| | |
|---|---|
| **Persistenter Identifier:** | 1532432313942_9 |
| **Titel:** | Sammlung von Umdrucken zu den [Übungen der Vorlesungen] von [Sebastian] Finsterwalder, [Walther] von Dyck und [Heinrich] Burkhardt zu Höhere Mathematik vom Wintersemester 1908/09 bis Sommersemester 1912 an der Technischen Hochschule München. |
| **Autor:** | Finsterwalder, Sebastian<br>Dyck, Walther von<br>Burkhardt, Heinrich |
| **Ort:** | Stuttgart |
| **Datierung:** | 1908-1912 |
| **Strukturtyp:** | volume |

W. Kutta.

Stuttgart; Technische Hochschule.

# Übungsblätter
## für die Technische Hochschule München.

Inhalt:

1). Höhere Mathematik, Teil I, II, III, IV
Prof. Finsterwalder $W \frac{08}{09}$, $S$ 09, $W \frac{09}{10}$, $S$ 10

2). Höhere Mathematik, Teil I, II, III, IV
Prof. von Dyck $W \frac{09}{10}$, $S$ 10, $W \frac{10}{11}$, $S$ 11

3). Höhere Mathematik, Teil I, II, III, IV
Prof. Burkhardt. $W \frac{10}{11}$, $S$ 11, $W \frac{11}{12}$, $S$ 12

Analyt. Mech. Üb. aufg. Burkhardt

9. XI. 1908. №1.

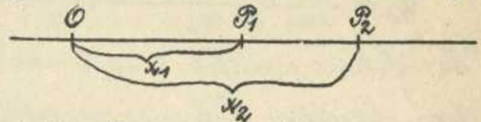
# Höhere Mathematik I.

## Analytische Geometrie auf der Geraden.

1.) Entfernung zweier Punkte $P_1$ und $P_2$ mit den Koordinaten $x_1$ und $x_2$:

$$P_1P_2 = x_2 - x_1$$

$$P_2P_1 = -P_1P_2 = x_1 - x_2.$$




2.) Für die Entfernung von $n$ Punkten auf der Geraden ist:

$$P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + \dots\dots + P_{n-1}P_n + P_nP_1 = 0.$$

3.) Der Punkt $P_3$ mit der Koordinate $x_3$ teilt die Strecke $P_1P_2$ im Verhältnis

$$\lambda = \frac{P_1P_3}{P_2P_3} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}.$$

Das Teilverhältnis $\lambda$ ist positiv für außerhalb, negativ für innerhalb $P_1P_2$ gelegene Punkte $P_3$.

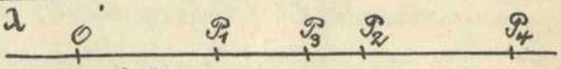
Speziell: Teilverhältnis des Mittelpunktes von $P_1P_2$: $\lambda = -1$;

Teilverhältnis des „unendlich fernen" Punktes von $P_1P_2$: $\lambda = +1$.

4.) Berechnung der Koordinate des Teilpunktes $P_3$ bei gegebenem Teilungsverhältnis $\lambda$:

$$x_3 = \frac{x_1 - \lambda \cdot x_2}{1 - \lambda}.$$

5.) Vier Punkte auf einer Geraden:




Teilt $P_3$ die Strecke $P_1P_2$ im Verhältnis $\lambda = \frac{P_1P_3}{P_2P_3}$ und $P_4$ dieselbe Strecke $P_1P_2$ im Verhältnis $\mu = \frac{P_1P_4}{P_2P_4}$, so ist das Doppelverhältnis $\Delta$ der 4 Punkte $(P_1P_2\,P_3P_4)$:

$$\Delta = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{P_1P_3}{P_2P_3} : \frac{P_1P_4}{P_2P_4} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}.$$

Speziell: Das Doppelverhältnis ist das harmonische, wenn $P_3$ die Strecke $P_1P_2$ von innen im selben Verhältnis teilt wie $P_4$ von außen; also $\lambda = -\mu$; $\Delta = \frac{\lambda}{\mu} = -1$.

6.) Unter dem statischen Moment oder Drehmoment eines Massenpunktes $m$ inbezug auf den Anfangspunkt $O$ versteht man das Produkt aus seiner Masse $m$ und seiner Koordinate $x$.

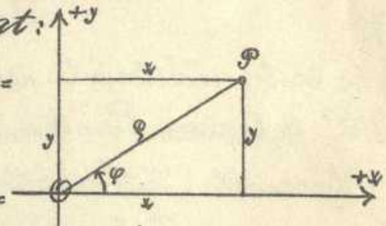
Der Schwerpunkt (Massenmittelpunkt) eines Systems von $n$ auf einer Geraden liegenden Massenpunkten ist derjenige Punkt, für welchen das Drehmoment der sämtlichen in ihm vereinigt gedachten Massen gleich der Summe der Drehmomente sämtlicher Massenpunkte ist. Seine Koordinate wird:

$$x_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_i x_i + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_i + \cdots + m_n} = \frac{\sum_1^n m_i x_i}{\sum_1^n m_i} = \frac{\text{Drehmomentsumme}}{\text{Massensumme}}$$

Der Schwerpunkt zweier Massensysteme teilt die Strecke zwischen den beiden Schwerpunkten der Einzelsysteme innen im umgekehrten Verhältnis der Massen der Teilsysteme.

## Analytische Geometrie der Ebene.

1.) Ein Punkt $P$ wird in der Ebene festgelegt:

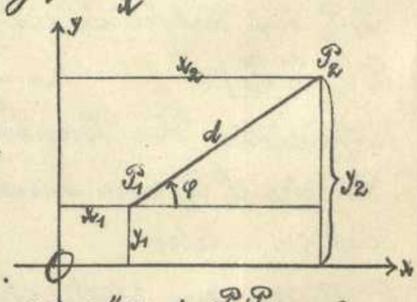



a.) durch die mit Vorzeichen versehenen Maßzahlen seiner Abstände von zwei festen aufeinander senkrechten Geraden, den Koordinatenaxen (rechtwinklige oder kartesische Koordinaten); oder auch

b.) durch seine stets positive Entfernung $\rho$ vom Koordinatenanfangspunkt $O$ (Polarradius) und den Polarwinkel $\varphi$, den $\rho$ mit der $+x$ Axe (Polaraxe) einschließt (Polarkoordinaten).

$$\rho = +\sqrt{x^2+y^2}; \quad \cos\varphi = \frac{x}{\rho}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{\rho}; \quad tg\,\varphi = \frac{y}{x}.$$

2.) Entfernung zweier Punkte $P_1$ und $P_2$:




$$d = +\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Winkel der Strecke $P_1P_2$ mit der Richtung der positiven $x$ Axe:

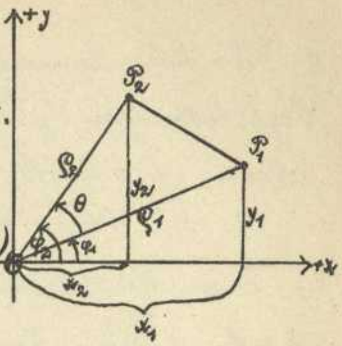
$$\cos\varphi = \frac{x_2-x_1}{d}; \quad \sin\varphi = \frac{y_2-y_1}{d}; \quad tg\,\varphi = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

3.) Der Punkt $P_3$, welcher die Strecke $P_1P_2$ im Verhältnis $\frac{P_1P_3}{P_2P_3} = \lambda$ teilt, hat die Koordinaten:

$$x_3 = \frac{x_1 - \lambda \cdot x_2}{1-\lambda}; \quad y_3 = \frac{y_1 - \lambda \cdot y_2}{1-\lambda}.$$

4.) Winkel der Polarradien zweier Punkte $P_1$ und $P_2$:

$$\sin\theta = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{\rho_1 \cdot \rho_2}; \quad \cos\theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\rho_1 \rho_2}; \quad tg\,\theta = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1 x_2 + y_1 y_2}.$$




