W. Kutta

Stuttgart, Technische Hochschule.

Übungsblätter

für die Technische Hochschule München

Inhalt:

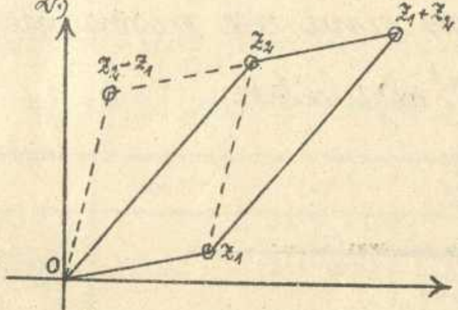
14. Nov. 1900. №1.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Aufgaben:

1, Man construire in der Gauss'schen Zahlenebene die geometrischen Bilder der nachfolgenden complexen Zahlen: $\alpha,\ -0,5+i$, $\beta,\ 2-3i$, $\gamma,\ -2-1,5\cdot i$, ferner die den Zahlen $\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot i$ und $\sqrt{2}+i$, sowie der Summe und der Differenz derselben entsprechenden Punkte.

2.)



Mit o sei der Nullpunkt der Zahlenebene bezeichnet, z_1 und z_2 seien die Bilder zweier complexer Zahlen a_1+ib_1 bzw. a_2+ib_2. Ergänzt man das Dreieck oz_1z_2 zu einem Parallelogramm mit der Diagonale z_1z_2, so ist die vierte Ecke das geometrische Bild der Summe der beiden complexen Zahlen. Beweis!

Ergänzt man jedoch das Dreieck oz_1z_2 zu einem Parallelogramm mit der Diagonale oz_2, so wird die vierte Ecke das Bild der Differenz $z_2 - z_1$. Beweis!

3., Wie findet man, wenn das Bild einer complexen Zahl z gegeben ist, durch einfache Konstruktion die den Zahlen $z \cdot i$, $-z$, $-z \cdot i$ entsprechenden Punkte?

4., Wie viel Inversionen enthält

α., die Complexion: $e\,c\,a\,d\,b$ β., die Complexion: $c\,f\,d\,e\,b\,a$?

5., Wie viel zehnziffrige Zahlen gibt es, deren Ziffern alle von einander verschieden sind?

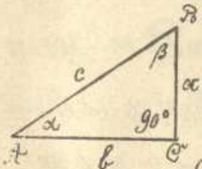
6., Man berechne, wenn $tg\alpha = c$ gegeben ist, die übrigen trigonometrischen Funktionen des Winkels α. [z. B. $c = \frac{3}{4}$]

7., Aus dem regulären Zehneck sind die trigonometrischen Funktionen von $18°$ abzuleiten.

21. Nov. 1900. №2.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln aus der Trigonometrie:



Definition: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $tg\,\alpha = \frac{a}{b}$; $ctg\,\alpha = \frac{b}{a}$; $\sec\alpha = \frac{c}{b}$; $cosec\,\alpha = \frac{c}{a}$.

Hieraus folgt: 1.) $\underline{tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1}$; 2.) $\sin\alpha \cdot cosec\,\alpha = 1$; 3.) $\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$.

Durch Anwendung des pyth. Satzes findet man:

1.) $\underline{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$; 2.) $cosec^2\alpha = 1 + ctg^2\alpha$; 3.) $\sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha$.

Endlich folgt noch aus den Definitionsgleichungen: $tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Für 2 Complementswinkel α und $\beta = 90° - \alpha$ gelten die Beziehungen:

$$f(\alpha) = cf(90° - \alpha) \quad ; \quad cf(\alpha) = f(90° - \alpha)$$

oder, wenn man $\alpha = 45° + \lambda$ setzt: $f(45° + \lambda) = cf(45° - \lambda)$; $cf(45° + \lambda) = f(45° - \lambda)$.

Tabelle für den Zusammenhang der trigonometrischen Funktionen eines Winkels α.

	sin	cos	tg	ctg
$\sin\alpha =$	—	$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$
$\cos\alpha =$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	—	$\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$\frac{ctg\,\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$
$tg\,\alpha =$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	—	$\frac{1}{ctg\,\alpha}$
$ctg\,\alpha =$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{tg\,\alpha}$	—

Für die Bestimmung der trigon. Funktionen von Winkeln über 90° gilt folgende <u>Regel</u>: „Enthält der Winkel ein ungerades Vielfaches von 90°, so geht die Funktion in die Cofunktion über; enthält er ein gerades Vielfaches von 90°, so bleibt die Funktion ungeändert. Das Vorzeichen hängt vom Quadranten ab, und zwar ist:

der Sinus positiv im I. und II., negativ im III. und IV. Quadranten
der Cosinus positiv im I. und IV., negativ im II. und III. Quadranten,
also tg. und ctg. positiv im I und III., negativ im II und IV. Quadranten."

Formeln aus der Analysis:

Die Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen ist: $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

Wenn aber unter n Elementen r Elemente mit demselben Zeichen α, s Elemente mit demselben Zeichen β, t Elemente mit demselben Zeichen γ u. s. w. bezeichnet sind, ist die Anzahl der verschiedenen Permutationen: $P_n' = \frac{n!}{r!\,s!\,t!\ldots}$

Anzahl der Combinationen von n Elementen zur p^{ten} Klasse:

α, ohne Wiederholung: $C_n^{p} = \binom{n}{p} = \frac{n \cdot (n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p}$

b, mit Wiederholung: $'C_n^{p} = \frac{n \cdot (n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots p}$

Aufgaben:

1., Wie viel von einander verschiedene 7-ziffrige Zahlen lassen sich: α, mit den Ziffern 1, 2, 2, 7, 9, 9, 9 β, mit den Ziffern: 0, 0, 0, 3, 3, 8, 8 bilden?

2., Wie oft lassen sich 4 [6] (allgemein n) Punkte, von denen keine 3 auf einer Geraden liegen, durch geschlossene Polygonzüge zu verschiedenen 4= [6=] (allgemein n=) Ecken verbinden?

3., Man teile durch Konstruktion einen gegebenen Winkel α in 2 Teile x und y, deren Sinus [Cosinus] in dem gegebenen Verhältnis $m : n$ (2:3) stehen!

4., Man construire: $x = \frac{m \cdot \sin\alpha}{\sin\beta}$! ($\alpha$, β gegebene Winkel, m gegebene Strecke.)

5., Man stelle den Verlauf der Funktion $y = \sec x$ graphisch dar!

6., Man berechne: $\frac{\sin(270^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(180^\circ - \beta)}{\operatorname{tg}(180^\circ + \beta) \cdot \cos(180^\circ - \alpha)} + \frac{\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) \sin(\gamma - 90^\circ)}{\cos(180^\circ - \gamma) \cdot \operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha)}$!

28. Nov. 1900. № 3.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Nachtrag zu den Formeln aus der Analysis [vergl. Blatt № 2]

Anzahl der Variationen von n Elementen zur p^{ten} Klasse:

α, ohne Wiederholung: $V_n^p = n\cdot(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$; also $V_n^p = p!\,C_n^p$,

b, mit Wiederholung: $'V_n^p = n^p$.

Aufgaben:

1, Wenn von n [20] Geraden k_1 [8] durch einen Punkt, k_2 [5] durch einen anderen Punkt gehen, in wie viel Punkten können sich alle Linien durschneiden?

2, Wie viel Tetraëder werden durch n Punkte im Raume bestimmt: α, wenn niemals 4 Punkte in einer Ebene liegen,
β, wenn k_1 Punkte in einer Ebene und k_2 Punkte in einer anderen Ebene liegen?

3, Wie oftmal können aus den Zahlen: a, b, c, d, e Produkte von Potenzen α, von der Form: $a^\alpha\cdot b^\beta\cdot c^\gamma$,
β, von der Form $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$ gebildet werden?

4, Ein Lichtstrahl fällt unter $\alpha = 45^\circ$ Einfallswinkel auf eine $d = 2$ cm dicke planparallele Glasplatte. Wie groß ist die Parallelverschiebung v des Strahls nach dem Durch=

gang? Der Brechungsexponent des Lichtes für den Übergang von Luft in Glas ist $n = \frac{3}{2}$.

5., Wie viel km. beträgt ein Grad auf dem 45.° Breitenkreise, wenn die Erde als Kugel mit dem Radius 6370 km. angenommen wird?

6., Man drücke die nachfolgenden trigonometrischen Funktionen auf zweifache Art durch solche von Winkeln des 1. Quadranten aus:

1., $\sin 218^\circ$; 2., $\cos 281^\circ$; 3., $\mathrm{tg}\, 192^\circ$; 4., $\sin 313^\circ$;
5., $\cos 245^\circ$; 6., $\mathrm{tg}\, 116^\circ$; 7., $\cos 98^\circ$; 8., $\mathrm{ctg}\, 307^\circ$; 9., $\sin 129^\circ$.

7., Welche Werte haben folgende cyklometrische Ausdrücke:

1., $\mathrm{arc\,sin}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$; 2., $\mathrm{arc\,cos}\left(-\frac{1}{2}\right)$; 3., $\mathrm{arc\,tg}\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$;
4., $\mathrm{arc\,ctg}(-1)$; 5., $\mathrm{arc\,sin}\,\frac{1-\sqrt{5}}{4}$?

5. Dez. 1900. №4.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln aus der Analysis:

Binomischer Satz: $(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot y + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot y^2 + \binom{n}{3} \cdot x^{n-3} \cdot y^3 + \ldots\ldots\ldots$

[n ganze positive Zahl.] $\ldots + \binom{n}{p} \cdot x^{n-p} \cdot y^p + \ldots\ldots + \binom{n}{n-1} \cdot x \cdot y^{n-1} + y^n$.

Hiebei ist $\binom{n}{p} = \frac{n \cdot (n-1)(n-2) \ldots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots p}$; $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$. Für diese Binomialkoeffizienten gelten die Relationen: $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ $\left[= \frac{n!}{p!\,(n-p)!}\right]$, insbesondere $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$. Mithin ist die Summe zweier aufeinanderfolgender Binomialcoefficienten mit dem Index p bzw. $p-1$ für die n^{te} Potenz gleich dem Binomialkoeffizient mit dem Index p für die nächst höhere Potenz. Daraus ergibt sich nebenstehendes Schema für die Binomialkoeffizienten. [Pascal'sches Dreieck.]

1
1 . 2 . 1
1 . 3 . 3 . 1
1 . 4 . 6 . 4 . 1
1 . 5 . 10 . 10 . 5 . 1
1 . 6 . 15 . 20 . 15 . 6 . 1
1 . 7 . 21 . 35 . 35 . 21 . 7 . 1
1 . 8 . 28 . 56 . 70 . 56 . 28 . 8 1

Formeln aus der Trigonometrie:

Additionstheoreme:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta.$ $\quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta.$

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$; $\operatorname{cotg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}$; $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}$.

Für $\alpha = \beta$ ergibt sich: $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ und $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, und aus der letzten Gleichung: $1 + \cos(2\alpha) = 2 \cdot \cos^2\alpha$; $1 - \cos(2\alpha) = 2 \cdot \sin^2\alpha$.

oder: $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}}$; $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}}$.

Setzt man in den Gleichungen:

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos y \;;\quad \sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \cdot \cos x \cdot \sin y \;;$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cdot \cos x \cdot \cos y \;;\quad \cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \cdot \sin x \cdot \sin y$$

$x+y=\alpha$ und $x-y=\beta$, also $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$, so erhält man:

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\quad \sin\alpha-\sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\quad \cos\alpha-\cos\beta = -2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Aufgaben:

1., α. Entwickle $(3a-2b)^7$ nach dem binomischen Satze!

β., Wie lauten die beiden mittleren Glieder in der Entwicklung von $\left[\frac{2a^2b^3}{c^2}-\frac{3c^3}{ab^2}\right]^9$?

2., Welche Relationen zwischen Binomialkoeffizienten ergeben sich durch Anwendung des binomischen Satzes α., auf $(1+1)^n=2^n$, β., auf $(1-1)^n=0$?

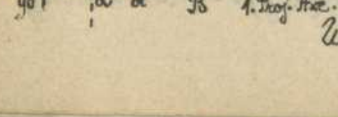
3., Die Anzahl aller Kombinationen in allen Klassen aus n verschiedenen Elementen [ohne Wiederholung] ist 2^n-1. Beweis!

4., Aus der Identität $(x+1)^{n+r}=(x+1)^n\cdot(x+1)^r$ leite man durch Anwendung des binomischen Satzes die Relation ab: $\binom{n+r}{p}=\binom{n}{p}+\binom{n}{p-1}\binom{r}{1}+\binom{n}{p-2}\binom{r}{2}+\binom{n}{p-3}\binom{r}{3}+\dots\binom{r}{p}$, und hieraus durch Specialisirung: $\binom{2n}{n}=1+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\binom{n}{3}^2+\dots\binom{n}{n}^2$!

5., Man beweise: α., $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)$! β., $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta$.

6., Man beweise: $\arcsin\frac{8}{17}+\arcsin\frac{15}{17}=\frac{\pi}{2}$! [Man setzt $\arcsin\frac{8}{17}=a$, $\arcsin\frac{15}{17}=b$, so daß $\sin a=\frac{8}{17}$, $\sin b=\frac{15}{17}$, und zeigt, daß $\sin(a+b)=1$, also $a+b=\frac{\pi}{2}$ ist.] Analog verfahre man, um zu beweisen, daß $\operatorname{arctg}(2-\sqrt{3})+\operatorname{arctg}(2+\sqrt{3})=\frac{\pi}{2}$!

7.,



Von einem Fünfeck ABCDE sind gegeben die Seiten $a=30$, $b=20$, $c=30$, $d=40$, sowie die äusseren Winkel $\beta=40^\circ$, $\gamma=60^\circ$, $\delta=90^\circ$. Durch (zweimalige) Anwendung des Projektionssatzes berechne man die fehlenden Winkel ε und α, sowie die Seite e!

12. Dez. 1900. №. 5.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln aus der Analysis:

Differenzreihen: Bildet man aus den Gliedern der Hauptreihe: $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots u_n, \ldots$ die I. Differenzreihe: $\Delta u_0, \Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3 \ldots\ldots$ wobei $\Delta u_r = u_{r+1} - u_r$, sodann die II. Differenzreihe: $\Delta^2 u_0, \Delta^2 u_1, \Delta^2 u_2, \Delta^2 u_3 \ldots\ldots$ wobei $\Delta^2 u_r = \Delta u_{r+1} - \Delta u_r$ dann die III. Differenzreihe: $\Delta^3 u_0, \Delta^3 u_1, \Delta^3 u_2, \Delta^3 u_3 \ldots\ldots$ wobei $\Delta^3 u_r = \Delta^2 u_{r+1} - \Delta^2 u_r$ u.s.w., so berechnet sich das 1. Glied der n^{ten} Differenzreihe aus den Gliedern der Hauptreihe nach Gleichung:

$$\text{I.}\quad \Delta^n u_0 = u_n - \binom{n}{1} u_{n-1} + \binom{n}{2} \cdot u_{n-2} - \binom{n}{3} u_{n-3} + - \cdots\cdots (-1)^n \cdot u_0,$$

ebenso das $(r+1)^{\text{te}}$ Glied der n^{ten} Differenzreihe aus Gleichung:

$$\text{II.}\quad \Delta^n u_r = u_{n+r} - \binom{n}{1} \cdot u_{n+r-1} + \binom{n}{2} u_{n+r-2} - \binom{n}{3} u_{n+r-3} + - \cdots\cdots (-1)^n \cdot u_r.$$

Umgekehrt findet man aus u_0 und den Anfangsgliedern der Differenzreihen die Glieder der Hauptreihe nach Formel

$$\text{III.}\quad u_n = u_0 + \binom{n}{1} \cdot \Delta u_0 + \binom{n}{2} \cdot \Delta^2 u_0 + \binom{n}{3} \cdot \Delta^3 u_0 + \cdots\cdots + \Delta^n u_0,$$

sowie die Summe der n ersten Glieder, d.i. $\Sigma_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$ aus:

$$\text{IV.}\quad \Sigma_n = \binom{n}{1} u_0 + \binom{n}{2} \Delta u_0 + \binom{n}{3} \Delta^2 u_0 + \binom{n}{4} \cdot \Delta^3 u_0 + \cdots + \Delta^{n-1} u_0.$$

Arithmetische Reihe k^{ter} Ordnung nennt man eine Folge von Zahlengrößen, welche die Eigenschaft besitzt, daß die Glieder ihrer k^{ten} Differenzreihe sämmtlich einander gleich werden. Da also alle höheren Differenzreihen verschwinden, wird das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied u_n der arith. Reihe k^{ter} Ord.

$$\text{V.}^{a}\quad u_n = u_0 + \binom{n}{1} \Delta u_0 + \binom{n}{2} \cdot \Delta^2 u_0 + \binom{n}{3} \cdot \Delta^3 u_0 + \cdots + \binom{n}{k} \cdot \Delta^k u_0$$

und die Summe der n ersten Glieder:

$$\text{V.}^{b}\quad \Sigma_n = n \cdot u_0 + \binom{n}{2} \cdot \Delta u_0 + \binom{n}{3} \cdot \Delta^2 u_0 + \binom{n}{4} \cdot \Delta^3 u_0 + \cdots + \binom{n}{k+1} \Delta^k u_0.$$

Aufgaben.

1., Man zeige, daſs die Zahlen: 1, 3, 6, 12, 26, 56, 113, 211 die ersten Glieder einer arithmetischen Reihe 4. Ordnung sind, stelle das allgemeine [n^{te}] Glied derselben auf und berechne die Summe der n [10] ersten Glieder!

2., α. Man summire die arithmetische Reihe:

$$1\cdot3+3\cdot5+5\cdot7+7\cdot9+\cdots(2n+1)(2n+3)=\sum_{i=0}^{i=n}(2i+1)(2i+3)\,!$$

β., Ebenso summire man: $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots n^3$ und zeige, daſs diese Summe ein vollständiges Quadrat ist!

3., Man beweise folgende Sätze: α., Die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen ist wieder eine Dreieckszahl.
β., Die Differenz der Quadrate zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen ist ein vollständiger Cubus. [Dreieckzahlen sind von der Form: $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$]

4., Man drücke die sämmtlichen trigonometrischen Funktionen eines Winkels α aus durch $tg\frac{\alpha}{2}=m$!

5. Aus $tg\,\alpha=\frac{1}{7}$, $tg\,\beta=\frac{1}{3}$ bestimme man (ohne Zuhilfenahme einer Tabelle) den Winkel $\alpha+2\beta$!

6. Aus $x+y=82^\circ$ und $\cos x+\cos y=1{,}23644$ berechne man die Winkel x und y, und zwar indem man sich durch geeignete Umformung der letzten Gleichung noch $x-y$ verschafft. Analog verfahre man, um aus $x-y=44^\circ$ und $\sin x+\cos y=1{,}84101$ die Winkel x und y zu berechnen.

7., Für $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ ist:

$$\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma}{ctg\,\alpha\,ctg\,\beta+ctg\,\beta\cdot ctg\,\gamma+ctg\,\gamma\cdot ctg\,\alpha}=\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma.$$

Beweis!

19. Dez. 1900. №6.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln aus der Trigonometrie:

I. Lösung der trigonometrischen Gleichung: $a \cdot \cos x + b \sin x = c$.
Man setze $a = m \cdot \sin\varphi$, $b = m \cdot \cos\varphi$, also 1., $m = +\sqrt{a^2+b^2}$ und 2., $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}$, (wobei φ bis auf Vielfache von 2π vollkommen bestimmt ist); dann findet man nach Berechnung von m und φ für den gesuchten Winkel x zwei Werte aus 3., $\sin(\varphi + x) = \frac{c}{m}$.

II. Trigonometrische Auflösung der Gleichungen 2. Grades mit reellen Wurzeln: $x^2 + px + q = 0$. α., Ist $+q$ eine negative Größe, also $-q$ positiv, so setzt man $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{p}\sqrt{-q}$ und erhält nach Berechnung von φ die Wurzeln der Gleichung in der Form: $x_1 = \sqrt{-q} \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, $x_2 = -\sqrt{-q}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$.
β., Ist dagegen q positiv und $\frac{4q}{p^2} < 1$, [nur dann sind die Wurzeln reell] so setzt man $\sin\varphi = \sqrt{\frac{4q}{p^2}}$ und berechnet daraus φ; die beiden Wurzeln sind alsdann: $x_1 = -p \cdot \sin^2\frac{\varphi}{2}$, $x_2 = -p \cdot \cos^2\frac{\varphi}{2}$.

Formeln aus der algebraischen Analysis:

Trigonometrische Darstellung complexer Zahlen:
Jede complexe Zahl $x + iy$ lässt sich darstellen in der Form: $x + iy = \varrho[\cos\varphi + i\sin\varphi]$ $(= \varrho \cdot [\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)])$. Der Modul $\varrho = +\sqrt{x^2 + y^2}$; das Argument φ bestimmt sich, den Gleichungen $x = \varrho \cdot \cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$ entsprechend, bis auf Vielfache von 2π, aus: $\varphi = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{y}{x} = \arccos\frac{x}{\varrho} = \arcsin\frac{y}{\varrho}$.

Multiplikation zweier complexer Zahlen: $(x+iy)\cdot(x'+iy') = \varrho\cdot[\cos\varphi + i\sin\varphi] \times \varrho'\cdot[\cos\varphi' + i\sin\varphi'] = \varrho\cdot\varrho'[\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi')]$.

Division zweier complexer Zahlen: $\frac{x+iy}{x'+iy'} = \frac{\varrho[\cos\varphi + i\sin\varphi]}{\varrho'[\cos\varphi' + i\sin\varphi']} = \frac{\varrho}{\varrho'}[\cos(\varphi-\varphi') + i\sin(\varphi-\varphi')]$

Speziell: $\frac{1}{x+iy} = \frac{1}{\varrho[\cos\varphi + i\sin\varphi]} = \frac{1}{\varrho}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)] = \frac{1}{\varrho}[\cos\varphi - i\sin\varphi]$.

Der Moivre'sche Satz: Die Gleichung $(x+iy)^n = [\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \varrho^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]$ gilt nicht nur für positive und negative ganzzahlige Werte von n, sondern auch, wenn n eine gebrochene Zahl ist. Dann aber kommt in Betracht, daß das Argument nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist. Für $n = \frac{1}{m}$ (wobei m eine ganze Zahl sein soll) besagt daher der Moivre'sche Satz:

$$(x+iy)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\varrho[\cos\varphi + i\sin\varphi]} = \sqrt[m]{\varrho}\left[\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{m} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{m}\right].$$

Für $k = 0, 1, 2, 3 \ldots m-1$ ergeben sich hieraus die m verschiedenen Wurzelwerte von $\sqrt[m]{x+iy}$.

Aufgaben:

1., Folgende complexe Zahlen sind in trigonometrische Form umzusetzen: α., $-1 + i\sqrt{3}$ β., $-2 \cdot i$ γ., $\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + i(1 - \sqrt{5})$ δ., -3.

2., Man berechne (trigonometrisch) die verschiedenen Werte von $\sqrt[4]{16 \cdot i}$.

3., Man drücke $\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$ durch $\operatorname{arctg} x$ aus!

4., Man berechne x aus der Gleichung $\operatorname{arctg}\frac{1}{x+1} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$.

5., Man löse die Gleichung: $280 \cdot \sin x - 392 \cos x = 169$.

6., Durch Einführung eines Hilfswinkels bestimme man die Wurzeln der quadratischen Gleichung: $3.1426 \cdot x^2 - 2.5739 x = 7.4226$.

9. Jan. 1901. №. 7.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln:

1. $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \sin(\alpha+3\beta) + \ldots\ldots + \sin[\alpha+(n-1)\beta] = \dfrac{\sin[\alpha+\frac{n-1}{2}\beta]\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$.

Hieraus für $\alpha=0$: $\sin\beta + \sin 2\beta + \sin 3\beta + \ldots\ldots + \sin[(n-1)\beta] = \dfrac{\sin[\frac{n-1}{2}\beta]\cdot\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$.

2. $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \cos(\alpha+3\beta) + \ldots\ldots + \cos[\alpha+(n-1)\beta] = \dfrac{\cos[\alpha+\frac{n-1}{2}\beta]\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$.

Hieraus 1. für $\alpha=0$: $1+\cos\beta+\cos 2\beta+\cos 3\beta+\ldots+\cos[(n-1)\beta] = \dfrac{\cos[\frac{n-1}{2}\beta]\cdot\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$,

2. für $\alpha=\beta$: $\cos\beta+\cos 2\beta+\cos 3\beta+\ldots+\cos(n\beta) = \dfrac{\cos[\frac{n+1}{2}\beta]\cdot\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$.

Die Summenformeln für die analogen trigonometrischen Reihen mit alternirenden Vorzeichen erhält man aus diesen, indem man β durch $180^\circ+\beta$ ersetzt!

Die Anwendung des binomischen Satzes auf $[\cos\varphi + i\sin\varphi]^m = \cos(m\varphi)+i\sin(m\varphi)$ ergibt: 1. $\cos(m\varphi) = \cos^m\varphi - \binom{m}{2}\cos^{m-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + \binom{m}{4}\cos^{m-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi - \binom{m}{6}\cos^{m-6}\varphi\cdot\sin^6\varphi + - \ldots\ldots$

2. $\sin(m\varphi) = \binom{m}{1}\cos^{m-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \binom{m}{3}\cos^{m-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + \binom{m}{5}\cos^{m-5}\varphi\sin^5\varphi - \binom{m}{7}\cos^{m-7}\varphi\sin^7\varphi + - \ldots\ldots$

Die Wurzeln der binomischen Gleichungen $\begin{cases} x^n-1=0 \\ x^n+1=0 \end{cases}$ sind: $\begin{cases} \cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n} \\ \cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n} \end{cases}$ [Für $k=0.1.2.3\ldots(n-1)$]

Eine n^{te} Wurzel der Einheit heißt primitiv, wenn sie die Eigenschaft hat, daß erst ihre n^{te} Potenz, nicht etwa schon eine niedrigere Potenz gleich $+1$ wird. Alle übrigen n^{ten} Wurzeln der Einheit lassen sich als Potenzen einer derartigen primitiven Wurzel darstellen.

Der Satz von Côtes.

I. n sei eine gerade Zahl, so:

1. $a^n-b^n = (a^2-b^2)(a^2-2ab\cos\frac{2\pi}{n}+b^2)(a^2-2ab\cos\frac{4\pi}{n}+b^2)(a^2-2ab\cos\frac{6\pi}{n}+b^2)\ldots\ldots(a^2-2ab\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+b^2)$

2. $a^n+b^n = (a^2-2ab\cos\frac{\pi}{n}+b^2)(a^2-2ab\cos\frac{3\pi}{n}+b^2)(a^2-2ab\cos\frac{5\pi}{n}+b^2)\ldots\ldots(a^2-2ab\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+b^2)$.

II. $\underline{n}$ sei eine ungerade Zahl, so:

1., $a^n - b^n = (a-b)\left(a^2 - 2ab\cos\frac{2\pi}{n} + b^2\right)\left(a^2 - 2ab\cos\frac{4\pi}{n} + b^2\right)\left(a^2 - 2ab\cos\frac{6\pi}{n} + b^2\right)\ldots\ldots\left(a^2 - 2ab\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + b^2\right).$

2., $a^n + b^n = (a+b)\left(a^2 - 2ab\cos\frac{\pi}{n} + b^2\right)\left(a^2 - 2ab\cos\frac{3\pi}{n} + b^2\right)\left(a^2 - 2ab\cos\frac{5\pi}{n} + b^2\right)\ldots\ldots\left(a^2 - 2ab\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + b^2\right).$

Aufgaben:

1., Die nachfolgenden Ausdrücke sind auf eine reelle Form zu bringen:

$$\alpha.,\ \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1-i)^n}. \qquad \beta.,\ \frac{1}{i}\left[\frac{\varepsilon_1}{(1+\varepsilon_1)^n} - \frac{\varepsilon_2}{(1+\varepsilon_2)^n}\right].$$

(Bei β. bedeuten ε_1 und ε_2 die beiden complexen Wurzelwerte von $\sqrt[3]{1}$.)

2. Man bestimme die Wurzeln der Gleichung $64x^6 + 729 = 0$ und zerlege das Binom $64x^6 + 729$ in reelle Faktoren!

3., Ein Halbkreis vom Radius 1 ist durch Teilungspunkte in n gleiche Teile geteilt; es soll die Summe S der sämmtlichen von den Teilungspunkten auf den Durchmesser gefällten Senkrechten bestimmt werden.

4., Man bestimme die Summe der Reihe:

$$S = \cos x \cdot \cos 2x + \cos 2x \cdot \cos 3x + \cos 3x \cdot \cos 4x + \ldots\ldots + \cos(nx)\cos(n+1)x.$$

(Man wende die Formel an: $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$!)

5., Ein Dreieck mit den Winkeln $\alpha\,\beta\,\gamma$ ist rechtwinklig,

$$\alpha.,\ \text{wenn}: \frac{\sin\alpha + \cos\beta}{\cos\alpha + \sin\beta} = tg\,\alpha$$

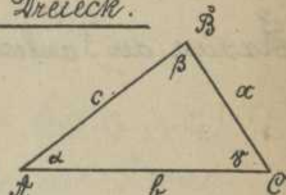
$$\beta.,\ \text{oder wenn}: 2\sin\alpha \cdot \sin\beta = \sin(2\alpha)\sin\gamma - \cos\gamma.$$

Beweis!

16. Jan. 1901. № 8.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Trigonometrische Formeln für das ebene schiefwinkelige Dreieck.



I. Der Sinussatz: $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

Oder: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ [$= 2r$, wenn r der Radius des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises ist.] Aus dem Sinussatze folgt:

1., $a : (b+c) = \cos\dfrac{\beta+\gamma}{2} : \cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}$.

2., $a : (b-c) = \sin\dfrac{\beta+\gamma}{2} : \sin\dfrac{\beta-\gamma}{2}$.

hieraus durch Div. 3., $\dfrac{b+c}{b-c} = \operatorname{tg}\dfrac{\beta+\gamma}{2} : \operatorname{tg}\dfrac{\beta-\gamma}{2}$. (Tangentensatz.)

Der Tangentensatz wird angewendet, wenn von einem Dreieck 2 Seiten b, c und der eingeschlossene Winkel α gegeben sind.

II. Der Inhaltssatz: $\Delta ABC = \frac{1}{2}\, ab \sin\gamma = \frac{1}{2}\, bc \sin\alpha = \frac{1}{2}\, ac \sin\beta$.

III. Der Cosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Umformung des Cosinussatzes für die logarithmische Rechnung:

1. Entweder setzt man $\cos\alpha = 2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$, so daß $a^2 = (b+c)^2 - 4bc\cos^2\frac{\alpha}{2}$, also

$$a = \sqrt{(b+c+m)(b+c-m)} \quad \text{wobei} \quad m = 2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{bc}.$$

2. Oder man setzt $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, so daß $a^2 = (b-c)^2 + 4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}$, sodann führt man einen Hilfswinkel φ ein durch $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{b-c}\sqrt{bc}$ und findet: $a = \dfrac{b-c}{\cos\varphi}$.

IV. Der Halbwinkelsatz: $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{s\cdot(s-a)}{b\cdot c}}$; $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{b\cdot c}}$; $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$.

dabei ist $s = \dfrac{a+b+c}{2}$; somit wird $\Delta ABC = bc\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{s\cdot(s-a)(s-b)(s-c)}$.

V. Der Projektionssatz: $c = a\cdot\cos\beta + b\cdot\cos\alpha$. Aus V. und I. endlich:

VI. Die Tangentenformel: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{b\cdot\sin\alpha}{c - b\cdot\cos\alpha}$.

Ist r der Radius des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises, so gilt:

$$a = 2r\cdot \sin\alpha \;;\quad b = 2r\sin\beta \;;\quad c = 2r\sin\gamma .$$

Radius des einem Dreieck eingeschriebenen Kreises $\varrho = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} = \frac{\Delta}{s}$.

Radien der 3 anbeschriebenen Kreise: $\varrho_a = \frac{\Delta}{s-a}$; $\varrho_b = \frac{\Delta}{s-b}$; $\varrho_c = \frac{\Delta}{s-c}$.

Aufgaben:

1., Man bringe den Ausdruck: $\frac{\varepsilon_1^n}{i\sqrt{3}-\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_2^n}{-i\sqrt{3}-\varepsilon_2}$ auf eine reelle Form!
(Dabei sind $\varepsilon_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ und $\varepsilon_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ die complexen Werte von $\sqrt[3]{1}$.)

2., Man berechne x aus: $x^{2n} - 2x^n\cdot a^n\cdot\cos\alpha + a^{2n} = 0$ (a sei reell), und stelle den Ausdruck $x^{2n} - 2x^n a^n\cos\alpha + a^{2n}$ als Produkt von n reellen Faktoren dar!

3. $\sin 7x$ und $\cos 7x$ sind in Ausdrücke zu verwandeln, die nur nach Potenzen von $\sin x$ oder $\cos x$ fortschreiten!

4., Zwischen 2 Orten A, B befinde sich ein Berg, welcher durch einen Tunnel in der Richtung AB durchbohrt werden soll. Um die Lage und Länge desselben anzugeben, seien von C aus die Entfernungen $CA = b = 1447{,}4$ m, $CB = a = 3225{,}8$ m und der Winkel $\gamma = \sphericalangle ACB = 57^\circ 12' 16''$ gemessen worden. Man berechne die Winkel α und β, unter denen von A aus gegen AC und von B aus gegen BC gearbeitet werden muß, und nachdem in den betreffenden Richtungen die Strecken $AD = 415{,}2$ m und $BE = 733{,}8$ m bis zu den Endpunkten des Tunnels gemessen sind, auch die Länge desselben.

5., Eine Kraft $R = 871.92$ kg soll in 2 Komponenten P und Q zerlegt werden, die einen vorgegebenen $\sphericalangle \alpha = 60^\circ 41'$ einschließen. Wie groß ist P, wenn $Q = 765.86$ kg und welche Winkel bilden P und Q mit der Resultante R?

30. Jan. 1901. № 9.

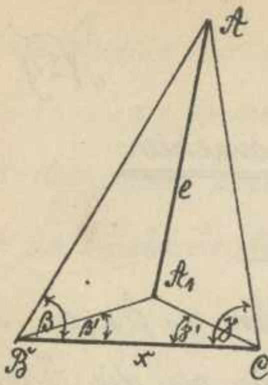
Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln aus der algebraischen Analysis:

1. Eine Funktion von n unabhängigen Variablen $y = f(x_1, x_2 \dots x_n)$ von der Dimension p heißt homogen, wenn für sie die Identität besteht: $f(x_1 \cdot t, x_2 \cdot t, x_3 \cdot t \dots x_n \cdot t) = t^p \cdot f(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$.
2. Die Anzahl der Glieder der allgemeinsten ganzen rationalen Funktion p^{ten} Grades für n Variable ist: $C_{n+1}^{\prime p} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+p)}{p!}$.
3. Eine Funktion $y = f(x)$ ist an der Stelle $x = \alpha$ nur dann stetig, wenn $\lim\limits_{\delta=\varepsilon=0}\left[f(x+\delta) - f(x-\varepsilon)\right]_{x=\alpha} = 0$.

Aufgaben:

1. Für die vier Variablen $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ bilde man die ganze rationale symmetrische Funktion mit der Charakteristik [1, 1, 2]!
2. Man zeige auf Grund des oben angegebenen Kriteriums, daß die Funktion $y = \lg[x-\alpha]$ an der Stelle $x = \alpha$ unstetig ist.
3. Der Ausdruck $\mathfrak{U} = \frac{\cos(x_1 - x_3) + 2\cos\frac{x_1 - x_2}{2}\cos\left[\frac{x_1+x_2}{2} - x_3\right]}{\sin(x_2+x_3) + 2\sin\left[\frac{x_2+x_3}{2} + x_1\right]\cos\frac{x_2 - x_3}{2}}$ ist eine symmetrische Funktion der 3 Variablen $x_1\, x_2\, x_3$. Beweis durch einfache Umformung des Nenners und Zählers!
4. Die Entfernung x zweier Punkte B und C, die nicht direkt gemessen werden kann, ist dadurch zu bestimmen, daß man



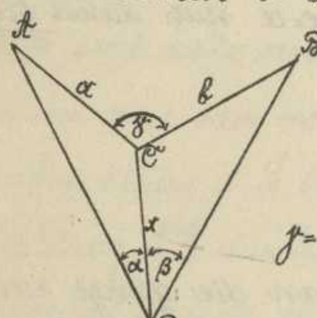
in B und C die Winkel $\beta, \beta'; \gamma, \gamma'$ misst, welche die Strahlen nach 2 Punkten A und A_1, deren Entfernung e bekannt ist, mit der Verbindungslinie BC einschließen.

Zahlenbeispiel: $e = 198{,}072^m$

$\beta = 62^\circ 20' 20''$, $\beta' = 19^\circ 44' 3''$; $\gamma = 79^\circ 56' 41''$, $\delta = 26^\circ 19' 37''$

(siehe Figur!)

5. Die gegenseitige Lage dreier Punkte ABC ist durch AC = a, BC = b und $\sphericalangle$ ACB = γ gegeben. Von einem vierten Punkte P aus erscheinen a und b bzw. unter den Winkeln α und β.



Wie groß ist die Entfernung der beiden Punkte P und C?

Zahlenbeispiel: $a = 5836{,}7^m$, $b = 7417{,}2^m$

$\gamma = 122^\circ 44' 14''$ $\alpha = 17^\circ 14' 23''$ $\beta = 25^\circ 32' 11''$.

(siehe Figur!)

6. Febr. 1901. № 10.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln aus der algebraischen Analysis. Interpolation.

Aufgabe der Interpolation: Vorgegeben ist eine Reihe von $n+1$ zusammengehörigen Wertepaaren $x_0 y_0$, $x_1 y_1$, $x_2 y_2 \ldots x_n y_n$. Man bilde eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades $y = f(x)$ derart, daß $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2) \ldots y_n = f(x_n)$, und bestimme mittels derselben (annäherungsweise) zu einem zwischen den gegebenen Werten $x_0\, x_1\, x_2 \ldots x_n$ liegenden Werte x den zugehörigen Wert y.

I. Interpolationsmethode von Newton.

Vorausgesetzt, daß $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_n - x_{n-1} = \alpha$, also $x_1 = x_0 + \alpha$, $x_2 = x_0 + 2\alpha$, $x_3 = x_0 + 3\alpha \ldots x_n = x_0 + n\alpha$, bildet man aus der Reihe, $y_0\, y_1\, y_2 \ldots y_n$ die I. Differenzreihe: $\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2 \ldots \Delta y_{n-1}$, die II. Differenzreihe: $\Delta^2 y_0, \Delta^2 y_1, \Delta^2 y_1 \ldots \Delta^2 y_{n-2}$ u. s. w. endlich die letzte Differenzreihe bestehend aus $\Delta^n y_0$. Alsdann lautet die Funktion von der verlangten Eigenschaft:

$$y = f(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{\alpha}\Delta y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{1\cdot 2\cdot\ \alpha^2}\Delta^2 y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{1\cdot 2\cdot 3\ \cdot \alpha^3}\Delta^3 y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ \cdot \alpha^4}\Delta^4 y_0$$

$$+ \cdots\cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \cdots n\ \cdot \alpha^n}\Delta^n y_0.$$

II. Interpolationsformel von Lagrange.

Die Funktion: $$y = \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_{\mu-1})(x-x_{\mu+1})\cdots\cdots(x-x_n)}{(x_\mu-x_0)(x_\mu-x_1)(x_\mu-x_2)\cdots(x_\mu-x_{\mu-1})(x_\mu-x_{\mu+1})\cdots\cdots(x_\mu-x_n)}\cdot y_\mu = f(x)$$

d. h. $$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}\cdot y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}\cdot y_1 + \cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}\, y_n$$

ist eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades von x mit der Eigenschaft, daſs $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2) \dots y_n = f(x_n)$. Mittels derselben kann sonach zu einem zwischen x_0 und x_n liegenden x der zugehörige Wert von y (durch Interpolation) gefunden werden. Bei dieser Methode ist nicht vorausgesetzt, daſs $x_0\, x_1\, x_2 \dots x_n$ in gleichen Abständen auf einander folgen.

Aufgaben:

1. Man stelle die Gleichung einer Kurve auf $y = f(x)$, wobei $f(x)$ eine ganze rationale Funktion 3. Grades von x sein soll, derart, daſs diese Kurve durch die Punkte mit den Koordinaten: $x_0 = -1$, $y_0 = -7$; $x_1 = 0$, $y_1 = -3$; $x_2 = +1$, $y_2 = -1$; $x_3 = +2$, $y_3 = 5$ geht. [Newton'sche Interpolationsmethode]

2. Die Dichtigkeit y der trockenen atmosphärischen Luft hängt bekanntlich vom Barometerstand H und der Temperatur x ab. Es sei durch Versuche bei $H = 760^{mm}$ gefunden für die Temperatur $x_0 = 10°$ die Dichte $y_0 = 0{,}001247$, für $x_1 = 13°$ $y_1 = 0{,}001234$, für $x_2 = 17°$ $y_2 = 0{,}001217$, für $x_3 = 20°$ $y_3 = 0{,}001205$. Man berechne mittels der Lagrange'schen Methode die Dichte y bei gleichem Barometerstand für die Temperatur $x = 15°$ und vergleiche das gefundene Resultat mit dem Werte, der sich aus der Formel $y = \frac{0{,}0012930}{1 + 0{,}003667 \cdot x} \cdot \frac{H}{760}$ ergibt.

3. Wie weit sind zwei durch ein Thal getrennte Bergspitzen A, B von einander entfernt, deren Höhen über dem Standpunkt C im Thale bzw. a und b Meter betragen, wenn die von C aus gemessene Erhebung der Spitze A über die Horizontale gleich α, die der Spitze B gleich β, und die Projektion des Gesichtswinkels ACB auf den Horizont γ ist? $a = 200$, $b = 1500$, $\alpha = 8°35'$, $\beta = 10°20'$, $\gamma = 140°45'$.

4. Von ΔABC sind gegeben die Koordinaten $[x_a\, y_a]$ und $[x_b\, y_b]$ der Ecken A u. B, ferner die Winkel α, β des Dreiecks. Gesucht sind die Koordinaten $[x_c\, y_c]$ der Ecke C!
Zahlenbeispiel: $x_a = 43{,}5^m$ $x_b = -56{,}4^m$
$y_a = -33{,}7^m$ $y_b = 18{,}8^m$ $\alpha = 44°40'$, $\beta = 31°20'$.

13. Febr. 1901. №11.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln aus der algebraischen Analysis. Partialbruchzerlegung.

Ist $\frac{\Phi(x)}{F(x)}$ eine rationale unecht gebrochene Funktion, so wird nach Division $\frac{\Phi(x)}{F(x)} = G(x) + \frac{f(x)}{F(x)}$, wobei $G(x)$ eine ganze Funktion (oder eine Konstante) und $\frac{f(x)}{F(x)}$ eine echt gebrochene Funktion d.h $f(x)$ von niedrigerem Grade als $F(x)$ ist. Für $\frac{f(x)}{F(x)}$ ergibt sich, vorausgesetzt dass $F(x)=0$ $n+1$ verschiedene Wurzeln $x_0\, x_1\, x_2 \dots x_n$ hat, also $F(x) = A(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ ist, [unmittelbar aus der Lagrange'schen Interpolationsformel] die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x_0)}{F'(x_0)}\cdot\frac{1}{x-x_0} + \frac{f(x_1)}{F'(x_1)}\cdot\frac{1}{x-x_1} + \dots\dots + \frac{f(x_n)}{F'(x_n)}\cdot\frac{1}{x-x_n} = \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \frac{f(x_\mu)}{F'(x_\mu)}\cdot\frac{1}{x-x_\mu}$$

Dabei ist $F'(x)$ die Abgeleitete von $F(x)$, also $F'(x_\mu) = A\cdot(x_\mu-x_0)(x_\mu-x_1)\cdots(x_\mu-x_{\mu-1})(x_\mu-x_{\mu+1})\cdots(x_\mu-x_n)$

Gewöhnlich setzt man nach der „Methode der unbestimmten Koefficienten" $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_0}{x-x_0} + \frac{A_1}{x-x_1} + \dots + \frac{A_\mu}{x-x_\mu} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n}$. Um A_μ zu finden, multiplicirt man beiderseits mit $x-x_\mu$ und setzt hierauf $x=x_\mu$, dann ergibt sich eben $A_\mu = \frac{f(x_\mu)}{A\cdot(x_\mu-x_0)(x_\mu-x_1)\cdots(x_\mu-x_{\mu-1})(x-x_{\mu+1})\cdots(x_\mu-x_n)} = \frac{f(x_\mu)}{F'(x_\mu)}$.

Hat $F(x)=0$ mehrfache Wurzeln, ist z. B. $F(x) = A\cdot(x-x_0)^2\cdot(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)$ so wird: $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{B_1}{(x-x_0)^2} + \frac{B_2}{x-x_0} + \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_\mu}{x-x_\mu} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n}$.

A_μ ergibt sich genau wie vorher. Ebenso kann B_1 gefunden werden, indem man nach Multiplication mit $(x-x_0)^2$ beiderseits $x=x_0$ setzt. Um B_2 zu bestimmen, multiplicirt man obige Identität mit $F(x)$, bildet auf beiden Seiten die 1. Abgeleitete und setzt $x=x_0$. Man erhält so eine Gleichung für B_1. Analog verfährt man, wenn $F(x)=0$ mehrere mehrfache Wurzeln besitzt.

Hat $F(x)=0$ auch (conjugirt) imaginäre Wurzeln, so können je 2 Partialbrüche, die 2 conjugirt imaginären Wurzeln $\alpha \pm i\beta$ entsprechen, zusammengefaßt werden zu einem reellen Bruche von der Form $\frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$.

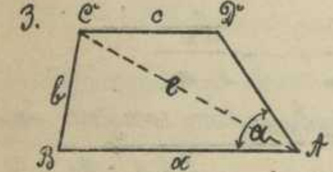
Bei dem Ansatze mittels unbestimmter Koefficienten, multiplicirt man, um A und B zu finden, beiderseits mit $(x-\alpha)^2+\beta^2$, setzt sodann für x einen der beiden Wurzelwerte $\alpha \pm i\beta$ ein und erhält so durch Gleichsetzung der reellen und imaginären Teile auf beiden Seiten 2 Gleichungen für A und B.

Aufgaben.

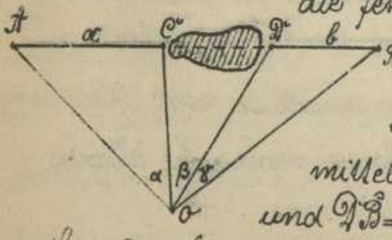
1. Gegeben sind die natürlichen Logarithmen von 4 Zahlen. $x_0 = 1$, $\lg x_0 = 0.000$; $x_1 = 2$, $\lg x_1 = 0.693$; $x_2 = 3$, $\lg x_2 = 1.099$; $x_3 = 4$, $\lg x_3 = 1.386$. Man bestimme mittels der Newton'schen Interpolationsmethode den natürlichen Logarithmus von $2,15 = \frac{9}{4}$ und vergleiche den gefundenen Wert mit dem aus $\lg 2,15 = 2 \cdot \lg \frac{3}{2} = 2[\lg 3 - \lg 2]$ sich ergebenden genaueren Werte.

2. Man zerlege folgende Funktionen in Partialbrüche:

$\alpha.)\ \frac{x^2+1}{x^2(x+1)}$ $\quad\beta.)\ \frac{x^3-2x^2-17x+4}{x^3+2x^2-5x-6}$ $\quad\gamma.)\ \frac{x^3-2x^2+7x+4}{(x-1)^2(x+1)^2}$.

3. 

Von einem Trapez ist gegeben: die Differenz der beiden parallelen Seiten $a-c=d$, die Seite b, der Winkel α und die Diagonale e. Man berechne die fehlenden Stücke des Trapezes!

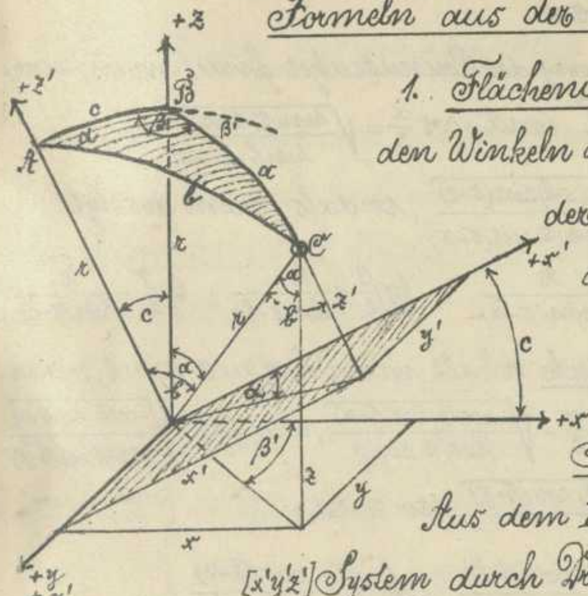


4. Von einer Standlinie AB, deren Länge wegen eines dazwischen befindlichen Hindernisses nicht unmittelbar gemessen werden kann, sind bekannt $AC = a$ und $DB = b$; ferner sind von O aus gemessen die Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$. Man berechne $x = CD$! Zahlenbeispiel: $a = 425^m$, $b = 100^m$; $\alpha = 56^\circ 12' 5''$, $\beta = 34^\circ 18' 24''$, $\gamma = 20^\circ 36' 7{,}5''$.

20. Febr. 1901. №. 12.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln aus der Trigonometrie.



1. Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks mit den Winkeln $\alpha\beta\gamma$: $J = r^2 \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \varepsilon$, wobei $\varepsilon = \alpha+\beta+\gamma-180^\circ$ der sphärische Excefs und r der Kugelradius ist.

2. Entwicklung der Fundamentalformeln für das sphärische Dreieck durch Koordinatentransformation:

Aus dem I. Koordinatensystem $[xyz]$ geht das II. $[x'y'z']$ System durch Drehung um die y-Axe mit dem Drehungswinkel c hervor. Die Koordinaten eines beliebigen Punktes C mit der Entfernung r vom Anfangspunkt sind:

in Bezug auf das I. System $\begin{cases} x = r \cdot \sin a \cdot \cos\beta' \\ y = r \cdot \sin a \cdot \sin\beta' \\ z = r \cdot \cos a \end{cases}$ (I.) in Bezug auf das II. System $\begin{cases} x' = r \cdot \sin b \cdot \cos\alpha \\ y' = r \cdot \sin b \cdot \sin\alpha \\ z' = r \cdot \cos b \end{cases}$ (II.)

Der Zusammenhang der beiden Koordinatensysteme wird vermittelt durch die Gleichungen III. $x = x'\cos c - z'\sin c$; $y = y'$; $z = x'\sin c + z'\cos c$. Aus den Gleichungen I II III ergeben sich somit für das sphärische Dreieck ABC mit den Seiten abc und den Winkeln α und $\beta = 180^\circ - \beta'$ die Formeln:

1., $-\sin a \cdot \cos\beta = \sin b \cos\alpha \cdot \cos c - \cos b \sin c$ 2., $\sin a \cdot \sin\beta = \sin b \cdot \sin\alpha$

3., $\cos a = \sin b \cdot \cos\alpha \cdot \sin c + \cos b \cdot \cos c$. Oder:

I. Der Sinussatz: $\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$. [aus 2.]

II. Der Cosinussatz: $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha$. [aus 3.]

III. [Der Sinus-Cosinussatz:] $\sin a \cdot \cos\beta = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cos c \cdot \cos\alpha$. [aus 1.]

Durch Anwendung dieser Gleichungen auf das Polardreieck mit den Seiten $a' = 180^\circ - \alpha$ u.s.w. und den Winkeln $\alpha' = 180^\circ - a$ ergeben sich die Gleichungen:

I* $\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma \cdot \cos a$. [Cosinussatz]

II* $\sin\alpha \cdot \cos b = \cos\beta \cdot \sin\gamma + \sin\beta \cdot \cos\gamma \cdot \cos a$.

IV. Der Halbwinkelsatz: Durch Umformung des Cosinussatzes findet man, wenn $s = \frac{a+b+c}{2}$:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \cdot \sin c}} \quad \text{und} \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s)\sin(s-a)}{\sin b \cdot \sin c}},$$

und hieraus durch Division: $tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin(s)\sin(s-a)}}$, so daß, wenn gesetzt wird $k = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin(s)}}$,

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{k}{\sin(s-a)}; \quad tg\frac{\beta}{2} = \frac{k}{\sin(s-b)}; \quad tg\frac{\gamma}{2} = \frac{k}{\sin(s-c)}.$$

IV* Durch Anwendung auf das Polardreieck erhält man hieraus sofort, wenn $\sigma = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$:

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta \cdot \sin\gamma}}; \quad \sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma \cdot \cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta \cdot \sin\gamma}}, \text{ also } tg\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma \cdot \cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}}$$

Setzt man schließlich $\varkappa = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{-\cos\sigma}}$, so wird:

$$tg\frac{a}{2} = \frac{\cos(\sigma-\alpha)}{\varkappa}; \quad tg\frac{b}{2} = \frac{\cos(\sigma-\beta)}{\varkappa}; \quad tg\frac{c}{2} = \frac{\cos(\sigma-\gamma)}{\varkappa}.$$

Aufgaben.

1. α) $\frac{x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 11x + 13}{(x^4+x^3)(x^2+x+1)}$ β) $\frac{10x^3 + 110x + 400}{(x^2-4x+29)(x^2-2x+5)}$ ist in Partialbrüche zu zerlegen!

2. Von einem ebenen Dreieck sind gegeben die Winkel α und β und die Summe der Radien 2 anbeschriebener Kreise $\varrho_\alpha + \varrho_\gamma = S$. Wie findet man die fehlenden Stücke des Dreiecks? [Vergl. die Formeln auf Blatt 8.]

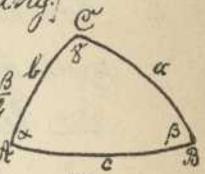
3. Von einem ebenen Viereck, in welches und um welches sich ein Kreis beschreiben läßt, kennt man eine Seite $a = 215{,}37$ cm und die beiden anliegenden Winkel $\alpha = 115^\circ 56' 12''$ und $\beta = 16^\circ 32' 10''$. Wie groß ist der Radius des eingeschriebenen Kreises und der Umfang und Inhalt des Viereckes?

4. Auf einer Kugel vom Radius 1 sind die Seiten eines Dreieckes $a = 124^\circ$, $b = 55^\circ$, $c = 97^\circ$. Man berechne die Winkel und die Fläche des Dreiecks!

27. Febr. 1901. №13.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln für das schiefwinklige sphärische Dreieck. [Fortsetzung]



1., Aus $\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} \pm \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$ und $\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} \mp \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$ ergeben sich durch Einführung der in II gefundenen Formeln die Delambre'schen Gleichungen und durch Division je zweier derselben die Neper'schen Analogieen:

Delambre'sche Gleichungen

$$\begin{cases} \sin\frac{\alpha+\beta}{2} : \cos\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{a-b}{2} : \cos\frac{c}{2} \\ \sin\frac{\alpha-\beta}{2} : \cos\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{a-b}{2} : \sin\frac{c}{2} \\ \cos\frac{\alpha+\beta}{2} : \sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{a+b}{2} : \cos\frac{c}{2} \\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2} : \sin\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{a+b}{2} : \sin\frac{c}{2} \end{cases}$$

Neper'sche Gleichungen

$$\begin{cases} tg\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \cdot ctg\frac{\gamma}{2} \\ tg\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} \cdot ctg\frac{\gamma}{2} \\ tg\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot tg\frac{c}{2} \\ tg\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot tg\frac{c}{2} \end{cases}$$

2., Die L'Huilier'sche Formel $tg\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{tg\frac{s}{2}\cdot tg\frac{s-a}{2}\cdot tg\frac{s-b}{2}\cdot tg\frac{s-c}{2}}$ ermöglicht es, den sphärischen Excess ε unmittelbar aus den Seiten $a\,b\,c$ zu berechnen.

3., Neper'sche Regel zur Berechnung des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks:

Markirt man auf einem Kreise die sämmtlichen Dreieckstücke in ihrer natürlichen Aufeinanderfolge mit Ausnahme des rechten Winkels γ und setzt man statt der Katheten a und b ihre Complemente, so lassen sich die sämmtlichen Formeln für das rechtwinklige sph. Dreieck folgendermassen zusammenfassen: „Der Cosinus irgend eines der 5 Stücke ist gleich dem Produkt der Cotangenten der beiden benachbarten Stücke oder gleich dem Produkt der Sinus der beiden nicht benachbarten Stücke."

Aufgaben.

1. Man zerlege $\frac{x^3-x^2+1}{(x^2+1)^2}$ in Partialbrüche.

2. Von einem ebenen Viereck sind gegeben die Winkel α, β, γ sowie zwei gegenüberliegende Seiten a und c. Man berechne hieraus die beiden anderen Seiten, sowie die Fläche des Polygons!

3. Die Schenkel eines Winkels $\delta = 53^\circ$ sind gegen eine durch seinen Scheitel gelegte Grundebene geneigt unter den Winkeln $\alpha = 40^\circ$ bzw. $\beta = 31^\circ$. Wie groß ist der Winkel, welchen die beiden in der Grundebene liegenden Schenkel der Neigungswinkel α und β mit einander bilden? [Man beschreibe um den Scheitel der Winkel mit beliebigem Halbmesser eine Kugel und zeichne die Schnittlinie der Ebenen der beiden Neigungswinkel; diese Schnittlinie und die Schenkel des Winkels δ durchstoßen die Kugel in den Ecken eines sphärischen Dreiecks.]

Name: . . . .

Semestralexamen

Wintersemester 1900/1901.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

6. März 1901.

1. Man berechne x aus der Gleichung: $4 \cdot \cos x - 3 \cdot \sin x = 0{,}27304$.

2. Man summire die trigonometrische Reihe:

$$\sin x \cdot \cos 2x + \sin 2x \cdot \cos 3x + \sin 3x \cdot \cos 4x + \sin 4x \cdot \cos 5x + \ldots\ldots + \sin nx \cdot \cos[(n+1)x].$$

3. Aus den Winkeln $\alpha\,\beta\,\gamma$ eines ebenen Dreiecks und dem Radius r des umgeschriebenen Kreises berechne man den Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises.

4. Man gebe die verschiedenen Werte von $\sqrt[3]{i}$ an! (Dabei ist $i = \sqrt{-1}$.)

5. $\dfrac{x^5 + 4x^4 - 18x^3 + 17x^2 - 35x + 46}{x^5 + x^3 + 2x^2 - 12x + 8}$ soll in Partialbrüche zerlegt werden.

Es sei bemerkt, daſs der Nenner gleich 0 gesetzt eine Wurzel $x = -2$, sowie eine Doppelwurzel $x = +1$ hat.

24. April 1901. №14.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln aus der algebr. Analysis.

Der Taylor'sche Satz für die rationale ganze Funktion: $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n$ lautet:
$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \ldots\ldots\ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x).$$
oder
$$f(x) = f(\alpha) + \frac{x-\alpha}{1!} f'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^3}{3!} f'''(\alpha) + \ldots\ldots + \frac{(x-\alpha)^n}{n!} f^{(n)}(\alpha).$$
Ist α eine Wurzel der Gleichung $f(x)=0$, d.h. $f(\alpha)=0$, so folgt aus der Taylor'schen Reihe, daſs $f(x)$ ohne Rest durch $x-\alpha$ teilbar ist. Ist für einen Wert $x=\alpha$ nicht nur $f(\alpha)=0$, sondern auch $f'(\alpha)=0$, so enthält $f(x)$ den Faktor $(x-\alpha)^2$ d.h. $x=\alpha$ ist eine Doppelwurzel von $f(x)=0$. Ist allgemein $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$, $f''(\alpha)=0 \ldots f^{[\mu-1]}(\alpha)=0$, so enthält $f(x)$ den Faktor $(x-\alpha)^\mu$ d.h. $x=\alpha$ ist eine μfache Wurzel von $f(x)=0$.

Soll demnach $f(x)=0$ eine Doppelwurzel α haben, so müssen die 2 Gleichungen $f(\alpha)=0$ und $f'(\alpha)=0$ zusammenbestehen; die Elimination von α aus denselben führt auf die Diskriminante von $f(x)$, d.i. einen in den Koeffizienten $a_0\, a_1 \ldots\ldots a_n$ rationalen Ausdruck, der verschwindet, wenn die Gleichung eine Doppelwurzel hat. [Die Diskriminante von $x^3+px+q=0$ ist $\Delta' = 27q^2 + 4p^3$.]

Hauptsätze der Gleichungstheorie: Jede Gleichung n^{ten} Grades: $f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$ [Normalform] hat n Wurzeln $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \ldots \alpha_n$, so daſs $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$ wird. Wenn eine Gleichung mit reellen Koeffizienten eine complexe Wurzel besitzt, so hat sie auch die conjugirte complexe Zahl zur Wurzel. Eine Gleichung von ungeradem Grad hat demnach stets eine reelle Wurzel.

Aus der Identität: $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$ folgt: Die Koeffizienten einer Gleichung n^{ten} Grades sind mit abwechselnden Vorzeichen gleich den Combinationssummen der Wurzeln von der 1. bis zur n^{ten} Klasse,

und zwar:
$$-\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ldots + \alpha_n = \sum \alpha_i$$
$$\alpha_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \ldots\ldots \alpha_{n-1}\alpha_n = \sum \alpha_i \alpha_k$$
$$-\alpha_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots\ldots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = \sum \alpha_i\alpha_k\alpha_l$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(-1)^n \alpha_n = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n.$$

Aus der letzten Gleichung ergeben sich, da das Produkt zweier conjugirt complexer Zahlen stets positiv ist, die Folgerungen:

Eine Gleichung von <u>geradem</u> Grade, deren constantes Glied [in der Normalform] negativ ist, hat immer eine positive und eine negative reelle Wurzel

Ist in einer Gleichung von <u>ungeradem</u> Grade das constante Glied α_n positiv [negativ], so hat sie eine negative [positive] reelle Wurzel.

Jede <u>symmetrische Funktion der Wurzeln</u> einer Gleichung n^{ten} Grades läßt sich ohne Auflösung derselben rational durch ihre Koeffizienten darstellen.

<u>Aufgaben:</u>

1. Man entwickle nach dem Taylor'schen Satze: $x^4 + 8x^3 + 23x^2 + 28x + 13$ nach Potenzen von $x+2$.

2. Wie findet man die Wurzeln der Gleichung $8x^4 + 12x^3 - 30x^2 + 17x - 3 = 0$, wenn bekannt ist, daß dieselbe eine 3fache Wurzel besitzt?

3. Die Gleichung $x^4 + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 = 0$ habe die Wurzeln $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$. Wie lautet die Gleichung, welche die Produkte von je drei dieser Größen [d.h. $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\delta$, $\alpha\gamma\delta$, $\beta\gamma\delta$] zu Wurzeln hat?

4. Gegeben ist die Gleichung: $x^3 + x^2 - x + 15 = 0$. Wie lautet die Gleichung, deren Wurzeln y die reciproken Werte der Wurzeln x sind? Man stelle die Gleichung auf, deren Wurzeln z um 3 größer sind als die der gegebenen; berechne die Wurzelwerte z und hieraus sodann die Wurzeln x. Endlich transformire man noch obige Gleichung linear in eine andere cubische Gleichung, bei der das quadratische Glied fehlt!

1. Mai 1901. № 15.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln aus der algebr. Analysis:

Die linearen Transformationen der Gleichung: $x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \alpha_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + \alpha_n = 0$

1. Substitution: $x = \alpha \cdot u$ oder $x = \frac{u}{p}$. Die Wurzeln u der transformirten Gleichung sind der α^{te} Teil bzw. das p-fache der Wurzeln x. [Speziell erhält man für $x = -u$ eine neue Gleichung, deren Wurzeln u entgegengesetzt gleich sind den Wurzeln der ursprünglichen Gleichung.]

2. Substitution: $x = \frac{1}{u}$. Die Wurzeln u der transformirten Gleichung sind die reciproken Werte der Wurzeln x. Eine Gleichung, welche bei der Substitution $x = \frac{1}{u}$ ungeändert bleibt, für welche also $1 = \alpha_n$; $\alpha_1 = \alpha_{n-1}$; $\alpha_2 = \alpha_{n-2}$; $\alpha_3 = \alpha_{n-3}$ u. s. w., heifst reciprok. Ist dieselbe von ungeradem Grade $[2\mu + 1]$, so hat sie die Wurzel $x = -1$ und führt nach Absonderung des Faktors $x + 1$ auf eine reciproke Gleichung von geradem Grade $[2\mu]$; eine solche läfst sich stets nach Division mit x^{μ} durch die Substitution $z = x + \frac{1}{x}$ auf eine Gleichung μ^{ten} Grades reduziren.

3. Substitution: $x = u + \alpha$ oder $x = u - \beta$. Die Wurzeln u der transform. Gleichg. sind um α kleiner bzw. um β gröfser als die Wurzeln x.

Aus diesen 3 Substitutionen setzt sich zusammen die allgemeinste lineare Transformation $x = \frac{\alpha u + \beta}{\alpha' u + \beta'}$, bei der der Grad der Gleichg. ungeändert bleibt.

Auflösung der Gleichung 3. Grades.

Durch die Substitution $z = x - \frac{\alpha_1}{3}$ geht die allgemeine cubische Gleichg: $z^3 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z + \alpha_3 = 0$ über in: $x^3 + px + q = 0$. Die Wurzeln derselben ergeben sich [nach Auflösung der „Resolvente": $z^2 + q z - \frac{p^3}{27} = 0$] nach der Cardanischen Formel als:

$$x_1 = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\;;\quad x_2 = u\varepsilon_1 + v\cdot\varepsilon_2\;;\quad x_3 = u\cdot\varepsilon_2 + v\cdot\varepsilon_1$$

wobei $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ $[\varepsilon_1+\varepsilon_2 = -1;\ \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2 = 1.]$

Je nach dem Vorzeichen der Discriminante $\Delta = \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ sind 3 verschiedene Fälle möglich:

1.) $\Delta > 0$. Die Gleichung hat eine reelle und 2 imaginäre Wurzeln.

2.) $\Delta = 0$. Dann wird $u = v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, also $x_1 = 2\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ und $x_2 = x_3 = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ (Doppelwurzel).

3.) $\Delta < 0$. [nur möglich, wenn p negativ und $\frac{|p|^3}{27} > \frac{q^2}{4}$.] Die 3 Wurzeln sind reell, erscheinen jedoch in imaginärer Form. [Casus irreducibilis.]

Trigonometrische Auflösung für den Casus irreducibilis: Ausgehend von $x^3 - px + q = 0$, wobei also jetzt $p > 0$ und $\Delta = \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$ sein soll, setzen wir: $\frac{q}{2} = \sqrt{\frac{p^3}{27}}\cdot\cos\varphi$, so wird $u = -\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\sqrt[3]{\cos\varphi - i\sin\varphi}$ und $v = -\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\sqrt[3]{\cos\varphi + i\sin\varphi}$, und mithin $x = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3}$ $(k = 0, 1, 2)$, also $x_1 = -2\cdot\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}$;

$$x_2 = +2\cdot\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+60^\circ\right);\quad x_3 = +2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}-60^\circ\right).$$

Aufgaben:

1.) Die Summe 2 Wurzeln der Gleichung $6x^4 - 23x^3 + 28x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 = 0$ soll $= \frac{3}{2}$, das Produkt der beiden übrigen Wurzeln $= \frac{2}{3}$ sein; man berechne die 4 Wurzeln, sowie die Koeffizienten α_4 und α_3.

2.) Wie hoch wird ein in die Kugel vom Radius 10 zu beschreibender Cylinder, welcher die Hälfte des Kugelinhaltes einnimmt? [Berechnung der 3 Wurzeln]

3.) Von einer Spitze eines gleichseitigen Kugeldreiecks mit der Seite $x = 100^\circ$ ist die Hälfte des Dreiecks als ein gleichschenkliges sph. Dreieck abzuschneiden. Wie groß werden dessen Schenkel und Grundseite? [Nepersche Regel.]

4.) Ein sph. Dreieck mit den Winkeln $\alpha = 100^\circ$, $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 50^\circ$ von der Ecke A aus zu halbiren. Man berechne die Seite a und einen Abschnitt derselben. [Auf die Summe der beiden unbekannten Winkel des halben Dreiecks ist die Neper'sche Tangentenformel anzuwenden.]

8. Mai 1901. №16.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln aus der algebr. Analysis.

Trigonometrische Auflösung der Gleichungen 3. Grades.

I. Casus irreducibilis: siehe Blatt №15.

II. $x^3+px+q=0$ wobei p positiv, also $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$ sein soll. Setzt man in der Cardanischen Formel: $\frac{q}{2}=+\sqrt{\frac{p^3}{27}}\cdot\operatorname{ctg}\varphi$, also $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\frac{4p^3}{27q^2}}$, und sodann $\operatorname{tg}\psi=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$, so erscheinen die Wurzeln der Gleichung in der Form:

$$x_1=-2\cdot\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{ctg}2\psi \quad\text{und}\quad \begin{matrix}x_2\\x_3\end{matrix}=\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\left\{\operatorname{ctg}2\psi\pm\frac{i\sqrt{3}}{\sin 2\psi}\right\}.$$

III. $x^3-px+q=0$. Ist dabei die Discriminante $\Delta=\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}>0$, so setzt man $\frac{q}{2}=+\sqrt{\frac{p^3}{27}}\cdot\frac{1}{\sin\varphi}$, also $\sin\varphi=\sqrt{\frac{4p^3}{27q^2}}$, und ferner wieder $\operatorname{tg}\psi=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$, dann wird:

$$x_1=-2\cdot\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\frac{1}{\sin 2\psi} \quad\text{und}\quad \begin{matrix}x_2\\x_3\end{matrix}=\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\left\{\frac{1}{\sin 2\psi}\pm i\sqrt{3}\cdot\operatorname{ctg}2\psi\right\}.$$

Bestimmung der reellen Wurzeln einer algebr. Gleichung.

Aus der Stetigkeit der Funktion $y=f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$ und der geometrischen Darstellung derselben durch eine Kurve ergibt sich der Satz: „Wechselt $f(x)$ zwischen zwei Werten $x=a$ und $x=b$ das Vorzeichen, so liegt zwischen a und b mindestens eine reelle Wurzel von $f(x)=0$."

Um eine obere Grenze der positiven reellen Wurzeln von $f(x)=0$ zu finden, setzt man $f(x)=[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]+\varphi_3(x)$, wobei mit $\varphi_1(x)$ alle Glieder zusammengefasst sind, welche dem ersten negativen Gliede vorangehen, während $\varphi_2(x)$ die sämmtlichen negativen und $\varphi_3(x)$ alle übrigen positiven Glieder von $f(x)$ enthält. Der kleinste positive Wert x, für den $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\geqq 0$

wird, ist eine obere Grenze der positiven reellen Wurzeln von $f(x)=0$. (Bei der Bestimmung dieses Wertes x ziehe man die niedrigste in dem Minuenden $\varphi_1(x)$ vorkommende Potenz von x als Faktor vor die Differenz.)

Durch Anwendung dieses Verfahrens auf die Gleichung $f(-x)=0$ findet man eine untere Grenze für die negativen Wurzeln von $f(x)=0$, endlich durch Anwendung auf die Gleichungen $f(\frac{1}{x})=0$ und $f(-\frac{1}{x})=0$ eine untere Grenze für die positiven bzw. eine obere Grenze für die negativen reellen Wurzeln von $f(x)=0$.

Descartes' Zeichenregel: Jede Gleichung $f(x)=0$ mit reellen Koeffizienten – ob vollständig oder unvollständig – hat höchstens soviele positive reelle Wurzeln, als Zeichenwechsel vorhanden sind; und $f(x)=0$ besitzt höchstens soviele negative reelle Wurzeln, als $f(-x)=0$ Zeichenwechsel hat.

Aufgaben:

1., In eine Kugel den Cylinder zu beschreiben, dessen Mantel gleich einer der entstehenden Kugelschalen ist! [Trigon. Lösung der result. cubisch. Gleichg.]

2., Man schließe die reellen Wurzeln von $0 = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x + 1$ je zwischen 2 ganze Zahlen ein nach vorausgegangener Ermittlung der oberen und unteren Grenze für die positiven und negativen reellen Wurzeln. Schließlich zeichne man noch den ungefähren Verlauf der Kurve $y = x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x + 1$!

3., Ist h die in einem rechtw. sph. Dreieck [$\gamma = 90°$] auf die Hypotenuse gefällte Höhe, so gilt: 1, $\cos^2 h = \cos^2\alpha + \cos^2\beta$; 2, $\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cdot \sin h$. – Beweis!

4., Wo und unter welchem Winkel trifft den Aequator der Hauptkreisbogen welcher von Dorpat [$\varphi_1 = 58°22'47''$ N., $\lambda_1 = 26°43'45''$ O.] nach Greenwich [$\lambda_2 = 0$, $\varphi_2 = 51°28'38''$ N.] geht; welches ist der nördlichste Punkt dieses Kreises (φ, λ?) und wie groß ist die Entfernung der beiden gegebenen Orte? [Erdrad. $r = 6370$ km]

15. Mai 1901. №17.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln:

Der Sturm'sche Satz gibt vollstaendigen Aufschluss über die Anzahl und Lage der reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(x)=0$. Durch fortgesetzte Division ergeben sich die Gleichungen: $\frac{f(x)}{f'(x)}=Q(x)-\frac{r_1}{f'(x)}$; $\frac{f'(x)}{r_1(x)}=Q_1(x)-\frac{r_2}{r_1}$; $\frac{r_1}{r_2}=Q_2(x)-\frac{r_3}{r_2}$ ....., dabei sind also die r_i die bei der Division sich ergebenden, jedoch mit dem negativen Vorzeichen versehenen Reste. Bildet man nun die Reihe der Sturm'schen Funktionen: $f(x)$, $f'(x)$, r_1, r_2, r_3 .... r_μ [r_μ eine Konstante] einmal für $x=a$, sodann für $x=b$ und bestimmt man in beiden Fällen die Zahl der Zeichenwechsel in dieser Reihe, so ist die Differenz der beiden Zahlen genau gleich der Anzahl der zwischen a und b liegenden reellen Wurzeln von $f(x)=0$. Speziell ergibt sich für $a=+\infty$ und $b=-\infty$ auf diese Weise sofort die Anzahl der sämmtlichen reellen Wurzeln von $f(x)=0$. [NB! Da nur die Vorzeichen von $f(x)$, $f'(x)$, r_1, r_2 ... r_μ, nicht aber deren numerische Werte dabei in Betracht kommen, so dürfen diese Funktionen, um die Division zu vereinfachen, mit geeigneten positiven Konstanten multiplizirt oder dividirt werden.]

Näherungsmethoden zur Bestimmung der reellen Wurzeln algebraischer, sowie transcendenter Gleichungen:

I. Newton'sche Näherungsmethode: Ist α_1 ein Näherungswert einer reellen Wurzel x von $f(x)=0$, also $x=\alpha_1+h$, so ergibt sich aus der Taylor'=

schen Entwicklung für $f(x) = f(\alpha_1 + h) = 0$ unter Vernachlässigung der Glieder mit höheren Potenzen von h angenähert: $h = -\frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}$, also der genauere Näherungswert: $x = \alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}$.

II. Regula falsi: Liegt eine Wurzel x von $f(x) = 0$ zwischen α_1 und α_2, so dass $x = \alpha_1 + \delta_1 = \alpha_2 - \delta_2$, so findet man aus der Taylor'schen Entwicklung für $f(x - \delta_1)$ und $f(x + \delta_2)$ den Näherungswert: $x = \alpha_1 + \frac{[\alpha_1 - \alpha_2] \cdot f(\alpha_1)}{f(\alpha_2) - f(\alpha_1)}$

Durch wiederholte Anwendung dieser Methoden erzielt man immer genauere Näherungswerte!

Aufgaben:

1.) Mittels des Sturm'schen Satzes bestimme man die Anzahl und Lage der reellen Wurzeln der Gleichung: $0 = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 3$.

2.) Eine eiserne, innen hohle Kugel von 1 cm Wanddicke soll im Wasser zum Schwimmen gebracht werden. Welchen Halbmesser muss wenigstens die Kugel haben, wenn das specifische Gewicht des Eisens $= 7{,}5$ ist? [Newton'sche Näherungsmethode]

3.) Wie viel reelle Wurzeln hat die Gleichung: $2^x + \frac{1}{x} - 4 = 0$? (Dieselben ergeben sich als Abscissen der Schnittpunkte der beiden Kurven $y = -\frac{1}{x}$ und $y = 2^x - 4$.) Man berechne mittels der Regula falsi die größte der Wurzeln auf 2 Dezimalen genau!

4.) Welche Richtung hat in München [$\varphi = 48°8'20''$] eine Straße, welche um 9^h vorm. [wahre Zeit] bei einer Deklination $\delta = -15°8'1''$ schattenlos ist? [Neper'sche Analogieen.]

22. Mai 1901. №18.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln:

Determinanten: Definirt man $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$, so daß $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix}$, so ergeben sich die beiden Unbekannten des Gleichungssystems: $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = s_1 \\ a_2 x + b_2 y = s_2 \end{cases}$ in der Form: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} s_1 & b_1 \\ s_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ und $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & s_1 \\ a_2 & s_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$, oder wenn man die Gleichungen „auf 0 reduzirt" $\begin{cases} a_1 x + b_1 y - s_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y - s_2 = 0 \end{cases}$ bei Einführung der „Matrix" $\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & -s_1 \\ a_2 & b_2 & -s_2 \end{matrix} \right\|$ durch die Proportion:

$$x : y : 1 = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & -s_1 \\ a_2 & b_2 & -s_2 \end{matrix} \right\| = +\begin{vmatrix} b_1 & -s_1 \\ b_2 & -s_2 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a_1 & -s_1 \\ a_2 & -s_2 \end{vmatrix} : +\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Definirt man eine Determinante 3. Grades durch die Gleichung: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$, woraus sich sofort ergibt, daß die Determinante ihr Zeichen wechselt bei Vertauschung zweier ihrer Horizontal- oder Verticalreihen, so erhält man die Lösungen des Gleichungssystems: $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = s_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = s_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = s_3 \end{cases}$ in der Form: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} s_1 & b_1 & c_1 \\ s_2 & b_2 & c_2 \\ s_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & s_1 & c_1 \\ a_2 & s_2 & c_2 \\ a_3 & s_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$; $z = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & s_1 \\ a_2 & b_2 & s_2 \\ a_3 & b_3 & s_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$

oder bei Einführung der „Matrix" $\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & -s_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -s_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & -s_3 \end{matrix} \right\|$ durch die Proportion:

$$x : y : z : 1 = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & -s_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -s_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & -s_3 \end{matrix} \right\| = +\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & -s_1 \\ b_2 & c_2 & -s_2 \\ b_3 & c_3 & -s_3 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & -s_1 \\ a_2 & c_2 & -s_2 \\ a_3 & c_3 & -s_3 \end{vmatrix} : +\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & -s_1 \\ a_2 & b_2 & -s_2 \\ a_3 & b_3 & -s_3 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Aufgaben:

1. Man zeige, daß die Determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ richtig erhalten wird, indem man in dem Schema: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ die drei von links oben nach rechts unten durchstrichenen Reihen als positive Produkte, die drei von rechts oben nach links unten durchstrichenen als negative Produkte summirt. (Beweis

durch direktes Ausrechnen der Determinante.)

2.) Unter der Voraussetzung, daß $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ die Wurzeln der cubischen Gleichung $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ sind, drücke man den Werte der Determinante: $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_1 \\ \alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix}$ durch die Koeffizienten $a_1\, a_2\, a_3$ aus!

3.) Mittels Determinanten berechne man $x\ y\ z$ aus den 3 Gleichungen:

$2x+3y+z=4$; $\quad 2x-5y-3z=0$; $\quad 6x+7y-2z=-1$.

4.) Die Sonne geht um $3^h 52^m$ (wahre Zeit) auf und erreicht die Mittagshöhe $h = 54°45'$. Unter welcher Breite liegt der Ort und welches ist die Deklination der Sonne?

5.) Für den Stern α Arietis ist die astronomische Breite $\beta = 9°57'41''$ und die Länge $\lambda = 35°50'41''$; man berechne Rectascension und Deklination, wenn $\varepsilon = 23°27'19''$.

---

5. Juni 1901. №. 19.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln:

Die Determinante n^{ten} Grades

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \dots a_{nn}$$

ist ein Aggregat von $n!$ Gliedern, die man erhält, indem man sämmtliche Produkte aus je n dieser Elemente a_{ik} bildet derart, daſs niemals 2 Elemente derselben Zeile oder derselben Kolonne angehören. Man erhält diese Produkte aus dem „Anfangsglied" $a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$, indem man die ersten oder Zeilenindices ungeändert läſst und die zweiten oder Kolonnenindices permutirt; die Permutationsformen mit gerader Anzahl von Inversionen treten in das Aggregat mit dem positiven Zeichen, die mit ungerader Anzahl von Inversionen mit dem negativen Vorzeichen ein.

Sätze über Determinanten: 1, Eine Determinante bleibt ungeändert, wenn man die Zeilen mit den Kolonnen vertauscht d. h. die Determinante „stürzt".

2, Vertauscht man 2 Reihen mit einander, so wechselt die Determinante nur ihr Vorzeichen. Eine Determinante mit 2 gleichen Reihen hat demnach den Wert Null.

3, Ein allen Elementen einer Reihe gemeinsamer Faktor kann als Faktor vor die Determinante gesetzt werden.

4, Ist jedes Element einer Reihe eine Summe von 2 Gliedern, so ist die Determinante gleich der Summe 2 Determinanten, welche man aus der ursprünglichen erhält, indem man die zusammengesetzte Reihe durch je eine der Teilreihen ersetzt.

5, Durch Addition einer mit einem beliebigen Faktor multiplicirten Zeile [Kolonne] zu einer anderen Zeile [Kolonne] wird der Wert der Determinante <u>nicht</u> geändert.

<u>Aufgaben:</u>

1, Nach möglichster Vereinfachung mit Hilfe der obigen Sätze berechne man die Determinanten:

$$\alpha,\ \begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 28 & 33 & 8 \\ 40 & 54 & 13 \end{vmatrix} \quad \beta,\ \begin{vmatrix} 30 & 20 & -15 \\ 20 & 15 & -10 \\ 10 & 10 & -5 \end{vmatrix} \quad \gamma,\ \begin{vmatrix} n+1 & n+2 & n+3 \\ n+2 & n+3 & n+4 \\ n+3 & n+4 & n+5 \end{vmatrix}.$$

2, Man berechne die Unbekannten x, y, z aus dem Gleichungssystem:

$$(b+c)\cdot x - a\cdot(y+z) = b-c$$
$$(c+a)\cdot y - b(z+x) = c-a$$
$$(a+b)\cdot z - c(x+y) = a-b.$$

3, Ebenso berechne man x, y, z aus dem Gleichungssystem:

$$x + ay + a^2 z = a^3$$
$$x + by + b^2 z = b^3$$
$$x + cy + c^2 z = c^3.$$

Dabei sind alle auftretenden Determinanten durch geeignete Umformung in Produkte zu verwandeln!

4, Die Werte von x zu finden, welche der Gleichung genügen:

$$\begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 2x-4 & x^2-4 & x^3-8 \\ 3x-9 & x^2-9 & x^3-27 \end{vmatrix} = 2$$

(Nach Reduktion der Determinante mit Hilfe obiger Sätze ergibt sich für x eine „reciproke" Gleichung.)

---

12. Juni 1901. №20.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln:

1, Entwicklung einer Determinante nach Unterdeterminanten:

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

Hier ist die Determinante entwickelt nach den sog. Unterdeterminanten der 1. Verticalreihe. Die zu einem beliebigen Elemente a_{ik} gehörige Unterdeterminante α_{ik} ergibt sich aus der Determinante R durch Streichen der i^{ten} Horizontal- und k^{ten} Verticalreihe; das Vorzeichen der Unterdeterminante ist $(-1)^{i+k}$, da $i+k$ Reihenvertauschungen notwendig sind, um das Element a_{ik} an die Stelle von a_{11} zu bringen. Die Entwicklung einer Determinante n^{ten} Grades nach den Unterdeterminanten der k^{ten} Verticalreihe lautet dann:

$R = a_{1k}\alpha_{1k} + a_{2k}\alpha_{2k} + a_{3k}\alpha_{3k} + \dots a_{nk}\alpha_{nk}$ und nach den Unterdeterminanten der i^{ten} Horizontalreihe: $R = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + a_{i3}\alpha_{i3} + \dots + a_{in}\alpha_{in}$.

2, Multiplicationssatz für Determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 & a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 & a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 \\ b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 & b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3 \\ c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 & c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 & c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Allgemein läßt sich das Produkt 2 Determinanten n^{ten} Grades ebenfalls als eine Determinante n^{ten} Grades darstellen, deren Elemente die Summen der Produkte aus den Elementen jeder Zeile [oder jeder Kolonne] der ersten Determinante mit den entsprechenden Elementen jeder Zeile [oder jeder Kolonne] der 2. Determinante sind.

3, Resultante eines linearen Gleichungssystems: Damit n homogene Gleichungen mit n Unbekannten neben einander bestehen können, ist notwendig und hinreichend, daß ihre Resultante d.h. die aus den n^2 Koefficienten der Unbekannten der n Gleichungen gebildete Determinante verschwindet.

Aufgaben:

1.) Man zeige durch geeignete Umformung der Determinante, daß

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \sin\alpha\cdot\cos\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \sin\beta\cdot\cos\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \sin\gamma\cdot\cos\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix} = -\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\cdot\sin(\gamma-\alpha).$$

2.) In dem nachfolgenden System von 4 Gleichungen mit nur 3 Unbekannten ist λ so zu bestimmen, daß die 4 Gleichungen nebeneinander bestehen können:

$$\begin{aligned} 7x + 2y + \lambda\cdot z &= 1 \\ 5x - 3y + 4z &= 0 \\ \lambda x + 5y - 2z &= -2 \\ x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

3.) Vorausgesetzt, daß $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $\alpha_3\beta_3\gamma_3$ die Richtungswinkel von 3 aufeinander senkrechten Geraden im Raume sind, zeige man mittels des Multiplikationssatzes für Determinanten, daß

$$\left(\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}\right)^2 = 1$$

4.) Die Summe der Produkte aus den Elementen einer Reihe mit den Unterdeterminanten der entsprechenden Elemente einer anderen Parallelreihe hat den Wert 0! d.h. $\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \dots + a_{in}\alpha_{jn} = 0 \; (i \gtrless j)$ oder $a_{1k}\alpha_{1l} + a_{2k}\alpha_{2l} + \dots + a_{nk}\alpha_{nk} = 0 \; (k \gtrless l)$. Beweis!

5.) Ist $R = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ und α_{ik} die zu a_{ik} gehörige Unterdeterminante, so beweise man mittels des in Aufg. 4. gegebenen Satzes, daß das Produkt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = R^3,$$

daß also

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = R^2!$$

19. Juni 1901. №. 21.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln:

1., Sylvester'sche Eliminationsmethode zur Bestimmung der Resultante: Ist $f(x)=0$ eine algebr. Gleichung vom m^{ten} Grade, $\varphi(x)=0$ eine solche vom n^{ten} Grade und multiplicirt man $f(x)=0$ successive mit $x, x^2, x^3, \dots x^{n-1}$ und die 2. Gleichung $\varphi(x)=0$ successive mit $x, x^2, x^3 \dots x^{m-1}$, so kann man das Gleichungssystem: $f(x)=0$, $x\cdot f(x)=0$, $x^2 f(x)=0$, $x^3 f(x)=0 \dots\dots x^{n-1}\cdot f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$, $x\cdot\varphi(x)=0$, $x^2\varphi(x)=0 \dots x^{m-1}\cdot\varphi(x)=0$ auffassen als ein System von $m+n$ linearen Gleichungen homogen in den $m+n$ Unbekannten $x^0 x^1 x^2 \dots x^{m+n-1}$. Man erhält daher durch Elimination dieser Unbekannten, d.h. indem man die aus den Koeffizienten derselben gebildete Determinante $=0$ setzt, die Resultante von $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$ d.i die Bedingung, welche zwischen den Koeffizienten von $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$ bestehen muß, wenn dieselben eine gemeinsame Wurzel besitzen sollen.

2., Hat man 2 algebr. Gleichungen mit 2 Unbekannten $[x, y]$, so ordnet man, um die sämmtlichen Lösungen derselben zu finden, beide etwa nach Potenzen von x und erhält, indem man nach obigem Verfahren die Resultante bildet, durch Elimination von x eine Gleichung mit einer einzigen Unbekannten y.

Aufgaben:

1., Nach dem Projektionssatz [vergl. Bl. 8, Formel V] gelten für jedes ebene Dreieck die Gleichungen: $a\cos\beta + b\cdot\cos\alpha = c$; $b\cos\gamma + c\cos\beta = a$; $c\cos\alpha + a\cos\gamma = b$. Welche Relation für die Winkel eines Dreiecks ergibt sich hieraus durch Elimination?

2., Für welche Werte von λ hat die Gleichung:

$$f(x) \equiv \lambda x^3 - 3x^2 - 9x - 5 = 0$$

eine Doppelwurzel und wie lautet dieselbe für die betreffenden Werte von λ? [Bildung der Discriminante von $f(x)=0$ als Resultante von $f(x)=0$ und $f'(x)=0$ nach der Sylvester'schen Methode!]

3., Man berechne [durch Resultantenbildung mittels Determinanten] die sämmtlichen Lösungen der beiden Gleichungen:

$$1.,\quad x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$$

$$2.,\quad x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$$

und deute dieselben geometrisch!

4., Man bestimme den Grenzwert:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \cos\frac{3\pi}{2n} + \cdots\cdots + \cos\frac{n\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{2n} + \frac{3\pi}{2n} + \cdots\cdots + \frac{n\pi}{2n}}.$$

[Vergl. Bl. 7. Formel 2.]

26. Juni 1901. №22.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln:

I. Grenzwerte:

1., $\lim\limits_{\alpha=0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$ 2., $\lim\limits_{\delta=0}\frac{(x+\delta)^n-x^n}{\delta}=n\cdot x^{n-1}$

3., $\lim\limits_{\omega=\infty}\left[1+\frac{1}{\omega}\right]^{\omega}=e=2{,}718281\ldots$ Aus 3., ergibt sich: 4., $\lim\limits_{\alpha=0}\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}=\lg^{e} a.$

II. Konvergenzkriterien für unendliche Reihen: Eine ∞ Reihe $u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ in infin. konvergirt d.h. $\lim\limits_{n=\infty} s_n=\lim\limits_{n=\infty}(u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n)$ hat einen endlichen Grenzwert s, wenn:

1., $\lim\limits_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ oder wenn 2., $\lim\limits_{n=\infty}\left[n\cdot\lg^{e}\frac{u_n}{u_{n+1}}\right]>1$;

sie divergirt, wenn 1., $\lim\limits_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ oder wenn 2., $\lim\limits_{n=\infty}\left[n\cdot\lg^{e}\frac{u_n}{u_{n+1}}\right]<1.$

Für eine Potenzreihe: $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$ in infin. bestimmt sich der Konvergenzbereich nach dem 1. Kriterium aus: $|x|<\lim\limits_{n=\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$

III. Recurrente Reihen: Entwickelt man eine rationale echt gebrochene Funktion von x in eine unendliche Reihe nach steigenden Potenzen von x, so erhält man eine sog. recurrente Reihe p^{ter} Ordnung (wenn die Nennerfunktion des Bruches vom p^{ten} Grade ist); jeder Koeffizient einer derartigen Reihe läßt sich in bestimmter Weise linear durch die vorhergehenden p Koeffizienten ausdrücken. Die Entwicklung der gebrochenen Funktion geschieht entweder nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten, oder indem man die gebrochene Funktion in Partialbrüche (zerlegt) & jeden einzelnen Partialbruch entwickelt; auf letztere Weise ergibt sich auch das allgemeine Glied, sowie der Konvergenzbereich.

Aufgaben:

1., Durch geeignete Umformung mittels der auf Blatt 19 gegebenen Sätze beweise man, daſs die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+b-c-d)(a-b-c+d).$$

2., Man bestimme folgende Grenzwerte:

$$\text{I. } \lim_{\delta=0} \frac{\cos^n\delta - 1}{\sin^2\frac{\delta}{2}} \qquad \text{II. } \lim_{\delta=0} \left[\frac{a-b\delta}{a+b\delta}\right]^{\frac{1}{2b\delta}} \qquad \text{III. } \lim_{\omega=\infty} \left\{2^\omega \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^\omega}\right\},$$

und zwar indem man dieselben durch geeignete Substitutionen auf die oben [vergl. Formel I] angegebenen Grenzwerte zurückführt.

3., Die Summe der n ersten Glieder einer unendlichen Reihe sei $S_n = \frac{3n+2}{4n+3}$. Man bestimme das allgemeine Glied, sowie einige Anfangsglieder und gebe den Grenzwert der unendlichen Reihe an!

4., Man untersuche folgende Reihen in Bezug auf ihre Konvergenz:

$$\text{I. } 1 \cdot \sin\alpha + \frac{2}{1} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 4} \cdot \sin\frac{\alpha}{4} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 4 \cdot 7} \sin\frac{\alpha}{8} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} \sin\frac{\alpha}{16} + \cdots\cdots \quad [\text{1. Kriterium}]$$

$$\text{II. } 1 + \sqrt[3]{12 \cdot \frac{2!}{4!}} + \sqrt[3]{12 \cdot \frac{3!}{5!}} + \sqrt[3]{12 \cdot \frac{4!}{6!}} + \sqrt[3]{12 \cdot \frac{5!}{7!}} + \sqrt[3]{12 \cdot \frac{6!}{8!}} + \cdots\cdots \quad [\text{2. Kriterium.}]$$

5., Die echt gebrochene Funktion $\frac{1-x}{1-5x+6x^2}$ soll in eine recurrente Reihe entwickelt werden; ferner sind die Grenzen für die Giltigkeit der Entwicklung anzugeben!

---

3. Juli 1901. №23.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln:

Newton'sche Binomialreihe: $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2 + \frac{n\cdot(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \dots + \binom{n}{p}x^p + \dots\dots$

[gültig für jedes beliebige n; convergent für $-1<x<+1$.]

I. Exponentialreihe: Aus dem Grenzwerte $e^x = \lim_{\omega'=\infty}\left[1+\frac{1}{\omega'}\right]^{\omega' x} = \lim_{\omega=\infty}\left[1+\frac{x}{\omega}\right]^{\omega}$ folgt:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\dots$$ (convergent für alle Werte von x.)

Da $a^x = e^{x\cdot \lg^e a}$, so wird: $a^x = 1 + \frac{x\cdot \lg a}{1!} + \frac{x^2(\lg a)^2}{2!} + \frac{x^3(\lg a)^3}{3!} + \dots\dots$.

II. Logarithmische Reihe: Setzt man in dem [Blatt 22. Formel I.4. gegebenen] Grenzwerte: $\lim_{\delta=0}\frac{a^\delta-1}{\delta} = \lg^e a$ $a = 1+x$, so wird $\lim_{\delta=0}\frac{(1+x)^\delta-1}{\delta} =$

$$\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - + \dots$$ (convergent für $-1<x\leqq+1$.)

Subtrahirt man hievon die Reihe $\lg(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots$, so folgt:

$$\lg\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \dots\right].$$

Setzt man $x = \frac{1}{2z^2-1}$, so daß $\frac{1+x}{1-x} = \frac{z^2}{z^2-1} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)}$ wird, so ergibt sich hieraus die sehr rasch convergirende Reihe:

$$\lg z = \frac{1}{2}\left[\lg(z+1) + \lg(z-1)\right] + \left\{\frac{1}{2z^2-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2z^2-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2z^2-1}\right)^5 + \dots\right\}.$$

III. Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen: Stellt man in dem Grenzwerte: $e^{y+ix} = \lim_{\omega=\infty}\left[1+\frac{y+ix}{\omega}\right]^{\omega}$ die complexe Zahl $1+\frac{y}{\omega}+i\cdot\frac{x}{\omega}$ in trigonometrischer Form dar $= r[\cos\varphi + i\sin\varphi]$, so daß: $r = \sqrt{1+\frac{2y}{\omega}+\frac{x^2+y^2}{\omega^2}}$ und $\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{\omega+y}$, so wird nach dem Moivre'schen Satze: $e^{y+ix} = \lim_{\omega=\infty}\left[r^\omega\left(\cos(\omega\varphi) + i\sin(\omega\varphi)\right)\right]$. Beim Grenzübergang wird nun $\lim_{\omega=\infty} r^\omega = e^y$ und $\lim_{\omega=\infty}\omega\varphi = x$, so daß sich die fundamentalen Relationen ergeben:

$$e^{y+ix} = e^y[\cos x + i\sin x] \quad ; \quad e^{ix} = \cos x + i\sin x.$$

Wendet man auf e^{ix} obige Exponentialreihe an und zerlegt man dieselbe in den reellen und imaginären Teil, so ergeben sich folgende Reihenentwicklungen:

$$\left.\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \cdots\cdots \\ \sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \cdots\cdot \end{aligned}\right\} \text{(convergent für alle Werte von } x.)$$

Endlich erhält man aus: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ und $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ die Gleichungen:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Aufgaben:

1., Man entwickle $(1+x)^m$ in eine Reihe, welche nach steigenden Potenzen von $\frac{x}{1+x}$ fortschreitet. Durch Anwendung dieser Entwicklung zeige man, daß:

$$\alpha.,\ \sqrt{2} = \sqrt{1+1} = 1 + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 2^2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2^3} + \cdots\cdots\cdots$$

$$\beta.,\ \sqrt{2} = \frac{7}{5}\sqrt{\frac{50}{49}} = \frac{7}{5}\left[1 + \frac{1}{100} + \frac{1\cdot 3}{100\cdot 200} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{100\cdot 200\cdot 300} + \cdots\cdots\right]$$ (Hieraus $\sqrt{2}$ auf 7 Dez. genau!)

$$\gamma.,\ \sqrt[3]{5} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{27}{25}} = \frac{5}{3}\left[1 + \frac{1}{81}\cdot 2 + \frac{1\cdot 4}{81\cdot 162}\cdot 4 + \frac{1\cdot 4\cdot 7}{81\cdot 162\cdot 243}\cdot 8 + \cdots\cdots\right]$$ (Hieraus $\sqrt[3]{5}$ auf 5 Dez. genau!)

2., Man berechne auf 5 Dezimalen genau $\lg^e 17$, wenn gegeben $\lg^e 2 = 0{,}6931458$ und $\lg^e 3 = 1{,}0986100$. Wie findet man hieraus $\lg^{10} 17$?

3., Man zeige, daß: $\lg 5 = 1 + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{4\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^4} + \cdots\cdots$

$$+ 2\left[\frac{1}{7} + \frac{1}{3\cdot 7^3} + \frac{1}{5\cdot 7^5} + \frac{1}{7\cdot 7^7} + \cdots\cdots\right] - 2\cdot\left[\frac{1}{31} + \frac{1}{3\cdot 31^3} + \frac{1}{5\cdot 31^5} + \frac{1}{7\cdot 31^7} + \cdots\cdots\right].$$

4., Man untersuche die Konvergenz der Reihe:

$$\frac{2x}{1\cdot 3} - \frac{3x^2}{2\cdot 4} + \frac{4\cdot x^3}{3\cdot 5} - \frac{5x^4}{4\cdot 6} + - \cdots\cdots = \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{(n+1)\cdot x^n}{n\cdot(n+2)}\cdot(-1)^{n+1}$$

und summire dieselbe! [Man zerlege in den einzelnen Gliedern $\frac{n+1}{n\cdot(n+2)}$ in Partialbrüche!]

