ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.988,519.65
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-3-263-279

Поступила в редакцию 22.02.2022
Received 22.02.2022

М. В. Игнатенко[1], Л. А. Янович[2]

[1]Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь
[2]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

К ТЕОРИИ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ НА МНОЖЕСТВАХ МАТРИЦ С АДАМАРОВЫМ УМНОЖЕНИЕМ

Аннотация. Работа посвящена проблеме интерполяции функций, заданных на множествах матриц с умножением в смысле Адамара, и содержит некоторые известные сведения об умножении матриц по Адамару и его свойствах. Для функций, заданных на множествах квадратных и прямоугольных матриц, приведены различные интерполяционные многочлены лагранжева типа, содержащие как операцию матричного умножения в смысле Адамара, так и обычное произведение матриц. В случае аналитических функций, определенных на множествах квадратных матриц с адамаровым умножением, рассмотрены некоторые аналоги тригонометрических интерполяционных формул лагранжева типа. Приведены матричные аналоги сплайнов и интеграла Коши на множествах матриц с умножением по Адамару. Рассмотрено некоторое его применение в теории интерполирования. Доказаны теоремы о сходимости отдельных интерполяционных процессов Лагранжа для аналитических функций, заданных на множестве матриц с умножением в смысле Адамара. Полученные результаты основаны на применении некоторых известных положений теории интерполирования скалярных функций. Изложение материала иллюстрируется рядом примеров.

Ключевые слова: функция от матриц, умножение матриц по Адамару, интерполирование лагранжева типа, аналитическая функция, сплайн-интерполирование, матричный интеграл Коши

Для цитирования. Игнатенко, М. В. К вопросу интерполирования функций на множествах матриц с адамаровым умножением / М. В. Игнатенко, Л. А. Янович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2022. – Т. 58, № 3. – С. 263–279. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-3-263-279

Marina V. Ignatenko[1], Leonid A. Yanovich[2]

[1]Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus
[2]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

ON THE THEORY OF INTERPOLATION OF FUNCTIONS ON SETS OF MATRICES WITH THE HADAMARD MULTIPLICATION

Abstract. This article is devoted to the problem of interpolation of functions defined on sets of matrices with multiplication in the sense of Hadamard and is mainly an overview. It contains some known information about the Hadamard matrix multiplication and its properties. For functions defined on sets of square and rectangular matrices, various interpolation polynomials of the Lagrange type, containing both the operation of matrix multiplication in the Hadamard sense and the usual matrix product, are given. In the case of analytic functions defined on sets of square matrices with the Hadamard multiplication, some analogues of the Lagrange type trigonometric interpolation formulas are considered. Matrix analogues of splines and the Cauchy integral are given on sets of matrices with the Hadamard multiplication. Some of its applications in the theory of interpolation are considered. Theorems on the convergence of some Lagrange interpolation processes for analytic functions defined on a set of matrices with multiplication in the Hadamard sense are proved. The results obtained are based on the application of some well-known provisions of the theory of interpolation of scalar functions. Data presentation is illustrated by a number of examples.

Keywords: function of matrices, Hadamard matrix multiplication, Lagrangian type interpolation, analytic function, spline interpolation, Cauchy matrix integral

For citation. Ignatenko M. V., Yanovich L. A. On the theory of interpolation of functions on sets of matrices with the Hadamard multiplication. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2022, vol. 58, no. 3, pp. 263–279 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2022-58-3-263-279

Введение. Функции одной и многих матричных переменных являются удобным аппаратом при решении многих задач непосредственно в математике и ее приложениях. Наряду с обычным умножением применяется как общепринятая операция матричного умножения, так и другие правила умножения матриц (по Йордану, Адамару, Фробениусу и др.) [1–4]. Этот подход является эффективным и при построении приближенных методов интерполяционного типа для функций от матриц [5–10]. Целью данной статьи является применение умножения по Адамару в рассматриваемых задачах теории интерполирования матриц.

Предварительные сведения об умножении матриц по Адамару и некоторых его свойствах. Пусть $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ – матрицы одинаковой размерности. Матрицу $C = A \cdot B$ той же размерности с элементами $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$ называют произведением Адамара (адамаровым, или произведением Шура) матриц A и B, а символ точки «·» означает операцию умножения в смысле Адамара.

Отметим отдельные свойства адамарова умножения матриц [1]. Оно коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно по отношению к сложению матриц. К тому же справедливы следующие очевидные равенства: для квадратной матрицы $A = [a_{ij}]$ и единичной матрицы I той же размерности имеем $A \cdot I = I \cdot A = \operatorname{diag}[a_{ii}]$, а для матриц A и J одинаковой размерности, где J – матрица, все элементы которой единицы, справедливо равенство $A \cdot J = J \cdot A = A$, т. е. роль единичной матрицы для такого правила умножения выполняет матрица J, и ее называют единичной матрицей по Адамару.

По определению n-я степень по Адамару матрицы $A = [a_{ij}]$, обозначаемая как $\overset{\bullet}{A^n}$, есть матрица $\overset{\bullet}{A^n} = \left[a_{ij}^n \right]$; $\overset{\bullet}{A^n} = J$ для $n = 0$. Матричный многочлен вида

$$P_n(A) = b_0 J + b_1 A + b_2 \overset{\bullet}{A^2} + \ldots + b_n \overset{\bullet}{A^n}$$

с числовыми коэффициентами b_k является матрицей $P_n(A) = \left[\sum\limits_{k=0}^{n} b_k a_{ij}^k \right]$, а матричный многочлен n-й степени $P_n(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} B_k \cdot \overset{\bullet}{A^k}$ с матричными коэффициентами $B_k = \left[b_{ij}^{(k)} \right]$ есть матрица $P_n(A) = \left[\sum\limits_{k=0}^{n} b_{ij}^{(k)} a_{ij}^k \right]$.

Функция $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ от матрицы $A = [a_{ij}]$ аналитическая в окрестности каждого элемента этой матрицы определяется на множестве матриц с адамаровым умножением по формуле $f(A) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \overset{\bullet}{A^k}$ и является соответственно матрицей $f(A) = [f(a_{ij})]$.

Обратную по Адамару матрицу для матрицы $A = [a_{ij}]$ с отличными от нуля элементами a_{ij} обозначим через $\overset{\bullet}{A^{-1}} = \left[\dfrac{1}{a_{ij}} \right]$. Очевидно, что $\overset{\bullet}{A^{-1}} \cdot A = A \cdot \overset{\bullet}{A^{-1}} = J$. Если матрица A содержит хотя бы один нулевой элемент, то обратной по Адамару матрицы для нее не существует.

Интерполирование функций на множестве квадратных матриц с адамаровым умножением. Из правила умножения матриц по Адамару следует справедливость равенства $A \cdot J = J \cdot A = A$, где J – матрица одинакового с A размера, все элементы которой равны единице. Здесь матрица J играет роль единичной матрицы.

При построении интерполяционных формул с использованием как обычного, так и адамарова умножения матриц, полезно ввести еще один аналог обратной матрицы.

Пусть $A = [a_{ij}]$ – квадратная матрица и $a_{ij} \neq 0$. Через $A^{(-1)}$ обозначим матрицу, для которой $A \cdot A^{(-1)} = A^{(-1)} \cdot A = I$, где I – единичная матрица в обычном понимании той же размерности, что и A. Такой матрицей будет $A^{(-1)} = \operatorname{diag}\left[\frac{1}{a_{ii}}\right]$. При этом понимании обратной матрицы для $A = [a_{ij}]$ следует, что одну и ту же обратную матрицу имеет целый класс матриц, т. е. все матрицы, которые отличаются от A элементами вне главной диагонали.

Рассмотрим сначала формулы Лагранжа для линейной и квадратичной интерполяции, использующие умножение матриц только по Адамару. Пусть узлы интерполирования $A_0 = \left[a_{ij}^0\right]$ и $A_1 = \left[a_{ij}^1\right]$ таковы, что все элементы матрицы $A_0 - A_1 = \left[a_{ij}^0 - a_{ij}^1\right]$ отличны от нуля. Тогда для формулы

$$L_{01}(A) = F(A_0)\cdot(A_0 - A_1)^{\overset{\bullet}{-1}}\cdot(A - A_1) + F(A_1)\cdot(A_1 - A_0)^{\overset{\bullet}{-1}}\cdot(A - A_0) \tag{1}$$

или, что то же самое, для формулы

$$L_{01}(A) = F(A_0)\cdot\left[\frac{a_{ij} - a_{ij}^1}{a_{ij}^0 - a_{ij}^1}\right] + F(A_1)\cdot\left[\frac{a_{ij} - a_{ij}^0}{a_{ij}^1 - a_{ij}^0}\right],$$

где $A = [a_{ij}]$ – текущая матричная переменная, а точка «·» означает операцию умножения по Адамару, выполняются интерполяционные условия $L_{01}(A_i) = F(A_i)$ $(i = 0,1)$.

Формулой квадратичной интерполяции относительно узлов $A_0 = \left[a_{ij}^0\right]$, $A_1 = \left[a_{ij}^1\right]$ и $A_2 = \left[a_{ij}^2\right]$ таких, что у матриц $A_0 - A_1 = \left[a_{ij}^0 - a_{ij}^1\right]$, $A_0 - A_2 = \left[a_{ij}^0 - a_{ij}^2\right]$ и $A_1 - A_2 = \left[a_{ij}^1 - a_{ij}^2\right]$ все элементы отличны от нуля, будет матричный многочлен вида

$$L_{02}(A) = F(A_0)\cdot\left[\frac{\left(a_{ij} - a_{ij}^1\right)\left(a_{ij} - a_{ij}^2\right)}{\left(a_{ij}^0 - a_{ij}^1\right)\left(a_{ij}^0 - a_{ij}^2\right)}\right] + F(A_1)\cdot\left[\frac{\left(a_{ij} - a_{ij}^0\right)\left(a_{ij} - a_{ij}^2\right)}{\left(a_{ij}^1 - a_{ij}^0\right)\left(a_{ij}^1 - a_{ij}^2\right)}\right] + F(A_2)\cdot\left[\frac{\left(a_{ij} - a_{ij}^0\right)\left(a_{ij} - a_{ij}^1\right)}{\left(a_{ij}^2 - a_{ij}^0\right)\left(a_{ij}^2 - a_{ij}^1\right)}\right],$$

для которого выполняются условия $L_{02}(A_i) = F(A_i)$ $(i = 0,1,2)$.