5.) Inhalt des Dreiecks $OP_1P_2$:

$2 \cdot \Delta OP_1P_2 = x_1 y_2 - y_1 x_2 = [1,2]$ (Symbolische Bezeichng)

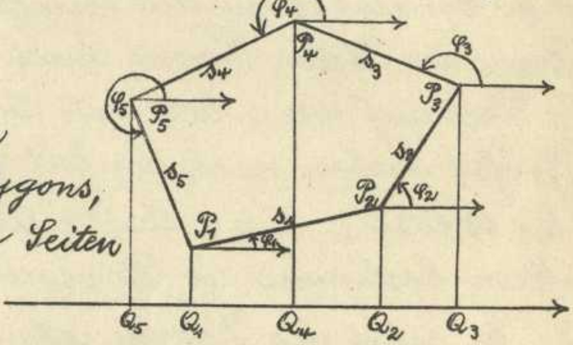
6.) Inhalt eines beliebigen Dreiecks $P_1 P_2 P_3$:

$$2 \cdot \Delta P_1 P_2 P_3 = [1,2] + [2,3] + [3,1].$$

7.) Inhalt eines Polygons:

$$2 \cdot P_1 P_2 P_3 \ldots\ldots P_n = [1,2] + [2,3] + [3,4] + \ldots\ldots\ldots + [n-1, n] + [n, 1].$$

## Projektionssatz.




Sind $s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots s_n$ die Seiten eines ebenen geschlossenen Polygons, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\ldots \varphi_n$ die Winkel der Seiten mit einer beliebigen Geraden, so ist:

$$s_1 \cdot \cos\varphi_1 + s_2 \cdot \cos\varphi_2 + s_3 \cos\varphi_3 + \ldots\ldots + s_n \cos\varphi_n = \sum_1^n s_i \cdot \cos\varphi_i = 0.$$

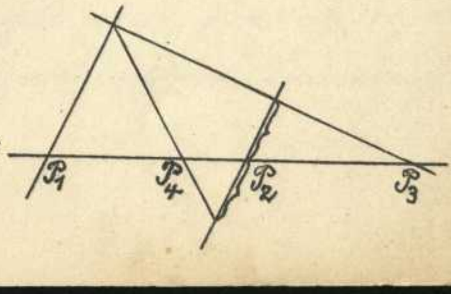
## Aufgaben.

1.) Gesucht die Entfernungen der Punkte $P_1$ und $P_2$ mit den Koordinaten $x_1$ und $x_2$ für folgende Werte:

a.) $x_1 = 3{,}8$; $x_2 = 6{,}3$; b.) $x_1 = 7{,}63$; $x_2 = -1{,}55$; c.) $x_1 = -13{,}57$; $x_2 = -4{,}29$.

2.) Man berechne die Koordinaten von $P_4$ so, daß das Doppelverhältnis $\frac{P_1 P_3}{P_2 P_3} : \frac{P_1 P_4}{P_2 P_4} = 2$ ist.

3.) Man beweise die in beistehender Figur gegebene Konstruktion des vierten harmonischen Punktes $P_4$ zu $P_3$ inbezug auf $P_1 P_2$.



4.) Der Schwerpunkt des folgenden aus gleich großen Massen bestehenden Systems soll berechnet werden:

$x_1 = a, \quad x_2 = a+b, \quad x_3 = a+2b, \quad \ldots\ldots \quad x_n = a+(n-1)b$

$m_1 = m_2 = m_3 = \ldots\ldots = m_n = m.$

5.) Ein Massensystem ist durch folgende Angaben bestimmt:

$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad \ldots\ldots \quad x_p = p$

$m_1 = m; \; m_2 = 2m; \; m_3 = 3m; \; \ldots\ldots \; m_p = p \cdot m.$

Es soll der Schwerpunkt berechnet werden.

Man benütze dazu die Formel: $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + p^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.

Beweis der letzten Formel durch den Schluß von $n$ auf $n+1$!

6.) Drei auf der $x$ Axe sich bewegende Massen von gleicher Größe haben nach der Zeit $t$ die Koordinaten:

$x_1 = a \cdot \cos t; \quad x_2 = a \cdot \cos(t + 120^\circ); \quad x_3 = a \cdot \cos(t + 240^\circ).$

Man bestimme die Bewegung des Schwerpunktes.

7.) Es sind die Koordinaten des Punktes $P_2$ zu berechnen, wenn seine Entfernung vom Punkt $P_1(x_1 = 3{,}596; \; y_1 = 0{,}917)$ $2{,}875$ beträgt und der Richtungswinkel der Strecke $P_1P_2$ gegen die $+x$ Axe $123^\circ 17' 24''$ ist.

8.) Man berechne den Umfang des Dreiecks mit den Eckpunkten: $P_1(x_1 = 1{,}7; \; y_1 = 2{,}4)$; $P_2(x_2 = -4{,}0; \; y_2 = 3{,}5)$; $P_3(x_3 = 0; \; y_3 = -2{,}1)$.

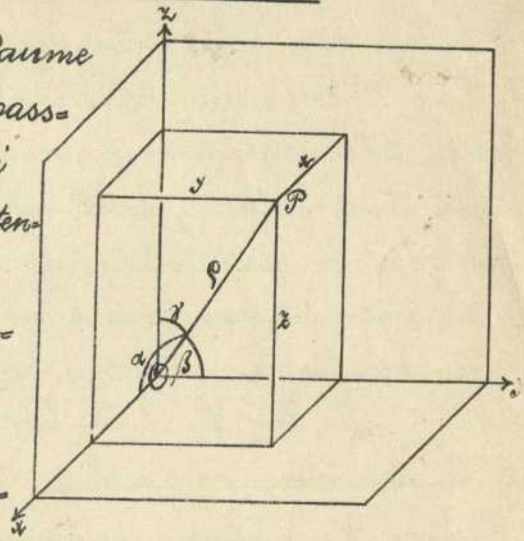
9.) Gesucht ist der Inhalt des Fünfecks mit den Ecken: $P_1(4{,}5; \; 1)$; $P_2(0{,}5; \; 5)$; $P_3(-4; \; 2)$; $P_4(-3{,}5; -3)$; $P_5(2{,}5; \; -5)$.

16. XI. 1908. № 2.

# Höhere Mathematik I.

## Analytische Geometrie des Raumes.

Die Koordinaten eines Punktes $P$ im Raume sind die mit Vorzeichen versehenen Masszahlen seiner Entfernungen von drei auf einander senkrechten Koordinatenebenen.




1.) Entfernung eines Punktes $P$ vom Anfangspunkt $O$:

$$\overline{OP} = \rho = +\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

2.) Winkel der Strecke $OP$ mit den Koordinatenaxen:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\rho}\,; \quad \cos\beta = \frac{y}{\rho}\,; \quad \cos\gamma = \frac{z}{\rho}.$$

3.) Entfernung zweier Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$\overline{P_1P_2} = d = +\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

4.) Winkel der Strecke $\overrightarrow{P_1P_2}$ mit den Koordinatenaxen:

$$\cos\alpha = \frac{x_2-x_1}{d}\,; \quad \cos\beta = \frac{y_2-y_1}{d}\,; \quad \cos\gamma = \frac{z_2-z_1}{d}.$$

5.) Zwischen den drei Richtungskosinus einer beliebigen Geraden gilt die Gleichung: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

6.) Koordinaten des Punktes $P_3$, welcher die Strecke $P_1P_2$ im Verhältnis $\lambda$ teilt:

$$x_3 = \frac{x_1-\lambda\cdot x_2}{1-\lambda}\,; \quad y_3 = \frac{y_1-\lambda\cdot y_2}{1-\lambda}\,; \quad z_3 = \frac{z_1-\lambda\cdot z_2}{1-\lambda}.$$

7.) Der Projektionssatz (Blatt I, Seite 3) gilt auch für die Projektion eines beliebigen windschiefen geschlossenen Linienzuges auf eine beliebige Gerade.