5., Man bilde die Summe der unendlichen Reihe:

$$\frac{1\cdot x}{2!} - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^3}{4!} - \frac{7x^4}{5!} + \frac{9x^5}{6!} - + \cdots\cdots = \sum_{1}^{\infty}{}_{n} (-1)^{n+1}\cdot\frac{(2n-1)x^n}{(n+1)!}.$$

[Man zerlege in den einzelnen Gliedern: $\frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1}$.]

10. Juli 1901. № 24.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln:

I. Zusammenhang der Funktionen arctg x und lg x. Aus $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ und $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ folgt: $\operatorname{tg} x = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1}$. Löst man diese Gleichung nach e^{2ix} auf und logarithmirt, so findet man: $2ix = \lg\frac{1+i\operatorname{tg}x}{1-i\operatorname{tg}x}$, so daſs also, wenn man $\operatorname{tg}x = z$ setzt: $2i\operatorname{arctg}z = \lg\frac{1+iz}{1-iz}$ oder für $z = iy$: $2i\operatorname{arctg}iy = \lg\frac{1-y}{1+y}$. Durch Anwendung der für $\lg\frac{1+x}{1-x}$ gefundenen Reihe ergibt sich: $\operatorname{arctg}z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - + \ldots\ldots$ (convergent für $-1 \leq z \leq +1$.)

II. Der Logarithmus einer complexen Zahl $\lg(x+iy)$ ist eine complexe Zahl $= u+iv$. Aus $e^{u+iv} = x+iy = e^u[\cos v + i\sin v]$ ergeben sich zur Bestimmung von u und v die beiden Gleichungen: $x = e^u\cdot\cos v$; $y = e^u\sin v$. Es ist somit eindeutig: $u = \lg\sqrt{x^2+y^2} = \lg\varrho$, wenn ϱ der Modul der complexen Zahl $x+iy = \varrho[\cos\varphi + i\sin\varphi]$ ist; $v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \varphi$ dagegen ist den beiden Gleichungen entsprechend wie das Argument φ der Zahl $x+iy$ nur bestimmt bis auf Vielfache von 2π, so daſs also:

$$\lg[x+iy] = \lg\sqrt{x^2+y^2} + i\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 2k\pi i$$

oder: $\lg[x+iy] = \lg[\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \lg\varrho + i(\varphi + 2k\pi)$.

III. Die hyperbolischen Funktionen: Definirt man: $\frac{e^{\mu}+e^{-\mu}}{2} = \cos\text{hyp}\,\mu$ als „Cosinus hyperbolicus μ" und $\frac{e^{\mu}-e^{-\mu}}{2} = \sin\text{hyp}\,\mu$ als „Sinus hyperbolicus μ", so wird:

$$\cos[\lambda+\mu i] = \cos\lambda\cdot\cos\text{hyp}\,\mu - i\sin\lambda\,\sin\text{hyp.}\,\mu.$$

$$\sin[\lambda+i\mu] = \sin\lambda\,\cos\text{hyp}\,\mu + i\cos\lambda\,\sin\text{hyp.}\,\mu.$$

IV. Summation spezieller trigonometrischer Reihen: Aus der Kenntnis der Summe einer Potenzreihe: $A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots\ldots = f(z)$ ergeben sich durch Einführung der Exponentialfunktion an Stelle der trigonometrischen Funktionen sofort die Summen folgender Reihen:

$$\text{I.}\quad A_0 + A_1 z\cdot\cos\varphi + A_2 z^2\cos 2\varphi + A_3 z^3\cos 3\varphi + A_4 z^4\cos 4\varphi + \ldots\ldots = \frac{1}{2}\left[f(z\cdot e^{i\varphi}) + f(z e^{-i\varphi})\right]$$

$$\text{II.}\quad A_0 + A_1 z\cdot\sin\varphi + A_2 z^2\sin 2\varphi + A_3 z^3\sin 3\varphi + A_4 z^4\sin 4\varphi + \ldots\ldots = \frac{1}{2i}\left[f(z\cdot e^{i\varphi}) - f(z\cdot e^{-i\varphi})\right] + A$$

Indem man zum Schlusse wiederum trigonometrische Funktionen einführt, lassen sich diese beiden Ausdrücke stets auf eine reelle Form bringen.

Aufgaben:

1., Man berechne folgende (natürliche) Logarithmen: α., $\lg(+\sqrt{3}+i)$ β., $\lg(+\sqrt{3}-i)$; γ., $\lg(-\sqrt{3}+i)$; δ., $\lg(-\sqrt{3}-i)$!

2., Der Ausdruck $\dfrac{\arccos\sqrt{1-x}}{\sin\sqrt{x}}$ erscheint für $x<0$ unter imaginärer Gestalt. Man stelle ihn für diesen Fall in reeller Form dar!

3., Ebenso: $\lg\left[\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-x^2}}{\alpha-\sqrt{\alpha^2-x^2}}\right]\cdot \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{\alpha^2-x^2}}{x}$ für $x^2>\alpha^2$!

4. Man verwende die Relation $\frac{\pi}{4} = 2\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$ zur Berechnung von π bis auf 7 Dezimalen.

5., $\cos^5\varphi$ und $\sin^5\varphi$ sollen ausgedrückt werden durch Cosinus bzw. Sinus von Vielfachen von φ. [Man gehe zu dem Zwecke von $\cos\varphi$ bzw. $\sin\varphi$ auf die Exponentialfunktion über und wende den binomischen Satz an!]

6., Man entwickle $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ nach der Newton'schen Binomialreihe. Sodann summire man die Reihen:

$$1 + 2z\cdot\cos\varphi + 3z^2\cos 2\varphi + 4z^3\cos 3\varphi + 5z^4\cos 4\varphi + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$1 + 2z\cdot\sin\varphi + 3z^2\sin 2\varphi + 4z^3\sin 3\varphi + 5z^4\sin 4\varphi + \ldots\ldots\ldots$$

Name: . . . .

Semestralexamen

Sommersemester 1901.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

17. Juli 1901.

1, Ein Stern geht für einen Ort mit der geogr. Breite $\varphi = 52^\circ 31' 12''$ genau im Nordosten auf. Welche Deklination hat der Stern? Nach wieviel Sternzeit wird er den Mittagskreis erreichen?

2, Das Produkt zweier Wurzeln der Gleichung: $x^4 + 3x^3 + a_2 x^2 - 2x - 4 = 0$ ist 2. Man berechne alle Wurzeln der Gleichung, sowie den Koeffizienten a_2!

3, Man beweise durch geeignete Umformung der Determinante, dass

$$\begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \sin\alpha & 1 \\ \cos 2\beta & \sin\beta & 1 \\ \cos 2\gamma & \sin\gamma & 1 \end{vmatrix} = 16 \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \sin\frac{\beta-\gamma}{2} \sin\frac{\gamma-\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \cos\frac{\gamma+\alpha}{2}$$

$$\left[= 2(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\beta - \sin\gamma)(\sin\gamma - \sin\alpha) \right].$$

4, Man bestimme den Konvergenzbereich der unendlichen Reihe:

$$\frac{x}{1\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 5} + \frac{x^5}{5\cdot 7} + \frac{x^7}{7\cdot 9} + \cdots\cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+3)} + \cdots = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+3)}$$

und summire dieselbe!

5, Man summire die unendliche Reihe:

$$z\cdot\cos\varphi - \frac{z^3}{3}\cos 3\varphi + \frac{z^5}{5}\cos 5\varphi - \frac{z^7}{7}\cos 7\varphi + \frac{z^9}{9}\cos 9\varphi - + \cdots\cdots$$

[Das Resultat ist in reelle Form umzusetzen, was z. B. durch Anwendung der trig. Formel: $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$ erreicht werden kann.]

[illegible]

[illegible]

1) [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

b) [illegible]

[illegible]

[illegible]

c) [illegible] Winkels 45° [illegible] Figur [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

7. Nov. 1901. №1.

Algebraische Analysis u. Trigonometrie.

Aufgaben:

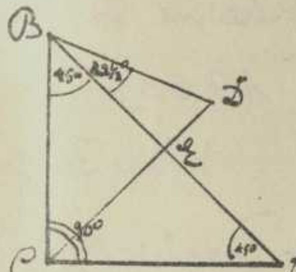
1.) Man drücke die trigonometr. Functionen $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\,\alpha$, $\sec\alpha$, $cosec\,\alpha$ durch $cotg\,\alpha$ aus

a) vermittels der Formeln, welche den Zusamenhang dieser Functionen herstellen.

b) durch Ableitung aus der Figur eines rechtw. Dreiecks.

Welche Werte erhalten $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\,\alpha$, $\sec\alpha$, $cosec\,\alpha$, wenn speziell $cotg\,\alpha = \frac{13}{5}$?

2) Man berechne die trigon. Functionen des Winkels $22\frac{1}{2}^\circ$ mit Benützung nebenstehender Figur.



ABC sei ein gleichschenkelig rechtwinkeliges Dreieck. CD halbiere den rechten Winkel bei C und CD sei gleich CB, dann ergeben sich die gesuchten Functionen aus dem Dreieck BDE.

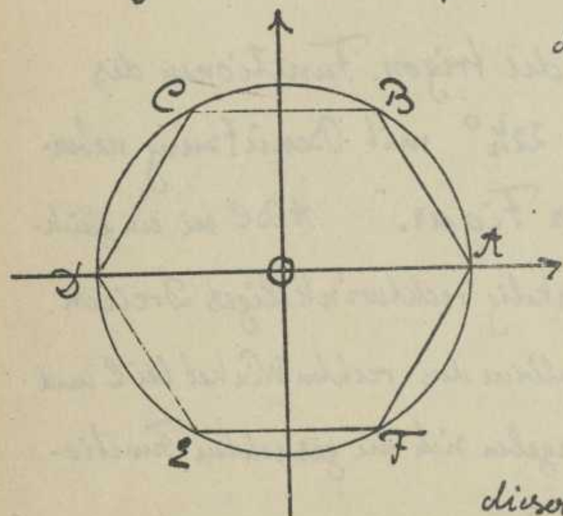
3) Gegeben sind die Werte a) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, b) $\cos\beta = \frac{1}{3}\sqrt{5}$, c) $\cos\gamma = \frac{1}{3}\sqrt{8}$, d) $\cos\delta = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Konstruiere die zugehörigen Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. (Zur Vereinfachung rechne man bei b) und c.) den Sinus, bei d) die Tangente aus.)

4) Wie findet man in der komplexen Ebene zum Punkte z die Punkte iz, $-z$, $-iz$?

5) Man konstruiere in der komplexen Ebene zu folgenden Zahlen die entsprechenden Punkte:

a) $2+3i$, b) $1+i\sqrt{3}$. c) $-2{,}5+i\sqrt{2}$, d) $-3-2i$.

6.) In der komplexen Ebene ist um den Nullpunkt der Kreis vom Radius 1 beschrieben, und diesem das reguläre Sechseck $ABCDEF$ einbeschrieben. Welche Zahlen gehören zu den Punkten A, B, C, D, E, F? Beweise, dass die Summe dieser Zahlen Null ist.

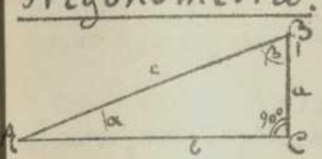


14. Nov. 1901. № 2.

Algebraische Analysis u. Trigonometrie.

I. Formeln.

Trigonometrie.



Definition: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $tg\,\alpha = \frac{a}{b}$, $cotg\,\alpha = \frac{b}{a}$

$sec\,\alpha = \frac{c}{b}$, $cosec\,\alpha = \frac{c}{a}$.

Hieraus folgt:

1.) $tg\,\alpha \cdot cotg\,\alpha = 1$. 2.) $\sin\alpha \cdot cosec\,\alpha = 1$. 3.) $\cos\alpha \cdot sec\,\alpha = 1$

ferner: 4.) $tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; 5.) $cotg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Der pythagor. Lehrsatz liefert die Relationen:

1.) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 2.) $cosec^2\alpha = 1 + cotg^2\alpha$. 3.) $sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha$.

Für zwei Complementswinkel α und $\beta = 90° - \alpha$ gelten die Beziehungen:

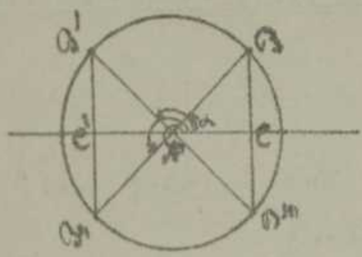
$f(\alpha) = cf(90° - \alpha)$; $cf(\alpha) = f(90° - \alpha)$; oder, wenn man $\alpha = 45° + \lambda$ setzt:

$f(45° + \lambda) = cf(45° - \lambda)$; $cf(45° + \lambda) = f(45° - \lambda)$.

Tabelle:

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\,\alpha$	$cotg\,\alpha$	$sec\,\alpha$	$cosec\,\alpha$
$\sin\alpha =$		$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+cotg^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{sec^2\alpha-1}}{sec\,\alpha}$	$\frac{1}{cosec\,\alpha}$
$\cos\alpha =$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+cotg^2\alpha}}$	$\frac{1}{sec\,\alpha}$	$\frac{\sqrt{cosec^2\alpha-1}}{cosec\,\alpha}$
$tg\,\alpha =$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\frac{1}{cotg\,\alpha}$	$\sqrt{sec^2\alpha-1}$	$\frac{1}{\sqrt{cosec^2\alpha-1}}$
$cotg\,\alpha =$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{tg\,\alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{sec^2\alpha-1}}$	$\sqrt{cosec^2\alpha-1}$
$sec\,\alpha =$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\sqrt{tg^2\alpha+1}$	$\frac{\sqrt{1+cotg^2\alpha}}{cotg\,\alpha}$		$\frac{cosec\,\alpha}{\sqrt{cosec^2\alpha-1}}$
$cosec\,\alpha =$	$\frac{1}{\sin\alpha}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1+tg^2\alpha}}{tg\,\alpha}$	$\sqrt{1+cotg^2\alpha}$	$\frac{sec\,\alpha}{\sqrt{sec^2\alpha-1}}$	

Den Verlauf der Functionen $\sin\alpha$ u. $\cos\alpha$, für Werte α, die 90° übersteigen, ersieht man aus folgender Figur und Tabelle



α	I. Quadr. $0 < \frac{\pi}{2}$	II. Quadr. $\frac{\pi}{2} < \pi$	III. Quadr. $\pi < \frac{3\pi}{2}$	IV. Quadr. $\frac{3\pi}{2} < 2\pi$
$\sin\alpha$	$0 < 1$	$1 > 0$	$0 > -1$	$-1 <$
$\cos\alpha$	$1 > 0$	$0 > -1$	$-1 < 0$	$0 <$

Das Verhalten der übrigen Functionen $tg\,\alpha$, $cotg\,\alpha$, $sec\,\alpha$, $cosec\,\alpha$ folgt dann aus deren Definition vermittels $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$.

Die Periodicität der trig. Functionen spricht sich in der Gleichung aus: $$f(\alpha) = f(\alpha \pm 2\pi).$$

Für die Bestimmung der trig. Functionen von Winkeln über 90° gilt die Regel: Der Quadrant, in dem der Winkel liegt, giebt das Vorzeichen der Function; enthält der Winkel ein ungerades Vielfaches von 90°, so geht die Function in die Cofunction über, im anderen Fall bleibt sie ungeändert; dabei ist:

Der Sinus positiv im I. u. II. negativ im III. u. IV. Quadr.

Der Cosinus positiv im I. u. IV negativ im II. u. III. Quadr.

Die Tang. u. die Cotg. positiv im I. u. III. negativ im II. u. IV. Quadr.,

wie auch aus obiger Figur u. Tabelle hervorgeht.

Formeln aus der Analysis.

Permutationen: Die Anzahl der Permutationen aus n verschiedenen Elementen ist: $P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$.

Sind aber unter den n Elementen r Elemente einander gleich, s andere Elemente untereinander gleich, t wieder andere Elemente untereinander gleich, u.s.w. so ist die Anzahl der verschiedenen Permutationen (der Perm. mit Wiederholung) $'P_n = \frac{n!}{r!\,s!\,t!\ldots}$

Combinationen. Die Anzahl der Combinationen aus n Elementen zur $p$ten Klasse: α) ohne Wiederholung: $C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}$

β) mit Wiederholung: $'C_n^p = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}$.

Variationen. Die Anzahl der Variationen aus n El. zur $p$ten Klasse:

α) ohne Wiederholung. $V_n^p = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1) = p!\,C_n^p$

β) mit Wiederholung. $'V_n^p = n^p$.

II. Aufgaben.

1) Man stelle den Verlauf der Functionen $\cos x$, $\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{cosec} x$ graphisch dar.

2) In einem Dreieck mit den Seiten a, b, c teilt die Winkelhalbierende des Winkels α die Seit a im Verhältnis der anliegenden Seiten

b usw. Berechne durch Anwendung dieses Satzes auf ein rechtw. Dreieck die trig. Functionen des Winkels $\frac{\alpha}{2}$ durch den Cosinus von α.

3.) Welche Werte haben die trig. Functionen: $\sin 270^\circ$, $\cos 270^\circ$ $\mathrm{tg}\, 90^\circ$, $\mathrm{cotg}\, 180^\circ$, $\sec 90^\circ$, $\mathrm{cosec}\, 270^\circ$? ; ferner. Drücke man folgende trig. Functionen auf zweifache Art durch solche von Winkeln des 1. Quadr. aus: 1.) $\sin 310^\circ$. 2.) $\cos 290^\circ$. 3.) $\mathrm{tg}\, 204^\circ$. 4.) $\sin 321^\circ$. 5.) $\cos 245^\circ$. 6.) $\mathrm{tg}\, 115^\circ$ 7.) $\cos 97^\circ$. 8.) $\mathrm{cotg}\, 289^\circ$. 9.) $\sin 129^\circ$ 10.) $\mathrm{cotg}\, 320^\circ$.

4.) Wie lang ist im Kreis vom Radius 1 der Bogen, der zum Winkel $\alpha = 114^\circ 35' 29.6''$ gehört, wie gross der Winkel β der zum Bogen $\mathrm{arc}\,\beta = 1.22173$ gehört. Wie lang ist auf dem Kreis vom Radius 0.31831 m der Bogen, der zum Winkel 270° gehört? Wie gross ist der Radius des Kreises, wenn zum Bogen 4 cm der Winkel $28^\circ 38' 52.4''$ gehört?

5.) Beweise: $\mathrm{tg}\, 15^\circ + \mathrm{cotg}\, 15^\circ = 4$.

6.) Wieviel 7 ziffrige Zahlen kann man mit den Ziffern 2,2,3,5,8,8,8 ; wieviel mit den Ziffern 0,0,0,1,1,9,9. bilden?

7.) Wieviel Dreiecke werden durch n Punkte bestimmt,
α) wenn niemals 3 Punkte in einer Geraden liegen.
β) wenn k_1 Punkte in einer Geraden, k_2 Punkte in einer anderen Geraden liegen?

21. Nov. 1901. № 3.

Algebraische Analysis u. Trigonometrie.

Berichtigung zum Übungsblatt № 2:

In der Tabelle ist in der Zeile für $\cos\alpha$, in der Colonne $\operatorname{cotg}\alpha$ zu lesen statt $\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}$: $\frac{\operatorname{cotg}}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}}$.

Die Aufgabe 5.) lautet: $\operatorname{tg}15^\circ + \operatorname{cotg}15^\circ = 4$.

Aufgaben.

1.) Man stelle den Verlauf der Function $\arcsin x$ graphisch dar.

2.) Die Mittelpunkte zweier Kreise mit den Radien 2 cm und 1.5 cm haben die Entfernung 12.6 cm. Wie lang sind die gemeinsamen Tangenten der beiden Kreise?

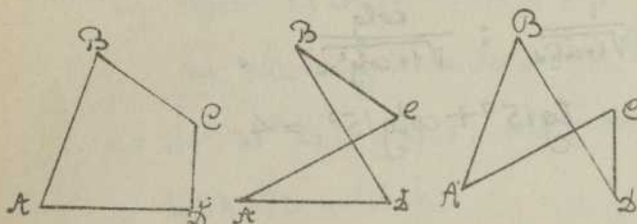
3.) Welche Werte haben die cyklometrischen Functionen:

a) $\arcsin\frac{1}{2}$ b) $\operatorname{arccotg}\sqrt{3}$, c) $\arcsin(-\frac{1}{2}\sqrt{3})$

d) $\operatorname{arctg}(-\frac{1}{3}\sqrt{3})$, e) $\operatorname{arccotg}(-1)$ f) $\operatorname{arccosec}(-\sqrt{2})$

g) $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)$, h) $\operatorname{arccotg}(\sqrt{3}-2)$, i.) $\arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{4}$. ?

4.) Aus 4 Punkten kann man, wie die Figur zeigt, drei Vierecke bilden.



Wieviel Fünfecke kann man aus 5 Punkten, wieviel n-Ecke aus n Punkten bilden? (speziell n = 6.)

5.) Wieviel Schnittpunkte liefern die Geraden, die man durch n Punkte legen kann?

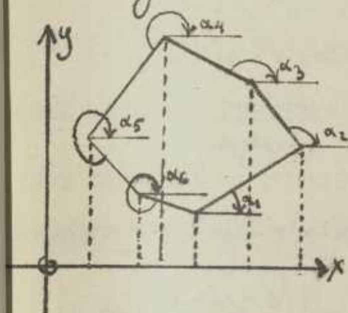
6.) Wieviele dreiziffrige Zahlen mit je 3 verschiedene Ziffern gibt es? wieviele dreiziffrige Zahlen gibt es überhaupt?

28. Nov. 1901. № 4.

Algebraische Analysis u. Trigonometrie.

I. Formeln.

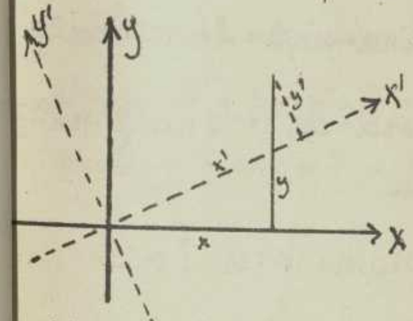
Trigonometrie.



Der Projectionssatz: Sind $a_1\, a_2\, a_3 \cdots a_n$ die Seiten eines Polygons, $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \cdots \alpha_n$ die Winkel, welche diese Seiten mit der Richtung der X-Achse eines rechtwinkeligen Koordinatensystems bilden, $\beta_1\, \beta_2 \cdots \beta_n$ die Winkel, die die Seiten mit der Richtung der Y-Achse einschliesen, so gelten für die Projectionen des Polygons auf die beiden Achsen die Gleichungen:

$$a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + \cdots\cdots + a_n \cos\alpha_n = 0 \;;\; a_1 \cos\beta_1 + a_2 \cos\beta_2 + \cdots\cdots + a_n \cos\beta_n = 0.$$

Mit Hilfe dieses Satzes leitet man die Transformationsgleichungen für eine Drehung des Koordinatensystems um den Anfangspunkt ab:



$$x = x'\cdot\cos\alpha - y'\sin\alpha \quad\Big|\quad x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$
$$y = y'\cos\alpha + x'\sin\alpha \quad\Big|\quad y' = y\cos\alpha - x\sin\alpha$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich dann folgende Formeln, d.h.

die Additionstheoreme der trigon. Functionen:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$; $\quad \cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

und hieraus:

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta} \quad ; \quad \mathrm{cotg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\mathrm{cotg}\,\alpha\,\mathrm{cotg}\,\beta \mp 1}{\mathrm{cotg}\,\beta \pm \mathrm{cotg}\,\alpha}.$$

Für $\alpha = \beta$ ergiebt sich:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad ; \quad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

$$\mathrm{tg}\,(2\alpha) = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} \quad ; \quad \mathrm{cotg}(2\alpha) = \frac{\mathrm{cotg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{cotg}\,\alpha}$$

Aus der Gleichung für $\cos(2\alpha)$ folgt $\quad 1+\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha$; $1-\cos(2\alpha) = 2\sin^2\alpha$

oder: $$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \quad , \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

Setzt man in den Gleichungen:

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\cos y \quad ; \quad \sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x\sin y$$
$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y \quad ; \quad \cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x\sin y$$

$x+y = \alpha$ und $x-y = \beta$, also $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$, so erhält man:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad ; \quad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad ; \quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Algebr. Analysis. Binomischer Satz:

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots\cdots + \binom{n}{p}x^{n-p}y^p + \cdots\cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + y^n$$

dabei bedeutet n eine ganze positive Zahl und

$$\binom{n}{p} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\ldots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\ldots p.} \quad \text{und} \quad \binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1.$$

Für diese Binomialkoeffizienten gelten die Relationen:

$$\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p} \quad \left[=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}\right], \text{ insbesondere: } \binom{n+1}{p}=\binom{n}{p}+\binom{n}{p-1}.$$

d.h. Die Summe zweier aufeinanderfolgenden Binomialkoeffizienten mit dem Index p bzw. $p-1$ für die $n$te Potenz ist gleich dem Binomialkoeffizient mit dem Index p für die nächst höhere Potenz. Hieraus folgt nebenstehendes Schema für die Binomialkoeffizienten. (Pascalsches Dreieck.)

```
            1
           1 1
          1 2 1
         1 3 3 1
        1 4 6 4 1
      1 5 10 10 5 1
     1 6 15 20 15 6 1
    1 7 21 35 35 21 7 1
  1 8 28 56 70 56 28 8 1
           etc.
```

Aufgaben.

1.) Beweise die Richtigkeit der Formeln:

$\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{4}{5}=\frac{\pi}{2}$; $\arcsin\frac{8}{17}+\arcsin\frac{15}{17}=\frac{\pi}{2}$

$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$; $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$

2.) Von einem Fünfeck sind gegeben die Seiten $a=486.0$

$b = 467.1$, $c = 394.2$, $d = 482.4$, und die Winkel $\alpha = \sphericalangle(a,b) = 46°38'$, $\beta = \sphericalangle(b,c) = 136°5'$, $\gamma = 38°51'$. Durch zweimalige Anwendung des Projectionssatzes berechne man die fehlenden Winkel $\delta = \sphericalangle(d,e)$, $\varepsilon = \sphericalangle(e,a)$, sowie die Seite e.

3.) Entwickle nach dem binomischen Satz $(2a-b)^6$

4.) Wie lauten die mittleren 2 Glieder in der Entwicklung von $\left(\frac{3}{4}a^{2m-1}\cdot b^{4-p} - \frac{8}{9}a^{1-2m}\cdot b^{p-4}\right)^7$? Wie heisst das mittlere Glied von $(x+y)^{2m}$, wie heissen die mittleren Glieder von $(x+y)^{2m+1}$?

5.) Beweise die Relationen:

$$\binom{a+b}{2} = \binom{a}{2} + \binom{a}{1}\cdot\binom{b}{1} + \binom{b}{2}$$

$$\binom{a+b}{3} = \binom{a}{3} + \binom{a}{2}\cdot\binom{b}{1} + \binom{a}{1}\cdot\binom{b}{2} + \binom{b}{3}$$

---

5. Dec. 1901. №. 5.

Algebraische Analysis u. Trigonometrie.

I. Formeln.

Trigonometrie. Lösung der trigonom. Gleichung:

$$a\cos x + b\sin x = c.$$

Man setze $a = m\cdot\sin\varphi$, $b = m\cdot\cos\varphi$ also 1.) $m = +\sqrt{a^2+b^2}$ und 2.) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}$ (wobei φ bis auf Vielfache von 2π vollkommen bestimmt ist.); dann findet man nach Berechnung von m und φ für den gesuchten Winkel x zwei Werte aus 3.) $\sin(\varphi + x) = \frac{c}{m}$.

Analysis. Differenzreihen. Bildet man aus den Gliedern der Hauptreihe: $u_0\ u_1\ u_2 \dots u_n \dots$ die I. Differenzreihe: $\Delta u_0, \Delta u_1\ \Delta u_2 \dots$, wo $\Delta u_r = u_{r+1} - u_r$, sodann die II. Differenzreihe: $\Delta^2 u_0, \Delta^2 u_1, \Delta^2 u_2 \dots$, wo $\Delta^2 u_r = \Delta u_{r+1} - \Delta u_r$; u.s.w. die III; IV, ... Differenzreihe, so berechnet sich das I. Glied der $n$ten Differenzreihe aus den Gliedern der Hauptreihe nach Gl.:

$$\text{I.}\quad \Delta^n u_0 = u_n - \binom{n}{1} u_{n-1} + \binom{n}{2} u_{n-2} - \binom{n}{3} u_{n-3} + \dots\dots + (-1)^n \cdot u_0$$

ebenso das $(r+1)$te Glied der $n$ten Differenzreihe aus der Gleichung

$$\text{II.}\quad \Delta^n u_r = u_{n+r} - \binom{n}{1} u_{n+r-1} + \binom{n}{2} u_{n+r-2} - \binom{n}{3} u_{n+r-3} + \dots\dots + (-1)^n u_r.$$

Umgekehrt findet man aus u_0 und den Anfangsgliedern der Differenzreihen die Glieder der Hauptreihe nach Formel:

III. $u_n = u_0 + \binom{n}{1}\Delta u_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 u_0 + \binom{n}{3}\Delta^3 u_0 + \dots + \Delta^n u_0$

sowie die Summe der n ersten Glieder, d.h. $\Sigma_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ aus:

IV. $\Sigma_n = \binom{n}{1} u_0 + \binom{n}{2}\Delta u_0 + \binom{n}{3}\Delta^2 u_0 + \dots + \Delta^{n-1} u_0$.

<u>Arithmetische Reihe $k$ter Ordnung</u> heisst eine Reihe, wenn die Glieder ihrer $k$ten Differenzreihe alle einander gleich werden. Da also alle höheren Differenzreihen verschwinden, wird das $(n+1)$te Glied u_n der arithmet. Reihe $k$ter Ordnung:

V^a $u_n = u_0 + \binom{n}{1}\Delta u_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 u_0 + \dots + \binom{n}{k}\Delta^k u_0$

und die Summe der n ersten Glieder:

V^b $\Sigma_n = n \cdot u_0 + \binom{n}{2}\Delta u_0 + \binom{n}{3}\Delta^2 u_0 + \dots \binom{n}{k+1}\Delta^k u_0$.

Aufgaben.

1.) Bestimme x aus der Gleichung $17 \sin x + 23 \cos x = 27$.

2.) Berechne $\sin(63^\circ) = \sin(45^\circ + 18^\circ)$ und $\sin 27^\circ = \sin(45^\circ - 18^\circ)$ wenn $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$; ferner $\sin 3^\circ = \sin(30^\circ - 27^\circ)$.

3.) In einem dreiseitigen Kugelhaufen liegen in der obersten Schichte 1 Kugel, in der zweiten 3, in der dritten 6, in der vierten 10 Kugeln u.s.w. Wieviel Kugeln liegen in der 20. Schichte? wieviel im ganzen Haufen, der n (20) Schichten hat?

12. Dec. 1901. № 6.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

I. Formeln.

Trigonometrie. Trigonometrische Auflösung der Gleichungen 2. Grades mit reellen Wurzeln:

α.) Lautet die Gleichung $x^2+px-q=0$, wo q eine positive Zahl ist, so setzt man $tg\varphi=\frac{2}{p}\cdot\sqrt{q}$ und erhält nach Berechnung von φ die Wurzeln der Gleichung in der Form: $x_1=\sqrt{q}\cdot tg\frac{\varphi}{2}$, $x_2=-\sqrt{q}\,cotg\frac{\varphi}{2}$.

β.) Liegt die Gleichung $x^2+px+q=0$ vor, wo q positiv ist, so muss $\frac{4q}{p^2}<1$ sein, wenn die Wurzeln reell sein sollen; setzt man dann $\sin\varphi=\sqrt{\frac{4q}{p^2}}$ und berechnet hieraus φ; so werden die Wurzeln: $x_1=-p\sin^2\frac{\varphi}{2}$; $x_2=-p\cos^2\frac{\varphi}{2}$.

Analysis. Trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen: Jede komplexe Zahl lässt sich in der Form darstellen: $x+iy=\varrho[\cos\varphi+i\sin\varphi]=\varrho\cdot[\cos(\varphi+2k\pi)+i\sin(\varphi+2k\pi)]$ Hiebei ist der Modul $\varrho=+\sqrt{x^2+y^2}$; während sich das Argument φ aus den Gleichungen $x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$ bis auf Vielfache von 2π ergiebt: $\varphi=arctg\frac{y}{x}=arccos\frac{x}{\varrho}=arcsin\frac{y}{\varrho}$.

Multiplication zweier komplexer Zahlen: $(x+iy)\cdot(x'+iy') =$

$\varrho[\cos\varphi+i\sin\varphi]\cdot\varrho'[\cos\varphi'+i\sin\varphi'] \quad = \varrho\cdot\varrho'\cdot[\cos(\varphi+\varphi')+i\sin(\varphi+\varphi')]$.

Division: $\frac{x+iy}{x'+iy'} = \frac{\varrho[\cos\varphi+i\sin\varphi]}{\varrho'[\cos\varphi'+i\sin\varphi']} = \frac{\varrho}{\varrho'}\cdot[\cos(\varphi-\varphi')+i\sin(\varphi-\varphi')]$.

Speciell: $\frac{1}{x+iy} = \frac{1}{\varrho[\cos\varphi+i\sin\varphi]} = \frac{1}{\varrho}[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)] = \frac{1}{\varrho}[\cos\varphi-i\sin\varphi]$.

<u>Der Moivresche Satz:</u> Die Gleichung:

$$(x+iy)^n = [\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n = \varrho^n[\cos n\varphi+i\sin n\varphi]$$

gilt nicht nur für positive und negative ganze Zahlen n, sondern auch wenn n eine gebrochene Zahl ist; dann ist aber zu beachten, dass das Argument nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt ist. Für $n=\frac{1}{m}$ (wobei m ganze Zahl sei) lautet also der Moivresche Satz:

$$(x+iy)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\varrho[\cos\varphi+i\sin\varphi]} = \sqrt[m]{\varrho}\cdot\left[\cos\frac{\varphi+2k\pi}{m}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{m}\right].$$

Für $k=0,1,2,3\cdots m-1$ folgen hieraus die m verschiedenen Wurzelwerte von $\sqrt[n]{x+iy}$.

II. Aufgaben.

1.) Berechne x aus der Gleichung $4.2741x^2+5.4775x+1.5325=0$

2.) Zeige, dass die Zahlen 1, 1, 1, 2, 5, 15, 45, 120, 281 die Anfangsglieder einer arithm. Reihe 5. Ordn. sind, stelle das allgemeine ($n$te) Glied auf, und berechne die Summe der n ersten Glieder. ($n=10$).

3.) Welches sind die 5 Werte von $\sqrt[5]{32}$? $\quad(\cos 72^0=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1))$

4.) Stelle folgende komplexe Zahlen in trigon. Form dar:

α.) $1+i$; β.) $\sqrt{3}+i$; γ.) $1+\sqrt{2}+i$; δ.) $1-i(2-\sqrt{3})$.

19. Dec. 1901. № 7

Algebraische Analysis und Trigonometrie

Aufgaben.

1.) Man bestimme x aus der Gleichung:

$$a(\cos x + \sin x) = \frac{b \cos 2x}{1 - \sin 2x} \quad . \qquad \text{(speciell } a = b.\text{)}$$

2.) Bestimme x aus der cyklometr. Gleichung:

$$\operatorname{arcsec} a - \operatorname{arcsec} b = \operatorname{arcsec} \frac{x}{b} - \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} .$$

3.) Für die 3 Winkel α, β, γ eines Dreieckes gelten die Relationen:

α.) $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha + \operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = 1.$

β.) $(\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha + \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma) : (\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\beta + \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\gamma) = \sin\beta : \sin\alpha.$

Beweis!

4.) Folgende Ausdrücke sind in reeller Form darzustellen:

a.) $\dfrac{(1+i)^n + (1-i)^n}{4}$ b.) $\dfrac{(1+i)^n - (1-i)^n}{4i}$

c.) $\frac{\varepsilon_1(1+\varepsilon_1)^n+\varepsilon_2(1+\varepsilon_2)^n}{3}$ d.) $\frac{\varepsilon_1(1+\varepsilon_1)^n-\varepsilon_2(1+\varepsilon_2)^n}{3i}$

hiebei bedeuten $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ die beiden komplexen Werte von $\sqrt[3]{1}$.

5.) Man bestimme die 6 Werte von $\sqrt[6]{-729i}$, und zeichne sie in der komplexen Ebene.

9. Jan. 1902. №. 8.

Algebraische Analysis u. Trigonometrie.

Formeln.

1) $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \sin(\alpha+3\beta) + \cdots + \sin[\alpha+(n-1)\beta] = \dfrac{\sin[\alpha+\frac{n-1}{2}\beta]\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$

Für $\alpha=0$ folgt:

$$\sin\beta + \sin 2\beta + \sin 3\beta + \cdots + \sin[(n-1)\beta] = \frac{\sin[\frac{n-1}{2}\beta]\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

2) $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \cos(\alpha+3\beta) + \cdots + \cos[\alpha+(n-1)\beta] = \dfrac{\cos[\alpha+\frac{n-1}{2}\beta]\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$

Hieraus folgt

a) für $\alpha=0$: $1+\cos\beta+\cos 2\beta+\cos 3\beta+\cdots+\cos[(n-1)\beta] = \dfrac{\cos[\frac{n-1}{2}\beta]\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$

b) für $\alpha=\beta$: $\cos\beta+\cos 2\beta+\cos 3\beta+\cos 4\beta+\cdots+\cos(n\beta) = \dfrac{\cos[\frac{n+1}{2}\beta]\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$.

Ersetzt man in diesen Relationen β durch $180°+\beta$, so erhält man die Summenformeln für die analogen trigonometrischen Reihen mit alternirenden Vorzeichen.

Die Anwendung des binom. Satzes auf die Gleichung:

$$[\cos\varphi + i\sin\varphi]^m = \cos(m\varphi) + i\sin(m\varphi) \quad \text{gibt:}$$

1) $\cos m\varphi = \cos^m\varphi - \binom{m}{2}\cos^{m-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + \binom{m}{4}\cos^{m-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi - \binom{m}{6}\cos^{m-6}\varphi\cdot\sin^6\varphi + - \cdots$

2.) $\sin m\varphi = \binom{m}{1}\cos^{m-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \binom{m}{3}\cos^{m-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + \binom{m}{5}\cos^{m-5}\varphi\cdot\sin^5\varphi - \binom{m}{7}\cos^{m-7}\varphi\cdot\sin^7\varphi + - \cdots$

Die Wurzeln der binomischen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x^n-1&=0 \\ x^n+1&=0 \end{aligned}\right\} \text{sind:} \left\{ \begin{aligned} &\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n} \\ &\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n} \end{aligned}\right. \quad (\text{für } k=0,1,2,\ldots\ldots(n-1))$$

Eine $n$te Wurzel der Einheit heißt <u>primitiv</u>, wenn sie die Eigenschaft hat, dass erst ihre $n$te Potenz gleich 1 wird, und nicht etwa schon eine niedrigere Potenz. Alle übrigen $n$ten Wurzeln der Einheit lassen sich als Potenzen einer derartigen primitiven Wurzel darstellen.

<u>Der Satz von Côtes.</u>

I.) <u>n</u> sei eine <u>gerade</u> Zahl; dann ist:

1.) $$a^n-b^n=(a^2-b^2)\left(a^2-2ab\cos\frac{2\pi}{n}+b^2\right)\left(a^2-2ab\cos\frac{4\pi}{n}+b^2\right)\cdots\cdots\left(a^2-2ab\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+b^2\right)$$

2.) $$a^n+b^n=\left(a^2-2ab\cos\frac{\pi}{n}+b^2\right)\cdot\left(a^2-2ab\cos\frac{3\pi}{n}+b^2\right)\cdot\left(a^2-2ab\cos\frac{5\pi}{n}+b^2\right)\cdots\cdots\left(a^2-2ab\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+b^2\right)$$

II.) <u>n</u> sei eine <u>ungerade</u> Zahl, so gilt:

1.) $$a^n-b^n=(a-b)\cdot\left(a^2-2ab\cos\frac{2\pi}{n}+b^2\right)\cdot\left(a^2-2ab\cos\frac{4\pi}{n}+b^2\right)\cdots\cdots\left(a^2-2ab\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+b^2\right)$$

2.) $$a^n+b^n=(a+b)\cdot\left(a^2-2ab\cos\frac{\pi}{n}+b^2\right)\cdot\left(a^2-2ab\cos\frac{3\pi}{n}+b^2\right)\cdots\cdots\left(a^2-2ab\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+b^2\right)$$

<u>Aufgaben:</u>

1.) Man bringe den Ausdruck $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma$ für den Fall, dass α,β,γ die Winkel eines Dreieckes sind, auf die logarithmisch brauchbare Form $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$.

2.) Ein Dreieck mit den Winkeln α, β, γ ist rechtwinkelig, wenn $\sin\alpha : \cos\beta = \sin\gamma + \cos\gamma \cdot \cotg\alpha$ ist. Beweis!

3.) Man bestimme die Summe der Reihe:
$$S = \sin x + \sin 2x \cos x + \sin 3x \cos 2x + \ldots\ldots + \sin nx \cos[(n-1)x]$$
mit Benützung der Formel $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$

4.) Zerlege $32x^5 - 243$ in reelle Factoren!

5.) Man bestimme eine primitive Wurzel α von $x^6 - 1 = 0$ und stelle die anderen Wurzeln als Potenzen von α dar!

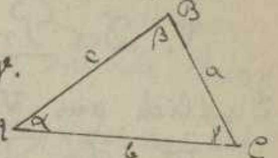
16. Jan. 1902.

№ 9.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Trigonometrische Formeln für das ebene schiefwinkelige Dreieck.

I. Der Sinussatz: $a:b:c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.



Oder $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ [$= 2r$, wenn r der Radius des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises ist.] Aus dem Sinussatz folgt:

$$1.)\quad a:(b+c) = \cos\frac{\beta+\gamma}{2} : \cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$2.)\quad a:(b-c) = \sin\frac{\beta+\gamma}{2} : \sin\frac{\beta-\gamma}{2}$$

hieraus durch Division: $3.)\quad \frac{b+c}{b-c} = \operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2} : \operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}$ (Tangentensatz)

Der Tangentensatz wird angewendet, wenn von einem Dreieck 2 Seiten b, c und der eingeschlossene Winkel α gegeben sind.

II. Der Inhaltssatz: $\Delta ABC = \frac{1}{2} ab\sin\gamma = \frac{1}{2} bc\sin\alpha = \frac{1}{2} ac\sin\beta$.

und: $\Delta ABC = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}$; u.s.w.

III. Der Cosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Umformung des Cosinussatzes für die logarithm. Berechnung:

1.) Entweder setzt man $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$, so dass $a^2 = (b+c)^2 - 4bc\cos^2\frac{\alpha}{2}$, also

$a = \sqrt{(b+c+m)\cdot(b+c-m)}$, wo $m = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{bc}$.

2.) Oder man setzt $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, so dass $a^2 = (b-c)^2 + 4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}$, dann führt man einen Hilfswinkel φ durch $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{b-c}\sqrt{bc}$ ein, und findet $\alpha = \frac{b-c}{\cos\varphi}$

IV. Der <u>Halbwinkelsatz</u>: $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{b\cdot c}}$; $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{b\cdot c}}$; $tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s\cdot(s-a)}}$

dabei ist $s = \frac{a+b+c}{2}$; somit wird

$$\Delta ABC = bc\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{s\cdot(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

V. Der <u>Projectionssatz:</u> $c = a\cos\beta + b\cos\alpha$.

Endlich aus V. und I:

VI. Die <u>Tangentenformel</u>: $tg\beta = \frac{b\sin\alpha}{c-b\cos\alpha}$.

Ist r der Radius des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises, so gilt:

$$a = 2r\sin\alpha\ ;\quad b = 2r\sin\beta\ ;\quad c = 2r\sin\gamma.$$

Der Radius des einem Dreieck einbeschriebenen Kreises ist:

$$\varrho = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} = \frac{\Delta}{s}.$$

Die Radien der 3 anbeschriebenen Kreise sind:

$$\varrho_a = \frac{\Delta}{s-a}\ ;\quad \varrho_b = \frac{\Delta}{s-b}\ ,\quad \varrho_c = \frac{\Delta}{s-c}.$$

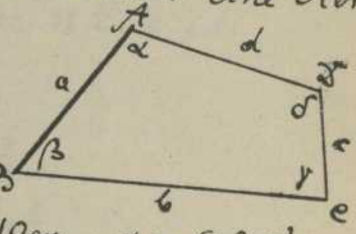
Aufgaben.

1) In der Gaussischen komplexen Ebene sei ein beliebiges reguläres n-Eck gezeichnet. Man beweise den

Satz: Addiert man die n den Eckpunkten entsprechenden komplexen Zahlen und teilt diese Summe durch n, so erhält man die dem Mittelpunkte des Polygons zukomende komplexe Zahl. (die dem Mittelpunkt entsprechende Zahl ist das arithmet. Mittel der den Eckpunkten zugehörigen Zahlen.)

2.) Um die Entfernung AB zweier Punkte A und B zu bestimmen, zwischen denen sich ein Hindernis der Messung befindet, sind von einem dritten Punkt C aus die Entfernungen $CA = b$, $CB = a$, nebst dem Winkel $\measuredangle ACB = \gamma$ gemessen worden. Berechne AB, wenn $b = 100\,m$, $c = 80\,m$, $\gamma = 50°$.

3.) Man beweise für den Flächeninhalt eine Viereckes $ABCD$ die Formel:



$$F = \frac{1}{2} b^2 \frac{\sin\beta \cdot \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} + \frac{1}{2} d^2 \frac{\sin\alpha \sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}$$

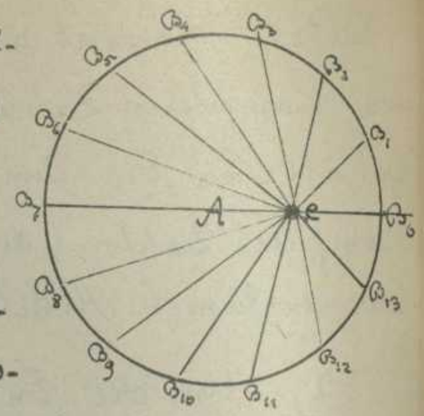
und berechne F für $d = 12$ cm, $b = 10$ cm. $\alpha = 62° 12'$ $\beta = 95°$, $\gamma = 110°$.

4.) Man beweise für das allgemeine ebene Dreieck die Relation:

$$a : \left(\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\right) = b : \left(\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right) = c : \left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\right).$$

5.) Stelle $\sin 5x$ und $\cos 5x$ durch $\sin x$ bezw. $\cos x$ dar!

6.) Die Kreisperipherie, deren Mittelpunkt in A liegt, wird von B_0 ausgehend in 14 gleiche Teile geteilt. Verbindet man den Punkt C auf AB_0 durch Strahlen mit den einzelnen Teilpunkten $B_0\ B_1\ B_2 \ldots$, so wird das Produkt aus den Strecken $CB_1, CB_3, CB_5, CB_7, CB_9, CB_{11} \ldots CB_{13}$ gleich $\overline{AB_0}^7 + \overline{AC}^7$ und ebenso das Produkt aus $CB_0, CB_2, \ldots CB_{12}$ gleich $\overline{AB_0}^7 - \overline{AC}^7$. Beweis!



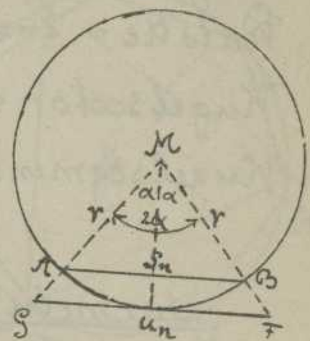
23. Jan. 1902.

№ 10.

Algebraische Analysis u. Trigonometrie.

Formeln aus der Trigonometrie.

Reguläre Polygone: Für das dem Kreise vom Radius r eingeschriebene n-Eck gilt: (vergl. d. Figur)



die Seite: $s_n = 2r\sin\alpha = 2r\sin\frac{\pi}{n}$;

die Peripherie: $P_n = 2nr\sin\alpha = 2nr\sin\frac{\pi}{n}$;

der Inhalt: $J_n = \frac{1}{2}ns_n\cdot r\cos\alpha = \frac{1}{2}nr^2\sin 2\alpha = \frac{1}{2}nr^2\sin\frac{2\pi}{n}$,

dabei ist 2α der zu s_n gehörige Centriwinkel.

Für das umschriebene reguläre n Eck ist:

die Seite: $u_n = 2r\,tg\,\alpha = 2r\,tg\frac{\pi}{n}$,

der Umfang: $p_n = 2nr\cdot tg\,\alpha = 2nr\,tg\frac{\pi}{n}$,

der Inhalt $i_n = n\cdot r^2 tg\,\alpha = nr^2 tg\frac{\pi}{n}$.

Zwischen der Seite des eingeschriebenen n-Eckes und der Seite des eingeschriebenen $2n$-Eckes besteht die Relation:

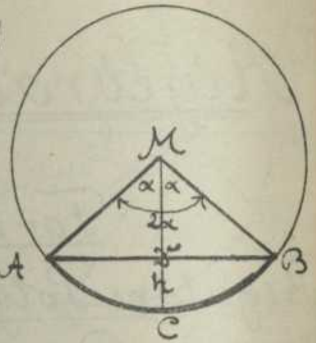
$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s_n^2}}$$

Die entsprechnde Relation für die umschrieb. Polygone:

$$u_{2n} = \frac{2r}{u_n}\left(\sqrt{4r^2 + u_n^2} - 2r\right).$$

<u>Kreisteile:</u> Sector: $S = r^2\pi \cdot \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} = r^2 \cdot \alpha$,(in der zweiten Form ist α eine absolute Zahl, im Längenmass.)

Segment $= r^2\pi \cdot \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} - \frac{r^2}{2} \sin 2\alpha$.



<u>Kugelteile:</u>

Kalotte $= 2r\pi h$;

Kugelsector $= \frac{2}{3} r^2 h\pi = \frac{4}{3} r^3 \pi \sin^2 \frac{\alpha}{2}$;

Kugelsegment $= \frac{4}{3} r^3 \pi \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha\right)$.

<u>Formeln aus der algebraischen Analysis.</u>

1.) Eine Function von n unabhängigen Variablen $y = f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ von der Dimension p heisst <u>homogen</u>, wenn für sie die Identität besteht:

$$f(x_1 \cdot t, x_2 \cdot t, x_3 \cdot t, \cdots x_n \cdot t) = t^p \cdot f(x_1, x_2, x_3, \cdots x_n) .$$

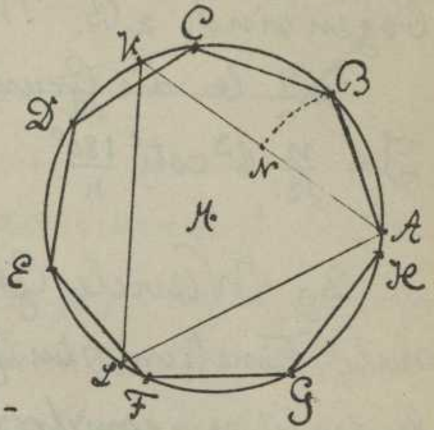
2.) Die Anzahl der Glieder der allgemeinsten ganzen rationalen Function $p$ten Grades für n Variable ist:

$$C_{n+1}^{(p)} = \frac{(n+1)(n+2)\cdot(n+3)\cdot \ldots \cdot (n+p)}{p!}$$

3.) Eine Function von n Variablen heisst <u>symmetrisch</u> wenn sie sich bei beliebiger Vertauschung der n Veränderlichen nicht ändert.

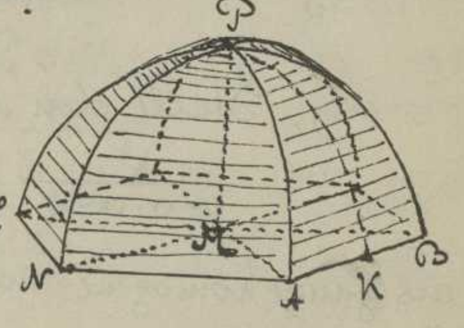
4) Eine Function $y=f(x)$ ist an der Stelle $x=\alpha$ nur dann <u>stetig</u>, wenn $\lim\limits_{\delta=\varepsilon=0}\left[f(x+\delta)-f(x-\varepsilon)\right]_{x=a}=0$ ist.

Aufgaben.



1.) Eine angenäherte Konstruktion des regulären Siebeneckes besteht darin, dass man die halbe Seite des dem Kreise eingeschriebenen regulären Dreieckes siebenmal im Kreise als Sehne abträgt. Also $AN=\frac{1}{2}AK$; wo AKL das einbeschr. gleichseitige Dreieck ist. Dann $AB=AN$, $BC=AN$ u.s.f. $GH=AN$.

Welches ist das Verhältnis dieser angenäherten Siebenecksseite zur genauen? Wie gross muss der Radius r des Kreises gewählt werden, wenn der Fehler, d.h. die kleine Sehne HA 1 cm betragen soll?



2.) Über einem regulären Polygon sei ein sog. Klostergewölbe konstruiert. Hiebei sind die einzelnen Wölbungsflächen Ausschnitte aus Rotations cylindern, deren Axen in der Grundfäche parallel zu bez. Grundkante liegen und durch M gehen, so dass die Mittellinien der einzelnen Wölbungsflächen Kreisbogen sind; z.B. PK ein Kreisbogen, u. $PM = KM$.

Ist b die Grundkante so wird der Gewölberaum
$J = \frac{n}{12} b^3 \cot^2 \frac{180^\circ}{n}$. Berechne J für $n = 6$ u. $n = 8$.

3.) Wieviele Glieder hat die allgemeinste ganze rationale Function $n$ten Grades $U^{(n)} = F(x, y)$ für 2 Variable. Was bedeutet es geometrisch, wenn man F gleich 0 setzt?

Stelle ferner die allgemeinste ganze rationale Function 3. Grades von 3 Variablen auf.

4.) Beweise dass der Ausdruck

$$V = \cos\frac{x_2 + x_3 - x_1}{2} + \frac{2\sin\frac{x_1}{2}\cdot\sin\frac{x_2}{2}\cdot\sin\frac{x_2 + x_3}{2}}{\sin\frac{x_1 + x_2 - x_3}{2}}$$

eine symmetrische Function von x_1, x_2, x_3 ist!

5.) Stelle den Ausdruck

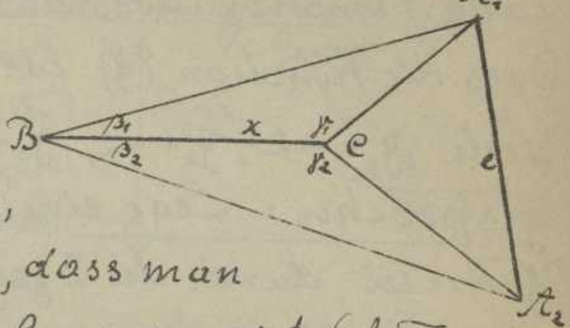
$$\frac{x^3}{(x-y)\cdot(x-z)} + \frac{y^3}{(y-x)\cdot(y-z)} + \frac{z^3}{(z-x)\cdot(z-y)}$$

als ganze homogene und symmetrische Function von x, y, z dar

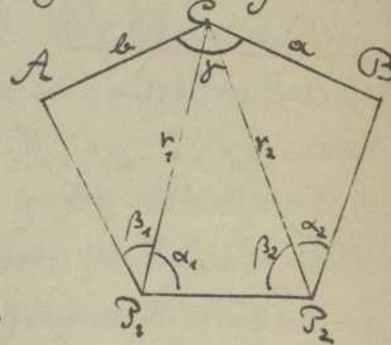
30. Jan. 1902. №. 11.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Aufgaben.



1.) Die Entfernung zweier Punkte B, C, die nicht direct gemessen werden kann, ist dadurch zu bestimmen, dass man in B und C die Winkel $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ misst, (cfr. Figur) welche die Strahlen nach 2 Punkten A_1 und A_2, deren Entfernung e bekannt ist, mit der Verbindungslinie BC einschliessen. Zahlenbeispiel: $e = 422.55\,m$; $\beta_1 = 38^\circ 17' 11''$, $\beta_2 = 28^\circ 39' 13''$; $\gamma_1 = 114^\circ 29' 28''$; $\gamma_2 = 124^\circ 43' 35''$.



2.) Die zwei Punkte P_1 und P_2 sind gleichzeitig über die 3 gegebenen Punkte A, C, B, (gegeben: $AC = a$, $BC = b$, $\sphericalangle BCA = \gamma$) „einzuschneiden" durch Messung der Winkel $AP_1C = \beta_1$, $\sphericalangle P_1P_2C = \beta_2$; $\sphericalangle CP_1P_2 = \alpha_1$, $\sphericalangle CP_2B = \alpha_2$. Berechne die Entfernungen $CP_1 = r_1$ und $CP_2 = r_2$, wenn $a = 43\,m$, $b = 51\,m$, $\gamma = 135^\circ$, $\beta_1 = 52^\circ$, $\beta_2 = 64^\circ$, $\alpha_1 = 70^\circ$, $\alpha_2 = 47^\circ$.

3.) Man bilde die ganze, rationale und symmetrische Function [1, 1, 3] der 3 Veränderlichen x, y, z.!

4.) Bestimme die Coefficienten der ganzen rationalen Function zweiten Grades $a_0x^2 + a_1x + a_2 = y$ so, dass die Function (y) für $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ bezw. die Werte $y_1 = -2$, $y_2 = +2$, $y_3 = 13$ annimmt. Geometrisch gesprochen: Lege eine Parabel, deren Axe parallel zur Y-Axe sei, durch die 3 gegebenen Punkte $(1, -2)$, $(3, 2)$, $(4, 13)$.

5.) Untersuche die Functionen

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-a}, \quad y = 1 + e^{\frac{1}{x-a}}$$ an der Stelle $x = a$,

und die Function $y = \lg[(x-1)\cdot(x-2)(x-3)]$ an den Stellen $x = 1$, $x = 2$, u. $x = 3$ auf ihre Stetigkeit!

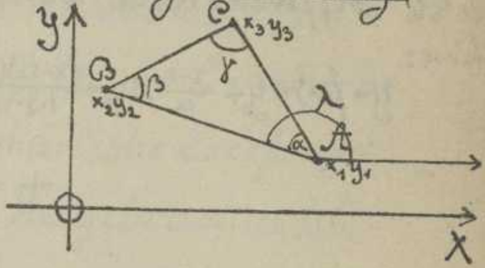
6. Februar 1902. №: 12.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln aus der Trigonometrie:

Die Hauptaufgabe der Kleintriangulierung:

Von einem Dreieck ABC sind die rechtwinkeligen Koordinaten $x_1 y_1$ u. $x_2 y_2$ zweier Ecken A und B bekannt; gemessen sind ferner die Winkel $\alpha, \beta, (\gamma)$ des Dreieckes.



Gesucht sind die Koordinaten $x_3 y_3$ der dritten Ecke C.

Führt man den Winkel λ ein, welchen die Seite AB mit der positiven X-Richtung einschließt, so gilt:

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,; \qquad AB = c = \frac{x_2 - x_1}{\cos\lambda} = \frac{y_2 - y_1}{\sin\lambda}$$

$$x_3 = x_1 + \frac{AB \cdot \sin\beta \cdot \cos(\lambda - \alpha)}{\sin\gamma}\,, \quad y_3 = y_1 + \frac{AB \cdot \sin\beta \cdot \sin(\lambda - \alpha)}{\sin\gamma}$$

Formeln aus der algebraischen Analysis: Interpolation.

Aufgabe der Interpolation: Vorgegeben ist eine Anzahl von $n+1$ zusammengehörigen Wertepaaren: $x_0 y_0$, $x_1 y_1$, $x_2 y_2 \ldots\ldots x_n y_n$. Man bilde eine ganze rationale Function n^{ten} Grades $y = f(x)$ derart, daß $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2) \ldots\ldots y_n = f(x_n)$, und bestimme mittels derselben (annäherungsweise) zu einem zwischen den gegebenen Werten $x_0 x_1 x_2 \cdots x_n$ liegenden Werte x den zugehörigen Wert y.

I. Interpolationsmethode von Newton.

Vorausgesetzt, dass $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \cdots\cdots = x_n - x_{n-1} = \alpha$, also $x_1 = x_0 + \alpha$, $x_2 = x_0 + 2\alpha$, $x_3 = x_0 + 3\alpha \cdots\cdots\cdots x_n = x_0 + n\alpha$, bildet man aus der Reihe: $y_0\ y_1\ y_2 \cdots\cdots y_n$ die I. Differenzreihe $\Delta y_0, \Delta y_1, \Delta y_2 \cdots \Delta y_{n-1}$; dann die II. Differenzreihe $\Delta^2 y_0, \Delta^2 y_1, \Delta^2 y_2 \cdots \Delta^2 y_{n-2}$; u. s. w. endlich die letzte Differenzreihe bestehend aus $\Delta^n y_0$. Dann lautet gesuchte Function:

$$y = f(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{\alpha}\Delta y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{1\cdot 2\cdot \alpha^2}\Delta^2 y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \alpha^3}\Delta^3 y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ \alpha^4}\Delta^4 y_0$$

$$+ \cdots\cdots\cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots\cdots\cdots(x-x_{n-1})}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots\cdots n\ \alpha^n}\Delta^n y_0$$

II. Lagrangesche Interpolationsformel.

Die Function: $y = \sum_0^n{}_{\mu}' \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_{\mu-1})\cdot(x-x_{\mu+1})\cdots\cdots\cdots(x-x_n)}{(x_\mu-x_0)(x_\mu-x_1)\cdot(x_\mu-x_2)\cdots\cdots(x_\mu-x_{\mu-1})(x_\mu-x_{\mu+1})\cdots\cdots(x_\mu-x_n)}\cdot y_\mu = f(x)$

ist eine ganze rationale Function $n$ten Grades von x, welche an den Stellen $x_0 x_1 x_2 \cdots x_n$ bezw. die Werte $y_0 y_1 y_2 \cdots y_n$ annimmt, so dass sie zur Interpolation dienen kann. Hiebei brauchen die Werte $x_0 x_1 x_2 \cdots x_n$ nicht in gleichen Abständen aufeinanderfolgen.

Aufgaben.

1.) Vom ΔABC sind die Koordinaten $[x_1 y_1]$ u. $[x_2 y_2]$ der Ecken A u. B, ferner die Winkel α, β gegeben. Gesucht die Koordinaten $[x_3 y_3]$ der 3. Ecke C.

$x_1 = 11573 \quad y_1 = 15782. \quad x_2 = -26327\ y_2 = 28715\ ;\ \alpha = 65^\circ 27'.\ \beta = 61^\circ 14'.$

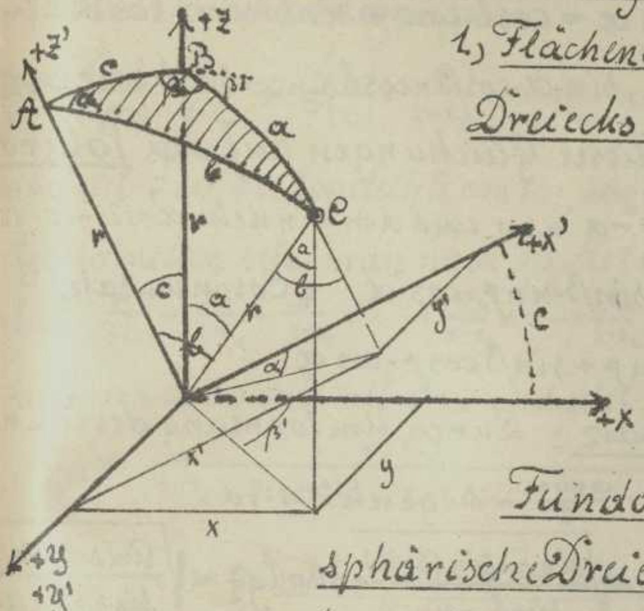
2.) Gegeben sind die natürl. Logarithm. der Zahlen 1 bis 5: $lg 1 = 0.000$; $lg 2 = 0.693$; $log 3 = 1.099$, $lg 4 = 1.386$. $lg 5 = 1.609$. Interpoliere nach Newton $lg 3.75$, und vergleiche den Wert mit dem aus $lg 3.75 = lg \frac{15}{4} = lg 3 + lg 5 - lg 4$ sich ergebenden Wert.

3.) Die Spannkraft des Wasserdampfes trägt bei einer Temperatur von 97°, 98°, 99° 100° bezw. eine Quecksilbersäule von 681.93, 707.17, 733.19, 760.00 mm. Wie gross ist sie bei 98°.2 ? (Lagrange.)

13. Febr. 1902. №13.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

I. Formeln aus der Trigonometrie.



1.) Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks mit den Winkeln α, β, γ:

$$J = r^2 \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \mathcal{E}, \text{ wo } \mathcal{E} = \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ$$

der sphärische Excess und r der Kugelradius ist.

2.) Entwicklung der Fundamentalformeln für das sphärische Dreieck durch Koordinatentransformation: Aus dem I. Koordinatensystem $[x, y, z]$ geht das II. System $[x', y', z']$ durch Drehung um die y-Axe mit dem Drehwinkel c hervor. Die Koordinaten eines beliebigen Punktes C mit der Entfernung r vom Anfangspunkt sind:

in Bezug auf das I. System $\left\{\begin{array}{l} x = r \sin\alpha \cdot \cos\beta' \\ y = r \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta' \\ z = r \cdot \cos\alpha \end{array}\right.$ I. in Bezug auf das II. System $\left\{\begin{array}{l} x' = r \sin b \cdot \cos a \\ y' = r \sin b \cdot \sin a \\ z' = r \cdot \cos b \end{array}\right.$ II.

Der Zusammenhang der beiden Koordinatensysteme wird durch [die]i Gleichungen III: $x = x' \cos c - z' \sin c$; $y = y'$; $z = x' \sin c + z' \cos c$ vermittelt. Aus den Gleichungen I. II. III. ergeben sich so für das sphär. Dreieck ABC mit den Seiten a b c und den Winkeln α u. $\beta = 180^\circ - \beta'$ die Formeln:

1) $-\sin a \cdot \cos\beta = \sin b \cos \alpha \cdot \cos c - \cos b \sin c$. 2) $\sin \alpha \sin\beta = \sin b \cdot \sin a$

3) $\cos a = \sin b \cdot \cos a \sin c + \cos b \cos c$. Oder:

I. Der Sinussatz : $\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha \cdot \sin\beta : \sin\gamma$. (au

II. Der Cosinussatz : $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha$. (au

III. [Der Sinus-Cosinussatz] $\sin a \cdot \cos\beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos\alpha$.

Durch Anwendung dieser Gleichungen auf das Polard eck mit den Seiten $a' = 180° - \alpha$ u.s.w. und den Winkeln $\alpha' = 180° - a$ fo

II* $\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos a$ (Cosinus-satz.)

III.* $\sin\alpha \cdot \cos b = \cos\beta \sin\gamma + \sin\beta \cos\gamma \cdot \cos a$.

IV. Der Halbwinkelsatz : Durch Umformung des Cosin satzes findet man, wenn $\frac{a+b+c}{2} = s$ gesetzt wird:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}{\sin b \cdot \sin c}}, \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \cdot \sin(s-a)}{\sin b \cdot \sin c}} \text{ also } tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s}{\sin s \cdot \sin(s-}}$$

oder, wenn $k = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\cdot\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}{\sin s}}$ gesetzt wird: $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{k}{\sin(s-a)}$; $tg\frac{\beta}{2} = \frac{k}{\sin(s-b)}$, $tg\frac{\gamma}{2}$

IV.* Durch Anwendung auf das Polardreieck erhält man jetzt

$\sigma = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$: $\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta \cdot \sin\gamma}}$; $\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma \cdot \cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta \cdot \sin\gamma}}$; $tg\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma \cdot \cos(}{\cos(\sigma-\beta)\cdot\cos(}}$

oder, wenn $K = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cdot\cos(\sigma-\beta)\cdot\cos(\sigma-\gamma)}{-\cos\sigma}}$, $tg\frac{a}{2} = \frac{\cos(\sigma-\alpha)}{K}$, $tg\frac{b}{2} = \frac{\cos(\sigma-\beta)}{K}$; $tg\frac{c}{2} = \frac{\cos}{}$

II. Formeln aus der algebraischen Analysis.

Partialbruchzerlegung.

Ist $\frac{\Phi(x)}{F(x)}$ eine rationa unecht gebrochene Function, so wird nach Division $\frac{\Phi(x)}{F(x)} = G(x) + \frac{f(}{F(}$ wo $G(x)$ eine ganze Function (oder eine Konstante) und $\frac{f(x)}{F(x)}$ eine echt gebr

ine Funnction, d.h. $f(x)$ von niedrigerem Grade als $F(x)$ ist. Hat $F(x)=0$
n verschiedene Wurzeln $x_0\; x_1\; x_2 \cdots x_n$, so dass $F(x)=A\cdot(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)$,
(so) folgt, aus der Lagrange'schen Interpolationsformel, für $\frac{f(x)}{F(x)}$
die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x_0)}{F'(x_0)}\cdot\frac{1}{x-x_0} + \frac{f(x_1)}{F'(x_1)}\cdot\frac{1}{x-x_1}+\cdots\cdots\cdots+\frac{f(x_n)}{F'(x_n)}\cdot\frac{1}{x-x_n} = \sum_{\mu=0}^{n} \frac{f(x_\mu)}{F'(x_\mu)}\cdot\frac{1}{x-x_\mu}$$

Dabei ist $F'(x)$ die Abgeleitete von $F(x)$, also $F'(x_\mu)=A(x_\mu-x_0)(x_\mu-x_1)\cdots(x_\mu-x_{\mu-1})(x_\mu-x_{\mu+1})\cdots(x_\mu-x_n)$

Gewöhnlich setzt man nach der „Methode der unbestimmten Koeffizienten": $\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_0}{x-x_0}+\frac{A_1}{x-x_1}+\cdots\cdots+\frac{A_\mu}{x-x_\mu}+\cdots\cdots+\frac{A_n}{x-x_n}$. Um A_μ zu finden, multipliziert man beiderseits mit $x-x_\mu$ und setzt dann $x=x_\mu$; dann ergibt sich eben:

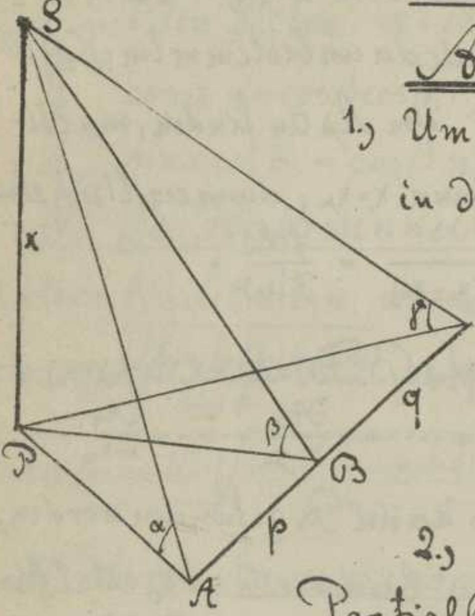
$$A_\mu = \frac{f(x_\mu)}{A\cdot(x_\mu-x_0)\cdot(x_\mu-x_1)\cdots(x_\mu-x_{\mu-1})(x_\mu-x_{\mu+1})\cdots(x_\mu-x_n)} = \frac{f(x_\mu)}{F'(x_\mu)}.$$

Hat $F(x)=0$ <u>mehrfache Wurzeln</u>, ist z.B. $F(x)=A\cdot(x-x_0)^2(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ so wird $\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{B_1}{(x-x_0)^2}+\frac{B_2}{x-x_0}+\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\cdots\cdots+\frac{A_\mu}{x-x_\mu}+\cdots\cdots+\frac{A_n}{x-x_n}$.

A_μ ergibt sich genau wie vorher. Ebenso kann B_1 gefunden werden, indem man nach Multiplication mit $(x-x_0)^2$ beiderseits $x=x_0$ setzt. Um B_2 zu bestimmen, multipliciert man obige Identität mit $F(x)$, bildet auf beiden Seiten die 1. Abgeleitete und setzt $x=x_0$. Man erhält so eine Gleichung für B_2. Analog verfährt man, wenn $F(x)=0$ mehrere mehrfache Wurzeln besitzt.

Hat $F(x)=0$ auch (conjugiert) <u>imaginäre Wurzeln</u>, so können je zwei Partialbrüche, die 2 conjugiert imaginären Wurzeln $\alpha+i\beta$ u. $\alpha-i\beta$ entsprechen, zusammengefaßt werden zu einem reellen

Bruche von der Form $\frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$. Bei dem Ansatze mittels stimmter Coeffizienten, multipliziert man, um A und B den, beiderseits mit $(x-\alpha)^2+\beta^2$, setzt dann für x einen der Wurzelwerte $\alpha+i\beta, \alpha-i\beta$ ein und erhält so durch Gleichs der reellen und imaginären Teile auf beiden Seiten zwei chungen für A und B.



Aufgaben.

1.) Um die Höhe PS eines Berges zu bestimme in drei Punkten A, B, C die in einer Geraden l Die Elevationswinkel α, β, γ gemessen, f C die Entfernungen $AB = p$. $BC = q$. ne PS, wenn $p = 3179m$, $q = 2415m$ $\alpha = 8°12'$; $\beta = 10°30'$; $\gamma = 9°45'$.

2.) Man zerlege folgende Ausdrücke i Partialbrüche: 1.) $\frac{9x^2-20x-89}{x^3-2x^2-19x+20}$. 2.) $\frac{4(x^2+4x-}{x^4-8x^2+}$

3.) Gegeben seien die 3 Werte: $\cos 1° = 0.99985$, $\cos 5° = 0.996$ $\cos 7° = 0.99255$. Bestimme $\cos 6°$ 1.) durch Interpolation aus 3 Werten. 2.) Durch Extrapolation aus $\cos(-7°) = 0.99255$, $\cos(-1°) = 0$ $\cos(+5°) = 0.99619$. 3.) durch Interpolation zwischen den 6 Werten Cosinus für $-7°, -5°, -1°, +1°, +5°, +7°$. 4.) aus der Formel $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\cos}{2c}$ indem man $\alpha = 5°$, $\beta = -7°$ nimmt

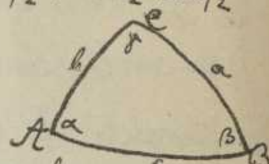
20. Febr. 1902.

№ 14.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln für das sphärische Dreieck. [Fortsetzung]

1.) Aus $\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} \pm \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} \mp \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}$ ergeben sich durch Einführung der in IV. gefundenen Formeln die Delambre'schen Gleichungen



und durch Division je zweier derselben die Neperschen Analogien:

Delambre'sche Gleichungen

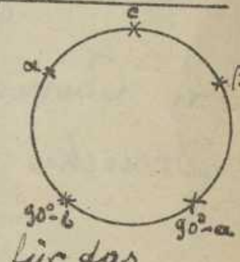
$$\begin{cases} \sin\frac{\alpha+\beta}{2} : \cos\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{a-b}{2} : \cos\frac{c}{2}. \\ \sin\frac{\alpha-\beta}{2} : \cos\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{a-b}{2} : \sin\frac{c}{2}. \\ \cos\frac{\alpha+\beta}{2} : \sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{a+b}{2} : \cos\frac{c}{2}. \\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2} : \sin\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{a+b}{2} : \sin\frac{c}{2}. \end{cases}$$

Nepersche Gleichungen

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} \\ \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} \\ \operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2} \\ \operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2} \end{cases}$$

2.) Die L'Huilier'sche Formel: $\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}$ liefert den sphärischen Excess ε unmittelbar durch die Seiten a, b, c.

3.) Die Nepersche Regel für das rechtwinkelige sphär. Dreieck:



Markirt man auf einem Kreise die sämmtlichen Dreiecksstücke in ihrer natürlichen Reihenfolge mit Ausnahme des rechten Winkels γ und setzt man dabei statt der Katheten a und b ihre Complemente, so lassen sich alle Formeln für das rechtwinkelige sphärische Dreieck in die Worte zusammen fassen: „Der Cosinus irgend eines der 5 Stücke ist gleich dem Produkt der Cotangenten der beiden benachbarten Stücke oder gleich dem Produkt der Sinus der beiden nicht benachbarten Stücke."

Aufgaben.

1.) Von einem ebenen Dreieck sind die Radien ϱ_a u. ϱ_b zweier anbeschriebenen Kreise und die Entfernung d der Mittelpunkte dieser Kreise gegeben. Man berechne die Winkel und Seiten des Dreieckes für $d = 12\,\text{cm}$, $\varrho_a = 5\,\text{cm}$, $\varrho_b = 4\,\text{cm}$.

2.) Zerlege folgende Ausdrücke in Partialbrüche:

a.) $$\frac{n!}{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdots\cdots(x-n)}.$$

b.) $$\frac{2x^3-6x}{x^4-6x^2+25}.$$

3.) Wie gross ist ein gleichseitiges sphärisches Dreieck von der Seitengrösse 90°?

4.) Berechne den Inhalt eines gleichseitigen sphärischen Dreieckes, dessen Seite gleich dem Kugelradius ($=1$) ist!

Name: ....

Semestralexamen.

Winter-Semester 1901/02.

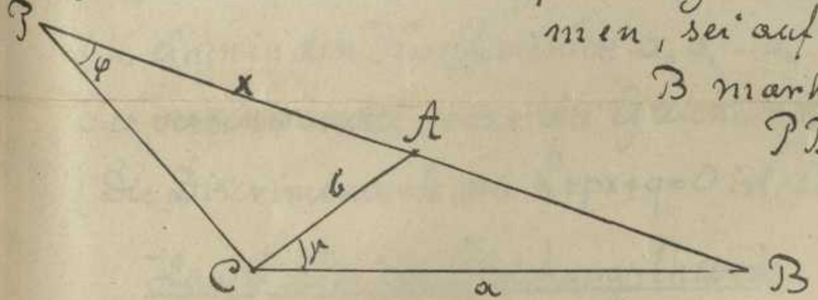
Algebraische Analysis und Trigonometrie.

5. März 1902.

1.) Der Ausdruck $A = \sin(\alpha+\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin(\alpha-\beta+\gamma) + \sin(\alpha-\beta-\gamma)$ soll logarithmierbar gemacht und dann für $\alpha = 35^\circ 17'$, $\beta = 18^\circ 42' 20''$, $\gamma = 50^\circ 23' 40''$ berechnet werden.

2.) Man berechne x aus der Gleichung: $23.215 \sin x - 5.324 \cos x = 12.354$.

3.) Um die Entfernung $PA = x$ zweier Punkte A u. P zu bestimmen, sei auf der Verlängerung von PA der Punkt B markiert und ausserhalb der Geraden PB ein vierter Punkt C. Dann seien die beiden Strecken $CA = b$ und $CB = a$, sowie die Winkel $\sphericalangle ACB = \gamma$ und $\sphericalangle APC = \varphi$ gemessen.



Man berechne $PA = x$ für $a = 364.03\,m$, $b = 211.77\,m$. $\gamma = 31^\circ 14'$, $\varphi = 42^\circ 57'$.

4.) Gegeben sind die Logarithmen der drei Zahlen $x_0 = 2310$, $x_1 = 2340$, $x_2 = 2370$, nämlich $\log x_0 = 3.36361$, $\log x_1 = 3.36922$, $\log x_2 = 3.37475$. man berechne durch Interpolation $\log 2320$ und $\log 2350$!

5.) Der Ausdruck $\dfrac{x^4 - 2x^3 - 18x^2 - 25x - 24}{x^3 - 19x - 30}$ ist in Partialbrüche zu zerlegen.

6.) Der Ausdruck $\dfrac{-x^3 + 4x^2 + 5x - 4}{x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4}$ ist in Partialbrüche zu zerlegen.

de
le

1
er
p
2

3
9
4
2

17. April 1902 — № 15.

Algebraische Analysis u. Trigonometrie.

Formeln aus der algebr. Analysis.

Der Taylorsche Satz für die rationale ganze Function $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$ lautet:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\cdots\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x).$$

oder:

$$f(x)=f(\alpha)+\frac{x-\alpha}{1!}f'(\alpha)+\frac{(x-\alpha)^2}{2!}f''(\alpha)+\frac{(x-\alpha)^3}{3!}f'''(\alpha)+\cdots\cdots+\frac{(x-\alpha)^n}{n!}f^{(n)}(\alpha).$$

Ist α eine Wurzel der Gleichung $f(x)=0$, d.h. $f(\alpha)=0$, so folgt aus der Taylorschen Reihe, dass $f(x)$ ohne Rest durch $x-\alpha$ teilbar ist. Ist für einen Wert $x=\alpha$ nicht nur $f(\alpha)=0$, sondern auch $f'(\alpha)=0$, so enthält $f(x)$ den Faktor $(x-\alpha)^2$, d.h. $x=\alpha$ ist eine Doppelwurzel von $f(x)$. Ist allgemein $f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$, $f''(\alpha)=0$ ..... $f^{[\mu-1]}(\alpha)=0$, so enthält $f(x)$ den Factor $(x-\alpha)^\mu$, d.h. $x=\alpha$ ist eine μ-fache Wurzel von $f(x)=0$.

Soll also $f(x)=0$ eine Doppelwurzel haben, so müssen die 2 Gleichungen $f(\alpha)=0$ und $f'(\alpha)=0$ zusammen bestehen. Die Elimination von α aus denselben führt auf die Discriminante von $f(x)$, d.h. einen in den Koeffizienten $a_0\, a_1 \dots a_n$ rationalen Ausdruck, der verschwindet, wenn die Gleichung eine Doppelwurzel hat. [Die Discriminante von $x^3+px+q=0$ ist $\Delta' = 27q^2+4p^3$]

Hauptsätze der Gleichungstheorie: Jede Gleichung n^{ten} Grades: $f(x)\equiv x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0$ [Normalform] hat n Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots \alpha_n$, so dass $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)$ wird. Wenn eine Gleichung mit reellen

Koeffizienten eine komplexe Wurzel besitzt, so hat sie auch die conjugierte komplexe Zahl zur Wurzel. Eine Gleichung ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten hat also stets eine reelle Wurzel.

Aus der Identität $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$ folgt: Die Koeffizienten einer Gleichung $n$ten Grades sind mit wechselndem Vorzeichen gleich den Combinationssummen der Wurzeln von der 1. bis zur n^{ten} Klasse:

$$-a_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = \sum \alpha_i$$

$$a_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \sum \alpha_i \alpha_k$$

$$-a_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = \sum \alpha_i\alpha_k\alpha_l$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(-1)^n a_n = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n .$$

Da das Produkt zweier conjugiert komplexen Zahlen positiv ist, so folgt aus der letzten Gleichung:

Eine Gleichung geraden Grades, deren konstantes Glied [in der Normalform] negativ ist, hat immer eine positive u. eine negative reelle Wurzel. Ist in einer Gleichung ungeraden Grades das konstante Glied positiv [negativ], so hat sie eine negative [positive] reelle Wurzel.

Jede symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades läßt sich ohne Auflösung der Gleichung rational durch die Koeffizienten a_i darstellen.

Aufgaben.

1.) Entwickle nach dem Taylorschen Satze $z^5 - 9z^4 + 32z^3 - 56z^2 + 48z - 15$ nach Potenzen von $z-2$.

2.) In einer Gleichung 4ten Grades (in der Normalform) kennt man den Coeffizient $a_1 = -10$; ausserdem weiss man, dass die 4 Wurzeln reell sind und eine arithmetische Progression von der Differenz 1 bilden. Man bestimme die Wurzeln und die übrigen Coeffizienten.

3.) Die Gleichung $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ habe die Wurzeln α, β, γ; wie lautet die Gleichung deren Wurzeln $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ sind?

4.) Berechne die Entfernung der Städte S. Francisco u. Melbourne aus den Daten:

	geogr. Breite φ,	Länge von Greenwich l	Erdradius:
S. Franzisco:	$+37^\circ\ 47'\ 24''$	$122^\circ\ 25'\ 36''$ westlich.	6370.26 km.
Melbourne:	$-37^\circ\ 49'\ 54''$	$144^\circ\ 58'\ 30''$ östlich.	

24. April 1902.

№ 16

Algebraische Analysis u. Trigonometrie.

Formeln aus der algebr. Analysis:

Die linearen Transformationen der Gleichung: $x^n+\alpha_1 x^{n-1}+\alpha_2 x^{n-2}+\dots+\alpha_n=0$.

1. Substitution: $x=\alpha\cdot u$ oder $x=\frac{u}{p}$ Die Wurzeln u der transformierten Gleichung sind der ate Teil bezw. das p-fache der Wurzeln x. [Speziell erhält man für $x=-u$ eine neue Gleichung, deren Wurzeln u entgegengesetzt gleich sind den Wurzeln der ursprünglichen Gleichung.]

2. Substitution: $x=\frac{1}{u}$. Die Wurzeln u der transformierten Gleichung sind die reciproken Werte der Wurzeln x. Eine Gleichung, die bei der Substitution $x=\frac{1}{u}$ ungeändert bleibt, für welche also $1=\alpha_n$; $a_1=a_{n-1}, a_2=a_{n-2}, a_3=\alpha_{n-3}$, u.s.w., heißt reciprok. Ist sie von ungeradem Grade $[2\mu+1]$, so hat sie die Wurzel $x=-1$ und führt nach Absonderung des Factors $x+1$ auf eine reciproke Gleichung von geradem Grade $[2\mu]$; eine solche läßt sich stets nach Division mit x^μ durch die Substitution $z=x+\frac{1}{x}$ auf eine Gleichung μten Grades reduzieren.

3. Substitution: $x=u+\alpha$ oder $x=u-\beta$. Die Wurzeln u der transform. Gleichung sind um α kleiner bezw um β größer als die Wurzeln x.

Aus diesen 3 Substitutionen setzt sich die allgemeinste lineare Transformation $x=\frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta}$ zusammen, bei der der Grad der Gleichg. ungeändert bleibt.

Auflösung der Gleichung 3. Grades.

Durch die Substitution $z=x-\frac{a_1}{3}$ geht die allgem. cubische Glchg: $z^3+a_1z^2+a_2z+a_3=0$ in $x^3+px+q=0$ über. Deren Wurzeln ergeben sich [nach Auflösung der "Resolvente" $z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0$] nach der Cardanischen Formel als:

$$x_1 = u+v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\,;\; x_2 = u\cdot\varepsilon_1 + v\cdot\varepsilon_2\,;\; x_3 = u\cdot\varepsilon_2 + v\cdot\varepsilon_3$$

wo $\begin{matrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{matrix} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ $[\varepsilon_1+\varepsilon_2=-1;\ \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2=1]$

Je nach dem Vorzeichen der Discriminante $\Delta = \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ sind 3 verschied. Fälle möglich.

1.) $\Delta > 0$. Die Gleichung hat eine reelle und 2 komplexe Wurzeln.

2.) $\Delta = 0$. Dann wird $u = v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, also $x_1 = 2\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ und $x_2 = x_3 = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ (Doppelwurzel).

3.) $\Delta < 0$ [nur möglich wenn p negativ und $\frac{|p^3|}{27} > \frac{q^2}{4}$]. Die 3 Wurzeln sind reell, erscheinen jedoch in komplexer Form. [Casus irreducibilis]

Trigonometrische Auflösung für den Casus irreducibilis: Schreiben wir $x^3 - px + q = 0$, wo jetzt also $p > 0$ und $\Delta = \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} < 0$ sein soll, und setzen: $\frac{q}{2} = +\sqrt{\frac{p^3}{27}}\cos\varphi$, so wird $u = -\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\sqrt[3]{\cos\varphi - i\sin\varphi}$, $v = -\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\sqrt[3]{\cos\varphi + i\sin\varphi}$, also

$x = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}$ $(k = 0, 1, 2)$ also:

$x_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}$, $x_2 = +2\cdot\sqrt{\frac{p}{3}}\cos(\frac{\varphi}{3}+60^\circ)$; $x_3 = +2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos(\frac{\varphi}{3}-60^\circ)$.

Aufgaben:

1.) Ein gleichseitiges sphär. Dreieck mit der Seite $a = 77^\circ 52' 11''$ soll durch eine Transversale von der einen Ecke aus im Verhältnis 1:4 geteilt werden. Berechne die Abschnitte auf der Gegenseite!

2.) Die Summe zweier Wurzeln der Gleichung $6x^4 - 29x^3 + a_2x^2 - 19x + a_4 = 0$ ist gleich $\frac{4}{3}$, das Produkt der beiden anderen aber $\frac{3}{2}$. Berechne die 4 Wurzeln u. die beiden fehlenden Koeffizienten!

3.) Der Kugel vom Radius 1 soll ein Kegel einbeschrieben werden, dessen Volumen ein Fünftel des Kugelinhalts ist. Wie groß ist die Höhe h des Kegels? (transformiere die für h sich ergebende cubische Gleichg. durch eine Substit. der 2. Art!)

1. Mai 1902 № 17.

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln aus der Analysis.

Trigonometrische Auflösung der Gleichungen 3. Grades.

I. Casus irreducibilis cfr. Blatt № 16.

II. $x^3+px+q=0$ wobei p positiv, also $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$ sein soll. Setzt man in der Cardanischen Formel: $\frac{q}{2}=+\sqrt{\frac{p^3}{27}}\cdot\operatorname{cotg}\varphi$, also $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\frac{4p^3}{27q^2}}$ und dann $\operatorname{tg}\psi=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$, so erscheinen die Wurzeln der Gleichung in der Form:

$$x_1=-2\cdot\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\operatorname{cotg}2\psi \quad\text{und}\quad \left.\begin{matrix}x_2\\x_3\end{matrix}\right\}=\sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\operatorname{cotg}2\psi\pm\frac{i\sqrt{3}}{\sin 2\psi}\right\}.$$

III. $x^3-px+q=0$. Ist hier die Discriminante $\Delta=\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}>0$, so setzt man $\frac{q}{2}=+\sqrt{\frac{p^3}{27}}\cdot\frac{1}{\sin\varphi}$, also $\sin\varphi=\sqrt{\frac{4p^3}{27q^2}}$, und dann wieder $\operatorname{tg}\psi=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$; dann wird:

$$x_1=-2\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot\frac{1}{\sin 2\psi} \quad\text{und}\quad \left.\begin{matrix}x_2\\x_3\end{matrix}\right\}=\sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\frac{1}{\sin 2\psi}\pm i\sqrt{3}\operatorname{cotg}2\psi\right\}.$$

Graphische Lösung der Gleichungen 3. Grades.

Man transformiert zuerst die Gleichung wieder auf die Form $x^3+px+q=0$. Dann zeichnet man in einem rechtwinkeligen Coordinatensystem die ein für allemal feste Curve $y=x^3$, die man mit der Geraden $y=-px-q$ zum Schnitt bringt. Die Abscissen der Schnittpunkte (wenn solche vorhanden) geben die reellen Wurzeln der Gleichung $x^3+px+q=0$.

Graphische Bestimmung der reellen Wurzeln der Gleichungen 4. Grades:

Ist die Gleichung in der Gestalt $x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$ vorgelegt, so transformiere man sie durch die Substitution $x = z - \frac{a_1}{4}$ auf die Form $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$, in der das cubische Glied fehlt; durch die weitere Substitution $z^2 = |p| \cdot x^2$ erhält man nach Division mit p^2, je nachdem p positiv oder negativ ist, die eine der beiden Formen: $x^4 \pm x^2 + mx + n = 0$. Jetzt zeichnet man die feste Curve $y = x^4 \pm x^2$ und sucht deren Schnittpunkte mit der Geraden $y = -mx - n$. Die Abscissen derselben liefern die r. Wurzeln der Gleichung $x^4 \pm x^2 + mx + n$.

Aufgaben.

1.) Von einem sphärischen Dreieck kennt man die zwei Seiten b und c sowie den Winkel α. Berechne die fehlenden Stücke, wenn $b = 70°24'$, $c = 65°17'$; $\alpha = 57°28'$.

2.) Von einem Punkte A aus erscheinen die beiden Turmspitzen B und C unter den Elevationswinkeln β und γ. Berechne die Projektion des Winkels BAC auf den Horizont, wenn $\sphericalangle BAC = 30°45'$; $\beta = 24°40'$, $\gamma = 17°34'$ gemessen ist.

3.) Berechne trigonometrisch die Wurzeln der Gleichung $x^3 + 6.24x^2 + 11.58x + 9.76 = 0$!

4.) Bestimme die reellen Wurzeln der Gleichung 4. Grades:
$$z^4 - 3.8z^3 + 6z^2 - 4.2z + 1.2 = 0.$$

8. Mai 1902. №. 18.

Algebraische Analysis und Trigonometrie

Regeln aus der Analysis.

Bestimmung der reellen Wurzeln einer algebr. Gleichung.

Aus der Stetigkeit der Function $y=f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n$ und der geometrischen Darstellung derselben durch eine Kurve folgt der Satz: „Wechselt $f(x)$ zwischen 2 Werten $x=a$ und $x=b$ das Vorzeichen, so liegt zwischen a und b mindestens eine reelle Wurzel von $f(x)=0$.

Um eine obere Grenze der positiven reellen Wurzeln von $f(x)=0$ zu finden, setzt man $f(x)=[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]+\varphi_3(x)$, wo mit $\varphi_1(x)$ alle Glieder zusammengefasst sind, welche dem ersten negativen Glied vorangehen, während $\varphi_2(x)$ die sämmtlichen negativen und $\varphi_3(x)$ alle übrigen positiven Glieder von $f(x)$ enthält. Der kleinste positive Wert x_1 für den $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\geqq 0$ wird, ist eine obere Grenze der positiven reellen Wurzeln von $f(x)=0$. (Bei der Bestimmung dieses Wertes x ziehe man die niedrigste in dem Minuenden $\varphi_1(x)$ vorkommende Potenz von x als Faktor vor die Differenz.)

Durch Anwendung dieses Verfahrens auf die Gleichung $f(-x)=0$ findet man eine untere Grenze für die negativen Wurzeln von $f(x)=0$, endlich durch Anwendung auf die Gleichungen $f(\frac{1}{x})=0$ und $f(-\frac{1}{x})=0$ eine untere Grenze für die positiven, bezw. eine obere Grenze für die negativen reellen Wurzeln von $f(x)=0$.

Descartes' Zeichenregel: Jede Gleichung $f(x)=0$ mit reellen Koeffizienten – ob vollständig oder unvollständig – hat höchstens soviele positive reelle Wurzeln, als Zeichenwechsel vorhanden sind; und $f(x)=0$ hat höchstens soviele negative reelle Wurzeln, als

$f(-x) = 0$ Zeichenwechsel hat.

Aufgaben.

1.) Ein Schiff verlässt Catania in Sicilien (37°30″ n. Br., 12°40′ ö. L.); nach welcher Himmelsgegend muss es segeln, um auf dem kürzesten Weg Alexandria (31°13′ n. Br., 27°45′ ö. L.) zu erreichen?

2.) Von einem geodätisch-sphärischen Dreieck sind die zwei Seiten b und c und der eingeschlossene Winkel α gegeben. Berechne mit Hilfe des Legendreschen Satzes die übrigen Stücke (womöglich mit 7stell. Logarithmen), wenn

$b = 51\,605{,}17\,m \quad c = 46\,281{,}73\,m \quad \alpha = 89°36'\,21.''60$. Erdrad. $= 6370\,km$.

3.) Eine Kugelzone hat die Grundradien $r_1 = 5$, $r_2 = 4$ und den Inhalt $J = 150$. Wie gross ist die Höhe?

4.) Man bestimme die oberen und unteren Grenzen für die positiven und negativen reellen Wurzeln der Gleichung $0 = x^5 - 10x^3 + 6x + 1$.

15. Mai 1902: №19

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Der Sturmsche Satz:

Der Sturmsche Satz gibt vollständigen Aufschluss über die Anzahl und Lage der **reellen** Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(x)=0$. Durch fortgesetzte Division ergeben sich die Gleichungen: $\frac{f(x)}{f'(x)} = Q(x) - \frac{r_1(x)}{f'(x)}$; $\frac{f'(x)}{r_1(x)} = Q_1(x) - \frac{r_2(x)}{r_1(x)}$; $\frac{r_1(x)}{r_2(x)} = Q_2(x) - \frac{r_3(x)}{r_2(x)}$ ......; dabei sind die r_i die bei der Division sich ergebenden, jedoch mit **negativem** Vorzeichen versehenen **Reste**. Bildet man nun die Reihe der Sturm'schen Functionen: $f(x), f'(x), r_1, r_2\ r_3 \ldots r_\mu$ [r_μ eine Konstante] einmal für $x=a$, dann für $x=b$ und bestimmt man in beiden Fällen die Zahl der Zeichenwechsel in dieser Reihe, so ist die Differenz der beiden Zahlen genau gleich der Anzahl der zwischen a und b liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$. Speziell ergibt sich für $a=+\infty$ $b=-\infty$ auf diese Weise sofort die Anzahl der sämmtlichen reellen Wurzeln von $f(x)=0$. [NB! Da nur die Vorzeichen von $f(x)$, $f'(x)$, r_1, $r_2 \ldots r_\mu$, nicht aber deren numerische Werte dabei in Betracht kommen, so dürfen diese Functionen, um die Division zu vereinfachen, mit geeigneten positiven Konstanten multipliziert oder dividiert werden.]

Aufgaben:

1.) Man bestimme die Wurzeln der reciproken Gleichung: $10x^4 - 27x^3 - 110x^2 - 27x + 10 = 0$.

2.) Man bestimme graphisch die reellen Wurzeln der Gleichung $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 1 = 0$ (nachdem man zuerst die Substitution $x = \frac{1}{u}$ angewandt hat) und zeichne den ungefähren Verlauf der Curve $y = x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 1$.

3.) Ein Schiff fährt auf dem kürzesten Weg von Kapstadt nach Newyork; welchen Meridian schneidet es unter der Breite $+25°$ und unter welcher Länge passiert es speziell den Aequator?

Kapstadt: geogr. Breite $= -30°56'6''$; östl. Länge von Greenwich $18°28'42''$
Newyork: " $+40°45'24''$, westl. " " " $73°58'24''$.

4.) Von zwei Sternen Σ_1 u. Σ_2 hat man die Höhen h_1 u. h_2 sowie die Azimute A_1 und A_2 beobachtet; welche Entfernung haben sie von einander? $h_1 = 73°20'$ $h_2 = 42°50'$. $A_1 = 80°30'$ $A_2 = 27°40'$.

29. Mai 1902. №20

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln:

Näherungsmethoden zur Bestimmung der reellen Wurzeln algebraischer und transcendenter Gleichungen:

I, Newtonsche Näherungsmethode:

Ist α_1 ein Näherungswert einer reellen Wurzel x von der Gleichung $f(x)=0$, also $x=\alpha_1+h$, so ergiebt sich aus der Taylorschen Entwicklung für $f(x)=f(\alpha_1+h)=0$, unter Vernachlässigung der Glieder mit höheren Potenzen von h, angenähert: $h=-\frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}$, also der genauere Näherungswert: $x=\alpha_1-\frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}$.

II. Regula falsi:

Liegt eine Wurzel x der Gleichung $f(x)=0$ zwischen a_1 und a_2, so dass $x=\alpha_1+\delta_1=\alpha_2-\delta_2$, so findet man aus der Taylorschen Entwicklung für $f(x-\delta_1)$ und $f(x+\delta_2)$ den Näherungswert: $x=\alpha_1+\frac{[\alpha_1-\alpha_2]\,f(\alpha_1)}{f(\alpha_2)-f(\alpha_1)}$

Durch wiederholte Anwendung dieser Methoden erzielt man immer genauere Näherungswerte.

Aufgaben.

1, Wieviele positive und negative reelle Wurzeln hat die Gleichung $x^5 - 8x^3 + 12x + 2 = 0$? Man schliesse jede Wurzel nach dem Sturmschen Satz zwischen 2 ganzen Zahlen ein!

