kecil atau sama dengan batas bawah.
4. Untuk persoalan meminimalkan, pencabangan akan berhenti pada sub masalah jika batas bawah dari sub masalah tersebut lebih besar atau sama dengan batas atas.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pemrograman linier merupakan suatu cara untuk menyelesaikan persoalan pengalokasian sumber-sumber daya yang terbatas di antara beberapa aktivitas bersaing dengan cara yang terbaik yang mungkin dilakukan. Ini merupakan suatu perencanaan kegiatan-kegiatan demi untuk mendapatkan suatu hasil optimum, yaitu suatu hasil yang mencapai tujuan terbaik di antara seluruh alternatif layak. Program linier banyak diterapkan di berbagai permasalahan ekonomi, indsutri, militer, sosial, dan lain-lain (Nuryana, 2019).

Karakteristik-karakteristik berikut ini digunakan untuk membangun model dari persoalan program linier (Aprilyanti et al., 2018):

1. Variabel keputusan
   Variabel keputusan merupakan variabel yang menjelaskan secara lengkap keputusan-keputusan yang akan dibuat. Yang dimaksud di sini adalah $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.
2. Fungsi tujuan
   Fungsi variabel keputusan yang akan dimaksimalkan atau diminimalkan disebut sebagai fungsi tujuan.
3. Pembatas-pembatas
   Merupakan kendala-kendala yang dihadapi sehingga kita tidak bisa menentukan harga variabel keputusan secara sembarang. Jadi maksudnya di sini nilai dari variabel keputusan tersebut dibatasi oleh pembatas (*constraint*).
4. Pembatas tanda
   Pembatas tanda adalah pembatas yang menjelaskan apakah variabel keputusannya diasumsikan hanya berharga nonnegatif atau variabel keputusan tersebut boleh berharga positif, boleh juga negatif (tidak terbatas dalam tanda).

Persamaan fungsi tujuan untuk memaksimumkan atau meminimumkan dapat dilihat berikut ini.

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n \tag{4}$$

Sedangkan untuk fungsi kendala atau sumber daya yang membatasi adalah sebagai berikut.

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n =/\leq/\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n =/\leq/\geq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n =/\leq/\geq b_m \\ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0 \end{gathered} \tag{5}$$

Keterangan :

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$	: variabel keputusan.
$c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$	: nilai koefisien dari fungsi tujuan yang akan dicapai.
$a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn}$	: merupakan koefisien fungsi kendala.
$b_1, b_2, \dots, b_m$	: merupakan jumlah dari keseluruhan masing-masing sumber daya.

Metode simpleks adalah “suatu prosedur aljabar yang bukan secara grafik untuk mencari nilai optimal dari fungsi tujuan dalam masalah-masalah optimisasi yang terkendala”. Sebagai pembandingnya yaitu terdapat metode grafik yang hanya dapat digunakan jika variabel keputusannya berjumlah maksimal dua buah variabel.

Perhitungan iteratif dengan metode simpleks harus dibuat dalam bentuk tabel, sehingga bentuk umum yang sudah diubah menjadi bentuk baku dimasukkan ke dalam tabel simpleks.

Tabel 1. Tabel Metode Simpleks

Variabel Dasar	**Z**	x_1	x_2	...	x_n	S_1	S_2	...	S_n	**NK**
Z	1	$-C_1$	$-C_2$	...	$-C_n$	0	0	...	0	
S_1	0	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0	b_1
S_2	0	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0	b_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
S_m	0	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1	b_m

Keterangan:
Z = fungsi tujuan yang dicari nilai maksimum atau minimumnya
C_n = nilai koefisien dari tujuan variabel keputusan x_n
x_n = variabel keputusan ke-n
S_n = variabel *slack*/surplus/buatan ke-n
a_{mn} = kebutuhan sumber daya m untuk setiap x_n
b_m = jumlah sumber daya yang disediakan

Branch and Bound merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk mencari hasil optimal dari persoalan program linier yang menghasilkan variabel keputusan bilangan bulat. A.H. Land dan A.G. Doig merupakan orang yang pertama kali memperkenalkan metode *branch and bound*. Metode ini pertama kali diperkenalkan pada tahun 1960 (Purba & Ahyaningsih, 2020).