Рассмотрим далее аналогичные формулы, построенные с использованием как обычного, так и адамарова умножения.

Пусть квадратная матрица $A_1 - A_0 = \left[a_{ij}^1 - a_{ij}^0\right]$ имеет отличные от нуля диагональные элементы. Тогда в линейном случае такой формулой будет

$$L_{01}(A) = F(A_0)\left\{(A_0 - A_1)^{(-1)}\cdot(A - A_1)\right\} + F(A_1)\left\{(A_1 - A_0)^{(-1)}\cdot(A - A_0)\right\}$$

или в другой записи

$$L_{01}(A) = F(A_0)\operatorname{diag}\left[\frac{a_{ii} - a_{ii}^1}{a_{ii}^0 - a_{ii}^1}\right] + F(A_1)\operatorname{diag}\left[\frac{a_{ii} - a_{ii}^0}{a_{ii}^1 - a_{ii}^0}\right].$$

Здесь также выполняются равенства $L_{01}(A_0) = F(A_0)$ и $L_{01}(A_1) = F(A_1)$.

Для квадратичного интерполирования при аналогичных ограничениях на узлы A_0, A_1 и A_2, что и в предыдущем линейном случае, имеет место формула

$$L_{02}(A) = F(A_0)\operatorname{diag}\left[\frac{\left(a_{ii} - a_{ii}^1\right)\left(a_{ii} - a_{ii}^2\right)}{\left(a_{ii}^0 - a_{ii}^1\right)\left(a_{ii}^0 - a_{ii}^2\right)}\right] +$$

$$+F(A_1)\operatorname{diag}\left[\frac{\left(a_{ii} - a_{ii}^0\right)\left(a_{ii} - a_{ii}^2\right)}{\left(a_{ii}^1 - a_{ii}^0\right)\left(a_{ii}^1 - a_{ii}^2\right)}\right] + F(A_2)\operatorname{diag}\left[\frac{\left(a_{ii} - a_{ii}^0\right)\left(a_{ii} - a_{ii}^1\right)}{\left(a_{ii}^2 - a_{ii}^0\right)\left(a_{ii}^2 - a_{ii}^1\right)}\right].$$

Далее перейдем к рассмотрению интерполяционных многочленов Лагранжа произвольной степени. Обозначим

$$z_k(A) = (A - A_0)\cdot\ldots\cdot(A - A_{k-1})\cdot(A - A_{k+1})\cdot\ldots\cdot(A - A_n) \quad (k = 0,1,\ldots,n).$$

В частном случае при $n = 2$ имеем

$$z_0(A) = (A - A_1)\cdot(A - A_2), \quad z_1(A) = (A - A_0)\cdot(A - A_2), \quad z_2(A) = (A - A_0)\cdot(A - A_1).$$

Предположим, что матрицы $z_k(A_k)$ $(k = 0,1,...,n)$ не имеют нулевых элементов, тогда интерполяционный многочлен n-й степени будет иметь вид

$$L_{0n}(A) = \sum_{k=0}^{n} F(A_k)\cdot \dot{z}_k^{-1}(A_k)\cdot z_k(A) = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{f_{ij}^{k}\left(a_{ij} - a_{ij}^{0}\right)...\left(a_{ij} - a_{ij}^{k-1}\right)\left(a_{ij} - a_{ij}^{k+1}\right)...\left(a_{ij} - a_{ij}^{n}\right)}{\left(a_{ij}^{k} - a_{ij}^{0}\right)...\left(a_{ij}^{k} - a_{ij}^{k-1}\right)\left(a_{ij}^{k} - a_{ij}^{k+1}\right)...\left(a_{ij}^{k} - a_{ij}^{n}\right)}\right], \tag{2}$$

где f_{ij}^{k} – элементы матрицы $F(A_k)$.

Очевидно, что равенства $L_{0n}(A_i) = F(A_i)$ для $i = 0,1,...,n$ выполняются.

Пусть α_k $(k = 0,1,...,n)$ – попарно различные числа. В качестве узлов интерполирования возьмем матрицы $A_k = \alpha_k J$, где J – матрица, все элементы которой равны единице. Для этих узлов интерполяционный матричный многочлен n-й степени вида (2) задается формулой

$$L_{0n}(A) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(A - \alpha_0 J)\cdot ...\cdot(A - \alpha_{k-1}J)\cdot(A - \alpha_{k+1}J)\cdot ...\cdot(A - \alpha_n J)}{(\alpha_k - \alpha_0)...(\alpha_k - \alpha_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k+1})...(\alpha_k - \alpha_n)}\cdot F(\alpha_k J).$$

Выполнение интерполяционных условий очевидно.

Приведем еще одну формулу вида (2) с узлами интерполирования $A_k = \lambda_k J$, где λ_k – различные и отличные от нуля собственные значения квадратной матрицы A, которая имеет вид

$$L_n(A) = \sum_{k=0}^{n} l_k(A)\cdot l_k^{(-1)}(A_k)\cdot F(A_k),$$

$$l_k(A) = (A - \lambda_0 J)\cdot(A - \lambda_1 J)\cdot ...\cdot(A - \lambda_{k-1}J)\cdot(A - \lambda_{k+1}J)\cdot ...\cdot(A - \lambda_n J),$$

а также следующую интерполяционную формулу для функций $F(A,B)$ двух матричных переменных A и B:

$$\begin{gathered} L_{11}(A,B) = F(A_0,B_0) + [F(A_1,B_0) - F(A_0,B_0)]\cdot[(A_1 - A_0)^{(-1)}\cdot(A - A_0)] + \\ +[F(A_0,B_1) - F(A_0,B_0)]\cdot\left[(B_1 - B_0)^{(-1)}\cdot(B - B_0)\right] + [F(A_1,B_1) - F(A_0,B_1) - F(A_1,B_0) + F(A_0,B_0)]\cdot \\ \cdot\left[(A_1 - A_0)^{(-1)}\cdot(A - A_0)\cdot(B_1 - B_0)^{(-1)}\cdot(B - B_0)\right]. \end{gathered} \tag{3}$$

Для формулы (3) выполняются равенства

$$L_{11}(A_0,B_0) = F(A_0,B_0), \quad L_{11}(A_0,B_1) = F(A_0,B_1),$$
$$L_{11}(A_1,B_0) = F(A_1,B_0), \quad L_{11}(A_1,B_1) = F(A_1,B_1).$$

Приведем примеры на построение алгебраических матричных многочленов первой степени для конкретных функций по формулам, содержащим обычное умножение матриц и умножение по Адамару, а также умножение матриц только по Адамару.

П р и м е р 1. Покажем, что для функции $F(A) = QA + AG$, где переменная $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ – произвольная матрица, обратная матрица $A^{(-1)} = \mathrm{diag}\left[\dfrac{1}{a_{ii}}\right]$, коэффициенты $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{bmatrix}$ и $G = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}$, а узлы $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0\end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1\end{bmatrix}$, интерполяционный многочлен с обычным и адамаровым умножением

$$L_{01}(A) = F(A_0) + [F(A_1) - F(A_0)]\left[(A_1 - A_0)^{(-1)}\cdot(A - A_0)\right]$$

примет вид

$$L_{01}(A) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 10 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3}a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22}\end{bmatrix}.$$

Действительно, поскольку $A_1 - A_0 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{diag}\{3, 1\}$, то $(A_1 - A_0)^{-1} = \operatorname{diag}\left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$. Заметим, что в данном случае матрицы $(A_1 - A_0)^{(-1)}$ и $(A_1 - A_0)^{-1}$ совпадают. Далее

$$F(A_0) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}, \quad F(A_1) = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 22 & 10 \end{bmatrix}, \quad F(A_1) - F(A_0) = \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$L_{01}(A) = F(A_0) - [F(A_1) - F(A_0)]\left\{(A_1 - A_0)^{(-1)} \cdot A_0\right\} + [F(A_1) - F(A_0)]\left\{(A_1 - A_0)^{(-1)} \cdot A\right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \cdot 0 + \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix},$$

или $L_{01}(A) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9a_{11} & 5a_{22} \\ 10a_{11} & 5a_{22} \end{bmatrix}$.