2.) Zwischen welchen 2 ganzen Zahlen liegt die reelle Wurzel der Gleichung $x^3 + 5x - 2 = 0$? Man berechne die Wurzel nach dem Newtonschen Verfahren auf 2 Dezimalstellen!

3.) Um wieviel Uhr (wahrer Zeit) steht in München (geogr. Breite $\varphi = 48°8'20''$) die Sonne bei einer Declination von $\delta = +10°30'$ genau im Südwesten und welche Höhe hat sie dann?

4.) Von einem Stern sei zu einer gewissen Zeit die Höhe h und das Azimut A gemessen; ausserdem sei seine Declination δ bekannt. Man soll den Stundenwinkel t des Sternes und die Polhöhe φ des Beobachtungsortes berechnen. $h = 22°45'$ $A = 50°14'$. $\delta = 7°54'$.

5. Juni 1902. № 21.

Algebraische Analysis u. Trigonometrie

Formeln:

Determinanten: Definiert man $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$, so dass $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix}$, so ergeben sich die beiden Unbekannten des Gleichungssystems: $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = s_1 \\ a_2 x + b_2 y = s_2 \end{cases}$ in der Form: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} s_1 & b_1 \\ s_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ und $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & s_1 \\ a_2 & s_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$, oder: wenn man die Gleichungen „auf 0 reduziert" $\begin{cases} a_1x+b_1y-s_1=0 \\ a_2x+b_2y-s_2=0 \end{cases}$ bei Einführung der „Matrix" $\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & -s_1 \\ a_2 & b_2 & -s_2 \end{Vmatrix}$ durch die Proportion:

$$x : y : 1 = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & -s_1 \\ a_2 & b_2 & -s_2 \end{Vmatrix} = +\begin{vmatrix} b_1 & -s_1 \\ b_2 & -s_2 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a_1 & -s_1 \\ a_2 & -s_2 \end{vmatrix} : +\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Definiert man eine Determinante 3. Grades durch die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

woraus sofort folgt, dass die Determinante bei Vertauschung zweier Horizontal- oder Vertikalreihen ihr Zeichen wechselt, so erhält man die Lösungen des Gleichungssystems:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = s_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = s_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = s_3 \end{cases}$$

in der Form: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} s_1 & b_1 & c_1 \\ s_2 & b_2 & c_2 \\ s_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & s_1 & c_1 \\ a_2 & s_2 & c_2 \\ a_3 & s_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$; $z = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & s_1 \\ a_2 & b_2 & s_2 \\ a_3 & b_3 & s_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$

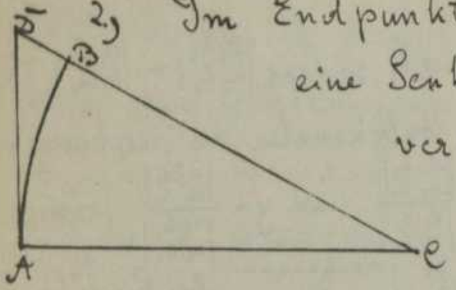
oder bei Einführung der „Matrix": $\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -s_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -s_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & -s_3 \end{Vmatrix}$ durch die Proportion:

$$x : y : z : 1 = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -s_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -s_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & -s_3 \end{Vmatrix} = +\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & -s_1 \\ b_2 & c_2 & -s_2 \\ b_3 & c_3 & -s_3 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & -s_1 \\ a_2 & c_2 & -s_2 \\ a_3 & c_3 & -s_3 \end{vmatrix} : +\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & -s_1 \\ a_2 & b_2 & -s_2 \\ a_3 & b_3 & -s_3 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Aufgaben:

1.) Eine Halbkugel, vom Radius 1, soll durch eine zur Grundfläche parallele Ebene halbiert werden (dem Volumen nach). In

welcher Entfernung von der Grundfläche ist der Schnitt zu führ
(Archimedisches Problem.) Newtonsche Näherungsmethode!



2.) Im Endpunkte des einen Radius eines Kreissectors sei eine Senkrechte auf den Radius errichtet, die den verlängerten anderen Radius schneidet. Wie groß ist der Winkel des Kreissectors zu wählen, damit das gebildete rechtwinkelige Dreieck durch den Kreisbogen halbiert wird? (Reg. falsi

3.) Berechne die wahre Anomalie E aus der Excentrizität e und der mittleren Anomalie M nach der Keplerschen Gleichung:

$E - e \sin E = M$ wenn $M = 332^\circ 28' 55''$ $e = 14^\circ 3' 20''$. (Reg. falsi

4.) Aus 3 auf derselben Seite des Meridians gemessenen Höhen h_1, h_2, h_3 desselben Sternes nebst den beobachteten Unterschieden ihrer Azimute soll die Declination des Sternes, die geogr. Breite des Beobachtungsortes und die Lage des Meridians bestimmt werden.

$h_1 = 25^\circ 42'$ $h_2 = 42^\circ 12'$, $h_3 = 50^\circ 10'$. $A_2 - A_1 = 30^\circ 24'$. $A_3 - A_2 = 26^\circ 4'$.

5.) Die Morgen- und Abendweite der Sonne unmittelbar aus der Länge l der Sonne und der Polhöhe φ des Ortes zu berechnen. (Auflösung mittels des Dreieckes zwischen der auf- oder untergehenden Sonne, dem Widderpunkt und dem Ost- oder Westpunkt des Horizontes.) $l = 34^\circ 20'$. $\varphi = 43^\circ 10'$.

12. Juni 1902.

№ 22.

Algebraische Analysis und Trigonometrie

Formeln:

Die Determinante n^{ten} Grades.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}$$

ist ein Aggregat von $n!$ Gliedern, die man erhält, indem man sämmtliche Produkte aus je n dieser Elemente a_{ik} bildet derart, dass niemals 2 Elemente derselben Zeile oder derselben Kolonne angehören. Man erhält diese Produkte aus dem „Anfangsglied" $a_{11} a_{12} a_{13} \cdots a_{1n}$, indem man die ersten oder Zeilenindices ungeändert läßt und die zweiten oder Kolonnenindices permutiert; die Permutationsformen mit gerader Anzahl von Inversionen treten in das Aggregat mit dem positiven Zeichen, die mit ungerader Anzahl von Inversionen mit dem negativen Vorzeichen ein.

Sätze über Determinanten: 1.) Eine Determinante bleibt ungeändert, wenn man die Zeilen mit den Kolonnen vertauscht, d.h. die Determinante „stürzt".

2.) Vertauscht man zwei Reihen miteinander, so wechselt die Determinante nur ihr Vorzeichen. Eine Determinante mit 2 gleichen Reihen hat demnach den Wert Null.

3.) Ein allen Elementen einer Reihe gemeinsamer Factor kann als Factor vor die Determinante gesetzt werden.

4.) Ist jedes Element einer Reihe eine Summe von 2 Gliedern, so ist die Determinante gleich der Summe zweier Determinanten, welche man aus der ursprünglichen erhält, indem man die zusammengesetzte Reihe durch je eine der Teilreihen ersetzt.

5.) Durch Addition einer mit einem beliebigen Faktor multiplizierten Zeile [Kolonne] zu einer anderen Zeile [Kolonne] wird der Wert der Determinante <u>nicht</u> geändert.

<u>Aufgaben</u>.

1.) Man berechne x, y, z aus den Gleichungen:

$3x + 2y + z = 3$, $2x - 5y - 2z = 0$, $5x + 7y + 3z = 7$.

2.) Man berechne folgende Determinanten, nachdem man sie auf die einfachste Form gebracht hat:

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 12 & 7 & 8 \\ 9 & 13 & 6 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 5 \\ 5 & 7 & 2 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

3.) Die Sonne erreicht bei einer Tageslänge von $15^h 20^m$ die Mittagshöhe $h = 52°30'$. Welche Polhöhe hat der Beobachtungsort und welche Declination die Sonne?

4.) Zwei Sterne Σ_1 und Σ_2 gehen an einem Ort mit der Polhöhe φ gleichzeitig auf und haben dabei die Morgenweiten w_1 und w_2. Ausserdem hat Σ_1 die Breite 0. Berechne die Länge von Σ_1 und Länge und Breite von Σ_2, wenn $\varphi = 42°30'$, $w_1 = 30°40'$, $w_2 = 40°20'$ und die Schiefe der Ecliptik $\varepsilon = 23°27'30''$.

19. Juni 1902 Nº 23.

Algebraische Analysis und Trigonometrie

Formeln:

1.) Entwicklung einer Determinante nach Unterdeterminanten

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Hier ist die Determinante nach den sog. Unterdeterminanten der 1. Vertikalreihe entwickelt. Die zu einem beliebigen Element a_{ik} gehörige <u>Unterdeterminante α_{ik}</u> ergiebt sich aus der Determinante R durch Streichen der i^{ten} Horizontal- und k^{ten} Vertikalreihe; das Vorzeichen der Unterdeterminante ist $(-1)^{i+k}$, da $i+k$ Reihenvertauschungen nötig sind, um das Element a_{ik} an die Stelle von a_{11} zu bringen. Die Entwicklung einer Determinante n^{ten} Grades nach den Unterdeterminanten der kten Vertikalreihe lautet dann:

$R = a_{1k}\alpha_{1k} + a_{2k}\alpha_{2k} + a_{3k}\alpha_{3k} + \cdots\cdots + a_{nk}\alpha_{nk}$ und nach den Unterdeterminanten der i^{ten} Horizontalreihe: $R = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + a_{i3}\alpha_{i3} + \cdots\; a_{in}\alpha_{in}$.

2.) Multiplicationssatz für Determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 & a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 & a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 \\ b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 & b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3 \\ c\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_2\alpha_3 & c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 & c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

Allgemein läßt sich das Produkt zweier Determinanten n^{ten}

ebenfalls als eine Determinante n^{ten} Grades darstellen, deren Elemente die Summen der Produkte aus den Elementen jeder Zeile [oder jeder Kolonne] der ersten Determinante mit den entsprechenden Elementen jeder Zeile [oder jeder Kolonne] der zweiten Determinante sind.

3.) Resultante eines linearen Gleichungssystems: Damit n homogene Gleichungen mit n Unbekannten neben einander bestehen können, ist notwendig und hinreichend, daß ihre Resultante d.h. die aus den n^2 Koeffizienten der Unbekannten der n Gleichungen gebildete Determinante verschwindet.

Aufgaben:

1.) Wie lauten die Wurzeln der Gleichung $\begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 1 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$? wie läßt sich also die Determinante in lineare Factoren zerspalten?

2.) In dem System: $x-y+z=-2$, $-x+y+z=0$, $3\lambda x-4y-3z=3$, $x+\lambda y+2\lambda z=4$ ist λ so zu bestimmen, dass die 4 Gleichungen miteinander verträglich sind; und dann sind x, y, z zu bestimmen.

3.) Man stelle das Quadrat der Determinante: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & o & e \\ o & f & g \end{vmatrix}$ sowie das Produkt der Determinanten: $\begin{vmatrix} o & a & b \\ a & o & c \\ b & c & o \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{-c}{ab} & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & \frac{-b}{ac} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{-a}{bc} \end{vmatrix}$ in Determinantenform dar.

4.) Bestimme die Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte:
$3x^2-2y^2+12x+17=0 \quad 13x^2-7y^2+52x+47=0.$

26. Juni 1902. № 24.

Algebraische Analysis u. Trigonometrie.

Formeln.

1) Sylvester'sche Eliminationsmethode zur Bestimmung der Resultante.

Ist $f(x)$ eine algebr. Gleichung vom m^{ten} Grade, $\varphi(x)$ eine solche vom n^{ten} und multipliziert man $f(x)=0$ successive mit $x, x^2, x^3 \cdots x^{n-1}$ und $\varphi(x)=0$ successive mit $x, x^2, x^3, \cdots x^{m-1}$, so kann man das Gleichungssystem: $f(x)=0$, $xf(x)=0$, $x^2 f(x)=0, \cdots\cdots x^{n-1}f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$, $x\cdot\varphi(x)=0$, $x^2\varphi(x)=0 \cdots x^{m-1}\varphi(x)=0$ als ein System von $m+n$ linearen, in den $m+n$ Unbekannten $x^0, x^1, x^2 \cdots x^{m+n-1}$ homogenen Gleichungen auffassen. Man erhält daher durch Elimination dieser Unbekannten, d.h. durch Nullsetzen der aus ihren Koefficienten gebildeten Determinante, die Resultante von $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$, d.i. die Bedingung, die zwischen den Koeffizienten von $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$ bestehen muss, wenn diese Gleichungen eine gemeinsame Wurzel besitzen sollen.

2) Hat man 2 algebr. Gleichungen mit 2 Unbekannten $[x,y]$, so ordnet man, um die sämmtlichen Lösungen zu finden, beide etwa nach Potenzen von x, und erhält, indem man nach obigem Verfahren die Resultante bildet, durch Elimination von x eine Gleichung mit einer einzigen Unbekannten y.

Formeln aus der Theorie der Grenzwerte u. unendl. Reihen.

I. Grenzwerte: 1) $\lim\limits_{\alpha=0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$; 2) $\lim\limits_{\delta=0}\frac{(x+\delta)^n-x^n}{\delta}=n\cdot x^{n-1}$.

3) $\lim\limits_{\omega=\infty}\left[1+\frac{1}{\omega}\right]^{\omega}=e=2,718281.$— . u. aus 3 folgt 4) $\lim\limits_{\alpha=0}\frac{a^{\alpha}-1}{\alpha}=\lg^{e} a$

II. Konvergenzkriterien für unendliche Reihen. Eine unendliche Reihe: $u_0+u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ in infin. konvergiert, d.h. $\lim\limits_{n=\infty}s_n=\lim\limits_{n=\infty}(u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n)$ hat einen endlichen Grenzwert s, wenn

1) $\lim\limits_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ oder wenn 2) $\lim\limits_{n=\infty}\left[n\cdot\lg^{e}\frac{u_n}{u_{n+1}}\right]>1$.

sie divergiert, wenn 1) $\lim\limits_{n=\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ oder wenn 2) $\lim\limits_{n=\infty}\left[n\lg^{e}\frac{u_n}{u_{n+1}}\right]<1$

Für eine Potenzreihe: $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$ in inf. bestimmt sich der Konvergenzbereich nach dem 1. Kriterium aus: $|x|<\lim\limits_{n=\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

<u>III. Recurrente Reihen:</u> Entwickelt man eine rationale, echt gebrochene Function von x in eine unendl. Reihe nach steigenden Potenzen von x, so erhält man eine sog. recurrente Reihe p^{ter} Ordnung (wenn die Nennerfunction des Bruches vom $p$ten Grade ist); jeder Koeffizient einer solchen Reihe läßt sich in bestimmter Weise linear durch die vorhergehenden p Koeffizienten ausdrücken. Die Entwicklung der gebroch. Function geschieht entweder nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten, oder indem man die gebrochene Function in Partialbrüche zerlegt und jeden einzelnen Partialbruch entwickelt; auf letztere Weise ergibt sich auch das allgemeine Glied, sowie der Konvergenzbereich.

Aufgaben.

1.) Man bestimme die gemeinsamen Wurzeln der beiden Gleichungen: $x^2-y^2+2x+4y+21=0$ u. $x^2-3xy+y^2+2x-10y-3y=0$. Man elimin. y. Geometr. Deutung!

2.) Für welche Werte von λ hat die Gleichung $\lambda x^3-3x^2+1=0$ eine Doppelwurzel? Man bilde die Resultante von $f=0$ u. $f'=0$.

3.) Man bestimme μ so, dass die zwei Gleichungen $x^2-5x+6=0$ und $x^2+\mu x-\mu=0$ eine gemeinsame Wurzel haben.

4.) Man bestimme den Grenzwert:

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{2\pi}{2n}+\sin\frac{3\pi}{2n}+\cdots\cdots+\sin\frac{n\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}+\frac{2\pi}{2n}+\frac{3\pi}{4n}+\cdots\cdots+\frac{n\pi}{2n}}$$

(Vergl. Blatt 8, Formel 1.)

5.) Man bestimme folgende Grenzwerte:

1.) $\lim\limits_{\omega=\infty}\frac{(a\omega+b)^n-(a\omega)^n}{c\omega^{n-1}}$; 2.) $\lim\limits_{\omega=\infty}\{a^{\frac{c}{\omega}}-b^{-\frac{c}{\omega}}\}\cdot\omega$; 3.) $\lim\limits_{\delta=0}\frac{\delta}{\operatorname{arccotg}(1+\frac{1}{\delta})}$.

indem man sie durch geeignete Substitutionen auf die unter I. angegeb. zurückführt.

2. Juli.

№ 25

Algebraische Analysis und Trigonometrie.

Formeln.

I. Newton'sche Binomialreihe: $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots\cdots + \binom{n}{p}x^p + \cdots\cdots$, [giltig für jedes beliebige n; convergent für $-1<x<+1$.]

II. Exponentialreihe: Aus dem Grenzwert: $e^x = \lim\limits_{\omega'=\infty}\left[1+\frac{1}{\omega'}\right]^{\omega' x} = \lim\limits_{\omega=\infty}\left[1+\frac{x}{\omega}\right]^{\omega}$ folgt:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots \quad \text{(convergent für alle Werte von } x\text{)}$$

Da $a^x = e^{x\,\lg^e a}$, so wird: $a^x = 1 + \frac{x\lg a}{1!} + \frac{x^2(\lg a)^2}{2!} + \frac{x^3(\lg a)^3}{3!} + \cdots\cdots$.

III. Logarithmische Reihe: Setzt man in dem Grenzwert $\lim\limits_{\delta=0}\frac{a^\delta - 1}{\delta} = \lg^e a$ (s. Blatt 24. Formel I,4) $a = 1+x$, so wird $\lim\limits_{\delta=0}\frac{(1+x)^\delta - 1}{\delta} =$

$$\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - + \cdots\cdots \quad \text{(convergent für } -1<x\leqq+1\text{)}.$$

Subtrahiert man hievon die Reihe $\lg(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \cdots$, so folgt

$$\lg\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \cdots\cdots\right].$$

Setzt man $x = \frac{1}{2z^2-1}$, so dass $\frac{1+x}{1-x} = \frac{z^2}{z^2-1} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)}$ wird, so ergibt sich hieraus die sehr rasch convergierende Reihe:

$$\lg z = \frac{1}{2}\left[\lg(z+1) + \lg(z-1)\right] + \left\{\frac{1}{2z^2-1} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2z^2-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2z^2-1}\right)^5 + \cdots\cdots\right\}.$$

IV. Zusammenhang zwischen der Exponentialfunction und den trigonometrischen Functionen: Stellt man in dem Grenzwerte: $e^{y+ix} = \lim\limits_{\omega=\infty}\left[1+\frac{y+ix}{\omega}\right]^{\omega}$ die komplexe Zahl $1+\frac{y}{\omega}+i\frac{x}{\omega}$ in trigonometrischer Form dar: $= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, so dass $r = \sqrt{1+\frac{2y}{\omega}+\frac{x^2+y^2}{\omega^2}}$ und $\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{\omega+y}$, so wird nach dem Moivre'schen Satz: $e^{y+ix} = \lim\limits_{\omega=\infty}\left[r^\omega(\cos\omega\varphi + i\sin(\omega\varphi))\right]$.

Beim Grenzübergang $r^\omega = e^y$ und $\lim\limits_{\omega=\infty}\omega\varphi = x$, so dass sich die fundamentalen Relationen ergeben:

$$e^{y+ix} = e^y[\cos x + i\sin x] \quad ; \quad e^{ix} = \cos x + i\sin x\,.$$

Wendet man auf e^{ix} obige Exponentialreihe an und zerlegt man dieselbe in den reellen und imaginären Teil so ergeben sich folgende Reihenentwicklungen:

$$\left.\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \cdots\cdots \\ \sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \text{(convergent für alle endlichen Werte von } x\text{.)}$$

Endlich erhält man aus $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ und $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$ die Gleichungen: $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ und $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

V. <u>Zusammenhang der Functionen $\operatorname{arctg} x$ und $\lg x$.</u> Aus $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ und $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ folgt $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{i}\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}} = \dfrac{1}{i}\dfrac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1}$. Löst man diese Gleichung nach e^{2ix} auf und logarithmiert man, so findet man $2ix = \lg\dfrac{1+i\operatorname{tg}x}{1-i\operatorname{tg}x}$, so dass, wenn $\operatorname{tg} x = z$ gesetzt wird: $2i\operatorname{arctg} z = \lg\dfrac{1+iz}{1-iz}$ oder für $z = iy$: $2i\operatorname{arctg} iy = \lg\dfrac{1-y}{1+y}$. Durch Anwendung der hiefür unter III. gefundenen Reihe ergibt sich:

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} - + \cdots\cdot \text{ (converg. für } -1 \leqq z \leqq +1).$$

VI. <u>Der Logarithmus einer komplexen Zahl:</u> $\lg(x+iy)$ ist eine komplexe Zahl $u+iv$. Aus $e^{u+iv} = x+iy = e^u[\cos v + i\sin v]$ folgen für u und v die beiden Gleichungen: $x = e^u\cos v$, $y = e^u\sin v$. Also ist eindeutig: $u = \lg\sqrt{x^2+y^2} = \lg\varrho$ (, wenn ϱ der Modul der komplexen Zahl $x+iy = \varrho[\cos\varphi + i\sin\varphi]$ ist). $v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \varphi$ dagegen ist den beiden Gleichungen entsprechend, wie das Argument φ der Zahl $x+iy$, nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt, so dass:

$$\lg[x+iy] = \lg\sqrt{x^2+y^2} + i\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x} + 2k\pi i$$

oder $$\lg[x+iy] = \lg[\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \lg\varrho + i(\varphi + 2k\pi).$$

VII. Die hyperbolischen Funktionen: Definiert man: $\frac{e^{\mu}+e^{-\mu}}{2} = \cos\mathrm{hyp}\,\mu$ als „Cosinus hyperbolicus μ" und $\frac{e^{\mu}-e^{-\mu}}{2} = \sin\mathrm{hyp}\,\mu$ als „Sinus hyperbolicus μ", so wird:

$$\cos[\lambda+\mu i] = \cos\lambda\cdot\cos\mathrm{hyp}\,\mu - i\sin\lambda\,\sin\mathrm{hyp}.\mu$$

$$\sin[\lambda+\mu i] = \sin\lambda\cos\mathrm{hyp}.\mu + i\cos\lambda\,\sin\mathrm{hyp}.\mu.$$

VIII. Summation spezieller trigonometrischer Reihen: Aus der Kenntnis der Summe einer Potenzreihe: $A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots = f(z)$ ergeben sich durch Einführung der Exponentialfunction an Stelle der trigonometrischen Functionen sofort die Summen folgender Reihen:

1) $A_0 + A_1\cdot z\cdot\cos\varphi + A_2 z^2\cos 2\varphi + A_3 z^3\cos 3\varphi + A_4 z^4\cos 4\varphi + \cdots = \frac{1}{2}[f(z\cdot e^{i\varphi}) + f(z\cdot e^{-i\varphi})]$

2) $A_0 + A_1 z\sin\varphi + A_2 z^2\sin 2\varphi + A_3 z^3\sin 3\varphi + A_4 z^4\sin 4\varphi + \cdots = \frac{1}{2i}[f(ze^{i\varphi}) - f(ze^{-i\varphi})] + A_0$

Indem man zum Schluss wieder trigonometrische Functionen einführt, kann man diese beiden Ausdrücke wieder auf reelle Form bringen.

Aufgaben.

1) Die Summe der n ersten Glieder einer unendlichen Reihe sei $S_n = \frac{(n+1)(2n+2)}{(2n+1)(3n+2)}$. Man bestimme das allgemeine Glied, sowie einige Anfangsglieder und gebe die Summe der unendl. Reihe an.

124

126

2.) Man untersuche folgende Reihen auf ihre Convergenz:

a) $1+\frac{1}{8}+\frac{1\cdot 5}{8\cdot 11}+\frac{1\cdot 5\cdot 9}{8\cdot 11\cdot 14}+\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}{8\cdot 11\cdot 14\cdot 17}+\cdots\cdots$ (I. Kriterium).

b.) $1+\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt[6]{\frac{3^3 4^2}{4^3\cdot 6^2}}+\sqrt[24]{\frac{3^{12}\cdot 4^8\cdot 5^6}{4^{12}\cdot 6^8\cdot 8^6}}+\sqrt[120]{\frac{3^{60}\cdot 4^{40}\cdot 5^{30}\cdot 6^{24}}{4^{60}\cdot 6^{40}\cdot 8^{30}\cdot 10^{24}}}+\cdots\cdots$ (II. Kriterium).

3.) Untersuche die Konvergenz der Reihe:

$$\frac{x^2}{2^2-1}+\frac{x^3}{3^2-1}+\frac{x^4}{4^2-1}+\frac{x^5}{5^2-1}+\cdots\cdots = \sum_2^\infty \frac{x^n}{n^2-1}.$$

und suche die Summe zu bestimmen! (Zerlege $\frac{1}{n^2-1}$ in Partialbrüche

4.) Man entwickle $\frac{1+2x}{1-x-x^2}$ in eine recurrente Reihe; in welchem Gebiet von x convergiert dieselbe?

5.) Man entwickle $(1+x)^m$ in eine Reihe die nach Potenzen von $\frac{x}{1+x}$ fortschreitet; und zeige dann, dass

$$\sqrt[3]{3} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{8}{9}} = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{24}+\frac{1}{24}\cdot\frac{4}{48}-\frac{1}{24}\cdot\frac{4}{48}\cdot\frac{7}{72}+-\cdots\right)$$

Berechne $\sqrt[3]{3}$ auf 5 Decimalen!

6.) Man berechne $\overset{e}{\lg}\, 9$ auf 4 Decimalen genau, wenn $\overset{e}{\lg}\, 2 = 0.693\,147$ und $\overset{e}{\lg}\, 5 = 1.609\,438$ gegeben ist; und dann berechne $\overset{10}{\log}\, 9$!

7.) Stelle $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ für $x>1$ in reeller Form dar!

9. V. 1905. **Trigonometrie.** № 1

I. Umwandlung von Bogenmass in Gradmass, und umgekehrt.

Der Winkel, dessen Grösse in Bogenmass $\left[=\frac{\text{Bogen}}{\text{Radius}}\right]$ gemessen A ist, ist 1) in Graden: $A.\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$. 2) in Minuten: $A.\left(\frac{180.60}{\pi}\right)'$; 3) in Sekunden: $A.\left(\frac{180.60.60}{\pi}\right)''$.

Der Winkel, dessen Grösse im Gradmass gemessen $\alpha^\circ\ \beta'\ \gamma''$ ist, hat im Bogenmass die Grösse: $\alpha.\left(\frac{\pi}{180}\right)+\beta.\left(\frac{\pi}{180.60}\right)+\gamma.\left(\frac{\pi}{180.60.60}\right)$.

Zahlenwerte. $\pi = 3{,}14159265\ldots$; $\log\pi = 0{,}4971499$

$\frac{180}{\pi}$ = „Radius des Kreises in Graden" $(\rho^\circ) = 57{,}29578$; $\log\frac{180}{\pi} = 1{,}7581226$

$\frac{180.60}{\pi}$ = „Radius des Kreises in Minuten" $(\rho') = 3437{,}747$; $\log\frac{180.60}{\pi} = 3{,}5362739$

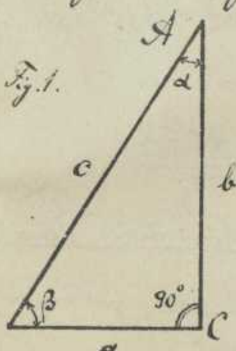
$\frac{180.60.60}{\pi}$ = „Radius des Kreises in Sekunden" $(\rho'') = 206264{,}8$; $\log\frac{180.60.60}{\pi} = 5{,}3144251$

$\frac{\pi}{180} = 0{,}01745329$; $\frac{\pi}{180.60} = 0{,}000290888$; $\frac{\pi}{180.60.60} = 0{,}000004848$

II. Die trigonometrischen Funktionen.

1. Definition für spitze Winkel am rechtwinkligen Dreieck:

Fig. 1.



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$; $\sec\alpha = \frac{c}{b}$.

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$; $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}$; [„Cofunktionen"]

Daraus folgt:

$\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{cotg}\alpha = 1$; $\sin\alpha.\operatorname{cosec}\alpha = 1$; $\cos\alpha.\sec\alpha = 1$

Ferner: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Der pythagoräische Lehrsatz liefert die Relationen:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$; $\operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha$

Tabelle für den Zusammenhang der trigonometrischen Funktionen.

Es ist:	dargestellt durch: $\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\,\alpha$	$cotg\,\alpha$	$\sec\alpha$	$cosec\,\alpha$
$\sin\alpha =$		$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+cotg^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\frac{1}{cosec\,\alpha}$
$\cos\alpha =$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$\frac{cotg\,\alpha}{\sqrt{1+cotg^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sec\alpha}$	$\frac{\sqrt{cosec^2\alpha-1}}{cosec\,\alpha}$
$tg\,\alpha =$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\frac{1}{cotg\,\alpha}$	$\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\frac{1}{\sqrt{cosec^2\alpha-1}}$
$cotg\,\alpha =$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{tg\,\alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\sqrt{cosec^2\alpha-1}$
$\sec\alpha =$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\sqrt{1+tg^2\alpha}$	$\frac{\sqrt{1+cotg^2\alpha}}{cotg\,\alpha}$		$\frac{cosec\,\alpha}{\sqrt{cosec^2\alpha-1}}$
$cosec\,\alpha =$	$\frac{1}{\sin\alpha}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1+tg^2\alpha}}{tg\,\alpha}$	$\sqrt{1+cotg^2\alpha}$	$\frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	

Zwischen den trigonometrischen Funktionen des Winkels α und denen seines Complementwinkels $\beta = 90^\circ - \alpha$ (Fig 1) gelten die Beziehungen:

$$f(\alpha) = cof\,(90^\circ-\alpha) = cof\,(\beta)\;;\quad cof\,(\alpha) = f\,(90^\circ-\alpha) = f(\beta).$$

Setzt man $\alpha = 45^\circ+\lambda$, so erhält man:

$$f\,(45^\circ+\lambda) = cof\,(45^\circ-\lambda)\;;\quad cof\,(45^\circ+\lambda) = f\,(45^\circ-\lambda).$$

2. Allgemeine Definition der trigonometrischen Funktionen unter Zuhilfenahme der analytischen Geometrie, giltig auch für Winkel über 360°

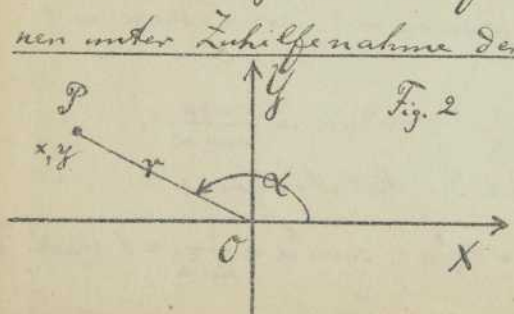


Fig. 2

Winkel $\overset{+}{X}OP = \alpha$ wird im selben Drehsinn gemessen wie $\overset{+}{X}O\overset{+}{Y} = 90^\circ$.

Es wird definirt: $\sin\alpha = \frac{y}{r}$; $tg\,\alpha = \frac{y}{x}$; $\sec\alpha = \frac{r}{x}$;

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$; $cotg\,\alpha = \frac{x}{y}$; $cosec\,\alpha = \frac{r}{y}$.

Dabei sind x und y die Coordinaten von P (mit den gemäss den Regeln der analytischen Geometrie gewählten Vorzeichen); r ist der <u>positive</u> Wert $\sqrt{x^2+y^2}$. Punkt P kann beliebig auf dem Schenkel des Winkels α (Halbstrahl durch O) angenommen werden.

<u>Die unter II, 1 angegebenen Beziehungen gelten nun auch allgemein für beliebige, nicht spitze Winkel α.</u> Die Wahl der Wurzelvorzeichen in der Tabelle ist jedesmal gemäss der Bemerkung auf der nächsten Seite zu treffen.

Ausserdem haben wir:

$\sin(180°+\alpha) = -\sin\alpha$; $\sin(360°-\alpha) = -\sin\alpha = \sin(-\alpha)$; $\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha$.

$\cos(180°+\alpha) = -\cos\alpha$; $\cos(360°-\alpha) = \cos\alpha = \cos(-\alpha)$; $\cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$.

$tg(180°+\alpha) = tg\,\alpha$; $tg(360°-\alpha) = -tg\,\alpha = tg(-\alpha)$; $tg(180°-\alpha) = -tg\,\alpha$.

$\sin(360°+\alpha) = \sin\alpha$; $\cos(360°+\alpha) = \cos\alpha$.

Diese Gleichungen geben die Definition von $\sin(-\alpha)$, $\cos(-\alpha)$, $tg(-\alpha)$; und die Eigenschaft der trigonometrischen Funktionen, die <u>Periode</u> 360° (oder 2π) zu besitzen, an; Tangens und Cotangens besitzen sogar die Periode 180° (oder π).

<u>Verlauf von $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, und $tg\,\alpha$, wenn α von 0° bis 360° zunimmt.</u>

α nimmt zu	von 0° bis 90°	von 90° bis 180°	von 180° bis 270°	von 270° bis 360°
$\sin\alpha$	nimmt zu von 0 bis 1	nimmt ab von 1 bis 0	nimmt ab von 0 bis −1	nimmt zu von −1 bis 0
$\cos\alpha$	nimmt ab von 1 bis 0	nimmt ab von 0 bis −1	nimmt zu von −1 bis 0	nimmt zu von 0 bis 1
$tg\,\alpha$	nimmt zu von 0 bis ∞	nimmt zu von $-\infty$ bis 0	nimmt zu von 0 bis ∞	nimmt zu von $-\infty$ bis 0

Zu bemerken ist, dass $tg\,\alpha$ bei $90°$ $(\frac{\pi}{2})$ und bei $270°$ $(\frac{3\pi}{2})$ einen Sprung von $+\infty$ zu $-\infty$ macht, davon abgesehen aber beständig wächst.

Das Vorzeichen ist für
den Sinus positiv im I und II, negativ im III und IV Quadranten,
den Cosinus positiv im I und IV, negativ im II und III Quadranten,
den Tangens und Cotang. positiv im I u. III, negativ im II u. IV Quadranten.

Für die Aufsuchung der trigonometrischen Funktionen von Winkeln α über $90°$ gilt die Regel:

a) Der Quadrant, in dem α liegt, bestimmt das Vorzeichen.

b) Ist β der Überschuss von α über das nächstkleinere Vielfache $n \cdot 90°$, und n eine $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right.$ Zahl, so hat man die $\left\{\begin{matrix}\text{Funktion}\\ \text{Cofunktion}\end{matrix}\right.$ für β aufzuschlagen.

Aufgaben. —6

1. Man schlage
$\sin(0{,}32471)$; $\lg\cos(5)$; $\lg tg(-27{,}75535)$
auf, wo die Winkel im Bogenmass gegeben sind!

2. Es soll x im Bogenmasse angegeben werden, wenn $\sec x = 2{,}5$ ist.

3. Man drücke: $\sin 290°$; $\cos 170°$; $tg\,240°$; $cotg\,560°$; $\sec 540°$; $cosec(-255°)$ durch trigonometrische Funktionen von Winkeln des ersten Quadranten aus.

4. Wenn $\cos\alpha = \frac{5}{7}$ ist, wie gross sind dann die anderen trigonometrischen Funktionen des Winkels α? Analog für $tg\,\beta = 2{,}4$!

5. Man zeichne den Verlauf einer der trigonometrischen Funktionen, und weiter den Verlauf der Curve ihrer dekadischen Logarithmen!

6. C sei ein Punkt der in A auf AB errichteten Senkrechten, und AC sei gleich 1328,5 m bekannt. Wenn nun Winkel ACB a) $= 7°\,13{,}'5$, b) $= 81°\,44{,}'2$ gemessen ist, und ein Messungsfehler von $\pm 1'$ vorhanden sein kann, wie gross ist dann die Unsicherheit in der Bestimmung von Punkt B?

I 1) Durch 1 trig. Funktion ist der zugehörige Winkel bis auf Vielfaches von 2π (360°) zweideutig bestimmt.

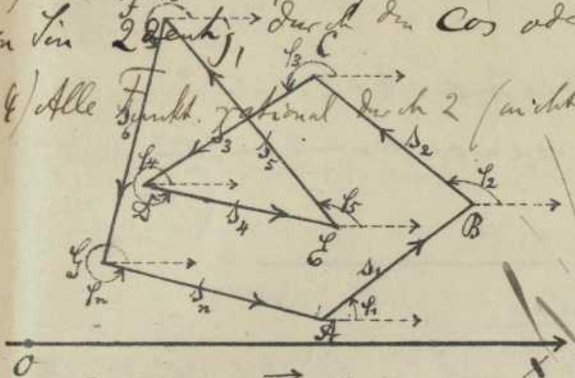
16, V, 1905. 2) Durch 1 trig. Funktion und das Vorzeichen einer zweiten (nicht der reziproken) ist der Winkel bis auf das Vielfache von 360° eindeutig bestimmt. N° 2.

Trigonometrie.

I. Der Projektionssatz.

3) Winkel, die positiv $< 180°$ sind (z. B. Dreieckswinkel) sind durch den Cos oder Ctg. eindeutig bestimmt, durch den Sin zweideutig.

4) Alle Funkt. rational durch 2 (nicht reziproke)



Sind $s_1, s_2, s_3 \ldots s_n$ die Längen der Seiten $AB, BC, CD \ldots GA$ eines ebenen oder räumlichen Polygons, und sind $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_n$ die Winkel, welche die Richtungen $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD} \ldots \overrightarrow{GA}$ in ihrer Folge beim Umlaufen des Polygons mit einer beliebig gegebenen Richtung $\overrightarrow{OX}$ bilden, so gilt:

$$s_1 \cdot \cos\varphi_1 + s_2 \cdot \cos\varphi_2 + s_3 \cdot \cos\varphi_3 + \ldots + s_n \cdot \cos\varphi_n = 0 ; \quad \text{d.h.:}$$

Die Summe der Projektionen aller Seiten auf OX ist Null.

Auf verschiedene Richtungen OX angewendet liefert dieser Projektionssatz für ebene Polygone zwei, für räumliche Polygone drei wesentlich verschiedene (d.h. von einander unabhängige) Relationen.

Für ein ebenes Polygon inbezug auf eine Richtung Oy senkrecht zu Ox angewendet, ergibt der Projektionssatz (φ bedeutet dasselbe wie oben):

$$s_1 \cdot \sin\varphi_1 + s_2 \cdot \sin\varphi_2 + s_3 \cdot \sin\varphi_3 + \ldots + s_n \sin\varphi_n = 0 .$$

II. Die Additionssätze der trigonometrischen Funktionen.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha . \cos\beta \pm \cos\alpha . \sin\beta ; \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha . \cos\beta \mp \sin\alpha . \sin\beta ;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta} ; \quad \operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = -\left(\frac{1 \mp \operatorname{cotg}\alpha . \operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta}\right).$$

Speziell für $\alpha = \beta$ ergibt sich daraus:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha . \cos\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} ;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} ;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} ; \quad \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2 \operatorname{cotg}\alpha}$$

Weiter umgekehrt sind die Funktionen des Winkels α durch die von 2α ausgedrückt:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}\;;\quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}\;;\quad tg\,\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}.$$

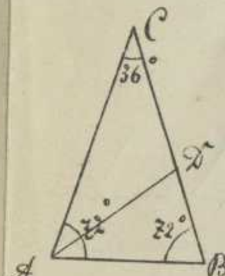
Endlich gelten noch die Formeln:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\;;\quad \cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\;;\quad \cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$tg\,\alpha \pm tg\,\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

Aufgaben.



1. Aus dem „Fünfecksdreieck" ABC mit den Winkeln $36°, 72°, 72°$, und dem durch Halbirung des Winkels A entstehenden ähnlichen Dreieck ABD berechne man das Verhältniss $\frac{AB}{BC}$ und damit $\sin 18°$ und $\cos 18°$. Weiter berechne man $\sin 15°$ und $\cos 15°$ durch Halbirung des Winkels $30°$ nach der Formel oben; endlich, und zwar auf 5 Decimalen zahlenmässig genau, daraus $\sin 3°$ und $\cos 3°$!

2. Man drücke $tg\,\alpha$ rational durch $\sin 2\alpha$ und $\cos 2\alpha$ aus, und berechne demnach $tg\,15°$! Man zeige, dass $tg\,15° + cotg\,15° = 4$ ist!

3. Man beweise: $\frac{1+tg\,\alpha}{1-tg\,\alpha} = tg(45°+\alpha)$; $\frac{\cos\alpha}{1\mp\sin\alpha} = tg\left(45°\pm\frac{\alpha}{2}\right)$; $tg\,\frac{\alpha+\beta}{2} + tg\,\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha+\cos\beta}$; $tg(\alpha+\beta)\cdot tg(\alpha-\beta) = \frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$.

4. Im ebenen Viereck $ABCD$ kennt man die Seiten $AB = 276{,}15$ m und $CD = 198{,}52$ m; weiter die Innenwinkel $124°\,26{,}7'$ bei A, $91°\,5{,}3'$ bei B, $87°\,41{,}2'$ bei C. Man berechne die beiden Seiten BC und DA.

5. Man beweise, dass

$$arc\,tg\,x + arc\,tg\,\frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4} \quad \text{ist!}$$

6. Man stelle a) $\sin\left(\frac{arc\cos x}{2}\right)$; b) $tg(2\,arc\,tg\,x)$; c) $tg(4\,arc\,tg\,x)$ algebraisch in x dar. Beispiel $x = \frac{1}{5}$.

23. V. 1905.

Trigonometrie.

№ 3

I. Der Satz von Moivre.

$$\cos n\varphi \pm i \sin n\varphi = [\cos\varphi \pm i\sin\varphi]^n.$$

Daraus folgt:

$$\cos n\varphi = (\cos\varphi)^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\cos\varphi)^{n-2}\cdot\sin^2\varphi + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\cos\varphi)^{n-4}\cdot\sin^4\varphi - + \dots$$

$$\sin n\varphi = \frac{n}{1}(\cos\varphi)^{n-1}\cdot\sin\varphi - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\cos\varphi)^{n-3}\cdot\sin^3\varphi + - \dots$$

II. Auflösung der trigonometrischen Gleichung

$$a\cdot\cos x + b\cdot\sin x = c$$

durch Division mit $+\sqrt{a^2+b^2}$ und Einführung des Hilfswinkels φ, für den $\sin\varphi = \frac{a}{+\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\varphi = \frac{b}{+\sqrt{a^2+b^2}}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}$ ist.

Man berechnet also φ aus $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}$, und wählt $\varphi \lessgtr 180^\circ$, je nachdem $a \gtrless 0$ ist. Dann ist

$$\sin(\varphi + x) = \frac{c\sin\varphi}{a} \quad \left(= \frac{c\cos\varphi}{b}\right).$$ Zwei Lösungen.

III.

1. Lösung der quadratischen Gleichung $x^2+px+q=0$ mit reellen Wurzeln, durch trigonometrische Funktionen.

α) q eine negative Zahl. Man berechnet $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{p}\sqrt{-q}$, und hat dann als die Wurzeln: $x_1 = \sqrt{-q}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$; $x_2 = -\sqrt{-q}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$.

β) q eine positive Zahl, und $p^2 > 4q$. (Bedingung für die Realität der Wurzeln.) Man berechnet $\sin\varphi = \frac{2}{p}\sqrt{q}$, und hat dann als die Wurzeln $x_1 = -\sqrt{q}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$; und $x_2 = -\sqrt{q}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$.

N. B. Die Quadratwurzeln sind als positive Zahlen zu nehmen!

2. Lösung der cubischen Gleichung $x^3+px+q=0$ durch trigonometrische Funktionen.

α) p ist ein negative Zahl, und sogar auch noch $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$ negativ. Man berechnet $\cos\varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{\left(\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)}\right)^3}$, und erhält dann die drei reellen Wurzeln als

$x_1 = 2\sqrt[2]{-\frac{p}{3}}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}$; $x_2 = 2\sqrt[2]{-\frac{p}{3}}\cdot\cos(120^\circ+\frac{\varphi}{3})$; $x_3 = 2\sqrt[2]{-\frac{p}{3}}\cdot\cos(240^\circ+\frac{\varphi}{3})$.

β) p ist eine negative Zahl, aber $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$ positiv. Dann berechnet man $\sin\varphi = \frac{\left(\sqrt[2]{-\frac{p}{3}}\right)^3}{\frac{q}{2}}$, und wählt dabei φ zwischen -90° und $+90^\circ$; weiter berechnet man $tg\,\psi = \sqrt[3]{tg\frac{\varphi}{2}}$. Die einzige reelle Wurzel ist dann. $x_1 = -2\sqrt[2]{-\frac{p}{3}}\cdot\mathrm{cosec}(2\psi)$.

γ) p ist eine positive Zahl. Man berechnet $tg\,\varphi = \frac{\left(\sqrt[2]{\frac{p}{3}}\right)^3}{\frac{q}{2}}$, und $tg\,\psi = \sqrt[3]{tg\frac{\varphi}{2}}$. Die einzige reelle Wurzel ist dann: $x_1 = -2\sqrt[2]{\frac{p}{3}}\cdot\mathrm{cotg}\,2\psi$.

N. B. Die Quadratwurzeln sind wieder als positive Zahlen zu nehmen!

Aufgaben.

1. Unter der Voraussetzung, dass α, β, γ die Winkel eines Dreiecks sind, bringe man die folgenden Ausdrücke auf eine zur logarithmischen Berechnung geeignete Form:

a) $\mathrm{cotg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{cotg}\frac{\beta}{2}+\mathrm{cotg}\frac{\gamma}{2}$; b) $\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma+1$!

2. Man berechne den Winkel x aus der Gleichung:

$17{,}245\cos x - 8{,}661\sin x = 14{,}285$!

3) Man berechne die sämmtlichen neunten Wurzeln der Zahl 2!

4) Man drücke $\sin(3\alpha)$, $\cos(3\alpha)$, sowie $\cos(4\alpha)$ durch eine der Grössen $\sin\alpha$ oder $\cos\alpha$ allein aus! Wie steht die Sache für $\cos(n\alpha)$ und $\sin(n\alpha)$ allgemein?

5. Man berechne trigonometrisch die reellen Wurzeln:

a) der quadratischen Gleichung $9{,}018x^2 - 27{,}115x = 8{,}221$;

b) der cubischen Gleichungen $18{,}36x^3 \pm 217{,}45x - 238{,}32 = 0$.

6. Man bestimme die Summe der Reihe

$\Sigma = \sin x+\sin2x+\sin3x+\ldots+\sin(n-1)x+\sin nx$ durch Multiplication mit $\sin x$ und Anwendung der Formel $\sin\alpha.\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$.

6, VI, 1905 **Trigonometrie.** N: 4

Die Maskelyne sche Regel.

Zur genauen Berechnung von $\log \sin\alpha$ und $\log tg\,\alpha$, wenn α ein kleiner Winkel ist, drückt man diesen Winkel in Sekunden aus $(=\alpha'')$, und hat alsdann:

$$\log \sin\alpha = \log \alpha'' - \log \rho'' + \frac{1}{3} \log \cos\alpha \; ;$$

$$\log tg\,\alpha = \log \alpha'' - \log \rho'' - \frac{2}{3} \log \cos\alpha \, .$$

Dabei ist $\rho'' = 206\,264{,}8$; $\log \rho'' = 5{,}314\,4251$ (vergl. Blatt 1.)

Aufgaben.

1. In einem windschiefen Viereck $ABCD$ ist Seite AB bekannt, und weiter die Höhenwinkel (gegen die Horizontalebene) und Azimuthe (Winkel der Verticalebene gegen die Meridianebene) für alle vier Seiten. Das Viereck ist so klein, dass in allen vier Punkten dieselbe Horizontalebene und parallele Meridianebenen angenommen werden können. Wie liefert der Projektionssatz die anderen drei Seiten des Vierecks?

2 Aus $x+y = 82^\circ$, und $\cos x + \cos y = 1{,}23644$ berechne man x und y, indem man sich durch Umformung der zweiten Gleichung nach $x-y$ verschafft. Ebenso aus $x-y = 44^\circ$ und $\sin x + \cos y = 1{,}84101$!

3. Man berechne x aus der Gleichung

$$\arc\sin x + \arc\sin(2x) = \frac{\pi}{6} \quad !$$

4. Man beweise, wenn $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360^\circ$ ist, die Richtigkeit der Formel:

$$tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma + tg\,\delta = \frac{\sin(\alpha+\delta).\sin(\beta+\delta).\sin(\gamma+\delta)}{\cos\alpha \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma \,.\, \cos\delta} \quad !$$

5. Man summire die trigonometrische Reihe:

$$\sin x . \cos 2x + \sin 2x . \cos 3x + \sin 3x . \cos 4x + \ldots + \sin(nx) . \cos(n+1)x \; !$$

6. Man drücke $\cos^5\alpha$ und $\sin^5\alpha$ durch eine Summe von cos- resp. sin von Vielfachen des Winkels α aus! (Zu benützen ist der Moivre'sche Satz.)

7. Wie bestimmt man x möglichst einfach aus

a) $a\cos^2 x + b\sin x\cos x + c\sin^2 x = d$?

b) $a\sin(x+\alpha) + b\sin(x+\beta) = 0$?

8. Man berechne x und y aus

$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 0{,}5$; $x + y = 80^\circ$!

9. Man bringe den Ausdruck:

$\cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\alpha-\beta+\gamma) + \cos(-\alpha+\beta+\gamma)$,

wo α, β, γ ganz beliebige Winkel sind, auf eine logarithmierbare Form!

10. Man suche $\log\sin 5'25{,}''3$ und $\log\operatorname{tg} 5'25{,}''3$ in einer Logarithmentafel durch die gewöhnliche Interpolation auf, wenn die Tafel

a) von Minute zu Minute

b) mit dem Intervalle $10''$ fortschreitet.

Andrerseits benutze man die Maskelyne'sche Formel, und vergleiche die so erhaltenen Zahlenwerte!

11. Wenn $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta = \Sigma_1$

$\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\beta.\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta.\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\gamma.\operatorname{tg}\delta = \Sigma_2$

$\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta.\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta.\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\gamma.\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\beta.\operatorname{tg}\gamma.\operatorname{tg}\delta = \Sigma_3$

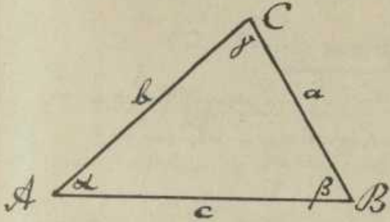
$\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta.\operatorname{tg}\gamma.\operatorname{tg}\delta = \Sigma_4$ gesetzt werden, ist:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \frac{\Sigma_1 - \Sigma_3}{1 - \Sigma_2 + \Sigma_4}$$! Beweis!

Die Formel ist leicht für den Tangens der Summe von beliebig vielen Winkeln zu verallgemeinern!

20, VI, 1905. **Trigonometrie.** № 5.

I Formeln für das schiefwinklige Dreieck.



1. Der Sinussatz.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$ [$= 2r$, wenn r der Radius des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises ist.]

Aus dem Sinussatze folgt:
$$a-b : c = \sin\frac{\alpha-\beta}{2} : \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \;;$$
$$a+b : c = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} : \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \;;$$

und 2. der Tangentensatz.
$$a-b : a+b = \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$= \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} .$$

3. der Projektionssatz.
$$c = a.\cos\beta + b.\cos\alpha .$$

4. der Cosinussatz. $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma .$$

Umformung des Cosinussatzes zur logarithmischen Berechnung von c:

A. Man setzt $x = 2\cos\frac{\gamma}{2}.\sqrt{ab}$ und erhält
$$c = \sqrt{(a+b+x)(a+b-x)} .$$

B. Oder man führt einen Hilfswinkel φ ein, etwa durch $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sin\frac{\gamma}{2}}{a-b}\sqrt{ab}$, und erhält $c = \frac{a-b}{\cos\varphi}$.

5. der Halbwinkelsatz. Es sei $a+b+c = 2s$ gesetzt. Dann ist:
$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{a.b}} \;;\; \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{a.b}} \;;\; \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} .$$

6. Die Tangentenformel
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sin\gamma}{b-a\cos\gamma} = \frac{a\sin\beta}{c-a\cos\beta} .$$

7. Der Dreiecksinhalt Δ ist:
$$\Delta = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \tfrac{1}{2}c^2\frac{\sin\alpha.\sin\beta}{\sin\gamma} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} .$$

8. Der Radius r des dem Dreieck umschriebenen Kreises ist:

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma} \quad \text{(vergl. 1)} \quad ;$$

der Radius ρ des eingeschriebenen Kreises:

$$\rho = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} = \frac{\Delta}{s} = \frac{c\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \; ;$$

der Radius ρ_c des an Seite c dem Dreieck anbeschriebenen Kreises:

$$\rho_c = \frac{\Delta}{s-c} = \frac{c\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \, ,$$

Aufgaben.

1. Im Dreieck ABC sind die drei Höhen $h_a = 7$; $h_b = 8$; $h_c = 9$ gegeben. Man berechne möglichst einfach die Winkel und den Inhalt des Dreiecks!

2. Im Dreieck ABC sei O der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, Ω der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises. Man berechne, wenn die Seiten und Winkel des Dreiecks bekannt sind, die Strecke $O\Omega$, und zeige dass: $(O\Omega)^2 = r^2 - 2\rho r$ ist!

3. Ein Viereck soll zugleich ein Tangentenviereck und ein Sehnenviereck sein. Von ihm ist der Winkel $\alpha = 49^\circ\, 17'\, 42''$ und der Winkel $\beta = 75^\circ\, 6'\, 16''$ gegeben, – weiter der Flächeninhalt $F = 197{,}25$. Man berechne die Radien des umschriebenen und des eingeschriebenen Kreises!

4. Gegeben ist in einem Dreieck die eine Seite a, der Gegenwinkel α, und die Länge der Winkelhalbierenden von α (bis a). Zu berechnen sind die anderen Winkel! Zahlenbeispiel $\alpha = 68^\circ\, 19{,}2'$; $a = 82{,}88$; $w = 35{,}61$! $\cos^2\varphi - \frac{w}{a}\sin\alpha\cos\varphi - \cos\frac{\varepsilon}{2} = 0$

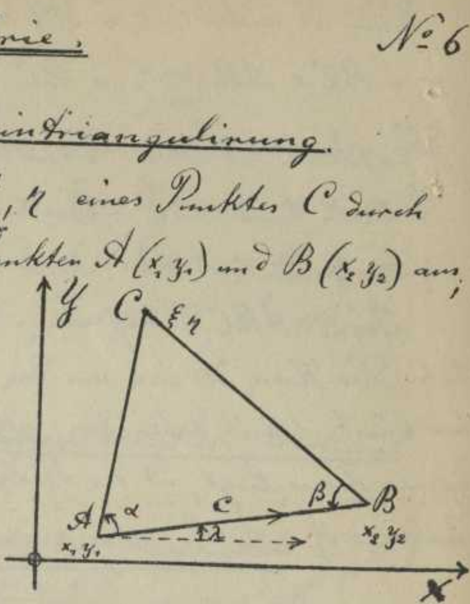
5. Von einem Viereck sind die vier Winkel, weiter eine Diagonale und endlich auch der Flächeninhalt bekannt. Man gebe an, wie die Seiten des Vierecks gefunden werden können!

$$\varphi = \frac{\beta-\gamma}{2}, \quad \varepsilon = \frac{\beta+\gamma}{2}$$

27. VI. 1905 — **Trigonometrie.** — № 6

Die beiden Hauptaufgaben der Kleintriangulirung.

I Bestimmung der Coordinaten ξ, η eines Punktes C durch „Vorwärtseinschneiden" von den bekannten Punkten $A(x_1 y_1)$ und $B(x_2 y_2)$ aus; (durch Messung der Winkel an den bekannten Punkten $BAC = \alpha$ und $CBA = \beta$.)



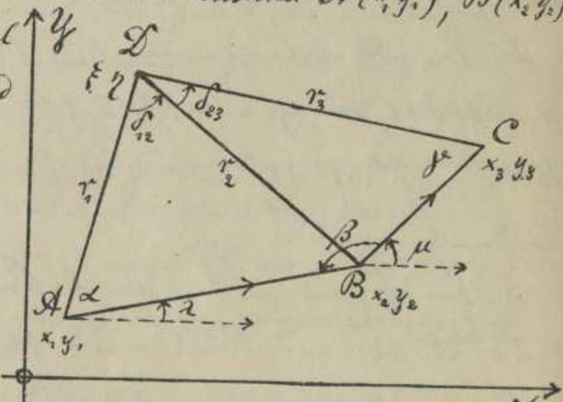
Sei λ der Winkel von $\overrightarrow{AB}$ gegen die positive X Axe, so ist:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\;;\quad AB = c = \frac{x_2-x_1}{\cos\lambda} = \frac{y_2-y_1}{\sin\lambda}.$$

Der Quadrant von λ ist so zu wählen, dass $\sin\lambda$ (resp. $\cos\lambda$) das Vorzeichen von y_2-y_1 (resp. x_2-x_1) haben. Dann wird:

$$\xi = x_1 + \frac{c\sin\beta.\cos(\lambda+\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}\;;\quad \eta = y_1 + \frac{c\sin\beta.\sin(\lambda+\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

II. Bestimmung der Coordinaten $\xi\;\eta$ eines Punktes D durch „Rückwärtseinschneiden" nach den drei bekannten Punkten $A(x_1 y_1)$, $B(x_2 y_2)$ und $C(x_3 y_3)$; (durch Messung der Winkel am zu bestimmenden Punkte, $ADB = \delta_{12}$ und $BDC = \delta_{23}$.)



Man rechnet zunächst:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\;;\quad AB = \frac{x_2-x_1}{\cos\lambda} = \frac{y_2-y_1}{\sin\lambda}\;;$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}\;;\quad BC = \frac{x_3-x_2}{\cos\mu} = \frac{y_3-y_2}{\sin\mu}\;;$$

und Winkel $CBA = 180° + \lambda - \mu = \beta$

Die Berechnung des Vierecks $ABCD$ gibt, wenn noch der Hilfswinkel φ durch $\operatorname{tg}\varphi = \frac{AB.\sin\delta_{23}}{BC.\sin\delta_{12}}$ eingeführt wird, die Winkel α und γ durch:

$$\frac{\alpha+\gamma}{2} = 180° - \frac{\beta+\delta_{12}+\delta_{23}}{2},\ \text{und}\ \operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}.\operatorname{cotg}(45°+\varphi).$$

Dann ist weiter: $r_1 = AD = AB.\frac{\sin(\alpha+\delta_{12})}{\sin\delta_{12}}$; $r_3 = CD = BC.\frac{\sin(\gamma+\delta_{23})}{\sin\delta_{23}}$;

$r_2 = BD = AB.\frac{\sin\alpha}{\sin\delta_{12}} = BC.\frac{\sin\gamma}{\sin\delta_{23}}$.

Die gesuchten Coordinaten von D endlich finden sich als:

$$\xi = x_1 + r_1.\cos(\lambda+\alpha) = x_3 + r_3.\cos(180^\circ+\mu-\gamma).$$

$$\eta = y_1 + r_1.\sin(\lambda+\alpha) = y_3 + r_3.\sin(180^\circ+\mu-\gamma).$$

Liegen ABCD auf einem Kreise, so wird diese Bestimmung von D unmöglich. Der Kreis, der sich um das Dreieck der drei gegebenen Punkte ABC beschreiben lässt, heisst daher der „gefährliche Kreis". Auch wenn D nur nahezu auf diesem Kreise liegt, ist die Bestimmung praktisch unbrauchbar, da kleine Messfehler (z.B. in δ_{12}, δ_{23}) schon grosse Fehler in den Coordinaten von D nach sich ziehen.

Aufgaben.

1. Zwei in derselben Verticalen gelegene Punkte H und Y werden von A und B aus anvisirt, und die Elevationswinkel α_1 und α_2 von A aus, β_1 und β_2 von B aus gemessen. Weiter ist der Höhenunterschied der Punkte A und B gleich h bekannt. Man sucht die Höhe HY, und den Abstand dieser Verticalen von A und B!

2. Von A (Coordinaten $x_1 = 14208,55$; $y_1 = -8306,33$) und B ($x_2 = 15001,60$; $y_2 = -7915,21$) aus werden die Horizontalwinkel $BAC = 67^\circ 21' 15''$ und $CBA = 51^\circ 9' 48''$ gemessen. Man berechne die Coordinaten von C!

3. Von D aus werden durch Rückwärtseinschneiden die Winkel $ADB = 23^\circ 28' 12''$ und $BDC = 33^\circ 46' 6''$ gemessen. Die Coordinaten von A, B, C seien $x_1 = 0$; $y_1 = 0$; $x_2 = 518,15$; $y_2 = 105,77$; $x_3 = 991,44$; $y_3 = 608,30$. Man berechne die Coordinaten von D!

4. Vier Punkte A, B, P, Q liegen auf einer Geraden, C ausserhalb derselben. PQ soll direkt nicht messbar sein. Man berechne PQ aus den Daten: $AC = 275,9$ m; $BC = 324,6$ m; $\sphericalangle ACB = 124^\circ 8'$; $\sphericalangle APC = 101^\circ 24'$; $\sphericalangle BQC = 132^\circ 15'$.

4, VII, 1905. **Trigonometrie.** № 7

Sphärische Trigonometrie.

I. Die Normalen zu den Seiten eines Dreikantes (oder die Normalebenen zu den Kanten des Dreikants) bilden ein zweites Dreikant, dessen Seitenwinkel die Supplemente der Kantenwinkel des ersten, und dessen Kantenwinkel die Supplemente der Seitenwinkel des ersten sind. [$a' = 180° - \alpha$; $b' = 180° - \beta$; $c' = 180° - \gamma$; $\alpha' = 180° - a$; $\beta' = 180° - b$; $\gamma' = 180° - c$].

Jedes der beiden Dreikante heisst „**Polar- (Supplementar-) dreikant**" des anderen.

II. Der **Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks** mit den Winkeln α, β, γ ist (beim Kugelradius r): $F = \pi r^2 \dfrac{\alpha° + \beta° + \gamma° - 180°}{180°} = \pi r^2 \dfrac{\varepsilon°}{180°}$, wo $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180°$ der „**sphärische Excess**" des Dreiecks heisst.

III. **Ableitung der Fundamentalformeln für das sphärische Dreieck** durch Coordinatentransformation.

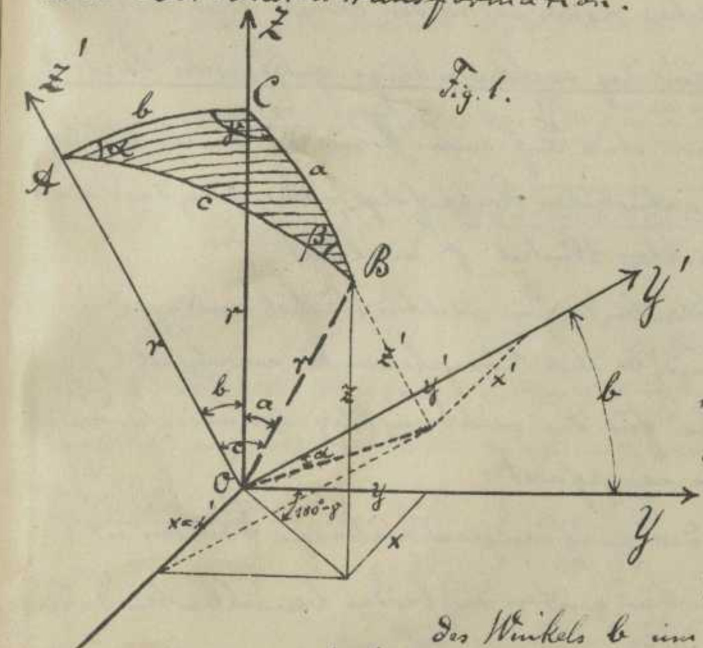


Fig. 1.

Vorgelegt ist das Dreieck ABC. OC werde als z Axe, die Normale auf AOC als x Axe eines Coordinatensystems gewählt, die y Axe dementsprechend ergänzt. Ein zweites Coordinatensystem habe OA zur z' Axe, als x' Axe dieselbe Normale auf AOC wie früher; die y' Axe sei wieder entsprechend zugefügt.

Das System x y z wird dann durch eine Drehung vom Betrage des Winkels b um die x (= x') Axe in das System x' y' z' übergeführt. die Formeln für diese Coordinatentransformation sind:

$x = x'$; $y = y'\cos b - z'\sin b$; $z = y'\sin b + z'\cos b$.

Die Coordinaten des Punktes B im alten und im neuen System lassen sich (Fig 1) darstellen als:

$$x = r.\sin a.\sin\gamma \qquad x' = r.\sin c.\sin\alpha$$
$$y = -r.\sin a.\cos\gamma \qquad y' = r.\sin c.\cos\alpha$$
$$z = r.\cos a \qquad z' = r.\cos c \; .$$

Dies in die Transformationsgleichungen eingesetzt ergibt die Fundamentalgleichungen: 1) $\sin a.\sin\gamma = \sin c.\sin\alpha$

2) $-\sin a.\cos\gamma = \sin c.\cos\alpha.\cos b - \cos c.\sin b$

3) $\cos a = \sin c.\cos\alpha.\sin b + \cos c.\cos b$.

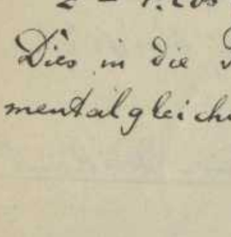
IV. Formeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck ($\gamma = 90°$):

$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\sin(\text{der gegenüberlieg. Kathete})}{\sin(\text{der Hypotenuse})}$; $\cos\alpha = \frac{tg\, b}{tg\, c}$;

$tg\,\alpha = \frac{tg\, a}{\sin b}$. Endlich noch: $\cos c = \cos a.\cos b$, was in gewissem Sinne den pythagoräischen Lehrsatz in der Ebene hier vertritt.

Die Nepersche Merkregel für das rechtwinklige sphärische Dreieck:

Fig. 2.



Markirt man etwa auf einem Kreise die Stücke des Dreiecks in ihrer natürlichen Reihenfolge, jedoch so, dass man

1) den rechten Winkel γ auslässt;

2) statt der beiden am rechten Winkel anliegenden Katheten a und b ihre Complemente anschreibt,

so erhält man die Hauptsätze für das rechtwinklig sphärische Dreieck in die beiden Regeln zusammengefasst:

„Der Cosinus irgend einer der fünf angeschriebenen Grössen ist: gleich dem Produkte der Cotangenten der beiden benachbarten Grössen, und gleich dem Produkte der Sinus der beiden nicht benachbarten Grössen.

V. Formeln für das schiefwinklige sphärische Dreieck.

1. Der Sinussatz: $\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

2. Der Cosinussatz: $\cos c = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b . \cos\gamma$.

3. Der Sinus-Cosinussatz: $\sin c . \cos\alpha = \cos a . \sin b - \sin a . \cos b . \cos\gamma$.

Durch Anwendung dieser Formeln auf das Polardreieck folgt noch:

2*. $\cos\gamma = -\cos\alpha . \cos\beta + \sin\alpha . \sin\beta . \cos c$.

3*. $\sin\gamma . \cos a = \cos\alpha . \sin\beta + \sin\alpha . \cos\beta . \cos c$.

4. Der Halbwinkelsatz. Durch Umformung des Cosinussatzes findet man, wenn noch $a + b + c = 2s$ gesetzt wird:

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a) . \sin(s-b)}{\sin a . \sin b}} \; ; \; \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin s . \sin(s-c)}{\sin a . \sin b}} \; ; \; \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a) . \sin(s-b)}{\sin s . \sin(s-c)}} .$$

Oder, wenn abkürzend $\sqrt{\dfrac{\sin(s-a) . \sin(s-b) . \sin(s-c)}{\sin s}} = k$ gesetzt wird,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{k}{\sin(s-a)} \; ; \; \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{k}{\sin(s-b)} \; ; \; \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{k}{\sin(s-c)} .$$

4.* Das Polardreieck ergibt als zu 4 analoge Formeln, wenn noch $\alpha+\beta+\gamma = 2\sigma$ gesetzt wird:

$$\cos\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\alpha) . \cos(\sigma-\beta)}{\sin\alpha . \sin\beta}} \; ; \; \sin\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma . \cos(\sigma-\gamma)}{\sin\alpha . \sin\beta}} \; ; \; \operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma . \cos(\sigma-\gamma)}{\cos(\sigma-\alpha) . \cos(\sigma-\beta)}} .$$

Oder, wenn wieder abkürzend $\sqrt{\dfrac{\cos(\sigma-\alpha) . \cos(\sigma-\beta) . \cos(\sigma-\gamma)}{-\cos\sigma}} = K$ gesetzt wird,

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{\cos(\sigma-\alpha)}{K} \; ; \; \operatorname{tg}\frac{b}{2} = \frac{\cos(\sigma-\beta)}{K} \; ; \; \operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\cos(\sigma-\gamma)}{K} .$$

5. Durch Auflösung von $\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}$ und $\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}$, und Einsetzen der unter 4 gegebenen Werte verificirt man leicht die Delambreschen Gleichungen:

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \; ; \quad \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} .$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} \; ; \quad \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} .$$

6. Durch Division von je zweien der Gleichungen 5 erhält man die Neperschen Analogieen:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} \quad ; \quad \operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}\,.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} \quad ; \quad \operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}\,.$$

Sie leisten das, was in der Ebene der Tangentialsatz leistet, nämlich, wenn 2 Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, die Berechnung der anderen beiden Winkel. (sowie auch die Lösung der polaren Aufgabe.)

7. Die Formel von L'Huilier

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}$$

liefert den sphärischen Excess ε, also die Dreiecksfläche, unmittelbar aus den drei Seiten a, b, c.

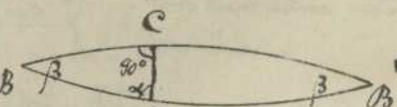
Aufgaben.

1. Wird im rechtwinklig sphärischen Dreieck die sphärische Höhe auf die Hypotenuse gefällt, so ist

a) das Produkt der Tangenten der beiden Abschnitte auf der Hypotenuse gleich dem Quadrat des Sinus der Höhe.

b) das Produkt der Tangenten der ganzen Hypotenuse und des einen Abschnitt gleich dem Quadrat des Tangens der jenem Abschnitt anliegenden Kathete!

2. In einem sphärischen Zweieck vom Öffnungswinkel $\beta = 18^\circ$ soll senkrecht zum einen Begrenzungskreise ein grösster Kugelkreis gelegt werden, der die Zweiecksfläche im Verhältniss 1 : 2 teilt. In welchem Punkte C steht dieser senkrecht, unter welchem Winkel schneidet er den anderen Zweieckskreis, und wie lang ist der Bogen AC? Figur!



3. Ein sphärisches Viereck hat gegebenen Inhalt J und Umfang u. Weiter sollen seine Ecken ein ebenes Rechteck bilden. Man berechne Seiten und Diagonalen des sphärischen Vierecks. Beispiel $J = \frac{1}{20}$ der Kugel; $u = 200^\circ$!

4. Die sphärischen Halbmesser der einem sphärischen Dreieck umschriebenen und eingeschriebenen Kreise sind gegeben durch: $\operatorname{cotg} r = K$; $\operatorname{tg}\rho = k$!

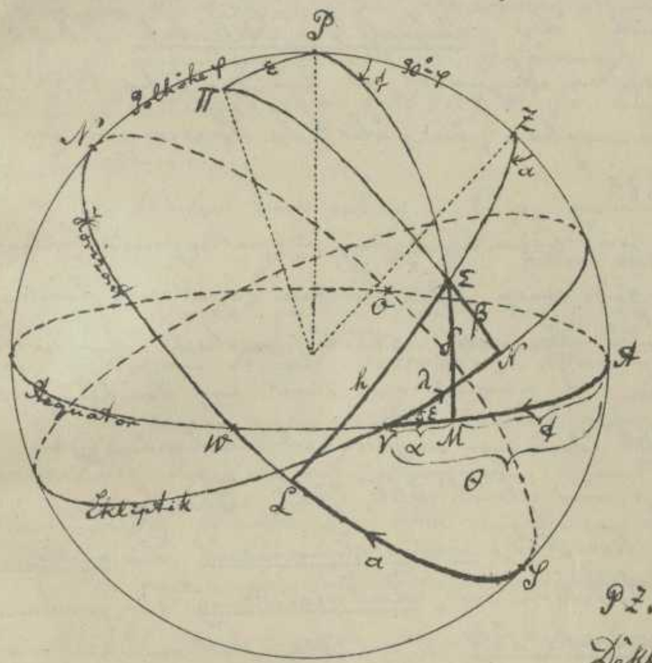
11, VII, 1905. **Trigonometrie.** № 8

I. Der Satz von Legendre.

Ist ein sphärisches Dreieck mit kleinen Seiten (praktisch $a, b, c <$ etwa als 2°) vorgelegt, und berechnet man statt dessen ein ebenes Dreieck mit den Seitenlängen $r.\operatorname{arc} a$, $r.\operatorname{arc} b$, $r.\operatorname{arc} c$ (r Kugelradius), die also gleich den Längen der Seitenbögen im sphärischen Dreieck sind, so ergeben sich die Winkel des ebenen Dreiecks sehr genau (bis auf Grössen vierter Ordnung) gleich den je um ein Drittel des sphärischen Excesses verkleinerten Winkeln des sphärischen Dreiecks.

Kennt man also den Excess eines solchen sphärischen Dreiecks (den man auch aus seiner Flächeninhalt abschätzen kann,) und verteilt ihn gleichmässig auf die drei Winkel, so kann man das Dreieck mit den so verkleinerten Winkeln als ebenes berechnen.

II. Die Coordinatensysteme auf der Himmelskugel.



1. Bezogen auf den Meridian $PZAS$, und den Horizont des Beobachtungsortes (dessen geographische Breite $PN = AZ = \varphi$ ist;
Höhe $\Sigma L = h$
(dafür auch Zenithdistanz $Z\Sigma = 90^\circ - h$)
und Azimuth $SL = a$.
Der Azimuth wird auf dem Horizonte vom Südpunkt S aus gemessen und zwar, vom Zenith Z aus gesehen, im Sinne der Uhrzeigers gezählt.

2. Bezogen auf den Meridian $PZAS$, und den Aequator $AWBO$:
Deklination $\Sigma M = \delta$. (Dafür auch Poldistanz, vom nördlichen Aequatorpol P gemessen, $P\Sigma = 90^\circ - \delta$)
und Stundenwinkel $AM = t$.

Der Stundenwinkel wird auf dem Aequator, vom südlichen Schnittpunkte Meridian-Aequator aus gemessen, und zwar, vom Nordpol P des Aequators gesehen, im Sinne des Uhrzeigers gezählt.

Der Stundenwinkel Θ des Frühlingspunktes Υ heisst die „Sternzeit."

3. Bezogen auf den Aequator und den Frühlingspunkt Υ (den Schnittpunkt von Aequator und Ekliptik, den die Sonne zur Frühlingstag und Nachtgleiche passirt):

Deklination $\Sigma M = \delta$

und Rektascension $\Upsilon M = \alpha$.

Die Rektascension wird, vom nördlichen Aequatorpole P gesehen, im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers gezählt.

Satz. Es ist stets, für jeden Stern, $t + \alpha = \Theta$.

4. Bezogen auf die Ekliptik und den Frühlingspunkt Υ:

Breite $\Sigma N = \beta$ (dafür auch Abstand vom nördlichen Pole Π der Ekliptik: $90° - \beta$)

Länge $\Upsilon N = \lambda$.

Die Länge wird, vom nördlichen Ekliptikpole Π gesehen, im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers gezählt.

5. Frühlingspunkt, Aequator, und Ekliptik sind, von der Praecession und Nutation abgesehen, constant. Die „Schiefe der Ekliptik" $P\Pi = \varepsilon$, d.h. der Winkel der Ekliptik gegen den Aequator ist für das Jahr $1900 + T$ als $23° 27' 8'' - 0{,}48''.T$ anzusetzen, die jährliche Praecession des Frühlingspunktes beträgt: $-50{,}24''$.

Von Praecession, Nutation, und Eigenbewegung abgesehen, sind Deklination, Rektascension, Breite und Länge für einen jeden Fixstern constante Zahlen, während Stundenwinkel, Höhe, und Azimuth natürlich wechselt. Für die Sonne ist β stets gleich Null anzusetzen, λ nimmt von Null zur Frühlingstag und Nachtgleiche im Jahre um $360°$ (doch nur angenähert gleichmässig) zu.

365,2422 mittlere Sonnentage sind gleich 366,2422 Sterntagen.

Der Stundenwinkel der Sonne heisst die wahre Sonnenzeit. Die mittlere Sonnenzeit erhält man durch Addition der „Zeitgleichung" zur wahren Sonnenzeit. Um die mitteleuropäische Zeit zu erhalten, hat man zur mittleren Sonnenzeit des Ortes noch einen constanten Betrag [= 4 Minuten mal Graddifferenz: 15° − geograph. Länge des Ortes östlich von Greenwich] zu addiren; für München (Sternwarte) ist dieser Betrag 13 Min. 34 Sek.

6. Der Übergang von einem der Coordinatensysteme 1 bis 4 zum anderen erfolgt durch Benutzung der Dreiecke $Z P \Sigma$ (Seiten $90^\circ-\varphi$, $90^\circ-\delta$, $90^\circ-h$, Winkel bei Z $180^\circ-\alpha$, bei P t) und $P \Pi \Sigma$ (Seiten ε, $90^\circ-\beta$, $90^\circ-\delta$; Winkel bei P $90^\circ+\alpha$, bei Π $90^\circ-\lambda$), unter eventueller Zuziehung der Formel $t+\alpha=\theta$

Aufgaben.

1. Man leite den Sinussatz und den Cosinussatz der ebenen Trigonometrie aus den entsprechenden Sätzen der sphärischen Trigonometrie ab, in denen die sphärischen Seitenwinkel a, b, c unendlich klein, der Kugelradius r dagegen unendlich gross gedacht wird, so zwar, dass $r \sin a$ endlich ist, und gleich $r.\operatorname{arc} a$ gesetzt werden kann, $\cos a$ dagegen gleich $1-\frac{(\operatorname{arc} a)^2}{2}$

2. Man beweise die Formel für den sphärischen Excess:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}.\operatorname{tg}\frac{b}{2}.\sin\gamma}{1+\operatorname{tg}\frac{a}{2}.\operatorname{tg}\frac{b}{2}\cos\gamma}$$

! [Zum Beweise entwickle man $\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-(90-\frac{\gamma}{2})\right)$ und ersetze $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$ nach den Naperschen Analogieen!]

3. In einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ist eine Kathete $=50^\circ 42' 42''$ und der Flächeninhalt $=1,35909.\,r^2$ (r Kugelradius) gegeben. Man berechne die Hypotenuse!

4. Die Winkel eines schiefwinkligen sphärischen Dreiecks sind $\alpha=38^\circ 9' 47''$, $\beta=135^\circ 14' 32''$, $\gamma=13^\circ 42' 36''$. Man berechne die Seiten des Dreiecks!

5. Die Winkel an den Kanten der fünf regulären Körper sind zu berechnen! (also für Würfel, Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Pentagondodekraeder.)

6. Von einem sphärischen Dreieck weiss man, dass sein Inhalt gleich dem seines Polardreiecks ist. Ausserdem kennt man eine Seite c und den gegenüberliegenden Winkel γ. Wie kann man die anderen Stücke finden?

7. Von einem geodätischen Dreiecke sind die Seiten $b=51605,17$ m und $c=46281,73$ m gegeben, - weiter der eingeschlossene Winkel $\alpha=89^\circ 36' 21,6''$. Man berechne die übrigen Stücke mit 7stelligen Logarithmen nach dem Legendreschen Satze! Erdradius sei gleich 6370 km.

8. Wie lange dauert der längste Tag des Jahres in München (geographische

Breite $\varphi = 48°8'$). Es ist dabei die Sonne constant in ihrer Maximaldeklination anzunehmen. In welcher Himmelsrichtung geht an diesem Tage die Sonne auf?

Wenn noch die Refraktion beim Sonnenaufgang eine scheinbare Vermehrung der Sonnenhöhe um $34'$ zur Folge hat, und der Sonnenhalbmesser $= 16'$ zu setzen ist, – wie lang wird dann die Zeit zwischen erstem Erscheinen und letzten Verschwinden des Sonnenrandes sein?

9. Derselbe Stern ist zweimal, und zwar als Σ_1 in der Höhe h_1 mit dem Azimuth a_1, und später als Σ_2 in Höhe h_2, Azimuth a_2 gemessen worden. Wieso kann daraus die Deklination des Sternes, und die geographische Breite des Beobachtungsortes gefunden werden?

10. An einem Orte von der bekannten geographischen Breite (oder „Polhöhe") φ ist ein Stern, dessen Deklination und Rektascension δ und α bekannt sind, angemessen, und eine Höhe bestimmt worden ($= h$). Wie kann man daraus die Sternzeit der Beobachtung finden?

11. Von dem unbekannten Punkte P aus sind zwei bekannten Punkte A und B anvisirt worden, und zwar ist der Horizontalwinkel zwischen beiden Visuren, und sind die beiden Höhenwinkel gemessen. Man sucht nun die Horizontaldistanzen und Höhendifferenzen von P gegen A und B aus den bekannten Winkeln und der bekannten Höhendifferenz und Horizontaldistanz von A und B!

12. Mittelst Differentialrechnung suche man den Fehler in der berechneten Seite c eines ebenen (oder sphärischen) Dreiecks abzuschätzen, wenn die bekannten Seiten a und b und der bekannte Winkel γ mit den Fehlern Δa, Δb, $\Delta \gamma$ behaftet waren.

13. Rio de Janeiro liegt unter $22°56'$ südlicher Breite, Capstadt unter $33°54'$ südlicher Breite. Der Bogen des grössten Kugelkreises zwischen beiden, – also die kürzeste Entfernung, – beträgt 6080 km, der Erdradius sei 6370 km. Man berechne die Längendifferenz beider Orte, und den südlichsten Punkt, den ein auf diesem kürzesten Bogen fahrendes Schiff erreichen würde!

18, VII, 1905. **Trigonometrie.** №9

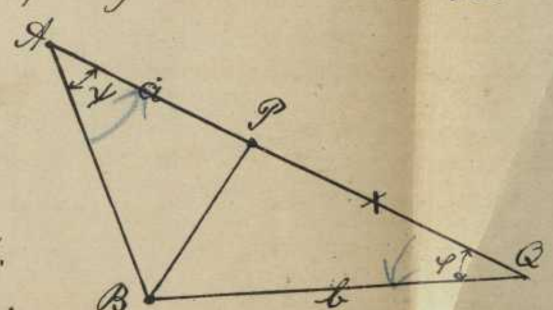
Semestralprüfung.

1. Man summire die Reihe

$$\Sigma = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots\ldots + \cos(2n-1)x$$

durch Multiplication mit $\cos 2x$!

2. Sind D, E, F die Höhenfusspunkte in Dreieck ABC, so lassen sich Seiten und Winkel des Dreiecks DEF sehr einfach durch die gegebenen Seiten und Winkel von ABC ausdrücken. Man suche diese Ausdrücke auf, und gebe weiter das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke ABC und DEF, dargestellt allein in den Winkel von ABC, an!



3. Um die unbekannte Strecke PQ, die nicht direkt messbar ist, zu finden, hat man A auf der Verlängerung von PQ, und B ausserhalb PQ abgesteckt. Gemessen wurden dann $AP = 183{,}4$ m; $BQ = 251{,}9$ m; Winkel $BAP = 34°\ 7{,}2'$, und Winkel $PQB = 28°\ 44{,}5'$.
Man berechne daraus PQ!
Wie würde sich die Rechnung gestalten, wenn statt Winkel BAP Winkel PBA gemessen wäre?

4. Im sphärischen Dreieck ABC ist Winkel γ ein Rechter; weiter soll Winkel β doppelt so gross sein als Winkel α. Endlich ist die Seite c gegeben. Man berechne die Winkel α und β!
Zahlenbeispiel: $c = 27°\ 38'\ 12''$!

1

5. New-York liegt in 40°42'45" nördlicher Breite und 73°54'15" westlicher Länge von Greenwich, Sydney unter 33°51'40" südlicher Breite und 151° 11'39" östlicher Länge von Greenwich. Unter welchem Winkel schneidet der grösste Kugelkreis der Erde durch beide Orte
a) den Meridian von New-York
b) den Aequator?

$$\cos c = \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\,\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$$

152 154

Br
tion
Som
W
der
ist, –
schn

Asi
W
Bre
1
Ster
mes
Ster
11
und
Visur
Hor
beka
von
12
neten
die
Fehl
13
südli
kürz
recht
auf

13. II. 1906 **Trigonometrie.** No 1

I Umwandlung von Bogenmass in Gradmass, und umgekehrt.

Der Winkel, der im Bogenmass [= der zugehörigen Bogenlänge des Einheitskreises, oder auch = $\frac{\text{Kreisbogen}}{\text{Kreisradius}}$] gemessen die Grösse A besitzt (kurz: der Winkel arc $= A$), ist ausgedrückt

206 2648''
3437 747'

1) in Graden gleich $A \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$; 2) in Minuten gleich $A \cdot \left(\frac{180.60}{\pi}\right)'$; 3) in Sekunden gleich $A \left(\frac{180.60.60}{\pi}\right)''$

Der Winkel, dessen Grösse im Gradmass gemessen $\alpha^\circ \beta' \gamma''$ ist, hat im Bogenmass ausgedrückt die Grösse:

$$\operatorname{arc}(\alpha^\circ \beta' \gamma'') = \alpha \cdot \frac{\pi}{180} + \beta \cdot \frac{\pi}{180.60} + \gamma \cdot \frac{\pi}{180.60.60}.$$

Zahlenwerte:

$$\pi = 3,141\,592\,65\ldots; \quad \log \pi = 0,497\,1499\ldots$$

$\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ = „Radius des Kreises in Graden" $(= \rho^\circ) = 57,29578\ldots^\circ$; $\log \frac{180}{\pi} = 1,758\,1226\ldots$

$\left(\frac{180.60}{\pi}\right)'$ = „Radius des Kreises in Minuten" $(= \rho') = 3437,747'\ldots$; $\log \frac{180.60}{\pi} = 3,5362739\ldots$

$\left(\frac{180.60.60}{\pi}\right)''$ = „Radius des Kreises in Sekunden" $(= \rho'') = 206\,264,8''\ldots$; $\log \frac{180.60.60}{\pi} = 5,3144251\ldots$

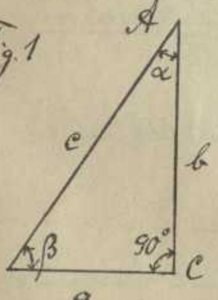
Dem Bogenmass 1 entspricht also im Gradmass: $57^\circ\, 17'\, 44,8''$.

Weiter ist: $\frac{\pi}{180} = 0,017\,453\,29\ldots$; $\frac{\pi}{180.60} = 0,000\,290\,89\ldots$; $\frac{\pi}{180.60.60} = 0,000\,004\,85\ldots$

II. Die trigonometrischen Funktionen.

1. Definition für spitze Winkel am rechtwinkligen Dreieck.

Fig. 1



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}; \quad \sec\alpha = \frac{c}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}; \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}; \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}.$$ [„Cofunktionen"]

Daraus folgt:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = 1; \quad \sin\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1; \quad \sec\alpha \cdot \cos\alpha = 1$$

Ferner $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Der pythagoräische Lehrsatz liefert die Relationen:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad \sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha; \quad \operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha.$$

Tabelle für den Zusammenhang der trigonometrischen Funktionen.

Es ist:	dargestellt durch: $\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\,\alpha$	$cotg\,\alpha$	$\sec\alpha$	$cosec\,\alpha$
$\sin\alpha =$		$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+cotg^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\frac{1}{cosec\,\alpha}$
$\cos\alpha =$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$\frac{cotg\,\alpha}{\sqrt{1+cotg^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sec\alpha}$	$\frac{\sqrt{cosec^2\alpha-1}}{cosec\,\alpha}$
$tg\,\alpha =$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\frac{1}{cotg\,\alpha}$	$\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\frac{1}{\sqrt{cosec^2\alpha-1}}$
$cotg\,\alpha =$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{tg\,\alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\sqrt{cosec^2\alpha-1}$
$\sec\alpha =$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\sqrt{1+tg^2\alpha}$	$\frac{\sqrt{1+cotg^2\alpha}}{cotg\,\alpha}$		$\frac{cosec\,\alpha}{\sqrt{cosec^2\alpha-1}}$
$cosec\,\alpha =$	$\frac{1}{\sin\alpha}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1+tg^2\alpha}}{tg\,\alpha}$	$\sqrt{1+cotg^2\alpha}$	$\frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	

Zwischen den trigonometrischen Funktionen des Winkels α und denen seines Complementwinkels $\beta = 90^\circ - \alpha$ (Fig. 1) bestehen die Beziehungen:

Cofunktion α = Funktion complementi $\alpha = f(\beta)$; $f(\alpha) = cof(90^\circ - \alpha) = cof(\beta)$

Setzt man $\alpha = 45^\circ + \lambda$, also $\beta = 45^\circ - \lambda$, so erhält man:

$f(45^\circ + \lambda) = cof(45^\circ - \lambda)$; $cof(45^\circ + \lambda) = f(45^\circ - \lambda)$.

2. Allgemein giltige Definition der trigonometrischen Funktionen mit Hilfe der analytischen Geometrie.

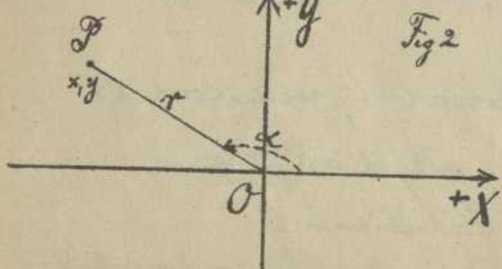


Fig 2

Giltig auch für Winkel über 360° und für negative Winkel.

Ein Winkel $\overset{+}{X}OP$ im selben Drehsinn wie $\overset{+}{X}O\overset{+}{Y} = +90^\circ$ gemessen (nämlich im umgekehrten Drehsinn des Uhrzeigers) ist positiv $= +\alpha$ zu zählen, ein im umgekehrten

Drehsinn gegen $\overset{+}{x}O\overset{+}{y}$ überstrichener Winkel von der Absolutgrösse α wird als $-\alpha$ bezeichnet.

Es wird definirt: $\sin\alpha = \frac{y}{r}$; $tg\,\alpha = \frac{y}{x}$; $\sec\alpha = \frac{r}{x}$.

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$; $cotg\,\alpha = \frac{x}{y}$; $cosec\,\alpha = \frac{r}{y}$.

Dabei sind x und y die Coordinaten eines beliebigen auf dem zweiten Schenkel des Winkels α (dem Halbstrahl durch O) angenommenen Punktes P, mit ihren gemäss den Regeln der analytischen Geometrie gewählten Vorzeichen; r ist der positive Wert $+\sqrt{x^2+y^2}$, also die absolute Länge von OP.

Die unter II, 1 angegebenen Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen gelten nun auch allgemein für beliebige, nicht spitze Winkel.

Die Wahl der Vorzeichen der Wurzeln in der Tabelle ist jedesmal gemäss den Bemerkungen der nächsten Seite zu treffen.

Weiter erhalten wir noch die Beziehungen:

$\sin(360^\circ+\alpha) = \sin\alpha$; $\sin(180^\circ+\alpha) = -\sin\alpha$; $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha = \sin(360^\circ-\alpha)$; $\sin(180^\circ-\alpha) = \sin\alpha$

$\cos(360^\circ+\alpha) = \cos\alpha$; $\cos(180^\circ+\alpha) = -\cos\alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha = \cos(360^\circ-\alpha)$; $\cos(180^\circ-\alpha) = -\cos\alpha$

$tg(360^\circ+\alpha) = tg\,\alpha$; $tg(180^\circ+\alpha) = tg\,\alpha$; $tg(-\alpha) = -tg\,\alpha = tg(360^\circ-\alpha)$; $tg(180^\circ-\alpha) = -tg\,\alpha$.

$\cos 270^\circ - \alpha =$

Ausserdem: $\sin(90^\circ+\alpha) = \cos\alpha$; $\cos(90^\circ+\alpha) = -\sin\alpha$; $tg(90^\circ+\alpha) = -cotg\,\alpha$.

Die obigen Gleichungen gestatten, die trig. Funktionen eines beliebigen Winkels auf die eines spitzen Winkels zurückzuführen. Sämmtliche trig. Funktionen besitzen die Periode 360° (oder 2π); Tangens und Cotangens aber sogar auch die Periode 180° (oder π).

Verlauf der Funktionswerte von $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ und $tg\,\alpha$, wenn α von 0° bis 360° zunimmt.

α nimmt zu	von 0° bis 90°	von 90° bis 180°	von 180° bis 270°	von 270° bis 360°
$\sin\alpha$	nimmt zu von 0 bis 1	nimmt ab von 1 bis 0	nimmt ab von 0 bis −1	nimmt zu von −1 bis 0
$\cos\alpha$	nimmt ab von 1 bis 0	nimmt ab von 0 bis −1	nimmt zu von −1 bis 0	nimmt zu von 0 bis 1
$tg\,\alpha$	nimmt zu von 0 bis $+\infty$	nimmt zu von $-\infty$ bis 0	nimmt zu von 0 bis $+\infty$	nimmt zu von $-\infty$ bis 0

Demnach macht $tg\,\alpha$ bei $\alpha = 90^\circ\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und somit auch bei $\alpha = 270^\circ\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ einen Sprung von $+\infty$ zu $-\infty$, nimmt aber sonst beständig mit α zu.

Das Vorzeichen ist für den

Sinus: positiv im I und II, negativ im III und IV ten Quadranten;
Cosinus: positiv im I und IV, negativ im II und III ten Quadranten;
Tangens und Cotang.: positiv im I und III, negativ im II und IV ten Quadranten.

Für die Aufsuchung von trigonometrischen Funktionen von Winkeln α über 90° gilt die Regel:

1). Der Quadrant, in dem α liegt, bestimmt nach dem Vorigen das Vorzeichen.

2) Ist β der Überschuss von α über das nächst kleinere Vielfache $n \cdot 90^\circ$ von 90°, und n eine $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{gerade}}{\text{ungerade}}$ Zahl, so hat man die $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Funktion}}{\text{Cofunktion}}$ von β aufzuschlagen.

Ferner ist zu merken: Durch den Wert einer trigonometrischen Funktion ist der zugehörige Winkel bis auf Vielfaches von 360° zweideutig bestimmt. Durch eine trig. Funktion, und das Vorzeichen einer anderen (nicht reciproken) ist der Winkel bis auf Vielfaches von 360° eindeutig bestimmt.

Bei Winkeln, die positiv und kleiner als 180° sind, (z. B. Dreieckswinkeln) ist die Bestimmung durch cos oder tg. eindeutig, durch sin. zweideutig.

Aufgaben.

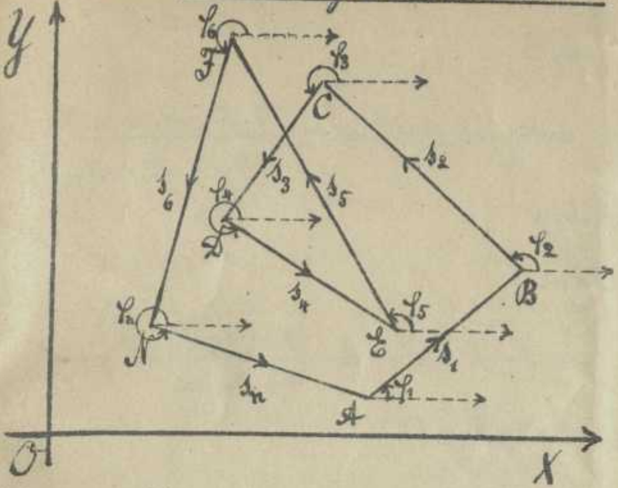
1. Man schlage: $tg\,(0{,}35527)$; $\log\cos(5{,}894)$; $\log\sin(-11)$ auf, wo die Winkel in Bogenmasse gegeben sind. Weiter bestimme man im Bogenmass die Grösse des Winkels, dessen sec gleich -3 ist!

2. Man suche einen Winkel, dessen sin und cos addirt die Summe 0,5 ergeben!

3. Die Winkelmessungen bei einem Messinstrument seien auf $\pm 25''$ mittleren Fehler veranschlagt. Welche Höhenunsicherheit kommt dadurch in die Messung der Höhe von Punkt H, wenn dieser Punkt von A aus unter dem Höhenwinkel $37'12''$ anvisirt ist, und die Horizontaldistanz AH gleich 417,72 m ist. Man wiederhole die Rechnung mit $69^\circ 58' 20''$ und 205,18 m. Wenn weiter die Distanzen den Fehler ± 12 cm enthalten, welcher Fehler folgt dann für die Höhen?

20. XI. 1906 **Trigonometrie.** No 2

I. Der Projektionssatz.



1. Sind $s_1, s_2, s_3 \dots s_n$ die absoluten Längen der Seiten $AB, BC, CD \dots NA$ eines geschlossenen ebenen oder räumlichen Polygons, und sind $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_n$ die Winkel, welche die Richtungen der Seiten $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD} \dots \overrightarrow{NA}$ in ihrer Folge beim Umlaufen des Polygons gegen eine beliebig fest gegebene Richtung $\overrightarrow{OX}$ bilden, so gilt:

$$s_1 \cdot \cos\varphi_1 + s_2 \cdot \cos\varphi_2 + s_3 \cdot \cos\varphi_3 + \dots + s_n \cdot \cos\varphi_n = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} s_\lambda \cdot \cos\varphi_\lambda = 0$$

Die algebraische Summe der Projektionen aller Seiten auf OX ist Null.

Umgekehrt gilt: Ein ebener resp. räumlicher polygonaler Zug ist ein geschlossenes Polygon, wenn die Projektionsgleichung in bezug auf 2 Richtungen $\overrightarrow{OX}$ und $\overrightarrow{OX'}$ der Ebene, resp. auf 3 Richtungen des Raumes, die nicht in einer Ebene liegen, erfüllt ist. Es liefert also der Projektionssatz für ebene Polygone nur 2, für räumliche nur 3 wesentlich verschiedene (d.h. von einander unabhängige) Relationen.

Für ein ebenes Polygon in bezug auf die Richtung $\overrightarrow{OY}$ senkrecht zu $\overrightarrow{OX}$ angewendet nimmt der Projektionssatz die Form an:

$$s_1 \cdot \sin\varphi_1 + s_2 \cdot \sin\varphi_2 + s_3 \cdot \sin\varphi_3 + \dots + s_n \cdot \sin\varphi_n = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} s_\lambda \cdot \sin\varphi_\lambda = 0$$

2. Sind $\alpha, \beta, \gamma \dots \nu$ die Innenwinkel des geschlossenen ebenen Polygons $ABC \dots N$, ist also Winkel $\alpha = \sphericalangle BAN$ der Winkel, um den $\overrightarrow{AB}$ gedreht werden muss (im umgekehrten Uhrzeigersinne), um in die Lage AN zu kommen, so kann man dem Projektionssatze die beiden verschiedenen Formen geben:

$$s_n - s_1 \cdot \cos\alpha + s_2 \cdot \cos(\alpha+\beta) - s_3 \cdot \cos(\alpha+\beta+\gamma) + - \dots = 0$$

$$s_1 \cdot \sin\alpha - s_2 \cdot \sin(\alpha+\beta) + s_3 \cdot \sin(\alpha+\beta+\gamma) - + \dots = 0$$

II. Die Additionssätze der trigonometrischen Funktionen.

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha . \cos\beta \pm \cos\alpha . \sin\beta$;

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha . \cos\beta \mp \sin\alpha . \sin\beta$;

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta} \quad ; \quad \operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = -\left(\frac{1 \mp \operatorname{cotg}\alpha . \operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta}\right).$$

Speziell für $\alpha = \beta$ ergibt sich daraus:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha . \cos\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} ;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} ;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} ; \quad \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{cotg}\alpha}.$$

Die sämmtlichen trigonometrischen Funktionen eines Winkels lassen sich also durch den Tangens des halben Winkels **rational** ausdrücken.