Metode *branch and bound* adalah salah satu metode untuk menghasilkan penyelesaian optimal pemrograman linier yang menghasilkan variabel-variabel keputusan bilangan bulat. Pada intinya metode *branch and bound* merupakan metode dengan pendekatan untuk "mencabangkan dan membatasi". Metode *branch and bound* mempunyai prinsip yang mendasar yaitu solusi-solusi fisibel yang diperoleh dari masalah, dibagi menjadi sub masalah yang lebih kecil. Sub masalah ini kemudian bisa dievaluasi secara teratur sampai terdapat solusi masalah yang terbaik didapatkan. Ada dua konsep dasar dalam algoritma *branch and bound*:

1. *Branching* adalah proses membagi-bagi permasalahan menjadi sub masalah yang mungkin mengarah ke solusi.
2. *Bounding* adalah suatu proses untuk mencari/menghitung batas atas (BA) dan batas bawah (BB) untuk solusi optimal pada sub masalah yang mengarah ke solusi.

Ada dua batas yang terdapat pada algoritma *branch and bound* yaitu batas atas (*upper bound*) dan batas bawah (*lower bound*) yaitu sebagai berikut:

1. Pada kasus maksimisasi, batas atasnya adalah solusi program linier dari sub masalah tersebut, sedangkan batas bawahnya adalah solusi program linier dari sub masalah yang semua variabel keputusannya dibulatkan ke bawah berdasarkan metode pembulatan.
2. Pada masalah minimisasi batas bawahnya adalah solusi program linier dari submasalah tersebut sedangkan batas atasnya adalah solusi program linier dari submasalah yang semua variabel keputusannya dibulatkan ke atas berdasarkan metode pembulatan.

Hasil pengambilan data yang dilakukan pada France Bakery Binjai meliputi jenis-jenis rasa roti isi yang akan diteliti, bahan baku roti isi, persediaan bahan baku dalam satu bulan untuk pembuatan roti isi, biaya produksi dan keuntungan dari penjualan setiap satu kemasan roti isi, jumlah produksi roti isi dan keuntungan yang diperoleh dari penjualan roti isi dalam satu bulan.

Jenis-jenis rasa roti isi yang diteliti adalah rasa roti isi yang diproduksi oleh France Bakery Binjai. Jenis-jenis rasa roti isi yang ditetili ditunjukkan pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Jenis Rasa Roti Isi

No.	**Jenis Rasa Roti Isi**
1	Coklat
2	Kacang Hijau
3	Kacang Merah
4	Tiramisu
5	Melon Coklat

Bahan baku utama yang digunakan dalam membuat satu kemasan roti isi ditunjukkan pada Tabel 3 berikut.

Tabel 3. Bahan Baku Roti Isi

No.	Bahan Baku Utama yang Digunakan	Rasa Roti Isi				
		Coklat	**Kacang Hijau**	**Kacang Merah**	**Tiramisu**	**Melon Coklat**
1	Tepung Terigu (gram)	28,57	28,57	28,57	28,57	28,57
2	Gula (gram)	14,28	14,28	14,28	14,28	14,28
3	Susu Cair (gram)	10,85	10,85	10,85	10,85	10,85
4	Pengembang (gram)	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35
5	Coklat (gram)	15				10
6	Kacang Hijau (gram)		17			
7	Kacang Merah (gram)			17		
8	Perasa Tiramisu (gram)				16	
9	Melon (gram)					7

Persediaan bahan baku utama roti isi dalam satu bulan ditunjukkan pada Tabel 4 berikut.

Tabel 4. Persediaan Bahan Baku Roti Isi

No.	Bahan Baku Utama yang Digunakan	Persediaan Bahan Baku Per Bulan (gram)
1	Tepung Terigu	65.000
2	Gula	32.000
3	Susu Cair	24.700
4	Pengembang	1.000
5	Coklat	12.000
6	Lacang Hijau	8.000
7	Kacang Merah	8.000
8	Perasa Tiramisu	7.000
9	Melon	4.000

Biaya produksi dan keuntungan dari penjualan satu kemasan roti isi ditunjukkan pada Tabel 5 berikut.