# Theorie der gerichteten Größen (Vektoren.)

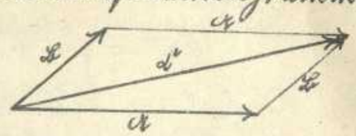
1.) Unter einem Vektor versteht man eine gerichtete Strecke. Man bezeichnet Vektoren mit deutschen Buchstaben ($\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$), ihre Länge mit den entsprechenden lateinischen Buchstaben ($A, B, C, \dots$). Vektoren von der Länge eins heißen Einheitsvektoren ($\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \dots$).

2.) Zwei Vektoren sind identisch, wenn sie denselben Anfangs- und Endpunkt haben. Sie sind gleich, wenn sie inbezug auf Länge, Richtung und Pfeilsinn übereinstimmen, entgegengesetzt, wenn sie gleiche Länge und Richtung, aber entgegengesetzten Pfeilsinn haben: $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$; $\mathfrak{C} = -\mathfrak{A}$

3.) Ein Vektor ist null, wenn seine Länge null ist.

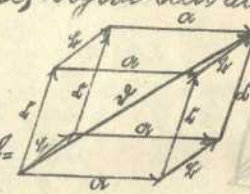
4.) Die Addition zweier Vektoren geschieht mithilfe des Vektorenparallelogramms:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}; \qquad \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}.$$



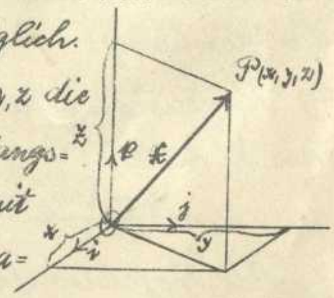
5.) Addition dreier oder mehrerer Vektoren mithilfe des Polygons der Vektoren; die Summe der Vektoren (Resultante) ergibt sich als Schlußseite des Polygons:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A} + \mathfrak{C} + \mathfrak{B} = \dots$$



6.) Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl (Skalare Multiplikation): Es gilt $n \cdot \mathfrak{A} + n \cdot \mathfrak{B} = n(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})$.

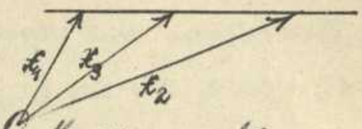
7.) Die Zerlegung eines Vektors nach zwei mit dem Vektor in derselben Ebene liegenden oder nach drei im Raume vorgegebenen nicht sämtlich einer Ebene parallelen Richtungen ist stets auf einerlei Weise möglich.
Sind die drei Richtungen die Koordinatenrichtungen, $x, y, z$ die Koordinaten des Endpunktes eines vom Koordinatenanfangspunkt ausgehenden Vektors $\mathfrak{X}$ und bezeichnet man mit $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenaxen, so ist $\mathfrak{X} = x \cdot \mathfrak{i} + y \cdot \mathfrak{j} + z \cdot \mathfrak{k}$.




Länge des Vektors $\mathfrak{X}$: $X = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

8.) Zwei Vektoren sind einander gleich, wenn sie gleiche Koordinaten haben.

9.) Der Vektor $\mathfrak{r}_3$, welcher die Verbindungsstrecke der Endpunkte von $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ im Verhältnis $\lambda$ teilt, ist gegeben durch




$$\mathfrak{r}_3 = \frac{\mathfrak{r}_1 - \lambda \cdot \mathfrak{r}_2}{1-\lambda}.$$

10.) Der Vektor $\mathfrak{r}_o$ nach dem Schwerpunkt von $n$ Massenpunkten $m_1, m_2, \dots m_n$ mit den zugehörigen Vektoren $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots \mathfrak{r}_n$ wird erhalten durch:

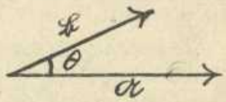
$$\mathfrak{r}_o = \frac{m_1\mathfrak{r}_1 + m_2\mathfrak{r}_2 + \dots + m_i\mathfrak{r}_i + \dots + m_n\mathfrak{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_i + \dots + m_n} = \frac{\sum_1^n m_i\mathfrak{r}_i}{\sum_1^n m_i}.$$

Die Koordinaten des Schwerpunktes ergeben sich daraus zu:

$$x_o = \frac{\sum_1^n m_i x_i}{\sum_1^n m_i}; \quad y_o = \frac{\sum_1^n m_i y_i}{\sum_1^n m_i}; \quad z_o = \frac{\sum_1^n m_i z_i}{\sum_1^n m_i}.$$

Die Lage des Schwerpunktes ist unabhängig von der Lage des Koordinatenanfangspunktes.

11.) Unter dem <u>skalaren Produkt</u> zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ versteht man den Zahlenwert




$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = A \cdot B \cdot \cos\theta,$$

wobei $\theta$ der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist.

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}; \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{A} = A^2.$$

12.) Das skalare Produkt verschwindet, wenn die Faktoren aufeinander senkrecht stehen.

13.) Das skalare Produkt eines Vektors mit einem Einheitsvektor gibt die Projektion des Vektors auf die Richtung des Einheitsvektors.

14.) Ausdruck des räumlichen Projektionssatzes in Vektoren:
Ist $\sum_1^n \mathfrak{A}_i = 0$, so wird auch $\sum_1^n \mathfrak{u}\mathfrak{A}_i = \mathfrak{u} \cdot \sum_1^n \mathfrak{A}_i = 0$.

15.) Rechenregeln: $n \cdot (\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (n\mathfrak{A})\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(n\mathfrak{B})$.

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}.$$

16.) Skalares Produkt der Einheitsvektoren:

$$ii = jj = kk = 1; \quad ij = jk = ki = 0.$$

17.) Ausdruck des skalaren Produktes durch die Komponenten der Faktoren:
Ist $\mathfrak{A} = A_1 i + A_2 j + A_3 k$ und $\mathfrak{B} = B_1 i + B_2 j + B_3 k$, so wird

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3.$$

18.) Formel für den Winkel $\theta$ zweier Richtungen: Sind $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ Einheitsvektoren mit gegebenen Richtungskosinus:

$$\mathfrak{a}_1 = \cos\alpha_1 \cdot \mathfrak{i} + \cos\beta_1 \cdot \mathfrak{j} + \cos\gamma_1 \cdot \mathfrak{k}; \quad \mathfrak{a}_2 = \cos\alpha_2 \cdot \mathfrak{i} + \cos\beta_2 \cdot \mathfrak{j} + \cos\gamma_2 \cdot \mathfrak{k},$$

so wird $$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 = \cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 .$$

## Aufgaben.

1.) Gesucht die Längen und Richtungen der Seiten sowie die Winkel eines Dreiecks im Raume, dessen Eckpunkte gegeben sind durch

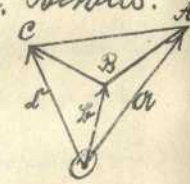
$P_1(x_1=9;\ y_1=7,\ z_1=2)$; $P_2(x_2=-5,\ y_2=13;\ z_2=6)$; $P_3(x_3=11;\ y_3=-8,\ z_3=-7)$

2.) Die Formel $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})$ soll geometrisch gedeutet werden.

3.) Man zeige, dass die räumlichen Diagonalen eines Parallelepipeds mit den Seiten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ die Werte haben: $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}-\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$, $-\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$.

4.) Beweise, dass die vier Raumdiagonalen dieses Parallelepipeds sich in einem Punkte schneiden.

5.) Die Summe der Quadrate der vier räumlichen Diagonalen eines Parallelepipeds ist gleich der Summe der Quadrate sämtlicher Seiten desselben. Beweis!

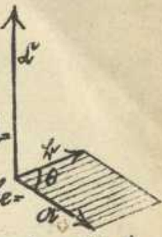



6.) In den vier Ecken des Tetraeders OABC befinden sich gleich große Massen. Man berechne den Schwerpunkt des Systems. Wo liegt der Schwerpunkt, wenn sich die gleichen Massen in den Mitten der Kanten des Tetraeders befinden?