Weiter sind umgekehrt die Funktionen des Winkels α durch die des Winkels 2α ausgedrückt:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} ; \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} ; \quad \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}.$$

Endlich sind noch die Formeln zu merken:

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} . \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. 27 III

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} . \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$. 4 IV

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} . \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. 11 V

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} . \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$. 18 VI

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha . \cos\beta}.$$

$$\operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha . \sin\beta}.$$

Aufgaben.

1. Um $\sin 1^\circ$ und $\cos 1^\circ$ zu berechnen, suchte man bis ins 17te Jahrhundert zuerst $\sin 15^\circ$ und $\cos 15^\circ$ durch Halbierung von 30° aus $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, dann $\sin 3^\circ$ und $\cos 3^\circ$ als $\sin(18^\circ - 15^\circ)$ und $\cos(18^\circ - 15^\circ)$. Weiter durch Halbierung $\sin 1\frac{1}{2}^\circ$ und $\sin \frac{3}{4}^\circ$. Da nun für $\kappa > \lambda$ $\frac{\sin\kappa}{\sin\lambda} < \frac{\kappa}{\lambda}$ ist, folgt
$\frac{4}{3}\cdot\sin\frac{3}{4}^\circ > \sin 1^\circ > \frac{2}{3}\sin 1\frac{1}{2}^\circ$, womit $\sin 1^\circ$ in enge Grenzen eingeschlossen und auf 6 Decimalen bestimmt ist. Man führe die (allerdings weitläufige) Rechnung durch!

2. Mit Hilfe der trigonometrischen Tabellen löse man angenähert die Gleichung $\sin x + \cos x = \operatorname{tg} x$!

3. Man drücke: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$ durch die tg der einzelnen Winkel aus, und suche aus den Resultaten die Formel für den tg der Summe von n Winkeln zu erraten, und durch Schluss von n auf $n+1$ zu beweisen!
Welche Formeln ergeben sich speziell für $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \dots$, also für $\operatorname{tg} 2\varphi$, $\operatorname{tg} 3\varphi$, $\operatorname{tg} 4\varphi$ usw. durch $\operatorname{tg}\varphi$ ausgedrückt?
Man zeige nun, dass z. B.: $2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}$ ist, weiter $4 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$; endlich, wie man zu einer gegebenen Zahl a eine zweite x so finden kann, dass $n \operatorname{arc\,tg}(a) + \operatorname{arc\,tg}(x) = \frac{\pi}{4}$ ist!

4. Man beweise:

$$\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(45^\circ+\alpha);\quad \frac{\cos\alpha}{1\mp\sin\alpha} = \operatorname{tg}\left(45^\circ \pm \frac{\alpha}{2}\right);\quad \operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{cotg}2\alpha.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha+\cos\beta};\quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}.$$

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin(\beta+\gamma) + \sin(\gamma+\alpha) + \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha+\beta+\gamma) =$$
$$= 8\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

5. Man berechne $\operatorname{tg} 15^\circ$ und $\operatorname{cotg} 15^\circ$ aus $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, und beweise, dass $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{cotg} 15^\circ = 4$ ist!

6. Man berechne x aus der Gleichung:

a) $\arcsin x + \arcsin\left(2x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$;

b) $\arccos x + \arccos\left(\frac{5}{4}x\right) + \arccos\left(\frac{6}{4}x\right) = \frac{\pi}{2}$.

7. Man drücke

a) $\sin(2 \arccos x)$

b) $\operatorname{tg}\left[\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{2}\right]$

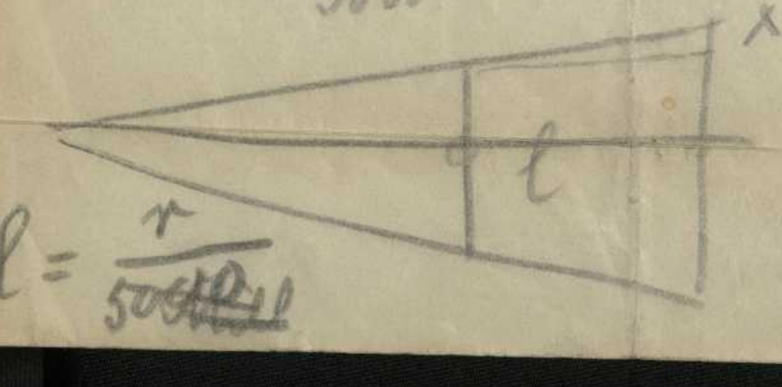
} algebraisch in x aus!

8. Man zeige, wie aus 5 $(2n-3)$ gegebenen Seiten und Winkeln eines ebenen Vierecks (n Ecks) die 3 übrigen mit Hilfe des Projektionssatzes berechnet werden können. Dabei sind die verschiedenen möglichen Fälle der gegebenen Stücke zu unterscheiden!

9. Im Fünfeck $ABCDE$ sind Seite $AB = 382{,}5$; $BC = 416{,}3$; $CD = 508{,}6$; $DE = 340{,}1$ gegeben, ferner die Innenwinkel $B = 46°\,7{,}4'$; $C = 120°\,2{,}2'$; $D = 132°\,47{,}7'$. Man berechne die fehlenden Stücke!

10. Ein vom leuchtenden Punkte P ausgehendes Strahlenbündel wird in der Entfernung von r bis $r+l$ von P als paralleles Strahlenbündel behandelt. Wenn die dort gemessene Breite des Parallelbündel λ mm beträgt, und die Messgenauigkeit $\frac{1}{500}$ mm unsicher lässt, wie gross muss dann bei gegebenem l und λ r mindestens sein, damit der Fehler der Annahme der Parallelität innerhalb der Messfehler bleibt? Mit anderen Worten: Wann sind wir berechtigt, ein Strahlbündel mit Centrum im Endlichen physikalisch als Parallelbündel zu betrachten?

Erde Sonne $= \frac{150\,000\,000 \text{ km}}{5000} = 30000$ km $\qquad \frac{x/2}{\lambda/2} = \frac{r+l}{r}$



$rx = l\lambda = \frac{r}{5000}$

$l = \frac{r}{5000\lambda}$

$\lambda = ~~10~~\ 1000$ mm

27. XI. 1906.

Trigonometrie.

№ 3

I Der Satz von Moivre.

$$\cos n\varphi \pm i \sin n\varphi = [\cos\varphi \pm i \sin\varphi]^n \qquad \text{wo } i = \sqrt[2]{-1}.$$

Diese Formel berechtigt zur Einführung der Bezeichnung

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad ; \quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi .$$

Dabei ist $e = 2{,}7182818\ldots$ die Basis des natürlichen Logarithmensystems.

Es folgt nun die Darstellung:

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left[e^{+i\varphi} - e^{-i\varphi}\right]; \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\left[e^{+i\varphi} + e^{-i\varphi}\right]; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{+i\varphi} - e^{-i\varphi}}{e^{+i\varphi} + e^{-i\varphi}}.$$

Weiter erhält man:

$$\cos n\varphi = (\cos\varphi)^n - \frac{n(n-1)}{1.2}(\cos\varphi)^{n-2}\cdot(\sin\varphi)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(\cos\varphi)^{n-4}\cdot(\sin\varphi)^4 - + \ldots$$

$$\sin n\varphi = \frac{n}{1}(\cos\varphi)^{n-1}\cdot(\sin\varphi) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(\cos\varphi)^{n-3}\cdot(\sin\varphi)^3 + - \ldots$$

Giltig bei ganzem positivem n für jeden Winkel φ, sonst nur für $\varphi < 45^\circ$; – so lange eben die Reihen convergiren.

II. Auflösung der trigonometrischen Gleichung

$$a.\cos x + b.\sin x = c .$$

Sie erfolgt durch Division mit $+\sqrt[2]{a^2+b^2}$, und Einführung des „Hilfswinkels" φ, für den

$$\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b} \quad \text{ist.}$$

Man berechnet also φ aus $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}$, und wählt φ zwischen 0° und 180°, oder zwischen 180° und 360°, je nachdem a positiv oder negativ ist.

Dann ist $(\varphi + x)$, und somit x aus

$$\sin(\varphi + x) = \frac{c.\sin\varphi}{a} \quad \left(\text{oder} = \frac{c.\cos\varphi}{b}\right) \quad \text{berechenbar.}$$

<u>Zwei</u> Lösungen: $\varphi + x = \vartheta$, $\varphi + x = 180^\circ - \vartheta$; also $x = \vartheta - \varphi$ oder $x = 180^\circ - \vartheta - \varphi$.

Aufgaben.

1. Man zeige, dass wenn

a) α β γ Winkel eines Dreiecks sind

1 $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$; $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$ ist,

b) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Winkel eines (nicht überschlagenen) Vierecks sind

2 $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha+\gamma) \cdot \sin(\alpha+\delta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \cdot \cos\delta}$ ist.

2. Man berechne die sämmtlichen fünften Wurzeln der Zahl -3!

3. Man berechne den Winkel x aus der Gleichung:

4 $17{,}245 \cos x - 8{,}661 \sin x = 14{,}288$!

4. Der Ausdruck

3 $\sin(\alpha+\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\beta-\gamma) + \sin(\alpha-\beta+\gamma) + \sin(+\alpha-\beta-\gamma)$, wo α, β, γ beliebige Winkel sind, soll auf logarithmirbare Form gebracht werden.

5. Man berechne x und y aus

5 $4{,}1787 \cos x + 1{,}8522 \cos y = 4{,}5199$

$x + y = 67^\circ 12' 58''$

6 6. Es ist x und y aus

$\sin(x+y) = a+b$, und $a \operatorname{tg} \overset{y}{\cancel{x}} = b \operatorname{tg} \overset{x}{\cancel{y}}$ zu finden!

7. Man drücke $\cos 3\varphi$, $\cos 4\varphi$, $\cos 5\varphi$ ~~allein~~ in $\cos\varphi$ aus. Kann man sie rational allein in $\sin\varphi$ ausdrücken? Wie steht es mit $\sin 3\varphi$, $\sin 4\varphi$, $\sin 5\varphi$?

8. Man suche die Summe

$\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \dots + \sin(\alpha+n\beta)$ zu ermitteln!

<u>Korrektur zu Blatt 2</u>. Die Formeln unten auf der ersten Seite heissen:

$s_n - s_1\cos\alpha + s_2\cos(\alpha+\beta) - s_3\cos(\alpha+\beta+\gamma) +- \dots = 0$

$-s_1\sin\alpha + s_2\sin(\alpha+\beta) - s_3\sin(\alpha+\beta+\gamma) +- \dots = 0$

4, XII, 1906 — **Trigonometrie** — No 4

I. Lösung der <u>quadratischen Gleichung</u> $x^2+px+q=0$ durch Einführung eines Hilfswinkels.

N.B. Die Quadratwurzeln sind im Folgenden stets als positive Zahlenwerte zu wählen.

1). q ist eine negative Zahl. Man berechnet φ aus $tg\,\varphi = \frac{2}{p}\cdot\sqrt[2]{-q}$, und dann als die Wurzeln:

$$x_1 = +\sqrt[2]{-q}\cdot tg\frac{\varphi}{2} \quad ; \quad x_2 = -\sqrt[2]{-q}\cdot cotg\frac{\varphi}{2}.$$

2) q ist eine positive Zahl, und $p^2>4q$. Man berechnet φ aus $\sin\varphi = \frac{2}{p}\cdot\sqrt[2]{q}$, und hat dann als Wurzeln:

$$x_1 = -\sqrt[2]{q}\cdot tg\frac{\varphi}{2} \quad ; \quad x_2 = -\sqrt[2]{q}\cdot cotg\frac{\varphi}{2}.$$

3) q ist eine positive Zahl, und $p^2<4q$. Man berechnet φ aus $\cos\varphi = \frac{p}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{q}}$, und erhält als die beiden complexen Wurzeln:

$$x_{\frac{1}{2}} = -\sqrt[2]{q}\,(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$$

II Lösung der <u>cubischen Gleichung</u> $x^3+px+q=0$ durch trigonometrische Funktionen.

1) p und $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$ sind beide negative Zahlen. Man berechnet φ aus $\cos\varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{\left(\sqrt[2]{-\frac{p}{3}}\right)^3}$, und erhält dann die drei reellen Wurzeln als:

$$x_1 = 2\cdot\sqrt[2]{\left(-\frac{p}{3}\right)}\cdot\cos\frac{\varphi}{3} \;;\; x_2 = 2\cdot\sqrt[2]{-\frac{p}{3}}\cdot\cos\left(120^\circ+\frac{\varphi}{3}\right);\; x_3 = 2\cdot\sqrt[2]{-\frac{p}{3}}\cdot\cos\left(240^\circ+\frac{\varphi}{3}\right).$$

2). p ist eine negative, $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$ aber eine positive Zahl. Dann berechnet man φ aus

$$\sin\varphi = \frac{\left(\sqrt[2]{-\frac{p}{3}}\right)^3}{\frac{q}{2}}$$

und weiter ψ aus

$$tg\,\psi = \sqrt[3]{tg\frac{\varphi}{2}}.$$

Die einzige reelle Wurzel ist dann: $x_1 = -2\sqrt[2]{-\frac{p}{3}}\cdot cosec\,(2\psi)$;

die beiden conjugirt complexen sind: $x_{\frac{2}{3}} = 2\sqrt[2]{-\frac{p}{3}}\left[cosec(2\psi) \pm i\sqrt[2]{3}\cdot cotg(2\psi)\right]$

3) p ist eine positive Zahl (also auch $\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$). Man berechnet

φ aus $tg\,\varphi = \dfrac{\left(\sqrt[2]{\frac{p}{3}}\right)^3}{\frac{q}{2}}$, und weiter ψ aus $tg\,\psi = \sqrt[3]{tg\frac{\varphi}{2}}$.

Die einzige reelle Wurzel ist dann: $x_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot cotg(2\psi)$,

die conjugirt complexen $x_{\frac{2}{3}} = \sqrt[2]{\frac{p}{3}}\cdot\left[cotg(2\psi) \pm i\cdot\sqrt{3}\cdot cosec(2\psi)\right]$.

III Die Maskelyne sche Regel.

Zur genauen Berechnung von log sin α und log tg α, wenn α ein kleiner, in Gradmass gegebener Winkel ist, drückt man diesen Winkel in Sekunden aus, ($=\alpha''$) und hat dann:

$$\log\sin\alpha = \log\alpha'' - \log\rho'' + \tfrac{1}{3}\log\cos\alpha\ ;$$

$\rho'' = 206264{,}8''$..

$$\log tg\,\alpha = \log\alpha'' - \log\rho'' - \tfrac{2}{3}\log\cos\alpha\ .$$

$\log\rho'' = 5{,}3144251$...

Die Formeln geben bis $2\tfrac{3}{4}{}^\circ$ sieben Decimalen richtig.

Aufgaben.

1. Man bestimme die Wurzeln
a) der quadratischen Gleichung: $17{,}235x^2 + 28{,}173x = 31{,}688$
b) der cubischen Gleichungen: $x^3 \pm 4{,}71x - 1{,}822 = 0$.

2. Durch Ausrechnung von $(\cos\varphi)^n = \frac{1}{2^n}\left(e^{+i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)^n$ mittelst des binomischen Satzes stelle man $(\cos\varphi)^n$ durch eine Summe dar, deren einzelne Glieder $\cos n\varphi$, $\cos(n-2)\varphi$, $\cos(n-4)\varphi$ ... mit Zahlencoefficienten sind.

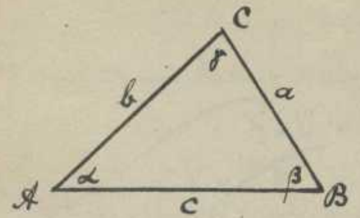
3. Man drücke den imaginären Teil von $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^7$ durch $\cos\varphi$ allein aus, und zeige daraus, dass $4\cos^2\frac{\pi}{7}$ eine Wurzel der cubischen Gleichung $x^3 - 5x^2 + 6x - 1$ ist!

4. Man berechne mit siebenstelligen Logarithmentafel $\sin 23'34{,}9''$ und $tg\,23'34{,}9''$, und zwar a) durch Interpolation von Minute zu Minute; b) durch Interpolation von $10''$ zu $10''$; c) mittelst der Regel von Maskelyne.

5. Die Winkel α und β sind gegeben. Winkel x soll so gefunden werden, dass die Tangenswerte von $x-\alpha$; x; und $x+\beta$ eine arithmetische Zahlenfolge bilden!

11, XII, 1906 **Trigonometrie.** № 5

Formeln für das schiefwinklige Dreieck.



1. **Der Sinussatz:**

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$ [= 2r, wenn r der Radius des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises ist]

Aus dem Sinussatze folgt:
$$a-b : c = \sin\frac{\alpha-\beta}{2} : \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$a+b : c = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} : \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

und weiter

2. **der Tangentialsatz:**

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

3. Als den „**Projektionssatz**" bezeichnet man die Formel:

$$c = a.\cos\beta + b.\cos\alpha$$

4. **Der Cosinussatz:**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma .$$

Umformung des Cosinussatzes zur logarithmischen Berechnung von C:

A. Man setzt $x = 2\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sqrt[2]{ab}$ und erhält

$$c = \sqrt[2]{(a+b+x)(a+b-x)} .$$

Oder B. Man führt einen Hilfswinkel, etwa durch $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sin\frac{\gamma}{2}\sqrt[2]{ab}}{a-b}$ ein, und erhält

$$c = \frac{a-b}{\cos\varphi}$$

5. **Der Halbwinkelsatz.**

Es sei $a+b+c = 2s$ gesetzt. Dann ist:

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt[2]{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} ; \quad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt[2]{\frac{s(s-c)}{ab}} ; \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt[2]{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} ;$$

daraus $\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt[2]{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

6. Die Tangentenformel:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a.\sin\gamma}{b - a.\cos\gamma} = \frac{a.\sin\beta}{c - a.\cos\beta}.$$

7. <u>Der Dreiecksinhalt</u> Δ ist:

$$\Delta = \frac{1}{2}\, ab.\sin\gamma = \frac{1}{2}c^2.\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma} = 2r^2.\sin\alpha\sin\beta.\sin\gamma$$

$$= \sqrt[2]{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{4r}. \qquad = 16r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

8. Der Radius r des dem Dreieck umschriebenen Kreises ist:

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma} \quad \text{(vergl. 1)};$$

der Radius ρ des eingeschriebenen Kreises

$$\rho = \frac{\sqrt[2]{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} = \frac{\Delta}{s} = \frac{c.\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

der Radius ρ_c des an Seite c dem Dreieck anbeschriebenen Kreises:

$$\rho_c = \frac{\Delta}{s-c} = \frac{c.\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = 4r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

<u>Aufgaben.</u>

1. Man zeige, dass $s = 4r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$; $s-c = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ ist, weiter deute man den Ausdruck $2r^2\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$ als Inhalt eines in der Figur leicht zu zeichnenden Dreiecks!
2. Man soll Winkel, Seiten, Inhalt und Kreisradien eines Dreiecks aufstellen, das für ein gegebenes Dreieck ABC
   a) Dreieck der Höhenfusspunkte ist.
   b) Dreieck der Centren der anbeschriebenen Kreise ist!
3. Im Dreieck ABC ist der Inhalt $\Delta = 80{,}55\,(\text{cm})^2$, der Winkel $\gamma = 69°\,7{,}'5$, und 1) die Seite $c = 18{,}21$ cm. 2) der Radius des eingeschriebenen Kreises $\rho = 3{,}09$ cm gegeben. Man berechne für beide Fälle die Seiten und Winkel des Dreiecks.

<u>Korrektur zu Blatt 4.</u> Bei der Maskelyne'schen Formel für $\log\operatorname{tg}\alpha$ ist an Stelle von $+\frac{2}{3}\log\cos\alpha$ $\;-\frac{2}{3}\log\cos\alpha$ zu lesen!

18, XII, 1906. **Trigonometrie.** № 6

Aufgaben

1. Man zeige, dass zwischen den Radien der einem Dreieck ein- und anbeschriebenen Kreise die Beziehung gilt:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c}$$

2. Ist Seite a und Seite c, weiter Winkel γ für ein Dreieck gegeben, so gilt für die Radien ρ_1 und ρ_2 der einbeschriebenen Kreise der beiden Lösungsdreiecke

$$\rho_1 \rho_2 = a(a-c) \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}. \qquad \text{Beweis!}$$

3. Gegeben ist ein Winkelraum MCN und ein innerhalb desselben gelegener Punkt P. Man ziehe eine Gerade durch P so, dass sie mit den Schenkeln MC und NC des gegebenen Winkels ein Dreieck ABC von gegebenem Flächeninhalt Δ bildet! Wie gross darf Δ höchstens sein? Wie gestaltet sich die Rechnung, wenn statt des Inhalts der Umfang 2s des Dreiecks ABC gegeben ist?

4. Von Dreieck ABC ist a, b und ρ gegeben. Man stelle eine Gleichung für den Winkel γ auf!

5. Man stelle den Inhalt eines Dreiecks dar:

a) durch seine drei Höhen;

b) durch seine drei Mitteltransversalen!

6. Von einem Dreieck ist der Winkel $\gamma = 50^\circ 24',4$, und der Umfang $2s = 37,225$ gegeben. Weiter soll die Fläche des Dreiecks gerade $\frac{1}{3}$ der Fläche des dem Dreieck umschriebenen Kreises betragen. Man berechne die übrigen Winkel und die Seiten des Dreiecks!

7. Im Dreieck ABC sei O der Mittelpunkt des umschriebenen,

Ω der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises; r und ρ ihre Radien. Man zeige, dass $(O\Omega)^2 = r^2 - 2\rho r$ ist!

Wie heissen die analogen Formeln für $(O\Omega_a)^2$, $(O\Omega_b)^2$, $(O\Omega_c)^2$, wenn $\Omega_a, \Omega_b, \Omega_c$ die Mittelpunkte der angeschriebenen Kreise sind?

8. Im Viereck $ABCD$ sind die Winkel $\alpha = 69^\circ 12'$, $\beta = 91^\circ 44'$, $\gamma = 105^\circ 31'$ gegeben; weiter die Seiten $AB = 19{,}255$ und $CD = 10{,}221$. Man berechne den Flächeninhalt des Vierecks nach der zu beweisenden Formel:

$$\text{Inhalt} = (AB)^2 \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)} + (CD)^2 \cdot \frac{\sin\gamma \cdot \sin\delta}{2\sin(\gamma+\delta)}\ !$$

9. Sind a, b, c, d die Seiten eines beliebigen Vierecks, ε der Winkel der Diagonalen desselben, so ist die Fläche des Vierecks:

$$\text{Fläche} = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{4}\left[(a^2+c^2)-(b^2+d^2)\right]\ !\quad \text{Beweis!}$$

10. Der Inhalt eines Sehnenvierecks ist, wenn $a+b+c+d = 2s$ abgekürzt ist $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$; der Inhalt eines Tangentenvierecks, wenn β und γ zwei Gegenwinkel sind: $\sqrt{abcd} \cdot \sin\frac{\beta+\delta}{2}$!

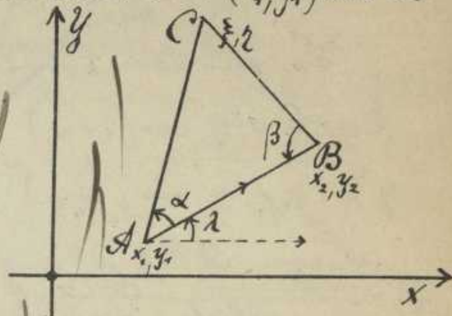
11. Ein Viereck soll zugleich ein Tangentenviereck und ein Sehnenviereck sein. Bekannt sind zwei Winkel α und β, und der Flächeninhalt F. Man berechne die Radien des umschriebenen und des eingeschriebenen Kreises! Zahlenbeispiel: $\alpha = 71^\circ 25' 12''$; $\beta = 102^\circ 7' 42''$; $F = 108{,}22\ (\text{cm})^2$.

12. Im regulären n Eck ist die Summe der Quadrate über allen Seiten und Diagonalen $n^2 r^2$, wenn r der Radius des umschriebenen Kreises ist! Beweis! Weiter teile man das n Eck durch Diagonalen von einer gegebenen Ecke aus in $(n-2)$ Teildreiecke und berechne die Summe der Radien der diesen einbeschriebenen Kreise!

15. I. 1907 **Trigonometrie** №7

Die beiden Hauptaufgaben der Kleintriangulirung.

I. Bestimmung der Coordinaten ξ, η eines Punktes C durch „**Vorwärtseinschneiden**" von den bekannten Punktes $A\,(x_1, y_1)$ und $B\,(x_2, y_2)$ aus (durch Messung der Winkel $BAC = \alpha$ und $CBA = \beta$ an den bekannten Punkten).



Ist λ der Winkel von $\overrightarrow{AB}$ gegen die positive x Axe, so ist

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad AB = c = \frac{x_2 - x_1}{\cos\lambda} = \frac{y_2 - y_1}{\sin\lambda}.$$

Der Quadrant von λ ist so zu wählen, dass $\sin\lambda$ (resp. $\cos\lambda$) das Vorzeichen von $y_2 - y_1$ (resp. $x_2 - x_1$) erhält. Alsdann ergibt sich:

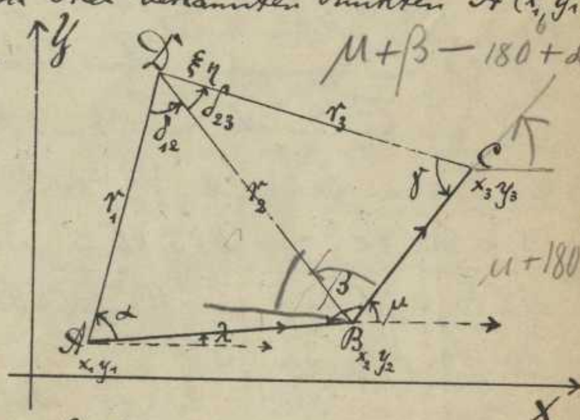
$$\xi = x_1 + \frac{c.\sin\beta.\cos(\lambda+\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)} = x_1 + \frac{(x_2 - x_1)\sin\beta.\cos(\lambda+\alpha)}{\sin(\alpha+\beta).\cos\lambda}.$$

$$\eta = y_1 + \frac{c.\sin\beta.\sin(\lambda+\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)} = y_1 + \frac{(y_2 - y_1).\sin\beta.\sin(\lambda+\alpha)}{\sin(\alpha+\beta).\sin\lambda}.$$

$+ \lambda - 180^\circ +$

II. Bestimmung der Coordinaten ξ, η eines Punktes D' durch „**Rückwärtseinschneiden**" nach den drei bekannten Punkten $A\,(x_1, y_1)$, $B\,(x_2, y_2)$ und $C\,(x_3, y_3)$ (durch Messung der Winkel $AD'B = \delta_{12}$ und $BD'C = \delta_{23}$ am zu bestimmenden Punkte D').

$\mu + \beta - 180 + \alpha +$



$\mu + 180^\circ -$

Man rechnet zunächst wieder:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad AB = \frac{x_2 - x_1}{\cos\lambda} = \frac{y_2 - y_1}{\sin\lambda}.$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}; \quad BC = \frac{x_3 - x_2}{\cos\mu} = \frac{y_3 - y_2}{\sin\mu}$$

und weiter Winkel $CBA = \beta = 180^\circ + \lambda - \mu$.

Die Berechnung des Vierecks $ABCD'$ gibt, wenn noch der Hilfswinkel φ

durch $tg\,\varphi = \frac{AB \cdot \sin\delta_{23}}{BC \cdot \sin\delta_{12}}$ eingeführt wird, die Winkel α und γ aus:

$$\frac{\alpha+\gamma}{2} = 180^\circ - \frac{\beta+\delta_{12}+\delta_{23}}{2}\ ; \text{ und } \ tg\,\frac{\alpha-\gamma}{2} = tg\,\frac{\alpha+\gamma}{2} \cdot cotg\,(45^\circ+\varphi).$$

Dann berechnen sich die Distanzen AD', BD', CD' durch:

$$r_1 = AD' = AB \cdot \frac{\sin(\alpha+\delta_{12})}{\sin\delta_{12}}\ ;\ r_3 = CD' = BC \cdot \frac{\sin(\gamma+\delta_{23})}{\sin\delta_{23}}\ ;\ r_2 = BD' = AB\,\frac{\sin\alpha}{\sin\delta_{12}} = BC\,\frac{\sin\gamma}{\sin\delta_{23}}$$

Die gesuchten Coordinaten ξ, η von D' endlich sind:

$$\xi = x_1 + r_1 \cdot \cos(\lambda+\alpha) = x_3 + r_3 \cdot \cos(180^\circ+\mu-\gamma)$$

$$\eta = y_1 + r_1 \cdot \sin(\lambda+\alpha) = y_3 + r_3 \cdot \sin(180^\circ+\mu-\gamma).$$

Liegen $ABCD'$ auf einem Kreise, so wird diese Bestimmung von D' unmöglich. Der dem Dreieck ABC der gegebenen Punkte umschriebene Kreis heisst daher der „gefährliche Kreis". Auch wenn D' nur nahezu auf diesem Kreis liegt, also nur angenähert $\beta+\delta_{12}+\delta_{23}$ gleich 180° ist, wird die Bestimmung praktisch unbrauchbar, da kleine Messfehler (etwa in δ_{12}, δ_{23}) schon grobe Fehler in den Coordinaten von D' zur Folge haben.

Aufgaben.

1. Die Coordinaten von A sind $x_1 = +463{,}22$; $y_1 = 180{,}75$ m ; die von B $x_2 = -107{,}18$; $y_2 = 312{,}54$ m. Die Winkel $BAC = 94^\circ 47{,}4'$ und $CBA = 31^\circ 8{,}8'$ sind gemessen. Man berechne die Coordinaten von C!

2. Die Coordinaten von A und B seien die vorigen. Dazu komme jetzt ein weiterer bekannter Punkt C (nicht der vorige) mit den Coordinaten $x_3 = 901{,}10$; $y_3 = 475{,}86$ m. Gemessen ist von Punkt D' aus Winkel $AD'B = 31^\circ 15{,}5'$ und Winkel $BD'C = 18^\circ 30{,}3'$. Man berechne die Coordinaten ξ, η von D'.

3. Es sei $AB = 307{,}21$; $BC = 438{,}75$ m ; Winkel $CBA = \beta = 127^\circ 35' 12''$, $AD'B = \delta_{12} = 21^\circ 5' 33''$, $BD'C = \delta_{23} = 31^\circ 42' 9''$. Man berechne AD'. Dann wiederhole man die Rechnung, indem man β oder δ_{12} um $10''$ ändere!

22, I, 1907 — **Trigonometrie.** — № 8

Sphärische Trigonometrie.

I. Sphärische Dreiecke oder Polygone sollen stets durch grösste Kugelkreise gebildet werden.

Die Normalen auf den Seitenebenen eines Dreikants (oder die Normalebenen zu den Kanten des Dreikants) ergeben ein zweites Dreikant, dessen Seitenwinkel die Supplemente der Kantenwinkel des ursprünglichen, und dessen Kantenwinkel die Supplemente der Seitenwinkel des ursprünglichen sind.

$a' = 180° - \alpha$; $b' = 180° - \beta$; $c' = 180° - \gamma$. $\alpha' = 180° - a$; $\beta' = 180° - b$; $\gamma' = 180° - c$.

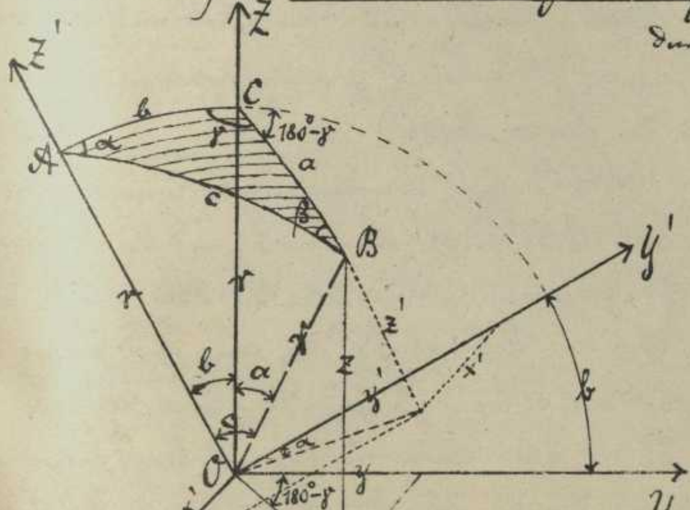
Die beiden Dreikante heissen einander als „Polar= (Supplementar) dreikante" zugeordnet.

II Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks mit den Winkeln $\alpha\ \beta\ \gamma$ ist, wenn der Kugelradius r ist:

$$F = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha° + \beta° + \gamma° - 180°}{180°} = \text{Kugelfläche} \cdot \frac{\varepsilon°}{720°} = r^2 \operatorname{arc} \varepsilon .$$

Dabei heisst $\varepsilon° = \alpha° + \beta° + \gamma° - 180°$ der „sphärische Excess" des Dreiecks.

III. Ableitung der Fundamentalformeln für das sphärische Dreieck durch Coordinatentransformation.



Vorgelegt sei das Dreieck ABC. Man wählt OC als z Axe, die Normale auf AOC als x Axe eines Coordinatensystems, und fügt die y Axe entsprechend zu. Ein zweites Coordinatensystem habe OA zur z' Axe, als x' Axe dieselbe Normale auf OAC wie früher, die y' Axe sei wieder entsprechend zugefügt.

Das System xyz wird dann durch eine Drehung vom Betrage des Winkels b um die x $(=x')$ Axe in das System $x'y'z'$ übergeführt. Die Formeln für diese Coordinatentransformation sind:

$$x = x' \quad ; \quad y = y'.\cos b - z'.\sin b \quad ; \quad z = y'.\sin b + z'\cos b.$$

Die Coordinaten des Punktes B im alten und im neuen System lassen sich (vergl. Figur) darstellen als:

$$x = r.\sin a.\sin \gamma \qquad x' = r.\sin c.\sin \alpha$$
$$y = -r.\sin a.\cos \gamma \qquad y' = r.\sin c.\cos \alpha$$
$$z = r.\cos a \qquad z' = r.\cos c$$

Setzt man dies in die Transformationsgleichungen ein, so ergeben sich die <u>Fundamentalgleichungen:</u>

$$1).\ \sin a.\sin \gamma = \sin c.\sin \alpha$$
$$2)\ -\sin a.\cos \gamma = \sin c.\cos \alpha.\cos b - \cos c.\sin b$$
$$3)\ \cos a = \sin c.\cos \alpha.\sin b + \cos c.\cos b.$$

Aufgaben.

1. Gegeben ist das Dreieck ABC, gesucht Punkt D. Es ist der Winkel $CAD = \vartheta$ gemessen. Weiter weiss man, dass AB und BC von D aus unter demselben (unbekannten) Winkel δ gesehen erscheinen. Man berechne δ! (D liegt in der Ebene ABC)

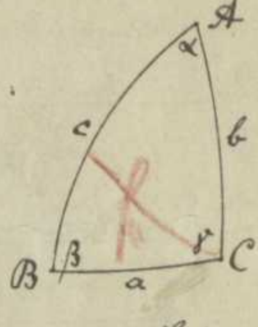
2. Das bekannte Dreieck ABC wird von dem unbekannten Punkte D aus, der ausserhalb der Ebene ABC liegt, anvisirt, und die Winkel $ADB = \gamma$, $BDC = \alpha$, $CDA = \beta$ gemessen. Man setze die Bestimmungsgleichungen für die Strecken $AD = x$, $BD = y$, $CD = z$ an, und führe die Rechnung für den Fall durch, dass α und β gerade gleich $90°$ sind!

3. Vom Punkte O aus, der 36 m über einem Seespiegel liegt, messe man den Höhenwinkel eines Wolkenrandes zu $22°$, den Höhenwinkel des Spiegelbildes im See zu $23\frac{1}{2}°$. Man berechne Höhe und Horizontaldistanz der Wolke.

29, I, 1907 **Trigonometrie.** №9

I. Formeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck.

Winkel γ sei gleich $90°$.

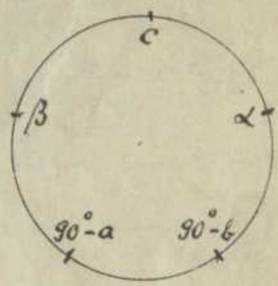


$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\text{sin der gegenüberlieg. sphärischen Kathete}}{\text{sin der sphärische Hypotenuse}}.$$

$$\cos\alpha = \frac{tg\, b}{tg\, c} \quad ; \quad tg\,\alpha = \frac{tg\, a}{\sin b}$$

Endlich ist: $\cos c = \cos a . \cos b$, eine für das recht=winklige sphärische Dreieck charakteristische Beziehung zwischen den drei Seiten, die an Stelle des pythagoräischen Satzes für die ebenen rechtwinkligen Dreiecke tritt.

Die Nepersche Merkregel für das rechtwinklige sphärische Dreieck.



Markirt man (etwa auf einem Kreise) die Stücke des rechtwinkligen Dreiecks in ihrer natürlichen Reihen=folge, jedoch so, dass man

1) den rechten Winkel γ auslässt

2) statt der beiden am rechten Winkel anliegenden Katheten a und b ihre Complemente anschreibt,

so erhält man die 10 Hauptsätze für das rechtwinklig sphärische Drei=eck in die beiden Regeln zusammengefasst:

Der Cosinus irgend einer der fünf angeschriebenen Grössen ist:

a) gleich dem Produkte der Cotangenten der beiden benachbarten Grössen

b) gleich dem Produkte der Sinus der beiden nicht benachbarten Grössen

II. Formeln für das schiefwinklige sphärische Dreieck.

(Die Seiten und Winkel des Dreiecks sind sämmtlich $< 180°$ vorausgesetzt)

1. Der Sinussatz: $\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$

2. Der Cosinussatz: $\cos c = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b . \cos\gamma$

Aufgaben.

1. Wie gross ist die Seite a) eines regulären sphärischen Dreiecks b) eines regulären sphärischen Vierecks, wenn die Fläche der Figur $\frac{1}{10}$ der Kugelfläche beträgt?

2. Man beweise, dass die sphärische Höhe h eines rechtwinklig sphärischen Dreiecks vom Scheitel des rechten Winkels aus diesen in zwei Teile γ_1 und γ_2, und die Hypotenuse in zwei Teile c_1 und c_2 so teilt, dass $\sin^2 h = \operatorname{tg} c_1 \cdot \operatorname{tg} c_2$; $\operatorname{tg}^2 a = \operatorname{tg} c \cdot \operatorname{tg} c_2$; $\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b}$ ist!

$\cos^2 h =$

3. Man gebe die Formeln für die Radien der angeschriebenen (kleinen) Kreise eines schiefwinkligen sphärischen Dreiecks an!

4. Von einem sphärischen Dreieck sind Winkel γ, und die beiden Abschnitte c_1 und c_2 gegeben, in die die von C gefällte Höhe die Seite c zerlegt. Wie berechnet man Seiten und Winkel des Dreiecks?

5. Vom sphärischen Dreieck ABC sind gegeben:
$a = 111°6'32''$; $\alpha = 112°19'42''$; $\beta = 82°18'36''$.
Man berechne b, c, γ!

6. Man berechne die Neigungswinkel der Flächen der regulären Körper (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Ikosaeder, Pentagondodekaeder) gegen einander, indem man die von ihnen an einer Körperecke gebildeten regulären Ecken (also regulären sphärischen Polygone mit bekannten Seitenwinkeln) untersucht.

$1 + \cos(\alpha+\beta) \cos(\alpha-\beta)$

$\cos^2\alpha \cos^2\beta - \sin^2\alpha \sin^2\beta$

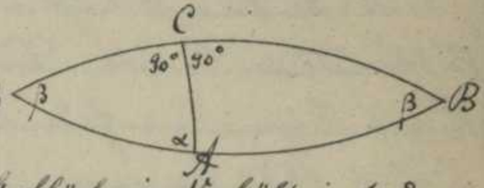
$\cancel{\cos^2\alpha \sin^2\beta + \sin^2\alpha - \sin^2}$

$\cos^2\alpha \cos^2\beta + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cos^2\beta$

5, II, 1907 **Trigonometrie.** № 10

1. Im sphärischen Dreieck ABC ist Winkel γ ein Rechter. Ferner soll Winkel β doppelt so gross sei wie Winkel α. Endlich ist die Seite c gegeben. Man berechne die Winkel α und β!
Zahlenbeispiel: $c = 27°38'12''$.

2. In einem sphärischen Zweieck vom Öffnungswinkel $\beta = 18°$ soll senkrecht zu dem einen Begrenzungskreise ein grösster Kugelkreis gelegt werden, der die Zweiecksfläche im Verhältnis 1:2 teilt. In welchem Punkte C ist derselbe zu errichten, und wie gross werden der Winkel α und der Bogen CA werden?



3. Welche Formeln gelten zwischen den Stücken eines sphärischen Dreiecks, in dem eine Seite $c = 90°$ ist? (Analogie zur Neperschen Merkregel!)

4. In einem regulären sphärischen Sechseck von der Seite a werden die Mitten je der folgenden Seiten zu einem zweiten regulären sphärischen Sechseck verbunden. In welchem Verhältnis stehen die Flächen der beiden Sechsecke zu einander? Zahlenbeispiel $a = 30°$.

5. M, der „Modul" eines sphärischen Dreiecks, ist gleich $\frac{\sin a}{\sin \alpha}$. Man beweise die Formeln:

$$\sin s = 2M \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \quad ; \quad \sin(s-c) = 2M \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

$$k = \operatorname{tg}\rho = 2M \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$$

Weiter noch $\sin s = \dfrac{\Sigma}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$.

Sodann gebe man die zu den vorgelegten Formeln polaren an!

6. Man drücke die sphärischen Höhen eines sphärischen Dreiecks durch die Winkel des Dreiecks aus!

7. Zu berechnen ist ein sphärisches Dreieck aus $\alpha = 80^\circ 45' 20''$; $\beta = 69^\circ 12' 40''$; $\gamma = 44^\circ 22' 10''$.

8. In den beiden Dreiecken, die sich aus gegebenem a, b, α ergeben können, gilt für die dritten Seiten c_1 resp. c_2 die Beziehung:

$$\operatorname{tg}\frac{c_1}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{c_2}{2} = \operatorname{tg}\frac{b-a}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{b+a}{2}$$. Beweis!

9. Rio de Janeiro liegt unter $22^\circ 56'$ südlicher Breite, Capstadt unter $33^\circ 54'$ südlicher Breite. Der Bogen des grössten Kugelkreises – also ihre kürzeste Entfernung auf der Erdkugel – betrage 6080 km; der Erdradius sei gleich 6370 km angenommen. Man berechne die Längendifferenz beider Orte, und den südlichsten Punkt, den ein auf diesem kürzesten Bogen fahrendes Schiff erreichen würde!

10. Ist auf der Kugel ein kleiner Kreis, und (nicht auf diesem Kreise) ein Punkt A gegeben, so ist für alle durch A gelegten grössten Kugelkreise das Produkt $\operatorname{tg}\frac{AX}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{AY}{2}$ constant, – wo X und Y die Schnittpunkte je des betreffenden grössten Kreises mit dem gegebenen kleinen Kreise bedeuten! Beweis!

11. Schneidet ein grösster Kugelkreis die Seiten AB, BC, CA des sphärischen Dreiecks ABC in N, L, M, so gilt die Beziehung:

$$\frac{\sin(AN) \cdot \sin(BL) \cdot \sin(CM)}{\sin(NB) \cdot \sin(LC) \cdot \sin(MA)} = -1$$. Beweis!

12. Die sphärische Distanz der Mittelpunkte O und Ω des umschriebenen und des eingeschriebenen Kreises eines sphärischen Dreiecks ist gegeben durch

$$\sin^2(O\Omega) = \sin^2(r-\rho) - \cos^2 r \cdot \sin^2\rho$$!

12, II, 1907 **Trigonometrie.** № 11

I. Der Satz von Legendre.

Ist auf einer Kugel vom Radius r ein sphärisches Dreieck mit kleinen Seiten (praktisch a, b, c kleiner etwa als 2°) vorgelegt, und berechnet man statt dessen ein ebenes Dreieck mit den Seitenlängen $r.\mathrm{arc}\,a$, $r.\mathrm{arc}\,b$, $r.\mathrm{arc}\,c$ – die also gleich den Bogenlängen der Seiten des sphärischen Dreiecks sind –, so ergeben sich die Winkel des ebenen Dreiecks sehr genau (bis auf Grössen vierter Ordnung) gleich den je um ein Drittel des sphärischen Excesses verkleinerten Winkeln des sphärischen Dreiecks.

Kennt man also den Excess eines solchen sphärischen Dreiecks, den man z.B. bei geodätischen Messungen aus der Dreiecksfläche leicht sehr genau abschätzen kann, und verteilt ihn gleichmässig auf die drei Winkel, so kann man nun das Dreieck mit den so verkleinerten Winkeln als ebenes berechnen, und es geben dann die Seitenlängen des ebenen Dreiecks zugleich sehr genau die Bogenlängen der Seiten des sphärischen Dreiecks.

II Die Formeln der ebenen Trigonometrie ergeben sich aus denen der sphärischen, wenn der Kugelradius r unbeschränkt wachsend, die Dreiecksseiten a, b, c aber zugleich so abnehmend gedacht werden, dass $r.\mathrm{arc}\,a$, $r.\mathrm{arc}\,b$, $r.\mathrm{arc}\,c$ endliche Grösse behalten.

III. Differentialformeln für das ebene und das sphärische Dreieck.

Sind die gegebenen Stücke eines Dreiecks mit Unsicherheiten behaftet, und will man die daraus entspringende Unsicherheit der berechneten Stücke finden, so hat man die Differentiale der letzteren durch die Differentiale der ersteren als der unabhängigen Variabl[en] ausgedrückt aufzustellen.

Ist z. B. Seite a und b, sowie Winkel γ gegeben, und zwar mit de[n] Fehler (Δa), (Δb) – in der gewählten Längeneinheit ausgedrückt – sowie $(\Delta\gamma)$ – in Sekunden ausgedrückt – behaftet, so folgt aus dem Co[si]nussatze

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

der v (Δc) von c – in der Längeneinheit ausgedrückt

$$(\Delta c) = \frac{a - b\cos\gamma}{c}(\Delta a) + \frac{b - a\cos\gamma}{c}(\Delta b) + \frac{ab\sin\gamma}{c}\cdot\frac{(\Delta\gamma)}{\rho''} .$$

Dabei ist $\rho'' = 206\,264{,}''8$; $\log\rho'' = 5{,}314\,4251 \ldots$ (cf. Blatt 1)

Die für unendlich kleine Differentiale exakten Formeln gelten mit praktisch stets genügender Genauigkeit auch für die vorkommenden kleinen endlichen Unsicherheiten.

Aufgaben.

1. Auf der Erdkugel (Erdradius zu 6370 km angenommen) ist bei einem geodätischen Dreieck Seite $c = 77\,404{,}25$ m ; Winkel $\gamma = 54^\circ\, 47'\, 3{,}''5$ und Winkel $\alpha = 64^\circ\, 21'\, 38{,}''6$ gemessen. Man berechne unter Anwendung des Legendreschen Satzes die anderen Seitenlängen! (Siebenstellige Logarithmen nötig!)

2. Wenn in einem sphärischen Dreieck c und γ fest gegeben sind, a aber eine kleine Änderung (Δa) erfährt, sollen die entsprechenden daraus folgenden Änderungen der anderen Stücke, – auch der Dreiecksfläche, – angegeben werden!

3. Welche Formeln der ebenen Trigonometrie ergeben sich a) aus dem Cotangentensatze ; b) aus den Délambreschen Gleichungen. c) aus der Formel $\mathrm{cotg}\, r = K$ der sphärischen Trigonometrie?

26, II, 1907 **Trigonometrie.** № 13.

Aufgaben.

1. Man leite für den sphärischen Excess ε aus der Formel von L'Huilier die Formel von Cagnoli

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sqrt{\sin s \cdot \sin(s-a) \cdot \sin(s-b) \sin(s-c)}}{2\cos\frac{a}{2} \cdot \cos\frac{b}{2} \cdot \cos\frac{c}{2}}$$

ab!

2. Aus $\sin\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma \cdot \cos(\sigma-\gamma)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}}$ soll durch Übergang zur ebenen Trigonometrie die Formel für den Flächeninhalt des ebenen Dreiecks

$$\Delta = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$

hergeleitet werden!

3. Die durch die beiden Punkte A und A' auf der Erde und den Erdmittelpunkt gelegte Ebene bildet mit den Meridianebenen von A und A' die Winkel (Azimute) α und α'. Wenn die Breite von A φ ist, die Längendifferenz von A und A' Δl, soll die Differenz $\alpha' - \alpha = \Delta\alpha$ durch α, φ und Δl dargestellt werden!

4. Wie lange dauert der kürzeste Tag des Jahres in München (geograph. Breite $48° 8',8$)? Dabei ist für den Tag die grösste negative Deklination der Sonne anzunehmen. In welcher Himmelsrichtung geht an diesem Tage die Sonne auf?

Wenn noch die Refraktion beim Sonnenaufgang und Untergang eine scheinbare Vermehrung der Sonnenhöhe um 34' zur Folge hat, und der Sonnenhalbmesser gleich 16' zu setzen ist, um wieviel ändern sich dann die berechnete Zeit und Richtung für den oberen Sonnenrand?

5. In München (dessen Polhöhe in 4 gegeben ist) sei der gerade nach Nordwest fallende Schatten eines 54,3 m hohen Turmes gleich 81,7 m gefun=

den. Man berechne den Stundenwinkel und die Deklination der Sonne.

6. Aus drei auf derselben Seite des Meridians beobachteten Höhen h_1, h_2, h_3 eines und desselben Sternes, und den beobachteten beiden Unterschieden der Azimute α_{12} und α_{23} soll die Deklination des Sternes, die geographische Breite des Ortes, und die Lage des Meridians gefunden werden.

Zahlenbeispiel: $h_1 = 25°42'$; $h_2 = 42°12'$; $h_3 = 50°10'$; $\alpha_{12} = 30°24'$; $\alpha_{23} = 26°$

7. An einem Orte von der Polhöhe φ ist die Höhe h eines durch sei- Deklination δ und Rektascension α gegebenen Sternes gemessen worden. Wie findet man daraus die Sternzeit der Beobachtung?

8. Zwei Sterne Σ_1 und Σ_2 gehen an einem Orte mit der Polhöhe φ = $42°30'$ gleichzeitig auf, und zwar in den „Morgenweiten" $w_1 = 70°4$ und $w_2 = 40°20'$. Weiter hat Σ_1 die Breite β = Null. Man berechne die Länge von Σ_1 und die Länge und Breite von Σ_2.

9. Man suche die Richtung einer Strasse in München, die am 21 Aug um 9 Uhr vormittags ganz schattenlos ist. (Berechnung der Sonnendekl tion an diesen Tage angenähert unter Voraussetzung gleichmässiger Län- änderung der Sonne im Jahre.)

...III, 1907.

Trigonometrie.

14

Semestralprüfung.

1. Man berechne x aus der trigonometrischen Gleichung:

$$4\sin x - 5\cos x = 2$$

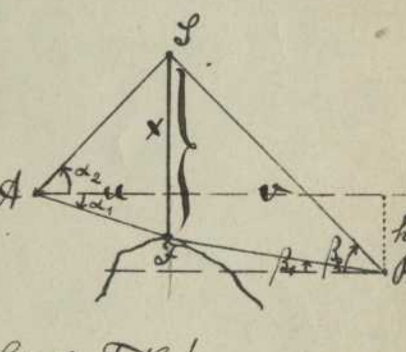
2. Vom Dreieck ABC sind gegeben der Winkel $\gamma = 60^\circ$, die Höhe ...$= 2$, und das Produkt der drei Seiten $abc = M = 15$. Man berechne ... anderen beiden Winkel des Dreiecks!

3. Man beweise durch trigonometrische Umformung, dass, wenn ...$= \frac{a+b+c}{2}$ abgekürzt ist,

$$4\sin s.\sin(s-a).\sin(s-b).\sin(s-c) = 1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c$$

...t!

4. Fusspunkt und Spitze einer verticalen Säule werden von den Punkten A und B aus ...gezielt, und die Höhenwinkel $\alpha_1 = -7^\circ 12'$ und ...$= 18^\circ 56'$, resp. $\beta_1 = 0^\circ 45'$ und $\beta_2 = 16^\circ 8'$ gemessen. Weiter weiss man, dass A um $h = 12$ m höher ...ls B gelegen ist. Man suche die Höhe der Säule FS!



5. Ein gleichseitiges sphärisches Dreieck und sein Polardreieck sollen ...sammen gerade $\frac{1}{3}$ der Kugelfläche bedecken. Man bestimme daraus ...e Seite a und den Winkel α des Dreiecks! [Dabei soll die Beziehung ...$\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{a}{2} = 1$ zwischen Seite und Winkel jedes gleichseitigen sphär...chen Dreiecks als bekannt angenommen werden.]

[.]V, 1907.

Trigonometrie.

No 15

Aufgaben.

1. Man zeige, dass

$$\cos(\alpha+\gamma)\cdot\cos(\beta+\gamma) = \sin\alpha\cdot\sin\beta + \cos\gamma\cdot\cos(\alpha+\beta+\gamma) \text{ ist!}$$

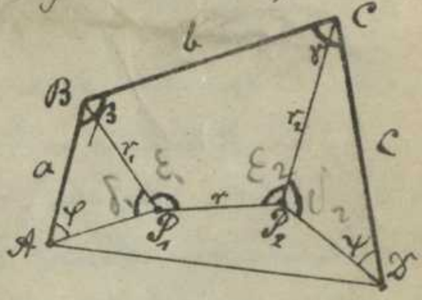
2. Wie lang ist das Bogenstück, das von der Peripherie eines Kreises m Radius 1 übrig bleibt, wenn man 7 Mal je die halbe Seite des em Kreise eingeschriebenen regulären Dreiecks fortlaufend als Sehne inträgt?

3. Von einem Trapez sind gegeben: Die Differenz der beiden paral=len Seiten $a-c$, eine der anderen Seiten b, und die beiden Diago=alen des Trapezes. Wie berechnen sich die anderen Stücke des Trapezes?

Wie aber gestaltet sich die Lösung, wenn statt der Differenz der arallelen Seiten deren Summe $a+c$ gegeben ist?

Zahlenbeispiel: $a+c = 14$ cm, $b = 5$ cm, Diagonalen 9 resp. 8 cm.

4. Von den unbekannten Punkten P_1 und P_2 s ist rückwärts eingeschnitten worden, und ar von P_1 aus nach P_2, und den bekannten nkten A und B, von P_2 aus nach P_1 und den ekannten Punkten C und D. Man zeige, wie sich araus etwa $BP_1 = r_1$, $CP_2 = r_2$, und $P_1P_2 = r$ berechnen lassen. Die bekannten ücke sind stark bezeichnet. Man berechne zunächst die Winkel φ und ψ ittelst des Sinussatzes der Dreiecke ABP_1 und CDP_2, und des Projektions=tzes für das Viereck BCP_2P_1!



5. Ein Punkt P teilt die Diagonale eines Quadrates $ABCD$ von der eitenlänge 1 im Verhältniss $1:2$. Senkrecht über diesem Punkte P der uadratebene liegt in der Höhe 2 ein Punkt S. Welche Winkel bilden die Seiten=lächen der vierseitigen Pyramide $SABCD$ mit einander?

6. Ein sphärisches Viereck hat gegebenen Inhalt J und gegebenen Umfang u. Weiter weiss man, dass seine 4 Ecken ein ebenes Rechteck bilden. Man berechne die Seiten und die Winkel des sphärischen Vierecks.

Zahlenbeispiel $u = 160°$; $J = \frac{1}{40}$ der Kugelfläche.

Wie gross darf bei gegebenem Umfang u der Inhalt J höchstens gewählt werden, damit die Lösung reell bleibt?

7. Im sphärischen Dreieck ABC (Seiten a, b, c, Excess ε) sind die Mittelpunkte der Seiten A' (von BC), B', C' durch grösste Kreisbögen mit einander verbunden. Man beweise, dass

$$\boxed{\cos\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{\cos B'C'}{\cos\frac{a}{2}} = \frac{\cos C'A'}{\cos\frac{b}{2}} = \boxed{\frac{\cos A'B'}{\cos\frac{c}{2}}}$$ ist!

Weiter berechne man die Fläche des Dreiecks $A'B'C'$, wenn die Winkel des Dreiecks ABC als $\alpha = 60°$, $\beta = 80°$, $\gamma = 100°$ gegeben sind.

8. Von einem Punkte der Erde, dessen geographische Breite φ, geographische Länge λ ist, ist unter dem Azimute α ein Grosskreisbogen von der Länge L km gezogen. Wie findet man die geographische Breite und Länge des Endpunktes dieses Bogens?

9. Die Deklination des Polarsternes ist $88°48'$. Welchen Fehler kann man höchstens begehen, wenn man a) in München, Breite $48°8'$, b) auf der höchsten von Nansen erreichten Breite $84°10'$ die Nordrichtung nach dem Polarstern bestimmt?

10. Eine Sonnenuhr soll auf eine Verticalwand eingezeichnet werden deren Azimut $\alpha = 15°$ ist. Die geographische Breite des Ortes ist $\varphi = 50°$. Unter welchem Winkel ist der Schatten des (zur Weltaxe parallelen) Zeigers auf der Wand um 3 Uhr Nachmittag gegen die Verticale geneigt?

---

28. I. 1907.

Trigonometrie.

Nº 16

Aufgaben.

1. Zwei Orte auf der Erde haben dieselbe Breite $\varphi = 30°$, und die Längendifferenz $\lambda = 120°$. Wie gross ist der Unterschied der Bogenlängen des sie verbindenden Parallelkreises und grössten Kugelkreises? Für welche Breite φ wird bei gegebenem $\lambda = 120°$ dieser Unterschied ein Maximum?

2. Man beweise die Formel für den sphärischen Excess ε:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{cotg}\frac{b}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{c}{2} + \cos\alpha}\;,$$

die den Inhalt eines sphärischen Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu berechnen erlaubt.

3. Ebenso, am einfachsten aus den Delambreschen Formeln für $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma-\varepsilon}{2}$ und für $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma-\varepsilon}{2}$, dass

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \sin\gamma\cdot\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\,.$$

Mit Hilfe dieser Formel zeige man, dass, wenn D der Mittelpunkt von AB ist, und ε_1 und ε_2 die sphärischen Excesse der Dreiecke ACD und BCD sind, die Beziehung besteht:

$$\sin\frac{\varepsilon_1}{2}\cdot\cos\frac{b}{2} = \sin\frac{\varepsilon_2}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}\,.$$

4. Sei abgekürzt $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \lambda_1$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \lambda_2$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \lambda_3$, sowie $\operatorname{cotg}\frac{a}{2} = l_1$, $\operatorname{tg}\frac{b}{2} = l_2$, $\operatorname{cotg}\frac{c}{2} = l_3$, so sind nach Study die vier Ausdrücke

$$\frac{1+l_2 l_3}{(\lambda_2+\lambda_3)}\;;\quad -\frac{1-l_2 l_3}{1-\lambda_2\lambda_3}\;;\quad \frac{l_1(l_2+l_3)}{1+\lambda_2\lambda_3}\;;\quad -\frac{l_1(l_2-l_3)}{\lambda_1(\lambda_2-\lambda_3)}$$

einander gleich!

5. Zwei Punkte am Himmel sind durch ihre Höhen h und h' sowie ihre Azimute a und a' gegeben. Man drücke die Höhe H des Halbierungspunktes ihres grössten Kreisbogens in möglichst eleganter Formel direkt durch die gegebenen Stücke aus!

6. Man zeige, dass die Bedingung dafür, dass drei Punkte der Erde mit den geographischen Breiten, resp. Längen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ resp. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ auf einem grössten Kugelkreise liegen, sich durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\varphi_1\cdot\sin(\lambda_2-\lambda_3) + \operatorname{tg}\varphi_2\cdot\sin(\lambda_3-\lambda_1) + \operatorname{tg}\varphi_3\cdot\sin(\lambda_1-\lambda_2) = 0$$

darstellen lässt!

7. Wenn man die Fläche eines ebenen Quadrates, dessen Seitenlänge gleich de zu 1° gehörigen Bogenlänge ist, als einen „Quadratgrad" bezeichnet, wie viele Qua dratgrade enthält dann die Kugelfläche? Wie viele Quadratgrade Fläche besi ein sphärisches Quadrat auf der Kugel, dessen Seite a) $= 10^\circ$; b) $= 1^\circ$; c) $= 1$ ist? Wie viele Quadratgrade Fläche liegen zwischen zwei Meridianen vom Win kel α; wie viele zwischen dem Aequator und dem Parallelkreise von der Breite $\varphi = 1^\circ$?

8. Man berechne aus drei auf der östlichen Seite des Meridians gemessenen Höhen eines Fixsterns ($h = 35^\circ 29' 27{,}3''$; $h' = 50^\circ 3' 27''$; $h'' = 65^\circ 26' 3''$) winkel der ersten Beobachtung, wenn die Zeitdifferenzen zwischen der ersten und der zweiten Beobachtung ($t = 1^h 20^m 4^{sec}$) und zwischen der zweiten und dritten Beobachtung ($t' = 1^h 54^m 15^{sec}$) gegeben sind!

9. Welches ist die geographische Breite eines Ortes, für den die Sterne Siri (Rektascension $100^\circ 0' 36''$, Deklination $-10^\circ 33' 31''$) und Rigel (Rektascens $77^\circ 14' 26''$, Deklination $-8^\circ 20' 12''$) gleichzeitig aufgehen?

10. Zwei nahe Orte auf der Erde besitzen die geographische Breite und Länge φ, λ resp. $\varphi + \Delta\varphi, \lambda + \Delta\lambda$. Wenn am ersten Orte die Höhe und das Azimut eines Sternes gleich h und a beobachtet sind, wie gross war dann Höhe und Azimut desselben Sternes im selben absoluten Zeitmoment am zweiten Orte?

11. Man suche die Curve derjenigen Punkte der Erde auf, für die ein gegebe ner Stern im selben Momente im Osten steht, wie für den gegebenen Punkt φ_0, λ_0!

---

22. VII. 1907. **Trigonometrie.** № 18

Semestralprüfung.

1. Vom Transversalenschnittpunkt des Dreiecks ABC aus seien die Lote MD, ME, MF auf die Seiten BC, CA, AB gefällt. Man beweise, dass a) der Inhalt des Dreiecks DEF (als Summe von DME, EMF und FMD) gleich $\frac{1}{18}(a^2+b^2+c^2)\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ ist;

b) die Summe der Kreisflächen um die Vierecke $DMEC$, $EMFA$, und $FMDB$ gleich $\frac{\pi}{12}(a^2+b^2+c^2)$ ist!

2. Man zeige, dass

$\sum\cos(\pm\alpha\pm\beta\pm\gamma\pm\delta) = 16\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta$ ist, wenn die Summe über alle möglichen Zusammenstellungen von Vorzeichen erstreckt ist!

3. Im sphärischen Dreieck ABC sind die Winkel $\alpha = 60°$, $\beta = 70°$, $\gamma = 80°$ gegeben. Durch den Mittelpunkt der Seite AB soll ein Grosskreis so gelegt werden, dass er die Fläche des Dreiecks halbirt. Welchen Winkel muss er gegen BC bilden?

4. Am 22 Juli 1907, Abends $9^h 15{,}5^m$ mitteleuropäischer Zeit sei in München (östl. Länge von Greenwich $0^h 46{,}4^m$) die Höhe des Polarsternes (Deklination $88° 48{,}4'$, Rektascension $1^h 26{,}0^m$) gleich $47° 15{,}6'$ beobachtet. Als Rektascension der mittleren Sonne in diesem Momente sei $7^h 57{,}6^m$ dem Jahrbuch entnommen.

Wie gross ist a) die mittlere Ortszeit b) die Ortssternzeit der Beobachtung; c) der Stundenwinkel des Polarsternes? Wie berechnet sich dann weiter die Breite von München?

5. Zwei Sterne von bekannter Deklination und Rektascension ($\delta_1 = 34° 12'$, $\alpha_1 = 8^h 43{,}2^m$; $\delta_2 = 17° 3'$, $\alpha_2 = 6^h 51{,}8^m$) besitzen in einem Moment bei der Beobachtung im Orte Hamburg (Breite $53° 33'$) dasselbe Azimut. Wie gross ist dies Azimut, und sind die Höhen der Sterne in diesem Momente, und welches ist die Sternzeit der Beobachtung?

12, XI, 1907 **Trigonometrie.** № 1

I. Umwandlung von Gradmass in Bogenmass, und umgekehrt.

Der Winkel $\alpha^\circ \beta' \gamma''$ hat im Bogenmass (= der zugehörigen Bogenlänge des Einheitskreises, oder auch $= \frac{\text{Kreisbogen}}{\text{Kreisradius}}$) die Grösse:

$$A = \operatorname{arc}(\alpha^\circ \beta' \gamma'') = \alpha \cdot \frac{\pi}{180} + \beta \cdot \frac{\pi}{180.60} + \gamma \cdot \frac{\pi}{180.60.60}.$$

Umgekehrt ist der Winkel vom Bogenmass A ausgedrückt in Graden gleich $\left(A \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ$; in Minuten gleich $\left(A \cdot \frac{180.60}{\pi}\right)'$; in Sekunden gleich $\left(A \cdot \frac{180.60.60}{\pi}\right)''$.

Zahlenwerte:

$$\pi = 3{,}14\,159\,265\ldots \quad ; \quad \log \pi = 0{,}497\,1499\ldots$$

$\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ = „Radius des Kreises in Graden" $(= \rho^\circ) = 57{,}29578^\circ\ldots$; $\log \frac{180}{\pi} = 1{,}758\,1226\ldots$

$\left(\frac{180.60}{\pi}\right)'$ = „Radius des Kreises in Minuten" $(= \rho') = 3437{,}747'\ldots$; $\log \frac{180.60}{\pi} = 3{,}536\,2739\ldots$

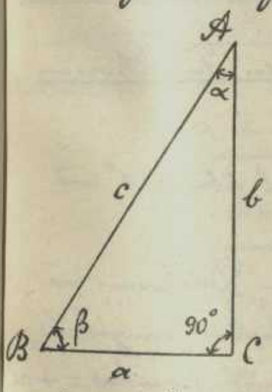
$\left(\frac{180.60.60}{\pi}\right)''$ = „Radius des Kreises in Sekunden" $(= \rho'') = 206264{,}8''\ldots$; $\log \frac{180.60.60}{\pi} = 5{,}3144251\ldots$

Dem Bogenmass 1 entspricht also in Gradmass $57^\circ 17' 44{,}''8$.

Weiter ist: $\frac{\pi}{180} = 0{,}017\,453\,29\ldots$; $\frac{\pi}{180.60} = 0{,}000\,290\,888\ldots$; $\frac{\pi}{180.60.60} = 0{,}000\,004\,848\ldots$

II. Die trigonometrischen Funktionen.

1. Definition für spitze Winkel am rechtwinkligen Dreieck.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \;;\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \;;\quad \sec\alpha = \frac{c}{b}.$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \;;\quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a} \;;\quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}.$$

Daraus folgt:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = 1 \;;\quad \sin\alpha \cdot \operatorname{cosec}\alpha = 1 \;;\quad \sec\alpha \cdot \cos\alpha = 1.$$

Ferner: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Der pythagoräische Lehrsatz liefert die Beziehungen:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \;;\quad \sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha \;;\quad \operatorname{cosec}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha.$$

Für die „Cofunktionen" oder Funktionen des Complementwinkels $\beta = 90^\circ - \alpha$ gilt: Cofunktion α = Funktion $(90^\circ - \alpha)$ = Funktion β ;

Funktion α = Cofunktion $(90^\circ - \alpha)$ = Cofunktion β .

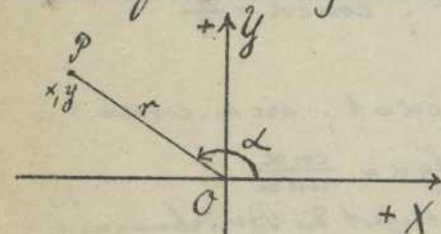
Setzt man $\alpha = 45^\circ + \lambda$, also $\beta = 45^\circ - \lambda$, so erhält man:

$f(45^\circ+\lambda) = cof(45^\circ-\lambda)$; $cof(45^\circ+\lambda) = f(45^\circ-\lambda)$.

2. Tabelle für den Zusammenhang der trigonometrischen Funktionen.

Es ist	ausgedrückt durch						rational durch sin α und cos α
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\,\alpha$	$cotg\,\alpha$	$\sec\alpha$	$cosec\,\alpha$	
$\sin\alpha =$		$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+cotg^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\frac{1}{cosec\,\alpha}$	$\sin\alpha$
$\cos\alpha =$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$\frac{cotg\,\alpha}{\sqrt{1+cotg^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sec\alpha}$	$\frac{\sqrt{cosec^2\alpha-1}}{cosec\,\alpha}$	$\cos\alpha$
$tg\,\alpha =$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\frac{1}{cotg\,\alpha}$	$\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\frac{1}{\sqrt{cosec^2\alpha-1}}$	$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
$cotg\,\alpha =$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{tg\,\alpha}$		$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\sqrt{cosec^2\alpha-1}$	$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
$\sec\alpha =$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\sqrt{1+tg^2\alpha}$	$\frac{\sqrt{1+cotg^2\alpha}}{cotg\,\alpha}$		$\frac{cosec\,\alpha}{\sqrt{cosec^2\alpha-1}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$
$cosec\,\alpha =$	$\frac{1}{\sin\alpha}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1+tg^2\alpha}}{tg\,\alpha}$	$\sqrt{1+cotg^2\alpha}$	$\frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$		$\frac{1}{\sin\alpha}$

3. Allgemein giltige Définition der trigonometrischen Funktionen mit Hilfe der analytischen Geometrie.



Giltig auch für Drehwinkel über 360°, und für negative Drehwinkel.

Ein Winkel $\overset{+}{X}OP$ im selben Drehsinn wie $\overset{+}{X}O\overset{+}{Y} = +90^\circ$ gemessen (nämlich im umgekehrten Drehsinn des Uhrzeigers) ist positiv $= +\alpha$ zu zählen; ein im umgekehrten Drehsinn überstrichener Winkel von der Absolutgrösse α wird als $-\alpha$ bezeichnet.

Es wird definirt: $\sin\alpha = \frac{y}{r}$; $tg\,\alpha = \frac{y}{x}$; $\sec\alpha = \frac{r}{x}$.

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$; $cotg\,\alpha = \frac{x}{y}$; $cosec\,\alpha = \frac{r}{y}$.

Dabei sind x und y die Coordinaten eines beliebigen auf dem zweiten Schenkel des Winkels α, dessen erster Schenkel als positive x Axe gewählt ist, angenommenen Punktes P, mit ihren gemäss den Regeln der analytischen Geometrie gewählten Vorzeichen; r ist der <u>positive</u> Wert $+\sqrt{x^2+y^2}$, also die absolute Länge von OP.

<u>Die unter $\underline{II}$, 1 und 2 angegebenen Beziehungen zwischen den trigonometrischen Funktionen gelten nun auch allgemein für beliebige, nicht spitze Winkel.</u>

Die Wahl der Vorzeichen der Wurzeln in der Tabelle ist jedesmal gemäss den Bemerkungen weiter unten zu treffen.

Ausserdem gelten nun noch die Beziehungen:

$\sin(360^\circ+\alpha)=\sin\alpha$; $\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$; $\sin(-\alpha)=\sin(360^\circ-\alpha)=-\sin\alpha$; $\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$.

$\cos(360^\circ+\alpha)=\cos\alpha$; $\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$; $\cos(-\alpha)=\cos(360^\circ-\alpha)=\cos\alpha$; $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$

$tg(360^\circ+\alpha)=tg\alpha$; $tg(180^\circ+\alpha)=tg\alpha$; $tg(-\alpha)=tg(360^\circ-\alpha)=-tg\alpha$; $tg(180^\circ-\alpha)=-tg\alpha$.

Weiter noch: $\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha$; $\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$; $tg(90^\circ+\alpha)=-cotg\alpha$.

Diese Beziehungen gestatten, die trig. Funktionen eines beliebigen Winkels auf die eines spitzen Winkels zurückzuführen. Der Tangens und der Cotangens besitzen die Periode 180° (oder π), die übrigen vier trigonometrischen Funktionen die Periode 360° (oder 2π).

<u>Verlauf der Funktionswerte von $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ und $tg\alpha$, wenn α von 0° bis 360° zunimmt.</u>

α nimmt zu	von 0° bis 90°	von 90° bis 180°	von 180° bis 270°	von 270° bis 360°
$\sin\alpha$	nimmt zu von 0 bis 1	nimmt ab von 1 bis 0	nimmt ab von 0 bis -1	nimmt zu von -1 bis 0
$\cos\alpha$	nimmt ab von 1 bis 0	nimmt ab von 0 bis -1	nimmt zu von -1 bis 0	nimmt zu von 0 bis 1
$tg\alpha$	nimmt zu von 0 bis $+\infty$	nimmt zu von $-\infty$ bis 0	nimmt zu von 0 bis $+\infty$	nimmt zu von $-\infty$ bis 0

Demnach macht $tg\alpha$ bei $\alpha=90^\circ$ (oder $\frac{\pi}{2}$) und somit auch bei $\alpha=270^\circ$ ($\frac{3\pi}{2}$) einen Sprung von $+\infty$ zu $-\infty$, nimmt aber sonst beständig mit α zu.

Das Vorzeichen ist für den:

Sinus: positiv im $\underline{I}$ und $\underline{II}$, negativ im $\underline{III}$ und $\underline{IV}$ ten Quadranten;

Cosinus: positiv im I und IV, negativ im II und III ten Quadranten.
Tangens und Cotang.: positiv im I und III, negativ im II und IV ten Quadranten.

Für die Aufsuchung der trigonometrischen Funktionen eines Winkels α über 90° gilt die Regel:

1) Der Quadrant, in dem α liegt, bestimmt nach dem Vorigen das Vorzeichen.

2) Ist β der Überschuss von α über das nächstkleinere Vielfache $n \cdot 90^\circ$ von 90°, und n eine gerade / ungerade Zahl, so hat man die Funktion / Cofunktion von β aufzuschlagen.

Endlich ist noch zu bemerken: Durch den Wert einer trigonometrischen Funktion ist der zugehörige Winkel bis auf Vielfache von 360° <u>zweideutig</u> bestimmt. Durch eine trig. Funktion, und das Vorzeichen einer anderen (nicht der reciproken natürlich) ist der Winkel bis auf Vielfaches von 360° <u>eindeutig</u> bestimmt. Bei Winkeln, die positiv und kleiner als 180° sind (z. B. Dreieckswinkeln) ist die Bestimmung durch cos oder tg eindeutig, die durch sin zweideutig.

Aufgaben.

1. Man schlage

$$\sin(0{,}32471) \quad ; \quad \log \operatorname{tg}(-21{,}75) \quad ; \quad \log\cos(5)$$

auf, wo die Winkel im Bogenmass angegeben sind!

2. Man drücke: $\sin(290^\circ)$; $\cos(170^\circ)$; $\operatorname{cotg}(-560^\circ)$; $\sec(540^\circ)$; $\operatorname{cosec}(1255^\circ)$ durch trig. Funktionen von spitzen Winkeln (– speziell von Winkeln unter 45°) aus!

3. Die Horizontaldistanz des Punktes C von A beträgt 1328,5 m, die von C von B 91,6 m. Von A aus erscheint C unter dem Höhenwinkel $7^\circ 13{,}5'$, von B aus unter $73^\circ 2{,}8'$. Man berechne die Höhen von C über A und über B, und die Änderung, die die berechneten Zahlen erfahren, wenn die Winkelmessungen um $1'$ und die Horizontalmessungen um 1 m fehlerhaft waren!

4. Man gebe x im Bogenmass an, wenn $\sec x = 2{,}5$ ist!

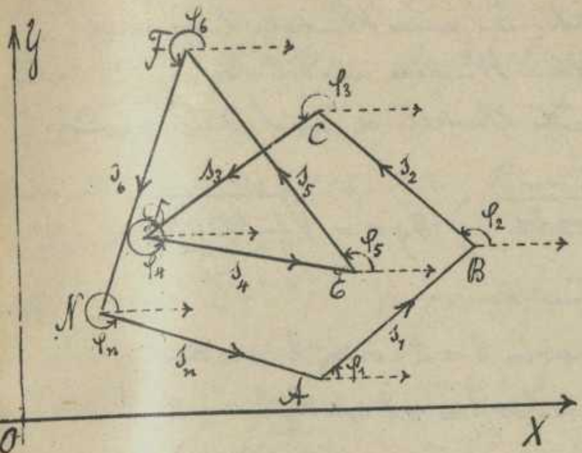
5. Man zeichne den Verlauf einer als Curve dargestellten trig. Funktion, und weiter den Verlauf der Curve ihrer dekadischen Logarithmen!

19. XI. 1907

Trigonometrie.

№ 2

I Der Projektionssatz.



Sind $s_1, s_2, s_3 \dots s_n$ die absoluten Längen der Seiten $AB, BC, CD \dots NA$ eines geschlossenen ebenen oder räumlichen Polygons, und sind $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_n$ die Winkel, welche die Richtungen $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD} \dots \overrightarrow{NA}$ in ihrer Folge beim Umlaufen des Polygons gegen eine beliebig fest gegebene Richtung $\overrightarrow{OX}$ bilden, so gilt:

$s_1 . \cos\varphi_1 + s_2 . \cos\varphi_2 + s_3 . \cos\varphi_3 + \dots + s_n . \cos\varphi_n = \sum s . \cos\varphi = 0$; d.h.:

Die (algebraische) Summe der Projektionen aller Seiten auf $\overrightarrow{OX}$ ist Null.

Auf verschiedene Richtungen OX angewendet liefert dieser Projektionssatz für ebene Polygone zwei, für windschiefe Polygone drei wesentlich verschiedene (d.h. von einander unabhängige) Relationen.

Für ein ebenes Polygon in bezug auf die Richtung $\overrightarrow{OY}$ senkrecht zu $\overrightarrow{OX}$ seiner Ebene angewendet, ergibt der Projektionssatz die Form $\sum s . \sin\varphi = 0$.

Ist das Polygon eben, seine Innenwinkel (Drehwinkel von s_{k+1} in s_k) $\alpha, \beta, \gamma \dots \nu$, so lautet der Projektionssatz für die Richtung $\overrightarrow{AB}$:

$s_1 - s_2 \cos\beta + s_3 \cos(\beta+\gamma) - + \dots + (-1)^{n-1} . s_\nu \cos(\beta+\gamma+\dots+\nu) = 0$;

und für die Richtung senkrecht zu AB:

$s_2 \sin\beta - s_3 \sin(\beta+\gamma) + - \dots + (-1)^n . s_\nu \sin(\beta+\gamma+\dots+\nu) = 0$

II. Die Additionssätze der trigonometrischen Funktionen.

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha . \cos\beta \pm \cos\alpha . \sin\beta$; $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha . \cos\beta \mp \sin\alpha . \sin\beta$.

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta} \; ; \qquad \operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = -\left(\frac{1 \mp \operatorname{cotg}\alpha . \operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta}\right)$$

Speziell für $\alpha = \beta$ ergibt sich daraus:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}\;;\quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}\;;\quad cotg\,2\alpha = \frac{cotg^2\alpha - 1}{2\,cotg\,\alpha}\;.$$

Die sämmtlichen trigonometrischen Funktionen eines Winkels lassen sich also rational durch den Tangens des halben Winkels ausdrücken.

Weiter sind umgekehrt die Funktionen des Winkels α durch den Cosinus des doppelten Winkels 2α ausgedrückt:

$$\sin\alpha = \sqrt[2]{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}\;;\quad \cos\alpha = \sqrt[2]{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}\;;\quad tg\,\alpha = \sqrt[2]{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}\;.$$

Schliesslich sind noch die Formeln zu merken:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\;;\quad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\;.$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\;;\quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\;.$$

$$tg\,\alpha \pm tg\,\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}\;;\quad cotg\,\alpha \pm cotg\,\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

Aufgaben.

1. Man beweise: $\frac{1+tg\,\alpha}{1-tg\,\alpha} = tg\,(45^\circ+\alpha)$; $\frac{\cos\alpha}{1\mp\sin\alpha} = tg\,(45^\circ\pm\frac{\alpha}{2})$;
$tg\,\frac{\alpha+\beta}{2} + tg\,\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha+\cos\beta}$; $tg(\alpha+\beta)\cdot tg\,(\alpha-\beta) = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$.

2. Man zeige, dass $arc\,tg\,x + arc\,tg\,\frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$ ist! Beispiel: $x = \frac{1}{2}$!

3. Man stelle a) $\sin\left(\frac{arc\cos x}{2}\right)$; b) $tg\,(2\,arc\,tg\,x)$; c) $tg\,(4\,arc\,tg\,x)$ algebraisch in x dar! Beispiel $x = \frac{1}{5}$.

4. Man drücke $tg\,(\alpha+\beta)$; $tg\,(\alpha+\beta+\gamma)$; $tg\,(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$ durch die tg der einzelnen Winkel aus, und schliesse daraus auf $tg\,(\alpha+\beta+\ldots+\nu)$.

5. Im ebenen Viereck $ABCD$ kennt man die Seiten $AB = 198{,}52$ m und $CD = 276{,}15$ m, weiter die Innenwinkel bei $A = 124^\circ\,26{,}7'$; bei $B = 91^\circ\,5{,}2'$; und bei $C = 87^\circ\,41{,}2'$. Man berechne die beiden Seiten BC und DA!

6. Im ebenen Viereck sind 3 Seiten und 2 Winkel bekannt. Wie gestaltet sich die Berechnung der fehlenden Stücke nach dem Projektionssatze? Man unterscheide die verschiedenen Möglichkeiten der Lage der beiden gegebenen Winkel!

7. Mit Hilfe der trigonometrischen Tabellen suche man angenähert den Wert x aus der Gleichung $\sin x + \cos x = tg\,x$ zu bestimmen!

26.VI.1907 **Trigonometrie.** №3

I. Der Satz von Moivre.

$$\cos(n\varphi) + i.\sin(n\varphi) = [\cos\varphi + i.\sin\varphi]^n \quad , \text{wo } i = \sqrt[2]{-1}.$$

Diese Formel führt zur Aufstellung der Beziehungen:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i.\sin\varphi \quad ; \quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i.\sin\varphi.$$

Dabei ist $e = 2,7182818\ldots$ die „Basis des natürlichen Logarithmensystems"

Daraus folgt nun

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{+i\varphi} - e^{-i\varphi}\right) ; \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{+i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) ; \quad tg\varphi = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{+i\varphi} - e^{-i\varphi}}{e^{+i\varphi} + e^{-i\varphi}}.$$

Weiter ergibt sich:

$$\cos(n\varphi) = (\cos\varphi)^n - \frac{n(n-1)}{1.2}.(\cos\varphi)^{n-2}.(\sin\varphi)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}.(\cos\varphi)^{n-4}.(\sin\varphi)^4 - + \ldots$$

$$\sin(n\varphi) = \frac{n}{1}.(\cos\varphi)^{n-1}.(\sin\varphi) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.(\cos\varphi)^{n-3}.(\sin\varphi)^3 + - \ldots$$

Diese beiden Formeln sind giltig: bei ganzem positiven n für jeden Winkel φ, sonst nur für $\varphi < 45°$; – so lange eben die Reihen convergiren.

II. Auflösung der trigonometrischen Gleichung:

$$a.\cos x + b.\sin x = c.$$

Sie erfolgt durch Division mit $+\sqrt[2]{a^2+b^2}$, und Einführung eines „Hilfswinkels" φ, für den: $\sin\varphi = \frac{a}{+\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\varphi = \frac{b}{+\sqrt{a^2+b^2}}$; $tg\varphi = \frac{a}{b}$ ist

Man berechnet also φ aus $tg\varphi = \frac{a}{b}$, und wählt dabei φ zwischen $0°$ und $180°$, oder zwischen $180°$ und $360°$, je nachdem a positiv oder negativ ist.

Dann ist $(\varphi + x)$, und somit x aus:

$$\sin(\varphi + x) = \frac{c.\sin\varphi}{a} \left(\text{oder} = \frac{c.\cos\varphi}{b}\right) \text{ berechenbar.}$$

Zwei Lösungen: $\varphi + x = \vartheta$, und $\varphi + x = 180° - \vartheta$; also $x = \vartheta - \varphi$, und $x = 180° - \vartheta - \varphi$.

Korrektur zu Blatt 2. Als Innenwinkel β bei Ecke B des ebenen Polygons ABC… bezeichnen wir den Drehwinkel, durch den BC in die Lage BA (also allgemeiner $\vec{s}_{k+1}$ in die umgekehrte Richtung $\vec{s}_k$) gedreht wird.

Aufgaben.

1. Man zeige, dass wenn

a) α, β, γ Winkel eines ebenen Dreiecks sind,

$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$; $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;

$tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma = tg\,\alpha \cdot tg\,\beta \cdot tg\,\gamma$; $tg\,2\alpha + tg\,2\beta + tg\,2\gamma = tg\,2\alpha \cdot tg\,2\beta \cdot tg\,2\gamma$;

$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2(1 + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$ ist;

b) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Winkel eines ebenen Vierecks sind,

$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta = 4\sin\frac{\alpha+\delta}{2} \cdot \sin\frac{\beta+\delta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma+\delta}{2}$;

$tg\,\frac{\alpha}{2} + tg\,\frac{\beta}{2} + tg\,\frac{\gamma}{2} + tg\,\frac{\delta}{2} = \dfrac{\sin\frac{\alpha+\delta}{2} \cdot \sin\frac{\beta+\delta}{2} \sin\frac{\gamma+\delta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\delta}{2}}$ ist!

2. Man berechne die Coordinaten der Eckpunkte eines regulären Siebenecks, dessen Umkreis den Radius 1 und den Nullpunkt zum Mittelpunkt hat, und von dem ein Eckpunkt auf der Abscissenaxe liegt!

3. Man berechne den Winkel x aus der Gleichung:

$23{,}215 \cdot \sin x - 5{,}324 \cdot \cos x + 12{,}354 = 0$!

4. Aus $x + y = 44^\circ$ und $\sin x + \cos y = 1{,}625$ berechne man möglichst bequem mit Hilfe einer geeigneten Umformung die Unbekannten x und y!

5. Gegeben ist $\sin(x+y) = c$; $tg\,x : tg\,y = a : b$. Man zeige, wie daraus bequem die Unbekannten zu finden sind!

6. Man bringe die Summe

$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma)$ – wo α, β, γ ganz beliebige Winkel sind –, auf eine bequem logarithmirbare Form!

7. Man drücke $\cos 3\varphi$, $\cos 4\varphi$, $\cos 5\varphi$ durch $\cos\varphi$ allein aus. Kann man sie rational auch durch $\sin\varphi$ allein ausdrücken? Wie steht es analog mit $\sin 3\varphi$, $\sin 4\varphi$, $\sin 5\varphi$?

3, XII, 1907 **Trigonometrie.** № 4

I. Lösung der quadratischen Gleichung $ax^2+bx+c=0$ durch Einführung eines Hilfswinkels.

1. a und c sind von verschiedenem Vorzeichen. Man berechne φ aus $tg\,\varphi = \frac{2a}{b}\sqrt{-\frac{c}{a}}$, und dann die Wurzeln der Gleichung als:

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}\cdot tg\,\frac{\varphi}{2} \quad ; \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}\cdot cotg\,\frac{\varphi}{2}\,.$$

2. a und c sind von gleichem Vorzeichen und $b^2>4ac$. Man berechne φ aus $\sin\varphi = \frac{2a}{b}\cdot\sqrt{\frac{c}{a}}$, und dann als Wurzeln:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{c}{a}}\cdot tg\,\frac{\varphi}{2} \quad ; \quad x_2 = -\sqrt{\frac{c}{a}}\cdot cotg\,\frac{\varphi}{2}\,.$$

3. a und c sind von gleichem Vorzeichen, und $b^2<4ac$. Man berechne φ aus $\cos\varphi = \frac{b}{2a}:\sqrt{\frac{c}{a}}$, und dann als die beiden complexen Wurzeln der Gleichung

$$x_{1,2} = -\sqrt{\frac{c}{a}}\cdot\left(\cos\varphi \pm i\sin\varphi\right).$$

II. Lösung der kubischen Gleichung $x^3+px+q=0$ durch trigonometrische Funktionen.

1. p und $\left\{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right\}$ – die „Discriminante" der kubischen Gleichung – sind beide negativ. Man berechne φ aus $\cos\varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3}$, und dann als die drei reellen Wurzeln der Gleichung:

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\cos\frac{\varphi}{3} \; ; \; x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\cos\left(120^\circ+\frac{\varphi}{3}\right) \; ; \; x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\cos\left(240^\circ+\frac{\varphi}{3}\right).$$

2. p ist eine negative, $\left\{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right\}$ aber eine positive Zahl. Man berechne φ aus

$$\sin\varphi = \frac{\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3}{\frac{q}{2}} \; ;$$

und weiter ψ aus

$$tg\,\psi = \sqrt[3]{tg\,\frac{\varphi}{2}}\,.$$

Die einzige reelle Wurzel ist dann: $x_1 = -2\cdot\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot cosec(2\psi)$

die beiden conjugirt complexen sind $x_{2,3} = +\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\left[cosec(2\psi)\pm i\sqrt{3}\cdot cotg(2\psi)\right]$.

3. p ist eine positive Zahl, also auch $\left\{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3\right\}$ positiv. Man berechne φ aus

$$tg\,\varphi = \frac{\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\right)^3}{\frac{q}{2}} \; ;$$

und weiter wieder ψ aus

$$tg\,\psi = \sqrt[3]{tg\,\frac{\varphi}{2}}\,.$$

Die einzige reelle Wurzel ist dann $x_1 = -2\cdot\sqrt[3]{\frac{p}{3}}\cdot\cot g(2\psi)$;
die beiden conjugiert complexen: $x_{\frac{2}{3}} = +\sqrt[3]{\frac{p}{3}}\cdot\left[\cot g(2\psi) \pm i\sqrt{3}\cdot\operatorname{cosec}(2\psi)\right]$.

N.B. Die Quadratwurzeln sind in den Formeln von I und II überall als die <u>positiven</u> Zahlenwerte zu verstehen!

III. Die Regel von Maskelyne.

Zur genauen Berechnung von $\log\sin\alpha$, und $\log tg\,\alpha$, wo α ein kleiner, im Gradmass gegebener Winkel ist, drückt man diesen Winkel in Sekunden aus ($=\alpha''$), und hat dann (bis $2\frac{3}{4}{}^\circ$ auf 7 Decimalen genau):

$$\log\sin\alpha = \log\alpha'' - \log\rho'' + \frac{1}{3}\log\cos\alpha\,; \qquad \rho'' = 206\,264{,}8''\ldots$$
$$\log tg\,\alpha = \log\alpha'' - \log\rho'' - \frac{2}{3}\log\cos\alpha\,. \qquad \log\rho'' = 5{,}314\,4251\ldots$$

Mit Genauigkeit von 5 Decimalen kann für Winkel α bis etwa $\frac{1}{2}{}^\circ$ sogar gesetzt werden: $\log\sin\alpha = \log tg\,\alpha = \log\alpha'' - \log\rho'' = \log(\operatorname{arc}\alpha)$.

Aufgaben.

1. Man berechne unter Benützung von Hilfswinkeln die Wurzeln:
   a) der quadratischen Gleichung: $6{,}255x^2 - 29{,}728x + 18{,}637 = 0$;
   c) der kubischen Gleichungen: $15x^3 \pm 27x - 10 = 0$.

2. Man berechne $\log\sin 8'24{,}''5$ und $\log tg\, 8'24{,}''5$ einerseits nach der Regel von Maskelyne, andrerseits durch Interpolation aus der Tafel, und zwar wenn die Tafel a) von Minute zu Minute; b) mit dem Intervalle $10''$, c) mit dem Intervalle $1''$ fortschreitet! (Siebenstellige Rechnung!)

3. Man bestimme die Summe der Reihe
$\sum_1^n = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx$ durch Multiplizieren mit $\sin x$ und Anwendung der Formel $\sin\alpha.\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+3)\right]$!

4. Man berechne x möglichst bequem aus:
a) $a.\cos^2 x + b\sin x\cos x + c\sin^2 x = d$; b) $a.\sin(x+\alpha) + b.\sin(x+\beta) = c$.

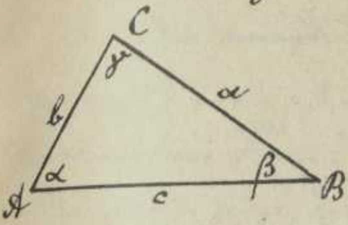
5. Man bestimme x aus den cyklometrischen Gleichungen:
a) $\arccos x + \arccos 2x = \frac{\pi}{2}$; b) $2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{arc tg}\left(\frac{1}{2x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$.

10. XII. 1907.

Trigonometrie.

№ 5

Formeln für das ebene schiefwinklige Dreieck.



1. Der Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$ [$= 2r$, wenn r der Radius des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises ist]

Aus dem Sinussatze folgt: $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$; und $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

Weiter 2. der Tangentialsatz:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{tg\frac{\alpha-\beta}{2}}{tg\frac{\alpha+\beta}{2}} = tg\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot tg\frac{\gamma}{2}.$$

3. Als den „Projektionssatz im Dreieck" bezeichnet man die Formel:

$$c = a.\cos\beta + b.\cos\alpha.$$

4. Der Cosinussatz: $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma.$$

Umformung des Cosinussatzes zur logarithmischen Berechnung von c:

A. Man setzt $x = 2\cos\frac{\gamma}{2}.\sqrt[2]{ab}$, und erhält:

$$c = \sqrt[2]{(a+b+x)(a+b-x)}.$$

Oder B. Man führt einen Hilfswinkel ein, etwa durch $tg\varphi = \frac{2\sin\frac{\gamma}{2}.\sqrt[2]{ab}}{a-b}$, und erhält $c = \frac{a-b}{\cos\varphi}$.

5. Der Halbwinkelsatz:

Es sei $a+b+c = 2s$ gesetzt. Dann ist:

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt[2]{\frac{(s-a)(s-b)}{a.b}};\quad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt[2]{\frac{s(s-c)}{a.b}};\quad tg\frac{\gamma}{2} = \sqrt[2]{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

Daraus folgt: $\sin\gamma = \frac{2}{a.b}\sqrt[2]{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

6. Die Tangentenformel:

$$tg\gamma = \frac{c.\sin\alpha}{b - c.\cos\alpha} = \frac{c.\sin\beta}{a - c.\cos\beta}.$$

7. <u>Der Dreiecksinhalt</u> Δ ist:

$$\Delta = \frac{1}{2}\, ab \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} c^2 \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = 2r^2 \cdot \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

$$= \sqrt[2]{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{4r}.$$

8. Der Radius r des dem Dreieck umschriebenen Kreises ist:

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma} \quad \text{(vergleiche 1)};$$

der Radius ϱ des einbeschriebenen Kreises:

$$\varrho = \frac{\sqrt[2]{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} = \frac{\Delta}{s} = c \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = 4r \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}$$

der Radius ϱ_c des an Seite c dem Dreieck anbeschriebenen Kreises:

$$\varrho_c = \frac{\Delta}{s-c} = c \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = 4r \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}.$$

<u>Aufgaben.</u>

1. Man zeige, dass $s = 4r \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}$ und $s-c = 4r \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}$ ist, und weiter, dass $\Delta = \varrho^2 \cdot \cot g\frac{\alpha}{2} \cot g\frac{\beta}{2} \cot g\frac{\gamma}{2} = \sqrt[2]{\varrho\, \varrho_a \varrho_b \varrho_c}$ ist; endlich, dass $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c}$ ist!

2. Im Dreieck ABC sind die drei Höhen $h_a = 8$; $h_b = 9$; $h_c = 10$ gegeben. Man berechne auf möglichst einfache Weise die Winkel, und den Flächeninhalt des Dreiecks!

3. Im Dreieck ABC ist gegeben der Dreiecksinhalt Δ, die Seite a, und 1) der Winkel α; 2) der Winkel β. Man berechne für beide Fälle die anderen Seiten und Winkel. Zahlenbeispiel:

$\Delta = 147{,}86\ (m)^2$; $a = 22{,}17\ m$; 1) $\alpha = 47^\circ 16{,}4'$; 2) $\beta = 102^\circ 44{,}9'$.

4. Man zeige, wie die Berechnung eines Dreiecks erfolgt, von dem Seite c, Winkel γ, und die Länge der Winkelhalbirenden des Winkels γ (bis zur Gegenseite) w_c gegeben sind!

5. Von einem Dreieck ist gegeben das Verhältniss von zwei Seiten $a:b$; das Verhältniss der dritten Seite zu ihrer Höhe $c:h_c$, und der Umfang $a+b+c$! Wie berechnet man eine Seite?

17. XII. 1907 **Trigonometrie.** № 6

Aufgaben.

1. Man bringe den Ausdruck:
$\sin(\alpha-\beta) + \sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma-\delta) + \sin(\delta-\alpha)$ auf eine bequem logarithmirbare Form!

2. Man zeige, dass für $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360°$
$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + \sin^2\delta = 2\,[1 + \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \sin\delta - \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \cos\delta]$ ist!

3. Von einem ebenen Dreieck ist der Inhalt Δ, die Summe der Quadrate der drei Seiten $a^2+b^2+c^2 = q^2$, und ein Winkel γ gegeben. Wie berechnen sich die fehlenden Stücke des Dreiecks?

4. Von zwei Sehnen, die in einem Kreise vom Radius r einen Peripheriewinkel α bilden, ist die eine um d länger als die andere. Wie gross sind die Sehnen einzeln, und wie gross ist das von ihnen ausgeschnittene Stück der Kreisfläche? Zahlen: $r = 18{,}966$; $d = 3{,}215$; $\alpha = 81°12'10''$.

5. Im Dreieck ABC ist der Radius des umschriebenen Kreises, und sind weiter die Winkel bekannt. AA', BB', CC' sind die Höhen des Dreiecks. Man stelle eine Formel für den Umfang des Dreiecks $A'B'C'$ der Höhenfusspunkte auf!

6. Im Dreieck ABC sei O der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises (r), Ω der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises (ρ). Man zeige, dass:
$$(O\Omega)^2 = r^2 - 2r\rho \quad \text{ist!}$$
Wie heissen die analogen Formeln für $(O\Omega_a)^2$, $(O\Omega_b)^2$, $(O\Omega_c)^2$, wenn Ω_a, Ω_b, Ω_c die Mittelpunkte der angeschriebenen Kreise sind?

7. Bekannt ist die Horizontaldistanz der beiden Punkte A und B gleich c, weiter ihr vertikaler Höhenunterschied h. Von dem unbekannten Punkte H aus wird A, resp. B, unter dem Höhenwinkel α resp. β

anvisirt; der horizontal gemessene Winkel nach A und B ist in H gleich δ. Wie berechnet sich demnach die Höhe und die Horizontallage von H?

8. Man suche die Winkel, Seiten, den Inhalt, und die Kreisradien eines Dreiecks, das zu einem gegebenen Dreieck ABC das Dreieck der Centren der drei anbeschriebenen Kreise ist!