При $A = A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ получим, что $L_{01}(A_0) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 5 \end{bmatrix} = F(A_0)$, а для $A = A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ справедливо соотношение

$$L_{01}(A_1) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 12 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 22 & 10 \end{bmatrix} = F(A_1).$$

П р и м е р 2. Проверим, что интерполяционный многочлен

$$L_{01}(A) = F(A_0) + [F(A_1) - F(A_0)] \cdot (A_1 - A_0)^{\overset{\bullet}{-1}} \cdot (A - A_0)$$

на множестве матриц с умножением по Адамару с узлами $A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ и $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ для функции $F(A) = A^2$ имеет вид

$$L_{01}(A) = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 13 \end{bmatrix} \cdot A - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 12 & 30 \end{bmatrix}$$

или, что то же самое,

$$L_{01}(A) = \begin{bmatrix} 7a_{11} & 5a_{12} \\ 9a_{21} & 13a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 12 & 30 \end{bmatrix}.$$

Несложно убедиться, что обратная по Адамару матрица $(A_1 - A_0)^{\overset{\bullet}{-1}}$ существует. Так как $A_1 - A_0 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, то

$$(A_1 - A_0)^{\overset{\bullet}{-1}} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (A_1 - A_0)^{\overset{\bullet}{-1}} \cdot (A_1 - A_0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = J.$$

Поскольку

$$F(A_0) = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}, \quad F(A_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad F(A_1) - F(A_0) = -\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 9 & 13 \end{bmatrix},$$

то имеем

$$[F(A_1) - F(A_0)] \cdot (A_1 - A_0)^{\overset{\bullet}{-1}} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 13 \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$L_{01}(A)=\begin{bmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7 & 5\\ 9 & 13\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}7 & 5\\ 9 & 13\end{bmatrix}\cdot A=\begin{bmatrix}7 & 5\\ 9 & 13\end{bmatrix}\cdot A-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 12 & 30\end{bmatrix},$$

или $L_{01}(A)=\begin{bmatrix}7a_{11} & 5a_{12}\\ 9a_{21} & 13a_{22}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 12 & 30\end{bmatrix}$. Для построенного многочлена справедливы интерполяционные условия

$$L_{01}(A_0)=\begin{bmatrix}7 & 5\\ 9 & 13\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 12 & 30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{bmatrix}=F(A_0),$$

$$L_{01}(A_1)=\begin{bmatrix}7 & 5\\ 9 & 13\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 12 & 30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 6 & 9\end{bmatrix}=F(A_1).$$

Рассмотрим еще несколько формул с умножением матриц по Адамару. Пусть $A=[a_{ij}]$ – квадратная или прямоугольная матрица; J – единичная матрица относительно умножения по Адамару: $A\cdot J=J\cdot A=A$. Пусть узлы $A_0=\left[a_{ij}^0\right]$ и $A_1=\left[a_{ij}^1\right]$ таковы, что элементы матрицы $A_1-A_0=\left[a_{ij}^1-a_{ij}^0\right]$ отличны от нуля. Тогда также справедлива интерполяционная формула с умножением матриц только по Адамару

$$L_{01}(A)=F(A_0)\cdot\left[\frac{a_{ij}-a_{ij}^1}{a_{ij}^0-a_{ij}^1}\right]+F(A_1)\cdot\left[\frac{a_{ij}-a_{ij}^0}{a_{ij}^1-a_{ij}^0}\right],$$

а ее ньютоновские варианты имеют вид

$$L_{01}(A)=F(A_0)+[F(A_1)-F(A_0)]\cdot\left[\frac{a_{ij}-a_{ij}^0}{a_{ij}^1-a_{ij}^0}\right],$$

$$L_{01}(A)=F(A_0)+[F(A_1)-F(A_0)]\cdot(A_1-A_0)^{\overset{\bullet}{-1}}\cdot(A_1-A_0).$$

На множестве квадратных матриц справедлива формула с обычным умножением и умножением матриц по Адамару следующего вида:

$$\tilde{L}_{01}(A)=F(A_0)\left\{(A_0-A_1)^{-1}\cdot(A-A_1)\right\}+F(A_1)\left\{(A_1-A_0)^{-1}\cdot(A-A_0)\right\},$$

или

$$\tilde{L}_{01}(A)=F(A_0)+[F(A_1)-F(A_0)]\left\{(A_1-A_0)^{-1}\cdot(A-A_0)\right\}.$$

Одной из интерполяционных формул для функций матричных переменных с обычным и адамаровым умножением в случае трех узлов интерполирования A_0, A_1 и A_2 для функции $f(A)$ является матричный многочлен второй степени

$$\begin{aligned}L_2(A)=&f(A_0)(A-A_1)\cdot(A_0-A_1)^{(-1)}\cdot(A-A_2)\cdot(A_0-A_2)^{(-1)}+\\&+f(A_1)(A-A_0)\cdot(A_1-A_0)^{(-1)}\cdot(A-A_2)\cdot(A_1-A_2)^{(-1)}+\\&+f(A_2)(A-A_0)\cdot(A_2-A_0)^{(-1)}\cdot(A-A_1)\cdot(A_2-A_1)^{(-1)},\end{aligned}$$

где входящие в эту формулу обратные матрицы существуют и, следовательно, $L_2(A_i)=f(A_i)$ для $i=0,1,2$.

Если, например, матричнозначная функция $f(A)$ определена на множестве X квадратных матриц A и известны $f(A_i)$ в шести узлах $A_i\in X$ $(i=0,1,\ldots,5)$, то для интерполяционного матричного многочлена пятой степени

$$L_6(A)=f(A_0)\left[(A-A_1)\cdot(A_0-A_1)^{(-1)}\cdot(A-A_2)\cdot(A_0-A_2)^{(-1)}\right]\cdot$$
$$\cdot\left[(A-A_3)\cdot(A_0-A_3)^{(-1)}\cdot(A-A_4)\cdot(A_0-A_4)^{(-1)}\cdot(A-A_5)\cdot(A_0-A_5)^{(-1)}\right]+$$

$$+f(A_1)\Big[(A-A_0)\cdot(A_1-A_0)^{(-1)}\cdot(A-A_2)\cdot(A_1-A_2)^{(-1)}\Big]\cdot$$
$$\cdot\Big[(A-A_3)\cdot(A_1-A_3)^{(-1)}\cdot(A-A_4)\cdot(A_1-A_4)^{(-1)}\cdot(A-A_5)\cdot(A_1-A_5)^{(-1)}\Big]+$$
$$+f(A_2)\Big[(A-A_0)\cdot(A_2-A_0)^{(-1)}\cdot(A-A_1)\cdot(A_2-A_1)^{(-1)}\Big]\cdot$$
$$\cdot\Big[(A-A_3)\cdot(A_2-A_3)^{(-1)}\cdot(A-A_4)\cdot(A_2-A_4)^{(-1)}\cdot(A-A_5)\cdot(A_2-A_5)^{(-1)}\Big]+$$
$$+f(A_3)\Big[(A-A_0)\cdot(A_3-A_0)^{(-1)}\cdot(A-A_1)\cdot(A_3-A_1)^{(-1)}\Big]\cdot$$
$$\cdot\Big[(A-A_2)\cdot(A_3-A_2)^{(-1)}\cdot(A-A_4)\cdot(A_3-A_4)^{(-1)}\cdot(A-A_5)\cdot(A_3-A_5)^{(-1)}\Big]+$$
$$+f(A_4)\Big[(A-A_0)\cdot(A_4-A_0)^{(-1)}\cdot(A-A_1)\cdot(A_4-A_1)^{(-1)}\Big]\cdot$$
$$\cdot\Big[(A-A_2)\cdot(A_4-A_2)^{(-1)}\cdot(A-A_3)\cdot(A_4-A_3)^{(-1)}\cdot(A-A_5)\cdot(A_4-A_5)^{(-1)}\Big]+$$
$$+f(A_5)\Big[(A-A_0)\cdot(A_5-A_0)^{(-1)}\cdot(A-A_1)\cdot(A_5-A_1)^{(-1)}\Big]\cdot$$
$$\cdot\Big[(A-A_2)\cdot(A_5-A_2)^{(-1)}\cdot(A-A_3)\cdot(A_5-A_3)^{(-1)}\cdot(A-A_4)\cdot(A_5-A_4)^{(-1)}\Big]$$

выполняются интерполяционные равенства $L_6(A_i)=f(A_i)$ $(i=0,1,...,5)$.

Далее перейдем к вопросу интерполирования аналитических функций от матриц.

П р и м е р 3. Пусть

$$f(x)=e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

Тогда для квадратной матрицы второго порядка $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ и $f(A)=e^A$ в случае общепринятого умножения получим

$$f(A)=e^A=I+A+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+...+\frac{A^n}{n!}+...=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}.$$

Заметим, что степени матриц A^k удобнее вычислять по рекуррентному правилу

$$A^k=A^{k-1}A \quad (k=1,2,3,...).$$

Рассмотрим отдельные формулы интерполяции аналитических функций, определенных на множествах квадратных матриц с умножением по Адамару. Так, для случая матриц с адамаровым умножением аналогом тригонометрических интерполяционных формул лагранжева типа будет формула

$$T_n(A)=\sum_{k=0}^{2n}\psi_k(A)\cdot\overset{\bullet}{\psi}{}_k^{-1}(A_k)\cdot F(A_k), \tag{4}$$

где

$$\psi_k(A)=\sin\frac{A-A_0}{2}\cdot...\cdot\sin\frac{A-A_{k-1}}{2}\cdot\sin\frac{A-A_{k+1}}{2}\cdot...\cdot\sin\frac{A-A_{2n}}{2}.$$

Предполагаем здесь, что матрицы $\psi_k(A_k)$ $(k=0,1,...,2n)$ не имеют нулевых элементов. Тогда выполняются условия $\psi_k(A_\nu)\cdot\overset{\bullet}{\psi}{}_k^{-1}(A_k)=\delta_{k\nu}J$, где $\delta_{k\nu}$ – символ Кронекера.

В частном случае, когда $A_k=\alpha_k I$ $(k=0,1,...,2n)$, I – единичная матрица в обычном смысле, формула (4) примет вид

$$T_n(A)=\sum_{k=0}^{2n}\frac{\sin\frac{A-\alpha_0 I}{2}\cdot...\cdot\sin\frac{A-\alpha_{k-1}I}{2}\cdot\sin\frac{A-\alpha_{k+1}I}{2}\cdot...\cdot\sin\frac{A-\alpha_{2n}I}{2}}{\sin\frac{\alpha_k-\alpha_0}{2}...\sin\frac{\alpha_k-\alpha_{k-1}}{2}\sin\frac{\alpha_k-\alpha_{k+1}}{2}...\sin\frac{\alpha_k-\alpha_{2n}}{2}}\cdot F(\alpha_k I).$$

Полагая $n = 1$ в формуле (4), приходим к равенству

$$T_1(A) = F(A_0)\cdot\left[\sin^{(-1)}\frac{A_0 - A_1}{2}\sin^{(-1)}\frac{A_0 - A_2}{2}\right]\cdot\sin\frac{A - A_2}{2}\cdot\sin\frac{A - A_1}{2} +$$
$$+F(A_1)\cdot\left[\sin^{(-1)}\frac{A_1 - A_2}{2}\sin^{(-1)}\frac{A_1 - A_0}{2}\right]\cdot\sin\frac{A - A_0}{2}\cdot\sin\frac{A - A_2}{2} +$$
$$+F(A_2)\cdot\left[\sin^{(-1)}\frac{A_2 - A_1}{2}\sin^{(-1)}\frac{A_2 - A_0}{2}\right]\cdot\sin\frac{A - A_0}{2}\cdot\sin\frac{A - A_1}{2}.$$

Легко проверяется, что

$$T_1(A_0) = F(A_0),\quad T_1(A_1) = F(A_1),\quad T_1(A_2) = F(A_2).$$

Интерполяционные формулы Лагранжа на множествах прямоугольных матриц с адамаровым умножением. Пусть X – множество матриц A размерности $p \times q$ и F – оператор, отображающий X в X. Рассмотренные ранее интерполяционные алгебраические многочлены для функций $F(A)$ на множестве квадратных матриц A с адамаровым умножением остаются точно такого же вида, как и в случае прямоугольных матриц A одинаковой размерности. Приведем далее одну из таких формул.