7.) In einem windschiefen Viereck $P_1P_2P_3P_4$ werden die Seiten $P_1P_2$ und $P_4P_3$ durch die Punkte $P_5$ und $P_6$ im Verhältnis $\lambda$, die Seiten $P_1P_4$ und $P_2P_3$ durch $P_7$ und $P_8$ im Verhältnis $\mu$ geteilt. Man zeige, dass sich die Verbindungslinien $P_5P_6$ und $P_7P_8$ schneiden und dass der Schnittpunkt die Strecke $P_5P_6$ im Verhältnis $\mu$, $P_7P_8$ im Verhältnis $\lambda$ teilt.

23. XI. 08. # Höhere Mathematik I. № 3.

1.) Unter dem <u>Vektorprodukt $\mathfrak{c} = V\mathfrak{a}\mathfrak{b}$</u> zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ versteht man einen neuen Vektor $\mathfrak{c}$ von der Länge $C = A \cdot B \cdot \sin\theta$ (= dem Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Seiten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$), dessen Richtung senkrecht zur Ebene $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ ist. Der Richtungssinn von $\mathfrak{c}$ wird bestimmt mithilfe der „Daumenregel": Bringt man den Mittelfinger der linken Hand in die Richtung von $\mathfrak{a}$, den Zeigfinger in die Richtung von $\mathfrak{b}$, so gibt der Daumen die Richtung von $\mathfrak{c}$.



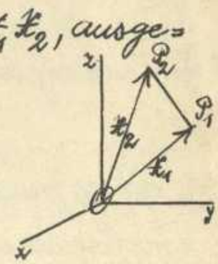

2.) $\mathfrak{c} = V\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ wird null, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{B}$ gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind.
Insbesondere: $$V\mathfrak{a}\mathfrak{a} = 0.$$

3.) Rechenregeln: $V\mathfrak{a}\mathfrak{b} = -V\mathfrak{b}\mathfrak{a}$; $nV\mathfrak{a}\mathfrak{b} = V(n\mathfrak{a})\mathfrak{b} = V\mathfrak{a}(n\mathfrak{b})$; $V\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = V\mathfrak{a}\mathfrak{b} + V\mathfrak{a}\mathfrak{c}$.

4.) Vektorenprodukte der Einheitsvektoren in Richtung der drei Koordinatenaxen:
$Vii = Vjj = Vkk = 0$; $Vij = k$, $Vjk = i$, $Vki = j$; $Vji = -k$, $Vkj = -i$, $Vik = -j$.

5.) Ist $\mathfrak{r}_1 = x_1 \cdot i + y_1 \cdot j + z_1 \cdot k$ und $\mathfrak{r}_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k$, so wird $V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$, ausgedrückt durch die Koordinaten der Faktoren:

$$\mathfrak{c} = V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = i(y_1 z_2 - z_1 y_2) + j(z_1 x_2 - x_1 z_2) + k(x_1 y_2 - y_1 x_2).$$




Dabei ist die Länge von $\mathfrak{c}$ gegeben durch:

$$C = 2 \cdot \triangle OP_1P_2 = +\sqrt{(y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2}.$$

6.) Betrachtet man $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ und $\mathfrak{r}_3$ als Vektoren vom Koordinatenanfangspunkt nach den Ecken eines Dreiecks $P_1P_2P_3$, so wird der zur Dreiecksebene senkrechte Vektor $\mathfrak{f}$, dessen Länge gleich dem doppelten Dreiecksinhalt ist, erhalten durch: $2\mathfrak{f} = V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 + V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 + V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1$.


Das skalare Produkt $\mathfrak{r}_1 V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3$ wird gleich dem 6fachen Volumen $\mathfrak{V}$ des Tetraeders $OP_1P_2P_3$, also $6\mathfrak{V} = \mathfrak{r}_1 V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 = \mathfrak{r}_2 V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_3 V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$. $\mathfrak{V}$ ist positiv oder negativ, je nachdem $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ u. $\mathfrak{r}_3$ wie die 3 Koord.-Axen aufeinanderfolgen oder nicht.

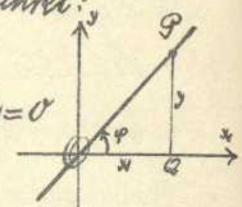
# Der geometrische Ort.

Unter dem geometrischen Ort eines Punktes in der Ebene oder im Raume verstehen wir die Gesamtheit aller Lagen des Punktes, die gewissen Bedingungen genügen. Jede Gleichung zwischen den Koordinaten $x$ und $y$ bestimmt einen geometrischen Ort in der Ebene. Der geometrische Ort bleibt ungeändert, wenn man seine Gleichung mit einer konstanten Zahl multipliziert oder dividiert.

## Die Gerade.

1.) Gleichung einer Geraden durch den Koordinatenanfangspunkt:

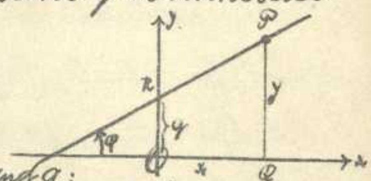
$$y = x \cdot tg\,\varphi.$$




Allgemein stellt eine homogene lineare Gleichung in $x$ und $y$: $ax + by = 0$ eine Gerade durch den Koordinatenanfangspunkt dar.

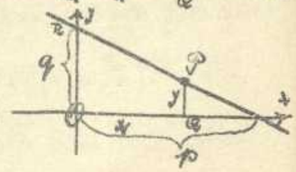
2.) Gleichung einer Geraden, welche auf der $y$ Axe die Strecke $q$ abschneidet und mit der $+x$ Axe den Winkel $\varphi$ einschließt:

$$y = q + x \cdot tg\,\varphi$$




3.) Gleichung einer Geraden mit den Axenabschnitten $p$ und $q$:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0.$$




4.) Die allgemeine lineare Gleichung $ax + by + c = 0$ stellt stets eine Gerade dar. Dabei ist $p = -\frac{c}{a}$; $q = -\frac{c}{b}$; $tg\,\varphi = -\frac{a}{b}$.

5.) Gleichung einer Geraden durch den Punkt $P_1(x_1, y_1)$ mit dem Neigungswinkel $\varphi$ gegen die $+x$ Axe: $\quad y - y_1 = (x - x_1) \cdot tg\,\varphi$.

6.) Gleichung einer Geraden durch die beiden Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{oder:} \quad x(y_2 - y_1) - y(x_2 - x_1) = x_1 y_2 - y_1 x_2 = 2 \cdot \triangle O P_1 P_2.$$

7.) Die Koordinaten des Schnittpunktes zweier Geraden $G_1$ und $G_2$:

$G_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ und $G_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ ergeben sich zu:

$$x = -\frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}\,; \quad y = -\frac{a_1 c_2 - c_1 a_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}.$$

Ausnahmen: a) $a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$ oder $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$; beide Gerade sind parallel.

b.) $a_1 b_2 - a_2 b_1 = c_1 b_2 - c_2 b_1 = a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0$ oder $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, beide Gerade fallen in eine zusammen.

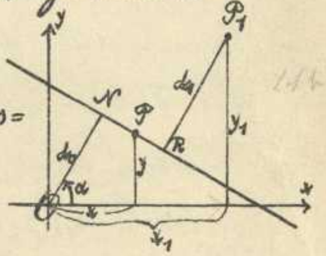
8.) Die lineare Kombination zweier Geradengleichungen:

$G_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ und $G_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ ist stets wieder eine Gerade durch den Schnittpunkt von $G_1$ und $G_2$:

$n G_1 + m G_2 \equiv n(a_1 x + b_1 y + c_1) + m(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$.

9.) Die Hesse'sche Normalform der Gleichung der Geraden:

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - d_0 = 0,$$




wo $d_0$ die Länge des Lotes vom Koordinatenanfangspunkt O auf die Gerade und $\alpha$ der Winkel dieses Lotes mit der $+x$ Axe ist.