9. Von einem Sehnenviereck sind die Seiten ($AB = 40$ cm; $BC = 57$ cm; $CD = 15$ cm; $DA = 42$ cm) gegeben. Es soll der Flächeninhalt des über der grössten Seite stehenden Segmentes berechnet werden!

10. Von einem Trapez sind die beiden parallelen Seiten a und c, und die beiden Diagonalen r und s gegeben. Wie findet man die fehlenden Stücke des Trapezes?

11. Im Viereck $ABCD$ sind die Winkel $\alpha = 69°12'$; $\beta = 91°44'$; $\gamma = 105°31'$ gegeben, weiter die Seiten $AB = 19{,}255$; und $CD = 10{,}221$. Man berechne den Flächeninhalt des Vierecks nach der leicht zu beweisenden Formel:

$$\text{Inhalt} = (AB)^2 \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)} + (CD)^2 \cdot \frac{\sin\gamma \cdot \sin\delta}{2\sin(\gamma+\delta)}$$

12. Sind a, b, c, d die Seiten eines beliebigen Vierecks, ε der Winkel der Diagonalen desselben, so ist die Fläche des Vierecks:

$$\text{Fläche} = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{4}\left[(a^2+c^2) - (b^2+d^2)\right] \quad ! \qquad \text{Beweis!}$$

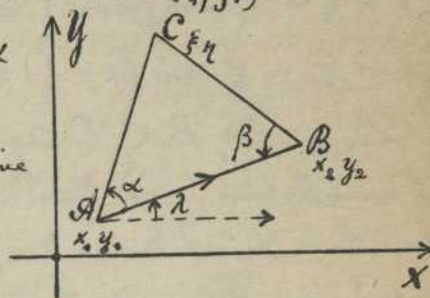
13. Ein Viereck soll zugleich ein Tangentenviereck und ein Sehnenviereck sein. Bekannt sind zwei Winkel α und β, und der Flächeninhalt F. Man berechne die Radien des umschriebenen und des einbeschriebenen Kreises! Zahlenbeispiel: $\alpha = 71°25'12''$; $\beta = 102°7'42''$; $F = 108{,}22\ (\text{cm})^2$.

14. Im regulären n Eck ist die Summe der Quadrate über alle Seiten und Diagonalen n^2r^2 (wo r der Radius des umschriebenen Kreises ist). Beweis! Weiter teile man das n Eck durch Diagonalen von einer gegebenen Ecke aus in $(n-2)$ Teildreiecke, und stelle eine Formel für die Summe der Radien der diesen einbeschriebenen Kreise auf!

14, I, 1908 **Trigonometrie.** № 7

Die beiden Hauptaufgaben der Kleintriangulirung.

I. Bestimmung der Coordinaten ξ, η eines Punktes C durch „Vorwärtseinschneiden" von den bekannten Punkten $A\,(x_1, y_1)$ und $B\,(x_2, y_2)$ aus durch Messung der Winkel $BAC = \alpha$ und $CBA = \beta$ an den bekannten Punkten.



Ist λ der Winkel von $\overrightarrow{AB}$ gegen die positive x Axe, so ist:

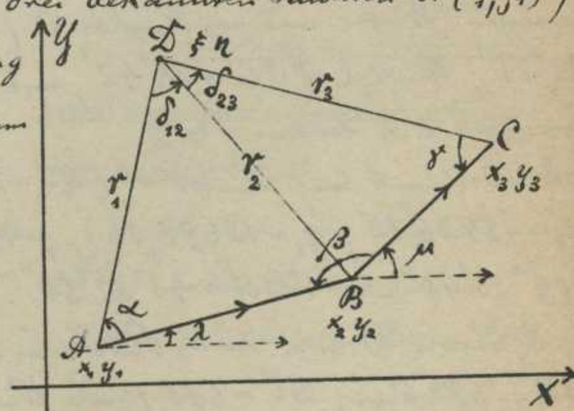
$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ ; \quad AB = c = \frac{x_2 - x_1}{\cos\lambda} = \frac{y_2 - y_1}{\sin\lambda}.$$

Der Quadrant von λ ist so zu wählen, dass c positiv wird. Dann ergibt sich:

$$\xi = x_1 + \frac{c.\sin\beta.\cos(\alpha+\lambda)}{\sin(\alpha+\beta)} = x_1 + \frac{(x_2 - x_1).\sin\beta.\cos(\alpha+\lambda)}{\sin(\alpha+\beta).\cos\lambda}.$$

$$\eta = y_1 + \frac{c.\sin\beta.\sin(\alpha+\lambda)}{\sin(\alpha+\beta)} = y_1 + \frac{(y_2 - y_1).\sin\beta.\sin(\alpha+\lambda)}{\sin(\alpha+\beta).\sin\lambda}.$$

II. Bestimmung der Coordinaten ξ, η eines Punktes D durch „Rückwärtseinschneiden" nach den drei bekannten Punkten $A\,(x_1, y_1)$, $B\,(x_2, y_2)$ und $C\,(x_3, y_3)$ durch Messung der Winkel $ADB = \delta_{12}$ und $BDC = \delta_{23}$ am zu bestimmenden Punkte D.



Man rechnet zunächst wieder:

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ ; \quad AB = \frac{x_2 - x_2}{\cos\lambda} = \frac{y_2 - y_1}{\sin\lambda}$$

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\ ; \quad BC = \frac{x_3 - x_2}{\cos\mu} = \frac{y_3 - y_2}{\sin\mu}$$

und weiter den Winkel $CBA = \beta = 180^\circ + \lambda - \mu$.

Die Berechnung des Vierecks $ABCD$ ergibt, wenn noch der Hilfswinkel φ durch $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{AB.\sin\delta_{23}}{BC.\sin\delta_{12}}$ eingeführt wird, für die Winkel α und γ:

$$\frac{\alpha+\gamma}{2} = 180^\circ - \frac{\beta+\delta_{12}+\delta_{23}}{2}; \quad \text{und} \quad tg\,\frac{\alpha-\gamma}{2} = tg\,\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot cotg\,(45^\circ+\varphi).$$

Dann berechnen sich die Entfernungen AD, BD, CD aus

$$r_1 = AD = AB\cdot\frac{\sin(\alpha+\delta_{12})}{\sin\delta_{12}}; \quad r_3 = CD = BC\cdot\frac{\sin(\gamma+\delta_{23})}{\sin\delta_{23}}; \quad r_2 = BD = AB\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\delta_{12}} = BC\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\delta_{23}}$$

Die gesuchten Coordinaten ξ, η von D endlich sind:

$$\xi = x_1 + r_1\cdot\cos(\alpha+\lambda) = x_3 + r_3\cdot\cos(180^\circ+\mu-\gamma).$$

$$\eta = y_1 + r_1\cdot\sin(\alpha+\lambda) = y_3 + r_3\cdot\sin(180^\circ+\mu-\gamma).$$

Liegen A, B, C, D auf einem Kreise, so wird diese Bestimmung von D unmöglich. Der dem Dreieck ABC der bekannten Punkte umschriebene Kreis heisst daher der „gefährliche Kreis". Auch wenn D nur nahezu auf diesem Kreise liegt, – also wenn nur angenähert $\beta+\delta_{12}+\delta_{23} = 180^\circ$ wird, – ist die Bestimmung praktisch unbrauchbar, da kleine Messfehler (etwa in δ_{12}, δ_{23}) schon grobe Fehler in den Coordinaten von D nach sich ziehen.

Aufgaben.

1. Die Strecke PQ kann nicht direkt gemessen werden. Dagegen ist auf ihrer Verlängerung über P resp. Q hinaus $PA = 127{,}5$ m und $QB = 96{,}8$ m gemessen. Weiter sind im Punkte O (ausserhalb der Linie) Winkel $AOP = 31^\circ 25'$, Winkel $POQ = 36^\circ 42'$, und Winkel $QOB = 29^\circ 8'$ gemessen. Wie berechnet sich daraus PQ?

2. Bekannt sind Punkt A ($x_1 = -7613{,}55$; $y = 12861{,}41$) und Punkt B ($x_2 = -7926{,}82$; $y_2 = 13677{,}50$), gemessen die Horizontalwinkel $BAC = 109^\circ 23' 18''$ und $CBA = 48^\circ 52' 54''$. Man berechne die Coordinaten von C!

3. Punkt D soll durch Rückwärtseinschneiden bestimmt sein, indem $AB = 932{,}5$ m, $BC = 688{,}7$ m; Winkel $CBA = 129^\circ 15{,}4'$, Winkel $ADB = 32^\circ 6{,}5'$, Winkel $BDC = 18^\circ 50{,}2'$ gemessen werden. Man berechne die Entfernung AD! Wenn die gemessenen Längen und Winkel mit den Fehlern δ resp. ε Meter, und κ, λ, μ Minuten behaftet sind, soll zugleich durch logarithmische Incremente der Fehler in AD berechnet werden.

21, I, 1908 **Trigonometrie.** № 8

Sphärische Trigonometrie.

I. In Betracht gezogen werden nur sphärische Dreiecke und sphärische Polygone, die durch grösste Kugelkreise gebildet sind.
Zu jedem sphärischen Dreieck existirt ein anderes von den Polen der Seitenkreise des gegebenen als Ecken und den Polarkreisen der Ecken des gegebenen als Seitenkreisen gebildetes, dessen Seiten die Supplemente der Winkel des gegebenen, und dessen Winkel die Supplemente der Seiten des gegebenen sind.

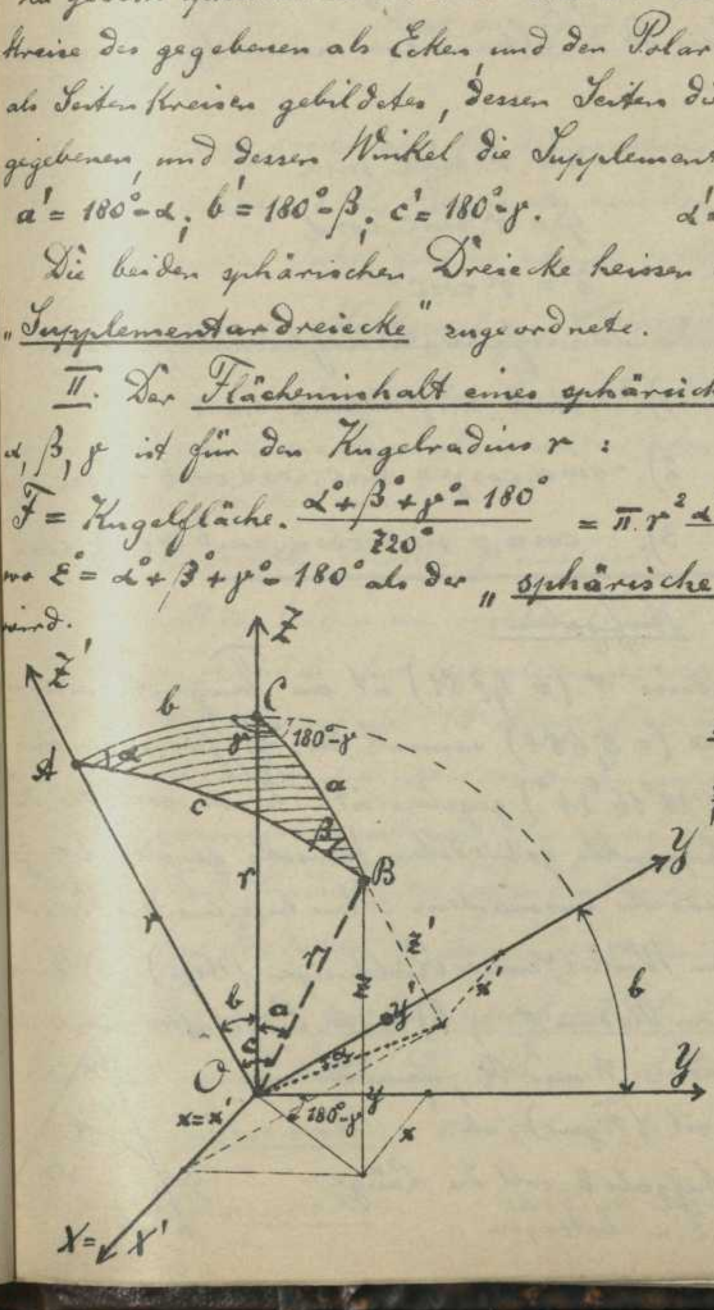
$a' = 180° - \alpha;\ b' = 180° - \beta;\ c' = 180° - \gamma.$ $\qquad \alpha' = 180° - a;\ \beta' = 180° - b.\ \gamma' = 180° - c.$

Die beiden sphärischen Dreiecke heissen einander als „Polar" oder „Supplementardreiecke" zugeordnete.

II. Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks mit den Winkeln α, β, γ ist für den Kugelradius r:

$$F = \text{Kugelfläche}\cdot\frac{\alpha^\circ+\beta^\circ+\gamma^\circ-180^\circ}{720^\circ} = \pi r^2\,\frac{\alpha^\circ+\beta^\circ+\gamma^\circ-180^\circ}{180^\circ} = \pi r^2\,\frac{\varepsilon^\circ}{180^\circ} = r^2 \cdot \operatorname{arc}\varepsilon$$

wo $\varepsilon^\circ = \alpha^\circ+\beta^\circ+\gamma^\circ-180^\circ$ als der „sphärische Excess" des Dreiecks bezeichnet wird.



III. Ableitung der Fundamentalformeln für das sphärische Dreieck.

Vorgelegt sei das Dreieck ABC. Man wähle OC als z Axe (O = Kugelmittelpunkt), die y Axe in der Ebene AOC, und die x Axe normal zu dieser Ebene nach der Seite von B hin gerichtet.
Ein zweites Coordinatensystem

habe OA zur z' Axe, als x' Axe dieselbe Normale auf AOC wie vorher, die y' Axe in der Ebene AOC.

Das Coordinatensystem x, y, z wird dann durch eine Drehung vom Betrage des Winkels b um die x (=x') Axe in das System x'y'z' übergeführt.

Die Formeln für diese Coordinatentransformation sind:

$x = x'$; $y = y'.\cos b - z'.\sin b$; $z = y'.\sin b + z'.\cos b$

Die Coordinaten des Punktes B im alten und im neuen Systeme lassen sich (vergl. Figur) darstellen als:

$x = r.\sin a.\sin\gamma$ $\qquad x' = r.\sin c.\sin\alpha$

$y = -r.\sin a.\cos\gamma$ $\qquad y' = r.\sin c.\cos\alpha$

$z = r.\cos a$; $\qquad z' = r.\cos c$.

Das Einsetzen dieser Werte in die Transformationsgleichungen ergibt die

Fundamentalgleichungen: 1). $\sin a.\sin\gamma = \sin c.\sin\alpha$.

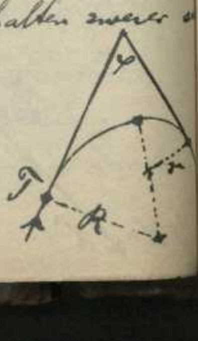
2). $-\sin a.\cos\gamma = \sin c.\cos\alpha.\cos b - \cos c.\sin b$

3). $\cos a = \sin c.\cos\alpha.\sin b + \cos c.\cos b$

Aufgaben.

1. Um einen Kreis vom Radius r (= 1,781) ist ein Tangentenviereck gezeichnet, dessen eine Seite a (= 5,684) sammt der Differenz der ihr anliegenden Winkel $\alpha - \beta$ (= 28°16'24") gegeben ist. Ferner soll der Inhalt des durch die 4 Berührpunkte gebildeten Vierecks gerade $\lambda = \frac{2}{5}$ des Inhalts des Tangentenvierecks ausmachen. Man berechne das Viereck.

2. Man stumpfe den spitzen Winkel zweier Richtungen (Wege) a) durch Einschalten eines Kreisbogens vom Radius r ; b) durch Einschalten zweier sich berührenden Kreisbogen vom Radius r und R, wenn der eine Berührpunkt T vorgegeben ist (Figur), ab!

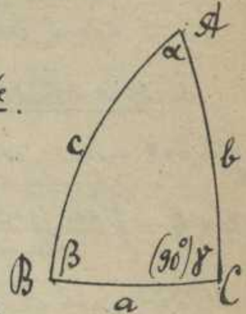


Korrektur zu Blatt 7. In Aufgabe 3 soll die Länge BC statt 688,7 m 564,7 m betragen.

28, I, 1908. **Trigonometrie.** № 9

I. Formeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck.

Der Winkel γ sei gleich $90°$.



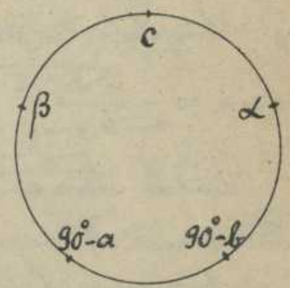
$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\text{sin der gegenüberlieg. sphärischen Kathete}}{\text{sin der sphärischen Hypotenuse}}.$$

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}\ ; \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}.$$

Endlich ist:

$\cos c = \cos a . \cos b$, eine für das rechtwinklige sphärische Dreieck charakteristische Beziehung zwischen den drei Seiten, die an Stelle des pythagoräischen Satzes für die ebenen rechtwinkligen Dreiecke tritt.

Die Nepersche Merkregel für das rechtwinklige sphärische Dreieck:



Markirt man (etwa auf einem Kreise) die Stücke des rechtwinkligen Dreiecks in ihrer natürlichen Reihenfolge, jedoch so, dass man

1) den rechten Winkel γ auslässt

2) statt der beiden am rechten Winkel anliegenden Katheten a und b ihre Complemente anschreibt

so erhält man alle 10 Hauptformeln für das rechtwinklig sphärische Dreieck in die Doppelregel zusammengefasst:

Der Cosinus irgend einer der fünf angeschriebenen Grössen ist:

a) gleich dem Produkte der Cotangenten der beiden benachbarten Grössen

b) gleich dem Produkte der Sinus der beiden nicht benachbarten Grössen.

II Formeln für das schiefwinklige sphärische Dreieck.

(Die Seiten und Winkel des Dreiecks sind $< 180°$ vorausgesetzt.)

1. Der Sinussatz: $\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

2. Der Cosinussatz: $\cos c = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b . \cos\gamma$

3. Der Sinus-Cosinussatz: $\sin c . \cos\alpha = \cos a . \sin b - \sin a . \cos b . \cos\gamma$

4. <u>Der Cotangentensatz</u>: (Satz der vier auf einander folgenden Stücke):

$\cos\alpha . \cos b = \operatorname{cotg} c . \sin b - \operatorname{cotg}\gamma . \sin\alpha$.

5. <u>Die Halbwinkelsätze</u>. Durch Umformung des Cosinussatzes findet man, wenn nach $a+b+c=2s$ gesetzt wird:

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt[2]{\frac{\sin(s-a).\sin(s-b)}{\sin a.\sin b}} \; ; \; \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt[2]{\frac{\sin s.\sin(s-c)}{\sin a.\sin b}} \; ; \; \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt[2]{\frac{\sin(s-a).\sin(s-b)}{\sin s.\sin(s-c)}}$$

Oder, nach Einführung der Abkürzung:
(zu vergleichen ist 9)

$$k = +\sqrt[2]{\frac{\sin(s-a).\sin(s-b).\sin(s-c)}{\sin s}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{k}{\sin(s-a)} \; ; \; \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{k}{\sin(s-b)} \; ; \; \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{k}{\sin(s-c)} .$$

$S = +\sqrt[2]{\sin s . \sin(s-a) . \sin(s-b) . \sin(s-c)}$ heisst der „Eckensinus" oder die „Amplitude" des sphärische Dreiecks. Es ist noch:

$$\sin\alpha = \frac{2S}{\sin b.\sin c} \; ; \; \sin\beta = \frac{2S}{\sin c.\sin a} \; ; \; \sin\gamma = \frac{2S}{\sin a.\sin b} .$$

Durch Anwendung der entwickelten Formeln auf das Polardreieck („Polarisiren") ergeben sich die folgenden neuen Formeln:

2.* <u>Der Winkelcosinussatz</u>: $\cos\gamma = -\cos\alpha . \cos\beta + \sin\alpha . \sin\beta . \cos c$

3.* $\sin\gamma . \cos a = \cos\alpha . \sin\beta + \sin\alpha . \cos\beta . \cos c$.

5.* <u>Die Halbseitensätze</u>. Es ist $\alpha+\beta+\gamma = 2\sigma$ gesetzt – also $2\sigma = 180^\circ + \varepsilon$, somit $\cos\sigma$ eine negative Zahl.

$$\cos\frac{c}{2} = \sqrt[2]{\frac{\cos(\sigma-\alpha).\cos(\sigma-\beta)}{\sin\alpha.\sin\beta}} \; ; \; \sin\frac{c}{2} = \sqrt[2]{\frac{-\cos\sigma.\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\alpha.\sin\beta}} \; ; \; \operatorname{cotg}\frac{c}{2} = \sqrt[2]{\frac{\cos(\sigma-\alpha).\cos(\sigma-\beta)}{-\cos\sigma.\cos(\sigma-\gamma)}}$$

Oder, mit der Abkürzung:
(zu vergleichen ist 9)

$$K = +\sqrt[2]{\frac{\cos(\sigma-\alpha).\cos(\sigma-\beta).\cos(\sigma-\gamma)}{-\cos\sigma}}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{a}{2} = \frac{K}{\cos(\sigma-\alpha)} \; ; \; \operatorname{cotg}\frac{b}{2} = \frac{K}{\cos(\sigma-\beta)} \; ; \; \operatorname{cotg}\frac{c}{2} = \frac{K}{\cos(\sigma-\gamma)} .$$

$\Sigma = +\sqrt[2]{-\cos\sigma\cdot\cos(\sigma-\alpha)\cdot\cos(\sigma-\beta)\cdot\cos(\sigma-\gamma)}$ heisst der „Polareckensinus" oder die „Coamplitude" des sphärischen Dreiecks. Es ist nach:

$$\sin a = \frac{2\Sigma}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}\;;\quad \sin b = \frac{2\Sigma}{\sin\gamma\cdot\sin\alpha}\;;\quad \sin c = \frac{2\Sigma}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}\,.$$

6. Durch Auflösung von $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ und Einsetzen der unter 5 angegebenen Werte erhält man

die Gleichungen von Délambre (auch Gaussche Gleichungen):

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\;;\qquad \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\,.$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\;;\qquad \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\,.$$

7. Durch Division von je zweien der Gleichungen 6 kommen die Neperschen Analogieen:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\;;\qquad \operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}\,.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\;;\qquad \operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}\,.$$

Diese erlauben, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, bequem die Berechnung der anderen beiden Winkel des Dreiecks (ersetzen also den Tangentialsatz der ebenen Trigonometrie) – sowie auch die Lösung der polaren Aufgabe.

8. Die Formel von L'Huilier:

$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt[2]{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}$ liefert den sphärischen Excess ε, also die Dreiecksfläche $r^2\pi\cdot\frac{\varepsilon^\circ}{180^\circ}$, unmittelbar aus den drei Seiten a, b, c des Dreiecks.

9. Die sphärischen Radien r und ρ der dem sphärischen Dreieck umschriebenen resp. einbeschriebenen (kleinen) Kreise sind dargestellt durch:

$$\operatorname{cotg} r = K\;;\qquad \operatorname{tg}\rho = k$$ (Vergl. 5 und 5*)

Aufgaben.

1. Man beweise, dass die im rechtwinkligen Dreieck vom Scheitel des rechten Winkels aus auf die Hypotenuse gefällte sphärische Höhe h den rechten Winkel in zwei Teile γ_1 und γ_2, und die Hypotenuse c in zwei Teile c_1 und c_2 so teilt, dass

$\sin^2 h = tg\, c_1 \cdot tg\, c_2$; $tg^2 a = tg\, c \cdot tg\, c_2$; $tg\, \gamma_2 = \frac{tg\, a}{tg\, b}$ ist!

Weiter ist nach $\cos^2 h = \cos^2\alpha + \cos^2\beta$!

2. Welche Beziehung besteht zwischen der Seite a und dem Winkel α eines gleichseitigen sphärischen Dreiecks? Wie drücken sich die sphärischen Radien des um= und einbeschriebenen Kreise r und ρ durch a und α aus, und welche Beziehung besteht zwischen r und ρ?

3. Man leite für den sphärischen Excess die Formeln ab:

$$tg\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin\gamma}{\cot g\frac{a}{2}\cdot\cot g\frac{b}{2} + \cos\gamma} \quad ; \quad \sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sqrt[2]{\sin s\cdot\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

4. Es sollen die fehlenden Stücke eines sphärischen Dreiecks berechnet werden, wenn gegeben sind:

I) Winkel $\alpha = 96^\circ 48' 12''$; $\beta = 38^\circ 9' 48''$; $\gamma = 72^\circ 36' 24''$

II) Seite $a = 37^\circ 6' 34''$; Winkel $\alpha = 83^\circ 41' 38''$; $\beta = 67^\circ 42' 43''$

5. Man berechne die Kantenwinkel der regulären Polyeder (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder) als Winkel regulärer sphärischer Polygone mit bekannten Seiten! (Kugel um eine Ecke geschlagen!)

6. Man stelle eine Merkregel analog der Neperschen für das rechtwinklig sphärische Dreieck für das sphärische Dreieck mit einer rechten Seite ($c = 90^\circ$) auf.

7. Man stelle Formeln auf für den Radius des umschriebenen Kreises r ausgedrückt durch die Seiten, und für den Radius des einbeschriebenen Kreises ρ ausgedrückt durch die Winkel des sphär. Dreiecks!

4, II, 1908 Trigonometrie. №10

I. Der Satz von Legendre.

Ist auf einer Kugel vom Radius r ein sphärisches Dreieck mit kleinen Seiten vorgelegt, und berechnet man statt dessen ein ebenes Dreieck mit den Seitenlängen $r \cdot \text{arc}\, a$, $r \cdot \text{arc}\, b$, $r \cdot \text{arc}\, c$ – die also gleich den wirklichen Bogenlängen der Seiten des sphärischen Dreiecks sind – so ergeben sich die Winkel des ebenen Dreiecks bis auf Grössen von der vierten Ordnung in $\text{arc}\, a$ genau gleich den je um ein Drittel des sphärischen Excesses verkleinerten Winkeln des sphärischen Dreiecks. Bei geodätischen Dreiecken liegt der Fehler dieser Annahme stets innerhalb der Genauigkeitsgrenze der Messungen.

Kennt man also den Excess eines solchen sphärischen Dreiecks, den man bei geodätischen Messungen aus der annähernd bekannten Dreiecksfläche genau genug abschätzen kann, und verteilt ihn gleichmässig auf die drei Winkel, so kann man nun das Dreieck mit den so verkleinerten Winkeln als ebenes berechnen, und es stellen dann die Seitenlängen des ebenen Dreiecks die Bogenlängen der Seiten des sphärischen Dreiecks dar.

II Die Formeln der ebenen Trigonometrie ergeben sich aus denen der sphärischen, wenn der Kugelradius r unbeschränkt wachsend, die Dreiecksseiten a, b, c aber zugleich in der Art abnehmend gedacht werden, dass $r \cdot \text{arc}\, a$, $r \cdot \text{arc}\, b$, $r \cdot \text{arc}\, c$ endliche Grösse behalten.

III. Differentialformeln für das ebene und das sphärische Dreieck.

Sind die gegebenen Stücke eines Dreiecks mit Unsicherheiten behaftet, und will man die daraus entspringende Unsicherheit der berechneten

Stücke finden, so hat man die Differentiale der letzteren durch die Differentiale der ersteren (als der unabhängigen Variabeln) ausgedrückt aufzustellen.

Ist z. B. Seite a und b, sowie Winkel γ gegeben, und zwar mit den Fehlern (Δa) und (Δb) – in der gewählten Längeneinheit ausgedrückt –, sowie mit $(\Delta \gamma)$ – in Sekunden ausgedrückt – behaftet, so folgt aus dem Cosinussatze $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$ durch Differentiation der Fehler von c

$$(\Delta c) = \frac{a - b\cos\gamma}{c}.(\Delta a) + \frac{b - a\cos\gamma}{c}.(\Delta b) + \frac{ab\sin\gamma}{c}.(\Delta\gamma)''.\frac{1}{\rho''}$$

$$= \cos\beta.(\Delta a) + \cos\alpha.(\Delta b) + a.\sin\beta.\frac{(\Delta\gamma)''}{\rho''}$$

Dabei ist $\rho'' = 206\,264{,}8''$; $\log\rho'' = 5{,}314\,4251..$ (vergl. Blatt 1).

Bei Zahlenrechnungen kann man statt solcher Differentialformeln die äquivalente Rechnung mit logarithmischen Incrementen zur Ermittelung der Unsicherheit der Resultate benutzen.

Aufgaben.

1. Zwei Punkte P_1 und P_2 sind von O aus angezielt, und ihre Winkel h_1 und h_2 gegen die Horizontalebene, sowie ihre Azimute (Winkel ihrer Vertikalebenen gegen die Meridianebene) a_1 und a_2 gemessen. Man suche den Höhenwinkel und das Azimut des Halbirungsstrahles des Winkels P_1OP_2!

2. Von einer Ecke eines gegebenen sphärischen Dreiecks aus sollen grösste Kreise gezogen werden, die die Fläche des Dreiecks in 3 gleiche Teile zerlegen!

3. Man gebe die Lage desjenigen grössten Kugelkreises der Erde der durch zwei Orte von der geographischen Länge und Breite l_1 und b_1, resp. l_2 und b_2 gelegt ist, gegen den Aequator an!

4. Von einem sphärischen Dreieck der (als Kugel vom Radius 6370 anzunehmenden) Erdoberfläche ist die Seitenlänge $a = 62091{,}22$ m; weiter Winkel $\beta = 57°14'19{,}4''$ und Winkel $\gamma = 46°51'41{,}1''$ gegeben. Man berechne unter Anwendung des Satzes von Legendre die anderen Seitenlängen! (Siebenstellige Logarithmen nötig.)

11, II, 1908 **Trigonometrie.** № 11

Aufgaben.

1. Wie gross ist die Seite: a) eines regulären sphärischen Dreiecks b) eines regulären sphärischen Vierecks, wenn die Fläche dieser Figur $\frac{1}{10}$ der Kugelfläche beträgt?

2. Ein gleichseitiges sphärisches Dreieck und sein Polardreieck sollen zusammen gerade $\frac{1}{3}$ der Kugelfläche bedecken. Man bestimme daraus die Seite und den Winkel des Dreiecks!

3. Die Halbirungspunkte der aufeinander folgenden Seiten des regelmässigen sphärischen Fünfecks, dessen Seite $a = 51°40'$ ist, werden durch Hauptkreisbogen verbunden. Wie verhalten sich die Flächeninhalte des ursprünglichen, und des durch die Konstruktion entstandenen Fünfecks?

4. Wenn in einem sphärischen Dreieck c und γ fest gegeben sind, a aber eine kleine Änderung $(= \Delta a)$ erfährt, sollen die entsprechenden daraus folgenden Änderungen der übrigen Stücke des Dreiecks, sowie des Dreiecksinhaltes angegeben werden.

5. Welche Formeln der ebenen Trigonometrie ergeben sich a) aus dem Cotangentensatze; b) aus den Délambre'schen Gleichungen; c) aus der Formel $\operatorname{cotg} r = K$ der sphärischen Trigonometrie?

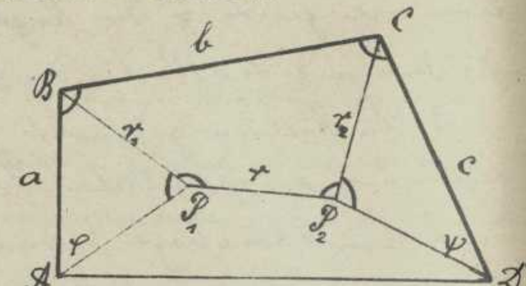
6. Innerhalb des sphärischen Dreiecks ABC, dessen Seiten Bogen von $90°$ sind, liegt der Punkt M so, dass Bogen $AM = 60°$ ist und Bogen BM : Bogen $CM = 1:2$ ist. Wie gross sind diese letzten beiden Bögen, und wie gross der Inhalt des sphärischen Dreiecks BMC?

7. Rio de Janeiro liegt unter $22°56'$ südlicher Breite, Capstadt unter $33°54'$ südlicher Breite. Der Bogen des grössten Kugelkreises – also

ihre kürzeste Entfernung auf der Erdkugel (Radius 6370 km) – beträgt 6080 km. Man berechne die Längendifferenz beider Orte, und den südlichsten Punkt, den ein auf diesem kürzesten Bogen fahrendes Schiff erreichen würde!

8. Ein reguläre vierseitige Pyramide hat die Höhe $h = 15,7$ cm. Ihre Basis hat die Seitenlänge $a = 12,3$ cm. Man berechne die Winkel, welche die Flächen der Pyramide mit einander bilden!

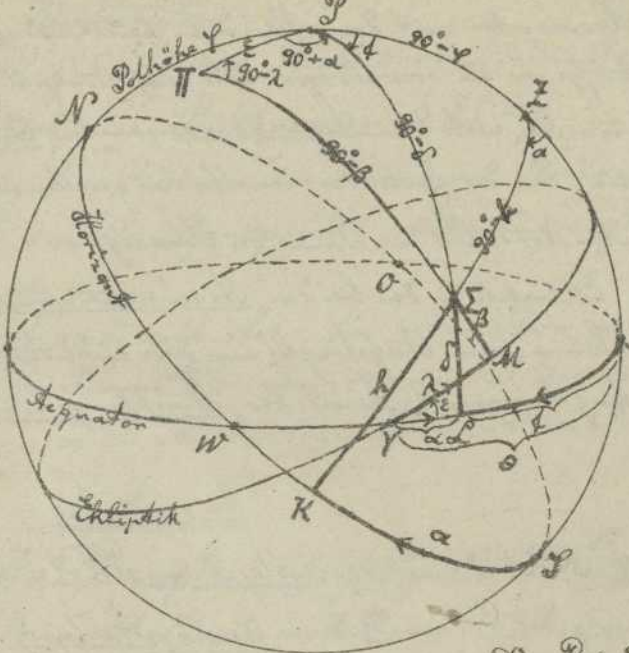
9. P_1 und P_2 sind zwei unbekannte Punkte; A, B, C, D vier ihrer Lage nach vollständig bekannte Punkte. Von P_1 aus ist A, B und P_2 angezielt und die Winkel gemessen worden, ebenso von P_2 aus P_1, C, D. Man zeige, wie sich daraus $BP_1 = r_1$, $CP_2 = r_2$, und $P_1P_2 = r$ berechnen lassen! [Als bekannt zu benutzen sind die in der Figur stark gezeichneten Stücke, anzuwenden der Sinussatz in den Dreiecken ABP_1 und CDP_2, und der Projektionssatz im Viereck BCP_2P_1!]



10. Wenn man die Fläche eines ebenen Quadrates, dessen Seitenlänge gleich der zu 1° gehörigen Bogenlänge ist, als einen „Quadratgrad" bezeichnet, wie viele Quadratgrade Fläche besitzt dann die ganze Kugel? Wie viele Quadratgrade Fläche besitzt weiter ein sphärisches Quadrat auf der Kugel, dessen Seite a) $= 10^\circ$; b) $= 1^\circ$; c) $= 1'$ ist? Wie viele Quadratgrade Fläche liegen zwischen zwei Meridianen vom Winkel 1°, wie viele zwischen den Parallelkreisen von der Breite φ° und $(\varphi+1)^\circ$, speziell zwischen dem Äquator und dem Parallelkreise von der Breite 1°?

18, II, 1908 **Trigonometrie.** № 12

Die Coordinatensysteme auf der Himmelskunde.



1. Als „scheinbaren Horizont" eines Ortes bezeichnet man die im Beobachtungsorte senkrecht zur Richtung der Schwere gelegte Ebene, als „wahren Horizont" die Parallelebene dazu durch den Erdmittelpunkt. Bei Fixsternbeobachtungen kann der Unterschied vernachlässigt werden.

Die Grenze des Sichtbaren reicht wegen der Refraktion des Lichtes noch über den scheinbaren Horizont hinaus.

Die Pole des Horizontes auf der Himmelskugel heissen der Zenith Z, und der Nadir des Beobachtungsortes.

2. Als „Aequator" bezeichnen wir denjenigen Grosskreis der Himmelskugel, dessen Punkte bei der täglichen Bewegung der Sterne einen grössten Kreis – eben den Aequator selbst – beschreiben. Die Pole des Aequator, der Nordpol P und der Südpol, bleiben bei der scheinbaren täglichen Bewegung der Sterne am Platze. Die nicht im Aequator befindlichen Sterne beschreiben (kleine) Parallelkreise um die „Weltaxe" Nordpol – Südpol.

3. Als „Ekliptik" bezeichnen wir denjenigen Grosskreis der Himmelskugel, der alle die Sterne enthält, deren Ort von der Sonne im Laufe ihrer scheinbaren jährlichen Bewegung erreicht wird. Zu ihr gehören als Pole der nördliche (Π) und der südliche Ekliptikpol.

4. Als „Meridian" des Beobachtungsortes bezeichnen wir den Grosskreis durch den Nord= und Südpol, und den Zenith des Ortes; spezieller noch diejenige

Hälfte dieses Kreises vom Nordpol bis zum Südpol, die den Zenith enthält. Der Bogen PZ ist das Complement der <u>geographischen Breite</u> (oder der „<u>Polhöhe</u>" φ) des Beobachtungsortes.

5. Die Schnittpunkte des Horizontes mit dem Meridian heissen der <u>Südpunkt</u> und der <u>Nordpunkt</u> des Horizontes, je wie sie dem Südpol oder dem Nordpol näher liegen. Die Schnittpunkte des Horizontes mit dem Aequator heissen der <u>Ostpunkt</u> und der <u>Westpunkt</u> des Horizontes. Von der Seite des Zeniths her gesehen erfolgt die Drehung (je um 90°) Süd-West-Nord-Ost im Sinne des Uhrzeigers.

Der Aequator schneidet die Ekliptik in den beiden „<u>Aequinoktialpunkten</u>". Derjenige Schnittpunkt, den die Sonne beim Aufsteigen aus der südlichen in die nördliche Hälfte der Himmelskugel passiert, heisst der „<u>Frühlingspunkt</u>" ♈, – der andere der Herbstpunkt.

<u>System I.</u>

Bezogen auf den <u>Horizont</u> SWNO und den <u>Meridian</u> PZAS des Beobachtungsortes wird die Orientirung des Sternes Σ durch dessen „<u>Azimut</u>" $SK = a$ und „<u>Höhe</u>" $\Sigma K = h$ (– statt dieser auch durch die „<u>Zenithdistanz</u>" $Z\Sigma = 90° - h$) dargestellt. Das Azimut wird, vom Zenith aus gesehen, im Sinne des Uhrzeigers auf dem Horizonte gezählt, und erscheint am Zenith als Winkel vom Kreisbogen Zenith-Süden aus bis zum Bogen Zenith-Stern.

<u>System II.</u>

Bezogen auf den <u>Aequator</u> AWBO und den <u>Meridian</u> PZAS des Beobachtungsortes wird die Lage von Σ durch seinen „<u>Stundenwinkel</u>" $AL = t$, und seine „<u>Deklination</u>" $\Sigma L = \delta$ (– statt dieser auch durch seine „<u>Poldistanz</u>" vom Nordpol $P\Sigma = 90° - \delta$) dargestellt. Der Stundenwinkel wird, vom Nordpol aus gesehen, im Sinne des Uhrzeigers auf dem Aequator gezählt, und erscheint am Nordpol als Winkel vom Meridianbogen Nordpol-Zenith aus bis zum Bogen Nordpol-Stern. Der Westpunkt hat also stets den Stundenwinkel 90° (ebenso wie das Azimut 90°)

Der Stundenwinkel des Frühlingspunktes ♈ heisst die „Sternzeit" für den Beobachtungsort und den Moment der Beobachtung, und wird mit dem Buchstaben Θ bezeichnet.

System III.

Bezogen auf den Aequator und den Frühlingspunkt ♈ ist die Lage von Σ durch seine „Rektascension" $♈L = \alpha$, und die Deklination $\Sigma L = \delta$ dargestellt. Die Rektascension wird, vom Nordpol aus gesehen, im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers gezählt, und zwar auf dem Aequator vom Frühlingspunkte aus.

Satz: Es gilt stets, für jeden Stern, jede Zeit, und jeden Beobachtungsort die Gleichung: Der Stundenwinkel des Sternes + der Rektascension des Sternes = der gleichzeitigen Sternzeit des Ortes: $t + \alpha = \Theta$

System IV.

Bezogen auf die Ekliptik und den Frühlingspunkt ♈ ist die Lage von Σ durch seine „Länge" $♈M = \lambda$, und seine „Breite" $\Sigma M = \beta$ (– statt dieser bisweilen auch durch seine „Distanz vom nördlichen Pole der Ekliptik $\Pi\Sigma = 90° - \beta$) dargestellt. Die Länge wird, vom nördlichen Ekliptikpole Π aus gesehen, im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers auf der Ekliptik vom Frühlingspunkte aus gezählt.

Die Werte von Azimut, Stundenwinkel, Rektascension, und Länge liegen zwischen $0°$ und $360°$. Doch werden die drei letzten Grössen gewöhnlich in Zeitmass angegeben, so dass 1^h $15°$, 1^m $15'$, 1^s $15''$, umgekehrt $1°$ 4^m, $1'$ 4^s entspricht. Die Werte von Höhe, Deklination, und Breite liegen zwischen $-90°$ und $+90°$; der Wert für die Höhe gewöhnlich zwischen $0°$ und $+90°$.

---

6. Aequator, Ekliptik, und Frühlingspunkt sind inbezug auf ihre Lage zum Fixsternhimmel nur sehr langsam veränderlich, so dass sie bei den weitaus meisten Aufgaben als in fester Lage zu einander und zu den Sternen angesehen werden können. Genauer beträgt das jährliche Zurückweichen

des Frühlingspunktes in der Länge 50,"25 („Praecession" 50,"25), so dass also die Länge eines Sternes jährlich um 50,"25 wächst. Entsprechend beträgt die Präcession auf dem Aequator 46,"1, so dass die Rektascension des Frühlingspunktes jährlich um 46,"1 wächst. Der Winkel der Ekliptik gegen den Aequator („Schiefe der Ekliptik" ε) ist für das Jahr 1900 + T als 23° 27' 8,"03 – 0,"48 T anzusetzen. Während die Lage der Ekliptik inbezug auf die Fixsterne als sehr angenähert fest anzusehen ist, beschreibt der Nordpol in rund 25800 Jahren am Fixsternhimmel einen Kreis von $23\frac{1}{2}$° Radius um den Ekliptikpol.

7. Sieht man von Präcession, Nutation, und Eigenbewegung ab, so sind die Rektascension, Deklination, Länge und Breite für jeden Fixstern constante Zahlen, während sein Azimut, die Höhe und der Stundenwinkel im Laufe des Tages wechseln, und für verschiedene Beobachtungsorte verschieden sind; ebenso ändert sich die Sternzeit. Die Stundenwinkel und die Sternzeit wachsen am selben Orte gleichmässig, und proportional der mittleren Sonnenzeit (Uhrzeit). Die gleichzeitigen Stundenwinkel desselben Sternes für verschiedene Beobachtungsorte geben als Differenz (gleich der Differenz der Sternzeiten) die Differenz der geographischen Längen der Orte.

Für die Sonne ist die Breite β stets gleich Null zu setzen; die Länge λ nimmt von Null zur Zeit der Frühlingstag- und nachtgleiche im Jahre um 360° (doch nur ganz grob angenähert gleichmässig) zu. 365,2422 mittlere Sonnentage sind gleich 366,2422 Sterntagen.

8. Der Stundenwinkel der Sonne heisst die „wahre Sonnenzeit". Die „mittlere Sonnenzeit" erhält man durch Addition der aus einer Tabelle zu entnehmenden „Zeitgleichung" (im Betrage bis ± 16 Minuten) zur wahren Sonnenzeit. Um die „mitteleuropäische Zeit" zu erhalten, hat man zur mittleren Sonnenzeit noch einen für den Ort constanten Betrag [= 4 Minuten mal der Differenz 15° – geographische Länge des Ortes östlich von Greenwich in Graden] zu addieren. Für die Münchner Sternwarte ist dieser Betrag 13 Min. 34 Sek.

25/II/1908 **Trigonometrie.** № 13

9. Der Übergang von einem der Coordinatensysteme I bis IV des Blattes 12 zu einem anderen erfolgt durch Benützung der Dreiecke $P\Sigma Z$ (Seiten $90°-\delta$, $90°-h$, $90°-\varphi$; Winkel $180°-a$ bei Z, t bei P) und $\Pi\Sigma P$ (Seiten $90°-\beta$, $90°-\delta$, ε; Winkel $90°+\alpha$ bei P, $90°-\lambda$ bei Π).

Dabei ist eventuell noch die Formel $t+\alpha=\Theta$ zuzuziehen. Um die Sternzeit Θ zu erhalten addirt man zur mittleren Ortszeit der Beobachtung (= dem Stundenwinkel der mittleren Sonne) die einer Tafel zu entnehmende Rektascension der mittleren Sonne für die Zeit der Beobachtung.

Aufgaben.

1. Wie lange dauert der kürzeste Tag in München, geograph. Breite $48°8',8$? Dabei ist für den Tag die grösste negative Deklination der Sonne als konstante Deklination anzunehmen. In welcher Himmelsrichtung geht an diesem Tage die Sonne auf?

2. Wenn nun die Strahlenbrechung für 0° scheinbarer Höhe $35',4$ beträgt, und der Sonnenhalbmesser $16',0$ beträgt, um wie viel ändert sich dann die berechnete Zeit und Richtung für den oberen Sonnenrand?

3. Man rechnet die bürgerliche Dämmerung so lange, bis die Sonne $6\frac{1}{2}°$ unter den Horizont gesunken ist, die astronomische Dämmerung, bis sie 18° unter dem Horizonte steht. Wie lange dauert demnach die Dämmerung für den Fall der Aufgabe 1?

4. Man berechne die Zeit des Jahres, während welcher unter 62° nördlicher Breite die ganze Nacht bürgerliche Dämmerung herrscht, unter der (groben) Annahme, dass die Sonne am 21 März den Frühlingspunkt passirt, und gleichmässig in der Länge fortschreitet?

5. Um wie viel ändert sich die Deklination der Sonne höchstens, um

wie viel die Rektascension mindestens innerhalb eines Tages, wenn gleichmässiges Fortschreiten der Sonne in der Länge angenommen wird?

6. Welches ist das grösste Azimut, das der Polarstern (Deklination $88^\circ 48{,}'4$) in München erreichen kann? Was ergibt sich analog für 80° nördliche Breite (Spitzbergen)?

7. An einem Orte von bekannter Polhöhe φ ist ein Stern, dessen Deklination δ und Rektascension α bekannt sind, angezielt, und seine Höhe h bestimmt worden. Wie kann man daraus die Sternzeit der Beobachtung finden?

8. Derselbe Stern ist zweimal, und zwar als Σ_1 in der Höhe h_1 unter dem Azimut a_1, und später als Σ_2 in Höhe h_2, Azimut a_2 gemessen worden. Wie kann man daraus die Deklination des Sternes, und die geographische Breite des Beobachtungsortes finden?

9. Wenn h_1, h_2, h_3 die Höhen desselben Sternes (auf ein und derselben Seite des Meridians) beobachtet sind, und die zwischen den drei Richtungen gemessenen Horizontalwinkel (Azimutdifferenzen) d_{12} und d_{23} sind, soll die Deklination des Sternes, die geographische Breite des Ortes, und die Lage des Meridians gefunden werden!

Zahlenbeispiel: $h_1 = 25^\circ 42'$; $h_2 = 42^\circ 12'$; $h_3 = 50^\circ 10'$; $d_{12} = 28^\circ 24'$; $d = 26^\circ 4'$.

10. Am 22 Juli 1907, Abends $9^h 15{,}^m5$ mitteleuropäischer Zeit sei in München (östliche Länge von Greenwich $0^h 46{,}^m4$) die Höhe des Polarsternes ($\delta = 88^\circ 48{,}'4$; $\alpha = 1^h 26{,}^m0$) gleich $47^\circ 15{,}'6$ (nach Befreiung von der Strahlenbrechung) beobachtet. Als Rektascension der mittleren Sonne in diesem Momente wird $7^h 57{,}^m7$ dem Jahrbuch entnommen.

Wie gross ist a) die mittlere Ortszeit, b) die Ortssternzeit der Beobachtung, c) der Stundenwinkel des Polarsternes? Wie berechnet sich dann weiter die Breite von München?

9, III, 1908 **Trigonometrie.** № 14

Semestralprüfung.

1. Man berechne x

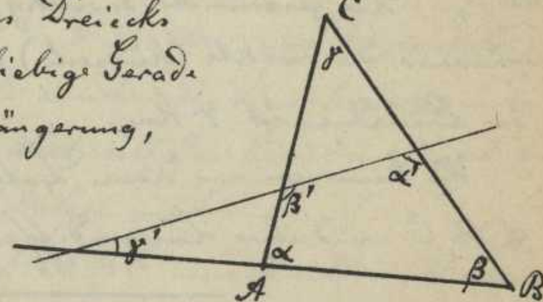
a) aus der Gleichung: $\operatorname{arc\,tg}(x) + \operatorname{arc\,tg}(2x) + \operatorname{arc\,tg}(3x) = 0$;

b) aus der Gleichung: $\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}(2x) + \operatorname{tg}(3x) = 0$!

2. Zwischen den Winkeln α, β, γ eines Dreiecks und den Winkeln α', β', γ', die eine beliebige Gerade mit den Dreiecksseiten (resp. deren Verlängerung, Figur!) bildet, besteht die Beziehung:

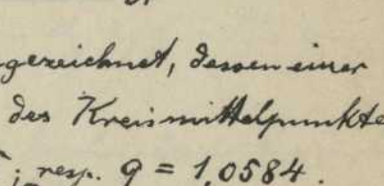
$\sin\alpha . \sin\alpha' = \sin\beta . \sin\beta' + \sin\gamma . \sin\gamma'$.

Beweis!



3. In einen Kreis ist ein Dreieck ABC eingezeichnet, dessen einer Winkel γ gleich $47^\circ 16' 42''$ ist. Der Abstand des Kreismittelpunktes O von den Seiten BC und CA ist $p = 2{,}4765$; resp. $q = 1{,}0584$. Wie gross ist der Radius des Kreises?

4. Von den drei Punkten A, B und C, die in einer horizontalen Geraden liegen sollen, ist je der Höhenwinkel der Bergspitze P ($\alpha = 15^\circ$, $\beta = 10^\circ$, $\gamma = 8^\circ$) gemessen worden. Daraus, und aus den bekannten Entfernungen $AB = p = 320$ m, $BC = q = 270$ m soll die Höhe x von P über A, B, C in Metern berechnet werden!



5. In einem sphärischen Viereck $ABCD$ sind zwei Gegenwinkel bei A und C Rechte; der Winkel bei B ist 120°, der bei D 80°. Weiter soll die sphärische Diagonale AC gleich 50° sein. Man berechne

eine Seite AB des Vierecks!

Zwischen welchen Grenzen müsste die Diagonale AC (statt 50°) gegeben sein, damit bei den angegebenen Werten für die Viereckswinkel die Aufgabe noch eine brauchbare Lösung zuliesse?

6. Ein Schiff fährt auf den beiden verbindenden Grosskreisbögen vom Orte A über Ort C nach B. Das Azimut der Abfahrt in A sei a_1°; das der Ankunft, bezw. Abfahrt in C a_2°, resp. a_3°; dasjenige der Ankunft in B a_4°. Die gesammte zurückgelegte Entfernung beträgt s Kilometer während die direkte (kürzeste) Entfernung AB k Kilometer beträgt; der Erdradius ist r km.

Wie kann man aus diesen Daten die geographischen Breiten der Orte A, B, C, und ihre Längendifferenzen berechnen?

12, V, 1908 — **Trigonometrie.** — № 15

Aufgaben.

1. Von einem ebenen Dreieck kennt man den Winkel γ, den Inkreisradius ρ und die Summe der Ankreisradien. Man berechne die Winkel und die Seiten des Dreiecks! Zahlenrechnung für $\gamma = 72^\circ$; $\rho = 1{,}6$ cm; $S = 15$ cm.
Endlich gebe man an, zwischen welchen Grenzen bei gegebenem ρ und S der Winkel γ liegen muss, damit die Lösung der Aufgabe reell ist!

2. In einem ebenen Tangentenviereck sind gegeben zwei Gegenseiten $a = 12$ cm; $c = 8$ cm; ferner die Fläche Δ zwischen den Vierecksseiten und dem einbeschriebenen Kreise $= 9\ \text{cm}^2$. Endlich soll das Viereck auch noch ein Sehnenviereck sein! Berechnung und Determination!

3. Der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises hat von den Dreiecksseiten je die Entfernungen d, e, f. Wie berechnet sich das Dreieck?

4. Der Mittelpunkt des Dreieck ABC einbeschriebenen Kreises hat von den Dreiecksecken je die Entfernungen g, h, i. Wie gestaltet sich hier die Berechnung?

5. Die Seiten eines sphärischen Vierecks seien a, b, c, d; die sphärischen Diagonalen e und f; der Diagonalenwinkel ε.
Man beweise: $\sin e . \sin f . \cos\varepsilon = \pm[\cos a \cos c - \cos b \cos d]$!

6. Wie lang ist der kürzeste Weg für die englischen Transatlantischen Telegraphenkabel, welche die Insel Valentia bei Irland mit Neufundland verbinden? Breite des Anfangspunktes $51^\circ 55'$ nördlich; des Endpunktes $47^\circ 42'$ nördlich. Längenunterschied beider $42^\circ 59'$!

7. Es seien α und δ die Rektascension und die Deklination eines Sternes; λ und β seine astronomische Länge und Breite; ε die Schiefe der

Ekliptik. Man beweise die Richtigkeit der Formel:

$$\cos\varepsilon = \frac{\sin\beta \cdot tg\lambda + \sin\delta \cdot tg\alpha}{\sin\beta \cdot tg\alpha + \sin\delta \cdot tg\lambda}$$

8. Man berechne die Änderung der Rektascension und der Deklination eines Sternes in der Zeit vom Jahre 1900–1908 infolge der Präcession der Äquinoktien, wenn seine Coordination auf den Äquator bezogen 1900 $\alpha = 5^h 41^m 17{,}2^{sec}$ und $\delta = 83^\circ 57' 26''$ waren!

Zu beachten ist die unten stehende Correctur zu Blatt 12!

9. An einer Sonnenuhr in München (geograph. Breite 48°8') wird der Schatten des (zur Weltaxe parallelen) Zeigers beobachtet.

a). Die Ebene der Sonnenuhr ist horizontal. Der beobachtete Schatten bildet den Winkel 45° gegen die Nordrichtung.

b) die Ebene der Sonnenuhr ist vertical, und der Azimut dieser Verticalwand beträgt 15°. Der beobachtete Schatten bildet den Winkel 45° gegen die Lotrichtung.

Man gebe für beide Fälle je die wahre Zeit der Beobachtung an!

10. Zwei nahe Orte auf der Erde besitzen die geographischen Längen und Breiten l und φ, resp. $l+\Delta l$, $\varphi+\Delta\varphi$. Wenn nun am ersten Orte die Höhe und das Azimut eines Sternes gleich h und a beobachtet sind, wie gross war dann Höhe und Azimut desselben Sternes im gleichen absoluten Zeitmoment (— oder zweitens um den Zeitbetrag Δt später —) am zweiten Orte?

<u>Correctur.</u> zu Blatt 12, Seite 4, Zeile 3 von oben.

Statt „Rektascension eines Sternes" lies
„Rektascension des Frühlingspunktes."

2. VI. 1908. **Trigonometrie.** № 16

Aufgaben.

1. Vom Transversalenschnittpunkt im Dreieck ABC seien die Lote MD, ME, MF auf die Seiten gefällt. Man beweise, dass:

a) der Inhalt des Dreiecks $DEF = \frac{1}{18}(a^2+b^2+c^2)\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ ist;

b) die Summe der Kreisflächen um die Vierecke $DMEC$, $EMFA$, $FMDB$ gleich $\frac{\pi}{12}(a^2+b^2+c^2)$ ist!

2. Gegeben sind die drei Punkte A, B, C, dann eine Visur von B nach dem unbekannten Punkte D, etwa Winkel CBD. Weiter weiss man, dass beim Rückwärtseinschneiden von D aus AB und BC unter demselben (aber unbekannten) Winkel erscheint. Wie findet man die Lage von D?

3. An einem Tage um 3 Uhr mitteleuropäische Zeit, während die Sonnendeklination $+20°35'$ beträgt, wirft eine Säule auf die Böschung eines Berges, auf dessen Spitze sie steht, einen Schatten von 17 m Länge. Der Abfall des Berges beträgt $15\frac{1}{2}°$, der Ort ist München ($\varphi = 48°8'$), die Zeitgleichung beträgt $+6$ Minuten. Wie hoch ist die Säule?

4. Im Inneren eines Quadrates ist ein Punkt eingezeichnet; seine Entfernungen von den Ecken haben die Längen a, b, c, d. Welche Bedingungsgleichung muss zwischen a, b, c, d erfüllt sein, und wie gross ist die Seite des Quadrates? Wie gross die Winkel der Verbindungslinien?

5. Im sphärischen Dreieck ABC sind die Winkel $\alpha = 60°$, $\beta = 20°$, $\gamma = 80°$ gegeben. Durch den Mittelpunkt der Seite AB soll ein Grosskreis so gelegt werden, dass er die Fläche des Dreiecks halbirt! Welchen Winkel muss er gegen BC bilden?

6. Zwei auf demselben Meridian in den nördlichen Breiten $\varphi_1 = 48°16'$ und $\varphi_2 = 40°52'$ liegende Orte (Linz und Neapel) haben am längsten Tage zu einer gewissen Nachmittagszeit gleiche Sonnenhöhe. Um wieviel Uhr (nach

mittlerer Ortszeit) ist dies der Fall, und wie gross ist die betreffende Sonnenhöhe? Zeitgleichung $+1^m 30^{sec}$.

7. Welches ist die geographische Breite eines Ortes, für den die Sterne Sirius (Rektasc. $100^\circ 0' 36''$, Dekl. $-16^\circ 33' 31''$) und Rigel (Rektascension $77^\circ 14' 26''$, Dekl. $-8^\circ 20' 12''$) gleichzeitig aufgehen?

8. Man setze den Gang der Lösung der Pothenotschen Aufgabe (Rückwärtseinschneiden) auf der Kugel an!

9. Im sphärischen Dreieck ABC (Seiten a, b, c, Excess ε) sind die Mittelpunkte der Seiten A' (von BC), B', C' durch Hauptkreisbögen mit einander verbunden. Man beweise, dass:

$$\cos\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\cos B'C'}{\cos\frac{a}{2}} = \frac{\cos C'A'}{\cos\frac{b}{2}} = \frac{\cos A'B'}{\cos\frac{c}{2}} \quad \text{ist!}$$

Weiter berechne man die Fläche des Dreiecks $A'B'C'$, wenn ursprünglich nur die Winkel des Dreiecks ABC $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 80^\circ$, $\gamma = 100^\circ$ gegeben sind!

10. Wenn in einem sphärischen Dreieck ein Winkel gleich der Summe der beiden anderen ist, so ist die grösste Seite gleich dem Doppelten der Entfernung ihres Mittelpunktes von der gegenüberliegenden Ecke! (Analogie zum ebenen Dreieck. Man suche noch andere ähnliche Analogieen!)

11. Über den 3 Seiten eines gegebenen ebenen Dreiecks ABC sind gleichschenklige Dreiecke mit dem Basiswinkel ϑ errichtet. Man zeige, dass, wenn das von ihren Spitzen gebildete Dreieck $A'B'C'$ dem gegebenen ähnlich werden soll, ϑ der Bedingung genügen muss

$$tg\,\vartheta = \frac{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{1 + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma} \quad !$$

12. Wird durch P ein beliebiger Hauptkreis gelegt, der einen gegebenen Kleinkreis in A und B schneidet, so ist das Produkt

$tg\left(\frac{1}{2} PA\right) \cdot tg\,\frac{1}{2}(PB)$ constant, d.h. von der speziellen Wahl des Hauptkreises unabhängig. Beweis!

Werden von einem beliebigen Punkte H eines Hauptkreises $\mathcal{H}$ die beiden sphärischen Tangenten HA und HB an einen gegebenen Kleinkreis gelegt, so ist: $tg\,\frac{1}{2}(\mathcal{H} HA) \cdot ctg\,\frac{1}{2}(\mathcal{H} HB)$ von der Wahl von H auf $\mathcal{H}$ unabhängig.

16, VII, 1908

Trigonometrie.

№ 17

Semestralprüfung.

1. Von einem sphärischen Dreieck ist gegeben: der Umfang $a+b+c$, die Fläche F, und ein Winkel γ. Wie berechnen sich die Seiten und die Winkel?

Zahlen: $a+b+c = 75^\circ$; $F = \frac{1}{180}$ · Kugelfläche; $\gamma = 30^\circ$.

Wie gross darf bei den gegebenen Zahlen für $a+b+c$ und γ F höchstens sein, damit ein reelles Resultat kommt? (Gleichschenkliges Dreieck!)

2. Um welche Zeit (Sternzeit) erscheinen zwei Sterne mit den Rektascensionen α_1, α_2 und den Deklination δ_1, δ_2 an einem Orte von gegebener Breite φ unter demselben Azimuth?

Zahlenbeispiel: $\alpha_1 = 4^h\,17^m\,12{,}5^{sec}$; $\delta_1 = 22^\circ 36' 17''$; $\varphi = 53^\circ 51' 34''$
$\alpha_2 = 6^h\,21^m\,48{,}25^{sec}$; $\delta_2 = 39^\circ 8' 3''$

3. In einem Sehnenviereck (in der Ebene) sind die Seiten bekannt. Wie berechnen sich die Winkel, und der Flächeninhalt? Weiter sollen zu den Seiten in der Entfernung x Parallele gezogen werden, so dass das entstehende neue Sehnenviereck den doppelten Inhalt wie das ursprüngliche hat. Wie gross ist x zu wählen?

4. Man beweise die Formel für das sphärische Dreieck:

$\sin a \cdot \sin b + \cos a \cos b \cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta \cos c$!

5. Das Rhombendodekaeder wird von 12 kongruenten Rhomben begrenzt, die je unter dem Kantenwinkel 120° zusammenstossen. Es besitzt 8 dreiseitige, und 6 vierseitige Ecken. Man berechne aus beiden Arten von Ecken den Rhombenwinkel, und, wenn die Kantenlänge gleich a gegeben ist, auch das Volumen des Körpers!

Trigonometrie.

A) Ebene Trigonometrie.

1. Winkelmaße.

a) Gradmaß.

In der Sexagesimalteilung ist der rechte Winkel $R = 90^\circ$, $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$; in der Centesimalteilung hingegen ist $R = 100^g$, $1^g = 100^{`}$, $1^{`} = 100^{``}$. Mißt ein Winkel in Sexagesimalteilung α° und in Centesimalteilung α^g, so ist $\alpha^\circ = \frac{9}{10}\alpha^g$ und umgekehrt $\alpha^g = \frac{10}{9}\alpha^\circ$.

b) Bogenmaß.

Der im Bogenmaß ausgedrückte Winkel $\hat{\alpha}$ ist die Länge des mit dem Halbmesser 1 beschriebenen, zwischen beiden Winkelschenkeln liegenden Kreisbogens.

Zwischen Bogenmaß und Gradmaß bestehen die folgenden Beziehungen:

$$\alpha^\circ = \frac{180}{\pi}\cdot\hat{\alpha} = \varrho^\circ\cdot\hat{\alpha}; \quad \alpha' = \frac{180}{\pi}\cdot 60\cdot\hat{\alpha} = \varrho'\cdot\hat{\alpha}; \quad \alpha'' = \frac{180}{\pi}\cdot 60\cdot 60\cdot\hat{\alpha} = \varrho''\hat{\alpha}$$

$$\hat{\alpha} = \operatorname{arc}(\alpha^\circ\beta'\gamma'') = \frac{\pi}{180}\cdot\alpha^\circ + \frac{\pi}{180\cdot 60}\cdot\beta' + \frac{\pi}{180\cdot 60\cdot 60}\cdot\gamma'' = \frac{\alpha^\circ}{\varrho^\circ} + \frac{\beta'}{\varrho'} + \frac{\gamma''}{\varrho''};$$

Zahlenwerte für die Umwandlungskonstanten.

$\pi = 3{,}14\,159\,265 \qquad \log\pi = 0.49\,714\,987$

$\varrho^\circ = 57{,}29\,577\,951 \qquad \log\varrho^\circ = 1.75\,812\,263$

$\varrho' = 3\,437{,}74\,677 \qquad \log\varrho' = 3.53\,627\,388$

$\varrho'' = 206\,264{,}806 \qquad \log\varrho'' = 5.31\,442\,513$

$$\frac{1}{\varrho^\circ} = 0{,}01\,745\,329 \qquad \lg \frac{1}{\varrho^\circ} = 8.24\,187\,737 - 10$$

$$\frac{1}{\varrho'} = 0{,}00\,029\,089 \qquad \log \frac{1}{\varrho'} = 6.46\,372\,612 - 10$$

$$\frac{1}{\varrho''} = 0{,}00\,000\,485 \qquad \log \frac{1}{\varrho''} = 4.68\,557\,487 - 10$$

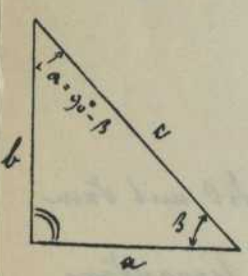
Die entsprechenden Werte für Zentesimalteilung sind:

$$\varrho^g = 63{,}66\,197\,724 \qquad \log \varrho^g = 1.80\,388\,012$$

$$\frac{1}{\varrho^g} = 0{,}01\,570\,796 \qquad \log \frac{1}{\varrho^g} = 8.19\,611\,989 - 10$$

2. Die goniometrischen Funktionen.

a) Definition für spitze Winkel am rechtwinkeligen Dreieck.



$$\sin\beta = \frac{\text{gegenüberl. Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} = \cos(90^\circ-\beta)$$

$$\cos\beta = \frac{\text{anliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c} = \sin(90^\circ-\beta)$$

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\text{gegenüberl. Kathete}}{\text{anliegende Kathete}} = \frac{b}{a} = \mathrm{ctg}(90^\circ-\beta)$$

$$\mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\text{anliegende Kathete}}{\text{gegenüberliegende Kathete}} = \frac{a}{b} = \mathrm{tg}(90^\circ-\beta)$$

$$\sec\beta = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{anliegende Kathete}} = \frac{c}{a} = \mathrm{cosec}(90^\circ-\beta)$$

$$\mathrm{cosec}\,\beta = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{gegenüberl. Kathete}} = \frac{c}{b} = \sec(90^\circ-\beta)$$

$\sin\beta$ u. $\cos\beta$, $\mathrm{tg}\,\beta$ u. $\mathrm{ctg}\,\beta$, $\sec\beta$ u. $\mathrm{cosec}\,\beta$ sind paarweise Cofunktionen.

Es ist stets $\quad f(\beta) = \mathrm{co}f(90^\circ-\beta)$;

ferner: $\quad \mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$; $\mathrm{ctg}\,\beta = \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$;

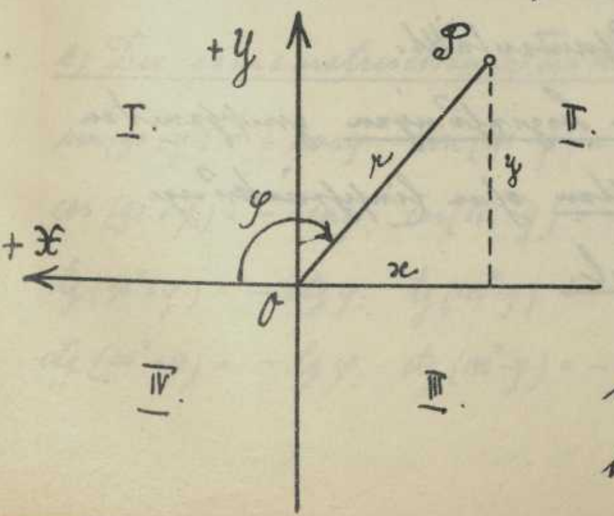
$$\sin\beta\,\mathrm{cosec}\,\beta = \cos\beta\cdot\sec\beta = \mathrm{tg}\,\beta\cdot\mathrm{ctg}\,\beta = 1$$

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1;\ \sec^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta} = 1+\mathrm{tg}^2\beta;\ \mathrm{cosec}^2\beta = \frac{1}{\sin^2\beta} = 1+\mathrm{ctg}^2\beta$$

b) Zusammenhang der goniometrischen Funktionen.

Es ist	ausgedrückt durch						rational durch sin β und cos β
	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$tg\,\beta$	$ctg\,\beta$	$\sec\beta$	$cosec\,\beta$	
$\sin\beta$	$\sin\beta$	$\sqrt{1-\cos^2\beta}$	$\frac{tg\beta}{\sqrt{1+tg^2\beta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\beta}}$	$\frac{\sqrt{\sec^2\beta-1}}{\sec\beta}$	$\frac{1}{cosec\beta}$	$\sin\beta$
$\cos\beta$	$\sqrt{1-\sin^2\beta}$	$\cos\beta$	$\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta}}$	$\frac{ctg\beta}{\sqrt{1+ctg^2\beta}}$	$\frac{1}{\sec\beta}$	$\frac{\sqrt{cosec^2\beta-1}}{cosec\beta}$	$\cos\beta$
$tg\,\beta$	$\frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\beta}}{\cos\beta}$	$tg\beta$	$\frac{1}{ctg\beta}$	$\sqrt{\sec^2\beta-1}$	$\frac{1}{\sqrt{cosec^2\beta-1}}$	$\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$
$ctg\,\beta$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\beta}}{\sin\beta}$	$\frac{\cos\beta}{\sqrt{1-\cos^2\beta}}$	$\frac{1}{tg\beta}$	$ctg\beta$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2\beta-1}}$	$\sqrt{cosec^2\beta-1}$	$\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$
$\sec\beta$	$\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}$	$\frac{1}{\cos\beta}$	$\sqrt{1+tg^2\beta}$	$\frac{\sqrt{1+ctg^2\beta}}{ctg\beta}$	$\sec\beta$	$\frac{cosec\beta}{\sqrt{cosec^2\beta-1}}$	$\frac{1}{\cos\beta}$
$cosec\,\beta$	$\frac{1}{\sin\beta}$	$\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\beta}}$	$\frac{\sqrt{1+tg^2\beta}}{tg\beta}$	$\sqrt{1+ctg^2\beta}$	$\frac{\sec\beta}{\sqrt{\sec^2\beta-1}}$	$cosec\beta$	$\frac{1}{\sin\beta}$

c) Allgemeine Definition der goniometrischen Funktionen mit Hilfe der analytischen Geometrie.



Ein Winkel $+X\,O\,P = \varphi$ ist positiv, wenn man die $+X$-Achse im Uhrzeigersinn (rechtsläufig) um den absoluten Betrag φ drehen muß, damit sie mit dem Winkelschenkel OP zusammen =

fällt. Ist zu diesem Zwecke jedoch eine dem Uhrzeigersinn entgegengesetzte (linksläufige) Drehung notwendig, so ist φ negativ.

Die folgenden Definitionen, welche die goniometrischen Funktionen als Koordinatenverhältnisse geben, gelten für beliebige positive u. negative Winkel.

Es ist:

$$\sin\varphi = \frac{\text{Ordinate}}{\text{Radius}} = \frac{y}{r}; \quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{\text{Abszisse}}{\text{Ordinate}} = \frac{x}{y}$$

$$\cos\varphi = \frac{\text{Abszisse}}{\text{Radius}} = \frac{x}{r}; \quad \sec\varphi = \frac{\text{Radius}}{\text{Abszisse}} = \frac{r}{x}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\text{Ordinate}}{\text{Abszisse}} = \frac{y}{x}; \quad \operatorname{cosec} = \frac{\text{Radius}}{\text{Ordinate}} = \frac{r}{y}$$

x und y sind hierbei die rechtwinkligen Koordinaten eines beliebigen Punktes P auf dem zweiten Winkelschenkel. r ist der Abstand dieses Punktes vom Nullpunkt eines durch den Winkelscheitel gelegten Koordinatensystems, dessen positive X-Achse mit dem ersten Winkelschenkel zusammenfällt.

<u>Die unter 2^a u. 2^b aufgestellten Beziehungen</u> zwischen den goniometrischen Funktionen <u>gelten</u> ohne Einschränkung <u>auch für beliebig große Winkel.</u>

d) Vorzeichen und Verlauf der goniometrischen Funktionen in den verschiedenen Quadranten.

φ wächst von	0° bis 90° I. Quadr.	90° bis 180° II. Quadr.	$180^\circ - 270^\circ$ III. Quadr.	$270^\circ - 360^\circ$ IV. Quadr.
$\sin\varphi$	$+$ $0 \quad +1$	$+$ $+1 \quad 0$	$-$ $0 \quad -1$	$-$ $-1 \quad 0$
$\cos\varphi$	$+$ $+1 \quad 0$	$-$ $0 \quad -1$	$-$ $-1 \quad 0$	$+$ $0 \quad +1$
$tg\,\varphi$	$+$ $0 \quad +\infty$	$-$ $-\infty \quad 0$	$+$ $0 \quad +\infty$	$-$ $-\infty \quad 0$
$ctg\,\varphi$	$+$ $+\infty \quad 0$	$-$ $0 \quad -\infty$	$+$ $+\infty \quad 0$	$-$ $0 \quad -\infty$
$\sec\varphi$	$+$ $+1 \quad +\infty$	$-$ $-\infty \quad -1$	$-$ $-1 \quad -\infty$	$+$ $+\infty \quad +1$
$\operatorname{cosec}\varphi$	$+$ $+\infty \quad +1$	$+$ $+1 \quad +\infty$	$-$ $-\infty \quad -1$	$-$ $-1 \quad -\infty$

e) Die goniometrischen Funktionen von der Form $f(n\cdot 90^\circ \pm \varphi)$.

$\sin(90^\circ+\varphi) = +\cos\varphi$; $\sin(180^\circ-\varphi) = +\sin\varphi$; $\sin(180^\circ+\varphi) = -\sin\varphi$; $\sin(270^\circ-\varphi) = -\cos\varphi$

$\cos(90^\circ+\varphi) = -\sin\varphi$; $\cos(180^\circ-\varphi) = -\cos\varphi$; $\cos(180^\circ+\varphi) = -\cos\varphi$; $\cos(270^\circ-\varphi) = -\sin\varphi$

$tg(90^\circ+\varphi) = -ctg\,\varphi$; $tg(180^\circ-\varphi) = -tg\,\varphi$; $tg(180^\circ+\varphi) = +tg\,\varphi$; $tg(270^\circ-\varphi) = +ctg\,\varphi$;

$ctg(90^\circ+\varphi) = -tg\,\varphi$; $ctg(180^\circ-\varphi) = -ctg\,\varphi$; $ctg(180^\circ+\varphi) = +ctg\,\varphi$; $ctg(270^\circ-\varphi) = +tg\,\varphi$;

$\sin(270°+\varphi) = -\cos\varphi$; $\sin(360°-\varphi) = \sin(-\varphi) = -\sin\varphi$; $\sin(n\cdot 360°+\varphi) = +\sin\varphi$;
$\cos(270°+\varphi) = +\sin\varphi$; $\cos(360°-\varphi) = \cos(-\varphi) = +\cos\varphi$; $\cos(n\cdot 360°+\varphi) = +\cos\varphi$;
$\mathrm{tg}(270°+\varphi) = -\mathrm{ctg}\,\varphi$; $\mathrm{tg}(360°-\varphi) = \mathrm{tg}(-\varphi) = -\mathrm{tg}\,\varphi$; $\mathrm{tg}(n\cdot 360°+\varphi) = +\mathrm{tg}\,\varphi$;
$\mathrm{ctg}(270°+\varphi) = -\mathrm{tg}\,\varphi$; $\mathrm{ctg}(360°-\varphi) = \mathrm{ctg}(-\varphi) = -\mathrm{ctg}\,\varphi$; $\mathrm{ctg}(n\cdot 360°+\varphi) = +\mathrm{ctg}\,\varphi$;

Die goniometrische Funktion $f(n\cdot 90° \pm \varphi)$ eines mit einem Vielfachen von 90° zusammengesetzten Winkels φ läßt sich also auf eine Funktion von φ allein zurückführen. Dabei ist zu bemerken:

a) das Vorzeichen der Funktion des Winkels φ richtet sich nach dem Vorzeichen, welches die Funktion des zusammengesetzten Winkels in dem betreffenden Quadranten besitzt;

b) die Funktion von φ ist die Funktion des zusammengesetzten Winkels oder ihre Cofunktion, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Die Periode (diejenige Größe, um welche der Winkel fortschreiten muß, damit die Funktion wieder den Ausgangswert annimmt) ist für sin u. cos 360°, für tg u. ctg nur 180°.

Um aus $f(\varphi) = x$ den Winkel φ zu finden, ermittelt man aus dem Vorzeichen von x zunächst den Quadranten von φ. Dann schlägt man denjenigen spitzen Winkel φ' auf, für welchen $f(\varphi') = +x$ und je nachdem nun φ im I., II., III. oder IV. Quadr. liegt, ist $\varphi = \varphi'$ bzw. $\varphi = 180°-\varphi'$ bzw. $\varphi = 180°+\varphi'$ bzw. $\varphi = 360°-\varphi'$.

Sucht man hingegen denjenigen spitzen Winkel φ'', für welchen $\cos(\varphi'') = +x$, so ist

$$\varphi = 90^\circ - \varphi'' \text{ bzw. } \varphi = 90^\circ + \varphi'' \text{ bzw. } \varphi = 270^\circ - \varphi'' \text{ bzw. } \varphi = 270^\circ + \varphi''.$$

Durch den Wert einer einzigen goniom. Funktion ist der zugehörige zwischen 0° u. 360° liegende Winkel stets zweideutig bestimmt. Um den Winkel innerhalb der gegebenen Grenzen eindeutig zu bestimmen, muß noch das Vorzeichen einer zweiten Funktion bekannt sein, welche jedoch nicht die reziproke erste Funktion sein darf.

Aufgaben.

1.) a) Man drücke die Winkel $216^g\,79'\,15''$, $341^g\,46'\,91''$, $158^g{,}3618$ in Sexagesimalteilung u. im Bogenmaß aus!

b) die Winkel $298^\circ\,53'\,19''$, $85^\circ\,42'\,16''$, $351^\circ\,37'\,26''$ sind in Centesimalgradmaß u. in Bogenmaß überzuführen.

c) die im Bogenmaß ausgedrückten Winkel 4,83 515, 0,87 345, 2,41 607 sind in Sexagesimal- u. Centesimalgradmaß anzugeben.

2) Man bestimme die Winkel φ aus folgenden Angaben:

$\lg \sin\varphi_1 = 9.90\,103 - 10$ (cos +), $\lg \sin\varphi_2 = 9.95\,426 - 10$ (ctg −)

$\lg \cos\varphi_3 = 9.97\,634_n - 10$ (sin −), $\lg \operatorname{tg}\varphi_4 = 0.20\,136$ (cos −)

$\lg \operatorname{ctg}\varphi_5 = 0.21\,641n$ (sin −).

3) Es soll der Verlauf von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$ u. $\operatorname{ctg}\varphi$ für das Intervall von $0°-360°$ zeichnerisch dargestellt werden (φ = Abszisse, $f(\varphi)$ = Ordinate).

4) Die sämtlichen Stücke des rechtwinkligen Dreiecks sind zu berechnen:

a) aus den beiden Katheten $a = 119{,}381\,m$ $b = 10{,}217\,m$

b) aus der Hypotenuse $c = 98{,}375\,m$ u. der Kathete $b = 55{,}198\,m$

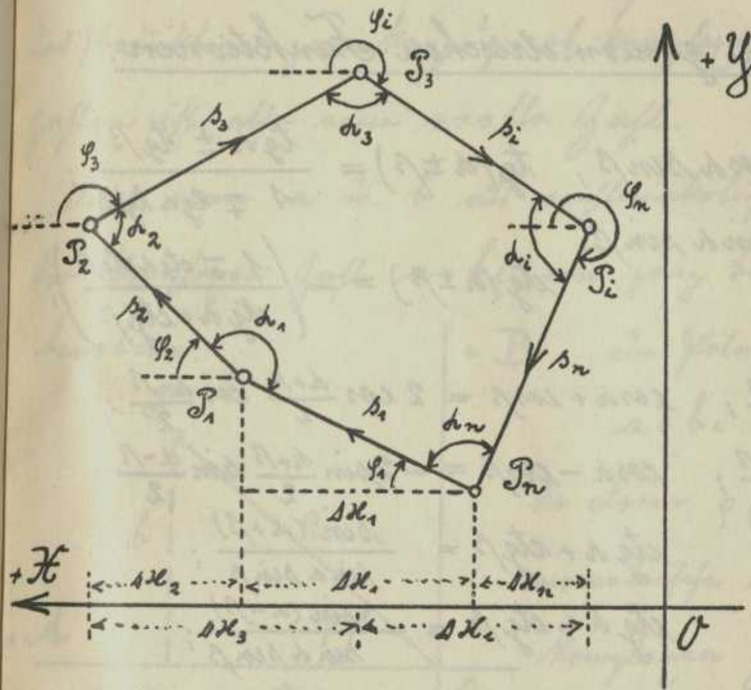
c) aus der Kathete $b = 83{,}715\,m$ u. $\sphericalangle\beta = 40°\,38'\,20''$

d) aus der Hypotenuse $c = 106{,}391\,m$ u. $\sphericalangle\alpha = 46°\,18'\,15''$.

15. XI 1903. №. 2.

Trigonometrie.

3. Der Projektionssatz.



Ist $P_1 P_2 P_3 \dots P_n$ ein beliebiges ebenes oder räumliches Polygon, dessen Seiten $s_1 s_2 s_3 \dots s_n$ mit einer Geraden $O+X$ die Richtungswinkel $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \dots \varphi_n$ einschließen, so gilt die Gleichung:

$$0 = \sum_{i=1}^{i=n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{i=n} s_i \cos\varphi_i = s_1\cos\varphi_1 + s_2\cos\varphi_2 + s_3\cos\varphi_3 + \dots\dots + s_n\cos\varphi_n$$

die Summe der Seitenprojektionen eines geschlossenen, ebenen oder räumlichen Polygons auf eine beliebig gelegene Gerade ist Null.

Ist das Polygon eben und in der Koordinatenebene $X\,O\,Y$ gelegen, so gibt die Projektion auf die zu $O+X$ senkrechte Gerade $O+Y$:

$$0 = \sum_{i=1}^{i=n} \Delta y_i = \sum_{i=1}^{i=n} s_i \sin\varphi_i = s_1\sin\varphi_1 + s_2\sin\varphi_2 + s_3\sin\varphi_3 + \dots\dots + s_n\sin\varphi_n$$

denkt man sich das Polygon um den Winkel $-\varphi_1$ gedreht, so daß s_1 parallel $O+X$ wird und drückt man die Richtungswinkel durch die Polygonwinkel α aus, so nehmen die beiden Sätze für das ebene Polygon folgende Form an:

$$0 = s_1 - s_2 \cos\alpha_1 + s_3 \cos(\alpha_1+\alpha_2) - + \ldots\ldots \pm s_n \cos(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1})$$
$$0 = \quad s_2 \sin\alpha_1 - s_3 \sin(\alpha_1+\alpha_2) + - \ldots \mp s_n \sin(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1})$$

4. Die Additionssätze der goniometrischen Funktionen.

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta; \quad tg(\alpha\pm\beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha\, tg\beta};$$
$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$
$$ctg(\alpha\pm\beta) = -\left(\frac{1 \mp ctg\alpha\, ctg\beta}{ctg\alpha + ctg\beta}\right);$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \quad \cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}; \quad \cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$
$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \quad ctg\alpha + ctg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};$$
$$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \quad ctg\alpha - ctg\beta = -\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

5. Die goniometrischen Funktionen des doppelten u. halben Winkels.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha};$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha};$$
$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}; \quad ctg 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$$

6. Der Satz von Moivre.

$a+bi$: Normalform einer komplexen Zahl; $i=\sqrt{-1}$; $i^2=-1$;

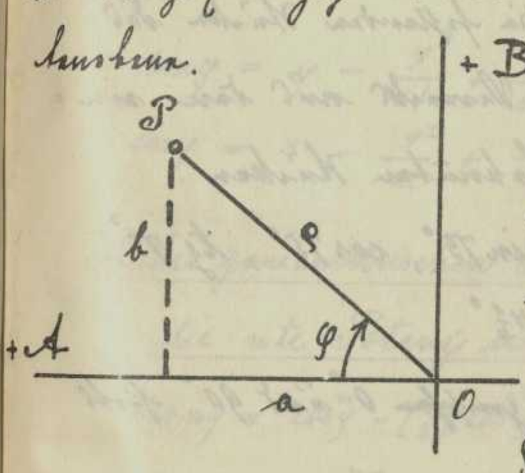
$a-bi$ ist konjugiert komplex zu $a+bi$; $i^3=-i$; $i^4=+1$;

$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$; $\frac{1}{i}=-i$; $\frac{1}{i^2}=-1$;

das Produkt von zwei konjugiert komplexen $\frac{1}{i^3}=+i$; $\frac{1}{i^4}=+1$;

Zahlen ist also eine reelle Zahl.

Faßt man a u. b als rechtwinkelige Koordinaten auf, so entspricht der komplexen Zahl $a+bi$ ein ganz bestimmter Punkt der Koordinatenebene.



In Polarkoordinaten ist

$$a+bi=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

die Form $\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ist die trigonometrische oder kanonische Form der komplexen Zahl.

ρ ist immer positiv zu nehmen und heißt Modul oder absoluter Betrag der komplexen Zahl; φ ist ihr Argument.

Zur Überführung der Normalform in die trigonometrische Form und umgekehrt dienen folgende Gleichungen:

$\rho=+\sqrt{a^2+b^2}$; $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$; $\sin\varphi=\frac{b}{\rho}$; $\cos\varphi=\frac{a}{\rho}$;

$a=\rho\cos\varphi$; $b=\rho\sin\varphi$.

Es gelten nun folgende Sätze:

$$\varrho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\,\varrho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \varrho_1\varrho_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

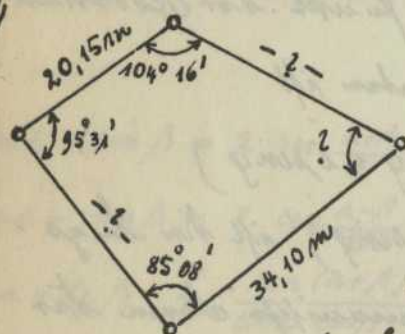
$$\frac{\varrho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\varrho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right);$$

$$\left[\varrho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)\right]^n = \varrho^n(\cos n\varphi \pm i\sin n\varphi)$$

$$\sqrt[n]{\varrho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$$

Für $k = 0$ bis $n-1$ ergeben sich die n Wurzeln der komplexen Zahl.

Aufgaben.

1) 

Man berechne die fehlenden Stücke des nebenstehenden Vierecks aus den eingeschriebenen, bekannten Stücken.

2.) Man bestimme $\sin 75°$, $\cos 75°$, $\operatorname{tg} 75°$, $\operatorname{tg} 22\frac{1}{2}°$, $\sin 3\frac{3}{4}°$ u. $\cos 11\frac{1}{4}°$.

3.) Man zeige geometrisch, daß für Winkel zwischen 0° und 90° stets
$\operatorname{tg}\alpha > \alpha > \sin\alpha$.

4.) Für $(\alpha+\beta+\gamma) = 180°$ ist $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;
$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.
$\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}2\beta + \operatorname{tg}2\gamma = \operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}2\beta\operatorname{tg}2\gamma$. Beweis!

5.) Man beweise, daß $\frac{\varrho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\varrho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$.

6.) Die komplexen Zahlen $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $+2 - 2i\sqrt{3}$, $+3+3i\sqrt{3}$ sind in trigonom. Form auszudrücken.

7.) Es sind die 6 Werte für $\sqrt[6]{1}$ zu berechnen.

22. XI 1909 №. 3.

Trigonometrie.

7. Die goniometrischen Funktionen als Exponentialfunkt.

Es ist $\cos\varphi \pm i\sin\varphi = e^{\pm i\varphi}$;

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right); \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right); \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}};$$

Löst man die Exponentialfunktionen in Reihen auf, so wird

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \frac{\varphi^9}{9!} - + \ldots\ldots$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} - + \ldots\ldots$$

8. Die goniometrischen Funktionen des nfachen Winkels und die nte Potenz einer Funktion des einfachen Winkels.

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \binom{n}{6}\cos^{n-6}\sin^6\varphi + - \ldots\ldots$$

$$\sin n\varphi = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi - \binom{n}{7}\cos^{n-7}\varphi\sin^7\varphi + - \ldots\ldots$$

$\cos n\varphi$ läßt sich, da $\sin\varphi$ nur in geraden Potenzen auftritt, immer rational durch $\cos\varphi$ ausdrücken. Ist n eine gerade Zahl, so läßt es sich auch rational in $\sin\varphi$ ausdrücken.

$\sin n\varphi$ kann man rational in $\sin\varphi$ darstellen, wenn n eine ungerade Zahl ist. Eine rationale Darstellung in $\cos\varphi$ ist nicht möglich.

Für ungerades n ist:

$$\cos^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\cos n\varphi + \binom{n}{1}\cos(n-2)\varphi + \binom{n}{2}\cos(n-4)\varphi + \cdots\cdots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}}\cos\varphi\right)$$

Für gerade n:

$$\cos^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}}\left(\cos n\varphi + \binom{n}{1}\cos(n-2)\varphi + \binom{n}{2}\cos(n-4)\varphi + \cdots + \frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}\right)$$

die Anzahl der Glieder ist $\frac{n+1}{2}$, wenn n ungerade und $\frac{n+2}{2}$, wenn n gerade.

Für ungerade n ist

$$\sin^n\varphi = \frac{1}{(2i)^{n-1}}\left(\sin n\varphi - \binom{n}{1}\sin(n-2)\varphi + \binom{n}{2}\sin(n-4)\varphi - + \cdots \pm \binom{n}{\frac{n-1}{2}}\sin\varphi\right),$$

das letzte Glied besitzt positives oder negat. Vorzeichen, je nachdem $\frac{n-1}{2}$ eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Für gerades n:

$$\sin^n\varphi = \frac{1}{2^{(n-1)}(i)^n}\left(\cos n\varphi - \binom{n}{1}\cos(n-2)\varphi + \binom{n}{2}\cos(n-4)\varphi - + \cdots \pm \frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}\right);$$

das letzte Glied besitzt posit. oder negat. Vorzeichen, je nachdem $\frac{n}{2}$ gerade oder ungerade ist.

Die Anzahl der Glieder für $\sin^n\varphi$ ist $\frac{n+1}{2}$ für ungerade, $\frac{n+2}{2}$ für gerade n.

9. Rechnen mit kleinen Winkeln.

Ist φ ein kleiner Winkel, so kann man mit guter Annäherung setzen:

$$\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi = \widehat{\varphi} = \frac{\varphi''}{\varrho''};$$

$$\cos\varphi = 1;$$

der dadurch begangene Fehler ist für $\sin\varphi$: $\frac{\varphi^3}{3!}$ u. für $\cos\varphi$: $\frac{\varphi^2}{2!}$; er wächst also im ersten Falle proportional mit der 3. Potenz, im zweiten Falle proportional mit dem Quadrat des im Bogenmaße ausgedrückten Winkels φ. Für $\varphi = 1^\circ$ ist beispielsweise dieser Fehler 0,000 001 bzw. 0,000 153. Genauere Resultate gibt

die Regel von Maskelyne.

Ist φ'' die Sekundenzahl eines kleinen Winkels, so ist

$$\lg \sin\varphi = \lg\varphi'' - \lg\rho'' + \tfrac{1}{3}\lg\cos\varphi = \lg\varphi'' + S$$

$$\lg \operatorname{tg}\varphi = \lg\varphi'' - \lg\rho'' - \tfrac{2}{3}\lg\cos\varphi = \lg\varphi'' + T$$

Der durch Verwendung dieser Formeln entstehende Fehler ist für $\varphi = 2^\circ$ erst 5 Einheiten der 8. Logarithmendezimale.

Die Zusatzgrößen S u. T (Sinusreduktion, Tangensreduktion) sind in den meisten Logarithmentafeln enthalten.

10. Die goniometrische Auflösung von quadratischen und kubischen Gleichungen.

a) Quadratische Gleichungen. Die algebraische Lösung der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ gibt die Wurzeln $x_{12} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

1.) $b^2 - 4ac > 0$ u. $4ac > 0$; setzt man $\sin\varphi = \dfrac{2}{b}\sqrt{ac}$, so wird

$$x_1 = -\frac{b}{a}\sin^2\frac{\varphi}{2}\ ;\quad x_2 = -\frac{b}{a}\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

2.) $b^2 - 4ac > 0$ u. $4ac < 0$; die Substitution $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2}{b}\sqrt{-ac}$ gibt

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}\ \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\ ;\quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}\ \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

3.) $b^2 - 4ac < 0$. Setzt man $\cos\varphi = \frac{b}{2\sqrt{ac}}$, so erhält man

$$x_1 = -\frac{b}{2a}(1 - i\,tg\,\varphi)\;;\quad x_2 = -\frac{b}{2a}(1 + i\,tg\,\varphi)$$

NB! der Winkel φ liegt stets im 1. Quadranten.

Aufgaben.

1.) Es soll der algebraische Ausdruck für $\sin 3^\circ = \sin(18^\circ - 15^\circ)$ aufgestellt werden.

2.) Man berechne $\sin 3^\circ$ und $\cos 3^\circ$ durch Reihenentwicklung bis zu den Gliedern 3. Ordnung einschließlich.

3.) Die Werte $\lg\sin 2^\circ 30'$, $\lg\sin 0^\circ 14'$, $\lg\cos 89^\circ 59'$, $\lg tg\, 0^\circ 10'$ u. $\lg ctg\, 89^\circ 57'$ sind mit Hilfe der Sinus- und Tangensreduktionen zu ermitteln.

4.) Man entwickle $\cos 3\varphi$, $\cos 4\varphi$, $\sin 5\varphi$, $\sin 6\varphi$ als Potenzsummen von $\sin\varphi$ u. $\cos\varphi$. Welche dieser Funktionen lassen sich durch $\sin\varphi$ oder $\cos\varphi$ allein rational ausdrücken?

5.) Wie lassen sich $\sin^3\varphi$, $\sin^4\varphi$, $\cos^5\varphi$, $\cos^6\varphi$ durch die Winkelvielfachen ausdrücken?

6.) Die Wurzeln der Gleichungen

$$x^2 - 3\cdot x + 2 = 0$$

$$x^2 + 1\cdot x - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

sind auf geometrischem Wege zu bestimmen.

29. XI 1909. №4.

Trigonometrie.

b) Kubische Gleichungen. Aus der allgemeinen Gleichung 3. Grades: $y^3 + ay^2 + by + c = 0$ erhält man durch die Substitution $y = x - \frac{a}{3}$ die reduzierte kubische Gleichung: $x^3 + px + q = 0$.

1.a) $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0;\ p > 0;\ q > 0$; setzt man $tg\,\varphi = \frac{\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{q}{2}}$ und $tg\,\lambda = \sqrt[3]{tg\,\frac{\varphi}{2}}$, so ist die reelle Wurzel $x_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot ctg\,2\lambda$. Ist $q < 0$, so setzt man $tg\,\varphi = \frac{\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{q}{2}}$ und $tg\,\lambda = \sqrt[3]{tg\,\frac{\varphi}{2}}$; dann wird $x_1 = +2\sqrt{\frac{p}{3}}\,ctg\,2\lambda$

1.b) $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0;\ p < 0;\ q > 0$. Man bestimmt die Hilfswinkel φ u. λ aus den Gleichungen: $\sin\varphi = \frac{\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{q}{2}}$, $tg\,\lambda = \sqrt[3]{tg\,\frac{\varphi}{2}}$. Es ist dann die reelle Wurzel $x_1 = -2\,\frac{\sqrt{-\frac{p}{3}}}{\sin 2\lambda}$. Wenn $q < 0$, so ist ähnlich:

$\sin\varphi = \frac{\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{q}{2}}$; $tg\,\lambda = \sqrt[3]{tg\,\frac{\varphi}{2}}$ und $x_1 = +2\,\frac{\sqrt{-\frac{p}{3}}}{\sin 2\lambda}$.

NB! die in 1a und 1b auftretenden Hilfswinkel φ, λ liegen im ersten Quadranten.

2.) $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$. (Irreduzibler Fall, drei reelle Wurzeln).

Wird $\cos 3\lambda = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ gesetzt, wo 3λ stets zwischen $0°$ und $180°$ liegt, so sind die drei reellen Wurzeln: $x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\lambda$; $x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(120° + \lambda)$; $x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos(240° + \lambda)$.

11. Goniometrische Gleichungen.

a) Um aus der Gleichung $a\cos\varphi + b\sin\varphi = c$ den unbekannten Winkel φ zu finden, setzt man $a = r\cos\lambda$, $b = r\sin\lambda$ womit $\operatorname{tg}\lambda = \frac{b}{a}$ und $r = \frac{a}{\cos\lambda} = \frac{b}{\sin\lambda}$. Der Hilfswinkel λ ist eindeutig bestimmt, da $\cos\lambda$ mit a und $\sin\lambda$ mit b gleiches Vorzeichen besitzt. Es wird dann

$\cos(\varphi - \lambda) = \frac{c}{r} = \frac{c\cdot\cos\lambda}{a} = \frac{c\cdot\sin\lambda}{b} = \cos\psi$. Für ψ ergeben sich 2 Werte: ψ_1 u. $\psi_2 = -\psi_1$. Also erhält man auch für φ zwei Werte:

$$\varphi_1 = \psi_1 + \lambda\ ;\quad \varphi_2 = \psi_2 + \lambda = \lambda - \psi_1 = \varphi_1 - 2\psi_1 .$$

b) Zwischen den zwei unbekannten Winkeln φ u. ψ bestehen die beiden Gleichungen:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = m\ ;\quad \varphi + \psi = \alpha\ ;$$

durch Umformung erhält man zur Bestimmung der halben Winkeldifferenz die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = \frac{m-1}{m+1}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} .$$

Für $\frac{\beta}{2}$ ergeben sich daraus die beiden Werte $\frac{\beta_1}{2}$ u. $\frac{\beta_2}{2} = \frac{\beta_1}{2} + 180^\circ$ und die Unbekannten sind:

$$\varphi_1 = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta_1)\ ;\quad \varphi_2 = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta_2) = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta_1) + 180^\circ = \varphi_1 + 180^\circ$$

$$\psi_1 = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta_1)\ ;\quad \psi_2 = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta_2) = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta_1) - 180^\circ = \psi_1 - 180^\circ$$

12. Zyklometrische Funktionen.

Die zyklometrischen oder inversen Funktionen sind die Umkehrungen der goniometrischen Funktionen.

$y = \arcsin x$ heißt: y ist derjenige Bogen, dessen $\sin = x$ ist; es läßt sich die Beziehung zwischen x u. y also auch goniometrisch ausdrücken durch die Gleichung $x = \sin y$. Von den folgenden Gleichungen sind je zwei nebeneinanderstehende gleichwertig:

zyklometrisch	goniometrisch	zyklometrisch	goniometrisch
$y = \arcsin x$	$x = \sin y$;	$y = \arccos x$	$x = \cos y$;
$y = \operatorname{arctg} x$	$x = \operatorname{tg} y$;	$y = \operatorname{arcctg} x$	$x = \operatorname{ctg} y$;

die Sätze über die goniometrischen Funktionen lassen sich auch in zyklometrischer Form ausdrücken z. B.

a) goniometrisch

$\sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = x$

$\operatorname{tg} y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = x$

$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$; $x = \sin y$

b) zyklometrisch

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$

$y = \arcsin x = \arccos\sqrt{1 - x^2}$

$$\left.\begin{array}{l}\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \text{u. } \sin\alpha = x,\ \sin\beta = y\end{array}\right\} \quad \arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

Für gewöhnlich zieht man die goniometrische Darstellung dieser Sätze vor.