Tabel 5. Biaya Produksi dan Keuntungan Roti Isi

No.	Jenis Rasa Roti Isi	Biaya Produksi Per Kemasan (Rp)	Harga Jual Per Kemasan (Rp)	Keuntungan Per Kemasan (Rp)
1	Coklat	4.000	8.000	4.000
2	Kacang Hijau	4.500	8.000	3.500
3	Kacang Merah	4.500	8.000	3.500
4	Tiramisu	6.000	9.000	3.000
5	Melon Coklat	5.000	8.000	3.000

Jumlah produksi roti isi yang dibuat dalam satu bulan ditunjukkan pada Tabel 6 berikut.

Tabel 6. Jumlah Produksi Roti Isi Bulanan

No.	Jenis Rasa Roti Isi	Jumlah Produksi (Kemasan)	Keuntungan (Rp)
1	Coklat	450	1.800.000
2	Kacang Hijau	450	1.575.000
3	Kacang Merah	450	1.575.000
4	Tiramisu	390	1.170.000
5	Melon Coklat	360	1.080.000
	Total Keuntungan		7.200.000

Proses mengolah data yang digunakan untuk memperoleh hasil optimal dalam produksi roti isi pada France Bakery Binjai yaitu *integer linear programming* dengan menggunakan metode *branch and bound*. Model matematika yang digunakan adalah model pemrograman linier bilangan bulat positif. Model matematika optimalisasi jumlah produksi roti adalah sebagai berikut.

Fungsi Tujuan

$Z = 4.000\, x_1 + 3.500x_2 + 3.500x_3 + 3.000x_4 + 3.000x_5$

Fungsi Kendala

$$\begin{aligned}
&28{,}57x_1 + 28{,}57x_2 + 28{,}57x_3 + 28{,}57x_4 + 28{,}57x_5 \leq 65.000\\
&14{,}28x_1 + 14{,}28x_2 + 14{,}28x_3 + 14{,}28x_4 + 14{,}28x_5 \leq 32.000\\
&10{,}85x_1 + 10{,}85x_2 + 10{,}85x_3 + 10{,}85x_4 + 10{,}85x_5 \leq 24.700\\
&0{,}35x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}35x_3 + 0{,}35x_4 + 0{,}35x_5 \leq 1.000\\
&15x_1 + 10x_5 \leq 12.000\\
&17x_2 \leq 8.000\\
&17x_3 \leq 8.000\\
&15x_4 \leq 7.000\\
&7x_5 \leq 4.000
\end{aligned}$$

Yang pertama kali dilakukan untuk menghitung nilai optimal suatu program linier menggunakan metode simpleks yaitu mengubah fungsi tujuan dan fungsi kendala menjadi bentuk implisit sebagai berikut.

Fungsi tujuan memaksimalkan keuntungan:

$Z - 4.000\, x_1 - 3.500x_2 - 3.500x_3 - 3.000x_4 - 3.000x_5 = 0$

Dengan hambatan:

$$\begin{aligned}
&28{,}57x_1 + 28{,}57x_2 + 28{,}57x_3 + 28{,}57x_4 + 28{,}57x_5 + S_1 = 65.000\\
&14{,}28x_1 + 14{,}28x_2 + 14{,}28x_3 + 14{,}28x_4 + 14{,}28x_5 + S_2 = 32.000\\
&10{,}85x_1 + 10{,}85x_2 + 10{,}85x_3 + 10{,}85x_4 + 10{,}85x_5 + S_3 = 24.700\\
&0{,}35x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}35x_3 + 0{,}35x_4 + 0{,}35x_5 + S_4 = 1.000\\
&15x_1 + 10x_5 + S_5 = 12.000\\
&17x_2 + S_6 = 8.000\\
&17x_3 + S_7 = 8.000\\
&15x_4 + S_8 = 7.000\\
&7x_5 + S_9 = 4.000
\end{aligned}$$

Setelah dilakukan dengan mengubah fungsi tujuan dan fungsi kendala menjadi bentuk standar/implisit, selanjutnya perhitungan iteratif dengan metode simpleks harus dibuat dalam bentuk tabel, maka semua nilai disusun ke dalam table simpleks. Tabel awal metode simpleks adalah sebagai berikut.