10.) Entfernung des Punktes $P_1(x_1 y_1)$ von der Geraden $x \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - d_0 = 0$:

$$d_1 = x_1 \cos\alpha + y_1 \cdot \sin\alpha - d_0 .$$

$d_1$ wird positiv, wenn $P_1$ und O auf entgegengesetzten Seiten der Geraden liegen; im andern Falle ist $d_1$ negativ.

11.) Umformung der allgemeinen Geradengleichung $ax + by + c = 0$ in die Hesse'sche Normalform: Man dividiert die Gleichung mit $\pm\sqrt{a^2+b^2}$, so dass sie wird $\frac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = 0$ und wählt das Vorzeichen der Wurzel entgegengesetzt dem von c. Dann ist also:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \sin\alpha = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}; \quad d_0 = -\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} .$$

Die Entfernung des Punktes $P_1(x_1 y_1)$ von der Geraden wird dann:

$$d_1 = \frac{a x_1 + b y_1 + c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} .$$

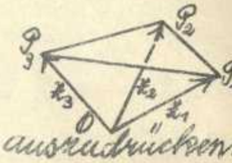
12.) Winkel $\theta$ zweier Geraden $G_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ und $G_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$:

$$tg\,\theta = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2} .$$

a.) Beide Gerade sind parallel, wenn $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$; $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$; die Gleichungen von $G_1$ und $G_2$ unterscheiden sich nur durch das konstante Glied.

6) Die Geraden stehen aufeinander senkrecht, wenn $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$; das Produkt der Richtungskoeffizienten wird $\operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2 = -1$.

## Aufgaben.




1.) Das Volumen des Tetraeders $OP_1P_2P_3$ ist durch die Koordinaten der Eckpunkte $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$ auszudrücken.

2.) Gesucht der Schnittpunkt der Verbindungslinien $P_1P_2$ und $P_3P_4$:
$P_1(-8;\, 2)$, $P_2(-3;\, 4)$, $P_3(1;\, -4)$, $P_4(4;\, 2)$.

3.) Welches sind die Koordinaten des Fußpunktes $R$ des Lotes vom Punkt $P_1(x_1, y_1)$ auf die Gerade $x\cos\alpha + y\sin\alpha - d_0 = 0$?

4.) Wie lautet die Gleichung der Geraden, die durch den Punkt $P_1(x_1, y_1)$ geht und

a.) parallel, b.) senkrecht zur Geraden $ax + by + c = 0$ ist?

5.) Die Gleichung einer Geraden durch die zwei Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ ist auf die Hesse'sche Normalform zu bringen.

6.) Beweise, dass die beiden Halbierungslinien des Winkels zweier beliebiger Geraden auf einander senkrecht stehen.

7.) Gesucht die Gleichungen der Winkelhalbierenden sowie die Koordinaten des Mittelpunktes des einbeschriebenen Kreises eines Dreiecks mit den Ecken: $P_1(2;\, -5)$, $P_2(4;\, 3)$, $P_3(-2;\, 1)$.

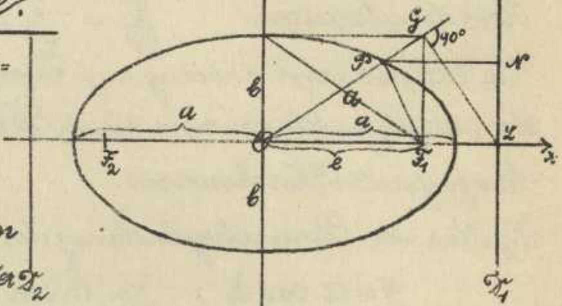
30. XI. 08. № 4.

# Höhere Mathematik I.

Der geometrische Ort eines Punktes $P$, dessen Abstände von einem festen Punkt $F$ (Brennpunkt) und von einer festen Geraden $D$ (Leitlinie oder Direktrix) in einem konstanten Verhältnis $\lambda = \frac{PF}{PN}$ stehen, wird dargestellt durch eine Gleichung zweiten Grades in $x$ und $y$. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden:

$\lambda < 1$: Ellipse; $\lambda = 1$: Parabel; $\lambda > 1$: Hyperbel.

## Die Ellipse.




1.) Axengleichung der Ellipse mit den Halbaxen $a$ und $b$:

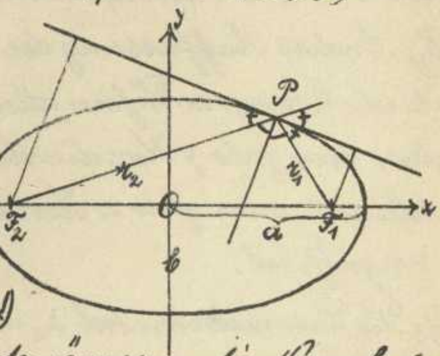
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Koordinatenaxen sind Symmetrieaxen der Kurve. Die Ellipse besitzt zwei auf der großen Axe gelegene Brennpunkte $F_1$ und $F_2$ im Abstand $e = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$ vom Koordinatenanfangspunkt; die beiden Leitlinien $D_1$ und $D_2$ sind parallel zur kleinen Ellipsenaxe im Abstand $m = \pm \frac{a^2}{e} = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$, während das Verhältnis $\lambda = \frac{PF_1}{PN} = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

2.) Gleichung der Tangente an die Ellipse im Berührpunkt $P_1(x_1, y_1)$:

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1.$$

3.) Fokaleigenschaften der Ellipse:




a.) Die Summe der beiden Fahrstrahlen $F_1P$ und $F_2P$ von den Brennpunkten nach einem Ellipsenpunkt ist konstant und gleich der Länge der Hauptaxe:

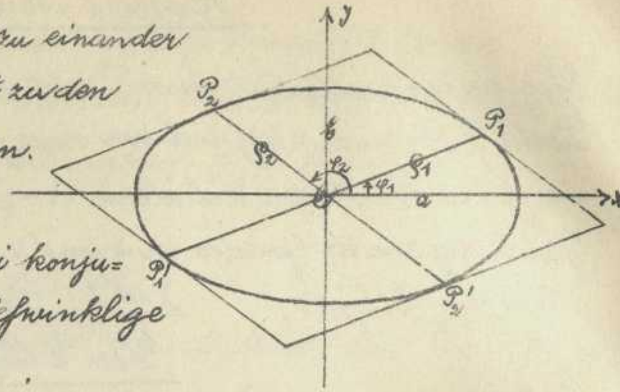
$$r_1 + r_2 = 2a \quad \text{(Ellipsenkonstruktion)}$$

b.) Die Tangente in einem Ellipsenpunkt halbiert den äusseren, die Normale den inneren Winkel der beiden Fahrstrahlen.

4.) Die Länge des unter dem Winkel $\varphi$ gegen die große Halbaxe der Ellipse geneigten Halbmessers ist gegeben durch

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}$$

5,) Zwei Durchmesser $P_1P_1'$ und $P_2P_2'$ heißen zu einander konjugiert, wenn der eine parallel ist zu den Tangenten in den Endpunkten des andern.



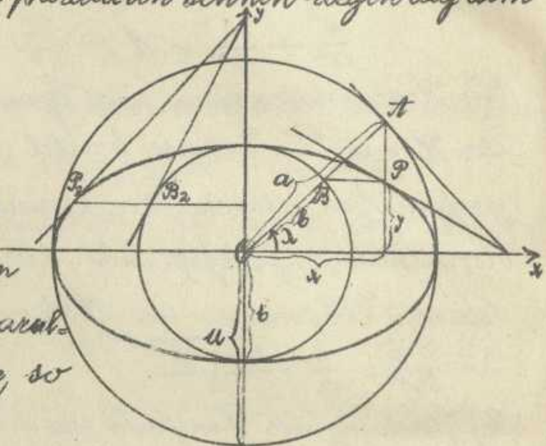

Dann gilt: $\quad \tan\varphi_1 \cdot \tan\varphi_2 = -\dfrac{b^2}{a^2}$.