Aufgaben.

1) Man zeige, daß $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \dots + \sin(\alpha+n\beta) = \dfrac{\sin\left(\alpha+\frac{n}{2}\beta\right)\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}$

u. $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots + \cos(\alpha+n\beta) = \dfrac{\cos\frac{n+1}{2}\beta \, \sin(\alpha+\frac{n}{2}\beta)}{\sin\frac{\beta}{2}}$

und berechne beide Reihen für $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 15^\circ$, $n = 20$.

2.) Die drei Wurzeln der Gleichung

$$y^3 - 7y^2 + 14y - 8 = 0$$

sind zu berechnen. Wie läßt sich die Gleichung in Produktform darstellen?

3.) Wie groß berechnen sich $z = \arcsin x$ u. $y = \arcsin 2x$ aus der Gleichung

$$\arcsin x + \arcsin 2x = \frac{3\pi}{2}$$

4.) Welches sind die Werte von φ u. ψ in den folgenden Gleichungen:

$$2\sin\varphi - 3\cos\varphi = 0{,}23\,205$$

$$3\sin(30^\circ+\varphi) - 4\sin(60^\circ+\varphi) = -1{,}40\,193$$

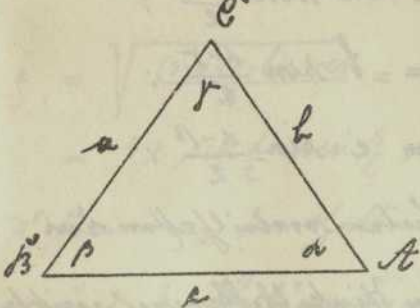
$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = 2; \quad (\varphi - \psi) = 15^\circ\,0'\,0''$$

$$3\sin^2\varphi - 4\sin\varphi\cos\varphi + 2\cos^2\varphi = +\frac{1}{2}$$

6. XII 1909. №. 5.

Trigonometrie.

13. Die trigonometrischen Sätze für das schiefwinkelige Dreieck.



a) Der Sinussatz.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r,$$ wenn r den Halbmesser des Umkreises bedeutet.

b) Der Projektionssatz im Dreieck.

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$$

$$b = a\cos\gamma + c\cos\alpha$$

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$

c) Der Cosinussatz.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$; zur Umformung für die logarithmische Rechnung setzt man $d = 2\sqrt{bc}\cos\frac{\alpha}{2}$; dann wird $a = \sqrt{(b+c+d)(b+c-d)}$; man kann auch setzen $\cos\varphi = \frac{2\sqrt{bc}\cos\frac{\alpha}{2}}{(b+c)}$ und erhält damit $a = (b+c)\sin\varphi$. Auf einem dritten Wege gibt die Substitution $tg\,\psi = \frac{2\sqrt{bc}}{(b-c)} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$ für die unbekannte Seite: $a = \frac{(b-c)}{\cos\psi}$.

d) Die Tangentenformel.

Es ist $$tg\,\alpha = \frac{a\sin\beta}{c - a\cos\beta} = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma};$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b\sin\gamma}{a - b\cos\gamma} = \frac{b\sin\alpha}{c - b\cos\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{c\sin\alpha}{b - c\cdot\cos\alpha} = \frac{c\cdot\sin\beta}{a - c\cdot\cos\beta}$$

e) Die Mollweide'schen Gleichungen.

$$\alpha)\ (b+c)\sin\frac{\alpha}{2} = a\cos\frac{\beta-\gamma}{2};\quad \beta)\ (b-c)\cos\frac{\alpha}{2} = a\sin\frac{\beta-\gamma}{2};$$

$$(a+c)\sin\frac{\beta}{2} = b\cos\frac{\alpha-\gamma}{2};\quad (a-c)\cos\frac{\beta}{2} = b\sin\frac{\alpha-\gamma}{2};$$

$$(a+b)\sin\frac{\gamma}{2} = c\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\quad (a-b)\cos\frac{\gamma}{2} = c\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

Man braucht zur Berechnung der dritten Seite vorteilhafter das System α) oder β) je nachdem die halbe Winkeldifferenz zwischen -45° u. $+45^\circ$ gelegen ist oder nicht.

f) Die Neper'schen Gleichungen. (Tangentialsatz.)

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)} = \frac{a+b}{a-b};\quad \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\beta-\gamma)} = \frac{b+c}{b-c};\quad \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)} = \frac{a+c}{a-c}.$$

g) Die Halbwinkelsätze.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}};\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}};\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \frac{\varrho}{s-a};$$

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}};\quad \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}};\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} = \frac{\varrho}{s-b};$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}};\quad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}};\quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} = \frac{\varrho}{s-c};$$

(ϱ ist der Halbmesser des Inkreises).

Daraus ist $\sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Ein Fehler im Logar. der Funktion äußert auf den Winkel den geringsten Einfluß, wenn der Winkel aus tg berechnet wird.

h) Umkreis- und Inkreishalbmesser.

Ist r der Halbmesser des Umkreises und ρ derjenige des Inkreises; so bestehen die folgenden Beziehungen:

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = (s-a)\,tg\frac{\alpha}{2} = (s-b)\,tg\frac{\beta}{2} = (s-c)\,tg\frac{\alpha}{2}$$
$$= 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Ist ferner ρ_a der Halbmesser desjenigen Ankreises, welcher die Seite a und die Verlängerungen von b u. c berührt, so ist

$$\rho_a = a\frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{(s-a)}} = s\cdot tg\frac{\alpha}{2}.$$

14. Die Fläche des Dreiecks.

Die Dreiecksfläche läßt sich in folgender Weise ausdrücken:

$$F = \frac{1}{2}a\cdot h_a = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{c^2}{2}\cdot\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{c^2}{2(ctg\,\alpha + ctg\,\beta)}$$
$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{a\cdot b\cdot c}{4r} = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$
$$= \rho\cdot s.$$

Aufgaben.

1.) In einem Dreieck sind bekannt: $a = 92{,}15\,m$, $\alpha = 40^\circ\,11'\,15''$, $\beta = 48^\circ\,47'\,16''$. Man berechne die fehlenden Stücke.

2.) Von einem Dreieck kennt man die Seiten $a = 48{,}76\,m$ und $b = 99{,}45\,m$ sowie den Winkel $\gamma = 61{,}^g2467$. Wie groß ist

α, β und c?

3.) Ein Dreieck ist bestimmt durch $a = 90{,}19$ m, $b = 60{,}34$ m und $\alpha = 135^\circ\, 15'\, 21''$. Man berechne die fehlenden Stücke. Wie viel brauchbare Lösungen gibt es?

4.) Für das Dreieck mit den Seiten $a = 48{,}03$ m, $b = 50{,}27$ m, $c = 70{,}14$ m sollen die drei Winkel α, β, γ mit Kontrolle ermittelt werden.

5.) Es soll gezeigt werden, daß

a) $$\frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c} = \frac{1}{\rho}$$

b) $$\rho \cdot \rho_a \cdot \rho_b \cdot \rho_c = F^2$$

Berichtigung zu Blatt No 4 Seite 4 1. Zeile v. oben lies:

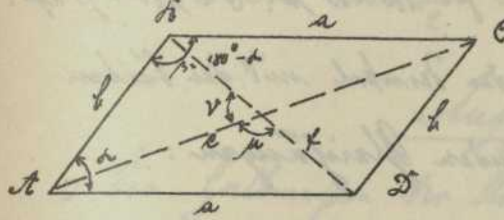
$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \dots + \cos(\alpha+n\beta) = \frac{\cos(\alpha + \frac{n}{2}\beta)\sin\frac{n+1}{2}\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}.$$

13. XII 1909. №. 6.

Trigonometrie.

15.) Die Viereckberechnung (Tetragonometrie.)

a) Das Parallelogramm.



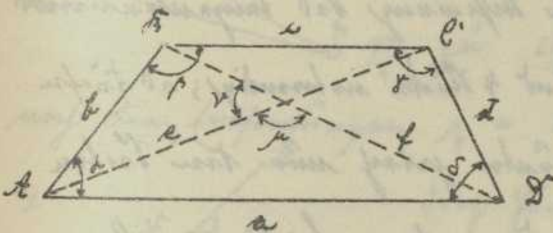
Das Parallelogramm ist durch drei Stücke bestimmt, worunter jedoch nur 1 Winkel sein darf. Mit den eingeschriebenen Bezeichnungen bestehen die folgenden Beziehungen:

$e^2+f^2 = 2(a^2+b^2)$; $\quad tg\,\mu = -tg\,\nu = -\dfrac{2ab\sin\alpha}{(a+b)(a-b)}$

$e^2-f^2 = 4ab\cos\alpha$; der Flächeninhalt läßt sich in folgender Weise ausdrücken: $F = ab\sin\alpha = ab\sin\beta = -\frac{1}{2}(a+b)(a-b)\,tg\,\mu$

$= \frac{1}{2}ef\sin\mu = \frac{1}{4}(e+f)(e-f)\,tg\,\alpha$.

b) Das Trapez.



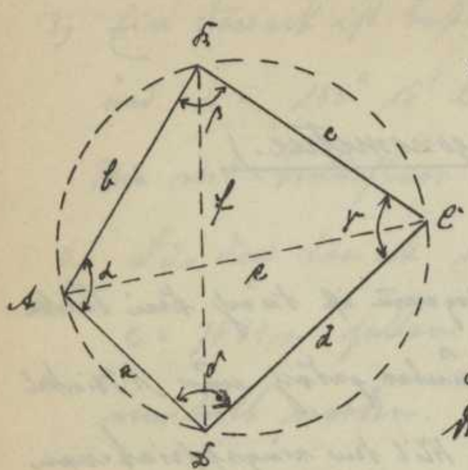
Das Trapez ist durch 4 Stücke bestimmt, worunter sich jedoch nur zwei Winkel befinden dürfen, da

$\beta = 180° - \alpha$ u. $\gamma = 180° - \delta$

Es ist: $b = (a-c)\dfrac{\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}$ und $d = (a-c)\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\delta)}$

$F = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin\alpha\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}(a+c)(a-c) = \frac{1}{2}ef\sin\mu$

c) Das Sehnenviereck.



Zur Festlegung des Sehnenvierecks genügen 4 Stücke, worunter jedoch nur zwei, einander nicht gegenüberliegende Winkel sich befinden dürfen, da $\gamma = 180° - \alpha$ u. $\delta = 180° - \beta$ ist.

Zur Berechnung der Winkel aus den Seiten dienen die folgenden Gleichungen:

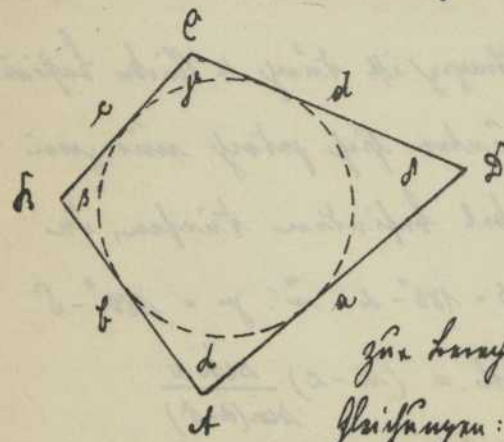
$$2s = a + b + c + d.$$

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)}}\;;\quad tg\,\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{(s-a)(s-d)}}\;;$$

$$tg\,\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-d)}{(s-a)(s-b)}}\;;\quad tg\,\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}\;;$$

Die durch die Seiten ausgedrückte Fläche ist $F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

d) Das Tangentenviereck.



Für die Bestimmung des Tangentenvierecks sind 4 Stücke notwendig; es dürfen darunter jedoch nur drei Seiten sein, da $d = b + c - a$ ist.

Zur Berechnung des Tangentenvierecks dienen die Gleichungen:

$$a \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\delta}{2} = c \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}$$

$$b \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} = d \sin\frac{\gamma}{2} \sin\frac{\delta}{2}$$

bzw. $ab \sin^2\frac{\alpha}{2} = cd \sin^2\frac{\gamma}{2}$

$ad \sin^2\frac{\delta}{2} = bc \sin^2\frac{\beta}{2}$

Die Fläche des Tangentenvierecks ist, wenn ρ den Radius des einbeschriebenen Kreises bedeutet:

$$F = \sqrt{abcd}\cdot\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} = \sqrt{abcd}\cdot\sin\frac{\beta+\delta}{2} = \rho(a+c) = \rho(b+d).$$

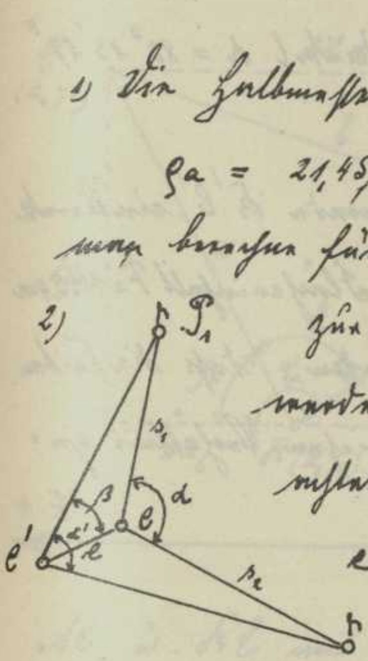
Aufgaben.

1) Die Halbmesser der Ankreise eines Dreiecks sind

$\rho_a = 21{,}45\,m$, $\rho_b = 25{,}16\,m$ $\rho_c = 28{,}23\,m$;

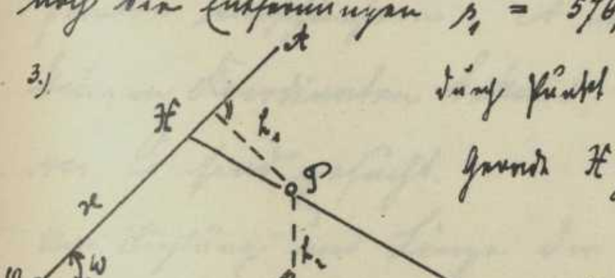
man berechne für das Dreieck die Seiten, Winkel u. die Fläche.

2)



Zur Bestimmung von $\measuredangle \alpha$, welcher nicht direkt gemessen werden kann, wurde $\alpha' = 75^\circ\,14'\,12''$ exzentrisch beobachtet. Außerdem fand sich die Größe der Exzentrizität $e = 0{,}497\,m$ u. ihr Winkel mit der Sicht $C'P_1$ zu $29^\circ\,35'\,00''$. Wie groß wird α, wenn noch die Entfernungen $s_1 = 570{,}34\,m$, $s_2 = 681{,}37\,m$ bekannt sind?

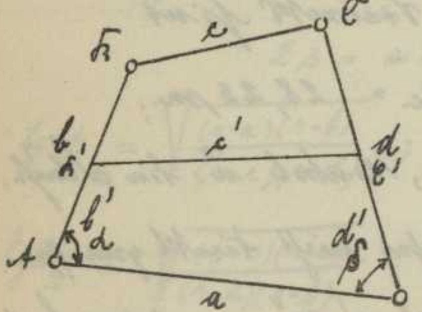
3.)



Durch Punkt P im Winkelraum AOB, soll eine Gerade XY so geführt werden, daß das abgeschnittene Dreieck OXY die vorgegebene Größe F besitzt. Die Größe des Winkel AOB ist $\omega = 60^\circ\,12'\,15''$ u. Punkt P besitzt die

Abstände $h_1 = 39,75$ m u. $h_2 = 41,39$ m von den Schenkeln OA u. OB. Fläche soll 10 000 qm betragen. Man berechne die Seiten des Dreiecks OXY und untersuche, wie lange eine reelle Lösung möglich ist. Wie läßt sich die letzte Frage beantworten, wenn P außerhalb des Winkels AOB gelegen ist?

4.) Im Viereck ABCD sind die Seiten $a = 101,46$ m, $b = 90,24$ m, $d = 106,78$ m u. die Winkel $\alpha = 80^\circ\, 13'\, 17''$, $\beta = 79^\circ\, 24'\, 15''$ bekannt.



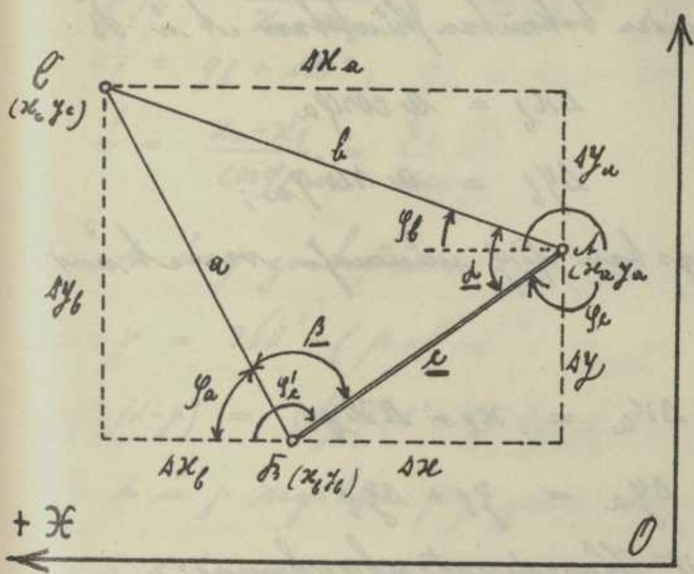
Es soll durch die Gerade B'C' ein Viereck AB'C'D mit dem Flächeninhalt $F = 4000$ qm so abgeschnitten werden, daß die Seiten AB und CD durch die Punkte B' u. C' im gleichen Verhältnis geteilt werden.

20. XII 1909 — № 7.

Trigonometrie.

16. Die Hauptaufgaben der Kleintriangulierung.

a) Vorwärtseinschneiden mit Koordinatenberechnung.



Ein unbekannter Punkt C wird von A u. B aus durch Vorwärtseinschneiden dadurch festgelegt, daß die Winkel α u. β gemessen werden, welche die nach dem unbekannten Punkte führenden Richtungen AC u. BC mit der Verbindungslinie AB der bekannten Punkte einschließen. A und B sind durch ihre rechtwinkeligen Koordinaten bekannt; die rechtwinkeligen Koordinaten von C sind gesucht.

Um Richtung und Länge der Grundlinie c zu erhalten, bilden wir: $\Delta x = x_b - x_a$; $\Delta y = y_b - y_a$; $\operatorname{tg} \varphi_c = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$; $\varphi_c = \ldots\ldots$

$$c = \frac{\Delta x}{\cos \varphi_c} = \frac{\Delta y}{\sin \varphi_c};$$

Für die Richtungs- und Längenableitung der Seiten a, b verwenden wir folgende Gleichungen:

$$\varphi_c' = \varphi_c + 180^\circ; \quad \varphi_b = \varphi_c + \alpha; \quad \varphi_a = \varphi_c' - \beta;$$

$$a = c\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}; \quad b = c\,\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)};$$

damit werden die Koordinatenunterschiede zwischen dem unbekannten Punkte C und den beiden bekannten Punkten A u. B:

$$\Delta x_a = b\cos\varphi_b \qquad \Delta x_b = a\cos\varphi_a$$

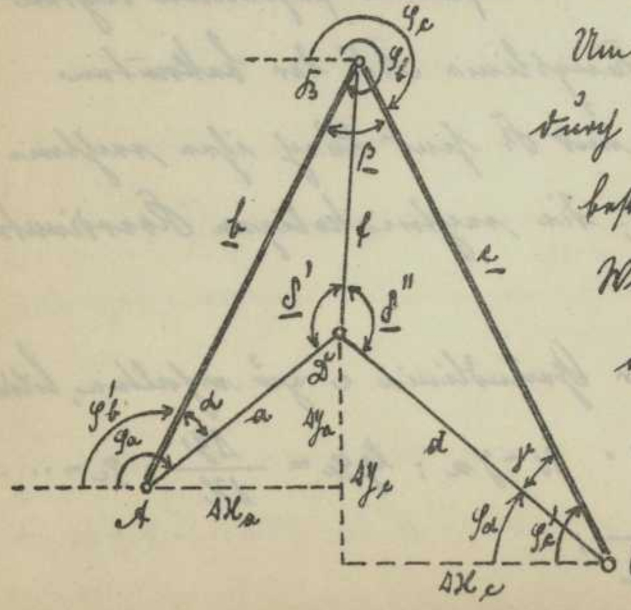
$$\Delta y_a = b\sin\varphi_b \qquad \Delta y_b = a\sin\varphi_a;$$

die Koordinaten von C ergeben sich nunmehr von A und B aus zu:

$$x_c = x_a + \Delta x_a = x_b + \Delta x_b$$

$$y_c = y_a + \Delta y_a = y_b + \Delta y_b$$

b) Rückwärtseinschneiden mit Koordinatenberechnung.



Um den unbekannten Punkt D durch Rückwärtseinschneiden zu bestimmen, werden in D die Winkel δ' und δ'' beobachtet, unter welchen von diesem Punkte aus die Seiten b und c des seiner Gestalt und Lage nach vollkommen festgelegten Dreiecks ABC erscheinen.

Für die Richtungs- und Längenbestimmung von b u. c hat man die Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\varphi_b = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b}\;;\quad \operatorname{tg}\varphi_c = \frac{y_c - y_b}{x_c - x_b}\;;\quad \sphericalangle\beta = \varphi_b - \varphi_c$$

$$\varphi'_b = \varphi_b + 180^\circ\;;\quad \varphi'_c = \varphi_c + 180^\circ\;;$$

$$b = \frac{x_a - x_b}{\cos\varphi_b} = \frac{y_a - y_b}{\sin\varphi_b}\;;\quad c = \frac{x_c - x_b}{\cos\varphi_c} = \frac{y_c - y_b}{\sin\varphi_c}\;;$$

Um α u. γ zu bestimmen hat man die beiden Gleichungen:

$$\alpha + \gamma = 360^\circ - (\beta + \delta' + \delta'') = \mu$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \operatorname{ctg}(45^\circ + \lambda)\operatorname{tg}\frac{\mu}{2} = \operatorname{tg}\frac{\nu}{2}\,,\quad \text{worin } \operatorname{ctg}\lambda = \frac{c\sin\delta'}{b\sin\delta''}$$

Für α u. γ ergeben sich zwei Wertepaare:

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}(\mu + \nu)\;;\quad \alpha_2 = \alpha_1 + 180^\circ\;;$$

$\gamma_1 = \tfrac{1}{2}(\mu - \nu)\;;\quad \gamma_2 = \gamma_1 - 180^\circ$; welches davon zu wählen ist, entscheiden die Gleichungen

$$a = b\,\frac{\sin(\alpha + \delta')}{\sin\delta'}\;;\quad d = c\,\frac{\sin(\gamma + \delta'')}{\sin\delta''}\,,$$

welche für die Seiten a und d positive Werte liefern müssen. Es ist also dasjenige Wertepaar $\alpha\gamma$ zu wählen, für welches $\sin(\alpha + \delta')$ mit $\sin\delta'$ und $\sin(\gamma + \delta'')$ mit $\sin\delta''$ gleiches Vorzeichen besitzt.

Die Richtungswinkel der Seiten a und d sind:

$$\varphi_a = \varphi_b + \alpha \quad \text{und} \quad \varphi_d = \varphi_c - \gamma$$

damit wird

$$\Delta x_a = a \cos\varphi_a \qquad \Delta x_c = d \cos\varphi_d$$

$$\Delta y_a = a \sin\varphi_a \qquad \Delta y_c = d \sin\varphi_d$$

und die Koordinaten des gesuchten Punktes D sind:

$$x_d = x_a + \Delta x_a = x_c + \Delta x_c$$

$$y_d = y_a + \Delta y_a = y_c + \Delta y_c$$

Aufgaben.

1) Zur Bestimmung von Punkt C wurden die Winkel $CAB = 50°10'15''$ und $CBA = 40°17'23''$ beobachtet. Die rechtwinkligen Koordinaten von A sind $x = +100{,}23$ $y = +501{,}57$ und für B: $x = +521{,}67$, $y = +116$. Wie groß sind die Koordinaten von C?

2) Einem Beobachter in A erscheint die Spitze eines Turmes unter dem Höhenwinkel α ($= 40°15'18''$), die Basis des Turmes unter dem Höhenwinkel β ($= 5°01'35''$). Wie weit liegen Spitze und Basis des Turmes über dem Beobachter, wenn die Höhe des Turmes h ($= 60{,}34$ m) ist? Welches ist die horizontale Entfernung des Beobachters vom Turme?

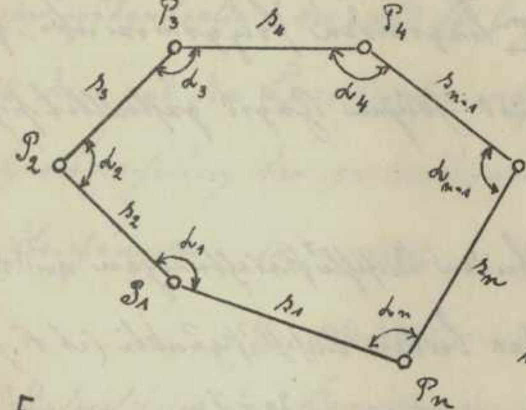
3) Von einem 1. unbekannten Punkt A erscheint die bekannte Seite BC unter $20°10'20''$ und die Seite CD (D ist zweiter unbekannter Punkt) unter $41°16'30''$. Von D aus erscheint AB unter $51°19'40''$ und BC ($= 201{,}45$ m) unter $39°51'10''$. Man berechne aus diesen Angaben die fehlenden Stücke des Vierecks ABCD.

10. I 1910. №. 8.

Trigonometrie.

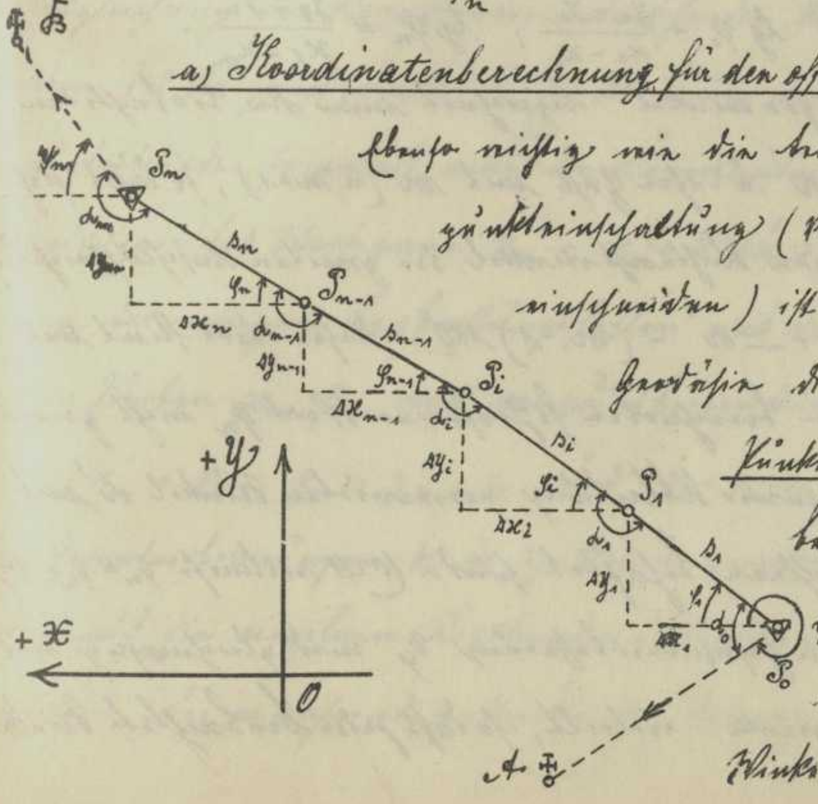
17. Elemente der Polygonometrie.

Ein Polygon mit n Ecken ist durch $(2n-3)$ von einander unabhängige Bestimmungsstücke festgelegt.



Die Summe der Polygoninnenwinkel ist $(n-2)\,180^\circ$, diejenige der Polygonaußenwinkel $(n+2)\,180^\circ$.

a) Koordinatenberechnung für den offenen Polygonzug.



Ebenso wichtig wie die trigonometrische Einzelpunkteinschaltung (Vorwärts- u. Rückwärtseinschneiden) ist für die praktische Geodäsie die polygonometrische Punktbestimmung. Während bei der rein trigonom. Punktbestimmung ein neuer Punkt durch Winkelmessungen allein fest=

gelegt wird, bestimmt man die Lage der Polygonpunkte dadurch, daß man die Länge der Verbindungsstrecken je zweier aufeinander folgender Polygonpunkte sowie die Brechungswinkel dieser Strecken mißt. Von besonderer Wichtigkeit ist der <u>offene Polygonzug mit beiderseitigem Koordinaten- und Richtungsanschluß</u>, für welchen meistens die im Sinne der Zugrichtung <u>links</u> liegenden Polygonwinkel gemessen werden. Die Berechnung eines solchen Zuges gestaltet sich folgendermaßen:

<u>1)</u> Ableitung der Richtungswinkel der beiden Anschlußrichtungen aus den Koordinaten der Zugendpunkte (P_0 P_n) u. der beiden Anschlußpunkte (A B) aus den Gleichungen $tg\,\varphi_0 = \frac{y_a - y_0}{x_a - x_0}$; $tg\,\varphi_n = \frac{y_b - y_n}{x_b - x_n}$.

<u>2)</u> Ausgleichung der Polygonwinkel. Bezeichnet man die beobachteten Polygonwinkel mit α' u. ihre Zahl mit m $(= n+1)$, so läßt sich damit ein weiterer Wert für den Richtungswinkel der zweiten Anschlußrichtung berechnen: $\varphi_n' = \varphi_0 + \Sigma\alpha' - (m-1)\,180°$. Dieser Wert stimmt mit dem aus den Koordinaten berechneten fehlerfreien Wert φ_n nicht genau überein, weil die zu seiner Ableitung verwendeten Winkel α' mit kleinen Beobachtungsfehlern behaftet sind. Es ist vielmehr $\varphi_n = \varphi_n' + v_\varphi$ und $v_\varphi = \varphi_n - \varphi_n'$. Diese Gesamtverbesserung v_φ wird gleichmäßig auf die einzelnen Polygonwinkel verteilt, sodaß jeder beobachtete Winkel

die gleiche Verbesserung $d\varphi = \frac{v_\varphi}{m}$ erhält. damit werden die verbesserten Polygonwinkel $\alpha_1 = \alpha_1' + d\varphi, \ldots\; \alpha_i = \alpha_i' + d\varphi, \ldots\; \alpha_n = \alpha_n' + d\varphi$.

3.) Die Ableitung der Polygonseitenrichtungswinkel erfolgt mit den verbesserten Polygonwinkeln α nach den Gleichungen: $\varphi_1 = \psi_0 + \alpha_0$,
$\varphi_2 = \varphi_1 + \alpha_1 - 180^\circ, \ldots\; \varphi_i = \varphi_{i-1} + \alpha_{i-1} - 180^\circ, \ldots\; \psi_n = \varphi_n + \alpha_n - 180^\circ$.
Rechnungskontrolle: der aus der letzten Gleichung erhaltene Wert ψ_n muss mit dem aus den Koordinaten abgeleiteten Wert vollkommen übereinstimmen.

4.) Zur Berechnung der vorläufigen Koordinatenunterschiede $\Delta x'$ $\Delta y'$ dienen die Gleichungen:

$$\Delta x_1' = s_1 \cos\varphi_1 \ldots\; \Delta x_i' = s_i \cos\varphi_i, \ldots\; \Delta x_n' = s_n \cos\varphi_n$$
$$\Delta y_1' = s_1 \sin\varphi_1 \ldots\; \Delta y_i' = s_i \sin\varphi_i \ldots\; \Delta y_n' = s_n \sin\varphi_n$$

5.) Ausgleichung der Koordinatenunterschiede. Addiert man zu den Koordinaten des Ausgangspunktes P_0 je die Summe der berechneten Koordinatenunterschiede, so erhält man für die Koordinaten des Zugendpunktes P_n ein zweites Wertepaar $x_n' = x_0 + \Sigma\Delta x'$, $y_n' = y_0 + \Sigma\Delta y'$, welches wegen der restigen Beobachtungsfehler mit den vorgegebenen, fehlerfreien Werten x_n y_n nicht genau übereinstimmt. Vielmehr ist:
$x_n = x_n' + v_x$; $y_n = y_n' + v_y$ und $v_x = x_n - x_n'$; $v_y = y_n - y_n'$.
Diese Gesamtverbesserungen v_x u. v_y können proportional den Streckenlängen auf die einzelnen Koordinatenunterschiede verteilt werden, wenn der Zug annähernd gestreckt ist. demnach werden die einzelnen

Koordinatenverbesserungen: $dx_1 = \frac{v_x}{\Sigma s} \cdot s_1 \dots \quad dx_i = \frac{v_x}{\Sigma s} \cdot s_i \dots \quad dx_n = \frac{v_x}{\Sigma s} \cdot s_n$

$dy_1 = \frac{v_y}{\Sigma s} \cdot s_1 \dots \quad dy_i = \frac{v_y}{\Sigma s} \cdot s_i \dots \quad dy_n = \frac{v_y}{\Sigma s} \cdot s_n$

Die verbesserten Koordinatenunterschiede sind dann:

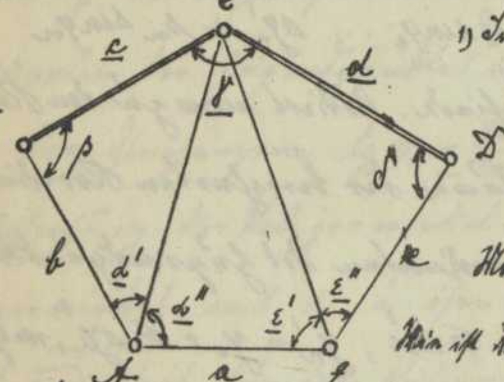
$\Delta x_1 = \Delta x_1' + dx_1 \dots \Delta x_i = \Delta x_i' + dx_i \dots \Delta x_n = \Delta x_n' + dx_n$; $\Delta y_1 = \Delta y_1' + dy_1 \dots \Delta y_i = \Delta y_i' + dy_i \dots \Delta y_n = \Delta y_n' + dy_n$

6.) Die Koordinatenberechnung der Polygonpunkte wird mit den verbesserten Koordinatenunterschieden durchgeführt:

$x_1 = x_0 + \Delta x_1 \dots x_i = x_{i-1} + \Delta x_i \dots x_n = x_{n-1} + \Delta x_n$; $y_1 = y_0 + \Delta y_1 \dots y_i = y_{i-1} + \Delta y_i \dots y_n = y_{n-1} + \Delta y_n$

Kontrolle: Die auf diesem Wege erhaltenen Werte x_n, y_n müssen mit den gegebenen übereinstimmen.

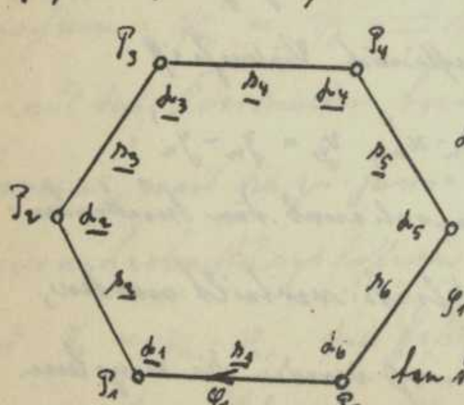
Aufgaben.



1) Im untenstehenden Fünfeck sind bekannt $c = 510{,}43\,m$, $d = 540{,}75\,m$, $\sphericalangle\gamma = 131^\circ 15' 10''$, $\sphericalangle\alpha' = 40^\circ 05' 20''$, $\alpha'' = 79^\circ 45' 40''$, $\varepsilon' = 77^\circ 41' 00''$, $\varepsilon'' = 42^\circ 17' 50''$.

Man berechne a, b, e, β u. δ.

Wie ist der Rechnungsgang, wenn B C D durch ihre rechtw. Koord. gegeben sind u. für A u. E ebenfalls die rechtw. Koordinaten zu rechnen sind?

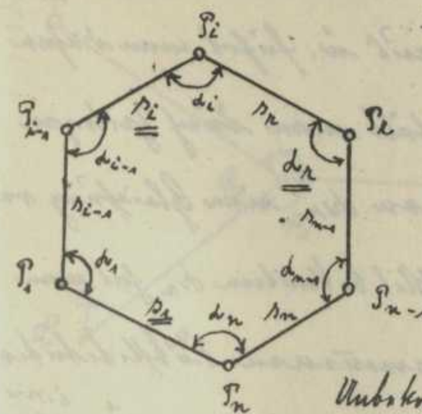


2) Vom untenstehenden Polygon kennt man $\alpha_1 = 120^\circ 01' 10''$, $\alpha_2 = 123^\circ 14' 20''$, $\alpha_3 = 116^\circ 26' 50''$, $\alpha_4 = 127^\circ 21' 00''$; $s_1 = 91{,}34\,m$, $s_2 = 86{,}73\,m$, $s_3 = 95{,}04\,m$, $s_4 = 83{,}12\,m$, $s_5 = 90{,}76\,m$, $\varphi_1 = 0^\circ 0' 0''$, $x_6 = y_6 = 10000{,}00\,m$. Man berechne die Koordinaten der übrigen Punkte sowie Richtungswinkel u. Länge aller von P_6 auslaufenden Diagonalen.

17. I 1910. №9.

Trigonometrie.

17.b Berechnung der fehlenden Seiten u. Winkel eines geschlossenen Polygons.



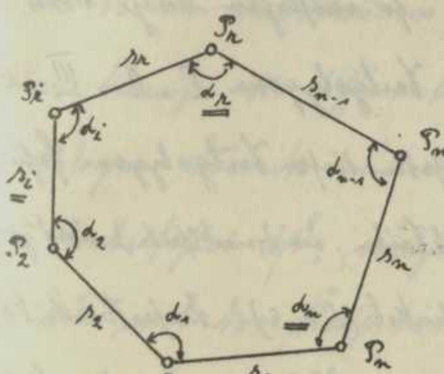
α) Unbekannt sind 2 Seiten u. 1 Winkel (s_1 s_i α_n)
Numeriert man die Polygonpunkte so, daß eine der beiden unbekannten Seiten s_1 wird, so hat man zur Bestimmung der Unbekannten die Gleichungen:

$$\alpha_n = (n-2)\,180^\circ - \sum_{i=1}^{i=n-1} \alpha_i - \sum_{i=n+1}^{i=n} \alpha_i$$

$$0 = s_1 - s_2 \cos\alpha_1 + s_3 \cos(\alpha_1+\alpha_2) - \cdots \pm s_i \cos(\alpha_1+\alpha_2 \cdots + \alpha_{i-1}) \mp \cdots \pm s_n \cos(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1})$$

$$0 = \quad s_2 \sin\alpha_1 - s_3 \sin(\alpha_1+\alpha_2) + \cdots \mp s_i \sin(\alpha_1+\alpha_2 \cdots + \alpha_{i-1}) \pm \cdots \mp s_n \sin(\alpha_1 \cdots + \alpha_{n-1})$$

Die erste Gleichung liefert unmittelbar α_n, die zweite s_i und die dritte hierauf s_1.



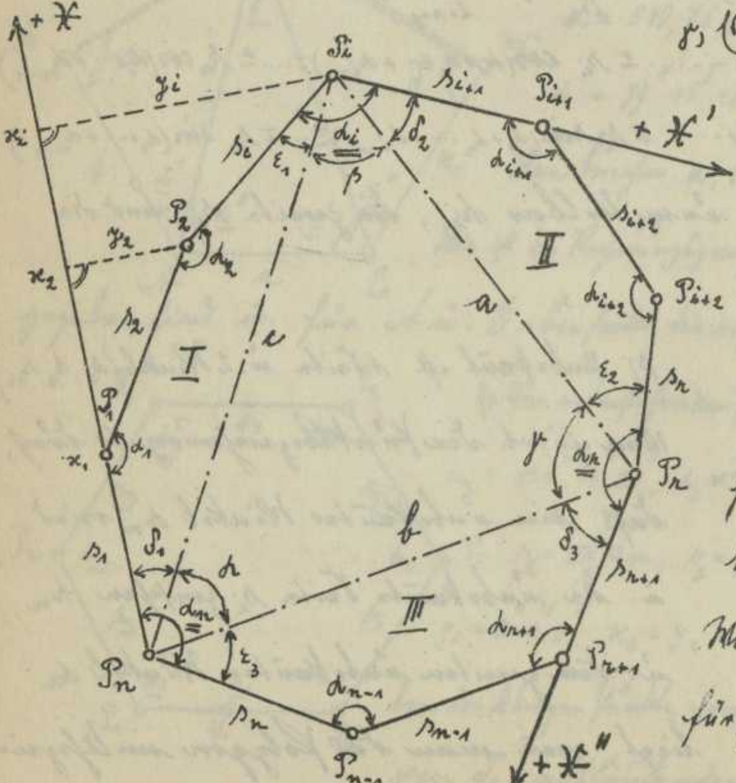
β) Unbekannt ist 1 Seite u. 2 Winkel (s_i; α_r α_n)
Man führt die Punktbezeichnung so durch, daß ein unbekannter Winkel α_n wird u. die unbekannte Seite s_i zwischen α_n u. dem zweiten unbekannten Winkel α_r liegt, wenn man das Polygon im Uhrzei=

graphie umfährt. Man hat dann zunächst zur Bestimmung von s_i u. α_r die beiden Projektionsgleichungen:

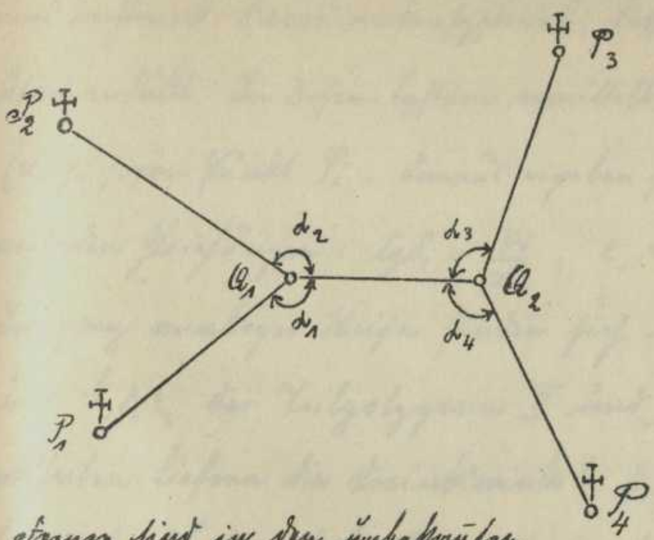
$$0 = s_1 - s_2\cos\alpha_1 + s_3\cos(\alpha_1+\alpha_2) - \dots \pm s_i\cos(\alpha_1+\dots+\alpha_{i-1}) \mp \dots \pm s_{r+1}\cos(\alpha_1+\dots+\alpha_r) \mp s_{r+2}\cos(\alpha_1+\dots+\alpha_r+\alpha_{r+1}) \pm \dots$$

$$0 = s_2\sin\alpha_1 - s_3\sin(\alpha_1+\alpha_2) + \dots \mp s_i\sin(\alpha_1+\dots+\alpha_{i-1}) \pm \dots \mp s_{r+1}\sin(\alpha_1+\dots+\alpha_r) \pm s_{r+2}\sin(\alpha_1+\dots+\alpha_r+\alpha_{r+1}) \mp \dots$$

drückt man s_i mit Hilfe der zweiten Gleichung aus u. führt man diesen Ausdruck in die erste Gleichung ein, so erhält man durch Zerlegen der mit α_r zusammengesetzten Winkel zur Bestimmung von α_r eine Gleichung von der Form: $A\cos\alpha_r + B\sin\alpha_r = C$. Mit bekanntem α_r hat man in dem aus der zweiten Projektionsgleichung gewonnenen Substitutionsausdruck auch s_i. Der letzte fehlende Winkel ist $\alpha_n = (n-2)180° - \sum_{i=1}^{i=n-1}\alpha_i$.



γ) Es sind drei Winkel unbekannt (α_i α_r α_n). Werden die Scheitel der drei unbekannten Winkel zum Dreieck $P_n P_i P_r$ verbunden, so entstehen auch drei Teilpolygone I, II, III. In jedem dieser Teilpolygone fehlen 1 Seite (die Dreieckseite) und zwei Winkel (δ u. ε). Diese Stücke könnte für jedes Polygon wie im Fall β)



2) die Marek'sche Aufgabe.

Vier Punkte, welche unzugänglich sein können, sind ihrer Lage nach durch ihre rechtwinkligen Koordinaten bestimmt:

	x	y
P_1:	$+2630{,}12$	$+681{,}73$
P_2:	$+2815{,}07$	$+2231{,}93$
P_3:	$+436{,}85$	$+2586{,}72$
P_4:	$+201{,}16$	$+201{,}15$

Ferner sind in den unbekannten Punkten Q_1 u. Q_2 die Winkel

$\alpha_1 = 121°41'25''$ $\alpha_2 = 120°39'16''$

$\alpha_3 = 110°49'13''$ $\alpha_4 = 112°56'04''$

beobachtet worden. Welches ist der Weg bei der Koordinatenberechnung für die beiden unbekannten Punkte u. welches sind ihre Koordinaten?

3) Man beweise die Differentialgleichung $d\beta = \frac{1}{c^2}(a\,db - b\,da)$ im rechtwinkligen Dreieck aus der Gleichung $\operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}$ und berechne den Winkelfehler $d\beta''$, welcher im gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck mit der Kathete 120 m entsteht, wenn a um 3 cm zu kurz u. b um 5 cm zu lang gemessen worden ist.

aus den Projektionsgleichungen berechnet werden. Bequemer aber ist folgender Weg. Um Polygon I zu berechnen, macht man P_n zum Ursprung eines rechtwink. Koordinatensystems, dessen +X-Achse mit der Seite s_1 zusammenfällt. In diesem System ermittelt man die rechtw. Koordinaten ($x_i\ y_i$) von Punkt P_i. Daraus ergeben sich dann die fehlenden Stücke nach den Gleichungen: $tg\,\delta_1 = \frac{y_i}{x_i}$; $\varepsilon_1 = \varphi_i - \delta_1$; $c = \frac{x_i}{\cos\delta_1} = \frac{y_i}{\sin\delta_1}$.
In ganz analoger Weise finden sich auch die fehlenden Stücke $a, \delta_2\, \varepsilon_2$ und $b, \delta_3\, \varepsilon_3$ der Teilpolygone II und III. Die nunmehr bekannten Dreieckseiten liefern die Dreieckswinkel α, β, γ (Halbwinkelsatz). Aus den berechneten Teilwinkeln lassen sich nunmehr die fehlenden Polygonwinkel zusammensetzen: $\alpha_i = \varepsilon_1 + \beta + \delta_2$; $\alpha_k = \varepsilon_2 + \gamma + \delta_3$; $\alpha_n = \varepsilon_3 + \alpha + \delta_1$.
Kontrolle: $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i = (n-2)\,180^\circ$.

c) Flächeninhalt eines Polygons.

Sind $r_i\ \varphi_i$ die Polarkoordinaten u. $x_i\, y_i$ die rechtwinkligen Koordinaten des Polygonpunktes P_i, so bestehen zur Ermittlung der Polygonfläche F die folgenden Gleichungen:

$$2F = \sum_{i=1}^{i=n} r_i r_{i+1} \sin(\varphi_{i+1} - \varphi_i) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_{i+1} - \sum_{i=1}^{i=n} y_i x_{i+1}.$$

Die letzte Gleichung verwendet man bequemer in der Form: $2F = \sum_{i=1}^{i=n} x_i (y_{i+1} - y_{i-1}) = -\sum_{i=1}^{i=n} y_i (x_{i+1} - x_{i-1})$

18.) Differentialformeln im ebenen Dreieck.

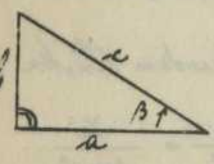
a) Zwischen einer Winkeländerung $d\alpha$ u. der Änderung dy einer geometrischen

Funktion besteht folgender Zusammenhang:

$y = \sin x: \; dy = \cos x \, d\hat{x} = \cos x \frac{dx''}{\rho''}; \quad y = \cos x: \; dy = -\sin x \, d\hat{x} = -\sin x \frac{dx''}{\rho''};$

$y = tg\, x: \; dy = \frac{d\hat{x}}{\cos^2 x} = \frac{dx''}{\rho'' \cos^2 x}; \quad y = ctg\, x: \; dy = \frac{-d\hat{x}}{\sin^2 x} = \frac{-dx''}{\rho'' \sin^2 x}.$

b) Für das rechtwinklige Dreieck bestehen die folgenden Differentialgleichungen:



$$c\,dc = a\,da + b\,db; \quad d\beta = \frac{d\beta''}{\rho''} = \frac{1}{c^2}(a\,db - b\,da);$$

$$d\beta = \frac{d\beta''}{\rho''} = \frac{1}{ac}(c\,db - b\,dc) = \frac{1}{bc}(a\,dc - c\,da);$$

c) Differentialformeln für das schiefwinklige Dreieck.

1) Da $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ u. auch $(\alpha + d\alpha) + (\beta + d\beta) + (\gamma + d\gamma) = 180^\circ$ sein muß, so besteht für die drei Winkeländerungen die Bedingung: $d\alpha + d\beta + d\gamma = 0$.

2) Zwischen den Änderungen zweier Seiten (a, b) u. der ihnen gegenüberliegenden Winkel (α, β) besteht die Beziehung: $\frac{da}{a} - ctg\,\alpha \cdot \frac{d\alpha''}{\rho''} = \frac{db}{b} - ctg\,\beta \frac{d\beta''}{\rho''}$;

3) Für drei Seiten und 1 Winkel hat man: $da = \cos\gamma\, db + \cos\beta\, dc + \frac{bc}{a}\sin\alpha\, d\alpha$

4) Zwischen den Änderungen zweier Seiten a, c u. zweier Winkel α, β, wovon der eine (β) von den gegebenen Seiten eingeschlossen ist, besteht die Gleichung: $\frac{b\,d\alpha''}{\rho''} + a\cos\gamma \frac{d\beta''}{\rho''} = \sin\gamma \cdot da - \sin\alpha\, dc$.

Aufgaben.

1) Für das auf dem vorhergehenden Übungsblatt N:8 unter N:2 gegebene Polygon soll die Fläche ermittelt werden

a) durch Zerlegen in Dreiecke

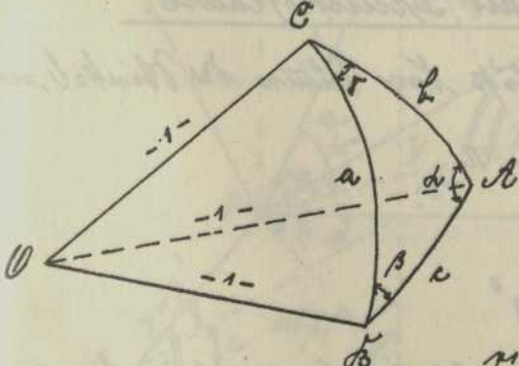
b) aus den rechtwinkligen Koordinaten der Polygonpunkte.

24. I 1910 — № 10

Trigonometrie.

B) Sphärische Trigonometrie.

1, Begriff des sphärischen Dreiecks und Polardreiecks.



Beschreibt man um den Scheitel O eines Dreikants eine Kugel, so ist deren Schnittfigur mit den Dreikantsebenen ein sphärisches Dreieck. In der sphärischen Trigonometrie betrachtet man ausschließlich Dreiecke u. daraus zusammengesetzte Figuren, welche auf einer Kugel mit dem Halbmesser 1 liegen. Die Schnittbogen a, b, c heißen die Seiten des Dreiecks u. die Winkel α, β, γ, welche je zwei solche Seiten einschließen, nennt man kurzweg die Winkel des sphärischen Dreiecks. Erstere (die Seiten) sind identisch mit den Kantenwinkeln u. letztere (die Winkel) mit den Flächenwinkeln des Dreikants.

Zieht man die auf den Seiten a b c senkrecht stehenden Kugeldurchmesser, so bilden drei zusammengehörige Durchmesserenden (Pole) ein neues sphärisches Dreieck, welches in bezug auf das gegebene oder Urdreieck das Polar- oder Supplementardreieck heißt. Dasselbe besitzt die Eigenschaft, daß seine Seiten u. Winkel die entsprechenden Winkel u. Seiten des Urdreiecks zu 180° ergänzen.

2) Der sphärische Excess und die Dreiecksfläche.

Der sphärische Exzeß ist der Überschuß der Summe der Winkel eines Kugeldreiecks über 180° bzw. über π.

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

$$\varepsilon^{\circ} = \alpha^{\circ} + \beta^{\circ} + \gamma^{\circ} - 180^{\circ}$$

Die Fläche des sphärischen Dreiecks auf der Einheitskugel ist

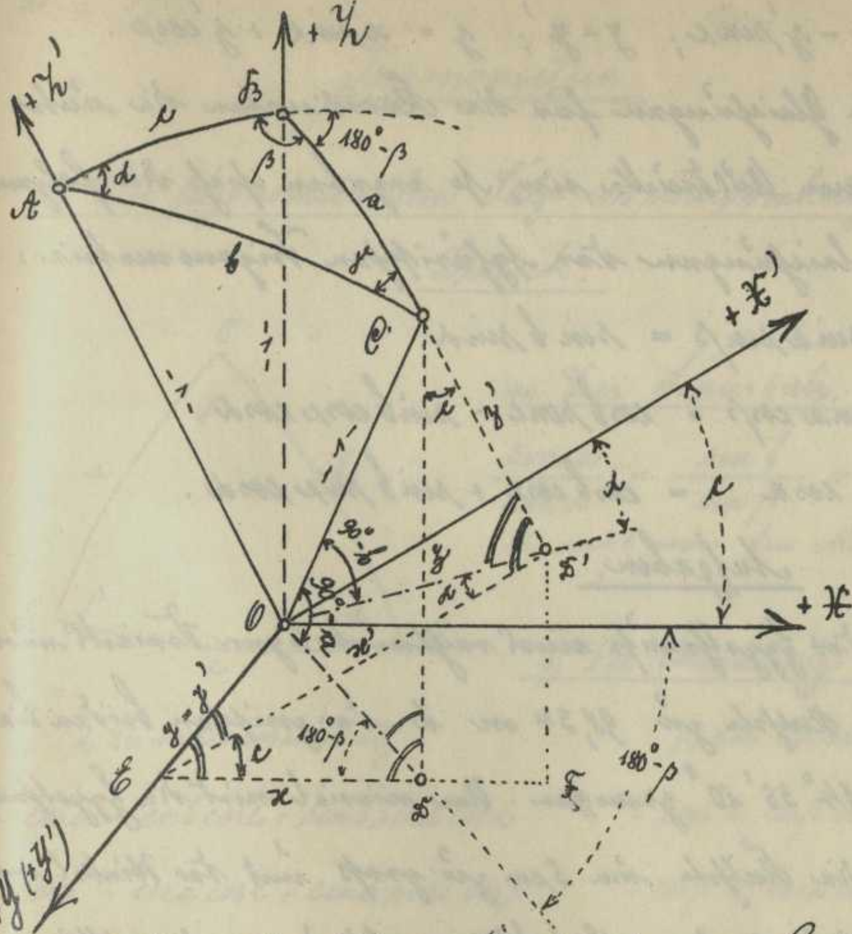
$$F = \widehat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon^{\circ}}{\varrho^{\circ}} = \frac{\varepsilon'}{\varrho'} = \frac{\varepsilon''}{\varrho''}.$$

Befindet sich das Dreieck auf einer Kugel vom Halbmesser r, so ist

$$F_r = r^2 \widehat{\varepsilon} = r^2 \frac{\varepsilon^{\circ}}{\varrho^{\circ}} = r^2 \frac{\varepsilon'}{\varrho'} = r^2 \frac{\varepsilon''}{\varrho''}.$$

3.) Ableitung der sphärischen Fundamentalformeln durch Koordinatentransformation.

Macht man den Kugelmittelpunkt O zum Ursprung eines räumlichen, rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen XZ-Ebene die Seite c enthält u. dessen Z-Achse mit OA zusammenfällt,



so sind die rechtwinkligen Koordinaten von C in diesem System:

a) $x = -\sin a \cos\beta$; $y = \sin a \sin\beta$; $z = \cos a$

Macht man nunmehr unter Beibehaltung der Y-Achse als Y'-Achse die Ecke OA zur Z'-Achse, so erhält man für die rechtwinkligen Koordinaten von C in diesem System:

b) $x' = \sin b \cos\alpha$; $y' = \sin b \sin\alpha$; $z' = \cos b$;

die rechtwinkligen Koordinaten beider Systeme hängen nun durch die Transformationsgleichungen zusammen.

c) $x = x'\cos c - z'\sin c; \quad y = y'; \quad z = x'\sin c + z'\cos c.$

Setzt man in diese Gleichungen für die Koordinaten die unter a) u. b) genannten Ausdrücke ein, so ergeben sich die folgenden Fundamentalgleichungen der sphärischen Trigonometrie:

$$
\text{d)}\quad
\begin{aligned}
\sin a \sin\beta &= \sin b \sin\alpha \\
\sin a \cos\beta &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos\alpha \\
\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha .
\end{aligned}
$$

Aufgaben.

1) Zur Bestimmung der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks wurde die Länge einer Kathete zu 98,34 m u. der zwischen beiden liegende Winkel zu 14° 55′ 10″ gemessen. Um wieviel wird die Hypotenuse fehlerhaft, wenn die Kathete um 5 cm zu groß und der Winkel infolge eines groben Versehens um 1° zu klein gefunden worden ist?

2) Welchen Fehler ergibt sich in Beispiel 1 auf Blatt 5 für b, wenn a um 6 cm u. α um 1′ zu klein angegeben sind?

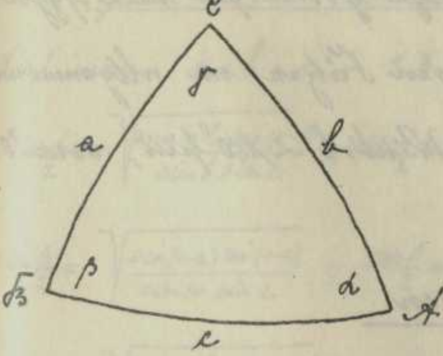
3) In Aufgabe No 3 auf Blatt 5 sind die einzelnen Bestimmungsstücke des Dreiecks um die Beträge $da = +9$ cm, $db = -5$ cm, $d\alpha = -30''$ fehlerhaft. Wie groß sind dc u. $d\beta$?

4) Ein reguläres sphärisches Viereck liegt auf einer Kugel vom Halbmesser $r = 6378$ km. Wie groß ist die in qkm ausgedrückte Vierecksfläche, wenn der Polygonwinkel 106° ist?

31. I. 1910. № 11.

Trigonometrie.

4.) Die trigonometrischen Sätze im schiefwinkeligen, sphärischen Dreieck.



a) Der Sinussatz.

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} = M;$$

M nennt man den Modul des Dreiecks.

b) Der Cosinussatz.

α) Der Seitencosinussatz.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$
$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$$

β) Der Polarcosinussatz.

$$-\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos a$$
$$-\cos \beta = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma \cos b$$
$$-\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos c$$

c) Der Sinus-Cosinussatz.

$$\sin a \cos \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha; \quad \sin c \cos \alpha = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos \gamma$$

$$\sin a \cos \gamma = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos \alpha; \quad \sin c \cos \beta = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos \gamma$$

$$\sin b \cos \gamma = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos \beta;$$

$$\sin b \cos \alpha = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos \beta;$$

d) Cotangentensatz (Satz der vier aufeinander folgenden Stücke).

$\cos\alpha \cos c = \sin c \,\mathrm{ctg}\, b - \sin\alpha \,\mathrm{ctg}\,\beta$; $\cos a \cos\gamma = \sin a \,\mathrm{ctg}\, b - \sin\gamma \,\mathrm{ctg}\,\beta$;

$\cos c \cos\beta = \sin c \,\mathrm{ctg}\, a - \sin\beta \,\mathrm{ctg}\,\alpha$; $\cos\gamma \cos b = \sin b \,\mathrm{ctg}\, a - \sin\gamma \,\mathrm{ctg}\,\alpha$;

$\cos\beta \cos a = \sin a \,\mathrm{ctg}\, c - \sin\beta \,\mathrm{ctg}\,\gamma$; $\cos b \cos\alpha = \sin b \,\mathrm{ctg}\, c - \sin\alpha \,\mathrm{ctg}\,\gamma$,

Die bisher unter a) bis d) aufgeführten Sätze gelten für alle sphärischen Dreiecke, während bei den folgenden Sätzen im allgemeinen das Euler'sche Dreieck, dessen Seiten u. Winkel $< 180°$ sind, vorausgesetzt ist.

e) Die Delambre'schen Gleichungen.

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b+c}{2} = \sin\frac{a}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}; \qquad \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{a+c}{2} = \sin\frac{b}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b+c}{2} = \cos\frac{a}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}; \qquad \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{a+c}{2} = \cos\frac{b}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b-c}{2} = \sin\frac{a}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}; \qquad \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{a-c}{2} = \sin\frac{b}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b-c}{2} = \cos\frac{a}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}; \qquad \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{a-c}{2} = \cos\frac{b}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2};$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a+b}{2} = \sin\frac{c}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{a+b}{2} = \cos\frac{c}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a-b}{2} = \sin\frac{c}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{a-b}{2} = \cos\frac{c}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

f) Die Neper'schen Gleichungen (Analogien).

$$\mathrm{tg}\frac{b+c}{2} = \mathrm{tg}\frac{a}{2}\,\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}; \qquad \mathrm{tg}\frac{b-c}{2} = \mathrm{tg}\frac{a}{2}\,\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\,\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}\,; \qquad \operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\,\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}}\,;$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{b+c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{b-c}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}\,;$$

g) Die sphärischen Halbwinkelsätze.

Setzt man $a+b+c = 2s$, so ist:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\,; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\,; \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}} = \frac{k}{\sin(s-a)}\,;$$

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}\,; \quad \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}\,; \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-b)}} = \frac{k}{\sin(s-b)}\,;$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}\,; \quad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-c)}{\sin a\sin b}}\,; \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s\cdot\sin(s-c)}} = \frac{k}{\sin(s-c)}\,;$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin(s-a)}{k}\,;$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sin(s-b)}{k}\,; \qquad k = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}\,;$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin(s-c)}{k}\,;$$

h) Die Halbseitensätze.

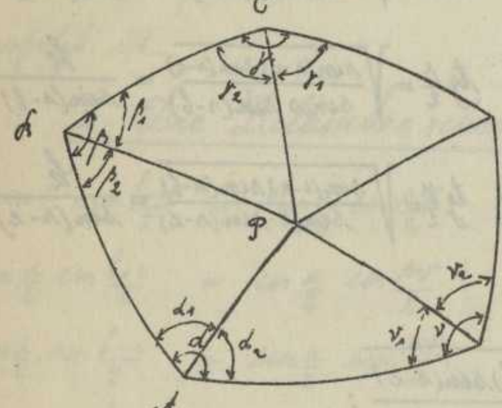
Setzt man $\alpha+\beta+\gamma = 2\sigma$ und $k' = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{-\cos\sigma}}$, so ist

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{\cos(\sigma-\alpha)}{k'} \qquad \operatorname{tg}\frac{b}{2} = \frac{\cos(\sigma-\beta)}{k'}\,; \qquad \operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\cos(\sigma-\gamma)}{k'}\,.$$

Aufgaben.

1) Man beweise den sphärischen Sin- und Cosinussatz, jeden für sich am Dreikant.

2) Mit Hilfe des Polarecksatzes sollen Gleichungen für den sin u. cos der (durch die Winkel ausgedrückten) halben Seite abgeleitet werden.



3.) Der im sphärischen Polygon $ABC\ldots N$ liegende Punkt P ist mit sämtlichen Polygonecken durch Bögen größter Kugelkreise verbunden. Durch diese Verbindungslinien werden die Polygonwinkel $\alpha, \beta \ldots \nu$ in die Teilbeträge $\alpha_1 \alpha_2$ $\beta_1 \beta_2 \ldots$ $\nu_1 \nu_2$ zerlegt. Man zeige, dass

$$\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1 \ldots \sin\nu_1 = \sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2 \ldots \sin\nu_2 .$$

4.) Drei Punkte der Erdoberfläche bilden ein gleichseitiges sphärisches Dreieck, dessen Seitenlänge gleich dem Erdhalbmesser (= 6370 km) ist. Wie groß sind die Winkel u. die Dreiecksfläche?

7. II 1910. № 12.

Trigonometrie.

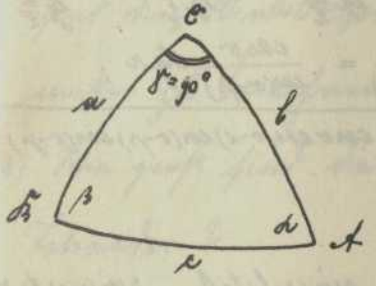
5.) Formeln für den sphärischen Excess.

$$\varepsilon = \alpha+\beta+\gamma - 180^\circ;$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}} \quad (\text{L'Huilier'sche Gleichung})$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}}}; \quad \operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\sin\gamma}{1+\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\cos\gamma}$$

6.) Das rechtwinkelige sphärische Dreieck.



a und b sind Katheten, c ist die Hypotenuse.

$$\cos c = \cos a\cdot\cos b = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta;$$

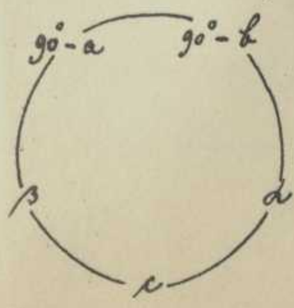
$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}; \quad \sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c};$$

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}; \quad \cos\beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a};$$

$$\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}; \quad \cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha};$$

Alle für das rechtwinkelige Dreieck angeschriebenen Sätze lassen sich gemeinsam durch die Neper'sche Merkregel ausdrücken:



Schreibt man unter Weglassung des rechten Winkels die Stücke des rechtwinkeligen Dreiecks in ihrer natürlichen Reihenfolge im Kreise an, so besteht, wenn man noch statt der Katheten ihre Complemente setzt, folgender Satz:

der cos irgend eines der angeschriebenen Stücke ist gleich dem sin-Produkt der beiden von ihm getrennt liegenden und gleich dem ctg-Produkt der beiden an ihm anliegenden Stücke.

7.) Die sphärischen Inkreis- u. Umkreishalbmesser.

Sind r, r_a, r_b, r_c die Umkreishalbmesser des Hauptdreiecks u. der Nebendreiecke und sind ferner ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c die entsprechenden Inkreishalbmesser, so gelten folgende Gleichungen:

$$\operatorname{ctg} r = k' = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{-\cos\sigma}} = \frac{S'}{\cos\sigma} = \frac{\cos(\sigma-\alpha)}{\operatorname{tg}\frac{a}{2}} = \frac{\cos(\sigma-\beta)}{\operatorname{tg}\frac{b}{2}} = \frac{\cos(\sigma-\gamma)}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}}$$

$$\operatorname{ctg} r_a = \frac{S'}{\cos(\sigma-\alpha)} = \frac{\cos\sigma}{\cos(\sigma-\alpha)}\operatorname{ctg} r; \quad \operatorname{ctg} r_b = \frac{S'}{\cos(\sigma-\beta)} = \frac{\cos\sigma}{\cos(\sigma-\beta)}\operatorname{ctg} r;$$

$$\operatorname{ctg} r_c = \frac{S'}{\cos(\sigma-\gamma)} = \frac{\cos\sigma}{\cos(\sigma-\gamma)}\operatorname{ctg} r; \text{ dabei ist } S' = \sqrt{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)};$$

ferner:

$$\operatorname{tg}\varrho = k = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}} = \sin(s-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sin(s-b)\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sin(s-c)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2};$$

und $\frac{S}{\sin s}$.

$$\operatorname{tg}\varrho_a = \frac{S}{\sin(s-a)} = \frac{\sin s}{\sin(s-a)}\operatorname{tg}\varrho; \quad \operatorname{tg}\varrho_b = \frac{S}{\sin(s-b)} = \frac{\sin s}{\sin(s-b)}\operatorname{tg}\varrho;$$

$$\operatorname{tg}\varrho_c = \frac{S}{\sin(s-c)} = \frac{\sin s}{\sin(s-c)}\operatorname{tg}\varrho; \text{ hierbei ist } S = \sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)};$$

Aufgaben.

1) Man drücke den sphärischen Exzeß durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel aus! Wie vereinfacht sich die aufgestellte Beziehung, wenn die beiden Seiten die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind?

2) Wie lassen sich die Höhen im sphärischen Dreieck einerseits durch die Seiten und andererseits durch die Winkel ausdrücken?

3) Für das Dreieck mit den Seiten $a = 60°10'$, $b = 68°24'$, $c = 55°53'$ sind die Winkel sowie die verschiedenen Um- u. Inkreishalbmesser zu berechnen.

4) Wie groß sind die Kanten- und Flächenwinkel im regulären Tetraeder?

14. II 1910.

№ 13.

Trigonometrie.

Aufgaben.

1) Wie gross sind die Kanten- und Flächenwinkel im regulären Oktaeder?

2) Ein sphärisches Dreieck ist bestimmt durch $a = 63° 44' 15''$, $b = 70° 12' 35''$ und den eingeschlossenen Winkel $\gamma = 59° 15' 55''$. Man berechne die sämtlichen unbekannten Stücke.

3) In einem regulären Polygon entsteht durch Überspringen je eines Punktes ein neues reguläres Polygon. Wie lassen sich Seite u. Winkel des zweiten Polygons einerseits durch die Seite u. andererseits durch den Winkel des ersten Polygons ausdrücken?

4) Drei Punkte P_1, P_2, P_3 besitzen die geographischen Koordinaten $\varphi_1 \lambda_1$, $\varphi_2 \lambda_2$, $\varphi_3 \lambda_3$. Wie lässt sich die Bedingung dafür, dass die drei Punkte auf einem grössten Kugelkreise liegen, in übersichtlicher Form ausdrücken?

21. II 1910. N: 14.

Trigonometrie.

8.) Übergang von der sphärischen zur ebenen Trigonometrie.

Ein auf der Kugel mit dem Radius r liegendes Dreieck besitzt die Seitenlängen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$. Die zugehörigen Seiten auf der Einheitkugel sind $a = \frac{\mathfrak{a}}{r}$, $b = \frac{\mathfrak{b}}{r}$, $c = \frac{\mathfrak{c}}{r}$; die Winkel sind auf beiden Kugeln die gleichen: α, β, γ. Wenn man nun unter Festhaltung bestimmter Werte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, den Kugelhalbmesser über alle Grenzen wachsen läßt, so werden die Seiten a, b, c = Null. Für diesen Grenzfall ergeben sich die Sätze der ebenen Trigonometrie aus denjenigen der sphärischen Trigonometrie, wenn man die Seiten durch die Längen auf der Kugel und den Halbmesser ausdrückt und hierauf die diese Größen enthaltenden goniometrischen Funktionen bis zu Gliedern 2. Ordnung einschließlich in Reihen entwickelt.

9. Der Satz von Legendre.

Für sphärische Dreiecke mit kleinen Seiten (etwa kleiner als 2°) gilt folgender Satz:

Sind die Seitenlängen eines Kugeldreiecks gleich den Seiten eines ebenen Dreiecks, so sind die Winkel des ebenen Dreiecks bis auf unendlich kleine Größen gleich den sphärischen Winkeln vermindert um den dritten Teil des sphärischen Exzesses. Damit läßt sich jedes meßbare geodätische Dreieck berechnen, wenn eine Seite u. 2 Winkel gegeben sind. Der hierzu notwendige Exzeß kann aus dem durch diese Stücke bestimmten ebenen Dreieck mit genügender Genauigkeit gefunden werden.

Anmerkung. An Stelle des Legendre'schen Satzes kann man auch die Additamentenmethode anwenden. Hier ist das logarithmische Additament ($m = -\log(1 - \frac{a^2}{6r^2})$), d. i. diejenige kleine Größe, welche zum Ausdruck $\lg r \sin \frac{a}{r}$ hinzuzufügen ist, um daraus $\lg a$ zu erhalten, für die verschiedenen Seitenlängen tabuliert, so daß man jederzeit vom Bogen auf den sin und umgekehrt übergehen kann.

Aufgaben.

1) Die Spuren E_1 und E_2 einer Ebene schließen mit der Tafelkante die Winkel $\alpha = 38^\circ 15'$ und $\beta = 45^\circ 20'$ ein. Welchen Winkel bilden die Spuren unter sich u. welches sind die beiden Neigungswinkel der Ebene?

2) Der Bergwinkel ACB ist $\alpha = 65^\circ\,12'\,26''$. Wie groß ist der zugehörige Horizontalwinkel, wenn die beiden Winkelschenkel AC u. BC mit der Horizontalebene die Höhenwinkel $h_a = 2^\circ\,15'\,20''$ u. $h_b = 3^\circ\,0'\,10''$ einschließen?

3) Unter welcher Breite schneidet der Großkreisbogen Bonn-Budapest den Münchener Meridian? (Bonn: $\varphi = 50^\circ 43' 45''$ $\lambda = 7^\circ 05' 48''$; Budapest: $\varphi = 47^\circ\,29'\,35''$ $\lambda = 19^\circ\,03'\,49''$; München $\lambda = 11^\circ\,36'\,30''$).

4) Von einem sphärischen Dreieck, welches auf einer Kugel mit dem Halbmesser $r = 63{,}70$ km liegt, kennt man die Seite $a = 2000{,}00$ m sowie die Winkel $\alpha = 61^\circ\,15'\,20''$ u. $\gamma = 63^\circ\,09'\,30''$. Man berechne die Seiten b und c einerseits nach dem Satze von Legendre und andererseits nach der Additamentenmethode.

28. II 1910. № 15.

Trigonometrie.

10.) Differentialformeln im sphärischen Dreieck.

a) Beziehung zwischen den Änderungen zweier Seiten u. ihrer Gegenwinkel:

$$\operatorname{ctg} a \cdot da - \operatorname{ctg} b \cdot db = \operatorname{ctg} \alpha \, d\alpha - \operatorname{ctg} \beta \, d\beta$$

b) Beziehung zwischen den Änderungen dreier Seiten u. eines Winkels:

$$da = \cos\gamma \, db + \cos\beta \, dc + \frac{\sin b \sin c \sin\alpha}{\sin a} d\alpha$$

$$\text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad + \sin b \sin\gamma \, d\alpha$$

$$\text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad + \sin c \sin\beta \, d\alpha$$

c) Beziehung zwischen den Änderungen dreier Winkel u. einer Seite (Polarfolgerung)

$$d\alpha = -\cos c \, d\beta - \cos b \, d\gamma + \frac{\sin\beta \sin\gamma \sin a}{\sin\alpha} da$$

$$\text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad + \sin\beta \sin c \, da$$

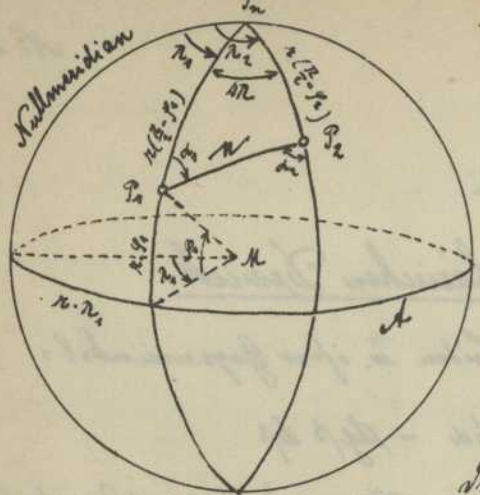
$$\text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad + \sin\gamma \sin b \, da$$

d) Beziehung zwischen den Änderungen von vier aufeinander folgenden Stücken:

$$\sin\gamma \, db - \sin\beta \cos a \, dc = \sin b \cos\gamma \, d\alpha + \sin a \, d\beta$$

11.) Geographische Koordinaten.

Unter der geographischen Länge λ eines Ortes versteht man den nach Osten positiv gezählten Winkel, welchen die Meridianebene



des Ortes mit einem festen Anfangsmeridian einschliesst. Die geographische Breite eines Ortes ist derjenige nach Norden positiv gezählte Winkel, den das Lot im betreffenden Orte mit der Äquatorebene einschliesst.

Der von Nord über Ost positiv gezählte Winkel α_1, welchen ein Kreisbogen mit dem Meridian durch seinen Anfangspunkt einschliesst, nennt man das Azimut des Bogens. Das Azimut $180^\circ+\alpha_2$ im Endpunkt des Bogens heisst das Gegenazimut. Ist P_1P_2 ein grosser Bogen, so dienen zur Berechnung der im Dreieck $P_1P_nP_2$ (geographisches Fundamentaldreieck) fehlenden Stücke die Neperschen u. Delambre'schen Gleichungen. Kommen nur kleine Bögen s in Betracht, so ergeben sich durch Reihenentwicklung die folgenden Beziehungen:

$$\Delta\varphi'' = (\varphi_2-\varphi_1) = \rho''\frac{s}{R}\left(\cos\alpha_1 - \frac{s}{2R}\,tg\,\varphi_1\right); \quad s^2 = R^2\left(\left(\frac{\Delta\varphi''}{\rho''}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\lambda''}{\rho''}\right)^2\cos\varphi_1\cos\varphi_2\right);$$

$$\Delta\lambda'' = (\lambda_2-\lambda_1) = \rho''\frac{s\sin\alpha_1}{R\cdot\cos\varphi_2};$$

$$\Delta\alpha'' = \alpha_2-\alpha_1 = \frac{R\cdot\Delta\lambda''\cdot\Delta\varphi''\sin\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)}{\rho'' s\cdot\cos\alpha_2}\ \text{(Meridiankonvergenz)}.$$

Fläche einer durch zwei Parallelkreise begrenzten Kugelzone:

$$F_z = 4R^2\pi\sin\tfrac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)$$

Außerdem wurde das Azimut eines Berggipfels P_2 in P_1 zu $\alpha_1 = 135^\circ\, 51'\, 00''$ beobachtet. Welches sind die geographischen Koordinaten von P_2, wenn $P_1 P_2$ durch Triangulierung zu 45,245 km gefunden wurde?

3) In einem gleichseitigen sphärischen Dreieck mit der Seitenlänge $a = 60^\circ\, 10'\, 20''$ besitzen die einzelnen Stücke folgende Fehler:
$da = +10''$, $db = -8''$, $d\alpha = -12''$. Wie groß ist $d\beta$?

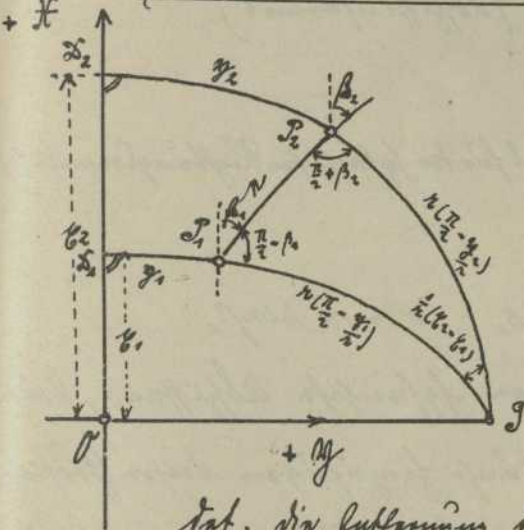
4) Vom Punkt P_1 mit den rechtwinklig sphärischen Koordinaten $x_1 = +130\,400{,}21\,m$, $y_1 = +95\,104{,}56\,m$ führt ein Großkreisbogen von der Länge $s = 30\,348{,}26\,m$ unter dem Richtungswinkel $\beta_1 = 35^\circ\, 53'\, 25{,}2''$ nach P_2. Welches sind die Koordinaten $x_2\ y_2$ dieses Punktes sowie der Gegenrichtungswinkel $\overset{180^\circ}{\beta_2}$?

5) Wie groß ist die genäherte Entfernung der Sternwarten München ($\varphi = 48^\circ\, 08'\, 46''$, $\lambda = 11^\circ\, 36'\, 30''$) und Bamberg ($\varphi = 49^\circ\, 53'\, 06''$, $\lambda = 10^\circ\, 53'\, 24''$)?

die durch zwei Parallelkreise (φ_1, φ_2) u. zwei Meridiane mit dem Längenunterschied $\Delta\lambda$ begrenzte Kugelfläche ist $F = 2r^2 \frac{\Delta\lambda^0}{\rho^0} \sin\frac{1}{2}(\varphi_2-\varphi_1)\cos\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)$.

12) Rechtwinkelig sphärische Linearkoordinaten.

(Soldner'sche Koordinaten.)



Um einen Punkt P_1 durch seine rechtwinkeligen Koordinaten im sphärischen System XY festzulegen, legt man durch ihn einen auf der X-Achse senkrecht stehenden größten Kreis, den Ordinatenkreis, welcher die X-Achse in D_1 schneidet. Die Entfernung dieses Punktes D_1 vom Nullpunkt O des Systems ist die sphärische Abszisse x_1 und das Bogenstück D_1P_1 ist die sphärische Ordinate von P_1. Die Richtung eines Bogens P_1P_2 ist durch seinen vom Parallelkreis zur X-Achse aus gezählten Richtungswinkel β_1 bestimmt. Der Richtungswinkel β_1 ist um die zur Ordinate y_1 gehörige Meridiankonvergenz kleiner als das Azimut α_1. Unter Gegenrichtungswinkel versteht man den Winkel $180° + \beta_2$.

Zwischen den sphärischen Koordinaten zweier Punkte, ihrer im Verhältnis zum Erdhalbmesser nur kleinen Entfernung r ($r < 200$ km) und den beiden Richtungswinkeln bestehen die folgenden Soldner'schen Gleichungen:

$$y_2 = y_1 + v - \frac{u^2}{2r^2}\left(y_1 + \frac{v}{3}\right) \quad \text{(Ordinatenformel)}$$
$$= y_1 + v + (y)$$

$$x_2 = x_1 + u + \frac{u}{2r^2}\left(y_2^2 - \frac{v^2}{3}\right) \quad \text{(Abszissenformel)}$$
$$= x_1 + u + (x)$$

$$\beta_2 = \beta_1 - \rho'' \frac{y_1 + y_2}{2r^2}(x_2 - x_1) \quad \text{(Formel für den sphärischen Richtungswinkel)}$$
$$= \beta_1 + (\beta).$$

Zur Abkürzung ist gesetzt: $u = r \cos\beta_1$, $v = r \sin\beta_1$.

Die Glieder (x), (y), (β) heißt man sphärische Abszissen=, Ordinaten= u. Richtungsverbesserung, weil durch Hinzufügen dieser Größen die Formeln für die ebene Koordinatenberechnung in die sphärischen Formeln übergehen. Ferner ist:

$$\operatorname{ctg}\beta_1 = \frac{u}{v} = \frac{x_2 - x_1 - (x)}{y_2 - y_1 - (y)}; \quad r = \frac{u}{\cos\beta_1} = \frac{v}{\sin\beta_1}.$$

Aufgaben.

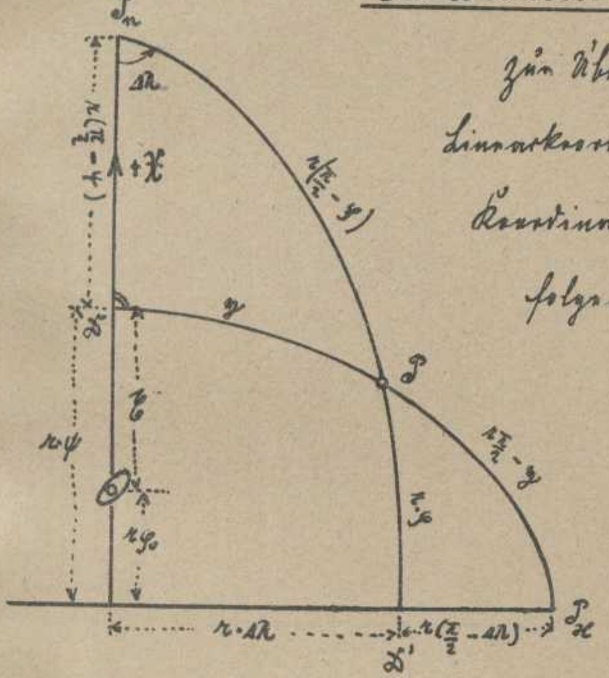
1) Wie groß ist die durch die Meridiane mit den Längen $\lambda_1 = 11°0'0''$ und $\lambda_2 = 11°30'00''$ sowie durch die beiden Parallelkreise mit den Breiten $\varphi_1 = 48°0'0''$ u. $\varphi_2 = 48°30'0''$ begrenzte Fläche auf der Erdkugel? ($r = 6370$ km).

2) Die geographischen Koordinaten eines Punktes P_1 wurden durch astronomische Ortsbestimmung zu $\varphi_1 = 50°15'00''$ $\lambda_1 = 91°24'00''$ gefunden.

7. III 1910. №. 16.

Trigonometrie.

13. Beziehungen zwischen den geographischen und den Soldner'schen Koordinaten.



Zur Überführung der sphärisch rechtwinkligen Linearkoordinaten $\xi\ \eta$ in geographische Koordinaten und umgekehrt bestehen die folgenden Beziehungen:

a) Strenge Gleichungen.

$$\psi = \varphi_0 + \rho'' \frac{\xi}{r}$$

$$\sin\varphi = \sin\psi \cos\frac{\eta}{r}$$

$$\operatorname{tg}\Delta\lambda = \frac{\operatorname{tg}\frac{\eta}{r}}{\cos\psi}$$

$$\sin\frac{\eta}{r} = \cos\varphi \sin\Delta\lambda$$

$$\operatorname{tg}\left(\varphi_0+\frac{\xi}{r}\right) = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\Delta\lambda}$$

b) Näherungsgleichungen.

$$\psi = \varphi_0 + \rho''\frac{\xi}{r}; \qquad \eta = \frac{r\cdot\Delta\lambda''}{\rho''}\cos\varphi$$

$$\Delta\varphi'' = \varphi-\psi = -\rho''\frac{\eta^2}{2r^2}\operatorname{tg}\psi; \qquad \Delta\psi'' = \psi-\varphi = \frac{\Delta\lambda''^2}{4\rho''}\sin 2\varphi$$

$$\Delta\lambda'' = \rho''\frac{\eta}{r\cos\psi}; \qquad \xi = \frac{r}{\rho''}(\psi-\varphi_0)$$

$$\Delta\varphi + \Delta\psi = 0$$

14.) Die astronomischen Koordinatensysteme.

a) Die in einem Orte senkrecht zu seinem Lote errichtete Ebene ist die Ebene des scheinbaren Horizontes und ihr Schnitt mit der Himmelskugel ist der scheinbare Horizont. Die hiezu parallele Ebene durch den Erdmittelpunkt schneidet den wahren Horizont aus. Für Fixsternbeobachtungen darf man die beiden Horizontebenen als zusammenfallend betrachten. Das verlängerte Lot trifft das Himmelsgewölbe in zwei Punkten, wovon der über dem Beobachter liegende als Zenith, der unter ihm liegende als Nadir bezeichnet wird. Es gibt zwei ausgezeichnete Lotebenen. Eine ist die Meridianebene des Ortes, welche den Horizont im Nord- und Südpunkt schneidet. Die andere ist die auf dem Meridian senkrecht stehende Ebene, welche als Ost-West-Vertikal oder als erster Vertikal bezeichnet wird. Sie trifft den Horizont im Ost- und im Westpunkt. Unter der Höhe eines Sternes versteht man den Winkel, welchen die vom Beobachter zum Stern gezogene Gerade mit dem Horizonte einschließt. Seine Zenithdistanz hingegen ist der Winkel zwischen dieser Geraden und dem Lot. Das Azimut eines Sternes ist der Winkel, welchen die durch den Stern und den Beobachtungspunkt gelegte Lotebene mit der Meridianebene einschließt.

das astronomische Azimuth wird in der Regel vom Südpunkt aus im Uhrzeigersinn positiv gezählt.

b) Die verlängerte Erdachse oder die Himmelsachse trifft das Himmelsgewölbe im Nordpol und Südpol des Himmels. Die Ebene des Erdäquators schneidet den Himmelsäquator aus, die Ebene des Ortsmeridians den Himmelsmeridian. Der die Welt- oder Himmelsachse enthaltende größte Kugelkreis durch einen Stern steht senkrecht auf dem Himmelsäquator und heißt der Stunden- oder Deklinationskreis des Gestirns. Der nach Westen positiv gezählte Winkel dieser Ebene mit der Meridianebene ist der Stundenwinkel des Sterns bzw. des Deklinationskreises. Den Winkel-Abstand eines Punktes vom Äquator nennt man Deklination, denjenigen vom Pol Polabstand. Die Deklinationen zählt man vom Äquator ab nach Norden zu positiv, nach Süden negativ. Alle Punkte mit gleicher Deklination liegen auf einem Parallelkreis zum Äquator. Jeder Fixstern beschreibt einen Parallelkreis und trifft dabei täglich den Meridian zweimal, einmal denjen. Halbmeridian, welcher den Zenithpunkt enthält u. ein zweites Mal die andere Hälfte mit dem Nadirpunkte. Im ersten Falle steht das Gestirn in oberer Kulmination, im zweiten in unterer

Kulmination. Die zugehörigen Sternhöhen heißt man *Mittags-* bzw. *Mitternachtshöhe.*

c) Der Großkreis, welchen die Sonne im Laufe eines Jahres unter den Sternen von West nach Ost beschreibt, ist die *Ekliptik*. Sie schneidet den Äquator in den beiden *Äquinoktialpunkten*. Wenn die Sonne von der südlichen auf die nördliche Himmelshalbkugel übertritt, steht sie im *Frühlings-* oder *Widderpunkt*, geht sie von der nördlichen auf die südliche über, so steht sie im *Herbstpunkte.* Legt man durch den Stern einen Großkreis, welcher die Ekliptikpole enthält und auf der Ekliptik senkrecht steht, so ist der Fußpunktsabstand dieses Kreises vom Widderpunkt die *Länge* des Sternes u. sein Bogenabstand von der Ekliptik ist seine *Breite.* Der Fußpunktsabstand des Stundenkreises vom Widderpunkt ist die *Rektaszension* des Sternes. Rektaszension u. Länge werden vom Widderpunkte ab nach Osten positiv gezählt und die Breite zählt man wie die Deklination nach Norden positiv. Den Stundenwinkel des Frühlingspunktes nennt man die *Sternzeit*. Zwischen der Sternzeit Θ, der Rektaszension α und dem Stundenwinkel t besteht die ebenso einfache als wichtige Beziehung $\Theta = \alpha + t$. Der Winkel zwischen der Äquatorebene u. Ekliptikebene ist die *Schiefe der Ekliptik* (ε rund $23\frac{1}{2}^\circ$).

d) Die Lage eines Sternes läßt sich auf verschiedene Weise bestimmen:

1) im System des Horizontes durch Azimut (a) und Höhe (h) bezw. Zenithdistanz (z). Die beiden Fundamentalebenen sind hier der Horizont u. die Meridianebene. Sie sind in fester Verbindung mit der Erde, weshalb die Koordinaten dieses Systems sich mit der Zeit fortwährend ändern. Diese Koordinaten sind aber der Beobachtung am bequemsten zugänglich.

2) im Systeme des Äquators

a) durch den Stundenwinkel t und die Deklination δ. Die eine Grundebene, der Meridian, ist fest mit der Erde, die andere, der Äquator fest mit der Himmelskugel verbunden. Der Stundenwinkel ändert sich daher mit der Zeit während die Deklination eine feste Größe ist.

b) durch die Rektaszension α und die Deklination δ. Hier tritt an Stelle des Meridians der Stundenkreis des Frühlingspunktes. Beide Fundamentalebenen sind fest mit dem Himmelsgewölbe verbunden und die Koordinaten daher unveränderlich. Dieses System benutzen die astronomischen Jahrbücher für die Angabe der Sternörter.

3) *im System der Ekliptik* durch die Länge λ und die Breite β. Diese Koordinaten sind unveränderliche Größen, da beide Fundamentalebenen, die Ekliptik u. der Längenkreis durch den Frühlingspunkt in fester Verbindung mit der Himmelskugel stehen.

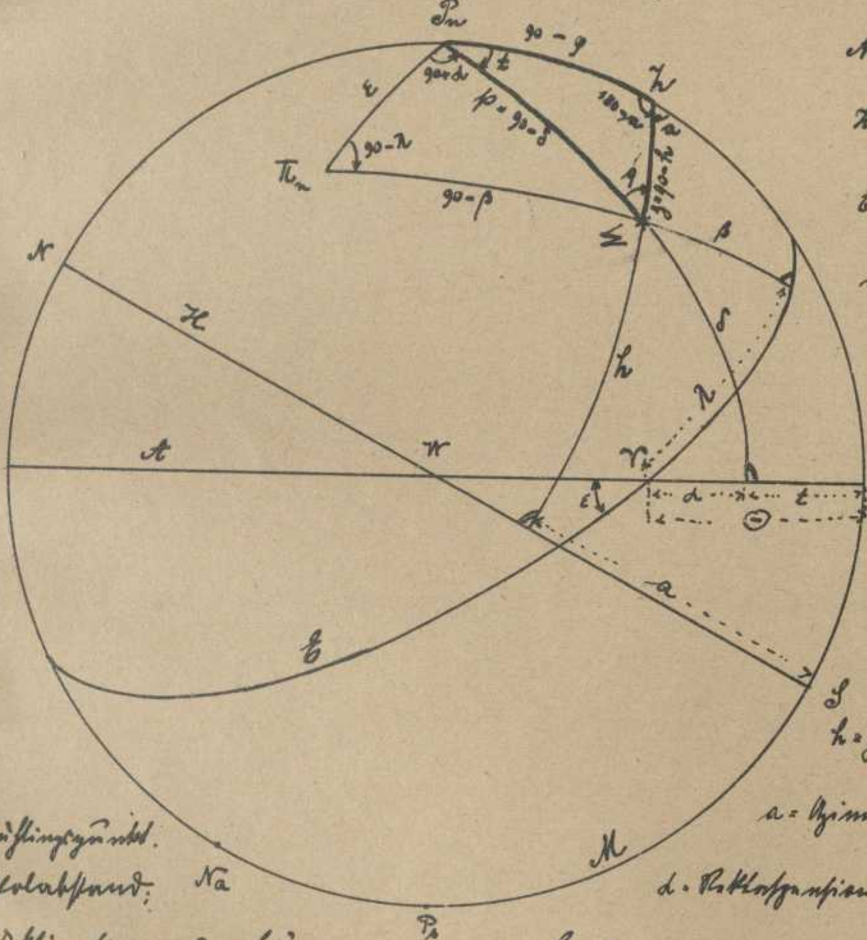
8) Ein *Sterntag* ist die zwischen zwei aufeinander folgenden oberen Kulminationen des Widderpunktes verstreichende Zeit. Sie wird in 24^h geteilt; ferner 1^h in 60^m u. 1^m in 60^s. Man hat also zur Überführung von Zeitmaß in Gradmaß u. umgekehrt die folgenden Beziehungen:

$$24^h = 360^\circ; \quad 1^h = 15^\circ; \quad 1^m = \frac{1}{4}^\circ = 15'; \quad 1^s = \frac{1}{4}' = 15'';$$

$$1^\circ = \frac{1}{15}^h = 4^m; \quad 1' = \frac{1}{15}^m = 4^s; \quad 1'' = \frac{1}{15}^s = 0{,}066\ldots^s.$$

Unter der *Sternzeit* versteht man den Stundenwinkel des Frühlingspunktes. In entsprechender Weise ist ein *wahrer Sonnentag* die zwischen zwei aufeinanderfolgenden oberen Kulminationen der wahren Sonne verstreichende Zeit u. *wahre Sonnenzeit* der Stundenwinkel der wahren Sonne. Die Grundlage für die Zeitmessung im bürgerlichen Leben ist eine fingierte im Äquator mit gleichförmiger Geschwindigkeit umlaufende Sonne, die *mittlere Sonne*. Ihr Stundenwinkel t' ist die *mittlere Ortszeit*. Der Unterschied zwischen diesem u. dem Stundenwinkel t der wahren Sonne nennt man die Zeitgleichung: $g = t' - t$.

Ein tropisches Jahr ist die Zeit, welche die Sonne braucht, um vom Widderpunkt wieder bis zum Widderpunkt zu gelangen. Es dauert 365,24220 mittlere Sonnentage oder 366,24220 Sterntage. Darnach ist 1 Sterntag = 0,99726957 mittlere Sonnentage u. 1 mittlerer Sonnentag = 1,00273791 Sterntage.



A = Äquator, H = Horizont, E = Ekliptik, M = Meridian, P_n P_s: Himmelspole, Π_n: Nordpol der Ekliptik; Z: Zenith, Na: Nadir; Σ: Stern; N = Nordpunkt; W = Westp.; S = Südpunkt; h = Höhe, z = Zenithdistanz; a = Azimut; t = Stundenwinkel;

♈ = Frühlingspunkt. α = Rektaszension; Θ = Sternzeit;

p = Polabstand; δ = Deklination; λ = Länge; β = Breite; q = parallaktischer Winkel.

Mittels der beiden Dreiecke $P_n Z \Sigma$ u. $P_n \Sigma \Pi_n$ kann man von einem Koordinatensystem in ein anderes übergehen. Dreieck $P_n Z \Sigma$ ist das astronomische Fundamentaldreieck.

25. IV 1910. №. 17.

Trigonometrie.

Aufgaben.

1) Der Beginn einer Mondfinsternis wurde in den beiden Orten P_1 und P_2 zu den Ortssternzeiten $\Theta_1 = 5^h\,53^m\,16{,}^s3$ und $\Theta_2 = 10^h\,59^m\,20{,}^s3$ beobachtet. Welches ist die geographische Länge λ_2 von P_2, wenn P_1 die geographische Länge $\lambda_1 = 11^\circ\,34'\,30''$ besitzt?

2) Welches ist zur mittleren mitteleuropäischen Zeit (M. E. Z.) $T = 1^h\,5^m\,10{,}^s0$ die Münchener Ortssternzeit Θ, wenn die Sternzeit im Münchener mittleren Mittag $\Theta_0 = 2^h\,34^m\,0{,}^s6$ beträgt, ferner München die geogr. Länge $\lambda = 11^\circ\,34'\,30''$ besitzt und ein mittlerer Sonnentag = 1,002 738 Sternentage ist?

3) a) Man berechne Rektaszension und Deklination der Sonne, wenn ihr Ort den Bogen zwischen dem Frühlingspunkt und dem Sommerwendepunkt halbiert. (Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^\circ\,27'\,8''$).

b) Welches die größte tägliche Rektaszensions- und Deklinationsänderung der Sonne unter der Annahme, dass sich die Sonne in der Ekliptik mit gleichmäßiger Geschwindigkeit bewegt?

4) a) Man bestimme für einen Ort von der Breite φ ($48^\circ\ 08'\ 57''$) den Stundenwinkel t und das Azimut a_s eines untergehenden Sternes mit der Deklination δ ($= +7^\circ\ 23'\ 27''$).

b) Welches sind für denselben Stern und den gleichen Ort die Höhe h und der Stundenwinkel t des Sternes, wenn derselbe im Westvertikal steht?

5) a) Wie groß ist für einen Beobachter auf dem 50. nördlichen Parallelkreis am längsten Tage die Morgenweite der Sonne? ($\delta_\odot = +23^\circ\ 27'\ 8''$).

b) Zu welcher mittleren Ortszeit geht die Sonne an diesem Tage durch den ersten Vertikal?

(Zeitgleichung $g = +1^m\ 20{,}9^s$)

c) Wie lange dauert dieser Tag vom Sonnenaufgang bis zum Sonnenuntergang unter Berücksichtigung der Refraktion gerechnet ($r_0 = 35'$)?