Tabel 7. Tabel Simpleks Awal

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	NK
Z	1	-4.000	-3.500	-3.500	-3.000	-3.000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S_1	0	28,57	28,57	28,57	28,57	28,57	1	0	0	0	0	0	0	0	0	65.000
S_2	0	14,28	14,28	14,28	14,28	14,28	0	1	0	0	0	0	0	0	0	32.000
S_3	0	10,85	10,85	10,85	10,85	10,85	0	0	1	0	0	0	0	0	0	24.700
S_4	0	0,35	0,35	0,35	0,35	0,35	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1.000
S_5	0	15	0	0	0	10	0	0	0	0	1	0	0	0	0	12.000
S_6	0	0	17	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	8.000
S_7	0	0	0	17	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	8.000
S_8	0	0	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	7.000
S_9	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4.000

Hasil perhitungan optimal menggunakan metode metode simplek adalah sebagai berikut.

Tabel 8. Tabel Optimal Simpleks

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	NK
Z	1	0	0	0	0	0	0	70,03	0	0	200	147,06	147,06	133,33	0	7.927.171
S_1	0	0	0	0	0	0	1	-2	0	0	0	0	0	0	0	977,59
S_2	0	0	0	0	0	1	0	0,21	0	0	-0,20	-0,18	-0,20	-0,20	0	99,16
S_3	0	0	0	0	0	0	0	-0,76	1	0	0	0	0	0	0	386,28
S_4	0	0	0	0	0	0	0	-0,02	0	1	0	0	0	0	0	215,69
S_5	0	1	0	0	0	0	0	-0,14	0	0	0,20	0,12	0,12	0,13	0	733,89
S_6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0,06	0	0	0	470,59
S_7	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0,06	0	0	470,59
S_8	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0,07	0	466,67
S_9	0	0	0	0	0	0	0	-1.47	0	0	1.4	1.24	1.24	1.4	1	3.305,88

Dilihat dari hasil iterasi optimal pada Tabel 8, baris Z sudah tidak memuat nilai negatif, artinya solusi yang diperoleh sudah optimal dan proses iterasi berhenti. Diperoleh nilai untuk setiap variabel keputusannya adalah sebagai berikut.

$Z = 7.927.171$
$x_1 = 733,89$
$x_2 = 470,59$
$x_3 = 470,59$
$x_4 = 466,67$
$x_5 = 99,16$

Berdasarkan perhitungan menggunakan bantuan *software QM*, dapat dilihat solusi penyelesaian metode simpleks pada Gambar 1 sebagai berikut.

Linear Programming Results
(untitled) Solution

	X1	X2	X3	X4	X5		RHS	Dual
Maximize	4000	3500	3500	3000	3000			
Constraint 1	28.57	28.57	28.57	28.57	28.57	<=	65000	0
Constraint 2	14.28	14.28	14.28	14.28	14.28	<=	32000	70.03
Constraint 3	10.85	10.85	10.85	10.85	10.85	<=	24700	0
Constraint 4	.35	.35	.35	.35	.35	<=	1000	0
Constraint 5	15	0	0	0	10	<=	12000	200
Constraint 6	0	17	0	0	0	<=	8000	147.06
Constraint 7	0	0	17	0	0	<=	8000	147.06
Constraint 8	0	0	0	15	0	<=	7000	133.33
Constraint 9	0	0	0	0	7	<=	4000	0
Solution->	733.89	470.59	470.59	466.67	99.16		7927171	

Gambar 1. Output *Software QM* Metode Simpleks

Solusi yang diperoleh pada penyelesaian menggunakan metode simpleks, jumlah roti isi yang optimal adalah 733,89 kemasan roti rasa coklat, 470,59 kemasan roti rasa kacang hijau, 470,59 kemasan roti rasa kacang merah, 466,67 kemasan roti rasa tiramisu, dan 99,16 kemasan roti rasa melon coklat dengan keuntungan yang diperoleh yaitu sebesar Rp. $7.927.171$. Namun ini bukan merupakan solusi yang valid karena produksi roti isi harus harus berjumlah bulat, sehingga dibutuhkan solusi *integer*. Jika variabel keputusan masing-masing dibulatkan ke bawah, maka akan ada bahan baku yang bersisa banyak. Sedangkan jika variabel keputusan masing-masing dibulatkan ke atas, maka solusi akan melanggar batas kendala. Oleh karena itu untuk menemukan solusi bilangan bulat digunakanlah metode *branch and bound*. Sebelumnya pada penyelesaian menggunakan metode simpleks didapat hasil sebagai berikut.