В качестве узлов интерполирования выберем матрицы $A_k = A_k\left[a_{ij}^{(k)}\right]$ в предположении, что $a_{ij}^{(k)} - a_{ij}^{(\nu)} \neq 0$ $(k,\nu = 0,1,\dots,n;\ 1 \le i \le p,\ 1 \le j \le q)$, и введем обозначение

$$l_k(A) = (A - A_0)\cdot\ldots\cdot(A - A_{k-1})\cdot(A - A_{k+1})\cdot\ldots\cdot(A - A_n).$$

Для матричного многочлена

$$L_n(A) = \sum_{k=0}^{n} l_k(A)\cdot \overset{\bullet}{l}{}_k^{-1}(A_k)\cdot F(A_k) \tag{5}$$

и оператора $F(A)$ выполняются равенства $L_n(A_k) = F(A_k)$ $(k = 0,1,\dots,n)$.

В случае узлов интерполирования $A_k = \alpha_k J$, где α_k $(k = 0,1,\dots,n)$ – попарно различные числа, формула (5) примет вид

$$L_n(A) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(A-\alpha_0 J)\cdot\ldots\cdot(A-\alpha_{k-1}J)\cdot(A-\alpha_{k+1}J)\cdot\ldots\cdot(A-\alpha_n J)}{(\alpha_k-\alpha_0)\ldots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\ldots(\alpha_k-\alpha_n)}\cdot F(\alpha_k J).$$

Несмотря на то, что структура интерполяционных формул на множествах матриц с адамаровым умножением в случаях квадратных и рассмотренных выше прямоугольных матриц совпадает, приведем и в данном разделе также формулы вида (5) с двумя и тремя узлами.

Пусть $A = A[a_{ij}]$ – произвольная матрица из множества X, $A_0 = A_0\left[a_{ij}^{(0)}\right]$ и $A_1 = A_1\left[a_{ij}^{(1)}\right]$ – узлы интерполирования;

$$l_{10}(A) = (A - A_1)\cdot(A_0 - A_1)^{\overset{\bullet}{-1}} = \left[\frac{a_{ij} - a_{ij}^{(1)}}{a_{ij}^{(0)} - a_{ij}^{(1)}}\right],$$

$$l_{11}(A) = (A - A_0)\cdot(A_1 - A_0)^{\overset{\bullet}{-1}} = \left[\frac{a_{ij} - a_{ij}^{(0)}}{a_{ij}^{(1)} - a_{ij}^{(0)}}\right]\quad (i = 1,2,\dots p;\ j = 1,2,\dots,q).$$

Тогда интерполяционная формула (5) для $n = 1$ и данной функции $F(A)$, принимающей в узлах A_0 и A_1 соответственно значения $F(A_0)$ и $F(A_1)$, запишется в виде

$$L_1(A) = F(A_0)\cdot\left[\frac{a_{ij} - a_{ij}^{(1)}}{a_{ij}^{(0)} - a_{ij}^{(1)}}\right] + F(A_1)\cdot\left[\frac{a_{ij} - a_{ij}^{(0)}}{a_{ij}^{(1)} - a_{ij}^{(0)}}\right]. \tag{6}$$

Эта формула инвариантна относительно матричных многочленов $P_1(A)$ вида $P_1(A) = B + C\cdot A$, где B и C – произвольные матрицы из X, A – независимая матричная переменная.

В некоторых случаях удобно использовать, например, формулу (6), записанную в ньютоновском варианте:

$$L_1(A) = F(A_0) + \left(F(A_1) - F(A_0)\right) \cdot \left[\frac{a_{ij} - a_{ij}^{(0)}}{a_{ij}^{(1)} - a_{ij}^{(0)}}\right].$$

Квадратичный матричный многочлен такого класса задается формулой

$$L_2(A) = F(A_0) \cdot l_{20}(A) + F(A_1) \cdot l_{21}(A) + F(A_2) \cdot l_{22}(A),$$

где матрицы $l_{20}(A)$, $l_{21}(A)$ и $l_{22}(A)$ имеют вид

$$l_{20}(A) = \left[\frac{\left(a_{ij} - a_{ij}^{(1)}\right)\left(a_{ij} - a_{ij}^{(2)}\right)}{\left(a_{ij}^{(0)} - a_{ij}^{(1)}\right)\left(a_{ij}^{(0)} - a_{ij}^{(2)}\right)}\right], \quad l_{21}(A) = \left[\frac{\left(a_{ij} - a_{ij}^{(0)}\right)\left(a_{ij} - a_{ij}^{(2)}\right)}{\left(a_{ij}^{(1)} - a_{ij}^{(0)}\right)\left(a_{ij}^{(1)} - a_{ij}^{(2)}\right)}\right],$$

$$l_{22}(A) = \left[\frac{\left(a_{ij} - a_{ij}^{(0)}\right)\left(a_{ij} - a_{ij}^{(1)}\right)}{\left(a_{ij}^{(2)} - a_{ij}^{(0)}\right)\left(a_{ij}^{(2)} - a_{ij}^{(1)}\right)}\right].$$

Рассмотрим далее [5, 10] интерполяционную формулу на множестве функциональных непрерывных на отрезке $[a,b]$ матриц с операцией умножения по Адамару. Пусть $A = A(t)$, узлы $A_0(t)$, $A_1(t)$ – матрицы одинаковой размерности, заданные на отрезке $[a,b]$, а оператор $F(A)$ определен в узлах $A_0(t)$, $A_1(t)$ и на матричной кривой вида $A_0(t) + \chi(\tau,t)\left(A_1(t) - A_0(t)\right)$, где

$$\chi(\tau,t) = \begin{cases} 1, \tau \ge t; \\ 0, \tau < t, \end{cases} \quad \chi(a,t) \equiv 0, \quad \chi(b,t) \equiv 1 \quad (a \le \tau,\ t \le b).$$

Тогда для формулы

$$L_{10}(A) = F(A_0) + \int_a^b [A(\tau) - A_0(\tau)] \cdot [A_1(\tau) - A_0(\tau)]^{\overset{\bullet}{-1}} \cdot d_\tau F\left[A_0(t) + \chi(\tau,t)\left(A_1(t) - A_0(t)\right)\right]$$

при условии, что все элементы матрицы $A_1(t) - A_0(t)$ отличны от нуля на $[a,b]$ и интеграл в этой формуле существует, будут выполняться интерполяционные условия $L_{10}(A_i) = F(A_i)$ $(i = 0,1)$.

В пространстве $C^m[a,b]$ прямоугольных матриц $A(t) = [a_{ij}(t)]$ размерности $p \times q$, для которых производная $A^{(m)}(t) = \left[a_{ij}^{(m)}(t)\right]$ порядка m непрерывна на отрезке $[a,b]$, рассмотрим матричный многочлен первой степени

$$P_1(A) = B + \sum_{j=0}^{n} A(t_j) \cdot C_j + \sum_{k=0}^{m} \int_a^b D_k(t,s) \cdot A^{(k)}(s) ds, \tag{7}$$

где $B = B(t)$, $C_j = C_j(t)$, $D_k(t,s)$ $(j = 0,1,...n;\ k = 0,1,...,m)$ – фиксированные $(p \times q)$-матрицы.

Через $\sigma_{1i}(t)$ и $H_i(t)$ обозначим матрицы $\sigma_{1i}(t) = A_0(t) + A_1(t_i) - A_0(t_i)$, $H_i(t) = A(t) - A_0(t) - A(t_i) + A_0(t_i)$, где t_i $(i = 0,1,...n)$ – заданные точки отрезка $[a,b]$, $A_0(t)$ и $A_1(t)$ – узлы интерполирования, причем такие, что матрицы $A_1(t_i) - A_0(t_i)$ обратимы по Адамару. Имеет место

Т е о р е м а 1. *Для формулы*

$$L_1(A) = F(A_0) + \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}[A(t_i) - A_0(t_i)] \cdot [A_1(t_i) - A_0(t_i)]^{\overset{\bullet}{-1}} \cdot [F(\sigma_{1i}) - F(A_0)] +$$
$$+ \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\int_0^1 \delta F[\sigma_{1i}(\cdot) + \tau\left(A_1(\cdot) - \sigma_{1i}(\cdot)\right); H_i(\cdot)] d\tau \tag{8}$$

выполняются условия $L_1(A_i) = F(A_i)$ $(i = 0,1)$, *и она точна для матричных многочленов вида* (7).

Доказательство. Равенство $L_1(A_0) = F(A_0)$ выполняется, так как второе, а также третье слагаемое в (8) обращается в нуль. Выполнение интерполяционного условия во втором узле следует, в частности, из того, что интеграл в формуле (8) вычисляется точно.

Приведем далее конкретный пример интерполяционной формулы:

$$L_{01}(F;A) = F(A_0) + [F(A_1) - F(A_0)] \cdot (A_1 - A_0)^{\overset{\bullet}{-1}} \cdot (A - A_0),$$

где значение интерполируемой функции $F(A)$ и матрицы A, A_0, A_1 – одинаковой размерности.