6) Welches größte Azimut erreicht der Polarstern ($\delta = +88^\circ\ 49'\ 33''$)

a) für den 50. Parallelkreis

b) für den 85. Parallelkreis?

9. V. 1910. — No. 18.

Trigonometrie.

Aufgaben.

1) Der Stern α Virginis wurde in München ($\varphi = +48^\circ\,08'\,57''$) zur Sternzeit $\Theta = 13^h\,20^m\,27{,}0^s$ unter der Höhe $H = 31^\circ\,09'\,32''$ im Meridian beobachtet. Man berechne für den Stern Rektaszension und Deklination.

2) In München wurde der Stern α Andromedae ($\alpha = 0^h\,3^m\,44{,}0^s$, $\delta = +28^\circ\,35'\,37''$) zur Uhrangabe $T = 4^h\,0^m\,10{,}5^s$ westlich vom Meridian unter der Höhe $h = 35^\circ\,15'\,10''$ beobachtet. Welches ist die Uhrverbesserung?

3) Der Stern β Orionis ($\alpha = 5^h\,10^m\,12{,}7^s$ $\delta = -8^\circ\,18'\,18''$) besitzt unter der Breite $\varphi = +30^\circ\,10'\,15''$ zur Uhrangabe $T = 5^h\,11^m\,0{,}0^s$ das Azimut $a = +3^\circ\,15'\,25''$. Man berechne die Uhrverbesserung.

4) Die Sonne wurde vor und nach der Kulmination unter den nahezu gleichen Höhen h_1 und $h_2 = h_1 + dh$ zu den Uhrangaben U_1 und U_2 (mittlere Ortszeit) beobachtet. Wie berechnet sich die Uhrverbesserung, wenn die Deklinationszunahme der Sonne in der Zwischenzeit $\Delta\delta$ und die Zeitgleichung g ist?

5) a) Wie beeinflussen die Fehler dh, $d\delta$, $d\varphi$ in Höhe, Deklination und Breite die aus einer Sternhöhe bestimmte Zeit?

b) Unter welchem Azimut ist der Einfluss dieser Fehler auf die Zeit am geringsten?

c) Man rechne für Aufgabe Nr 2 dieses Blattes den Zeitfehler dt, wenn $dh = +1'30''$, $d\delta = -10''$ und $d\varphi = +1'50''$ ist.

6) Im Punkt A ($\varphi = +50^\circ 10' 35''$) wurde zur Sternzeit $\Theta = 9^h 56^m 50{,}5^s$ zwischen dem Stern α Leonis ($\alpha = 10^h 03^m 34{,}8^s$ $\delta = +12^\circ 24' 27''$) und dem irdischen Objekte B der Horizontalwinkel $\gamma = 45^\circ 10' 30''$ gemessen. Welches ist das Azimut von AB?

30. V 1910. №19.

Trigonometrie.

Aufgaben.

1) In P ($\varphi = 50° 0' 0''$) wird der Stern α Lyrae ($\delta = + 38° 41' 58''$) unter der Höhe $h = 45° 17' 24''$ westlich vom Meridian beobachtet. Unter welchem Azimut erscheint der Stern in P?

2) a) Wie wird durch eine Zeit-, Breiten- und Deklinationsänderung das Azimut beeinflußt?

b) Welches ist die Azimutänderung, wenn an Stelle der Zeit die Höhe tritt?

3) Man entwickle für das Azimut a eines Polsterns eine nach Potenzen des Polabstandes p fortschreitende Reihe bis zu den Gliedern 3. Ordnung einschließlich aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} a = - \frac{\operatorname{tg} p \cdot \sec \varphi \cdot \sin t}{1 - \operatorname{tg} p \cdot \operatorname{tg} \varphi \cos t}.$$

4) Der Stern α Orionis ($\alpha = 5^h 50^m 17{,}9^s$, $\delta = + 7° 23' 27''$) wird zur Sternzeit $\Theta = 6^h 01^m 14{,}0^s$ in P unter der Höhe $h = 49° 14' 00''$ beobachtet. Man berechne die geographische Breite von P.

5) Unter welcher Breite befindet sich ein Beobachter, wenn derselbe zur Sternzeit $\Theta = 13^h 50^m 1{,}0^s$ den Stern α Leonis

($\alpha = 10^h 3^m 34{,}8^s$, $\delta = + 12° 24' 27''$) unter dem Azimut $a = 80° 15' 10''$ steht?

6) Man bestimme den Fehlerausdruck der Breite

a) wenn sie aus Zeit und Höhe

b) aus Zeit und Azimut bestimmt wird.

c) Wie berechnet sich nach diesen Gleichungen der Breitenfehler $d\varphi$ für die Beispiele N: 4 u. 5 dieses Blattes, wenn die in Betracht kommenden Fehler $d\delta = dh = da = +1'$ und $dt = +2^s$ sind?

7) Man entwickle aus der Gleichung

$$\sin h = \sin\varphi \cos p + \cos\varphi \sin p \cos t$$

eine nach Potenzen des Polabstandes p fortschreitende Reihe einschließlich der Glieder 3. Ordnung für diejenige kleine Größe x, welche zur Höhe h eines Polsterns hinzuzufügen ist, um sie in die geographische Breite überzuführen.

20. VI 1910. № 20.

Trigonometrie.

Aufgaben.

1) Einem Beobachter erscheint der Stern ε Orionis ($\alpha = 5^h\,31^m\,38{,}8^s$, $\delta = -1^\circ\,15'\,32''$) zu den Uhrangaben $T_1 = 2^h\,40^m\,5{,}0^s$ und $T_2 = 10^h\,20^m\,16{,}0^s$ vor und nach der Kulmination unter der gleichen Höhe $h = 28^\circ\,02'\,10''$. Man berechne die Uhrverbesserung und die geographische Breite.

2) a) Zwei Sterne S_1 ($\alpha_1\ \delta_1$) und S_2 ($\alpha_2\ \delta_2$) wurden zu den Uhrangaben T_1 und T_2 unter den Höhen h_1 und h_2 beobachtet. Die Beobachtungszeiten sind so gewählt, dass ihre Differenz gleich dem Rektaszensionsunterschied der beiden Sterne ist ($T_2 - T_1 = \alpha_2 - \alpha_1$). Wie berechnen sich Breite und Zeit?

b) Welche Verbesserungen sind an diesen Grössen noch anzubringen, wenn T_1 um den Betrag dT zu vergrössern ist, damit die getroffene Voraussetzung ($\Delta T = \Delta\alpha$) strenge erfüllt wird.

c) Man rechne mit den gewonnenen Formeln ein Beispiel aus folgenden Angaben:

Stern	α	δ	h	T
S_1 = α Ursae minoris	$1^h\ 27^m\ 28{,}0^s$	$+88^\circ\ 49'\ 18''$	$48^\circ\ 9'\ 30''$	$20^h\ 30^m\ 10{,}0^s$
S_2 = α Arietis	$2^h\ 2^m\ 5{,}0^s$	$+23^\circ\ 2'\ 12''$	$30^\circ\ 5'\ 48''$	$21^h\ 10^m\ 50{,}0^s$

3) Zwei Sterne S_1 (α Ursae minoris $\alpha = 1^h\ 26^m\ 55{,}9^s$ $\delta = +88^\circ\ 49'\ 33''$) und S_2 (α Lyrae $\alpha = 18^h\ 33^m\ 53{,}5^s$ $\delta = +38^\circ\ 41'\ 58''$) wurden zu den Uhrangaben $T_1 = 12^h\ 15^m\ 10{,}0^s$ und $T_2 = 12^h\ 20^m\ 5{,}6^s$ unter den Höhen $h_1 = 47^\circ\ 30'\ 18''$ und $h_2 = 28^\circ\ 35'\ 16''$ beobachtet. Man berechne Breite und Zeit!

4) Drei Sterne erreichen zu den Uhrangaben $T_1\ T_2\ T_3$ die gleiche Höhe. Man bestimme aus diesen Uhrangaben Breite, Zeit u. Höhe. (Methode von Gauss).

5) Man entwickle die Ausdrücke für die Höhen- und Azimutparallaxe unter der Voraussetzung, dass neben der beobachteten Höhe u. dem beobachteten Azimut noch die geogr. Breite des Beobachters, die Dimensionen des Erdsphäroids sowie die Entfernung des anvisierten Objektes vom Erdmittelpunkt bekannt sind.

Name . . . . Note . . . . .

Semestralprüfung aus der Trigonometrie.

am 7. März 1910.

Man bearbeite die unter einer Nummer zusammengefaßten Aufgaben:

N: 1.)

Man bestimme aus folgenden Gleichungen die zwischen 0° und 360° liegenden Winkel φ und ψ:

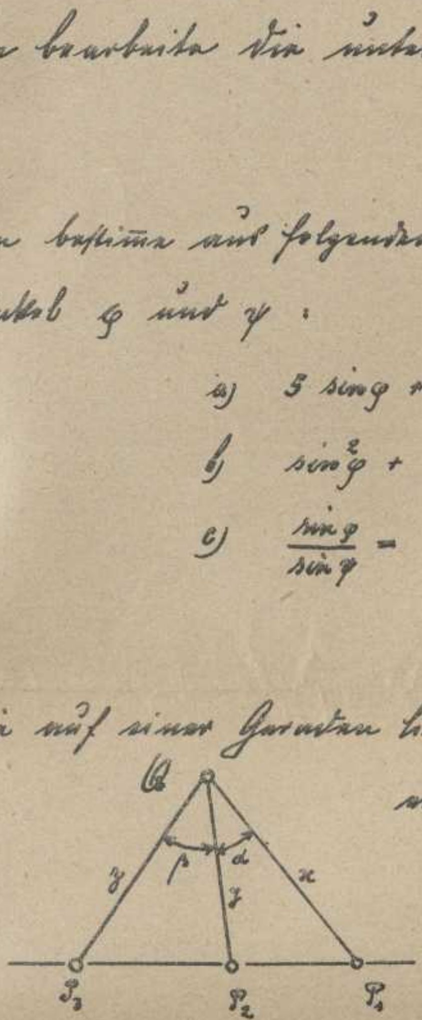
a) $5 \sin\varphi + 10 \cos\varphi = 11$

b) $\sin^2\varphi + \cos 2\varphi + \sin\varphi \cos\varphi = 1$

c) $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = 1{,}7 \;;\; \varphi + \psi = 90°$

N: 2)

Die auf einer Geraden liegenden Strecken $P_1P_2 = 101{,}00$ m und $P_2P_3 = 156{,}34$ m erscheinen von Q aus unter den Winkeln $\alpha = 45°15'00''$ und $\beta = 55°23'10''$. Wie lang sind die Verbindungsstrecken QP_1, QP_2, QP_3?



N: 3.)

Eine Gerade schließt in ihren Grund- und Aufrißprojektionen mit der Kante die Winkel $a = 40°20'10''$ und $b = 50°16'10''$ ein. Welche Winkel bildet die Gerade mit der Kante und den beiden Tafelebenen?

N: 4)

a) Man beweise trigonometrisch, daß die Projektion der Winkelhalbierenden im allgemeinen nicht die Winkelhalbierende der Projektion ist.

b) P_1 und P_2 besitzen die gleiche geographische Breite $\varphi = 48°08'00''$ und den kleinen Längenunterschied $\Delta\lambda = 0°30'00''$. Um wieviel ist der zwischen P_1 u. P_2 liegende Parallelkreisbogen länger als der zwischen beiden Punkten liegende Großkreisbogen?

($r = 6370$ km).

Nr. 5.)

a) Die Endpunkte einer Geraden von der Länge l weisen einen im Verhältnis zu l kleinen Höhenunterschied h auf. Um welchen, in h und l ausgedrückten Betrag Δl ist die Horizontalprojektion l_1 der Geraden kürzer als die geneigte Länge l?

Man rechne mittels der genauen Reduktionsformel l_1 aus $l = 5{,}000$ m, $h = 0{,}316$ m.

b) Ein Großkreis schneidet den Parallelkreis Φ_1 ($\varphi_1 = 45°$) unter dem Winkel $\gamma_1 = 30° 0' 0''$. Unter welchem Winkel γ_2 trifft er den Parallelkreis Φ_2 ($\varphi_2 = 60°$)?

Nr. 6.)

Im sphärischen Dreieck ABC, welches auf einer Kugel vom Halbmesser $r = 100{,}000$ km liegt, kennt man die Länge $AB = c = 3520{,}12$ m sowie die Winkel $\alpha = 45° 10' 15''$ und $\beta = 50° 13' 44''$. Wie lange sind auf der Kugel die Seiten BC u. AC?

Die Bearbeitung ist auf diesem Blatte auszuführen!

Zeit 1 Stunde.

22. II. 1909. **Trigonometrie.** № 13.

Die Koordinatensystеme auf der Himmelskugel.

1. Als scheinbaren Horizont eines Ortes bezeichnet man die im Beobachtungsorte senkrecht zur Richtung der Schwere gelegte Ebene; als wahren Horizont die Parallelebene dazu durch den Erdmittelpunkt. Bei Fixsternbeobachtungen kann der Unterschied vernachlässigt werden.

Die Grenze des Sichtbaren reicht wegen der Refraktion des Lichtes noch über den scheinbaren Horizont hinaus.

Die Pole des Horizontkreises auf der Himmelskugel heissen der Zenit Z und der Nadir des Beobachtungsortes.

2. Als Nordpol P und Südpol der Himmelskugel bezeichnen wir diejenigen Punkte derselben, die bei der scheinbaren täglichen Bewegung der Sterne am Platze bleiben. Der zur „Weltaxe" (Nordpol-Südpol) senkrechte Hauptkreis heisst der Aequator, die in diesem liegenden Sterne beschreiben bei der täglichen Bewegung einen Hauptkreis, nämlich den Aequator selbst. Die nicht im Aequator befindlichen Sterne beschreiben (kleine) Parallelkreise um die Weltaxe Nordpol-Südpol.

3. Als „Ekliptik" bezeichnen wir denjenigen Grosskreis der Himmelskugel der alle die Sterne enthält, deren Ort von der Sonne im Laufe ihrer scheinbaren jährlichen Bewegung erreicht wird. Zu ihr gehören als Pole der nördliche (Π) und der südliche Ekliptikpol.

4. Als Meridian des Beobachtungsortes bezeichnen wir den Grosskreis durch den Nord- und Südpol, und den Zenith des Ortes; spezieller noch diejenige Hälfte dieses Kreises vom Nordpol bis zum Südpol die den Zenith enthält. Der Bogen PZ ist das Komplement der geographischen Breite (oder der Polhöhe φ) des Beobachtungsortes

5. Die Schnittpunkte des Horizontes mit dem Meridian heissen der Südpunkt und der Nordpunkt des Horizontes, je wie sie dem Südpol oder dem Nordpol näher liegen. Die Schnittpunkte des Horizontes mit dem Aequator heissen der Ostpunkt und der Westpunkt des Horizontes. Von der Seite des Zeniths her gesehen erfolgt die Drehung (je um 90°) Süd – West – Nord – Ost im Sinne des Uhrzeigers.

Der Aequator schneidet die Ekliptik in den beiden Aequinoktialpunkten. Derjenige Schnittpunkt, den die Sonne beim Aufsteigen aus der südlichen in die nördliche Himmelskugel passiert, heisst der „Frühlingspunkt ♈", – der andere der Herbstpunkt.

System I.

Bezogen auf den Horizont SWNO und den Meridian PZAS des Beobachtungsortes wird die Orientierung des Sternes Σ durch dessen „Azimut" $SK = \alpha$ und „Höhe" $\Sigma K = h$ (– statt dieser auch durch die „Zenithdistanz" $Z\Sigma = 90° - h$) dargestellt. Der Azimut wird, vom Zenith aus gesehen, im Sinne des Uhrzeigers auf dem Horizonte gezählt, und erscheint am Zenith als Winkel vom Kreisbogen Zenith–Süden aus bis zum Bogen Zenith–Stern.

System II.

Bezogen auf den Aequator AWBO und den Meridian PZAS des Beobachtungsortes wird die Lage von Σ durch seinen Stundenwinkel $AL = t$, und seine „Deklination" $\Sigma L = \delta$ (– statt dieser auch durch seine „Poldistanz" vom Nordpol $P\Sigma = 90° - \delta$) dargestellt. Der Stundenwinkel wird, vom Nordpol aus gesehen, im Sinne des Uhrzeigers auf dem Aequator gezählt und erscheint am Nordpol als Winkel vom Meridianbogen Nordpol – Zenith aus bis zum Bogen Nordpol–Stern. Der Westpunkt hat also stets den Stundenwinkel 90° (ebenso wie das Azimut 90°) Der Stundenwinkel des Frühlingspunktes ♈ heisst die „Sternzeit" für den Beobachtungsort und den Moment der Beobachtung, und wird mit dem Buchstaben Θ bezeichnet.

System III.

Bezogen auf den Aequator und den Frühlingspunkt Υ ist die Lage von Σ durch seine „Rektaszension" $\Upsilon L = \alpha$, und die Deklination $\Sigma L = \delta$ dargestellt. Die Rektaszension wird, vom Nordpol aus gesehen, im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers gezählt, und zwar auf dem Aequator vom Frühlingspunkte aus.

Satz: Es gilt stets, für jeden Stern, jede Zeit, und jeden Beobachtungsort die Gleichung: Der Stundenwinkel des Sternes + der Rektaszension des Sternes = der gleichzeitigen Sternzeit des Ortes: $t + \alpha = \Theta$.

System IV.

Bezogen auf die Ekliptik und den Frühlingspunkt Υ ist die Lage von Σ durch seine „Länge" $\Upsilon M = \lambda$, und seine „Breite" $\Sigma M = \beta$ (– statt dieser bisweilen auch durch seine Distanz vom nördlichen Pole der Ekliptik $\Pi\Sigma = 90° - \beta$) dargestellt. Die Länge wird, vom nördlichen Ekliptikpole Π aus gesehen, im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers auf der Ekliptik vom Frühlingspunkte aus gezählt.

Die Werte von Azimut, Stundenwinkel, Rektaszension und Länge liegen zwischen 0 und 360°. Doch werden die drei letzten Grössen gewöhnlich in Zeitmass angegeben, sodass $1^h\ 15°$, $1^m\ 15'$, $1^s\ 15''$ umgekehrt $1°\ 4^m$, $1'\ 4^s$ entsprechen. Die Werte von Höhe, Deklination und Breite liegen zwischen $-90°$ und $+90°$; der Wert für die Höhe gewöhnlich zwischen $0°$ und $+90°$.

---

6. Aequator, Ekliptik und Frühlingspunkt sind inbezug auf ihre Lage zum Fixsternhimmel nur sehr langsam veränderlich, so dass sie bei den weitaus meisten Aufgaben als in fester Lage zu einander und zu den Sternen angesehen werden können. Genauer beträgt das jährliche

Zurückweichen des Frühlingspunktes in der Länge 50,"25 (Präzession -50,"25) so dass also die Länge eines Sternes jährlich um 50,"25 wächst. Entsprechend beträgt die Präzession auf dem Aequator -46,"1, so dass die Rektascension eines im Aequator stehenden Sternes jährlich um 46,"1 wächst. Der Winkel der Ekliptik gegen den Aequator („Schiefe der Ekliptik" ε) ist für das Jahr 1900+T als 23°27'8,"03 - 0,"48.T anzusetzen. Während die Lage der Ekliptik inbezug auf die Fixsterne als sehr angenähert fest anzusehen ist, beschreibt der Nordpol in rund 25800 Jahren am Fixsternhimmel einen Kreis von $23\frac{1}{2}°$ Radius um den Ekliptikpol.

7. Sieht man von Präzession, Nutation und Eigenbewegung ab, so sind die Rektaszension, Deklination, Länge und Breite für jeden Fixstern konstante Zahlen, während sein Azimut, die Höhe und der Stundenwinkel im Laufe des Tages wechseln, und für verschiedene Beobachtungsorte verschieden sind; ebenso ändert sich die Sternzeit. Die Stundenwinkel und die Sternzeit wachsen am selben Orte gleichmässig, und proportional der mittleren Sonnenzeit (Uhrzeit). Die gleichzeitigen Stundenwinkel desselben Sternes für verschiedene Beobachtungsorte geben als Differenz (gleich der Differenz der Sternzeiten) die Differenz der geographischen Längen der Orte. Für die Sonne ist die Breite β stets gleich Null zu setzen; die Länge λ nimmt von Null zur Zeit der Frühlingstag- und nachtgleiche im Jahre um 360° (doch nur ganz grob angenähert gleichmässig) zu. 365,2422 mittlere Sonnentage sind gleich 366,2422 Sterntagen.

8. Der Stundenwinkel der Sonne heisst die „wahre Sonnenzeit." Die mittlere Sonnenzeit oder mittlere Ortszeit erhält man durch Addition der aus einer Tabelle zu entnehmenden „Zeitgleichung" (im Betrage bis ± 16 Minuten) zur wahren Sonnenzeit. Um die „mitteleuropäische Zeit" zu erhalten, hat man zur mittleren Sonnenzeit noch einen für den Ort konstanten Betrag [= 4 Minuten mal der Differenz 15° - geographische Länge des Ortes östl. v. Greenwich in Graden] zu addieren. Für die Münchner Sternwarte ist dieser Betrag 13 Min. 34 Sek.

17. V. 1909. **Trigonometrie.** № 14.

Aufgaben.

1) a) Wie groß ist am längsten Tage die Morgenweite der Sonne ($\delta_0 = +23°27'$) für einen Bewohner des 48. nördl. Parallelkreises?

b) Welches ist die mittlere Ortszeit, wenn die Sonne an diesem Tage im ersten Vertikal steht?

(Zeitgleichung $g = 1^m 30^s$)

2) Zu welcher Sternzeit und in welcher Höhe geht für einen Ort unter 40° nördl. Breite der Stern α Orionis ($\alpha = 5^h 50^m 15^s$, $\delta = 7° 23{,}4'$)

a) durch den Meridian?

b) durch den ersten Vertikal?

3) Der Durchgang von α Virginis ($\alpha = 13^h 20^m 24^s$; $\delta = -10° 41{,}'2$) durch den Südwestvertikal wurde unter der Höhe $h = 20° 10{,}'0$ an einer Sternzeituhr um $T' = 15^h 5^m 0^s$ beobachtet. Wie groß ist

a) die Uhrverbesserung ΔT?

b) die geographische Breite des Beobachters?

4) In München ($\varphi = 48° 08{,}'3$) wurde zur Sternzeit $\Theta = 6^h 10^m 2^s$ zwischen dem Polarstern ($\alpha = 1^h 25^m 30^s$, $\delta = 88° 49{,}'1$) und dem irdischen Objekt A der Horizontalwinkel $\beta = 130° 14{,}'0$ gemessen. Wie groß ist das Azi-

mut von Punkt A?

5) Der Stern δ Orionis ($\alpha = 5^h 27^m 21{,}^s0$, $\delta = -0° 22{,}'0$) wurde vor und nach der oberen Kulmination unter der gleichen Höhe $h = 28° 29{,}'0$ zu den Uhrzeiten $T_1 = 2^h 30^m 10^s$ und $T_2 = 10^h 16^m 18^s$ beobachtet.

a) Wie groß ist die Uhrverbesserung?

b) Welches ist die geogr. Breite des Beobachters?

6) Der Durchgang des Sternes α Bootis ($\alpha = 14^h 11^m 31^s$, $\delta = 19° 39{,}'4$) durch den Ostvertikal wurde zur Sternzeit $\Theta = 11^h 10^m 20^s$ beobachtet.

a) Welches ist die geogr. Breite des Beobachters?

b) Um wieviel wird dieselbe fehlerhaft erhalten, wenn die Uhrzeit um 10^s fehlerhaft ist?

---

7. VI. 1909. **Trigonometrie.** № 15.

Aufgaben.

1) Ein Gestirn wird zur Sternzeit $\Theta = 4^h 37^m 10^s$ in München ($\varphi = 48^\circ 8',3$) unter der Höhe $h = 63^\circ 51',9$ im Meridian beobachtet. Wie gross ist für dasselbe a) Rektaszension u. Deklination

b) Länge und Breite?

2) Für eine Zeitbestimmung wird bei bekannter geographischer Breite φ die Höhe h eines Sternes (α, δ) beobachtet.

a) Unter welchem Azimut wird der Einfluss eines Höhenfehlers dh auf den Stundenwinkel am kleinsten?

b) Wie gross ist unter diesem für die Zeitbestimmung günstigstem Azimut der Zeitfehler dt, wenn ein Beobachter in München ($\varphi = 48^\circ 08',3$) die Höhe eines Sternes von 20° nördl. Deklination um $1'$ fehlerhaft misst?

c) Für welche Erdzone wird die Bestimmung der Zeit aus Sternhöhen im ersten Vertikal am günstigsten?

3) Für polnahe Sterne unterscheidet sich die jeweilige Höhe nur wenig von der geographischen Breite des Beobachters.

a) Man bestimme mit Hilfe der Gleichung

$$\sin h = \sin\varphi \cos p + \cos\varphi \sin p \cos t,$$

worin $p = 90^\circ - \delta$ den Polabstand bedeutet, diejenige Verbesserung x, welche zur beobachteten Höhe des Polarsternes ($p = 1^\circ 10',9$) hinzuzufügen ist, um sie in die geographische Breite überzuführen. x ergibt sich in Form einer Reihe, in welcher die Glieder von höherer als der 3. Ordnung vernachlässigt werden können.

b) Man berechne nach der gefundenen Formel die geographische Breite eines Ortes, von dem aus der Polarstern ($\alpha = 1^h$

$25^m 30^s$) zur Sternzeit $\Theta = 10^h 08^m 20^s$ unter der Höhe $48° 7,'5$ erscheint.

4) Um wieviel wird der aus der Gleichung

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin\delta \sin\varphi}{\cos\delta \cos\varphi}$$

berechnete Stundenwinkel t fehlerhaft erhalten, wenn h, δ und φ um die Beträge dh, $d\delta$, $d\varphi$ fehlerhaft sind?[2] (Einführung des Azimuts und des parallaktischen Winkels).

5) Unter welchem Azimut ergibt sich für einen bestimmten Fehler dh der Höhe der kleinste Fehler $d\varphi$ der Breite, wenn dieselbe aus der Gleichung

$$\sin h = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos t$$

ermittelt wird.[2]

Wie gross wird für dieses günstigste Azimut der Breitenfehler $d\varphi$, wenn der Höhenfehler $dh = 1'$ ist.[2]

28. VI. 09. **Trigonometrie.** №16.

Aufgaben.

I.

Man berechne das Azimut, unter welchem von München ($\varphi = 48°08',95$) aus der Stern α Virginis ($\alpha = 13^h 20^m 25^s$; $\delta = -10°41',3$) zur Sternzeit $(\Theta) = 15^h 42^m 06^s$ erscheint.

II.

a) Wie gross ist der Einfluss einer Zeit-, Breiten- und Deklinationsänderung auf das Azimut?

b) Um wieviel wird das unter I. berechnete Azimut fehlerhaft, wenn t, φ und δ um je $+1'$ fehlerhaft sind?

III.

a) Zwei Sterne $S_1(\alpha_1\delta_1)$ und $S_2(\alpha_2\delta_2)$ wurden zu den Uhrangaben T_1 und T_2 unter den Höhen h_1 und h_2 beobachtet. Die Beobachtungszeiten sind so gewählt, dass ihre Differenz gleich dem Rektaszensionsunterschied der beiden Sterne ist ($T_2 - T_1 = \alpha_2 - \alpha_1$). Wie berechnen sich Breite und Zeit?

b) Welche Verbesserungen sind an diesen Größen noch anzubringen, wenn T_1 um den Betrag dT zu vergrößern ist, damit die getroffene Voraussetzung ($\Delta T = \Delta\alpha$) strenge erfüllt wird?

IV.

Man berechne Breite und Zeit aus den Uhrangaben T_1, T_2, T_3, zu welchen drei Sterne die gleiche Höhe erreichen (Methode von Gauß).

V.

Die Sonne wurde vor und nach der Kulmination unter den nahezu gleichen Höhen h_1 und h_2 zu den Uhrangaben U_1 und U_2 beobachtet.

a) Wie berechnet sich die Zeit, wenn $h_2 = h_1 + dh$ und die Deklinationszunahme der Sonne während der Beobachtungsdauer $= \Delta\delta$ ist.

b) Um wie viel ist das Mittel der beiden Sonnenazimute zu verbessern, damit es die Meridianrichtung angibt?

Name: . . . . . . Note: . . . . .

Semestralprüfung

aus den Übungen zur Trigonometrie.

19. Juli 1909.

Man bearbeite eine der folgenden Aufgaben:

1) In München ($\varphi = 48^\circ\, 8',95$) wurde zur Uhrangabe $T = 15^h\, 56^m\, 32^s$ der Stern β Leonis ($\alpha = 11^h\, 44^m\, 25^s$, $\delta = +15^\circ\, 4',9$) nach der Kulmination unter der Höhe $h = 29^\circ\, 7',7$ beobachtet. Wie groß ist die Uhrverbesserung?

2) Unter welchem Azimut erscheint in München ($\varphi = 48^\circ\, 8',95$) der Polarstern ($\alpha = 1^h\, 25^m\, 57^s$, $\delta = +88^\circ\, 49',0$) zur Sternzeit $\Theta = 15^h\, 37^m\, 51^s$?

3) Der Polarstern ($\alpha = 1^h\, 25^m\, 46^s$, $\delta = 88^\circ\, 49',0$) wurde zur Sternzeit $\Theta = 13^h\, 49^m\, 59^s$ unter der Höhe $h = 46^\circ\, 58',6$ beobachtet. Wie groß ist die geographische Breite des Beobachtungsortes?

(Die Bearbeitung ist auf diesem Blatte vorzunehmen!)

14. XI. 1910. **Trigonometrie.** № 1.

1.) Winkelteilung:

Ein rechter Winkel = 90° (Grad); $1^\circ = 60'$ (Minuten); $1' = 60''$ (Secunden)

oder (nicht gebräuchlich):

ein rechter Winkel = 100 Centesimalgrad; 1 Centesimalgrad = 100 Centesimalminuten; 1 Centesimalminute = 100 Centesimalsecunden

oder (in der Analysis):

Bogenmass = Verhältnis des Bogens zum Radius.

Umrechnung:

Bogenmass	Grade	Minuten	Secunden
α	$\alpha\varrho^\circ = \alpha\cdot\frac{180}{\pi}$	$\alpha\varrho' = \frac{\alpha\cdot 180\cdot 60}{\pi}$	$\alpha\varrho'' = \frac{\alpha\cdot 180\cdot 60\cdot 60}{\pi}$

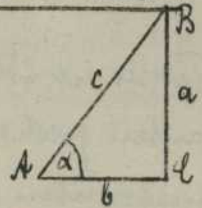
dabei ist:

$\pi = 3{,}14159265\ldots$ $\varrho^\circ = 57{,}^\circ296$ $\varrho' = 3437{,}'25$ $\varrho'' = 206264{,}''8$

$\log\pi = 0{,}49714987\ldots$ $\log\varrho^\circ = 1{,}75812$ $\log\varrho' = 3{,}53627$ $\log\varrho'' = 5{,}3144251$

2.) Trigonometrische Funktionen des spitzen Winkels:

Im rechtwinkligen Dreieck ist:



$$\sin\alpha = \frac{\text{gegenüberliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{anliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

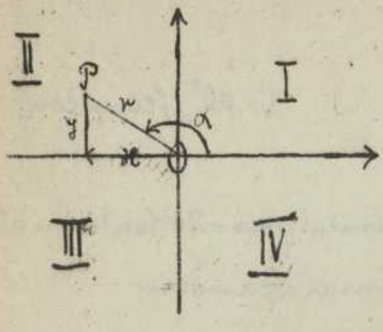
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \sec\alpha = \frac{c}{b}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}$$

Tabelle für den Zusammenhang der trigonometrischen Funktionen

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$
$\cos\alpha$	$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$
$\tan\alpha$	$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\tan\alpha$	$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$
$\cot\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cot\alpha}$	$\cot\alpha$

3.) Winkel, welche grösser als 90° sind:



Die Übersicht ergibt sich durch Einführung eines rechtwinkligen Koordinatensystems, es ist für alle Fälle:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{y}{x} \qquad \cot\alpha = \frac{x}{y}$$

Erster Quadrant ($0 \leqq \alpha \leqq 90°$)

$x>0;\ y>0$ $\quad | \; 0 < \overset{+}{\sin}\alpha < 1 \; | \; 1 > \overset{+}{\cos}\alpha > 0 \; | \; 0 < \overset{+}{\operatorname{tang}}\alpha < \infty \; | \; \infty > \overset{+}{\cot}\alpha > 0 \; |$

Zweiter Quadrant ($90° \leqq \alpha \leqq 180°$)

$x<0,\ y>0$ $\quad | \; 1 > \overset{+}{\sin}\alpha > 0 \; | \; 0 > \overset{-}{\cos}\alpha > -1 \; | \; -\infty < \overset{-}{\operatorname{tang}}\alpha < 0 \; | \; 0 > \overset{-}{\cot}\alpha > -\infty \; |$

Dritter Quadrant ($180° \leqq \alpha \leqq 270°$)

$x<0,\ y<0$ $\quad | \; 0 > \overset{-}{\sin}\alpha > -1 \; | \; -1 < \overset{-}{\cos}\alpha < 0 \; | \; 0 < \overset{+}{\operatorname{tang}}\alpha < \infty \; | \; +\infty > \overset{+}{\cot}\alpha > 0 \; |$

Vierter Quadrant ($270° \leqq \alpha \leqq 360°$)

$x>0,\ y<0$ $\quad | \; -1 < \overset{-}{\sin}\alpha < 0 \; | \; 0 < \overset{+}{\cos}\alpha < 1 \; | \; -\infty < \overset{-}{\operatorname{tang}}\alpha < 0 \; | \; 0 > \overset{-}{\cot}\alpha > -\infty \; |$

In dieser Tabelle ist über die Funktion das Vorzeichen in dem betreffenden Quadranten geschrieben, es bedeutet z. B. $\quad 0 > \overset{-}{\cos}\alpha > -1$
„Im zweiten Quadranten nimmt $\cos\alpha$ von 0 bis -1 ab, wenn α von $90°$ bis $180°$ wächst."

Ferner ist:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha; \quad \operatorname{tang}(-\alpha) = -\operatorname{tang}\alpha; \quad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

$$\sin(90+\alpha) = \cos\alpha; \quad \cos(90+\alpha) = -\sin\alpha; \quad \operatorname{tang}(90+\alpha) = -\cot\alpha; \quad \cot(90+\alpha) = -\operatorname{tang}\alpha$$

$$\sin(180+\alpha) = -\sin\alpha; \quad \cos(180+\alpha) = -\cos\alpha; \quad \operatorname{tang}(180+\alpha) = \operatorname{tang}\alpha; \quad \cot(180+\alpha) = \cot\alpha$$

$$\sin(270+\alpha) = -\cos\alpha; \quad \cos(270+\alpha) = \sin\alpha; \quad \operatorname{tang}(270+\alpha) = -\cot\alpha; \quad \cot(270+\alpha) = -\operatorname{tang}\alpha$$

4) Additionssätze.

$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ $\qquad$ $\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha\pm\beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\cdot\tan\beta}$ $\qquad$ $\cot(\alpha\pm\beta) = \dfrac{\cot\alpha\cdot\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$

Hieraus folgt:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

und hieraus:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}; \qquad \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

Ferner ergibt sich die Verwandlung von Summen in Produkte:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

Die Sinus- und Cosinus-Summen

$$S = \sin\alpha + \sin(\alpha+\varphi) + \sin(\alpha+2\varphi) + \dots + \sin(\alpha+(n-1)\varphi)$$

$$C = \cos\alpha + \cos(\alpha+\varphi) + \cos(\alpha+2\varphi) + \dots + \cos(\alpha+(n-1)\varphi)$$

können gebildet werden, indem man die Seiten eines regulären Polygonzugs projiziert und mit den Projectionen der Sehne vergleicht, die Anfangs- und Endpunkt verbindet. Es ergibt sich:

$$S = \frac{\sin\frac{1}{2}n\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sin\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\varphi\right); \qquad C = \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cos\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\varphi\right)$$

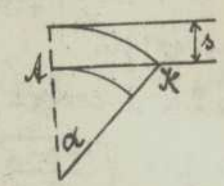
5.) Die Moivresche Formel und ihre Anwendungen.

Ist $i = \sqrt{-1}$, also $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$ u.s.w.; so kann die Additionsformel für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ zusammengefasst werden durch

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta).$$

denn wenn man links ausmultipliziert und die reellen und imaginären Teile beider Seiten gleichsetzt, erhält man wieder die Additionsformeln.

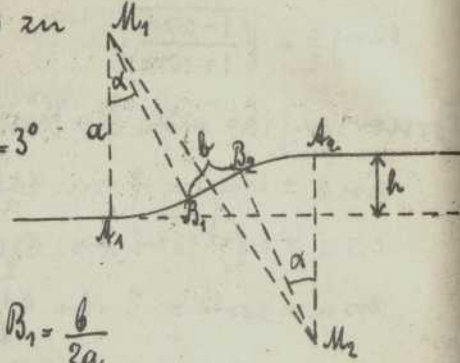
Aufgaben.



1.) Die Weichenlänge AK zu berechnen aus

$$s = 1{,}435\,m \qquad \text{und} \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{10}$$

2.) Die „Geleisverschwenkung" h berechnet sich aus a, α und dem geradlinigen Zwischenstück b zu



$$h = 4a\sin^2\frac{\alpha}{2} + b\sin\alpha$$

Es ist h zu berechnen aus $a = 300\,m$, $b = 30\,m$, $\alpha = 3^\circ$.

Umgekehrt bei gegebenem h

$$\alpha = \sphericalangle M_2M_1A_1 - \sphericalangle M_2M_1B_1$$

$$\operatorname{tang}(M_2M_1A_1) = \frac{x}{2a-h}; \qquad \operatorname{tang} M_2M_1B_1 = \frac{b}{2a}$$

wobei $x = \sqrt{b^2 + h(4a-h)}$

Man berechne aus den gegebenen Grössen $a = 300\,m$, $b = 30\,m$ und dem gefundenen h wieder α als Probe.

3.) Man bilde

$$\operatorname{tang}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3); \quad \operatorname{tang}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$$

und erschliesse dann durch Induktion die allgemeine Formel für

$$\operatorname{tang}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n)$$

(Zu benützen ist nur $\operatorname{tang}(\alpha_1+\alpha_2) = \dfrac{\operatorname{tang}\alpha_1+\operatorname{tang}\alpha_2}{1-\operatorname{tang}\alpha_1\operatorname{tang}\alpha_2}$, man setze zur Abkürzung

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = a_1, \quad \operatorname{tang}\alpha_2 = a_2 \quad \text{u.s.w.})$$

Anwendungen der Moivreschen Formel (Fortsetzung):

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

$$(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi - i\sin n\varphi$$

Bei Anwendung des binomischen Satzes: $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$

wobei zu beachten, dass $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$ ist, erhält man

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - + \cdots$$

$$\sin n\varphi = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + - \cdots$$

und aus $\cos^n\varphi = \left(\frac{1}{2}\right)^n\left[(\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos\varphi - i\sin\varphi)\right]^n$

die zwei Formeln:

$$\cos^{2k}\varphi = \frac{1}{2^{2k-1}}\left[\cos 2k\varphi + \binom{2k}{1}\cos(2k-2)\varphi + \cdots + \frac{1}{2}\binom{2k}{k}\right]$$

$$\cos^{2k+1}\varphi = \frac{1}{2^{2k}}\left[\cos(2k+1)\varphi + \binom{2k+1}{1}\cos(2k-1)\varphi + \cdots + \binom{2k+1}{k}\cos\varphi\right]$$

analog aus $\sin^n\varphi = \left(\frac{1}{2i}\right)^n\left[(\cos\varphi + i\sin\varphi) - (\cos\varphi - i\sin\varphi)\right]^n$

die zwei Formeln:

$$\sin^{2k}\varphi = \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}}\left[\cos 2k\varphi - \binom{2k}{1}\cos(2k-2)\cdot\varphi + \cdots + \frac{(-1)^k}{2}\binom{2k}{k}\right]$$

$$\sin^{2k+1}\varphi = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\left[\sin(2k+1)\varphi - \binom{2k+1}{1}\sin(2k-1)\varphi + \cdots + (-1)^k\binom{2k+1}{k}\sin\varphi\right]$$

6.) Reihenentwicklungen:

Ist φ der Winkel in Bogenmass, so wird

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + - \cdots$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + - \cdots$$

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{1\cdot 2} + \frac{(i\varphi)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots = e^{i\varphi}$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \qquad \tan\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{i(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})}$$

Bei kleinen Winkeln genügen die ersten Glieder, z.B. ist

$\log\sin 1'' = \log\frac{\pi}{180\cdot 60^2}$ bis auf die siebente Dezimale genau.

7.) Maskelyne'sche Regel:

Für kleine Winkel ist

$$\log \sin \alpha^\circ = \log \alpha^\circ - \log \rho^\circ + \tfrac{1}{3} \log \cos \alpha^\circ$$

$$\log \operatorname{tg} \alpha^\circ = \log \alpha^\circ - \log \rho^\circ - \tfrac{2}{3} \log \cos \alpha^\circ$$

Ist der Winkel in Minuten' oder Sekunden" gegeben, so tritt ρ' oder ρ'' an Stelle von ρ°. Bis $2\tfrac{3}{4}^\circ$ findet Übereinstimmung bis in die fünfte Dezimale statt.

8.) Einige goniometrische Gleichungen:

1.) $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$ wobei $c < \sqrt{a^2+b^2}$

Man setzt: $\cos \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos \psi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

dann ist $\varphi = \beta + \psi$ oder aber $\varphi = \beta - \psi$

2.) Gegeben $\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = m$, $\varphi + \psi = \alpha$; zu bestimmen sind φ und ψ.

Es ist $\operatorname{tang} \frac{\varphi - \psi}{2} = \frac{m-1}{m+1} \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$

Ist von m der Logarithmus bekannt, so setze man $\operatorname{tang} \lambda = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}$

und hat $\frac{m-1}{m+1} = \frac{\operatorname{tang} \lambda - 1}{\operatorname{tang} \lambda + 1} = \cot(45^\circ + \lambda)$

Also kann $\frac{\varphi - \psi}{2}$ aus den trigonometrischen Tafeln allein, ohne Aufschlagen eines Numerus berechnet werden.

Aufgaben.

1.) Einige Umformungen für den Fall, dass $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ist.

Es ist zu zeigen

$$\operatorname{tang} \alpha + \operatorname{tang} \beta + \operatorname{tang} \gamma = \operatorname{tang} \alpha \cdot \operatorname{tang} \beta \cdot \operatorname{tang} \gamma$$

ferner: $$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2(1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)$$

2.) Man berechne die beiden Werte von φ aus:

$$5 \cos \varphi - 23 \sin \varphi = 12$$

3.) Es ist gegeben $\varphi + \psi = 56^\circ 20'$ sowie $\log\left(\frac{\sin \varphi}{\sin \psi}\right) = 0{,}50143$

Wie gross sind die Winkel φ und ψ?

28. XI. 10. Trigonometrie. № 3

9.) Auflösung quadratischer Gleichungen.

$x^2 - 2ax + b = 0$

Erster Fall: Die Wurzeln sind reell, also $a^2 - b > 0$.

Dann setzt man, wenn $b > 0$

$$x_1 = \sqrt{b}\,\mathrm{tg}\,\varphi, \qquad x_2 = \sqrt{b}\,\mathrm{ctg}\,\varphi$$

und φ ist zu bestimmen aus

$$\mathrm{tg}\,\varphi + \mathrm{ctg}\,\varphi = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{b}} = \frac{2a}{\sqrt{b}} \qquad \text{also} \qquad \sin 2\varphi = \frac{\sqrt{b}}{a}$$

Ist b negativ, so setzt man

$$x_1 = -\sqrt{-b}\,\mathrm{tg}\,\varphi \qquad x_2 = +\sqrt{-b}\,\mathrm{ctg}\,\varphi$$

und φ ist zu bestimmen aus: $\mathrm{tg}\,2\varphi = \frac{\sqrt{-b}}{a}$

Die Winkel sind geometrisch einfach zu deuten.

Zweiter Fall: Sind die Wurzeln konjugiert imaginär, also $a^2 - b < 0$, so setzt man

$$x_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$x_2 = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

und es ist: $r^2 = b$, $\cos\varphi = \frac{a}{r}$

10.) Auflösung der Gleichungen dritten Grades.

Die Cardanische Formel, gewonnen durch die Substitution $x = u + v$, mit der Nebenbedingung $3uv + p = 0$ gibt als Lösung von

$$x^3 + px + q = 0$$

den Wert: $x = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$

Die beiden andern Wurzeln sind

$$x_2 = u_1(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ) + v_1(\cos 120^\circ - i\sin 120^\circ)$$
$$x_3 = u_1(\cos 120^\circ - i\sin 120^\circ) + v_1(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$$

x_2, x_3 sind imaginär, wenn $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$

Trigonometrische Behandlung dieses Falles:

1.) $p > 0$. Dann setzt man:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left(\frac{p}{3}\right)^{3/2} : \frac{q}{2} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{tg}\lambda = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

und es wird

$$x_1 = -2\left(\frac{p}{3}\right)^{1/2} \operatorname{ctg} 2\lambda, \qquad x_{2,3} = \left(\frac{p}{3}\right)^{1/2}\left(\operatorname{ctg} 2\lambda \pm i\sqrt{3}\operatorname{cosec} 2\lambda\right)$$

2.) $p < 0$ Dann setzt man

$$\sin\alpha = -\left(\frac{p}{3}\right)^{3/2} : \frac{q}{2} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{tg}\lambda = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

und es wird

$$x_1 = -2\left(-\frac{p}{3}\right)^{1/2} \operatorname{cosec}\lambda, \qquad x_{2,3} = \left(-\frac{p}{3}\right)^{1/2}\left(\operatorname{cosec}\lambda \mp i\sqrt{3}\operatorname{ctg} 2\lambda\right)$$

Irreduzibler Fall

Ist $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0$, so sind alle 3 Wurzeln reell, die Cardanische Formel gibt sie aber in imaginärer Gestalt. Man ist auf die trigonometrische Lösung angewiesen. Es wird gesetzt:

$$\cos\alpha = \left(-\frac{q}{2}\right) : \left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3 \qquad \text{und die Lösungen sind:}$$

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\alpha}{3} \qquad x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\cos\frac{\alpha}{3} + 120^\circ\right) \qquad x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\alpha}{3} + 240^\circ\right)$$

Aufgaben.

1.) Auflösung der kubischen Gleichung $\qquad x^3 - \frac{7}{2}x + 1 = 0$

2.) Wie kann man φ berechnen aus

$$a\cos^2\varphi + b\sin\varphi\cos\varphi + c\sin^2\varphi = d \quad ?$$

Welche Bedingung muss bestehen, damit der Winkel null wird?

3.) Man berechne u und $\varphi = \operatorname{arc}\operatorname{tg} u$ aus

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} u + \operatorname{arc}\operatorname{tg} 2u + \operatorname{arc}\operatorname{tg} 3u = 180^\circ$$

und bestätige das gefundene Ergebnis.

Correktur zu Blatt 2.

Es ist $\qquad \operatorname{tg}\frac{\psi - \varphi}{2} = \frac{1-m}{1+m}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \qquad \operatorname{tg}\lambda = m$

$$\frac{1-m}{1+m} = \operatorname{tg}(45 - \lambda) = \operatorname{ctg}(45 + \lambda)$$

also ist $\frac{\psi - \varphi}{2}$ zu bestimmen aus

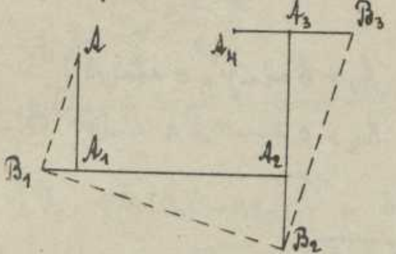
$$\operatorname{tg}\frac{\psi - \varphi}{2} = \operatorname{ctg}(45 + \lambda)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

dagegen nicht $\quad \operatorname{tg}\frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{ctg}(45 + \lambda)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

5. XII. 10. **Trigonometrie.** № 4.

11. Einige Konstruktionen:

a.) Auflösung der Gleichung dritten Grads durch einen dreimal rechtwinklig gebrochenen Linienzug.



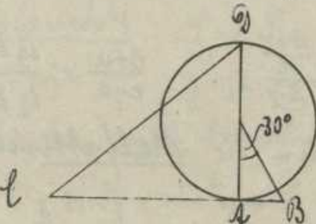
Ist $AA_1 = a_1$, $A_1A_2 = a_2$, $A_2A_3 = a_3$, $A_3A_4 = a_4$; $\sphericalangle AA_1A_2 = \sphericalangle A_1A_2A_3 = \sphericalangle A_2A_3A_4 = \sphericalangle AB_1B_2 = \sphericalangle B_1B_2B_3 = R$, $\sphericalangle A_1AB_1 = w$ so wird:

$$A_4B_3 = a_1 \operatorname{tg}^3 w + a_2 \operatorname{tg}^2 w + a_3 \operatorname{tg} w + a_4$$

Stellt man also den Linienzug $AA_1B_2B_3$ so ein, dass B_3 mit A_4 zusammenfällt, so wird $\operatorname{tg} w = \frac{A_1B_1}{AA_1}$ eine Lösung von

$$a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0.$$

b.) Konstruktion von π (angenähert):



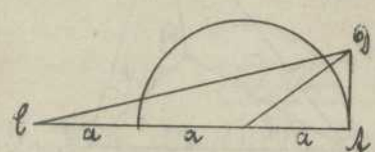
$\sphericalangle AOB = 30°$

$AB = \frac{a}{3}\sqrt{3}$

$BC = 3a$ $\qquad AC = a\,\frac{9-\sqrt{3}}{3}$

$CD = a\sqrt{4 + \frac{(9-\sqrt{3})^2}{9}} = a \cdot 3{,}141533$

c.) Angenäherte Rectification des Bogens $AB = a\cdot\alpha$



Es ist $AD = 3a \operatorname{tg}\beta$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{2+\cos\alpha} = \frac{\alpha - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^5}{120} - \cdots}{1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4!}}$$

also $$AD = \frac{a\cdot\alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{6} + \frac{\alpha^4}{120} - \cdots\right)}{\left(1 - \frac{\alpha^2}{3\cdot 2} + \frac{\alpha^4}{3\cdot 4!} - \cdots\right)}$$

Man erkennt, dass für kleine α AD nur wenig von $a\cdot\alpha$ verschieden ist. So wird für

$\alpha = 30°$ $\quad a\alpha = a\cdot 0{,}5236$ dagegen $AD = a\cdot 0{,}5234$

$\alpha = 60°$ $\quad a\alpha = a\cdot 0{,}7854$ " $\quad AD = a\cdot 0{,}7836$

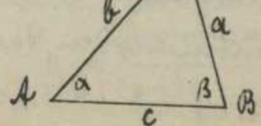
Berechnung ebener Figuren.

Es ist

$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$

$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma$

$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$



Aus diesen Gleichungen folgt der

<u>Cosinussatz</u> $\qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

und es wird hieraus, wenn $\frac{a+b+c}{2} = s$ gesetzt wird

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s\cdot(s-a)}}$$

<u>Sinussatz:</u>

Die von A auf a gefällte Höhe hat die Länge $\qquad h_1 = b\sin\gamma = c\sin\beta$

entsprechend ist $\qquad h_2 = c\sin\alpha = a\sin\gamma$

hieraus folgt

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad (\text{Sinussatz})$$

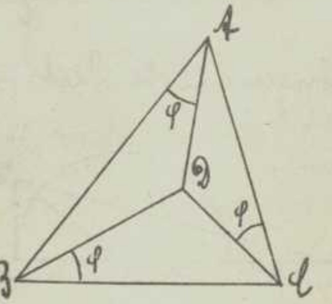
Ist r der Radius des umschriebenen Kreises, so wird $a = 2r\sin\alpha$; $b = 2r\sin\beta$; $c = 2r\sin\gamma$, woraus der Sinussatz ebenfalls folgt.

<u>Napiersche Formeln:</u>

Es ist $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$; $\quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}$; $\quad \frac{c+a}{c-a} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}$

Mit Hilfe der bisher abgeleiteten Formeln kann die <u>Malfattische</u> Aufgabe gelöst werden.

<u>Aufgaben.</u>

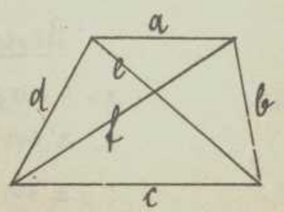


1.) Den Punkt D im Dreieck ABC zu finden, für welchen

$\sphericalangle BAD = \sphericalangle ACD = \sphericalangle CBD$ ist.

Wie gross ist dieser Winkel φ? (Für $\operatorname{ctg}\varphi$ kommt eine einfache Formel heraus. Man braucht nur den Sinussatz mehrfach anzuwenden).

2.) Die Winkel und den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Seiten $a = 20$, $b = 13$, $c = 11$ m zu berechnen.



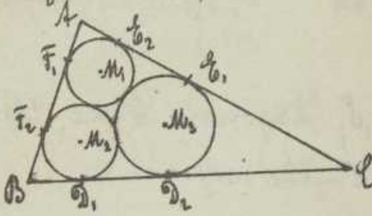
3.) Es soll (allein durch Anwendung des Cosinussatzes bewiesen werden, dass im Paralleltrapez

$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac$ ist.

12. XII. 10. **Trigonometrie.** № 5.

Fortsetzung der Dreiecksberechnung.

Lösung des Malfattischen Problems: Bestimmung der Kreise, die einander und je zwei Seiten des Dreiecks berühren.



Es seien r_1, r_2, r_3 die Radien der 3 Kreise, ferner $BD_1 = BF_2 = y$; $CD_2 = CE_1 = z$; $AE_2 = AF_1 = x$; dann ist

$$r_1 = x\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \qquad r_2 = y\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} \qquad r_3 = z\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$$

$$D_1D_2 = \sqrt{(r_2+r_3)^2-(r_3-r_2)^2} = 2\sqrt{r_2r_3} \qquad E_1E_2 = 2\sqrt{r_1r_3} \qquad F_1F_2 = 2\sqrt{r_1r_2}$$

$$a = y+z+2\sqrt{yz}\sqrt{\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}}$$

Führt man jetzt als gegebene Hilfswinkel λ, μ, ν ein durch

$$a = s\sin^2\lambda; \quad b = s\sin^2\mu; \quad c = s\sin^2\nu \qquad \text{wobei } s = \frac{a+b+c}{2}$$

und als gesuchte φ, χ, ψ (an Stelle von x, y, z) durch

$$x = s\sin^2\varphi; \quad y = s\sin^2\chi; \quad z = s\sin^2\psi$$

so erhält man mit Anwendung der Formeln für $\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$, $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$:

$$\sin^2\lambda = \sin^2\chi + \sin^2\psi + 2\sin\chi\sin\psi\cos\lambda$$ und hieraus folgt:

$$\psi+\chi = \lambda; \text{ ebenso } \varphi+\psi = \mu; \quad \chi+\varphi = \nu$$ also, wenn $\lambda+\mu+\nu = 2\sigma$ gesetzt wird

$$\varphi = \sigma-\lambda \qquad \chi = \sigma-\mu \qquad \psi = \sigma-\nu$$

Weitere Formeln für das Dreieck.

Mollweidesche Gleichungen:

$$(b+c)\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = a\cos\frac{\beta-\gamma}{2}; \qquad (b-c)\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = a\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$$

nebst den daraus durch Vertauschung entstehenden.

Radius des einbeschriebenen Kreises $\varrho = (s-a)\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

Für die an das Dreieck anbeschriebenen Kreise, die also je eine Seite und die Verlängerungen der beiden anderen berühren, ergibt sich

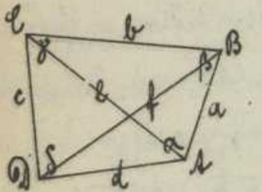
$$\varrho_a = s\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}; \qquad \varrho_b = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-c)}{s-b}}; \qquad \varrho_c = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}$$

daher $\frac{1}{\varrho_a}+\frac{1}{\varrho_b}+\frac{1}{\varrho_c}=\frac{1}{\varrho}$

<u>Inhalt des Dreiecks</u>: $\Delta = \frac{bc\sin\alpha}{2} = \varrho\cdot s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

<u>Umbeschriebener Kreis</u>: $r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

2. Vierecksberechnung.



(Seiten a, b, c, d; Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; Diagonale $AC = e$, $BD = f$)

Es ist $e^2 = a^2+d^2-2ad\cdot\cos\alpha = b^2+c^2-2bc\cos\gamma$

hieraus und aus $J=\frac{1}{2}(ad\sin\alpha+bc\sin\gamma)$

folgt: $J^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}$

wobei s die halbe Summe der Seiten ist, und für $\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}$ auch $\cos^2\frac{\beta+\delta}{2}$ gesetzt werden kann.

Bei gegebenem a, b, c, d hat das Sehnenviereck ($\alpha+\gamma=\beta+\delta=180°$) den kleinsten Inhalt.

Für das Sehnenviereck folgt ferner

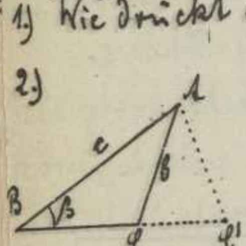
$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}$; $ef=ac+bd$ (Ptolemäischer Lehrsatz)

Radius des umschriebenen Kreises $r=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$

Aufgaben.

1.) Wie drückt sich der Dreiecksinhalt aus durch ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c?

2.)



Wenn c, β und $b<c$ gegeben, so sind dadurch zwei Dreiecke (mit verschiedenen eingeschriebenen Kreisen ϱ, ϱ') bestimmt.

Es ist zu zeigen: $\varrho\varrho' = c(c-b)\sin^2\frac{\beta}{2}$

3.) Wie kann man aus den drei Höhen [illegible] eines Dreiecks die Winkel α, β, γ und den Dreiecksinhalt berechnen?

Schluss der Vierecksberechnung.

Tangentenviereck

$$a+c=b+d \qquad (\varrho \text{ Radius des einbeschriebenen Kreises})$$

$$a\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\varrho\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=c\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}$$

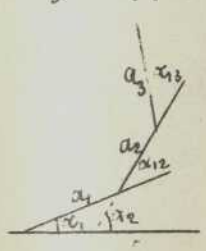
$$b\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\varrho\sin\frac{\beta+\gamma}{2}=d\sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$

Hieraus folgt
$$ab\sin^2\frac{\beta}{2}=cd\sin^2\frac{\delta}{2}$$
$$bc\sin^2\frac{\gamma}{2}=ad\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Der Flächeninhalt F ergibt sich zu $F=\sqrt{abcd}\,\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}=\sqrt{abcd}\,\sin\frac{\beta+\delta}{2}$

Im Parallelogramm ist der Winkel λ zwischen den Diagonalen gegeben durch
$$\cos\lambda=\frac{2ab\sin\alpha}{a^2-b^2}$$

3) Polygonzüge und Polygone.



Es seien $a_1, a_2 \cdots$ die Seiten; $\alpha_{12}, \alpha_{23}\cdots$ die Winkel der Seiten gegeneinander (s. Fig.); $\alpha_1, \alpha_2\cdots$ die Winkel der Seiten gegen eine feste Anfangsrichtung, dann ist der Winkel α_{ik} (der Seite a_i mit der Seite a_k) gegeben durch:

$\alpha_{ik}=\alpha_k-\alpha_i$ Die Länge der Schlusslinie, welche den Anfangspunkt von a_1 mit dem Endpunkt von a_n verbindet, ist gegeben durch
$$a^2=a_1^2+\cdots+a_n^2+2a_1a_2\cos\alpha_{12}+2a_1a_3\cos\alpha_{13}+\cdots+2a_{n-1}a_n\cos\alpha_{n-1,n}$$

Der Inhalt des Polygons, das von $a_1 a_2\cdots a_n$ und der Schlusslinie begrenzt ist, ergibt sich zu
$$F=\frac{1}{2}\left(a_1a_2\sin\alpha_{12}+a_1a_3\sin\alpha_{13}+\cdots+a_{n-1}a_n\sin\alpha_{n-1,n}\right)$$

Zur Bestimmung des n Ecks (die Schlusslinie sei jetzt mit a_n bezeichnet, so dass $n-1$ Seiten vorangehen) sind nötig

$a_1, a_2, \cdots a_{n-1},\ \alpha_{12}, \alpha_{23}\cdots\alpha_{n-2,n-1}$ also $2n-3$ Stücke

Sind alle Stücke bekannt mit <u>Ausnahme von a_1, a_i und einem Winkel $\alpha_{k,k+1}$</u>, so findet man zunächst den fehlenden (Aussen-) Winkel $\alpha_{k,k+1}$ daraus, dass die Summe der Aussenwinkel 360° ist

$$\alpha_{12}+\alpha_{23}+\alpha_{34}+\dots+\alpha_{n1}=360^\circ$$

dann, indem man als Anfangsrichtung a_1 wählt und berücksichtigt, dass

$\alpha_{1i} = \sphericalangle(a_1, a_i) = \alpha_{12}+\alpha_{23}+\dots+\alpha_{i-1,i}$ ist, die noch fehlenden Seiten a_i und a_1 aus

$$0 = a_2 \sin\alpha_{12} + a_3 \sin(\alpha_{12}+\alpha_{23}) \dots + a_i \sin(\alpha_{12}+\dots+\alpha_{i-1,i}) + \dots + a_n \sin(\alpha_{12}+\dots+\alpha_{n-1,n})$$

$$a_1 = a_2 \cos\alpha_{12} + a_3 \cos(\alpha_{12}+\alpha_{23}) + \dots + a_i \cos(\alpha_{12}+\dots+\alpha_{i-1,i}) + \dots + a_n \cos(\alpha_{12}+\dots+\alpha_{n-1,n})$$

Fehlen <u>zwei Winkel</u>, z.B. α_{n1} und $\alpha_{k,k+1}$) und eine Seite a_i, so findet man aus den beiden zuletzt hingeschriebenen Gleichungen in denen der Winkel $\alpha_{n,1}$ nicht vorkommt, durch Elimination von a_i eine Gleichung von der Form

$$A \cos\alpha_{k,k+1} + B \sin\alpha_{k,k+1} = C$$

worin A, B und C nur bekannte Stücke enthalten. Diese Gleichung dient zur Bestimmung von $\alpha_{k,k+1}$ und damit ist auch a_i gegeben und der fehlende Winkel, weil ja die Summe 360° ist.

Fehlen <u>3 Winkel</u>, so kann man die Diagonalen berechnen, die die entsprechenden Ecken verbinden und hieraus leicht die fehlenden Winkel.

<u>4.) Differentialformeln.</u>

Die Formeln geben an, wie sich gewisse Grössen ändern, wenn andere, durch die sie bestimmt sind, kleine Änderungen erleiden, und wenn man die Quadrate aller Änderungen vernachlässigen kann.

Im <u>rechtwinkligen</u> Dreieck hat man z.B.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(c+\Delta c)^2 = (a+\Delta a)^2 + (b+\Delta b)^2$$ hieraus folgt:

$$\Delta c = \frac{a\Delta a + b\Delta b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Für die trigonometrischen Funktionen folgt

$\Delta \sin\varphi = \cos\varphi \frac{\Delta\varphi''}{\varrho''}$; $\Delta\cos\varphi = -\sin\varphi \frac{\Delta\varphi''}{\varrho''}$; $\Delta \mathrm{tg}\varphi = \frac{\Delta\varphi''}{\cos^2\varphi\, \varrho''}$; $\Delta \mathrm{ctg}\varphi = -\frac{\Delta\varphi''}{\sin^2\varphi\, \varrho''}$

Ferner ist im schiefwinkligen Dreieck

$$\frac{\Delta b}{b} - \Delta\beta \,\mathrm{ctg}\beta = \frac{\Delta a}{a} - \Delta\alpha \,\mathrm{ctg}\alpha$$

$$\Delta a = \Delta b \cos\gamma + \Delta c \cos\beta + \frac{bc}{a} \sin\alpha \,\Delta\alpha$$

Aufgaben.

1.) Ist M der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises im Dreieck, r der Radius, $\underline{M}$, ϱ Mittelp. und Radius des einbeschriebenen, so ist zu zeigen, dass

$$(M\underline{M})^2 = r^2 - 2r\varrho$$

2.) Im regulären n Eck ist die Summe der Quadrate über allen Seiten und Diagonalen $= n^2r^2$, wenn r der Radius des umbeschriebenen Kreises ist. Beweis!

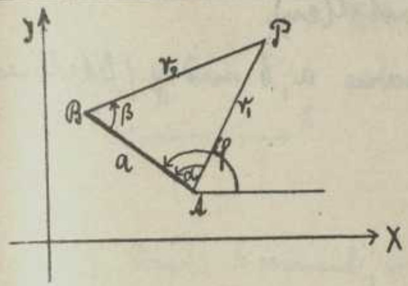
3.) Ein Viereck ist zugleich Tangenten- und Sehnenviereck. Man berechne die Radien r und ϱ des umbeschriebenen und einbeschriebenen Kreises aus zwei Winkeln α, β und dem Flächeninhalt F. Beispiel:

$$\alpha = 70^\circ 25' 12'', \quad \beta = 102^\circ 7' 42'', \quad F = 108{,}22 \text{ cm}^2$$

16. I. 11. **Trigonometrie.** №. 7.

Die Hauptaufgaben der Kleintriangulation.

1. Das Vorwärtseinschneiden:



Gegeben sind die rechtwinkligen Koordinaten x_a, y_a von A, x_b, y_b von B; beobachtet die Winkel α und β; gesucht die Koordinaten x und y des Punktes P.

Zunächst sind a und φ zu bestimmen aus

$$x_b - x_a = a\cos\varphi \qquad y_b - y_a = a\sin\varphi$$

Dann nach dem Sinussatz

$$r_1 = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}\sin\beta \qquad r_2 = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}\sin\alpha$$

Ferner ist (AP), der Winkel den die Strecke AP mit der positiven x Achse bildet, $= \varphi - \alpha$ und entsprechend $(BP) = \beta + \varphi - 180°$. Demnach ist

$$x = x_a + r_1\cos(AP) = x_a + \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\cos(\varphi-\alpha)$$

$$y = y_a + r_1\sin(AP) = y_a + \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\sin(\varphi-\alpha)$$

Es ist aber auch

$$x = x_b + r_2\cos(BP) = x_b - \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\cos(\beta+\varphi)$$

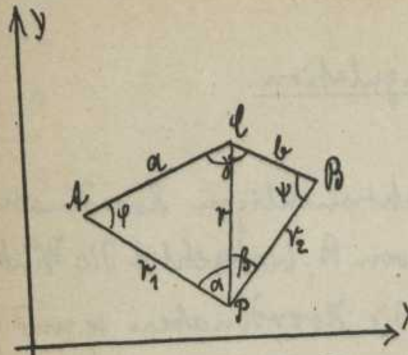
$$y = y_b + r_2\sin(BP) = y_b - \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\sin(\beta+\varphi)$$

Um eine Probe zu haben, berechnet man x und y doppelt.

2. Rückwärtseinschneiden (Pothenotsche Aufgabe):

Gegeben sind die Koordinaten $x_a\, y_a$, $x_b\, y_b$, $x_c\, y_c$; beobachtet die Winkel $\alpha = \sphericalangle APB$, $\beta = \sphericalangle CPB$ von P aus, hieraus ist die Lage von P zu bestimmen.

Lösung: Man überzeugt sich zunächst, auf welcher Seite der Linie



zuges ACB der Punkt P liegt d.h. welchen Umlauf die Punkte $ACBP$ und die eingeschlossene Figur bilden. (Das ist durch die Beobachtung unmittelbar festzustellen).

Dann berechnet man a, b und γ (letzteres aus (AC) und (BC).

Um φ und ψ zu finden, hat man

$$\varphi + \psi = 360^\circ - \alpha - \beta - \gamma \qquad (A)$$

$$r = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\varphi = \frac{b}{\sin\beta}\sin\psi \qquad \text{d.h.} \quad \frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}$$

setzt man jetzt:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha}$$

so wird

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}\operatorname{ctg}(45^\circ+\lambda) \qquad (B.)$$

<u>Proben:</u> $\quad \alpha+\beta+\gamma+\varphi+\psi = 360^\circ$

$$\frac{a}{\sin\alpha}\sin\varphi = \frac{b}{\sin\beta}\sin\psi$$

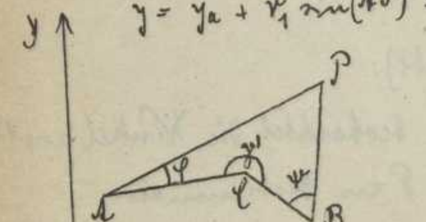
Weiter ist:

$$r_1 = \frac{a}{\sin\alpha}\sin(\alpha+\varphi) \qquad r_2 = \frac{b}{\sin\beta}\sin(\beta+\psi)$$

$$(AP) = (AC) - \varphi \qquad (BP) = (BC) + \psi$$

$$x = x_a + r_1\cos(AP) = x_b + r_2\cos(BP)$$

$$y = y_a + r_1\sin(AP) = y_b + r_2\sin(BP)$$



Liegt P auf der anderen Seite, so ist statt γ zu nehmen

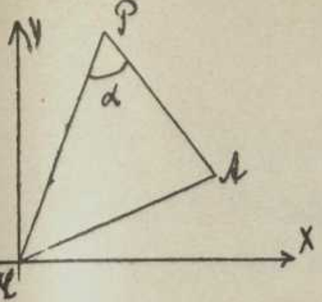
$$\gamma' = 360^\circ - \gamma$$

Im übrigen bleibt die Rechnung dieselbe bis auf

$$(AP) = (AC) + \varphi$$

$$(BP) = (BC) - \psi$$

Methode von Runge (für Rückwärtseinschneiden)



Für den Ort des Punktes P ergibt sich ein Kreisbogen (Peripheriewinkel CPA = const.) – Wir verlegen den Koordinatenanfang nach C, so dass A und P die Koordinaten erhalten

$$\xi_a = x_a - x_c \qquad \eta_a = y_a - y_c$$
$$\xi = x - x_c \qquad \eta = y - y_c$$

Für den Kreis kommt, wenn (wie in der Figur) die Drehung von PC nach PA positiv (dem Uhrzeigersinn entgegen) ist

$$\xi^2 + \eta^2 - \xi(\xi_a - \eta_a \operatorname{ctg}\alpha) - \eta(\eta_a + \xi_a \operatorname{ctg}\alpha) = 0$$

Ist der Drehsinn negativ, so muss statt $\operatorname{ctg}\alpha$ genommen werden $-\operatorname{ctg}\alpha$.

Oder auch: Man überzeugt sich zunächst, ob der Sinn der Drehung von PC nach PA positiv oder negativ ist, im ersten Fall nehme man den Winkel mit positivem Vorzeichen, im zweiten mit negativem.

Entsprechend ist die Gleichung des Kreises aufzustellen, für den $\sphericalangle CPB = \beta$ ist (Vorzeichen!).

Die beiden Kreisgleichungen seien:

$$\xi^2 + \eta^2 - u_1\xi - v_1\eta = 0$$
$$\xi^2 + \eta^2 - u_2\xi - v_2\eta = 0$$

Dann sind die Koordinaten des Schnittpunkts:

$$\xi = \lambda(v_2 - v_1) \qquad \eta = -\lambda(u_2 - u_1)$$

wobei $$\lambda = \frac{u_1 v_2 - v_1 u_2}{(u_1-u_2)^2 + (v_1-v_2)^2}$$

endlich ist

$$x = x_c + \xi, \qquad y = y_c + \eta$$

Sind α und β mit den <u>richtigen</u> Vorzeichen genommen, dann gestaltet sich die trigonometrische Rechnung so:

Zunächst a, b, φ_1 und φ_2 aus

$$\xi_a = a\cos\varphi_1 \qquad \xi_b = b\cos\varphi_2$$

$$\eta_a = a\sin\varphi_1 \qquad \eta_b = b\sin\varphi_2$$

$$u_1 = a\,\frac{\sin(\alpha-\varphi_1)}{\sin\alpha} \qquad v_1 = a\,\frac{\cos(\alpha-\varphi_1)}{\sin\alpha}$$

$$u_2 = b\,\frac{\sin(\beta-\varphi_2)}{\sin\beta} \qquad v_2 = \frac{b\cos(\beta-\varphi_2)}{\sin\beta}$$

Dann führt man ϱ und ψ ein durch

$$u_2 - u_1 = \varrho\cos\psi \qquad v_2 - v_1 = \varrho\sin\psi$$

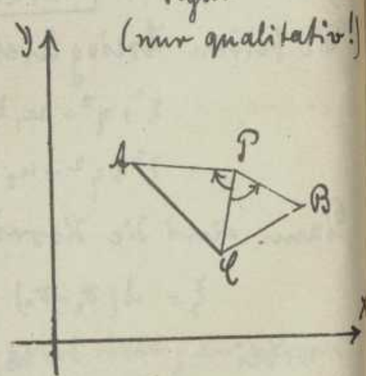
und es wird
$$\lambda = -\frac{a}{\varrho}\,\frac{\cos(\psi+\alpha-\varphi_1)}{\sin\alpha} = -\frac{b}{\varrho}\,\frac{\cos(\psi+\beta-\varphi_2)}{\sin\beta} = \frac{ab\sin(\alpha-\varphi_1-\beta+\varphi_2)}{\varrho^2\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\xi = \varrho\sin\psi\cdot\lambda \qquad \eta = -\varrho\cos\psi\cdot\lambda$$

Wenn P auf dem Kreis durch A, B und C liegt (<u>gefährlicher Kreis</u>), so ist durch die Messung von α und β seine Lage nicht bestimmt.

<u>Aufgabe:</u>

Figur
(nur qualitativ!)



Gegeben:

$$x_a = 28\,560{,}64\text{ m} \qquad y_a = 9\,323{,}91\text{ m}$$

$$x_b = 29\,266{,}85\text{ m} \qquad y_b = 9\,012{,}46\text{ m}$$

$$x_c = 28\,996{,}79\text{ m} \qquad y_c = 8\,807{,}58\text{ m}$$

Beobachtet:

$$\alpha = 93^\circ\,44'\,38'' \qquad \beta = 83^\circ\,6'\,42''$$

Gesucht x und y.

[Bei der Rungeschen Methode ist, wie die Figur zeigt α negativ, β po-
tiv zu nehmen].

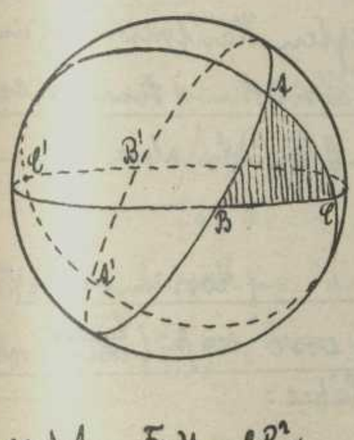
Sphärische Trigonometrie.

1. Vorbemerkungen.

Figur und Polarfigur: Errichtet man auf den Ebenen eines Dreikants (Kantenwinkel d.h. Winkel der Ebenen: α, β, γ; Seiten d.h. Winkel der Kanten: a, b, c) im Schnittpunkte O die Senkrechten, so entsteht ein neues Dreikant mit den Kantenwinkeln $\alpha' = \pi - a$, $\beta' = \pi - b$, $\gamma' = \pi - c$ und den Seiten $a' = \pi - \alpha$, $b' = \pi - \beta$, $c' = \pi - \gamma$; es heisst das polare Dreikant.

Die Schnittfigur eines Dreikants mit einer Kugel, die um O als Mittelpunkt beschrieben ist, bildet ein sphärisches Dreieck (Winkel α, β, γ; Seiten eigentlich Ra, Rb, Rc - wobei R der Kugelradius - doch nimmt man statt der wirklichen Seitenlängen die Centriwinkel a, b, c)

Inhalt des sphärischen Dreiecks: Der Inhalt eines sphärischen Zweiecks, dessen beide Seiten also halbe grösste Kreise sind, deren Ebenen den Winkel α einschliessen, ist $2R^2\alpha$. - Zu jedem Dreieck gibt es ein diametral



gegenüberliegendes; drei Ebenen durch O zerlegen die Kugel in 8 einander paarweise gegenüberliegende Dreiecke. Es sei

F	der Inhalt des Dreiecks	$ABC = A'B'C'$
U	" " "	$A'BC = AB'C'$
V	" " "	$B'CA = BA'C'$
W	" " "	$C'AB = CA'B'$

es ist $F + U = 2R^2\alpha$, $F + V = 2R^2\beta$, $F + W = 2R^2\gamma$ (1.)

und $F + U + V + W = \frac{1}{2}(4R^2\pi) = 2R^2\pi$ (2.)

durch Vergleich von (1.) und (2.) folgt

$$F = R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$$

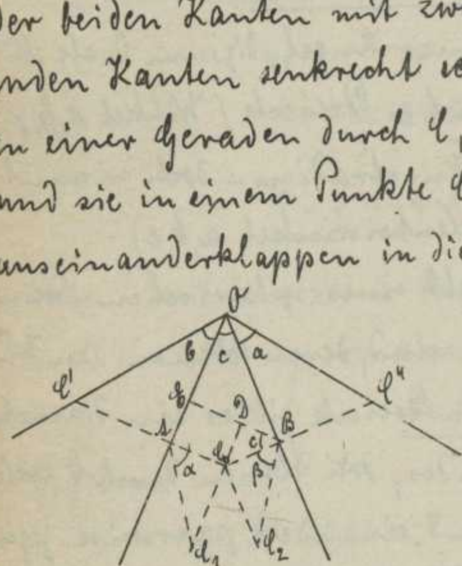
oder, wenn die Winkel in Graden gemessen sind

$$F = \frac{R^2\pi}{180}(\alpha+\beta+\gamma-180^\circ)$$

$\varepsilon = \alpha+\beta+\gamma-180^\circ$ heisst der <u>sphärische Excess</u> des Dreiecks.

<u>2.) Grundformeln für das schiefwinklige sphärische Dreieck.</u>

Es seien C, A und B drei Punkte auf den Kanten des Dreikants mit den Kantenwinkeln γ, α und β und zwar seien A und B die Schnittpunkte der beiden Kanten mit zwei Ebenen, die durch C gehen und die entsprechenden Kanten senkrecht schneiden, diese Ebenen schneiden einander in einer Geraden durch C, welche auf der Ebene OAB senkrecht steht und sie in einem Punkte C_0 schneidet. Diese Figur wollen wir auseinanderklappen in die Ebene OAB und erhalten, wenn



$1 = OC = OC' = OC''$

$AC_1 = AC' = \sin b \qquad BC_2 = BC'' = \sin a$

$C_0C_1 = C_0C_2 = C_0C$, also da C_0AC_1 und C_0BC_2 die umgelegten Kantenwinkel sind

$\underline{\sin b \cdot \sin\alpha = \sin a \sin\beta}$ (Sinussatz)

Wenn ferner $BE \perp OA$, $C_0D \perp BD$, so ist $\quad OA = OE + DC_0$ also

$$\cos b = OB\cdot\cos c + BC_2 \cos\beta \sin c$$

$\underline{\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos\beta}$ (Cosinussatz)

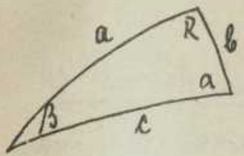
$AC_0 = BE - BD$ d.i. $\quad \underline{\sin b \cos\alpha = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos\beta}$ (Sinus-Cosinussatz)

Das Polardreikant liefert dazu zwei weitere Sätze:

$\underline{\cos\beta = \sin\alpha \sin\gamma \cos b - \cos\alpha \cos\gamma}$ (Cosinussatz)

$\underline{\sin\beta \cos a = \cos\alpha \sin\gamma + \sin\alpha \cos\gamma \cos b}$ (Sinus-Cosinussatz)

3. Das rechtwinklige sphärische Dreieck.



Im rechtw. sph. Dreieck (Hypotenuse c, Katheten a und b) ist

$$\sin a = \sin c \sin\alpha \qquad \sin b = \sin c \sin\beta$$

$$\cos c = \cos a \cos b$$

Aus $\cos\alpha = \sin\beta \cos a$ und aus $\cos\beta = \sin\alpha \cos b$ ergibt sich

$$\cos c = \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg}\alpha$$

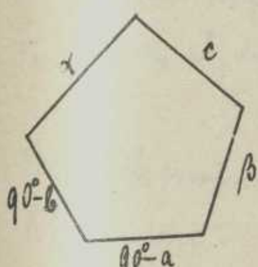
Der Sinus-Cos.satz ergibt $\cos\alpha = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} c$, $\cos\beta = \operatorname{tg} a \operatorname{ctg} c$

und diese Formeln nach dem Sinussatz kombiniert

$$\sin b = \operatorname{tg} a \operatorname{ctg}\alpha \qquad \sin a = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg}\beta$$

Alle Formeln können durch folgende Regel zusammengefasst werden:

Man schreibe an ein Fünfeck die Werte $\alpha, c, \beta, 90-a, 90-b$; dann ist der <u>Cosinus</u> eines Stückes gleich dem Produkt der <u>Cotangenten der anliegenden</u>- und gleich dem Produkt der <u>Sinus der nicht anliegenden</u> Stücke.



Aufgaben.

1) Wie gross sind die Winkel eines gleichseitigen sphärischen Dreiecks, dessen Seiten gleich dem Kugelradius sind?

$$\left(a = b = c = \frac{180^\circ}{\pi}, \quad \alpha = \beta = \gamma = ?\right)$$

2) Man berechne das rechtw. sph. Dreieck aus $\alpha = 46^\circ 48'$ $\beta = 74^\circ 35'$

3.) Man zeige, dass im rechtw. sph. Dreieck

$$\cos^2 h = \cos^2\alpha + \cos^2\beta$$ ist. (h = Höhe auf Seite c)

30. I. 11 **Trigonometrie** № 9.

Sphärische Trigonometrie (Fortsetzung)

4.) Der Eckensinus

Aus dem Cosinussatz $\cos\alpha = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$

folgt die Gleichung

$$\sin^2\alpha \sin^2 b \sin^2 c = \mathfrak{D}^2$$

Es ist also:

$$\mathfrak{D}^2 = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c$$

$$\sin\alpha \sin b \sin c = \mathfrak{D}$$

und ebenso $\sin\beta \sin c \sin a = \mathfrak{D}$, $\sin\gamma \sin a \sin b = \mathfrak{D}$

woraus zugleich ein neuer Beweis des Sinussatzes folgt.

Die Grösse $\frac{\mathfrak{D}}{2}$ (Eckensinus) hat eine einfache geometrische Bedeutung: Trägt man auf den Kanten des Dreikants (mit den Seiten a, b, c) von O aus r_1, r_2 und r_3 ab, so hat das entstehende Tetraeder den Inhalt:

$$V = \frac{r_1 r_2 r_3}{6} \frac{\mathfrak{D}}{2}$$

Der Eckensinus $\frac{\mathfrak{D}}{2}$ lässt sich auch in Form eines Produktes ausdrücken. Setzt man $\frac{a+b+c}{2} = s$ so ergibt der Cosinussatz

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}} \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}}$$

also $\dfrac{\mathfrak{D}}{2} = \dfrac{1}{2}\sin\alpha \sin b \sin c = \sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}$

5. Satz von Legendre.

Sind a, b, c die Seiten (also $\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}$ die in den trigonometrischen Formeln benützten Centriwinkel), α, β, γ die Winkel eines sph. Dreiecks, und kann man die 4. Potenzen von $\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}$ vernachlässigen, so kann für die trigonometrische Berechnung das sphärische Dreieck ersetzt werden durch ein ebenes mit denselben Seiten a, b, c und den Winkeln $\alpha-\frac{\varepsilon}{3}, \beta-\frac{\varepsilon}{3}, \gamma-\frac{\varepsilon}{3}$ wobei ε der sphärische Exzess ist.

Beweis: Ist F der Flächeninhalt, so wird $\frac{1}{R^2} = \frac{\varepsilon}{F}$

ferner sind im Sinussatz $\sin\alpha \sin\frac{b}{R} = \sin\beta \sin\frac{a}{R}$

die Reihenentwicklungen ersetzbar durch

$$\sin\frac{b}{R} = \frac{b}{R} - \frac{b^3}{6R^3} \qquad \sin\frac{a}{R} = \frac{a}{R} - \frac{a^3}{6R^3}$$

Hieraus folgt, wenn $\frac{1}{R^2} = \frac{\varepsilon}{F}$ eingeführt wird

$$b\left(\sin\alpha - \frac{\varepsilon b^2}{6F}\right) = a\left(\sin\beta - \frac{\varepsilon a^2}{6F}\right)$$

Hierin aber kann man wieder setzen $F = \frac{bc\sin\alpha}{2} = \frac{ac\sin\beta}{2}$

und erhält $b\left(\sin\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\frac{b}{c}\right) = a\left(\sin\beta - \frac{\varepsilon}{3}\frac{a}{c}\right)$

oder, weil bis auf Grössen höherer Ordnung

$$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma \qquad a = c\cos\beta + b\cos\gamma$$

erhält man $b\left(\sin\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\cos\alpha\right) = a\left(\sin\beta - \frac{\varepsilon}{3}\cos\beta\right)$

oder $b\sin\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{3}\right) = a\sin\left(\beta - \frac{\varepsilon}{3}\right)$

6. Vervollständigung der Formeln für das schiefw. sph. Dreieck.

Die Gauss-Delambreschen Formeln:

$$\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \qquad \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \qquad \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}$$

Sie ergeben sich aus den in 4.) angegebenen Werten von $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}$ u.s.w.

Durch Division folgen daraus die Napierschen Formeln:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \qquad \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \qquad \frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Die erste Zeile dient dazu die α und β bei gegebenem a, b, γ zu berechnen, die zweite, um a und b aus c, α, β zu berechnen. Für die logarithmische Rechnung sind sie bequemer als der Cosinussatz.

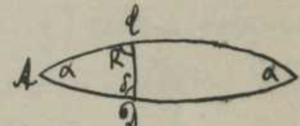
Aus den Gauss-Delambreschen Formeln folgt auch das L'Huilier-Serret'sche Formelsystem:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}}}; \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}}{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}}}; \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}$$

Aufgaben.

1.) In einem sphärischen Zweieck ($\sphericalangle A = \alpha = 20°$) soll der Punkt C ($\sphericalangle ACD = DCA' = 90°$) so bestimmt werden, dass das Zweieck durch CD in zwei Teile zerlegt wird, deren Flächeninhalt (ACD und CDA') sich wie $1:2$ verhält. Wie gross ist AC und δ?



2.) Ein schiefwinkliges sphärisches Dreieck zu berechnen aus

$a = 80°22' \qquad \beta = 31°42' \qquad b = 56°33'$

(Es gibt zwei Lösungen!)

v. II. 11. Trigonometrie. № 11.

Sphärische Trigonometrie.

7.) Der einbeschriebene Kreis u.s.w.

Der Radius ϱ des einbeschriebenen Kreises ist gegeben durch

$$\operatorname{tg} \varrho = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$$

der Radius ϱ_a des anbeschriebenen Kreises, der die Seite a berührt, durch

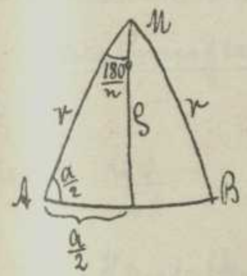
$$\operatorname{tg} \varrho_a = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin(s-a)}}$$

Durch Betrachtung des Polardreiecks findet man für den Radius r des umbeschriebenen Kreises:

$$\operatorname{ctg} r = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{-\cos\sigma}} \qquad \text{wo } \sigma = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

8.) Formeln für das reguläre sphärische Polygon.

Beim regulären sphärischen n-Eck (Seite a, Winkel α, Radius des umbeschriebenen Kreises r, des einbeschriebenen ϱ) gelten folgende durch



Betrachtung eines rechtwinkligen Dreiecks (eine Ecke davon der Mittelp. M des ein- u. umbeschr. Kreises) sich unmittelbar ergebenden Formeln:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{a}{2} = \cos\frac{180}{n}$$

$$\sin\varrho = \operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180}{n} \qquad \cos\varrho = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{180^\circ}{n}}$$

$$\sin r = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin\frac{180^\circ}{n}} \qquad \cos r = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{180}{n}$$

Zusatz zu Blatt 9.

Der Inhalt eines Kegels mit der Grundfläche F und der Höhe h ist $\frac{1}{3}F\cdot h$.
Zerlegt man den Kegel in n Schichten gleicher Höhe, so erhält man nämlich

$$V = \frac{F\cdot h}{n}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^2}+\dots+\frac{(n-1)^2}{n^2}+\frac{n^2}{n^2}\right)$$

woraus für $n=\infty$ $V = \frac{Fh}{3}$

Der Inhalt eines Tetraeders, bei dem die von einer Ecke ausgehenden Kanten $(r_1\, r_2\, r_3)$ die Winkel c, a, b einschliessen, ist:

$$\frac{r_1 r_2 r_3}{3} \cdot \frac{\mathfrak{D}}{2} = \frac{r_1 r_2 r_3}{3} \sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}$$

(In Blatt 9 steht $\frac{1}{6}$ statt des richtigen Werts $\frac{1}{3}$).

Aufgaben.

1.) Wie gross ist der Rauminhalt einer regulären n seitigen Pyramide, wenn die von der Spitze ausgehenden Kanten die Länge R haben und je zwei benachbarte den Winkel a einschliessen.

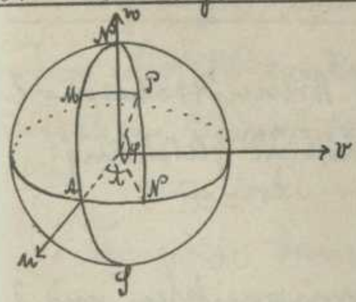
2.) Welche Beziehung besteht zwischen r und ϱ beim gleichseitigen sphärischen Dreieck?

3.) Wie drückt sich der Radius ϱ des sphärischen Tangentenvierecks mit den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch diese Winkel aus?

13. II. 11. Trigonometrie. № 11.

Sphärische Trigonometrie.

Koordinatensysteme auf der Kugel:



Geographische Koordinaten: Länge λ und Breite φ

Länge λ = Winkel des Meridians mit dem Anfangsmerid.

Breite φ = " " Radius PO mit der Äquatorebene.

Zwischen λ, φ einerseits und den „homogenen Koordinaten“ d.h. den rechtwinkligen Koordinaten des Punktes P auf der Kugel besteht die Beziehung:

$$u = \cos\varphi \cos\lambda \qquad v = \cos\varphi \sin\lambda \qquad w = \sin\varphi$$

Fällt man von P aus auf den Äquator und den Anfangsmeridian die Lote PN und PM so sind $AM = \eta$, $MP = \xi'$ (in der Geodäsie mit x und y bezeichnet) die Soldnerschen Koordinaten (s. weiter unten), für geometrische Betrachtungen verwenden wir aber zunächst η und ξ ($= AN$) und bezeichnen $\quad tg\,\xi$ mit $x \quad tg\,\eta$ mit y. (Projektionskoord.)

Beziehungen zwischen x, y einerseits u, v, w andrerseits:

$$\xi = \lambda \qquad \text{also} \qquad x = tg\,\lambda = \frac{v}{u}$$

$$tg\,\eta = \frac{tg\,\varphi}{\cos\lambda} \qquad " \qquad y = tg\,\eta = \frac{tg\,\varphi}{\cos\lambda} = \frac{w}{u}$$

Ein Hauptkreis (grösster Kreis) hat die Gleichungen

$$u_0 u + v_0 v + w_0 w = 0$$

in homogenen Koordinaten ($u_0\ v_0\ w_0$ ist sein Pol).

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

in den Projektionskoordinaten ($a = tg\,\alpha$, $b = tg\,\beta$; α und β die Abschnitte des Hauptkreises auf Äquator und Anfangsmeridian.

Kreis und Kegelschnitte.

Die Gleichung eines Kreises ($u_0\, v_0\, w_0$ Mittelpunkt, r sphärischer Radius) wird

$$u_0 u + v_0 v + w_0 w = \cos r$$

Eine sphärische Ellipse, bei der die Summe der Brennstrahlen $= 2\alpha$ ist, die Brennpunkte die Lagen $\varphi = 0$, $\lambda = \pm\varepsilon$ haben, hat die Gleichung:

$$\frac{x^2}{\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2\beta} = 1 \qquad \left(\cos\beta = \frac{\cos\varepsilon}{\cos\alpha}\right)$$

eine sphärische Hyperbel mit denselben Brennpunkten und der Differenz 2δ der Brennstrahlen wird:

$$\frac{x^2}{\operatorname{tg}^2\delta} - \frac{y^2}{\sin^2\beta} = 1 \qquad \left(\cos\beta = \frac{\cos\varepsilon}{\cos\delta}\right)$$

Aufgaben.

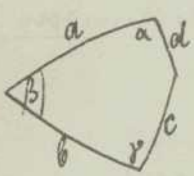
1.) Welche Bedingung müssen λ_1, φ_1; λ_2, φ_2; λ_3, φ_3; erfüllen, damit alle drei Punkte auf demselben Hauptkreis liegen?

2.) Gegeben a, b und β; ferner $\alpha = \gamma = R$

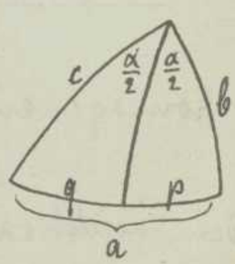
Wie können c und d berechnet werden?

(Beispiel: $a = 54°20'$ $\quad b = 61°10'$

$\beta = 57°40'$ $\quad c = ?$ $\quad d = ?$)



3.) Wie berechnen sich die Abschnitte p und q an a, b und c, in welche die Halbierungslinie des Winkels α im sphärischen Dreieck die Grundlinie zerlegt?



20. II. 11. **Trigonometrie.** № 12.

Sphärische Kegelschnitte:

In den „Projektionskoordinaten" x, y können die Punkte einer sphärischen Ellipse dargestellt werden durch

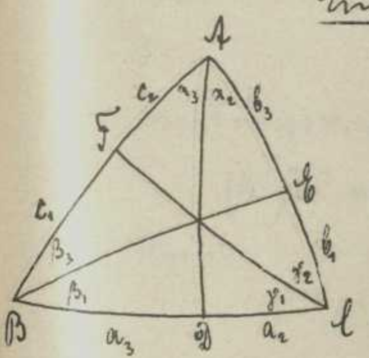
$$x = a\cos t \qquad y = b\sin t$$

und die Tangente durch

$$\frac{x\cos t}{a} + \frac{y\sin t}{b} - 1 = 0$$

Dass die Tangente den Aussenwinkel der Brennstrahlen halbiert (wie bei der ebenen Ellipse) erkennt man durch Spiegelung des Brennpunktes F_1 an der Tangente. Die Entfernung dieses Spiegelpunktes F_1' von F_2 ist 2α woraus der ausgesprochene Satz folgt.

Einige weitere Sätze der sph. Geometrie.



Die Bedingung dafür, dass die 3 Transversalen AD, BE, CF einander in einem Punkt schneiden, ist

$$\frac{\sin\alpha_2 \sin\beta_3 \sin\gamma_1}{\sin\alpha_3 \sin\beta_1 \sin\gamma_2} = 1$$

oder auch: $$\frac{\sin a_2 \sin b_3 \sin c_1}{\sin a_3 \sin b_1 \sin c_2} = 1$$

(Folgerungen hievon: Höhenschnittpunkt, Mitteltransversalenschnittpunkt)

"Der Ort der Ecke C eines sphärischen Dreiecks mit der Grundlinie $AB = c$ und gegebenem Flächeninhalt ist ein Kreis, der durch die Gegenpunkte A', B' von A, B geht.

Aufgaben.

1.) Der sphärische Exzess eines Dreiecks drückt sich durch 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel so aus:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{c}{2}}$$

Beweis?

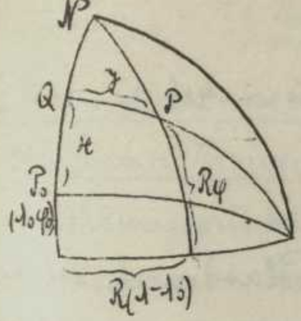
2.) In welcher Breite schneidet der Hauptkreisbogen Bonn-Budapest den München Meridian?

Bonn: $\varphi = 50^\circ\ 43'\ 45''$ $\lambda = 7^\circ\ 5'\ 48''$

Budapest: $\varphi = 47^\circ\ 29'\ 35''$ $\lambda = 19^\circ\ 3'\ 49''$

München: $\lambda = 11^\circ\ 36'\ 30''$

Soldnersche Koordinaten.



Ist $P_0(\lambda_0, \varphi_0)$ der Anfangspunkt, so sind die Soldnerschen Koordinaten von P:

y = Strecke des Hauptkreises durch P senkrecht zum Meridian von P_0 bis zum Schnitt Q mit ihm;

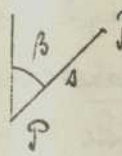
$x = P_0 Q$

es wird

$$\sin\frac{y}{R} = \cos\varphi \sin(\lambda-\lambda_0)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{R}+\varphi_0\right) = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos(\lambda-\lambda_0)}$$

Richtungswinkel β eines von P ausgehenden Hauptkreises heisst der Winkel mit dem durch P gelegten Parallelkreis zum Anfangsmeridian. Ist $P_1(x_1 y_1)$ gegeben durch s und β, so gelten die Näherungsformeln:



$$y_1 = y + s\sin\beta - \frac{s^2 y\cos^2\beta}{2R^2} - \frac{s^3\sin\beta\cos^2\beta}{6R^2}$$

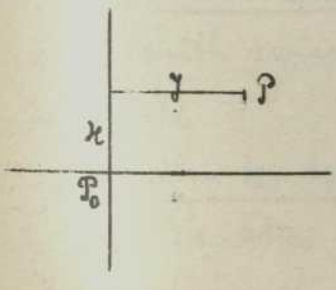
$$x_1 = x + s\cos\beta + \frac{s\cos\beta\, y_1^2}{2R^2} - \frac{s^3\cos\beta\sin^2\beta}{6R^2}$$

Der Richtungswinkel β_1 des Hauptkreises PP_1 in P_1 ist gegeben durch:

$$(\beta-\beta_1)'' = \rho''\left(s\cos\beta\,\frac{y}{R^2} + s^2\,\frac{\sin\beta\cos\beta}{2R^2}\right)$$

ausserdem ist:

$$s^2 = (x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 - \frac{(x_1-x)^2}{3R^2}\left(y^2+y_1^2+yy_1\right)$$



Entwirft man in der Ebene eine Karte, in der der Anfangsmeridian als Achse, die dazu senkrechten Hauptkreise als gerade Linien eingetragen werden (rechtwinklige Koordinaten x y) und ist s der sphärische Abstand zweier

Punkte auf der Kugel, s_0 der Abstand der korrespondierenden Punkte in der Ebene, so wird für kleine Strecken

$$\frac{s_0}{s} = 1 + \frac{y^2}{2R^2}\cos^2\beta$$

Die Verzerrung ist also abhängig vom Richtungswinkel β.

Aufgaben.

1.) Ein gleichseitiges sphärisches Dreieck und sein Polardreieck sollen zusammen $\frac{1}{3}$ der Kugel bedecken; man bestimme daraus Seite und Winkel des Dreiecks.

2.) Die Halbierungspunkte der aufeinanderfolgenden Seiten des regulären sphärischen Fünfecks, dessen Seite $a = 50°$ ist, werden durch Hauptkreisbogen verbunden. Wie gross ist der Flächeninhalt des entstehenden Fünfecks?

3.) Rio de Janeiro liegt unter 22° 56' südlicher Breite, Kapstadt unter 33° 54' südlicher Breite. Der Bogen des Hauptkreises zwischen beiden Orten ist 6080 km ($R = 6370$ km). Man berechne hieraus die Längendifferenz und den südlichsten Punkt des verbindenden Hauptkreises.