6,) Gleichung der Ellipse inbezug auf zwei konjugierte Halbmesser $\rho_1$ und $\rho_2$ als schiefwinklige Koordinatenaxen: $\quad \dfrac{\xi^2}{\rho_1^2} + \dfrac{\eta^2}{\rho_2^2} = 1$.

Die Ellipse zeigt inbezug auf zwei konjugierte Durchmesser schiefe Symmetrie; die Mittelpunkte der zum einen Durchmesser parallelen Sehnen liegen auf dem konjugierten Durchmesser.

7.) Aus der Parametergleichung der Ellipse:

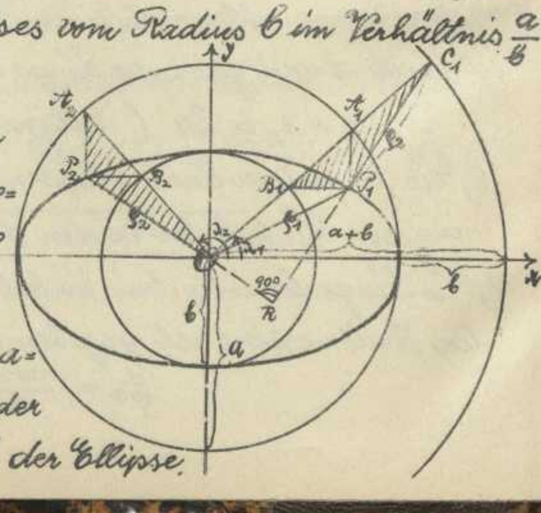
$$x = a\cdot\cos\lambda \;;\quad y = b\cdot\sin\lambda$$




folgt eine einfache Konstruktion der Ellipse aus den Halbaxen a und b: Ist OBA ein beliebiger Halbmesser und zieht man BP parallel der großen, AP parallel der kleinen Axe, so ist P ein Ellipsenpunkt.

8,) Andere Auffassung der vorigen Konstruktion: Die Ellipse entsteht durch homogene Deformation oder affine Transformation aus dem Kreis, indem man jede y Koordinate des Kreises vom Radius a im Verhältnis $\frac{b}{a}$ verkleinert oder jede x Koordinate des Kreises vom Radius b im Verhältnis $\frac{a}{b}$ vergrößert.

9,) Die Parameterwinkel $\lambda_1$ und $\lambda_2$, welche zu zwei konjugierten Halbmessern $\rho_1$ und $\rho_2$ gehören, unterscheiden sich um $90°$: $\lambda_2 - \lambda_1 = 90°$.




Zwei zu einander senkrechte Kreisradien $OA_1$ und $OA_2$ gehen bei homogener Deformation des Kreises über in zwei zu einander konjugierte Halbmesser $OP_1$ und $OP_2$ der Ellipse.

Aus der Kongruenz der Dreiecke $B_1P_1C_1$ und $A_2P_2O$ folgt: $C_1P_1 \perp OP_2$, d. h. $C_1P_1$ ist die Normale zur Ellipse im Punkte $P_1$.

10.) Konstruktion der Hauptaxen der Ellipse aus zwei konjugierten Halbmessern $\rho_1$ und $\rho_2$ derselben:

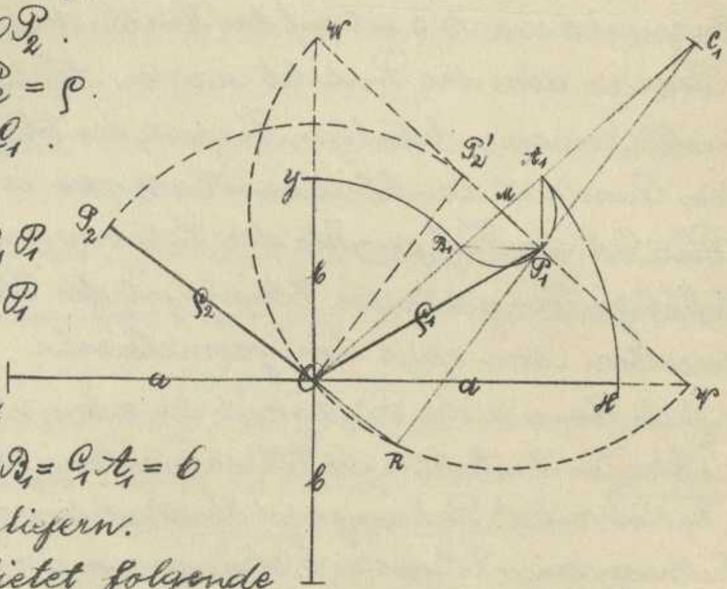
$\rho_1 = OP_1$ ; $\rho_2 = OP_2$.

$P_1R \perp OP_2$ ; $P_1C_1 = OP_2 = \rho$.

Ziehe $OC_1$ ; $OM = MC_1$.

$MP_1 = MA_1 = MB_1$,

so geben $OH$ parallel $B_1P_1$ und $OY$ parallel $A_1P_1$ die Richtungen der Hauptaxen, während $OA_1 = C_1B_1 = a$ und $OB_1 = C_1A_1 = b$ die Größen derselben liefern.




Zeichnerische Vorteile bietet folgende etwas abgeänderte Konstruktion (in der Figur punktiert):

$OP_2' \perp OP_2$ ; $OP_2' = OP_2 = \rho_2$. Ziehe $P_2'P_1$ ; $P_2'M = P_1M$.

$MO = MV = MW$, so sind $OV$ und $OW$ die Richtungen, $VP_2' = WP_1 = a$ und $VP_1 = WP_2' = b$ die Längen der Hauptaxen der Ellipse.

11.) Für zwei konjugierte Durchmesser $OP_1 = \rho_1$ und $OP_2 = \rho_2$, welche den Winkel $\theta$ miteinander einschließen, gilt:

$\rho_1^2 + \rho_2^2 = a^2 + b^2 =$ konst.; $\rho_1 \rho_2 \sin\theta = a \cdot b =$ konst. $= 2 \cdot \triangle OP_1P_2$.

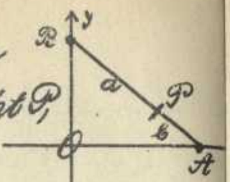
12.) Flächeninhalt der Ellipse mit den Halbaxen $a$ und $b$: $F = ab\pi$. —

## Aufgaben.

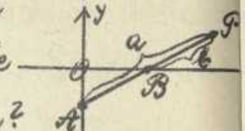
1.) Man konstruiere die Ellipse mit den Halbaxen $\sqrt{2}$ und $1$

a.) mithilfe der Parametergleichung der Ellipse, wobei auch die Normalen in den konstruierten Punkten zu zeichnen sind;

b.) mithilfe der Brennpunkte.




2.) Die Endpunkte der Strecke $AB = a + b$ durchlaufen die Koordinatenaxen. Welche Kurve beschreibt der Punkt $P$, welcher $AB$ von innen im Verhältnis $\frac{b}{a}$ teilt?




b.) Welches ist der geometrische Ort des Punktes $P$, welcher $AB = a - b$ von außen im Verhältnis $\frac{a}{b}$ teilt, wenn die Endpunkte von $AB$ sich auf den Koordinatenaxen bewegen?

3.) Beweise, dass das Produkt aus den Abständen der beiden Brennpunkte von einer beliebigen Tangente der Ellipse konstant und gleich dem Quadrat der kleinen Halbaxe ist.

4.) Der Ort der Fusspunkte der Lote von den Brennpunkten auf ei beliebige Tangente der Ellipse ist der Kreis über der grossen Ha derselben. Man zeige dies geometrisch.


5.) Man beweise die Richtigkeit der nebenstehenden punktweisen Konstruktion der Ellipse aus 2 konjug. Halbmessern.