Пример 4. Пусть $F(A) = A(t)C(t)A(t)$ – функциональная $(p \times q)$-матрица $(t \in T \subseteq \mathbb{R})$ и матрица $A(t)$ этой же размерности, а фиксированная матрица $C(t)$ размерности $p \times q$. Тогда, если в качестве узлов выбрать, например, матрицы $A_0 = [\beta_{ij} + \cos(i+j)t]$ и $A_1 = [\alpha_{ij} + \cos(i+j)t]$, то для различных числовых значений α_{ij} и β_{ij} получим алгебраический многочлен первой степени вида

$$L_1(F;A) = A_0(t)C(t)A_0(t) + D \cdot [A_1(t)C(t)A_1(t) - A_0(t)C(t)A_0(t)] \cdot (A - A_0),$$

где $D = \left[\dfrac{1}{\alpha_{ij} - \beta_{ij}}\right]$, совпадающий с $F(A)$ в этих узлах.

Матричные аналоги сплайнов на множествах матриц с умножением по Адамару. Построение матричных аналогов сплайнов может осуществляться на основе интерполяционных формул, использующих различные правила умножения матриц [6, 8], в том числе на множествах матриц с адамаровым умножением.

Пусть оператор $F : X \to X$, где X – множество матриц фиксированного порядка и $X = \bigcup_{i=0}^{m} \mathfrak{M}_i$ – некоторое его разбиение. В частности, если $X = C(T)$, $T = [a,b]$ и выбрано разбиение $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m < \infty$ полуоси $[0,\infty)$, то в качестве примеров множеств $\mathfrak{M}_i$ можно взять

1) $\mathfrak{M}_i = \left\{ A(t) \in C(T) : a_i \le \left\| A\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \right\| \le a_{i+1} \right\}$;

2) $\mathfrak{M}_i = \left\{ A(t) : a_i \le \left\| \int_a^b A(t)dt \right\| \le a_{i+1} \right\}$;

3) $\mathfrak{M}_i = \left\{ A(t) : a_i \le \| A(t_0) \| \le a_{i+1} \right\}, \quad t_0 \in T$

$(i = 0,1,\ldots,m$; в этих трех случаях выражение $\le a_{m+1}$ заменяется на $<\infty)$;

4) если X – множество квадратных матриц порядка n и заданы числа a_i: $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = n$ $(m \le n)$, тогда в качестве разбиения X можно взять множества $\mathfrak{M}_i = \{A \in X : a_i \le \operatorname{rank} A \le a_{i+1}\}$ $(i = 0,1,\ldots,m-1)$.

В качестве узлов $A_i = \left[a_{\nu k}^{(i)}\right]$ и $A_{i+1} = \left[a_{\nu k}^{(i+1)}\right]$, принадлежащих множеству $\mathfrak{M}_i$, выбираются такие матрицы, что $a_{\nu k}^{(i+1)} - a_{\nu k}^{(i)} \ne 0$ для $\nu = 1,2,\ldots,p;$ $k = 1,2,\ldots,q$, в случае, когда узлы A_i, A_{i+1}, как и матрицы $A = [a_{\nu k}]$, являются $(p \times q)$-матрицами. Тогда для формулы линейной интерполяции

$$L_{1i}(A) = F(A_i) \cdot \left[\frac{a_{\nu k} - a_{\nu k}^{(i+1)}}{a_{\nu k}^{(i)} - a_{\nu k}^{(i+1)}}\right] + F(A_{i+1}) \cdot \left[\frac{a_{\nu k} - a_{\nu k}^{(i)}}{a_{\nu k}^{(i+1)} - a_{\nu k}^{(i)}}\right], \tag{9}$$

где точка «·», как и ранее, означает операцию умножения по Адамару, выполняются равенства $L_{1i}(A_i) = F(A_i)$, $L_{1i}(A_{i+1}) = F(A_{i+1})$.

Формула (9) в другом варианте может быть записана в матричном виде

$$L_{1i}(A) = F(A_i) \cdot (A_i - A_{i+1})^{\overset{\bullet}{-1}} \cdot (A - A_{i+1}) + F(A_{i+1}) \cdot (A_{i+1} - A_i)^{\overset{\bullet}{-1}} \cdot (A - A_i),$$

при этом A, A_i, $A_{i+1} \in \mathfrak{M}_i$ $(i = 0,1,\ldots,m)$.

Имеет смысл привести также формулу линейной интерполяции, использующую как обычное, так и адамарово умножение:

$$L_{1i}(A) = F(A_i)\Big[(A_i - A_{i+1})^{(-1)} \cdot (A - A_{i+1})\Big] + F(A_{i+1})\Big[(A_{i+1} - A_i)^{(-1)} \cdot (A - A_i)\Big]$$

или, в случае квадратных матриц, в варианте

$$L_{1i}(A) = F(A_i)\mathrm{diag}\left[\frac{a_{\nu\nu} - a_{\nu\nu}^{(i+1)}}{a_{\nu\nu}^{(i)} - a_{\nu\nu}^{(i+1)}}\right] + F(A_{i+1})\mathrm{diag}\left[\frac{a_{\nu\nu} - a_{\nu\nu}^{(i)}}{a_{\nu\nu}^{(i+1)} - a_{\nu\nu}^{(i)}}\right]. \qquad (10)$$

Рассмотрим интерполяционные алгебраические многочлены произвольной степени. Обозначим через $Z_{ki}(A)$ выражение вида

$$Z_{ki}(A) = (A - A_i)\cdot(A - A_{i+1})\cdot\ldots\cdot(A - A_{i+k-1})\cdot(A - A_{i+k+1})\cdot\ldots\cdot(A - A_{i+n}),$$

где $A_{i+j} \in \mathfrak{M}_i$ для $j = 0,1,\ldots,n;\ i = 0,1,\ldots,m,$ и предположим, что матрица $Z_{ki}(A_{i+k})$ $(k = 0,1,\ldots,n)$ не имеет нулевых элементов. Тогда для многочлена n-й степени $L_n(A) = \sum\limits_{k=0}^{n} F(A_{i+k})\cdot \overset{\bullet}{Z}{}_{ki}^{-1}(A_{i+k})\cdot Z_{ki}(A)$ выполняются равенства $L_n(A_{i+k}) = F(A_{i+k})$ для $k = 0,1,\ldots,n.$ В случае $n = 2$ эта формула интерполирования примет вид

$$L_2(A) = F(A_i)\cdot\left[\frac{\left(a_{\nu k} - a_{\nu k}^{(i+1)}\right)\left(a_{\nu k} - a_{\nu k}^{(i+2)}\right)}{\left(a_{\nu k}^{(i)} - a_{\nu k}^{(i+1)}\right)\left(a_{\nu k}^{(i)} - a_{\nu k}^{(i+2)}\right)}\right] +$$

$$+F(A_{i+1})\cdot\left[\frac{\left(a_{\nu k} - a_{\nu k}^{(i)}\right)\left(a_{\nu k} - a_{\nu k}^{(i+2)}\right)}{\left(a_{\nu k}^{(i+1)} - a_{\nu k}^{(i)}\right)\left(a_{\nu k}^{(i+1)} - a_{\nu k}^{(i+2)}\right)}\right] + F(A_{i+2})\cdot\left[\frac{\left(a_{\nu k} - a_{\nu k}^{(i)}\right)\left(a_{\nu k} - a_{\nu k}^{(i+1)}\right)}{\left(a_{\nu k}^{(i+2)} - a_{\nu k}^{(i)}\right)\left(a_{\nu k}^{(i+2)} - a_{\nu k}^{(i+1)}\right)}\right].$$

Для нее справедливы равенства $L_2(A_{i+j}) = F(A_{i+j})$ для $j = 0,1,2;\ i = 0,1,\ldots,m.$

В случае квадратных матриц эти же равенства выполняются и для формулы

$$L_2(A) = F(A_i)\mathrm{diag}\left[\frac{\left(a_{\nu\nu} - a_{\nu\nu}^{(i+1)}\right)\left(a_{\nu\nu} - a_{\nu\nu}^{(i+2)}\right)}{\left(a_{\nu\nu}^{(i)} - a_{\nu\nu}^{(i+1)}\right)\left(a_{\nu\nu}^{(i)} - a_{\nu\nu}^{(i+2)}\right)}\right] +$$

$$+F(A_{i+1})\mathrm{diag}\left[\frac{\left(a_{\nu\nu} - a_{\nu\nu}^{(i)}\right)\left(a_{\nu\nu} - a_{\nu\nu}^{(i+2)}\right)}{\left(a_{\nu\nu}^{(i+1)} - a_{\nu\nu}^{(i)}\right)\left(a_{\nu\nu}^{(i+1)} - a_{\nu\nu}^{(i+2)}\right)}\right] + F(A_{i+2})\mathrm{diag}\left[\frac{\left(a_{\nu\nu} - a_{\nu\nu}^{(i)}\right)\left(a_{\nu\nu} - a_{\nu\nu}^{(i+1)}\right)}{\left(a_{\nu\nu}^{(i+2)} - a_{\nu\nu}^{(i)}\right)\left(a_{\nu\nu}^{(i+2)} - a_{\nu\nu}^{(i+1)}\right)}\right].$$

В последнем случае требуется, чтобы диагональные элементы матриц A_i, A_{i+1} и A_{i+2} были различны.

В формулах (9) и (10) узлы интерполирования берутся из подмножества $\mathfrak{M}_i$. С учетом структуры этих формул получаем, что функция от A вида $L_m(F;A) = \sum\limits_{i=0}^{m} \chi_{\mathfrak{M}_i}(A)\tilde{L}_{1i}(A)$, где, как и ранее, $\chi_{\mathfrak{M}_i}(A_j) = \delta_{ij}I$, а $\tilde{L}_{1i}(A)$ – один из матричных многочленов (9) или (10), заданных на $\mathfrak{M}_i$, будет непрерывной на всем множестве X.