$Z \ = 7.927.171$
$x_1 = 733{,}89$
$x_2 = 470{,}59$
$x_3 = 470{,}59$
$x_4 = 466{,}67$
$x_5 = 99{,}16$

Iterasi 1

Variabel dengan nilai pecahan terbesar dipilih untuk dijadikan percabangan ke dalam sub masalah. Nilai pecahan terbesar adalah $x_1 = 733{,}89$ maka solusi simpleks akan dicabangkan menjadi sub masalah 1 dengan tambahan kendala $x_1 \geq 734$ dan sub masalah 2 dengan tambahan kendala $x_1 \leq 733$. Solusi fungsi tujuan pada penyelesaian sebelumnya dijadikan sebagai batas atas dan solusi fungsi tujuan yang variabel keputusannya dilakukan pembulatan ke bawah dijadikan sebagai batas bawah.

Batas atas = $7.927.171$
$Z = 4.000\, x_1 + 3.500 x_2 + 3.500 x_3 + 3.000 x_4 + 3.000 x_5$
Pembulatan ke bawah:
$x_1 = 733$
$x_2 = 470$
$x_3 = 470$
$x_4 = 466$
$x_5 = 99$
$Z = 4.000\ (733) + 3.500\ (470) + 3.500\ (470) + 3.000\ (466) + 3.000\ (99)$
$Z = 7.917.000$
Batas bawah = $7.917.000$

Sub Masalah 1
Fungsi tujuan memaksimalkan keuntungan:
$Z = 4.000\,x_1 + 3.500x_2 + 3.500x_3 + 3.000x_4 + 3.000x_5$
Dengan kendala:

$$28{,}57x_1 + 28{,}57x_2 + 28{,}57x_3 + 28{,}57x_4 + 28{,}57x_5 \leq 65.000$$
$$14{,}28x_1 + 14{,}28x_2 + 14{,}28x_3 + 14{,}28x_4 + 14{,}28x_5 \leq 32.000$$
$$10{,}85x_1 + 10{,}85x_2 + 10{,}85x_3 + 10{,}85x_4 + 10{,}85x_5 \leq 24.700$$
$$0{,}35x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}35x_3 + 0{,}35x_4 + 0{,}35x_5 \leq 1.000$$
$$15x_1 + 10x_5 \leq 12.000$$
$$17x_2 \leq 8.000$$
$$17x_3 \leq 8.000$$
$$15x_4 \leq 7.000$$
$$7x_5 \leq 4.000$$
$$x_1 \geq 734$$

Diperoleh solusi dari sub masalah 1:
$Z = 7.927.118$
$x_1 = 734$
$x_2 = 470{,}59$
$x_3 = 470{,}59$
$x_4 = 466{,}67$
$x_5 = 99$

Sub Masalah 2
Fungsi tujuan memaksimalkan keuntungan:
$Z = 4.000\,x_1 + 3.500x_2 + 3.500x_3 + 3.000x_4 + 3.000x_5$
Dengan kendala:

$$28{,}57x_1 + 28{,}57x_2 + 28{,}57x_3 + 28{,}57x_4 + 28{,}57x_5 \leq 65.000$$
$$14{,}28x_1 + 14{,}28x_2 + 14{,}28x_3 + 14{,}28x_4 + 14{,}28x_5 \leq 32.000$$
$$10{,}85x_1 + 10{,}85x_2 + 10{,}85x_3 + 10{,}85x_4 + 10{,}85x_5 \leq 24.700$$
$$0{,}35x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}35x_3 + 0{,}35x_4 + 0{,}35x_5 \leq 1.000$$
$$15x_1 + 10x_5 \leq 12.000$$
$$17x_2 \leq 8.000$$
$$17x_3 \leq 8.000$$
$$15x_4 \leq 7.000$$
$$7x_5 \leq 4.000$$
$$x_1 \leq 733$$

Diperoleh solusi dari sub masalah 2:
$Z = 7.926.278$
$x_1 = 733$
$x_2 = 470{,}59$
$x_3 = 470{,}59$
$x_4 = 466{,}67$
$x_5 = 100{,}05$

Selanjutnya setiap pecabangan yang memiliki solusi akan dicabangkan hingga iterasi optimal. Pada kasus ini, hasil optimal diperoleh pada iterasi 11.