6.) Es sind mittels Rechnung und Konstruktion die Längen der Halbaxen einer Ellipse zu bestimmen, von der zwei den Winkel $\theta = 150^\circ$ miteinander einschließende konjugierte Halbmesser bekannt sind zu $\rho_1 = 6^{cm}$; $\rho_2 = 3^{cm}$.

7.) Welchen geometrischen Ort beschreiben die Endpunkte aller vom Koordinatenanfangspunkt ausgehenden Vektoren $\mathfrak{r}$, die die Gleichung erfüllen: $\mathfrak{r}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$

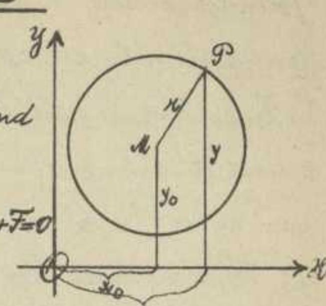
8.) Welche Kurve beschreibt der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{r} = \mathfrak{i}a\cos\lambda + \mathfrak{j}b\sin$ bei veränderlichem $\lambda$? Was für eine Konstruktion der Kurve ergibt sich daraus

9.) Man beweise durch Rechnung und Konstruktion, dass der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{r} = \mathfrak{A}\cos\lambda + \mathfrak{B}\sin\lambda$ eine Ellipse beschreibt, von der $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei konjugierte Halbmesser sind.

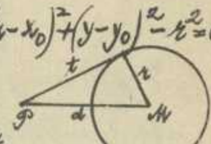
10.) Man zeige, dass die Vektoren $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{A}\cos\lambda_1 + \mathfrak{B}\sin\lambda_1$ und $\mathfrak{r}_2 = -\mathfrak{A}\sin\lambda_1 + \mathfrak{B}\cos$ konjugierte Halbmesser der Ellipse in 9.) sind. Man bilde zu diesem Zwecke $\mathfrak{r}_1^2 + \mathfrak{r}_2^2$ und $V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$ !

7. XII. 08. **Höhere Mathematik I.** № 5.

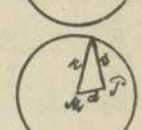
## Der Kreis.

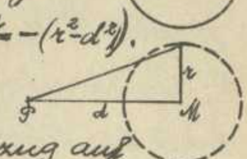



1) Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt $M(x_0, y_0)$ und dem Radius $r$: $$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$
2) Die allgemeine Gleichung 2. Grades $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ stellt einen Kreis dar, wenn $A=C$ und $B=0$. Der Radius dieses Kreises wird reell, gleich null (Nullkreis) oder imaginär (Imaginärer Kreis), je nachdem $D^2+E^2-AF>0$, $=0$ oder $<0$ ist.
Dividiert man die Gleichung mit $A$, so erhält man die Normalform der Kreisgleichung.
3) Gleichung der Tangente an den Kreis $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-r^2=0$ im Punkt $P_1(x_1, y_1)$:
$$(x-x_0)(x_1-x_0)+(y-y_0)(y_1-y_0)-r^2=0.$$
4) Unter der Potenz eines Punktes $P(x,y)$ inbezug auf den Kreis $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-r^2=0$ versteht man den Ausdruck $K=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2-r^2$.




Liegt $P$ außerhalb des Kreises, so ist $K$ gleich dem Quadrat der Tangente von $P$ an den Kreis ($K=t^2=d^2-r^2$); für $P$ auf dem Kreis ist $K=0$; für $P$ innerhalb des Kreises ist $K$ gleich dem negativen Quadrat der halben kürzesten Sehne durch $P$ ($K=-s^2=-(r^2-d^2)$).



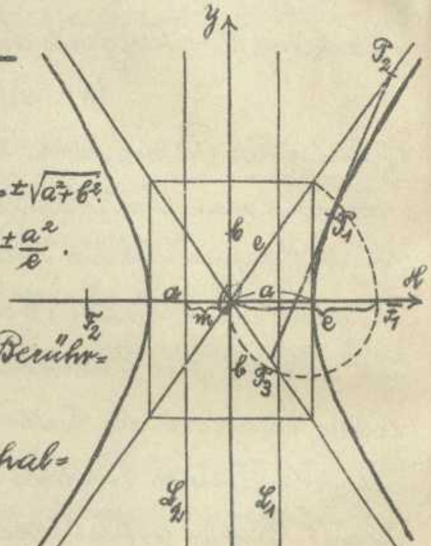

Die Potenz eines Punktes inbezug auf einen imaginären Kreis (Radius $ir$) ist reell: $K=d^2+r^2$. Die Potenz inbezug auf einen Nullkreis ist gleich dem Quadrat der Entfernung des Punktes vom Mittelpunkt des Nullkreises.
5) Der Ort aller Punkte, die inbezug auf zwei Kreise $K=0$ und $K'=0$ gleiche Potenz haben, ist die Gerade $K-K'=0$ (Potenzlinie, Chordale). Schneiden sich $K$ und $K'$, so ist die Potenzlinie die gemeinsame Sehne.
6) Die drei Potenzlinien dreier Kreise schneiden sich in einem Punkt.
7) Der Ort aller Punkte, deren Potenz inbezug auf zwei Kreise $K=0$ und $K'=0$ konstantes Verhältnis $\frac{K}{K'}=\lambda$ hat, ist der Kreis $K-\lambda K'=0$.
Durchläuft $\lambda$ alle möglichen Werte, so erhält man hieraus alle Kreise,

die durch zwei feste reelle, zusammenfallende oder imaginäre Punkte, die Grundpunkte, hindurchgehen und ein Kreisbüschel bilden. Sind die Grundpunkte imaginär, so enthält das Büschel zwei getrennte Nullkreise.

8.) Zwei Kreise mit den Mittelpunkten $M(x_0, y_0)$ und $M'(x_0', y_0')$ und den Radien $r$ und $r'$ schneiden sich rechtwinklig, wenn $p + p' = 2(x_0 x_0' + y_0 y_0')$, wobei $p = x_0^2 + y_0^2 - r^2$ und $p' = x_0'^2 + y_0'^2 - r'^2$ ist.

9.) Werden zwei Kreise $K = 0$ und $K' = 0$ von zwei anderen Kreisen $K'' = 0$ und $K''' = 0$ rechtwinklig geschnitten, so schneidet jeder Kreis des Büschels $K - \lambda K' = 0$ jeden Kreis des Büschels $K'' - \mu K''' = 0$ senkrecht. Beide Büschel bilden zwei orthogonale Kreisbüschel.

## Die Hyperbel.




1.) Axengleichung der Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2.) Entfernung der Brennpunkte $F_1$ und $F_2$ von $O$: $e = \pm\sqrt{a^2+b^2}$.
Abstand der Leitlinien $L_1$ und $L_2$ von der y Axe: $m = \pm\frac{a^2}{e}$.

3.) Richtungen der Asymptoten: $\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{b}{a}$.

4.) Gleichung der Tangente an die Hyperbel im Berührpunkt $P_1(x_1, y_1)$: $\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1$.

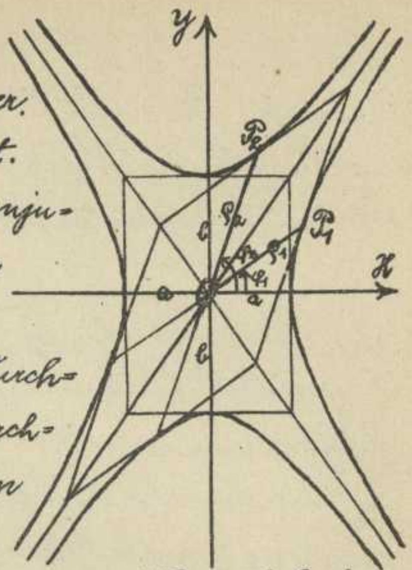
5.) Der Berührpunkt $P_1$ der Hyperbeltangente halbiert das Stück $P_2P_3$ der Tangente zwischen den Asymptoten. Das von der Tangente und den beiden Asymptoten gebildete Dreieck hat konstanten Flächeninhalt ($\triangle OP_2P_3 = a\cdot b = \text{const.}$).