Матричный аналог теоремы Коши и некоторое ее применение в теории интерполирования. Получим аналог широко используемого в матричном анализе равенства

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\xi I - A)^{-1} f(\xi)d\xi,$$

где Γ – граница области D, содержащей все собственные значения ξ матрицы A, а функция $f(\xi)$ регулярна в D и непрерывна в $\overline{D} = D \cup \Gamma$, на множествах матриц с умножением Адамара и проиллюстрируем одно из его применений на простейшем примере.

Т е о р е м а 2. *Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в области D комплексной плоскости и непрерывная на границе Γ области D, тогда для $f(A)$ на множестве матриц $A = [a_{\nu j}]$ $(a_{\nu j} \neq 0,\ a_{\nu j} \in D)$ с адамаровым умножением имеет место равенство*

$$f(A)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\xi J-A)^{\overset{\bullet}{-1}}f(\xi)d\xi. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для регулярной на D функции $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ имеем

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k A^{\overset{\bullet}{k}}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left[a_{\nu j}^{k}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\left[a_k a_{\nu j}^{k}\right]=\left[\sum_{k=0}^{\infty}a_k a_{\nu j}^{k}\right]=[f(a_{\nu j})].$$

Далее, поскольку интеграл в правой части равенства (11) несложно вычисляется и равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\xi J-A)^{\overset{\bullet}{-1}}f(\xi)d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left[\frac{1}{\xi-a_{\nu j}}\right]f(\xi)d\xi=\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-a_{\nu j}}d\xi\right]=[f(a_{\nu j})],$$

то представление (11) справедливо.

Продемонстрируем применение матричного аналога формулы Коши (11) к задаче интерполирования функций от матриц на конкретном примере. Одна из интерполяционных формул с двумя узлами $A_0=A\left[a_{\nu j}^{0}\right]$ и $A_1=A\left[a_{\nu j}^{1}\right]$ $\left(a_{\nu j}^{0}\neq a_{\nu j}^{1};a_{\nu j}^{0},a_{\nu j}^{1}\in D\right)$ имеет вид

$$L_1(A)=F(A_0)\cdot(A_0-A_1)^{\overset{\bullet}{-1}}\cdot(A-A_1)+F(A_1)\cdot(A_1-A_0)^{\overset{\bullet}{-1}}\cdot(A-A_0), \tag{12}$$

для нее $L_1(A_k)=F(A_k)$ $(k=0,1)$. Формулу (12) можно записать как

$$L_1(A)=F(A_0)+(A_1-A_0)^{\overset{\bullet}{-1}}\cdot\big(F(A_1)-F(A_0)\big)\cdot(A-A_0)$$

или в интегральном виде

$$L_1(A)=F(A_0)+\frac{(A-A_0)\cdot(A_1-A_0)^{\overset{\bullet}{-1}}}{2\pi i}\cdot\int_{\Gamma}(\xi J-A_0)^{\overset{\bullet}{-1}}\cdot(A_1-A_0)\cdot(\xi J-A_1)^{\overset{\bullet}{-1}}F(\xi)d\xi,$$

что несложно проверить, если воспользоваться преобразованием

$$(\xi J-A_0)^{\overset{\bullet}{-1}}\cdot(A_1-A_0)\cdot(\xi J-A_1)^{\overset{\bullet}{-1}}=(\xi I-A_0)^{\overset{\bullet}{-1}}\cdot\big((\xi I-A_0)-(\xi I-A_1)\big)\cdot(\xi I-A_1)^{\overset{\bullet}{-1}}=$$

$$=(\xi I-A_0)^{\overset{\bullet}{-1}}\cdot(\xi I-A_0)\cdot(\xi I-A_1)^{\overset{\bullet}{-1}}-(\xi I-A_0)^{\overset{\bullet}{-1}}\cdot(\xi I-A_1)\cdot(\xi I-A_1)^{\overset{\bullet}{-1}}=(\xi J-A_1)^{\overset{\bullet}{-1}}-(\xi J-A_0)^{\overset{\bullet}{-1}}$$

и формулой (11).

Для остатка $r_1(A)=F(A)-L_1(A)$ интерполяционной формулы (12) имеем

$$r_1(A)=(A-A_1)\cdot(A_0-A_1)^{\overset{\bullet}{-1}}\cdot\big(F(A)-F(A_0)\big)+(A-A_0)\cdot(A_1-A_0)^{\overset{\bullet}{-1}}\cdot\big(F(A)-F(A_1)\big). \tag{13}$$

Формула (12) точна для матричных многочленов первой степени $P_1(A)=B\cdot A+C$, где B и C – произвольные матрицы той же размерности, что и A. Действительно, из формулы (13) для $F(A)=P_1(A)$ имеем

$$r_1(A)=(A-A_1)\cdot(A_0-A_1)^{\overset{\bullet}{-1}}\cdot B\cdot(A-A_0)+(A-A_0)\cdot(A_1-A_0)^{\overset{\bullet}{-1}}\cdot B\cdot(A-A_1)=0.$$

Погрешность (13) с помощью формулы Коши (11) преобразуется к виду

$$r_1(A)=(A-A_1)\cdot(A_0-A_1)^{\overset{\bullet}{-1}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left((\xi J-A)^{\overset{\bullet}{-1}}-(\xi J-A_0)^{\overset{\bullet}{-1}}\right)F(\xi)d\xi+$$

$$+(A-A_0)\cdot(A_1-A_0)^{\overset{\bullet}{-1}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left((\xi J-A)^{\overset{\bullet}{-1}}-(\xi J-A_1)^{\overset{\bullet}{-1}}\right)F(\xi)d\xi. \tag{14}$$

Запишем правую часть равенства (14) в виде матриц с указанием их элементов:

$$r_1(A)=\left[a_{\nu j}-a_{\nu j}^1\right]\cdot\left[\frac{1}{a_{\nu j}^0-a_{\nu j}^1}\right]\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(\left[\frac{1}{\xi-a_{\nu j}}\right]-\left[\frac{1}{\xi-a_{\nu j}^0}\right]\right)F(\xi)d\xi+$$

$$+\left[a_{\nu j}-a_{\nu j}^0\right]\cdot\left[\frac{1}{a_{\nu j}^1-a_{\nu j}^0}\right]\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left(\left[\frac{1}{\xi-a_{\nu j}}\right]-\left[\frac{1}{\xi-a_{\nu j}^1}\right]\right)F(\xi)d\xi=$$

$$=\left[\frac{a_{\nu j}-a_{\nu j}^1}{a_{\nu j}^0-a_{\nu j}^1}\right]\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left[\frac{1}{\xi-a_{\nu j}}-\frac{1}{\xi-a_{\nu j}^0}\right]F(\xi)d\xi+\left[\frac{a_{\nu j}-a_{\nu j}^0}{a_{\nu j}^1-a_{\nu j}^0}\right]\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left[\frac{1}{\xi-a_{\nu j}}-\frac{1}{\xi-a_{\nu j}^1}\right]F(\xi)d\xi.$$

Следовательно,

$$r_1(A)=\left[\frac{a_{\nu j}-a_{\nu j}^1}{a_{\nu j}^0-a_{\nu j}^1}\right]\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left[\frac{a_{\nu j}-a_{\nu j}^0}{\left(\xi-a_{\nu j}\right)\left(\xi-a_{\nu j}^0\right)}\right]F(\xi)d\xi+\left[\frac{a_{\nu j}-a_{\nu j}^0}{a_{\nu j}^1-a_{\nu j}^0}\right]\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\left[\frac{a_{\nu j}-a_{\nu j}^1}{\left(\xi-a_{\nu j}\right)\left(\xi-a_{\nu j}^1\right)}\right]F(\xi)d\xi.$$

Из вышеприведенных вычислений следует также представление для $r_1(A)$ в виде

$$r_1(A)=\left[\frac{a_{\nu j}-a_{\nu j}^1}{a_{\nu j}^0-a_{\nu j}^1}\right]\cdot\left[F(a_{\nu j})-F\left(a_{\nu j}^0\right)\right]+\left[\frac{a_{\nu j}-a_{\nu j}^0}{a_{\nu j}^1-a_{\nu j}^0}\right]\cdot\left[F(a_{\nu j})-F\left(a_{\nu j}^1\right)\right].$$

П р и м е р 5. Вычислим функцию

$$F(A)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\xi J-A)^{\overset{\bullet}{-1}}f(\xi)d\xi$$

в точке $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$. Характеристический многочлен $\det[\xi J-A]=\begin{vmatrix}\xi-1&\xi\\\xi&\xi\end{vmatrix}=\xi(\xi-1)-\xi^2=-\xi=0$ при $\xi_0=0$. Так как $(\xi J-A)^{\overset{\bullet}{-1}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\xi-1}&\frac{1}{\xi}\\\frac{1}{\xi}&\frac{1}{\xi}\end{bmatrix}$, то $F(A)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\xi)}{\xi-1}d\xi&\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\xi)}{\xi}d\xi\\\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\xi)}{\xi}d\xi&\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\xi)}{\xi}d\xi\end{bmatrix}$.

В силу формулы Коши $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\begin{cases}f(z),&z\in D;\\0,&z\notin D,\end{cases}$ где Γ – граница D, и основной теоремы о вычетах $\int_\Gamma f(\xi)d\xi=2\pi i\sum_{k=1}^n\operatorname{res}f(z_k)$, получим, что $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\xi)}{\xi-1}d\xi=f(1)$, $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\xi)}{\xi}d\xi=f(0)$, и, следовательно, $F(A)=\begin{bmatrix}f(1)&f(0)\\f(0)&f(0)\end{bmatrix}$.