Iterasi 11 (Optimal)
Batas atas = 7.924.000
$Z = 4.000\ x_1 + 3.500x_2 + 3.500x_3 + 3.000x_4 + 3.000x_5$
Pembulatan ke bawah
$x_1 = 732$
$x_2 = 470$
$x_3 = 470$
$x_4 = 466$
$x_5 = 102$
$Z = 4.000\ (732) + 3.500\ (470) + 3.500\ (470) + 3.000\ (466) + 3.000\ (102)$
$Z = 7.922.000$
Batas bawah = 7.922.000

Sub Masalah 21
Fungsi tujuan memaksimalkan keuntungan:
$Z = 4.000\ x_1 + 3.500x_2 + 3.500x_3 + 3.000x_4 + 3.000x_5$
Dengan kendala:

$$\begin{aligned}
&28{,}57x_1 + 28{,}57x_2 + 28{,}57x_3 + 28{,}57x_4 + 28{,}57x_5 \leq 65.000\\
&14{,}28x_1 + 14{,}28x_2 + 14{,}28x_3 + 14{,}28x_4 + 14{,}28x_5 \leq 32.000\\
&10{,}85x_1 + 10{,}85x_2 + 10{,}85x_3 + 10{,}85x_4 + 10{,}85x_5 \leq 24.700\\
&0{,}35x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}35x_3 + 0{,}35x_4 + 0{,}35x_5 \leq 1.000\\
&15x_1 + 10x_5 \leq 12.000\\
&17x_2 \leq 8.000\\
&17x_3 \leq 8.000\\
&15x_4 \leq 7.000\\
&7x_5 \leq 4.000\\
&x_1 \leq 733\\
&x_2 \leq 470\\
&x_1 \leq 732\\
&x_3 \leq 470\\
&x_1 \geq 732\\
&x_4 \geq 467
\end{aligned}$$

Tidak ada solusi fisibel dari sub masalah 21, dikarenakan solusi melanggar batas kendala.

Sub Masalah 22
Fungsi tujuan memaksimalkan keuntungan:
$Z = 4.000\ x_1 + 3.500x_2 + 3.500x_3 + 3.000x_4 + 3.000x_5$
Dengan kendala:

$$\begin{aligned}
&28{,}57x_1 + 28{,}57x_2 + 28{,}57x_3 + 28{,}57x_4 + 28{,}57x_5 \leq 65.000\\
&14{,}28x_1 + 14{,}28x_2 + 14{,}28x_3 + 14{,}28x_4 + 14{,}28x_5 \leq 32.000\\
&10{,}85x_1 + 10{,}85x_2 + 10{,}85x_3 + 10{,}85x_4 + 10{,}85x_5 \leq 24.700\\
&0{,}35x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}35x_3 + 0{,}35x_4 + 0{,}35x_5 \leq 1.000\\
&15x_1 + 10x_5 \leq 12.000\\
&17x_2 \leq 8.000\\
&17x_3 \leq 8.000\\
&15x_4 \leq 7.000\\
&7x_5 \leq 4.000\\
&x_1 \leq 733
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &\leq 470 \\
x_1 &\leq 732 \\
x_3 &\leq 470 \\
x_1 &\geq 732 \\
x_4 &\leq 466
\end{aligned}
$$

Diperoleh solusi dari sub masalah 22:

$Z \;= 7.922.000$
$x_1 = 732$
$x_2 = 470$
$x_3 = 470$
$x_4 = 466$
$x_5 = 102$

Solusi ini merupakan solusi optimal terbaik karena diperoleh solusi fisibel dengan semua variable keputusan berbentuk bilangan bulat. Fungsi tujuan yang diperoleh merupakan solusi paling maksimal dari semua hasil iterasi metode *branch and bound* pada penyelesaian kasus ini, dan tidak melanggar batas kendala yang tersedia.