8.5.11. **Trigonometrie.** № 14.

1. Koordinatensysteme am Himmel.

I. Das System des Horizontes.

Der „wahre" Horizont ist gegeben durch die Ebene des Wasserspiegels im Beobachtungspunkt O, der „scheinbare" durch die dazu parallele durch den Erdmittelpunkt. Der Unterschied kommt für Fixsternbeobachtungen nicht in Betracht. Die Horizontalebene ist mit einer Kugel geschnitten zu denken, deren Mittelpunkt der Beobachtungsort ist, sie gibt den Horizont, einen grössten Kreis, dessen Pole Zenith und Nadir heissen. Durch die Lothrichtung (Zenith-Nadir) gehen die Vertikalkreise, darunter der Meridian (durch Z und die Himmelspole P_N, P_S); seine Schnittpunkte mit dem Horizont geben Nord- resp. Südpunkt (H_N resp. H_S). Ferner der erste Vertikal, senkrecht zum Meridian, der den Horizontkreis im Ost- resp. Westpunkt (H_O, H_W) schneidet.

Die Richtung nach einem Stern Σ ist bestimmt durch Höhe h (Winkel von $O\Sigma$ mit dem Horizont) und das Azimut a (Winkel zwischen Sternvertikal und Meridian, von ZH_S an nach Osten und Westen gezählt).

h und z (Zenithdistanz $= 90° - h$) sind konstant für einen Höhenkreis, a für einen Vertikalkreis.

Die wahre Höhe ist um den Betrag der Refraktion (vom Horizont bis zum Zenith zwischen etwa $35'$ und 0 abnehmend) kleiner als die scheinbare Höhe.

II. System des Äquators.

Den Punkten Z und N entsprechen P_N und P_S, dem Horizont der Himmelsäquator, der Höhe die Deklination δ (positiv für Punkte nör-

lich, negativ für Punkte südlich des Äquators) dem Azimut der Stunden-
2 winkel (s) d.h. der Winkel zwischen Ortsmeridian und Sternmeridian
3 am Pol P_N, von Süden über Westen nach Norden und Osten gerechnet.

Während einer vollen Umdrehung der Erde nimmt s eines Sterns zu um 360° und zwar gleichförmig. Diese Umdrehungszeit heisst
2 24^h (Sternzeit), so dass

$$1^\circ = 4^m \qquad 1' = 4^{sec}$$
$$1^h = 15^\circ \qquad 1^m = 15' \qquad 1^{sec} = 15'' \qquad \text{ist.}$$

Der Stundenwinkel des Frühjahrspunktes ♈ heisst Sternzeit t, der Winkel zwischen ♈-Meridian und Σ-Meridian, aber entgegengesetzt
2 gezählt, von P_N♈ nach Osten zunehmend, Rektaszension α.

Es ist daher

$$t = \alpha + s$$

Sternzeit = Rektaszension + Stundenwinkel.

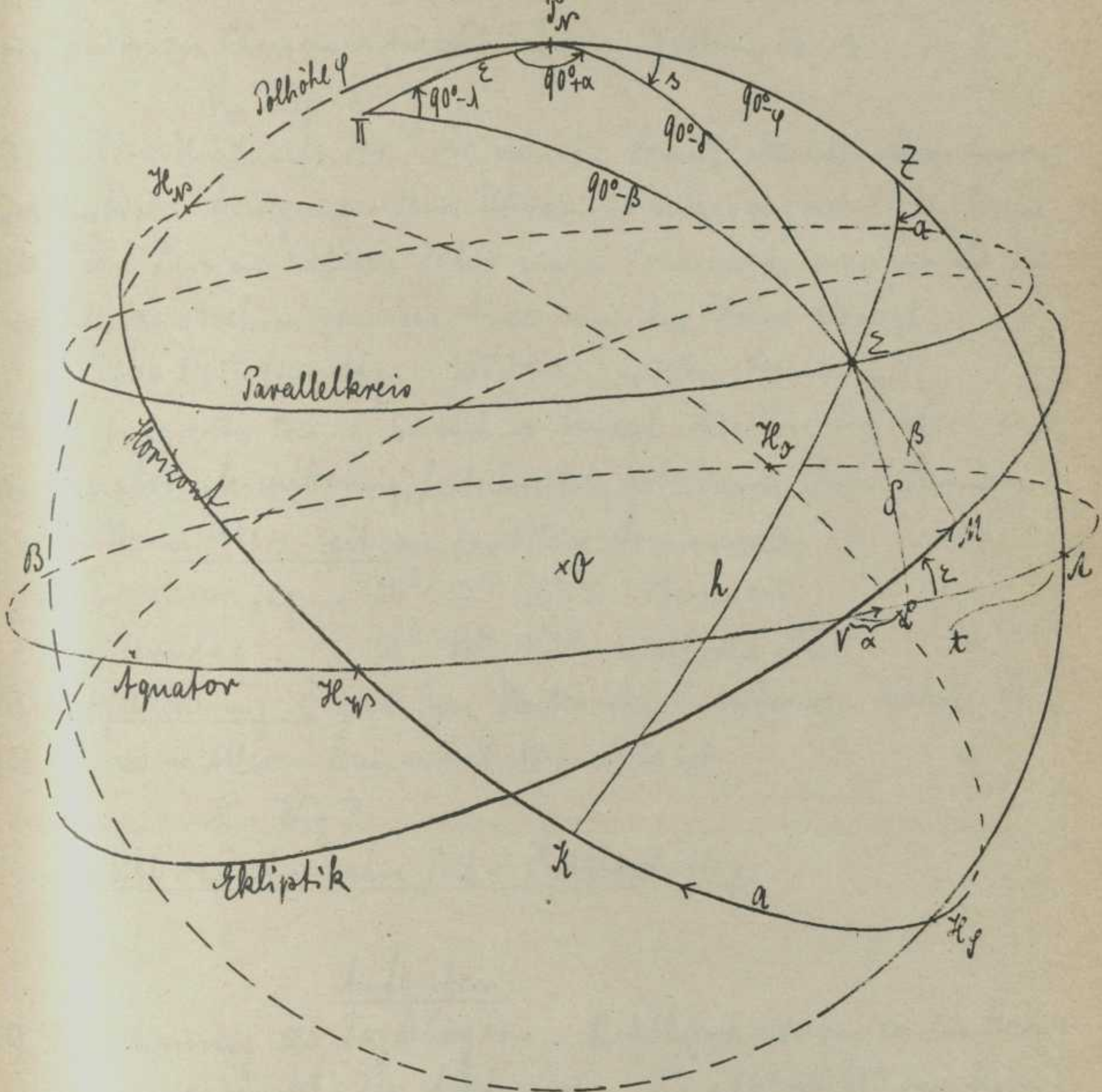
NB: Höhe und Azimut eines Sternes ändern sich, Deklination und Rektaszension sind konstant, der Stundenwinkel nimmt gleichförmig zu, wie die Sternzeit.

II. Die Ekliptik ist der grösste Kreis, den die scheinbare Bahn der Sonne ☉ unter den Sternen im Lauf eines Jahres ergibt.

P_N und Äquator entsprechen:

Π_N (nördl. Pol der Ekliptik) und Ekliptik selbst.

Σ ist bestimmt durch Länge λ, welche der Rektaszension entspricht und Breite β, welche der Deklination entspricht. λ wird von ♈ an gezählt, dem Punkt, an welchem die Sonnenbahn aufsteigend den Äquator schneidet. Schiefe der Ekliptik ε heisst der Winkel zwischen Äquator und Ekliptik. Er ist etwa $= 23\frac{1}{2}^\circ$.



P_N
Polhöhe φ
90°-λ
ε
90°+α
s
90°-φ
Π
90°-δ
Z
H_N
90°-β
a
Σ
Parallelkreis
Horizont
H_O
β
δ
M
B
×O
h
λ
ε
α
t
Äquator
H_W
K
Ekliptik
a
H_S

2. Die Zeiten und die Zeitgleichung.

Die Sternzeit ist gleich für alle Orte auf demselben geographischen Meridian; geht man von einem Meridian zu einem andern mit dem geographischen Längenunterschied λ nach Westen, so ist

$$t_w = t_0 - \lambda$$

Wegen des Umlaufs der Erde um die Sonne oder der scheinbaren rückläufigen Bewegung – dem Uhrzeiger entgegengesetzt – der Sonne unter den Sternen hat das Jahr einen Sonnentag weniger als die Anzahl der Drehungen der Erde um ihre Achse beträgt:

366,242 Sterntage = 365,242 (mittlere Sonnenzeit).

Eine fingierte Sonne, die sich so bewegt, dass ihre Projektion auf den Äquator gleichförmig fortschreitet, gibt durch ihren Stundenwinkel die <u>mittlere Zeit</u> an (mittlere Sonnenzeit)

ein mittlerer Tag = $24^h\ 3^m\ 56{,}^s57$ Sternzeit

ein Sterntag = $23^h\ 56^m\ 4{,}^s08$ mittlerer Zeit

Die <u>Zeitgleichung Z</u> gibt den Unterschied zwischen wahrer Sonnenzeit W und mittlerer Sonnenzeit M an. Es ist:

$$M = W + Z$$

<u>mittlere Zeit = wahre Zeit + Zeitgleichung.</u>

Aufgaben.

1) Berechnung des Tagesbogens (= Sichtbarkeitsdauer in Sternzeit ausgedrückt) des Arcturus $\delta = +19°\ 54'\ 29''$ für München ($\varphi = 48°\ 8'\ 57''$) ohne und mit Berücksichtigung der Refraktion ($34'\ 54''$ im Horizont).

2. Berechnung der geogr. Breite eines Ortes aus zwei Höhen

$h_1 = 42^\circ\ 52'\ 53''$

$h_2 = 76^\circ\ 13'\ 27''$

desselben Sterns (α Cassiopeiae). Die Deklination δ beträgt $56^\circ 3' 36''$

3.) Wahre Zeit zu berechnen aus dem Winkel u der Schattenlinie einer vertikalen Sonnenuhr, deren östliches Azimut = a ist, mit der Lotrichtung. (Geographische Breite sei φ)

Beispiel: $u = 40^\circ$ $a = 10^\circ$ $\varphi = 48^\circ\ 8'$

4.) Welche Beziehung muss zwischen 4 Strecken a, b, c, d bestehen damit sie die Abstände eines Punktes von den Ecken eines Quadrats sind? Wie kann man, wenn die Bedingung erfüllt ist, die Seite eines Quadrates daraus berechnen?

22. V. 11. **Trigonometrie.** № 15.

1.) Zwei Sterne ($\alpha_1, \delta_1; \alpha_2, \delta_2$) werden nacheinander in demselben Vertikal beobachtet, und es ist die inzwischen verflossene Sternzeit $t_2 - t_1$ bekannt, daher auch die Differenz der beiden Stundenwinkel

$$s_2 - s_1 = (t_2 - \alpha_2) - (t_1 - \alpha_1)$$

Es soll die Richtigkeit der folgenden Formel bewiesen werden, die zur Berechnung von $s_1 + s_2$ dient:

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\delta_1} = \frac{\sin\left(\psi - \frac{1}{2}(s_1+s_2)\right)}{\sin\left(\psi - \frac{1}{2}(s_2-s_1)\right)}$$

Hierbei ist φ die geographische Breite und ψ definiert durch

$$\varrho \cdot \cos\psi = \sin(\delta_2 + \delta_1)\,\sin\tfrac{1}{2}(s_2 - s_1)$$

$$\varrho\,\sin\psi = \sin(\delta_2 - \delta_1)\,\cos\tfrac{1}{2}(s_2 - s_1)$$

2.) Zahlenbeispiel:

Wega : $a = 18^h\ 31^m\ 47{,}^s75$ $\delta = +\,38°\ 38'\ 52''$

Atair: $\alpha = 19^h\ 43^m\ 23{,}^s43$ $\delta = +\ 8°\ 28'\ 30''$ erscheinen für den Ort mit der geogr. Breite $\varphi = 52°\ 30'\ 16''$ <u>gleichzeitig</u> in demselben Vertikal für welche Sternzeit? (Hier ist also $t_1 = t_2$ angenommen).

3.) Wie kann man die Bestimmungsstücke eines Dreiecks berechnen aus den Abständen d, e, f des Mittelpunkts des umbeschriebenen Kreises von den Mittelpunkten der Seiten?

4.) Wie kann man die Stücke eines Dreiecks berechnen aus den Entfernungen l, m, n des Mittelpunkts des einbeschriebenen Kreises von den drei Ecken?

5.) Es soll gezeigt werden, dass zwischen α, δ (Rektascension und Deklination) λ, β (Länge u. Breite im System der Ekliptik) und ε (Schiefe der Ekliptik) die Gleichung besteht:

$$\cos\varepsilon = \frac{\sin\beta \operatorname{tg}\lambda + \sin\delta \operatorname{tg}\alpha}{\sin\beta \operatorname{tg}\alpha + \sin\delta \operatorname{tg}\lambda}$$

6.) Es soll die geogr. Breite eines Ortes aus der Angabe bestimmt werden, dass für ihn zwei Sterne (α_1, δ_1; α_2, δ_2) gleichzeitig aufgehen.

Beispiel:

Rigel : $\alpha_1 = 5^h\ 10^m\ 21{,}^s9$ $\delta_1 = -8^\circ\ 18'\ 6''$

Procyon: $\alpha_2 = 7^h\ 35^m\ 45{,}^s1$ $\delta_2 = 5^\circ\ 26'\ 24''$

19. VI. 11. **Trigonometrie.** № 16.

1) Es wurden beobachtet die Sterne α Ursae minoris (Polarstern) und α Lyrae (Wega)

[Koordinaten $a_1 = 1^h\,28^m\,19^s$ $\delta_1 = 38°\,50'\,54''$

$a_2 = 18^h\,31^m\,48^s$ $\delta_2 = 38°\,38'\,52''$]

in den Höhen $h_1 = 47°\,30'\,15''$

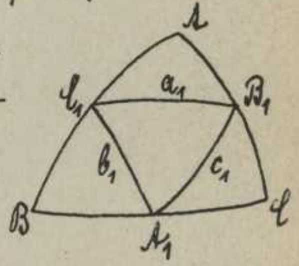
$h_2 = 28°\,35'\,10''$

bei den Sternuhrangaben $u_1 = 12^h\,15^m\,10^s$ und $u_2 = 12^h\,20^m\,16^s$

Zu berechnen die geogr. Breite des Beobachtungsortes und die Uhrverbesserung.

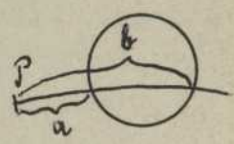
2.) Man berechne die Dauer der kürzesten Dämmerung und die dazu gehörige Deklination der Sonne für:

Drontheim $\varphi = 63°25'48''$; Hamburg $\varphi = 53°31'46''$; Neapel $\varphi = 40°\,50'\,15''$



3.) Es seien a_1, b_1, c_1 die Mittellinien im sphärischen Dreieck, ε der sphärische Exzess, dann gilt die zu beweisende Formel

$$\cos\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\cos a_1}{\cos\frac{a}{2}} = \frac{\cos b_1}{\cos\frac{b}{2}} = \frac{\cos c_1}{\cos\frac{c}{2}}$$



4.) Sind a und b die beiden Abschnitte auf einem durch P gehenden grössten Kreis zwischen P und den Schnittpunkten mit einem gegebenen kleinen Kreis der Kugel, so ist das Produkt

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{b}{2} = \text{constans}$$

für alle diese grössten Kreise. Beweis? – Wie lautet ferner der dazu polar entsprechende Satz?

13. XI. 1911. **Trigonometrie.** №: 1.

I. Goniometrie.

1. Winkelmessung.

Ein rechter Winkel = 90° (Grad), 1° = 60′ (Minuten), 1′ = 60″ (Sekunden)
oder (nicht gebräuchlich):
ein rechter Winkel = 100 Centesimalgrade,
1 Centesimalgrad = 100 Centesimalminuten, 1 Centesimalminute = 100 Centesimalsek.
Oder (in der Analysis):
Bogenmass = Verhältnis des Kreisbogens zum Radius.

Umrechnung.

Bogenmass	Grade	Minuten	Sekunden
α	$\alpha\rho^{\circ} = \alpha \cdot \frac{180}{\pi}$	$\alpha\rho' = \alpha \frac{180 \cdot 60}{\pi}$	$\alpha\rho'' = \alpha \frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi}$

Dabei ist

$\pi = 3{,}14159265..$ $\rho^{\circ} = 57{,}^{\circ}296$ $\rho' = 3437{,}'25$ $\rho'' = 206264{,}''8$

$\log \pi = 0{,}49714987..$ $\log \rho^{\circ} = 1{,}75812$ $\log \rho' = 3{,}53627$ $\log \rho'' = 5{,}3144251$

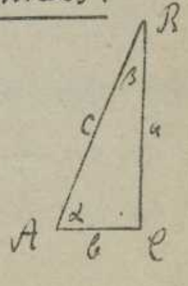
Der Centriwinkel, dessen zugehöriger Bogen dem Radius gleich ist, ist:

$$57{,}^{\circ}296 = 57^{\circ}\, 17'\, 44{,}''8 .$$

Der Winkel $g^{\circ}\, m'\, s''$ ist im Bogenmass

$$\alpha = \frac{g}{\rho^{\circ}} + \frac{m}{\rho'} + \frac{s}{\rho''} .$$

2. Trigonometrische Funktionen des spitzen Winkels.



Im rechtwinkligen Dreieck ist:

$$\sin \alpha = \frac{\text{gegenüberliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{anliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c} .$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{gegenüberliegende Kathete}}{\text{anliegende Kathete}} = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{anliegende Kathete}}{\text{gegenüberliegende Kathete}} = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}\,, \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

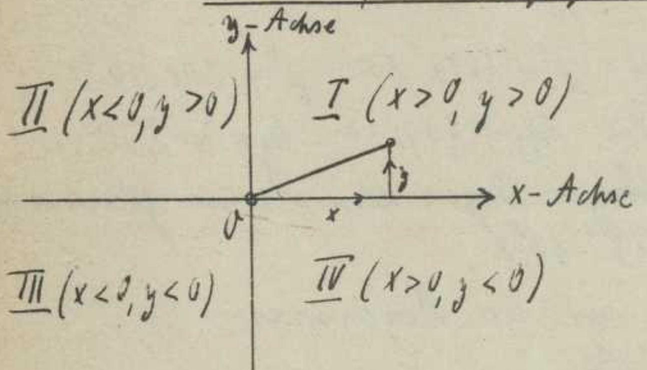
Die Funktionen (sinus, tangens, secans) eines Winkels α sind gleich den Kofunktionen (cosinus, cotangens, cosecans) des Komplementwinkels $\beta = 90^\circ - \alpha$.

Aus dem Pythagoreischen Lehrsatz $a^2 + b^2 = c^2$ ergeben sich Formeln, die durch irgend eine der trigonometrischen Funktionen alle übrigen ausdrücken; z. B. ist

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

also $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}\,,\quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\,,\quad \cot\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$

3. Winkel, welche größer als 90° sind.



Die Werte der trigonometrischen Funktionen ergeben sich durch Einführung eines rechtwinkligen Achsensystems, wobei in den vier Quadranten

	I	II	III	IV
x	>0	<0	<0	>0
y	>0	>0	<0	<0

ist, und nunmehr wird für jeden Winkel gesetzt:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}\,,\quad \cos\alpha = \frac{x}{r}\,,\quad \tan\alpha = \frac{y}{r}\,,\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}\,.$$

Durch Konstruktion folgt nun sofort:

$\sin(90^\circ+\alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90^\circ+\alpha) = -\sin\alpha$, $\tang(90^\circ+\alpha) = -\cot\alpha$, $\cot(90^\circ+\alpha) = -\tang\alpha$
$\sin(180^\circ+\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(180^\circ+\alpha) = -\cos\alpha$, $\tang(180^\circ+\alpha) = \tang\alpha$, $\cot(180^\circ+\alpha) = \cot\alpha$
$\sin(270^\circ+\alpha) = -\cos\alpha$, $\cos(270^\circ+\alpha) = \sin\alpha$, $\tang(270^\circ+\alpha) = -\cot\alpha$, $\cot(270^\circ+\alpha) = -\tang\alpha$
und $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\tang(-\alpha) = -\tang\alpha$, $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

4. Additionstheoreme.

Durch Konstruktion (zweimalige senkrechte Projektion) findet man:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

und hieraus durch Division:

$$\tang(\alpha \pm \beta) = \frac{\tang\alpha \pm \tang\beta}{1 \mp \tang\alpha \cdot \tang\beta}, \quad \cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$$

Hieraus folgt im Speziellen:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

und daher:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \tang\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Die trigonometrischen Funktionen von α können durch $\tang\frac{\alpha}{2}$ rational ausgedrückt werden:

$$\sin\alpha = \frac{2\tg\frac{\alpha}{2}}{1+\tg^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1-\tang^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tang^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \tang\alpha = \frac{2\tang\frac{\alpha}{2}}{1-\tang^2\frac{\alpha}{2}}$$

Aus den Additionstheoremen folgt auch die Verwandlung der Summen in Produkte (prosthaphäretische Methode!)

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

Durch Berechnung der Projektionen eines regulären Polygonzuges kann man direkt finden:

$$\sin\alpha + \sin(\alpha+\varphi) + \sin(\alpha+2\varphi) + \dots + \sin(\alpha+(n-1)\varphi) = \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \cdot \sin\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\varphi\right)$$

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\varphi) + \cos(\alpha+2\varphi) + \cdots + \cos(\alpha+(n-1)\varphi) = \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \cos\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\varphi\right)$$

5. Die Moivre'sche Formel und ihre Anwendungen.

Die Additionsformeln für sinus und cosinus können mit Hilfe der imaginären Einheit $i=\sqrt{-1}$ so zusammengefaßt werden:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta),$$

denn man erhält auf der linken Seite durch Ausmultiplizieren:

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

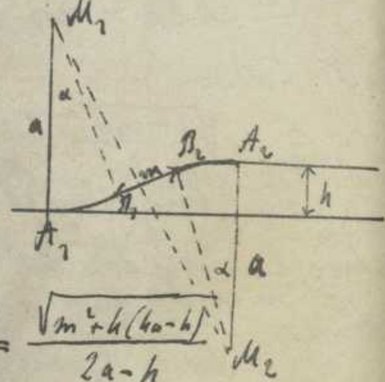
Es folgt weiter:

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)(\cos\gamma+i\sin\gamma) = (\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta))(\cos\gamma+i\sin\gamma) = \cos(\alpha+\beta+\gamma)+i\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$

u. s. fort; daher auch

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

Aufgaben.



1) Die „Geleisverschwenkung" h berechnet sich aus a, α und dem geradlinigen Mittelstück m zu

(1) $h = 4a\sin^2\frac{\alpha}{2} + m\sin\alpha$.

Umgekehrt ist bei gegebenen m, a und h

(2) $\alpha = \sphericalangle M_2M_1A_1 - \sphericalangle M_2M_1B_1$; $\tan(\sphericalangle M_2M_1A_1) = \frac{\sqrt{m^2+h(4a-h)}}{2a-h}$

$\tan(\sphericalangle M_2M_1B_1) = \frac{m}{2a}$.

Man kann aber auch $\tan\alpha$ (zunächst $\tan\frac{\alpha}{2}$) aus (1) berechnen. Nachzuweisen ist die Gleichheit der beiden Werte von $\tan\alpha$. — Man berechne ferner h aus $a = 300$, $m = 40$, $\alpha = 4^\circ$ und aus dem gefundenen h rückwärts α zur Probe.

2) Man weise zuerst nach:

$\sin(\alpha_1+\alpha_2) = (\tan\alpha_1 + \tan\alpha_2)\cos\alpha_1\cos\alpha_2$; $\cos(\alpha_1+\alpha_2) = (1 - \tan\alpha_1\tan\alpha_2)\cos\alpha_1\cos\alpha_2$

$\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = (\tan\alpha_1 + \tan\alpha_2 + \tan\alpha_3 - \tan\alpha_1\tan\alpha_2\tan\alpha_3)\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3$

$\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = \{1 - (\tan\alpha_1\tan\alpha_2 + \tan\alpha_2\tan\alpha_3 + \tan\alpha_3\tan\alpha_1)\}\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3$

Hieraus kann die allgemeine Formel erschlossen werden; $\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n) = ?$ $\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n) = ?$

(Die Gestalt ist leicht zu erkennen, wenn man noch die Rechn. für $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ durchführt.

20. XI. 1911. **Trigonometrie:** № 2

Fortsetzung der Goniometrie.

(Weitere Anwendungen der Moivre'schen Formel.)

Durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + b^n,$$

wobei zu beachten ist:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} = \binom{n}{n-k},$$

auf

$$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$$

erhält man

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \cdots$$
$$\sin n\varphi = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \cdots$$

Beachtet man ferner

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left\{(\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos\varphi - i\sin\varphi)\right\}$$
$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left\{(\cos\varphi + i\sin\varphi) - (\cos\varphi - i\sin\varphi)\right\},$$

so erhält man

$$\cos^{2k}\varphi = \frac{1}{2^{2k-1}}\left\{\cos 2k\varphi + \binom{2k}{1}\cos(2k-2)\varphi + \cdots + \frac{1}{2}\binom{2k}{k}\right\}$$
$$\cos^{2k+1}\varphi = \frac{1}{2^{2k}}\left\{\cos(2k+1)\varphi + \binom{2k+1}{1}\cos(2k-1)\varphi + \cdots + \binom{2k+1}{k}\cos\varphi\right\}$$

und

$$\sin^{2k}\varphi = \frac{(-1)^k}{2^{2k-1}}\left\{\cos 2k\varphi - \binom{2k}{1}\cos(2k-2)\varphi + \cdots + \frac{(-1)^k}{2}\binom{2k}{k}\right\}$$
$$\sin^{2k+1}\varphi = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\left\{\sin(2k+1)\varphi - \binom{2k+1}{1}\sin(2k-1)\varphi + \cdots + (-1)^k\binom{2k+1}{k}\sin\varphi\right\}$$

6. Reihenentwicklungen.

Eine geometrische Betrachtung zeigt, dass

$$\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)_{\varphi=0} = 1$$ ist; (φ in Bogenmass gemessen)

ferner ist ebenfalls $\left(\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\varphi}\right)_{\varphi=0} = 1$ und $\left(\frac{\sin a\varphi}{\varphi}\right)_{\varphi=0} = a = \left(\frac{\operatorname{tang} a\varphi}{\varphi}\right)_{\varphi=0}$

Dividiert man in den Formeln für $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$ beide Seiten durch $\cos^n\varphi$, so erhält man rechts Potenzreihen in $\operatorname{tang}\varphi$. Setzt man $\varphi = \frac{x}{n}$ und führt die Grenzübergänge für $n = \infty$ aus, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots \end{aligned}\right\} x \text{ Bogenmass!}$$

Setzt man

$$1 + ix + \frac{(ix)^2}{1\cdot 2} + \frac{(ix)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots = \mathcal{E}(ix),$$

so ist

$$\cos x + i\sin x = \mathcal{E}(ix)$$

und dem Satz

$$(\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) = \cos(x+y) + i\sin(x+y)$$

entspricht die leicht zu bestätigende Gleichung

$$\mathcal{E}(u)\,\mathcal{E}(v) = \mathcal{E}(u+v).$$

7. <u>Maskelyne'sche Regel</u>.

Aus den Reihenentwicklungen folgt, dass

$$\left.\begin{aligned} \log\sin\alpha &= \log\alpha + \frac{1}{3}\log\cos\alpha \\ \log\operatorname{tang}\alpha &= \log\alpha - \frac{2}{3}\log\cos\alpha \end{aligned}\right\} \alpha \text{ Bogenmass}$$

oder (α in Graden gemessen)

$$\log\sin\alpha^0 = \log\alpha - \log\rho^0 + \frac{1}{3}\log\cos\alpha$$

$$\log\cos\alpha^0 = \log\alpha - \log\rho^0 - \frac{2}{3}\log\cos\alpha$$

eine Annäherung bis zur dritten Ordnung gibt, also bei der Interpolation im Falle kleiner Winkel, wo die Interpolation durch die Differenzen versagt, gut zu verwenden ist.

Bis $\alpha = 6{,}^{\circ}86$ findet noch Übereinstimmung bis zur fünften Dezimale statt.

8. Produktentwicklung.

Beachtet man die Nullstellen

$$\varphi = 0,\ \pm\frac{\pi}{n},\ \pm\frac{2\pi}{n},\ \ldots \left[\frac{n-1}{2}\right]\frac{\pi}{n}$$

($\left[\frac{n-1}{2}\right]$ grösste ganze Zahl bis $\frac{n-1}{2}$ einschliesslich)

von $\sin n\varphi$, so ergibt sich aus der bereits zur Potenzreihenentwicklung verwendeten Darstellung von $\sin n\varphi$ die Produktformel:

$$\frac{\sin n\varphi}{\cos^n\varphi} = n\,\mathrm{tang}\,\varphi\left(1-\frac{\mathrm{tang}^2\varphi}{\mathrm{tang}^2\frac{\pi}{n}}\right)\left(1-\frac{\mathrm{tang}^2\varphi}{\mathrm{tang}^2\frac{2\pi}{n}}\right)\cdots\left(1-\frac{\mathrm{tang}^2\varphi}{\mathrm{tang}^2\left[\frac{n-1}{2}\right]\frac{\pi}{n}}\right)$$

und durch Grenzübergang (zuerst $n\varphi = x$, dann bei festgehaltenem x, $n = \infty$)

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

Aufgaben.

1) Was ist das zweite Glied der Reihenentwicklung

$$\frac{3\sin x}{1+2\cos x} = x + ?$$

2) Nachzuweisen für $\alpha+\beta+\gamma = 180^{\circ}$:

$$\mathrm{tang}\,\alpha + \mathrm{tang}\,\beta + \mathrm{tang}\,\gamma = \mathrm{tang}\,\alpha\cdot\mathrm{tang}\,\beta\cdot\mathrm{tang}\,\gamma$$

$$\cos 2k\alpha + \cos 2k\beta + \cos 2k\gamma = (\quad) + (\quad)\cos k\alpha\,\cos k\beta\,\cos k\gamma.$$

Die Klammern ( ), ( ) sind einfache Zahlen.

3) Wie gross ist der Winkel $\mathrm{arc\,tg}\,x + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{1-x}{1+x}$?

4) Darstellung von $\sin\left(\frac{\mathrm{arc}\cos x}{2}\right)$, $\mathrm{tg}(2\,\mathrm{arc\,tg}\,x)$ durch x.

27. XI. 11. **Trigonometrie.** № 3.

Fortsetzung der Goniometrie.

Nachtrag zur Produktentwicklung.

Aus

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{x}{3\pi}\right)^2\right)\cdots.$$

lässt sich leicht nachweisen

$$\sin(\pi - x) = \sin x,$$

ferner die Wallis'sche Formel

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 7}{6\cdot 6}\cdots$$

9. Reihenentwicklung von arc tg x.

Die Formel

$$\frac{\sin nx}{n\cos^n x} = \operatorname{tg} x - \frac{1}{n}\binom{n}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{n}\binom{n}{5}\operatorname{tg}^5 x - \cdots$$

gibt für $n = 0$, $\operatorname{tg} x = u$:

$$x = \operatorname{arc}\operatorname{tg} u = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + - \cdots$$

woraus für $u = 1$ folgt:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \quad \text{(Reihe von Leibniz.)}$$

Die Zahl π ist mit grosser Annäherung schnell zu berechnen aus der Formel von Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{239}$$

$$= 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - + \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 + \cdots\right)$$

10. Auflösung einiger trigonometrischer Gleichungen.

Soll φ reell bestimmbar sein aus

$$a\cos\varphi + b\sin\varphi = c,$$

so muss $a^2 + b^2 - c^2 > 0$ sein. Man berechnet β aus

$$\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \left(\sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

und ψ aus

$$\cos\psi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \;;$$

dann sind die beiden Lösungen

$$\varphi_1 = \beta + \psi, \qquad \varphi_2 = \beta - \psi.$$

Ist gegeben $\qquad \varphi + \psi = \alpha$

$$\sin\varphi : \sin\psi = l : m,$$

so berechnet man λ aus $\frac{l}{m} = \tan\lambda$

und $\varphi - \psi$ aus

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) = \operatorname{tg}(\lambda - 45^\circ)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Aus $\frac{1}{2}(\varphi-\psi)$ und $\frac{1}{2}(\varphi+\psi) = \frac{\alpha}{2}$ sind dann φ und ψ bestimmt.

11. Auflösung quadratischer Gleichungen auf trigonometrischem Weg.

$$x^2 - 2ax + b = 0$$

Sind die Wurzeln reell, also $a^2 - b > 0$, so setzt man,

wenn $b > 0$: $\qquad x_1 = \sqrt{b}\operatorname{tg}\varphi, \quad x_2 = \sqrt{b}\operatorname{ctg}\varphi$

$$\sin 2\varphi = \frac{\sqrt{b}}{a} \;;$$

wenn $b < 0$: $\qquad x_1 = -\sqrt{-b}\operatorname{tg}\varphi, \quad x_2 = \sqrt{-b}\operatorname{ctg}\varphi$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\sqrt{-b}}{a}.$$

Sind die Wurzeln konjugiert imaginär

$$x_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$x_2 = r(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

so sind r und φ bestimmt aus

$$r = \sqrt{b}\,, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{b}}.$$

Aufgaben.

1) Man berechne φ aus:

$$2 \cos\varphi + 3 \sin\varphi = 10 \qquad \text{Probe!}$$

2) Gegeben $\varphi + \psi = 50^\circ$

und $$\log \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = 0{,}47065.$$

Wie gross sind die Winkel φ und ψ? Probe!

3) Man berechne u und $\varphi = \operatorname{arc\,tg} u$ aus

$$\operatorname{arc\,tg} u + \operatorname{arc\,tg} 2u + \operatorname{arc\,tg} 3u = 180^\circ. \qquad \text{Probe!}$$

4. XII. 1911. **Trigonometrie.** № 4.

12. Trigonometrische Auflösung der Gleichung 3. Grades: $x^3 + px + q = 0$.

Die cardanische Formel lautet $x_1 = u + v$, dabei ist:

$$u = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad v = \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Ergeben sich für u und v reelle Werte, so sind die beiden andern Wurzeln x_2 und x_3 konjugiert imaginär. Es ist:

$$\begin{aligned} x_2 &= \varepsilon u + \varepsilon^2 v = \varepsilon u + \varepsilon^{-1} v \\ x_3 &= \varepsilon^2 u + \varepsilon v = \varepsilon^{-1} u + \varepsilon v \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon &= \tfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \\ \varepsilon^2 = \varepsilon^{-1} &= \tfrac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) \end{aligned} \right\}$$

Ist x_1 allein reell $\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0\right)$, so sind für die trigonometrische Auflösung zwei Fälle zu unterscheiden:

a) $p > 0$; dann setzt man:

$$\cot \alpha = \frac{\frac{q}{2}}{\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad \operatorname{tang} \lambda = \sqrt[3]{\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}}$$

und erhält

$$u = \left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tang} \lambda, \quad v = -\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{cotg} \lambda,$$

$$x_1 = -2\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{cotg} 2\lambda,$$

$$\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = \left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \operatorname{cotg} 2\lambda \pm \frac{i\sqrt{3}}{\sin 2\lambda} \right\}$$

b) $p < 0$; dann setzt man

$$\sin \beta = \frac{\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{q}{2}}, \quad \operatorname{tg} \mu = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}$$

und erhält

$$u = -\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \mu, \quad v = -\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cot \mu,$$

$$x_1 = -2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sin 2\mu}$$

$$\left.\begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\} = -\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{\sin 2\mu} \mp i\sqrt{3} \cot 2\mu \right\}$$

Irreduzibler Fall $\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0\right.$, alle drei Wurzeln reell).

Die Gleichung $x^3 + px + q = 0$ lässt sich dann transformieren in

$$4y^3 - 3y - \cos\alpha = 0,$$

wenn man setzt: $x = 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}} y, \quad \cos\alpha = \frac{-\frac{q}{2}}{\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}.$

Die drei Wurzeln sind:

$$x_1 = 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\frac{\alpha}{3}$$

$$x_2 = 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\alpha}{3} + 120^\circ\right)$$

$$x_3 = 2\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(120^\circ - \frac{\alpha}{3}\right).$$

Zusatz: Auflösung der Gleichung vierten Grades nach der Descartes'schen Methode. Man setzt:

$$(x^4 + ax^2 + bx + c) = (x^2 + ux + v)(x^2 - ux + w)$$

und findet für u die Gleichung (Resolvente)

$$u^6 + 2au^4 + (a^2 - 4c)u^2 - b^2 = 0;$$

bezeichnet man ihre Wurzeln mit u_1^2, u_2^2, u_3^2 und wählt die Vorzeichen so, dass $u_1 u_2 u_3 = b$ wird, berücksichtigt man ferner

$$v = \frac{1}{2}\left(a + u^2 - \frac{b}{u}\right), \quad w = \frac{1}{2}\left(a + u^2 + \frac{b}{u}\right),$$

so kommt

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-u_1 \pm (u_2 - u_3)}{2} \quad (\text{Wurzeln von } x^2 + ux + v = 0.)$$

$$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = \frac{u_1 \pm (u_2 - u_3)}{2} \quad (\text{Wurzeln von } x^2 - ux + w = 0)$$

Aufgaben.

1) Auflösung der Gleichung: $x^3 - 3{,}25 \cdot x + 1{,}5 = 0$

2) Man bestimme x durch Anwendung goniometrischer Formeln aus:

$$2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2x+1} = \frac{\pi}{4}.$$

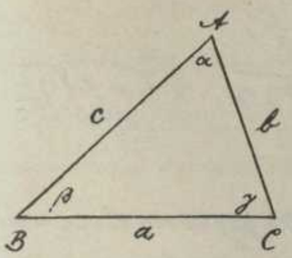
3) Für $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ zu zeigen, dass

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta = 4 \sin\frac{\alpha+\delta}{2} \sin\frac{\beta+\delta}{2} \sin\frac{\gamma+\delta}{2}$$

ist.

11. $\overline{\text{XII}}$. 1911. **Trigonometrie.** № 5.

Berechnung des Dreiecks.



Aus den Gleichungen

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$$
$$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma$$
$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$

folgt durch Elimination von $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ der

Cosinussatz
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Bequemer für die Berechnung eines Winkels aus den Seiten ist die daraus folgende Formel

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \quad \text{in der } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Sinussatz. Es ist
$$h_1 = b\sin\gamma = c\sin\beta,$$
$$h_2 = c\sin\alpha = a\sin\gamma,$$
$$h_3 = a\sin\beta = b\sin\alpha,$$

woraus folgt
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad (\text{Sinussatz}).$$

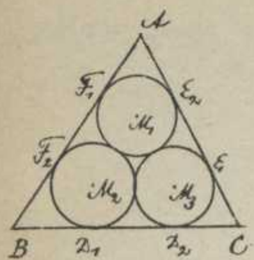
Dies kann auch gewonnen werden aus
$$a = 2r\sin\alpha, \quad b = 2r\sin\beta, \quad c = 2r\sin\gamma,$$
worin r der Radius des umbeschriebenen Kreises ist.

Nepersche Formeln.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}, \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}, \quad \frac{c+a}{c-a} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}.$$

(Sie dienen zur Berechnung der beiden übrigen Winkel, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind.)

Zusatz: Lösung des Malfatti'schen Problems, die drei Kreise zu bestimmen, die einander und je zwei Seiten des Dreiecks berühren.



Es seien r_1, r_2, r_3 die Radien der drei Kreise, ferner

$$AE_2 = AF_1 = x, \quad BD_1 = BF_2 = y, \quad CD_2 = CE_1 = z,$$

dann ist

$$r_1 = x \cdot tg\frac{\alpha}{2}, \quad r_2 = y\, tg\frac{\beta}{2}, \quad r_3 = z\, tg\frac{\gamma}{2},$$

$$D_1 D_2 = \sqrt{(r_2+r_3)^2-(r_2-r_3)^2} = 2\sqrt{r_2 r_3}, \quad E_1 E_2 = 2\sqrt{r_1 r_3}, \quad F_1 F_2 = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

also

$$a = y+z+2\sqrt{yz}\cdot\sqrt{tg\frac{\beta}{2}\cdot tg\frac{\gamma}{2}}.$$

Führt man jetzt an Stelle von a, b, c die Winkel λ, μ, ν ein, die gegeben sind durch

$$a^2 = s\cdot\sin^2\lambda, \quad b = s\cdot\sin^2\mu, \quad c = s\cdot\sin^2\nu \qquad \left(s = \frac{a+b+c}{2}\right)$$

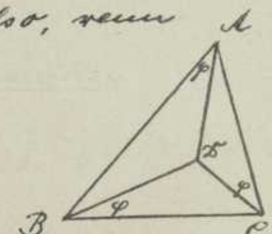
und an Stelle von x, y, z die Winkel φ, χ, ψ, definiert durch

$$x = s\cdot\sin^2\varphi, \quad y = s\cdot\sin^2\chi, \quad z = s\cdot\sin^2\psi,$$

so folgt leicht $\quad \sin^2\lambda = \sin^2\chi + \sin^2\psi + 2\sin\chi\sin\psi\cos\lambda$

und hieraus $\psi+\chi=\lambda$; ebenso $\psi+\varphi=\mu$, $\chi+\varphi=\nu$, also, wenn $\lambda+\mu+\nu = 2\sigma$ gesetzt wird,

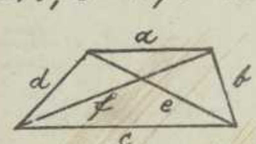
$$\varphi=\sigma-\lambda, \quad \chi=\sigma-\mu, \quad \psi=\sigma-\nu.$$



<u>Aufgaben.</u>

1) $ctg\,\varphi$ zu finden aus der Forderung, daß die drei Geraden AD, BD, CD durch einen Punkt gehen und die gleiche Neigung $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CBD = \sphericalangle ACD = \varphi$ haben gegen entsprechende Seiten. (Wiederholte Anwendung des Sinussatzes; die Schlußformel darf nur die Winkel des Dreiecks enthalten.)

2) Berechnung von α, β, γ und Flächeninhalt aus $a=13$, $b=14$, $c=15$.



3) Es soll (durch Anwendung des Cosinussatzes) bewiesen werden, daß im Paralleltrapez

$$e^2+f^2 = b^2+d^2+2ac$$

ist.

18. XII. 1911. **Trigonometrie.** № 6.

Weitere Formeln für das Dreieck.

Mollweide'sche Gleichungen.

$$(b+c)\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = a\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\,; \quad (b-c)\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = a\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$$

nebst den daraus durch Vertauschung entstehenden.

Weitere Stücke, ausgedrückt durch die Seiten.

Radius des einbeschriebenen Kreises: $\rho = (s-a)\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

" der anbeschriebenen Kreise: $\rho_a = s\cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{(s-a)}}$, $\rho_b = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-c)}{(s-b)}}$

$$\rho_c = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{(s-c)}}.$$

" des umbeschriebenen Kreises: $r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{abc}{4\Delta} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$.

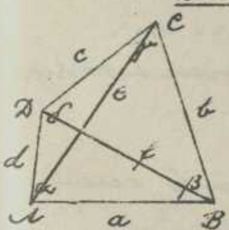
Inhalt: $\Delta = \frac{bc\sin\alpha}{2} = \rho s = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Winkelhalbierende: $w_a^{\,2} = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$

Transversale: $t_a^{\,2} = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$

Höhe: $h_a = \frac{2\Delta}{a} = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Das Viereck.



Aus $f^2 = a^2+d^2-2ad\cos\alpha = b^2+c^2-2bc\cos\gamma$

und dem Inhalt

$$J = \frac{1}{2}(ad\sin\alpha + bc\sin\gamma)$$

findet man, wenn s die halbe Seitensumme ist:

$$J^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

Unter allen Vierecken mit gegebenen Seiten hat das dem Kreis eingeschriebene Viereck (Sehnenviereck), in dem $\alpha+\gamma = 180°$ ist, den größten Inhalt.

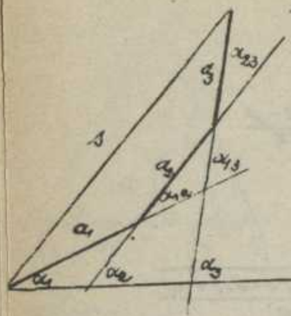
Für das Sehnenviereck ergibt sich noch

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}, \qquad ef = ac+bd \text{ (Ptolemäischer Lehrsatz).}$$

Radius des umbeschriebenen Kreises

$$r = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}.$$

Polygonzüge und Polygone.



Sind $a_1\, a_2 \dots a_n$ die Seiten eines offenen Polygonzuges, $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ ihre Neigungswinkel gegen eine Achse, $\alpha_{ik} = \alpha_k - \alpha_i$ die Neigungswinkel je zweier Seiten, also $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{34} \dots$ im besondern die Außenwinkel, so ergibt sich für die Länge der Schlußlinie

$$s^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2(a_1 a_2 \cos\alpha_{12} + a_1 a_3 \cos\alpha_{13} + \dots + a_1 a_n \cos\alpha_{1n}$$
$$+ a_2 a_3 \cos\alpha_{23} + \dots + a_2 a_n \cos\alpha_{2n}$$
$$\vdots$$
$$+ a_{n-1} a_n \cos\alpha_{n-1,n})$$

und für den Inhalt des von $a_1, a_2 \dots a_n$ und s begrenzten Gebietes

$$J = \frac{1}{2}(a_1 a_2 \sin\alpha_{12} \dots + a_1 a_n \sin\alpha_{1n} + a_2 a_3 \sin\alpha_{23} + \dots + a_2 a_n \sin\alpha_{2n} + \dots + a_{n-1} a_n \sin\alpha_{n-1,n})$$

Ein n-Eck ist durch $2n-3$ unabhängige Stücke bestimmt.

Aufgaben.

1) Wie drückt sich der Dreiecksinhalt und die Winkel (man berechne z. B. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$) aus durch die drei Höhen h_1, h_2, h_3?

2) Ist H der Höhenschnittpunkt, AH, HD die Abschnitte von h_1, entsprechend BH, HE und CH, HF, so ist

$$AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF. \quad \text{Beweis!}$$

3) Die fehlenden Winkel und den Flächeninhalt eines Dreiecks zu berechnen aus

$$a = 18, \quad b = 24, \quad \alpha = 70^\circ.$$

(NB: Da der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben ist, gibt es zwei Lösungen!)

S. I. 1912. **Trigonometrie.** № 7.

Differentialformeln.

Die Formeln geben an, wie sich gewisse Größen ändern, wenn die, durch die sie bestimmt sind, kleine Änderungen erleiden, und wenn man die Quadrate aller Änderungen vernachlässigen kann.

Im rechtwinkligen Dreieck folgt z.B. aus

$$c^2 = a^2 + b^2$$

und

$$(c+\Delta c)^2 = (a+\Delta a)^2 + (b+\Delta b)^2 :$$

$$\Delta c = \frac{a\Delta a + b\Delta b}{c} \qquad (c = \sqrt{a^2+b^2})$$

Für die trigonometrischen Funktionen ist

$$\Delta \sin\varphi = \cos\varphi\,\Delta\varphi, \qquad \Delta\cos\varphi = -\sin\varphi\,\Delta\varphi, \quad \Delta \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta\varphi}{\cos^2\varphi}, \quad \Delta\cot\varphi = \frac{-\Delta\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

$\Delta\varphi$ ist hierbei im Bogenmaß zu rechnen; ist statt dessen Winkelmaß in Sekunden gegeben ($\Delta\varphi''$), so ist $\Delta\varphi$ zu ersetzen durch

$$\frac{\Delta\varphi''}{\varrho''} = \Delta\varphi''\,\mathrm{arc}\,1''$$

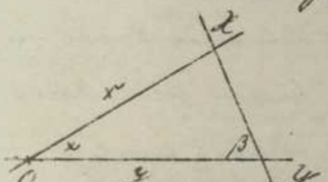
Im schiefwinkligen Dreieck hat man

$$\frac{\Delta b}{b} - \Delta\beta\cot\beta = \frac{\Delta a}{a} - \Delta\alpha\cot\alpha.$$

$$\Delta a = \Delta b\cos\gamma + \Delta c\cos\beta + \frac{bc}{a}\sin\alpha\,\Delta\alpha.$$

Flächenteilungsaufgaben.

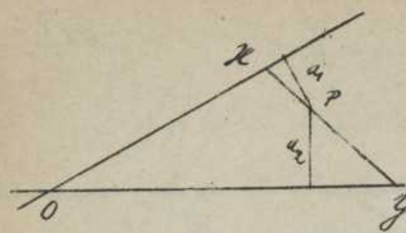
1, Eine Gerade gegebener Richtung so zu legen, daß das Dreieck OXY einen vorgeschriebenen Inhalt F bekommt.



Lösung:

$$OX = x = \sqrt{\frac{2F\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}}, \quad OY = y = \sqrt{\frac{2F\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}.$$

2, Durch einen Punkt P, der von g_1 und g_2 die Abstände a_1 und a_2 hat, eine Gerade so zu legen, daß OXY einen vorgeschriebenen Inhalt F erhält.



Lösung:

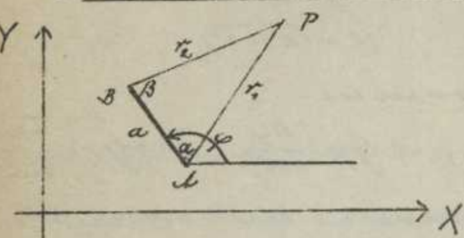
$$OX = x = \frac{F}{a_1}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{2a_1a_2}{F\sin\alpha}}\right)$$

$$OY = y = \frac{F}{a_2}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{2a_1a_2}{F\sin\alpha}}\right).$$

F muß größer sein als der Inhalt desjenigen Dreiecks OX_0Y_0, in dem $X_0P = PY_0$ ist.

Die Hauptaufgaben der Kleintriangulation.

1, Das Vorwärtseinschneiden:



Gegeben sind die rechtwinkligen Koordinaten x_a, y_a von A, x_b, y_b von B; beobachtet die Winkel α und β; gesucht die Koordinaten x und y des Punktes P.

Zunächst sind a und φ zu bestimmen aus

$$x_b - x_a = a\cos\varphi \qquad y_b - y_a = a\sin\varphi.$$

Dann nach dem Sinussatz

$$r_1 = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}\sin\beta \quad r_2 = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}\sin\alpha.$$

Ferner ist (AP), der Winkel, den die Strecke AP mit der positiven x-Achse bildet, $= \varphi - \alpha$, und entsprechend $(BP) = \beta + \varphi - 180°$. Demnach ist

$$x = x_a + r_1\cos(AP) = x_a + \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\cos(\varphi-\alpha)$$

$$y = y_a + r_1\sin(AP) = y_a + \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\sin(\varphi-\alpha)$$

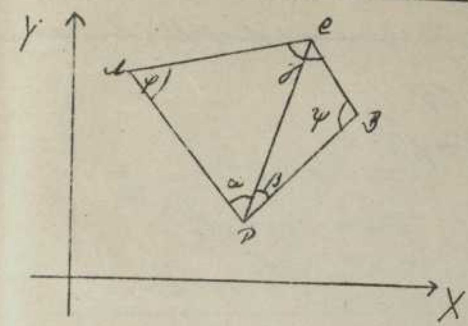
Es ist aber auch

$$x = x_b + r_2\cos(BP) = x_b - \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\cos(\beta+\varphi)$$

$$y = y_b + r_2\sin(BP) = y_b - \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\sin(\beta+\varphi)$$

Um eine Probe zu haben, berechnet man x und y doppelt.

2) Rückwärtseinschneiden (Pothenotsche Aufgabe):



Gegeben sind die Koordinaten $x_a\, y_a$, $x_b\, y_b$, $x_c\, y_c$; beobachtet die Winkel $\alpha = \sphericalangle APC$, $\beta = \sphericalangle CPB$ von P aus; hieraus ist die Lage des Punktes P zu bestimmen.

Lösung:

Man überzeugt sich zunächst, auf welcher Seite des Linienzuges ACB der Punkt P liegt d.h. welchen Umlauf die Punkte ACBP und die eingeschlossene Figur bilden. (Das ist durch Beobachtung unmittelbar festzustellen.)

Dann berechnet man a, b und γ (letzteres aus (AC) und (BC)).

Um φ und ψ zu finden, hat man

$$\varphi + \psi = 360^\circ - \alpha - \beta - \gamma \qquad (A)$$

$$r = \frac{a}{\sin\alpha} \sin\varphi = \frac{b}{\sin\beta} \sin\psi \quad \text{d.h.} \quad \frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha};$$

setzt man jetzt

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha},$$

so wird

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \operatorname{cotg}(45^\circ + \lambda) \qquad (B)$$

Proben:

$$\alpha + \beta + \gamma + \varphi + \psi = 360^\circ$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} \sin\varphi = \frac{b}{\sin\beta} \sin\psi$$

Weiter ist

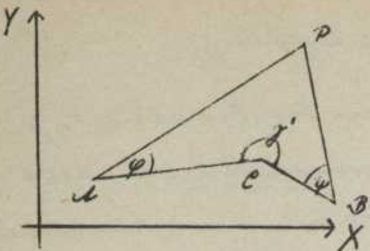
$$r_1 = \frac{a}{\sin\alpha} \sin(\alpha + \varphi) \qquad r_2 = \frac{b}{\sin\beta} \sin(\beta + \psi)$$

$$(AP) = (AC) - \varphi \qquad (BP) = (BC) + \psi$$

$$x = x_a + r_1 \cos(AP) = x_b + r_2 \cos(BP)$$

$$y = y_a + r_1 \sin(AP) = y_b + r_2 \sin(BP).$$

Liegt P auf der anderen Seite, so ist statt γ zu nehmen



$$\gamma' = 360° - \gamma.$$

Im übrigen ist die Rechnung dieselbe bis auf

$$(AP) = (AC) + \varphi$$

$$(BP) = (BC) - \psi.$$

Aufgaben:

1) Rückwärtseinschneiden.

Die Lage des Punktes P (seine Koordinaten) zu bestimmen aus

$x_a = 28\,560{,}64$ m $\qquad y_a = 9\,323{,}91$ m

$x_b = 29\,266{,}85$ m $\qquad y_b = 9\,012{,}46$ m

$x_c = 28\,946{,}79$ m $\qquad y_c = 8\,807{,}58$ m

und

$\alpha = 73°\,44'\,38''$ $\qquad \beta = 83°\,6'\,42''$.

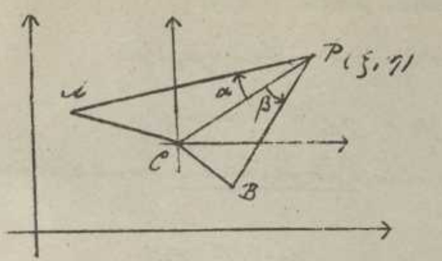
2) Ist M der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises im Dreieck, r der Radius, M, ρ Mittelpunkt und Radius des einbeschriebenen Kreises, so ist zu zeigen

$$(MM)^2 = r^2 - 2r\rho.$$

3) Im regulären n-Eck ist die Summe der Quadrate über allen Seiten und Diagonalen gleich $n^2 r^2$, wenn r der Radius des umbeschriebenen Kreises ist. Beweis?

15. I. 1912. **Trigonometrie.** №8.

Rückwärtseinschneiden nach der Methode von Runge.



Man verlegt zunächst den Koordinatenursprung nach C, sodaß A, B und P die Koordinaten haben:

$$\xi_a = x_a - x_c \qquad \xi_b = x_b - x_c \qquad \xi = x - x_c$$
$$\eta_a = y_a - y_c \qquad \eta_b = y_b - y_c \qquad \eta = y - y_c$$

Dann ist

$$\sphericalangle(CPA) = \sphericalangle(AP) - \sphericalangle(CP)$$
$$\sphericalangle(CPB) = \sphericalangle(BP) - \sphericalangle(CP).$$

Vorzeichen beachten!

(Bei unserer Figur ist $\sphericalangle(CPA)$ negativ, $\sphericalangle(CPB)$ positiv! In diesem Fall muß also mit negativem α, positivem β gerechnet werden!)

Der Ort des Punktes P ist gegeben durch

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg}(AP) - \operatorname{tg}(CP)}{1 + \operatorname{tg}(AP)\operatorname{tg}(CP)} = \frac{\frac{\eta-\eta_a}{\xi-\xi_a} - \frac{\eta}{\xi}}{1 + \frac{\eta-\eta_a}{\xi-\xi_a}\cdot\frac{\eta}{\xi}}$$

oder

$$\xi^2 + \eta^2 - \xi u_1 - \eta v_1 = 0 \qquad \begin{cases} u_1 = \xi_a - \eta_a \operatorname{ctg}\alpha \\ v_1 = \eta_a + \xi_a \operatorname{ctg}\alpha \end{cases}$$

und dazu kommt

$$\xi^2 + \eta^2 - \xi u_2 - \eta v_2 = 0 \qquad \begin{cases} u_2 = \xi_b - \eta_b \operatorname{ctg}\beta \\ v_2 = \eta_b + \xi_b \operatorname{ctg}\beta \end{cases}$$

Die beiden Kreise schneiden einander außer in C noch im gesuchten Punkt P, welcher gegeben ist durch

$$\xi = \lambda(v_2 - v_1) \qquad \eta = -\lambda(u_2 - u_1)$$

$$\lambda = \frac{u_1 v_2 - v_1 u_2}{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2}$$

Endlich wird

$$x = x_c + \xi \qquad y = y_c + \eta.$$

Für die wirkliche Berechnung nach dieser Methode verfährt man trigonometrisch:

a, b, φ_1 und φ_2 sind zu berechnen aus:

$$x_a - x_c = \xi_a = a\cos\varphi_1 \qquad x_b - x_c = \xi_b = b\cos\varphi_2$$

$$y_a - y_c = \eta_a = a\sin\varphi_1 \qquad y_b - y_c = \eta_b = b\sin\varphi_2$$

Dann bestimme man aus einer Skizze das Vorzeichen von α und β.

Weiter

$$u_1 = \xi_a - \eta_a \operatorname{ctg}\alpha = a\,\frac{\sin(\alpha-\varphi_1)}{\sin\alpha} \qquad u_2 = b\,\frac{\sin(\beta-\varphi_2)}{\sin\beta}.$$

$$v_1 = \eta_a + \xi_a \operatorname{ctg}\alpha = a\,\frac{\cos(\alpha-\varphi_1)}{\sin\alpha} \qquad v_2 = b\,\frac{\cos(\beta-\varphi_2)}{\sin\beta}$$

Hierauf die Größen ϱ und ψ aus

$$u_2 - u_1 = \varrho\cos\psi \qquad v_2 - v_1 = \varrho\sin\psi.$$

Für λ ergeben sich drei Werte (deren Gleichheit als Probe dienen kann)

$$\lambda = -\frac{a}{\varrho}\cos(\psi+\alpha-\varphi_1) = -\frac{b}{\varrho}\cos(\psi+\beta-\varphi_2) = \frac{ab\sin\psi}{\varrho}\sin(\alpha-\varphi_1-\beta+\varphi_2)$$

Endlich folgt

$$\xi = \lambda(v_2 - v_1) = \frac{ab\sin\psi}{\varrho\sin\alpha\sin\beta}\cdot\sin(\alpha-\varphi_1+\beta-\varphi_2)$$

$$\eta = -\lambda(u_2 - u_1) = -\frac{ab\cos\psi}{\varrho\sin\alpha\sin\beta}\sin(\alpha-\varphi_1+\beta-\varphi_2).$$

Aufgabe.

Die Koordinaten x, y von P aus den früheren Angaben

$x_c = 28\,940{,}74$ $\qquad y_c = 8\,807{,}58$ $\qquad \sphericalangle APC = 93°\,44'\,38''$

$x_a = 26\,500{,}64$ $\qquad y_a = 9\,323{,}41$ $\qquad \sphericalangle CPB = 83°\,6'\,42''$

$x_b = 29\,206{,}85$ $\qquad y_b = 9\,012{,}46$

zu berechnen nach der Methode von Runge.

29. I. 1912. **Trigonometrie.** № 9.

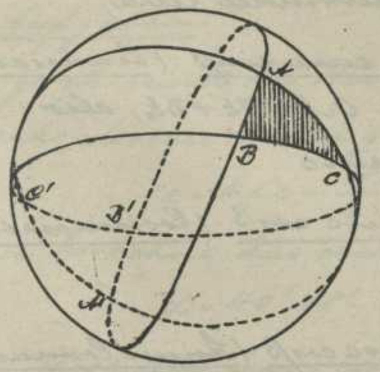
Sphärische Trigonometrie.

1. Vorbemerkungen.

Figur und Polarfigur. Errichtet man auf den Ebenen eines Dreikants (Kantenwinkel, d.h. Winkel der Ebenen: α, β, γ; Seiten, d.h. Winkel der Kanten: a, b, c) im Schnittpunkte O die Senkrechten, so entsteht ein neues Dreikant mit den Kantenwinkeln $\alpha' = \pi - a$, $\beta' = \pi - b$, $\gamma' = \pi - c$, und den Seiten $a' = \pi - \alpha$, $b' = \pi - \beta$, $c' = \pi - \gamma$; es heißt das polare Dreikant.

Die Schnittfigur eines Dreikants mit einer Kugel, die um O als Mittelpunkt beschrieben ist, bildet ein sphärisches Dreieck (Winkel α, β, γ, Seiten eigentlich Ra, Rb, Rc – wobei R der Kugelradius – doch nimmt man statt der wirklichen Seitenlängen die Centriwinkel a, b, c).

Inhalt des sphärischen Dreiecks: Der Inhalt eines sphärischen Zweiecks, dessen beide Seiten also halbe größte Kreise sind, deren Ebenen den Winkel α einschließen, ist $2R^2\alpha$.



Zu jedem Dreieck gibt es ein diametral gegenüberliegendes; drei Ebenen durch O zerlegen die Kugel in 8 einander paarweise gegenüberliegende Dreiecke. Es sei

F der Inhalt des Dreiecks $ABC = A'B'C'$
U " " " " $A'BC = AB'C'$
V " " " " $B'CA = BA'C'$
W " " " " $C'AB = CA'B'$,

so ist $F + U = 2R^2\alpha$, $F + V = 2R^2\beta$, $F + W = 2R^2\gamma$ (1)

und $F + U + V + W = \frac{1}{2}(4R^2\pi) = 2R^2\pi$ (2)

durch Vergleich von (1) und (2) folgt

$$F = R^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$$

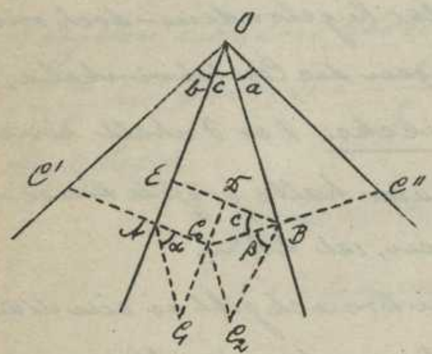
oder, wenn die Winkel in Graden gemessen sind,

$$F = \frac{R^2\pi}{180}(\alpha+\beta+\gamma-180^\circ);$$

$\varepsilon = \alpha+\beta+\gamma-180^\circ$ heißt der sphärische Excess des Dreiecks.

2. Grundformeln für das schiefwinklige sphärische Dreieck.

Es seien C, A und B drei Punkte auf den Kanten des Dreikants mit den Kantenwinkeln γ, α und β, und zwar seien A und B die Schnittpunkte der beiden Kanten mit zwei Ebenen, die durch C gehen und die entsprechenden Kanten senkrecht schneiden; diese Ebenen schneiden einander in einer Geraden durch C, welche auf der Ebene OAB senkrecht steht und sie in einem Punkte C_0 schneidet. Diese Figur wollen wir auseinanderklappen in die Ebene OAB und erhalten, wenn



$$1 = OC = OC' = OC''$$

$$AC_1 = AC' = \sin b \qquad BC_2 = BC'' = \sin a$$

$$C_0C_1 = C_0C_2 = C_0C,$$

also, da C_0AC_1 und C_0BC_2 die umgelegten Kantenwinkel sind,

$$\sin b \cdot \sin\alpha = \sin a \cdot \sin\beta \quad \text{(Sinussatz)}.$$

Wenn ferner $BE \perp OA$, $C_0D \perp BD$, so ist $OA = OE + DC_0$, also

$$\cos b = OB \cdot \cos c + BC_2 \cos\beta \sin c$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos\beta \quad \text{(Cosinussatz)}.$$

Aus $AC_0 = BE - BD$ folgt

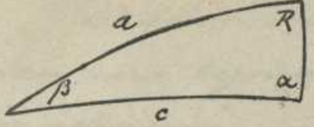
$$\sin b \cos\alpha = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos\beta \quad \text{(Sinus-Cosinussatz)}$$

Das Polardreikant liefert dazu zwei weitere Sätze:

$$\cos\beta = \sin\alpha \sin\gamma \cos b - \cos\alpha\cos\gamma \quad \text{(Cosinussatz)}.$$

$$\sin\beta \cos a = \cos\alpha \sin\gamma + \sin\alpha \cos\gamma \cos b \quad \text{(Sinus-Cosinussatz)}.$$

3. Das rechtwinklige sphärische Dreieck.



Im rechtwinkligen sphärischen Dreieck (Hypotenuse c, Katheten a und b) ist

$$\sin a = \sin c \cdot \sin \alpha \qquad \sin b = \sin c \cdot \sin \beta$$

$$\cos c = \cos a \cos b$$

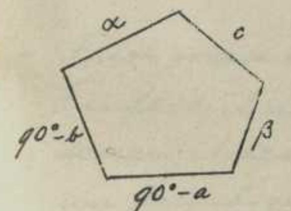
Aus $\cos \alpha = \sin \beta \cos a$ und aus $\cos \beta = \sin \alpha \cos b$ ergibt sich

$$\cos c = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta.$$

Der Sinus-Cosinussatz ergibt $\cos \alpha = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} c \qquad \cos \beta = \operatorname{tg} a \operatorname{ctg} c$
und diese Formeln nach dem Sinussatz kombiniert

$$\sin b = \operatorname{tg} a \operatorname{ctg} \alpha \qquad \sin a = \operatorname{tg} b \operatorname{ctg} \beta.$$

Alle Formeln können durch folgende Regel zusammengefaßt werden: Man bezeichne die Seiten eines Fünfecks mit α, c, β, $90°-a$, $90°-b$; dann ist der Cosinus eines Stückes gleich dem Produkt der Cotangenten der anliegenden, und gleich dem Produkt der Sinus der nichtanliegenden Stücke.



Aufgaben.

1) Wie groß sind die Winkel eines gleichseitigen sphärischen Dreiecks, dessen Seiten gleich dem Kugelradius sind?

$$\left(a = b = c = \frac{180°}{\pi}, \quad \alpha = \beta = \gamma = ?\right)$$

2) Man berechne das rechtwinklige sphärische Dreieck aus

$$\alpha = 46°48' \qquad \beta = 74°35'.$$

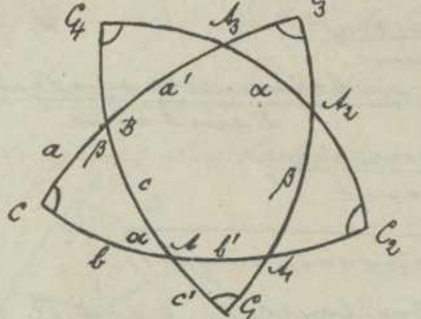
3) Man zeige, daß im rechtwinkligen sphärischen Dreieck

$$\cos^2 h = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta$$ ist. (h = Höhe auf die Seite c.)

12. II. 1912. **Trigonometrie.** № 10.

Sphärische Trigonometrie (Fortsetzung).

Die zuletzt erwähnte Regel kann man noch anschaulicher machen und begründen mit Hilfe des Gauss'schen „Pentagramma mirificum."



Verlängert man die Hypotenuse c und die Kathete b des bei C rechtwinkligen Dreiecks um

$$AC_1 = c' = 90 - c$$

und $$AA_1 = b' = 90 - b$$

so entsteht ein zweites bei C_1 rechtwinkliges Dreieck mit den Bestimmungsstücken

$$AA_1 = b' \qquad AC_1 = c' \qquad A_1C_1 = \beta' = 90° - \beta$$

$$\sphericalangle A = \alpha \qquad \sphericalangle A_1 = a' = 90° - a.$$

Fährt man in dieser Konstruktion fort, so entsteht das geschlossene Fünfeck $A\,A_1 A_2 A_3 B$. Die fünf Seiten desselben sind in fünf verschiedenen Arten Bestimmungsstücke eines rechtwinkligen Dreiecks: Ein beliebiges Stück Hypotenuse, die beiden anliegenden Komplemente der Seiten, die anschließenden dann die gegenüberliegenden Winkel.

So folgt z. B. aus

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b = \sin a' \cdot \sin b'$$

sofort $$\cos b' = \sin c \cdot \sin\beta \quad \text{oder} \quad \sin b = \sin c \sin\beta.$$

4. Der Eckensinus.

Aus dem Cosinussatz folgt

$$\sin^2 b \cdot \sin^2 c \cdot \sin^2\alpha = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cdot \cos c = D^2$$

D heißt der Eckensinus und läßt sich auch durch die drei Seiten a, b, c ausdrücken.

Benützt man nämlich

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1+\cos\alpha = \frac{\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$
$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \sin c}$$

oder, $\frac{a+b+c}{2} = s$ gesetzt,

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin s\cdot\sin(s-a)}{\sin b\cdot\sin c}$$

und

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha) = \frac{\sin b\sin c - \cos a + \cos b\cos c}{2\sin b\sin c}$$
$$= \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c},$$

so folgt

$$D = 2\sqrt{\sin s\cdot\sin(s-a)\cdot\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}.$$

Trägt man auf den Kanten des Dreikants $(a, b, c; \alpha, \beta, \gamma)$ vom Eckpunkt aus die Strecken r_1 r_2 r_3 ab, so ist das Volumen des entstehenden Tetraeders

$$V = \frac{1}{6} D\, r_1 r_2 r_3.$$

5. Der Legendre'sche Satz.

Führt man die wirklichen Seitenlängen ein im sphärischen Dreieck auf der Kugel vom Radius R, ersetzt also a, b, c durch $\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}$ und berücksichtigt nur Größen von der Ordnung $\frac{1}{R}$, so erhält man die Formeln der ebenen Trigonometrie im Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ.

Vergleicht man die Volumina des Tetraeders $OABC$ (O Kugelmittelpunkt), des vom Dreikant aus der Kugel ausgeschnittenen Körpers $= \frac{R}{3}F = \frac{R^3}{3}\varepsilon$ (ε ist der sphärische Exzess) und des Tetraeders, das man erhält, wenn man in A an die beiden Seiten die Tangenten legt und mit den Kanten OB und OC zum Schnitt bringt, so findet man

$$\frac{1}{6}R^3\sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\sin\alpha < \frac{R}{3}F < \frac{1}{6}R^3\operatorname{tg}\frac{b}{R}\operatorname{tg}\frac{c}{R}\sin\alpha.$$

Hieraus folgt: Der Inhalt F des sphärischen Dreiecks ist bis auf Größen der Ordnung $\frac{1}{R^2}$ gleich $\frac{1}{2}bc\sin\alpha$. ε ist von der Ord-

Delambre'schen Formeln noch die folgenden ableiten, die dazu dienen, aus den drei Seiten die Winkel zu berechnen:

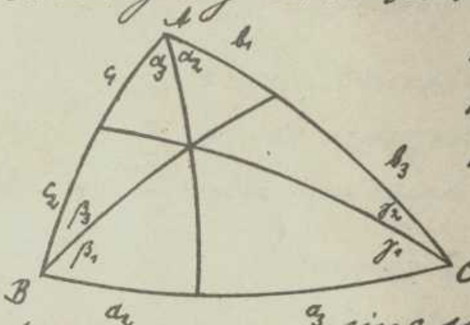
Serret'sche (oder L'Hulier'che) Formeln:

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\varepsilon}{4}\right)=\sqrt{\frac{tg\frac{s-b}{2}\cdot tg\frac{s-c}{2}}{tg\frac{s}{2}\cdot tg\frac{s-a}{2}}}\qquad(\varepsilon=\alpha+\beta+\gamma-180^\circ)$$

$$tg\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{tg\frac{s}{2}\;tg\frac{s-a}{2}\;tg\frac{s-b}{2}\;tg\frac{s-c}{2}}.$$

7. Einige Eigenschaften des sphärischen Dreiecks.

Übertragung des Satzes von Ceva:



Drei Transversalen eines sphärischen Dreiecks gehen dann und nur dann durch einen Punkt, wenn (s. Figur)

$$\frac{\sin\gamma_1\,\sin\alpha_2\,\sin\beta_3}{\sin\gamma_2\,\sin\alpha_3\,\sin\beta_1}=1$$

oder

$$\frac{\sin c_1\,\sin a_2\,\sin b_3}{\sin c_2\,\sin a_3\,\sin b_1}=1.$$

(Beide Gleichungen sind gleichzeitig erfüllt.)

Durch Anwendung dieser Formeln erkennt man, daß z. B. die Transversalen von den Ecken nach den Mitten der Gegenseiten durch einen Punkt gehen, ebenso die drei Höhen.

Der Ort der Spitze eines sphärischen Dreiecks mit der Basis BC und konstantem Inhalt ist ein Kreis (Lexellscher Kreis), der (unabhängig vom Werte des Inhalts!) durch die B und C auf der Kugel diametral gegenüberliegenden Punkte geht.

Aufgaben.

1) Die fehlenden Stücke α, γ und c des sphärischen Dreiecks zu berechnen aus

$a = 79^\circ\,20{,}5'$ $\qquad\beta = 31^\circ\,42{,}5'$ $\qquad c = 55^\circ\,32{,}5'$.

(Zwei Lösungssysteme!)

2) Welche Beziehung besteht zwischen dem Radius r des umbeschriebenen und ϱ des einbeschriebenen Kreises bei einem gleichseitigen sphärischen Dreieck?

3) Wie groß ist das Volumen ($= \frac{1}{3}$ Höhe $\times$ Grundfläche) einer regulären n-seitigen Pyramide, wenn die von der Spitze ausgehenden Kanten die Länge R haben und je zwei benachbarte dieser Kanten den Winkel a mit einander einschließen?

nung $\frac{1}{R^2}$ und, wenn man Größen der Ordnung $\frac{1}{R^4}$ vernachlässigt, gleich. $\frac{bc\sin\alpha}{2R^2}$

Nun ist

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos\alpha,$$

oder bis auf Größen von der Ordnung $\frac{1}{R^2}$ einschließlich – Größen der Ordnung $\frac{1}{R^3}$ kommen nicht vor:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha - \frac{1}{12R^2}\left(b^4 + c^4 + 6b^2c^2 - a^4 - 4bc(b^2+c^2)\cos\alpha\right)$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha - \frac{b^2c^2}{3R^2}\sin\alpha$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc(\cos\alpha + \tfrac{\varepsilon}{3}\sin\alpha).$$

Läßt man weiterhin auch Größen der Ordnung ε^2 oder $\frac{1}{R^4}$ fort, so folgt

$$\cos(\alpha - \tfrac{\varepsilon}{3}) = \cos\alpha + \tfrac{\varepsilon}{3}\sin\alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha - \tfrac{\varepsilon}{3}).$$

Dh. (Satz von Legendre). In einem sphärischen Dreieck gilt bis auf Größen von der Ordnung ε (d.i. $\frac{1}{R^2}$) einschließlich – mit Vernachlässigung von Größen der Ordnung $\frac{1}{R^4}$ – die Trigonometrie des ebenen Dreiecks mit den Seiten a, b, c und den Winkeln

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{\varepsilon}{3} \qquad \beta_1 = \beta - \frac{\varepsilon}{3} \qquad \gamma_1 = \gamma - \frac{\varepsilon}{3}.$$

(Man beachte $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha + \beta + \gamma - \varepsilon = 180°$.)

6. Vervollständigung der Formeln der sphärischen Trigonometrie.

Vorbemerkung: Die folgenden Formeln sind nur dann unbedingt zuverlässig, wenn die drei Seiten a, b, c und die drei Winkel α, β, γ kleiner als 180° sind; die eine Tatsache hat die andere zur Folge. Wären einige Stücke größer als 180°, so kämen durch die Vorzeichen der – in dem von uns betrachteten Fall immer positiv zu nehmenden – Wurzeln

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}$$

Unsicherheiten oder auch Fehler.

Aus diesen Winkelformeln und einfachen Divisionen folgen die <u>Gauss-Delambre'schen Formeln</u>:

$$\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \qquad \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \qquad \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}.$$

Sie werden zu Berechnungen nicht angewendet, dienen aber al Übergang zu den durch Divisionen leicht zu erhaltenden <u>Neperschen Formeln</u>:

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} = \operatorname{tg}\frac{c}{2}\,\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \qquad \operatorname{tg}\frac{a-b}{2} = \operatorname{tg}\frac{c}{2}\,\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\,\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\,\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}$$

welche dazu dienen, aus α, β und c die Seiten a und b, oder a a, b und γ die Winkel α und β zu berechnen.

Durch Division folgt noch

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

was der Neperschen Formel

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

der ebenen Trigonometrie entspricht.

Für den Radius ϱ des einbeschriebenen Kreises ergibt s

$$\operatorname{tg}\varrho = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}};$$

entsprechend für den Radius r des umbeschriebenen Kreises:

$$\operatorname{cotg} r = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{-\cos\sigma}} \qquad \left(\sigma = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)$$

Außer den Neperschen Formeln lassen sich aus den Gau

21. II. 1912. **Trigonometrie.** № 11.

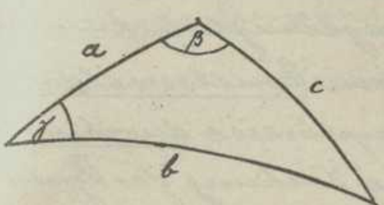
Der Lexell'sche Kreis.

Die Ecke A eines sphärischen Dreiecks, von dem die Basis BC und der Excess ε gegeben ist, beschreibt einen Kleinkreis. Es liegen nämlich die Mitten E und F der Seiten b und c aller dieser Dreiecke auf demselben Hauptkreis der Kugel, und mit diesem Kreis konzentrisch ist der Kleinkreis, welcher der Ort von A ist. Er geht durch die Gegenpunkte B_1 und C_1 von B und C und sein Radius r ist gegeben durch

$$\operatorname{tg} r = \frac{\operatorname{tg} \frac{a}{2}}{\sin \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden auf der Kugel.

a) Vorwärtseinschneiden.



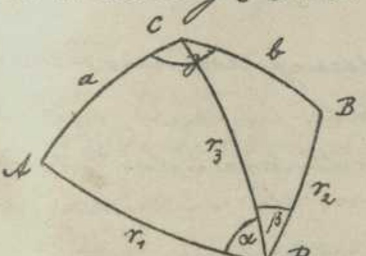
Ist R der Kugelradius, a klein im Verhältnis zu R, so berechnet man zunächst angenähert

$$F = \frac{1}{2}\,\frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}, \qquad \varepsilon = \frac{F}{R^2}$$

(Die trigonometrische Tafel gibt für kleine Exzesse, wenn man $\log \frac{F}{R^2}$ in der log sin- oder log tg-Tabelle aufschlägt, direkt ε im Bogenmaß.)

Dann wendet man den Legendre'schen Satz an, d.h. man ersetzt die Winkel durch $\beta - \frac{\varepsilon}{3}$, $\gamma - \frac{\varepsilon}{3}$ und berechnet b und c aus dem Sinussatz der ebenen Trigonometrie.

Die erhaltenen Größen sind genau bis einschließlich Größen der Ordnung ε oder $\frac{1}{R^2}$.



b) Rückwärtseinschneiden.

Sollen r_1, r_2 und r_3 aus $a, b, \gamma, \alpha, \beta$ berechnet werden, so behandelt man auch die Aufgabe zunächst als ebenes Problem und berechnet hieraus die Flächen F_1 und F_2 der beiden Dreiecke PAC und PBC, sowie die beiden Exzesse $\varepsilon_1 = \frac{F_1}{R^2}$ und $\varepsilon_2 = \frac{F_2}{R^2}$.

Mit Anwendung des Legendréschen Satzes kann man dan endgültig das sphärische Problem durch das ebene ersetzen: Rü wärtseinschneiden mit den gegebenen Größen

$$a, \quad b, \quad \gamma - \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}, \quad \alpha - \frac{\varepsilon_1}{2}, \quad \beta - \frac{\varepsilon_2}{2}$$

(an Stelle von a, b, γ, α, β)

c) Der gefährliche Ort.

Bildet ABC ein allgemeines – nicht im Verhältnis zur Kug kleines – Dreieck, so gibt es, von ganz besonderen Ausnahmefäl abgesehen (ABC ein Oktant der Kugel) einen gefährlichen Ort f P in dem Sinn, daß kleine Änderungen von α und β bereits r_1 r_2 und r_3 sehr stark beeinflussen. Man gelangt zu diesen Lage durch die kinematische Betrachtung von Finsterwalder: Geh die zu PA, PB und PC senkrechten Hauptkreise durch einen Punkt Q, so ist eine unendlich kleine Drehung des Systems P (α, β) um Q möglich, dh. P kann in benachbarte Lagen P' gebra werden, in denen α' und β' sich von α und β nur um Größe zweiter Ordnung unterscheiden, während $r_1' = P'A$, $r_2' = P'B$, $r_3' = P$ bereits um Größen erster Ordnung von $r_1\, r_2\, r_3$ verschieden sin

Dieser gefährliche Ort enthält A, B, C ferner die Ecken $A_1, B_1,$ des Polardreiecks, die Schnittpunkte $A'B'C'$ der Verbindungslin BC_1 und CB_1, CA_1 und AC_1, AB_1 und BA_1, außerdem die Pole B_1', C_1' der Höhen des Dreiecks, die übrigens mit den Höhen d Polardreiecks zusammenfallen.

(Sind $a_1\, b_1\, c_1$, $a_2\, b_2\, c_2$, $a_3\, b_3\, c_3$ die Richtungskosinus oder sp rischen Koordinaten von A, B, C – vergl. weiter unten –, u, v, w d von P, u', v', w' die von Q, so sind die Koordinaten des Pols der ne AP proportional zu

$$v c_1 - w b_1, \quad w a_1 - u c_1, \quad u b_1 - v a_1$$

und für AP'

$$v' c_1 - w' b_1, \quad w' a_1 - u' c_1, \quad u' b_1 - v' a_1.$$

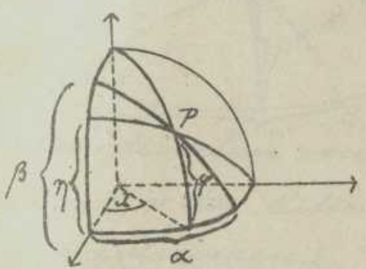
und die Bedingung des Senkrechtschneidens gibt geordnet

$$u'\left(u(b_1^2+c_1^2)-a_1(vb_1+wc_1)\right)$$
$$+v'\left(v(c_1^2+a_1^2)-b_1(wc_1+ua_1)\right)$$
$$+w'\left(w(a_1^2+b_1^2)-c_1(ua_1+vb_1)\right)=0.$$

Hierzu kommen noch zwei Gleichungen, weil ja auch die Ebenen BP und BQ, CP und CQ aufeinander senkrecht stehen sollen. Eliminiert man hieraus u' v' und w', so entsteht eine Gleichung dritten Grades. Ersetzt man in ihr u, v, w durch x, y, z so erhält man die Gleichung des Kegels dritter Ordnung mit der Spitze im Kugelmittelpunkt, der die Kugel im „gefährlichen Ort" beim Rückwärtseinschneiden nach A, B, C trifft.)

Sphärische Koordinaten.

Sind u, v, w rechtwinklige Koordinaten eines Kugelpunktes, $u=v=0$, $w=1$ der Nordpol, $w=0$, $u^2+v^2=1$ der Äquator, dann drücken sich u, v und w durch die geographische Länge und Breite so aus:



$$u=\cos\varphi\cdot\cos\lambda,\quad v=\cos\varphi\cdot\sin\lambda,\quad w=\sin\varphi.$$

Ferner ist

$$\operatorname{tg}\lambda=\frac{v}{u},\qquad \operatorname{tg}\eta=\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\lambda}=\frac{w}{u}.$$

Für viele Zwecke ist es geeignet, $\underline{x=\operatorname{tg}\lambda}$ und $\underline{y=\operatorname{tg}\eta}$ einzuführen, z. B. wird die Gleichung eines Hauptkreises, der vom Äquator und Anfangsmeridian die Stücke α und β abschneidet, sehr einfach

$$\frac{x}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{y}{\operatorname{tg}\beta}=1.$$

Der sphärische Abstand s zweier Punkte (φ_1,λ_1) und (φ_2,λ_2) ist nach dem Cosinussatz gegeben durch

$$\cos s=\sin\varphi_1\sin\varphi_2+\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos(\lambda_1-\lambda_2)=u_1u_2+v_1v_2+w_1w_2.$$

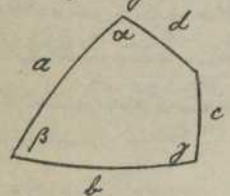
Die Gleichung eines Hauptkreises mit dem Pol $u_0\, v_0\, w_0$ ist daher auch

$$u_0 u + v_0 v + w_0 w = 0.$$

<u>Aufgaben.</u>

1) Wann liegen die drei Punkte $\lambda_1 \varphi_1$, $\lambda_2 \varphi_2$, $\lambda_3 \varphi_3$ auf einem Hauptkreis? (Aufstellung der Bedingung.)

2) Gegeben a, b und β ($\alpha = \gamma = 90°$); wie können c und d berechnet werden? Beispiel: $a = 71°11'$, $b = 60°21'$, $\beta = 65°31'$, $c = ?$, $d = ?$.



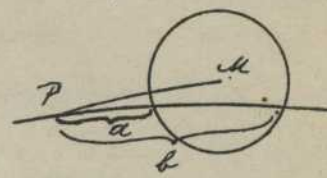
3) In jedem einem Kleinkreis einbeschriebenen Sehnenviereck auf der Kugel ist

$$\sin\frac{e}{2}\sin\frac{f}{2} = \sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{d}{2}.$$

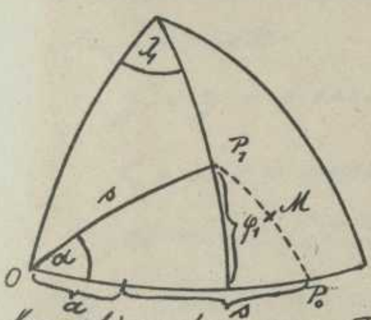
26.II.1912. **Trigonometrie.** №12.

Aufgaben:

1) Sind a und b die beiden Abschnitte auf einem durch P gehenden größten Kreis zwischen P und den Schnittpunkten mit einem gegebenen kleinen Kreis der Kugel, so ist das Produkt $tg\frac{a}{2}\cdot tg\frac{b}{2}$ konstant. (Es ist durch den Centralabstand PM und den Radius r des kleinen Kreises auszudrücken.



2) Wie drücken sich die Koordinaten



$$u_1 = \cos\varphi_1\cos\lambda_1 \qquad v_1 = \cos\varphi_1\sin\lambda_1$$
$$w_1 = \sin\varphi_1$$

des Punktes P_1 durch s und α aus? Sind

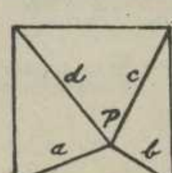
$$u_0 = \cos(a+s) \qquad v_0 = \sin(a+s) \qquad w_0 = 0$$

die Koordinaten von P_0, welche Werte haben dann die Koordinaten u, v, w der Mitte M des Bogens P_0P_1? (Sie sind durch s, α und a auszudrücken.)

Endlich ist zu zeigen, daß M einen Hauptkreis beschreibt, wenn s sich ändert, d.h. u, v, w müssen eine lineare Gleichung erfüllen

$$Au + Bv + Cw = 0.$$
$$A : B : C = ?$$

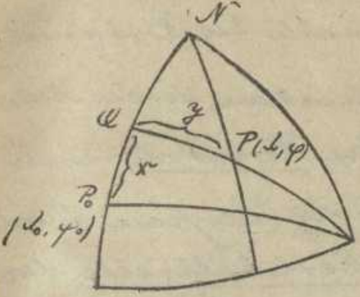
3) Welche Beziehung muß zwischen vier Strecken a, b, c, d in der Ebene bestehen, wenn sie die Verbindungslinien eines Punktes mit den Ecken eines Quadrates sind?



4) Die Halbierungspunkte der aufeinanderfolgenden Seiten eines regulären sphärischen Fünfecks, dessen Seite $a = 50°$ ist, werden durch Hauptkreisbogen verbunden. Wie groß ist der Inhalt (Winkelsumme $- 6 \cdot 90°$) des entstehenden regulären Fünfecks?

4. III. 1912. **Trigonometrie.** № 13.

1. Die Soldnerschen Koordinaten.



Ist P_0 der Anfangspunkt mit den geographischen Koordinaten λ_0, φ_0, P der Punkt λ, φ, so wird

$$\sin\frac{y}{R} = \cos\varphi \sin(\lambda-\lambda_0)$$

$$tg\left(\frac{x}{R}+\varphi_0\right) = \frac{tg\,\varphi}{\cos(\lambda-\lambda_0)}.$$

Richtungswinkel des Bogens $PP_1 = s$ heißt der Winkel (α) von PP_1 mit dem durch P gehenden (kleinen) Kreis y = constans.

Man erhält

$$y_1 = y + s\cdot\sin\alpha - \frac{s^2 y \cos^2\alpha}{2R^2} - \frac{s^3 \sin\alpha\cos^2\alpha}{6R^2}$$

$$x_1 = x + s\cdot\cos\alpha + \frac{s\cdot\cos\alpha\cdot y_1^2}{2R^2} - \frac{s^3\cos\alpha\sin^2\alpha}{6R^2}$$

$$(\alpha-\alpha_1)'' = \rho''\frac{s\cos\alpha}{2R^2}(2y + s\sin\alpha)$$

und umgekehrt findet man, wenn

$$x_1 - x = s_0\cos\alpha_0$$

$$y_1 - y = s_0\sin\alpha_0$$

gesetzt wird,

$$s = s_0\left(1 - \frac{\cos^2\alpha}{6R^2}(y^2 + y_1^2 + y y_1)\right). —$$

Die Meridiankonvergenz γ (= Richtungswinkel des Meridians von P) ist gegeben durch

$$tg\,\gamma = tg(\lambda-\lambda_0)\sin\varphi$$

oder

$$\gamma'' = \rho''\left\{\frac{y}{R}tg\,\varphi_0 + \frac{xy}{R^2}\,\frac{1}{\cos^2\varphi}\right\}.$$

2. Koordinatensysteme am Himmel.

I. Das System des Horizontes.

Der „wahre" Horizont ist gegeben durch die Ebene des Wasserspiegels im Beobachtungspunkt O, der „*scheinbare*" durch die dazu parallele durch den Erdmittelpunkt. Der Unterschied kommt für Fixsternbeobachtungen nicht in Betracht. Die Horizontalebene ist mit einer Kugel geschnitten zu denken, deren Mittelpunkt der Beobachtungsort ist, sie gibt den *Horizont*, einen größten Kreis, dessen Pole *Zenith* und *Nadir* heißen. Durch die Lotrichtung (Zenith-Nadir) gehen die *Vertikalkreise*, darunter der *Meridian* (durch Z und die Himmelspole P_N, P_S); seine Schnittpunkte mit dem Horizont geben *Nord*- resp. *Südpunkt* (H_N resp. H_S). Ferner der erste Vertikal, senkrecht zum Meridian, der den Horizontkreis im *Ost*- resp. *Westpunkt* (H_O, H_W) schneidet.

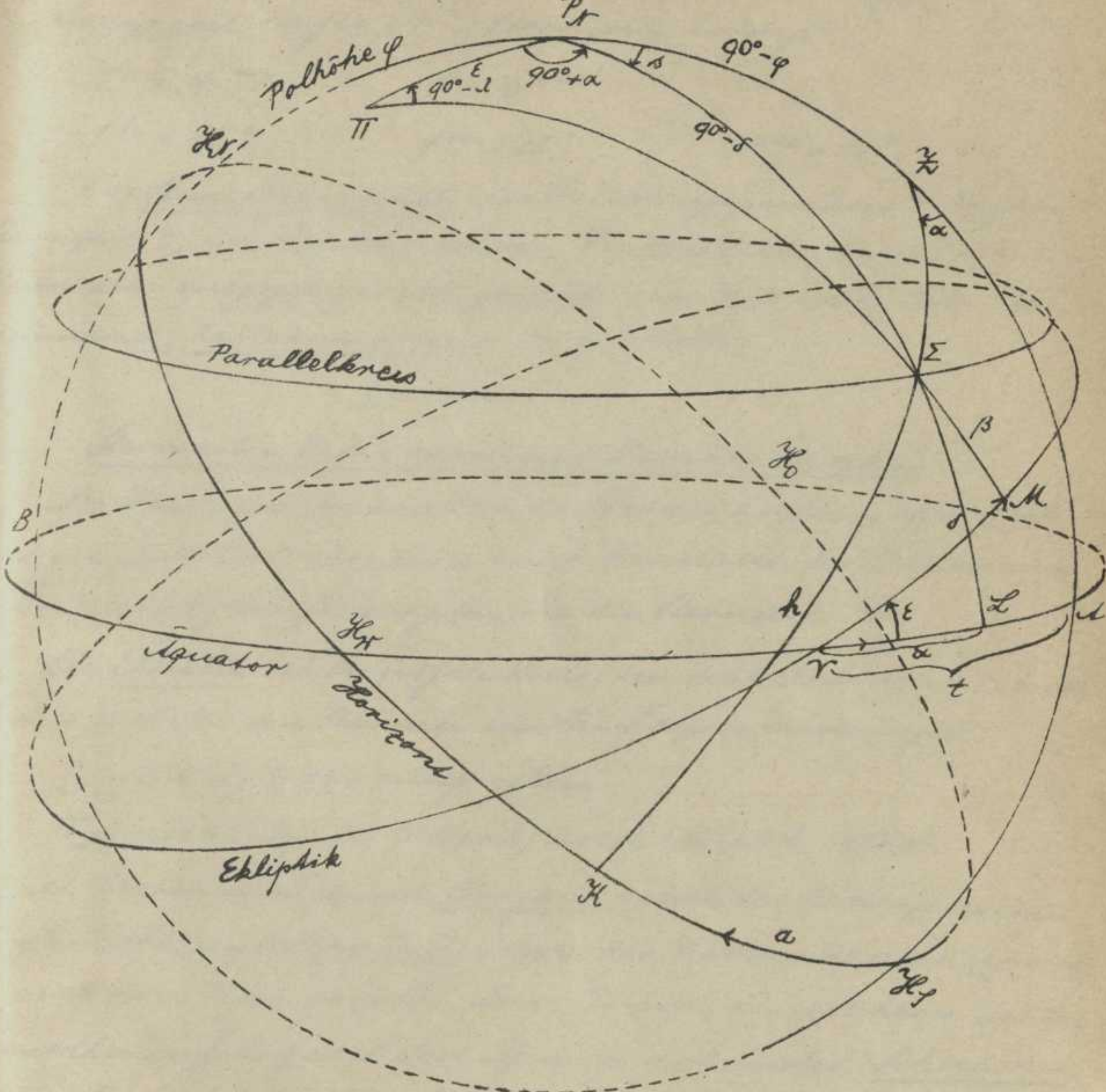
Die Richtung nach einem Stern Σ ist bestimmt durch *Höhe h* (Winkel von $O\Sigma$ mit dem Horizont) und *Azimut a* (Winkel zwischen Sternvertikal und Meridian, von ZH_S an nach Osten und Westen gezählt.

h und z (Zenithdistanz = 90° − h) sind konstant für einen Höhenkreis, a für einen Vertikalkreis.

Die *wahre Höhe* ist um den Betrag der Refraktion (vom Horizont bis zum Zenith zwischen etwa 35' und 0 abnehmend) kleiner als die scheinbare Höhe.

II. *Das System des Äquators.*

Den Punkten Z und N entsprechen P_N und P_S, dem Horizont der *Himmelsäquator*, der Höhe die *Deklination* δ (positiv für Punkte nördlich, negativ für Punkte südlich des Äquators), dem Azimut der *Stundenwinkel* (s), d. h. der Winkel zwischen Ortsmeridian und Sternmeridian am Pol P_N,



P_N
Polhöhe φ
$90° - \varphi$
$90° + \alpha$
$90° - \lambda$
ε
Π
$90° - \delta$
$\mathcal{H}_N$
Z
α
Σ
Parallelkreis
β
$\mathcal{H}_O$
M
B
δ
h
ε
L
A
$\mathcal{H}_W$
Äquator
α
t
Horizont
Ekliptik
$\mathcal{H}$
a
$\mathcal{H}_S$

von Süden über Westen nach Norden und Osten gerechnet.

Während einer vollen Umdrehung der Erde nimmt s eines Sternes zu um 360° und zwar gleichförmig. Dieselbe Drehungszeit heißt 24^h (Sternzeit), so daß

$1° = 4^m$ $\quad 1' = 4^{sec}$

$1^h = 15°$ $\quad 1^m = 15'$ $\quad 1^{sec} = 15''$.

Der Stundenwinkel des Frühlingspunktes ♈ heißt Sternzeit t, der Winkel zwischen ♈-Meridian und Σ-Meridian, aber entgegengesetzt gezählt von P_r ♈ nach Osten zunehmend, Rektaszension α. Es ist daher

$$t = \alpha + s$$

Sternzeit = Rektaszension + Stundenwinkel.

NB: Höhe und Azimut eines Sternes ändern sich, Deklination und Rektaszension sind konstant, der Stundenwinkel nimmt gleichförmig zu wie die Sternzeit.

III. Die Ekliptik ist der größte Kreis, den die scheinbare Bahn der Sonne ⊙ unter den Sternen im Lauf eines Jahres ergibt.

P_r und Äquator entsprechen

Π_r (nördl. Pol der Ekliptik) und Ekliptik selbst.

Σ ist bestimmt durch Länge λ, welche der Rektaszension entspricht, und Breite β, welche der Deklination entspricht. λ wird von ♈ an gezählt, dem Punkt, an welchem die Sonnenbahn aufsteigend den Äquator schneidet. Schiefe der Ekliptik ε heißt der Winkel zwischen Äquator und Ekliptik. Er ist etwa = $23\frac{1}{2}°$.

3. Die Zeiten und die Zeitgleichung.

Die Sternzeit ist gleich für alle Orte auf demselben geographischen Meridian; geht man von einem Meridian zu einem andern mit dem geographischen Längenunterschied λ nach Westen, so ist

$$t_W = t_0 - \lambda .$$

Wegen des Umlaufs der Erde um die Sonne oder der scheinbaren rückläufigen Bewegung – dem Uhrzeiger entgegengesetzt – der Sonne unter den Sternen hat das Jahr einen Sonnentag weniger als die Anzahl der Drehungen der Erde um ihre Achse beträgt.

366,242 Sterntage = 365,242 (mittlere Sonnenzeit).

Eine fingierte Sonne, die sich so bewegt, daß ihre Projektion auf den Äquator gleichförmig fortschreitet, gibt durch ihren Stundenwinkel die <u>mittlere Zeit</u> an (mittlere Sonnenzeit);

ein mittlerer Tag = $24^h\ 3^m\ 56,^s57$ Sternzeit

ein Sterntag = $23^h\ 56^m\ 4^m,08$ mittlerer Zeit.

Die <u>Zeitgleichung</u> Z gibt den Unterschied zwischen wahrer Sonnenzeit W und mittlerer Sonnenzeit M an. Es ist:

$$M = W + Z$$

<u>mittlere Zeit = wahre Zeit + Zeitgleichung.</u>