О сходимости интерполяционных процессов Лагранжа для функций, заданных на множестве матриц с адамаровым умножением. Рассмотрим [5] интерполяционную формулу Лагранжа для функций, заданных на множестве матриц с умножением по Адамару. Пусть матрица $A=[a_{\nu j}]$ и узлы интерполирования $A_k=\left[a_{\nu j}^k\right]$ $(k=0,1,...,n)$ – одинаковой размерности, функции

$$l_k(A)=(A-A_0)\cdot(A_k-A_0)^{\overset{\bullet}{-1}}\cdot(A-A_1)\cdot(A_k-A_1)^{\overset{\bullet}{-1}}\cdot...\cdot(A-A_{k-1})\cdot$$

$$\cdot(A_k-A_{k-1})^{\overset{\bullet}{-1}}\cdot(A-A_{k+1})\cdot(A_k-A_{k+1})^{\overset{\bullet}{-1}}\cdot...\cdot(A-A_n)\cdot(A_k-A_n)^{\overset{\bullet}{-1}}\quad(k=0,1,...,n),$$

а элементы обратных по Адамару матриц $(A_k-A_\nu)^{\overset{\bullet}{-1}}$ $(\nu=0,1,...,k-1,k+1,...,n)$ отличны от нуля. Тогда очевидно, что $l_k(A_\nu)=\delta_{k\nu}J$, а для матричного многочлена

$$L_n(f;A)=\sum_{k=0}^n l_k(A)\cdot f(A_k)\tag{15}$$

и функции $f(A)$ выполняются интерполяционные условия

$$L_n(f;A_k)=f(A_k)\quad (k=0,1,...,n).$$

Представим формулу (15) в эквивалентном виде, используя обозначения $a_{\nu j}$ и $a_{\nu j}^k$ для элементов матриц A и A_k:

$$L_n(f;A)=\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(a_{\nu j}-a_{\nu j}^0\right)\left(a_{\nu j}-a_{\nu j}^1\right)...\left(a_{\nu j}-a_{\nu j}^{k-1}\right)\left(a_{\nu j}-a_{\nu j}^{k+1}\right)...\left(a_{\nu j}-a_{\nu j}^n\right)}{\left(a_{\nu j}^k-a_{\nu j}^0\right)\left(a_{\nu j}^k-a_{\nu j}^1\right)...\left(a_{\nu j}^k-a_{\nu j}^{k-1}\right)\left(a_{\nu j}^k-a_{\nu j}^{k+1}\right)...\left(a_{\nu j}^k-a_{\nu j}^n\right)}f\left(a_{\nu j}^k\right)\right]. \tag{16}$$

Если воспользоваться многочленом $(n + 1)$-й степени $\omega_n(a_{\nu j})=\left(a_{\nu j}-a_{\nu j}^0\right)\left(a_{\nu j}-a_{\nu j}^1\right)...\left(a_{\nu j}-a_{\nu j}^n\right)$, то формула (16) может быть записана также в форме

$$L_n(f;A)=\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\omega_n(a_{\nu j})}{\left(a_{\nu j}-a_{\nu j}^k\right)\omega_n'\left(a_{\nu j}^k\right)}f\left(a_{\nu j}^k\right)\right].$$

Здесь погрешность приближения каждого элемента $f(a_{\nu j})$ матрицы $f(A)$ определяется равенством

$$r_n(a_{\nu j})=f(a_{\nu j})-\sum_{k=0}^{n}\frac{\omega_n(a_{\nu j})}{\left(a_{\nu j}-a_{\nu j}^k\right)\omega_n'\left(a_{\nu j}^k\right)}f\left(a_{\nu j}^k\right)\quad (\nu,j=0,1,...,n).$$

Исследуем сходимость [11] элементов матрицы (16) к элементам $f(a_{\nu j})$ интерполируемой матрицы $f(A)$. Для этого воспользуемся теорией приближения скалярных функций интерполяционными методами [12].

Рассмотрим на плоскости комплексного переменного замкнутую область D, которая представляет собой объединение двух замкнутых кругов с центрами в концевых точках отрезка $[a,b]$ и радиусом $b - a$. Предположим, что функция $f(z)$ определена не только на $[a,b]$, но и в некоторой области на комплексной плоскости, содержащей D, а элементы матрицы $A = [a_{\nu j}]$ и узлов $A_k=\left[a_{\nu j}^k\right]$ $(k=0,1,...,n)$ принадлежат $[a,b]$.

Т е о р е м а 3. *Если аналитическая функция $f(z)$ регулярна в замкнутой области D, то для любой матрицы A последовательность интерполяционных многочленов $L_n(f;A)$ вида* (16) *при $n\to\infty$ сходится к матрице $f(A)$.*

Данная теорема является некоторым аналогом утверждения, доказанного в [13] для случая алгебраического интерполирования скалярных функций с узлами произвольной кратности.

Пусть далее узлами интерполирования являются скалярные матрицы $A_k = \eta_k J$ $(k=0,1,...,n)$, $f(z)$ – функция, регулярная в области D комплексной плоскости, которая содержит различные точки $\eta_k\neq\eta_\nu$ $(k,\nu=0,1,...,n)$. Введем обозначения

$$l_k(A)=(A-A_0)\cdot(A-A_1)\cdot...\cdot(A-A_{k-1})\cdot(A-A_{k+1})\cdot...\cdot(A-A_n)\quad (k=0,1,...,n).$$

Заметим, что в этом произведении отсутствует сомножитель $(A - A_k)$. Тогда для матричного многочлена

$$L_n(f;A)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(A-\eta_0J)\cdot...\cdot(A-\eta_{k-1}J)\cdot(A-\eta_{k+1}J)\cdot...\cdot(A-\eta_nJ)}{(\eta_k-\eta_0)\cdots(\eta_k-\eta_{k-1})(\eta_k-\eta_{k+1})\cdots(\eta_k-\eta_n)}f(\eta_k) \tag{17}$$

выполняются равенства $L_n(f;A_k)=f(A_k)$ $(k=0,1,...,n)$.

Перепишем $l_k(A)$ в следующем виде:

$$l_k(A)=[a_{\nu j}-\eta_0]\cdot[a_{\nu j}-\eta_1]\cdot...\cdot[a_{\nu j}-\eta_{k-1}]\cdot[a_{\nu j}-\eta_{k+1}]\cdot...\cdot[a_{\nu j}-\eta_n]=$$
$$=[(a_{\nu j}-\eta_0)(a_{\nu j}-\eta_1)\cdots(a_{\nu j}-\eta_{k-1})(a_{\nu j}-\eta_{k+1})\cdots(a_{\nu j}-\eta_n)].$$

Тогда формула (17) примет вид

$$L_n(f;A)=\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(a_{\nu j}-\eta_0)(a_{\nu j}-\eta_1)\cdots(a_{\nu j}-\eta_{k-1})(a_{\nu j}-\eta_{k+1})\cdots(a_{\nu j}-\eta_n)}{(\eta_k-\eta_0)\cdots(\eta_k-\eta_{k-1})(\eta_k-\eta_{k+1})\cdots(\eta_k-\eta_n)}f(\eta_k)\right]. \tag{18}$$

Введя обозначение $\omega_n(x)=\prod_{k=0}^{n}(x-\eta_k)$, $\omega_n(A)=\prod_{k=0}^{n}(A-\eta_k J)$, перепишем (17) в форме

$$L_n(f;A)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\omega'_n(A)}{\omega'_n(\eta_k)}f(\eta_k).$$

Это интерполяционная формула Лагранжа с узлами $A_k=\eta_k J$ $(k=0,1,...,n)$.

В скалярном случае из представления (17) для любого алгебраического многочлена $P_n(x)$ степени не выше n имеем $L_n(P_n;x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\omega'_n(x)}{\omega'_n(\eta_k)}P_n(\eta_k)\equiv P_n(x)$, т. е. $L_n(P_n;x)\equiv P_n(x)$.

Далее исследуем сходимость приближения $f(A)$ на множествах матриц с адамаровым умножением для регулярных в области D комплексной плоскости и непрерывных на ее границе Γ функций $f(z)$ интерполяционными матричными многочленами, элементы которых задаются правой частью равенства (18).

Так как $f(a)=[f(a_{\nu j})]$, то в силу рассуждений, приведенных выше, данная задача сводится к скалярному случаю: приближению регулярной функции $f(a_{\nu j})$ интерполяционным многочленом Лагранжа с узлами η_k $(k=0,1,...,n)$. Имеем

$$L_n(f;a_{\nu j})=\sum_{k=0}^{n}\frac{(a_{\nu j}-\eta_0)(a_{\nu j}-\eta_1)\cdots(a_{\nu j}-\eta_{k-1})(a_{\nu j}-\eta_{k+1})\cdots(a_{\nu j}-\eta_n)}{(\eta_k-\eta_0)\cdots(\eta_k-\eta_{k-1})(\eta_k-\eta_{k+1})\cdots(\eta_k-\eta_n)}f(\eta_k).$$

Для дальнейшего изложения перепишем многочлен $L_n(f;a_{\nu j})$ в эквивалентном виде

$$L_n(f;a_{\nu j})=\sum_{k=0}^{n}\frac{\omega_n(a_{\nu j})}{\omega'_n(\eta_k)(a_{\nu j}-\eta_k)}f(\eta_k).$$

Остаток интерполирования $r_n(a_{\nu j})=f(a_{\nu j})-L_n(f;a_{\nu j})$ в точке $a_{\nu j}$ определяется равенством

$$r_n(a_{\nu j})=f(a_{\nu j})-\sum_{k=0}^{n}\frac{\omega_n(a_{\nu j})}{\omega'_n(\eta_k)(a_{\nu j}-\eta_k)}f(\eta_k)\quad(\nu,j=0,1,...,n).$$

Для интерполяционного многочлена Лагранжа (17) и его остаточного члена $r_n(A)=f(A)-L_n(f;A)$ имеют место [5, 10] следующие интегральные представления:

$$L_n(A)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\omega_n(\xi)J-\omega_n(A)}{\omega_n(\xi)}\cdot(\xi J-A)^{\overset{\bullet}{-1}}f(\xi)d\xi, \tag{19}$$

$$r_n(A)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\omega_n(A)}{\omega_n(\xi)}\cdot(\xi J-A)^{\overset{\bullet}{-1}}f(\xi)d\xi, \tag{20}$$

где $\omega_n(z)=(z-z_0)(z-z_1)...(z-z_n)$.