Sub masalah 20 masih dapat dicabangkan kembali dan iterasi dilanjutkan sampai selesai. Berdasarkan perhitungan menggunakan bantuan *software QM*, solusi yang dihasilkan dapat dilihat pada Gambar 2.

Integer & Mixed Integer Programming Results

(untitled) Solution

Variable	Type	Value
X1	Integer	732
X2	Integer	470
X3	Integer	470
X4	Integer	466
X5	Integer	102
Solution value		7922000

Gambar 2. Output *Software QM* Metode *Branch and Bound*

Berikut merupakan solusi optimal terbaik yang diperoleh pada penyelesaian metode *branch and bound*.

$Z \;= 7.922.000$
$x_1 = 732$
$x_2 = 470$
$x_3 = 470$
$x_4 = 466$
$x_5 = 102$

Sehingga banyaknya roti isi yang optimal dalam satu bulan adalah 732 kemasan roti rasa coklat, 470 kemasan roti rasa kacang hijau, 470 kemasan roti rasa kacang merah, 466 kemasan roti rasa tiramisu, dan 102 kemasan roti rasa melon coklat dengan keuntungan yang diperoleh yaitu sebesar Rp. 7.922.000. Melihat pembahasan sebelumnya, perhitungan menggunakan metode simpleks diperoleh bahwa pada roti rasa coklat jumlah produksinya adalah 733,89 kemasan dan roti rasa melon coklat jumlah produksinya hanya 99,16 kemasan. Sedangkan hasil perhitungan *branch and bound* jumlah produksi roti rasa coklat menjadi 732 kemasan dan roti rasa melon coklat menjadi 102 kemasan. Hal ini membuktikan bahwa hasil metode simpleks tidak dapat dilakukan pembulatan secara langsung baik pembulatan ke bawah ataupun pembulatan ke atas untuk menemukan solusi *integer* yang paling optimal.

Perbandingan data awal dengan data hasil perhitungan *branch and bound* jumlah produksi dan keuntungan yang diperoleh dalam penjualan roti isi selama satu bulan dapat dilihat pada Tabel 9 berikut:

Tabel 9. Tabel Perbandingan Data

No.	Jenis Rasa Roti Isi	Data Awal		Hasil Metode *Branch and Bound*	
		Jumlah Produksi (Kemasan)	Keuntungan (Rp)	Jumlah Produksi (Kemasan)	Keuntungan (Rp)
1	Coklat	450	1.800.000	732	2.928.000
2	Kacang Hijau	450	1.575.000	470	1.645.000
3	Kacang Merah	450	1.575.000	470	1.645.000
4	Tiramisu	390	1.170.000	466	1.398.000
5	Melon Coklat	360	1.080.000	102	306.000
	Jumlah	2.100	7.200.000	2.240	7.922.000

Tabel di atas menjelaskan bahwa berdasarkan data awal dari France Bakery Binjai, jumlah roti isi yang diproduksi selama satu bulan adalah 450 kemasan roti rasa coklat dengan keuntungan yang diperoleh sebesar Rp. 1.800.000. Untuk roti rasa kacang hijau diproduksi sebanyak 450 kemasan per bulan, keuntungannya yaitu Rp. 1.575.000. Roti rasa kacang merah diproduksi sebanyak 450 kemasan per bulan, keuntungannya yaitu Rp. 1.575.000. Roti rasa tiramisu diproduksi sebanyak 390 kemasan per bulan, keuntungannya yaitu Rp. 1.170.000. Sedangkan roti rasa melon coklat diproduksi sebanyak 360 kemasan per bulan, keuntungannya yaitu Rp. 1.080.000. Sehingga jumlah roti isi yang diproduksi oleh France Bakery Binjai selama satu bulan adalah 2.100 kemasan roti isi, dengan keuntungan yang diperoleh dari hasil penjualan roti isi selama satu bulan adalah Rp. 7.200.000.

Sedangkan berdasarkan data yang telah dianalisis menggunakan metode *branch and bound*, banyaknya roti isi yang diproduksi selama satu bulan adalah 732 kemasan roti rasa coklat dengan keuntungan yang diperoleh sebesar Rp. 2.928.000. Untuk roti rasa kacang hijau diproduksi sebanyak 470 kemasan per bulan, keuntungannya yaitu Rp. 1.645.000. Roti rasa kacang merah diproduksi sebanyak 470 kemasan per bulan, keuntungannya yaitu Rp. 1.645.000. Roti rasa tiramisu diproduksi sebanyak 466 kemasan per bulan, keuntungannya yaitu Rp. 1.398.000. Sedangkan roti rasa melon coklat diproduksi sebanyak 102 kemasan per bulan, keuntungannya yaitu Rp. 306.000. Sehingga jumlah roti isi yang diproduksi oleh France Bakery Binjai selama satu bulan adalah 2.240 kemasan roti isi, dengan keuntungan yang diperoleh dari hasil penjualan roti isi selama satu bulan adalah Rp. 7.922.000.

KESIMPULAN

Berdasarkan pemaparan dan perhitungan yang dimuat pada penjelasan di atas, maka dapat diambil kesimpulan setelah melakukan perhitungan menggunakan *branch and bound*, diperoleh hasil perhitungannya sesuai dengan menggunakan *software QM*. Berdasarkan hasil pengolahan data menggunakan *branch and bound* dan dengan bantuan *software QM*, menunjukkan bahwa jumlah optimal terbaik roti isi dalam satu bulan adalah 732 kemasan roti rasa coklat, 470 kemasan roti rasa kacang hijau, 470 kemasan roti rasa kacang merah, 466 kemasan roti rasa tiramisu, dan 102 kemasan roti rasa melon coklat dengan keuntungan yang diperoleh yaitu sebesar Rp. 7.922.000.Keuntungan data awal perusahaan adalah Rp. 7.200.000. Dengan menggunakan metode *branch and bound* keuntungan menjadi Rp. 7.922.000, keuntungan naik 10,03% atau sebesar Rp. 722.000 dari keuntungan data awal selama satu bulan. Perbedaan keuntungan dari data awal dengan data yang diperoleh dari hasil perhitungan menggunakan metode *branch and bound* tidak terlalu signifikan. Hal ini dikarekanan adanya asumsi harga bahan baku dan biaya produksi lainnya dianggap konstan. Untuk mendapatkan hasil yang lebih baik, sebaiknya harga bahan baku dan biaya produksi lainnya juga diperhitungkan.

DAFTAR PUSTAKA

Aprilyanti, S., Pratiwi, I., & Basuki, M. (2018). Optimasi Keuntungan Produksi Kemplang Panggang Menggunakan Linear Programming Melalui Metode Simpleks. *Seminar Dan Konferensi Nasional IDEC*, 7–8.

Basriati, S. (2018). Integer Linear Programming Dengan Pendekatan Metode Cutting Plane dan Branch and Bound Untuk Optimasi Produksi Tahu. *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika*, *4*(2), 95–104.

Ibrahim, A., Amelia, E., Akbar, N., Kholis, N., Utami, S. A., & Nofrianto. (2021). *Pengantar Ekonomi Islam*. Departemen Ekonomi dan Keuangan Syariah - Bank Ind.

Nuryana, I. (2019). Optimasi Jumlah Produksi pada UMKM Raina Kersen dengan Metode Linear Programming. *Jurnal Media Teknologi*, *6*(1), 67–90.

Oyekan, E. A., & Temisan, G. O. (2019). Application of Linear Programming to Profit Maximization (A Case Study of Johnsons Nig. Ltd). *Journal of Advances in Mathematical & Computational Sciences*, *7*(1), 11–20. https://doi.org/10.22624/aims/maths/v7n1p2

Purba, S., & Ahyaningsih, F. (2020). Integer Programming Dengan Metode Branch and Bound Dalam Optimasi Jumlah Produksi Setiap Jenis Roti Pada Pt. Arma Anugerah Abadi. *Karismatika*, *6*(3), 20–29.