Интегральные представления остаточных членов приближенных формул часто используются для получения оценок погрешности приближения.

Получим оценку погрешности $r_n(A)$ приближения аналитических функций $f(A)$ интерполяционным многочленом $L_n(A)$ вида (19), используя для этого интегральное представление (20). Предположим, что область регулярности D с границей Γ таковы, что $\|A-\eta_k J\|<|\xi-\eta_k|$ для $\xi\in\Gamma$. Учитывая неравенства

$$\left\|\frac{\omega_n(A)}{\omega_n(\xi)}\right\|\le\prod_{k=0}^{m}\left(\frac{\|A-\eta_k J\|}{|\xi-\eta_k|}\right),\qquad \frac{\|A-z_k I\|}{|\xi-z_k|}\le q<1,$$

приходим к оценке $\left\|\frac{\omega_n(A)}{\omega_n(\xi)}\right\|\le q^{n+1}$. Оценивая далее интеграл (20), получим

$$\|r_n(A)\|\le\frac{1}{2\pi}\max_{\xi\in\Gamma}\left\|\frac{\omega_n(A)}{\omega_n(\xi)}\cdot(\xi J-A)^{\overset{\bullet}{-1}}f(\xi)\right\|\cdot L,$$

где L – длина кривой интегрирования Г. Отсюда имеем $\|r_n(A)\| \le Cq^{n+1}$, где C – константа, не зависящая от n. Из этой оценки следует, что при $n \to \infty$ рассматриваемый матричный интерполяционный процесс сходится для аналитических функций $f(A)$ на множестве матриц A и узлов интерполирования $\eta_k J$, для которых выполняются неравенства $\|A - \eta_k J\| < |\xi - \eta_k| \quad (\xi \in \Gamma)$. Если $f(x)$ – целая функция, то для любой матрицы A и узлов интерполирования $\eta_k J$ всегда найдется область D с границей Г, для которой данное неравенство будет иметь место.

Из проведенных выше рассуждений следует

Т е о р е м а 4. *Пусть функция* $f(\xi)$ *регулярна в области* D *с границей* Г *комплексной плоскости, задаваемой неравенством* $\|A - \eta_k J\| < |\xi - \eta_k| \quad (\xi \in \Gamma;\ k = 0,1,\ldots,n)$. *Тогда для остаточного члена* $r_n(A)$ *интерполяционной формулы* (19) *имеет место оценка* $\|r_n(A)\| < Cq^{n+1}$, *где* C *– независимая от* n *константа и* $0 < q < 1$.

В заключение отметим, что основы теории интерполирования функций от матричных переменных с умножением в обычном смысле, а также умножением по Йордану, Адамару, Фробениусу и др., а также достаточно полная теория интерполирования операторов, заданных на множествах функций и матриц, изложены в вышеупомянутых монографиях [5] и [10] соответственно.

Благодарности. Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.3.01.

Acknowledgments. This work was supported by the State Program of Scientific Research “Convergence-2025”, subprogram “Mathematical models and methods”, task 1.3.01.

Список использованных источников

1. Магнус, Я. Р. Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике / Я. Р. Магнус, Х. Нейдеккер. – М.: Физматлит, 2002. – 496 с.

2. Маркус, М. Обзор по теории матриц и матричных неравенств / М. Маркус, Х. Минк. – М.: Наука, 1972. – 232 с.

3. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.

4. Makarov, V. L. Methods of Operator Interpolation / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, L. A. Yanovich. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2010. – 517 с. – (Праці Ін-ту математики НАН України. – Vol. 83: Математика та іі застосування).

5. Янович, Л. А. Основы теории интерполирования функций матричных переменных / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко; Нац. акад. наук Беларуси, Ин-т математики. – Минск: Беларус. навука, 2016. – 281 с.

6. Янович, Л. А. О некоторых аналогах формул сплайн-интерполирования для функций матричной переменной / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 4. – С. 17–24.

7. Yanovich, L. A. Interpolation formulas for functions, defined on the sets of matrices with different multiplication rules / L. A. Yanovich, M. V. Ignatenko // Журн. обчисл. та прикл. матем. – 2016. – № 2 (122). – С. 140–158.

8. Yanovich, L. A. On a spline-interpolation of functions with matrix variables / L. A. Yanovich, M. V. Ignatenko // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations (AMADE-2015): Proc. of the 8th Int. Workshop, Minsk, Belarus, September 14–19, 2015 / Belarusian State University, Institute of Mathematics of the Belarusian National Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University; general editorship by S. V. Rogozin, M. V. Dubatovskaya. – UK, Cottenham: Cambridge Scientific Publishers, 2016. – P. 149–160.

9. Игнатенко, М. В. О некоторых интерполяционных формулах для функций, заданных на множестве матриц с умножением по Адамару / М. В. Игнатенко, Л. А. Янович // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (AMADE-2015): тез. докл. 8-го Междунар. науч. семинара, посвящ. памяти проф. А. А. Килбаса, Минск, 14–19 сент. 2015 г. / Белорус. гос. ун-т; Ин-т математики НАН Беларуси; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова; под ред. С. В. Рогозина. – Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 2015. – С. 40–41.

10. Янович, Л. А. Интерполяционные методы аппроксимации операторов, заданных на функциональных пространствах и множествах матриц / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко; Нац. акад. наук Беларуси, Ин-т математики. – Минск: Беларус. навука, 2020. – 476 с.

11. Игнатенко, М. В. О сходимости интерполяционного процесса Лагранжа для функций, заданных на множестве матриц с адамаровым умножением / М. В. Игнатенко, Л. А. Янович // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике: материалы респ. науч.-практ. конф., Брест, 23–24 апр. 2020 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина; под общ. ред. А. И. Басика. – Брест: БрГУ, 2020. – С. 77–83.

12. Крылов, В. И. Об определении наименьшей области, голоморфность в которой обеспечивает сходимость эрмитовского интерполирования при любой системе узлов / В. И. Крылов // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 78, № 5. – С. 857–859.

13. Янович, Л. А. Сходимость интерполирования по скалярным матричным узлам в классе аналитических функций / Л. А. Янович, А. В. Тарасевич // Тр. Ин-та математики. – 2006. – Т. 14, № 2. – С. 102–111.

References

1. Magnus J. R., Neidekker H. *Matrix Differential Calculus with Applications to Statistics and Econometrics*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002. 496 p. (in Russian).

2. Markus M., Mink H. *Review on the Theory of Matrices and Matrix Inequalities*. Moscow, Nauka Publ., 1972. 232 p. (in Russian).

3. Horn R., Johnson C. *Matrix Analysis*. Moscow, Mir Publ., 1989. 655 p. (in Russian).

4. Makarov V. L., Khlobystov V. V., Yanovich L. A. Methods of Operator Interpolation. *Proceedings of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine. Vol. 83: Mathematics and its applications*. Kiev, 2010. 516 p.

5. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. *Bases of the Theory of Interpolation of Functions of Matrix Variables*. Minsk, Belaruskaya Navuka Publ., 2016. 281 p. (in Russian).

6. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. On some analogues of spline interpolation formulas for functions of a matrix variable. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2015, vol. 59, no. 4, pp. 17–24 (in Russian).

7. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. Interpolation formulas for functions, defined on the sets of matrices with different multiplication rules. *Zhurnal obchislyuval'noї ta prikladnoї matematiki = Journal of Numerical & Applied Mathematics*, 2016, no. 2 (122), pp. 140–158.

8. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. On a spline-interpolation of functions with matrix variables. *Analytic Methods of Analysis and Differential Equations (AMADE-2015): Proc. of the 8th Int. Workshop, Minsk, Belarus, September 14–19, 2015*. UK, Cambridge Scientific Publishers, 2016, pp. 149–160.

9. Ignatenko M. V., Yanovich, L. A. On some interpolation formulas for functions defined on a set of matrices with Hadamard multiplication. *Analiticheskiye metody analiza i differentsial'nykh uravneniy (AMADE-2015). Tezisy dokladov 8-go Mezhdunarodnogo nauchnogo seminara* [Analytical Methods of Analysis and Differential Equations Abstract. Abstracts of the 8th International Scientific Seminar]. Minsk, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 2015, pp. 40–41 (in Russian).

10. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. *Interpolation Methods for Approximation of Operators Defined on Function Spaces and Sets of Matrices*. Minsk, Belaruskaya Navuka Publ., 2020. 476 p. (in Russian).

11. Ignatenko M. V., Yanovich L. A. On the convergence of the Lagrange interpolation process for functions defined on a set of matrices with Hadamard multiplication. *Matematicheskoye modelirovaniye i novyye obrazovatel'nyye tekhnologii v matematike. Materialy respublikanskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Mathematical Modeling and New Educational Technologies in Mathematics. Proceedings of the Republic Scientific-Practical Conference]. Brest, Brest State University, 2020, pp. 77–83 (in Russian).

12. Krylov V. I. On the determination of the smallest domain in which the holomorphism ensures the convergence of the Hermite interpolation for any system of nodes. *Doklady academii nauk SSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of USSR], 1951, vol. 78, no. 5, pp. 857–859 (in Russian).

13. Yanovich L. A., Tarasevich A. V. Convergence of interpolation with respect to scalar matrix nodes in the class of analytic functions. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2006, vol. 14, no. 2, pp. 102–111 (in Russian).

Информация об авторах

Игнатенко Марина Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: ignatenkomv@bsu.by. https://orcid.org/0000-0002-8029-1842

Янович Леонид Александрович – член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: yanovich@im.bas-net.by

Information about the authors

Marina V. Ignatenko – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of Web-Technologies and Computer Simulation Department, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ignatenkomv@bsu.by. https://orcid.org/0000-0002-8029-1842

Leonid A. Yanovich – Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yanovich@im.bas-net.by