6.) Die Gleichung der konjugierten Hyperbel ist:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

7.) Ein Paar von $O$ ausgehende auf der Hyperbel bezw. der konjugierten Hyperbel endigende Halbmesser $OP_1$ und $OP_2$ heißen zu einander konjugiert, wenn die Tangente im Endpunkt des einen Halbmessers parallel zum andern Halbmesser ist.

Für die Richtungen zweier konjugierter Halbmesser gilt: $\operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2 = +\frac{b^2}{a^2}$.

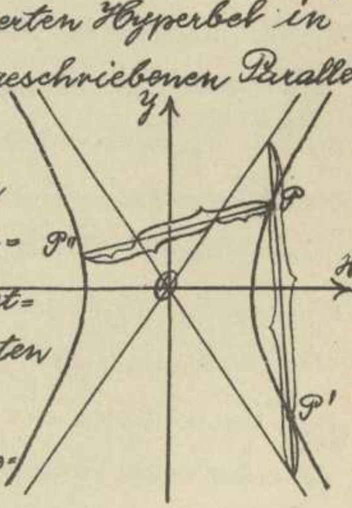



7) Die Axen der Hyperbel sind das einzige auf einander senkrechte Paar konjugierter Durchmesser. Jede Asymptote ist zu sich selbst konjugiert.

8,) Gleichung der Hyperbel inbezug auf zwei konjugierte Halbmesser $\varrho_1$ und $\varrho_2$ als schiefwinklige Koordinatenaxen: $\frac{\xi^2}{\varrho_1^2} - \frac{\eta^2}{\varrho_2^2} = 1$.

Die Hyperbel ist inbezug auf zwei konjugierte Durchmesser schief symmetrisch; alle zum einen Durchmesser parallelen Hyperbelsehnen werden vom konjugierten Durchmesser halbiert.

Die Ecken eines der Hyperbel und ihrer konjugierten Hyperbel in den Endpunkten konjugierter Durchmesser umgeschriebenen Parallelogramms liegen auf den Asymptoten.




9,) Auf jeder Transversalen sind die Abschnitte zwischen der Hyperbel und den Asymptoten einander gleich. Daraus folgt eine einfache punktweise Konstruktion der Hyperbel aus den Asymptoten und einem Punkt P.

10,) Gleichung der Hyperbel, bezogen auf die Asymptoten als schiefwinklige Koordinatenaxen:

$$\xi \cdot \eta = \frac{a^2 + b^2}{4} = \text{const.}$$

11,) Fokaleigenschaften der Hyperbel:

a,) Die Differenz der Fahrstrahlen $r_1$ und $r_2$ von den beiden Brennpunkten $F_1$ und $F_2$ nach einem Hyperbelpunkt ist konstant und gleich der Hauptaxe der Hyperbel: $r_2 - r_1 = 2a$.

b,) Die Hyperbeltangente halbiert den Innenwinkel der beiden Fahrstrahlen.

12,) Der geometrische Ort aller Punkte, von denen aus zwei zu einander senkrechte Tangenten an die Ellipse oder Hyperbel gezogen werden können, ist der Kreis um den Mittelpunkt der Kurve mit dem Radius R, sodaß $R^2 = a^2 \pm b^2$ (+ für die Ellipse, − für die Hyperbel). Diese orthoptische Kreis ist reell für die Ellipse und alle Hyperbeln deren Asymptoten einen spitzen Winkel miteinander einschließen.

## Aufgaben.

1.) Welche Gleichung hat ein Kreis, der durch den Koordinatenanfangspunkt hindurchgeht?

2.) Gleichung eines Kreises, der beide Koordinatenaxen berührt.

3.) Berechne die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius d. Kreises von der Gleichung: $3x^2 + 3y^2 - 18x + 30y - 6 = 0$.

4.) Es sind drei Kreise von gleichem Radius zu zeichnen, deren je die beiden anderen rechtwinklig schneidet.

5.) Die Differenz der Quadrate zweier konjugierter Halbmesser $\varrho_1$ un der Hyperbel ist konstant und gleich der Differenz der Halbaxe derselben. Beweis!

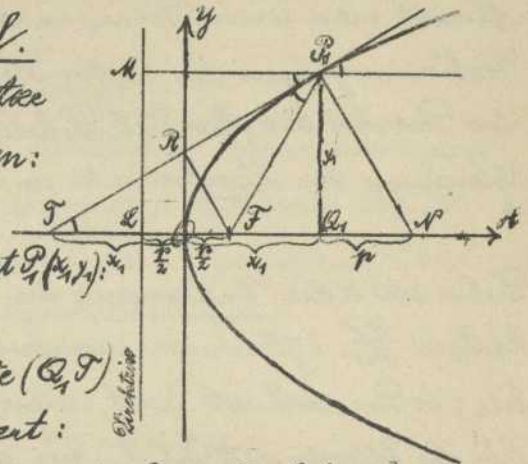
6.) Beweise, daß das $\triangle OP_1P_2$, dessen Seiten $OP_1 = \varrho_1$ und $OP_2 = \varrho_2$ konjug te Halbmesser der Hyperbel sind, konstanten Inhalt hat.

7.) Konstruiere die zweite Asymptote sowie die Axen, Brennpu te und eine Anzahl von Punkten einer Hyperbel, von der eine Asymptote und drei Punkte gegeben sind.

8.) Man zeige, daß die Endpunkte der beiden Vektoren $\mathfrak{X} = \frac{\mathfrak{a}}{\lambda} + \mathfrak{b} \cdot \lambda$ und $\mathfrak{Y} = -\frac{\mathfrak{a}}{\lambda} + \mathfrak{b} \cdot \lambda$ bei veränderlichem $\lambda$ zwei einander konjugierte Hyperbeln beschreiben, deren Asympto toten die Richtung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ haben und von der $\mathfrak{X}$ und für denselben Parameterwert $\lambda$ zwei konjugierte Halbmesser s

14. XII. 08. **Höhere Mathematik I.** № 6.

## Die Parabel.




1) Gleichung der Parabel, bezogen auf die Axe und Scheiteltangente als Koordinatenaxen:

$$y^2 = 2px.$$

2) Tangente an die Parabel im Berührpunkt $P_1(x_1 y_1)$:

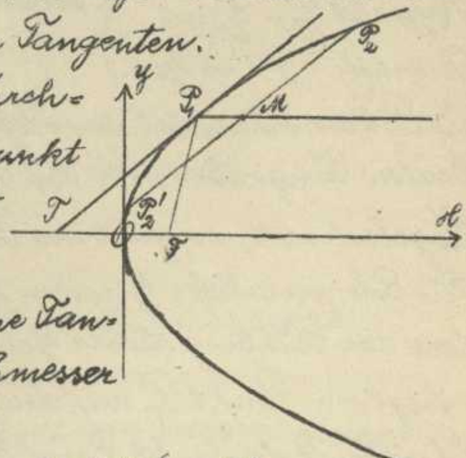
$$yy_1 = p(x+x_1).$$

Die Tangente ($P_1T$) und ihre Subtangente ($Q_1T$) werden durch die Scheiteltangente halbiert:

$OT = -x_1 = -OQ_1$; $OR = \frac{1}{2} y_1$. (Tangentenkonstruktion).

3) Die Tangente halbiert den Winkel zwischen dem Fahrstrahl vom Brennpunkt nach dem Berührpunkt und der durch den Berührpunkt zur Parabelaxe gezogenen Parallelen.

4) Die Fußpunkte der Lote vom Brennpunkt auf die Tangenten liegen auf der Scheiteltangente. Mithilfe dieses Satzes läßt sich die Parabel konstruieren als Umhüllungsgebilde ihrer Tangenten.



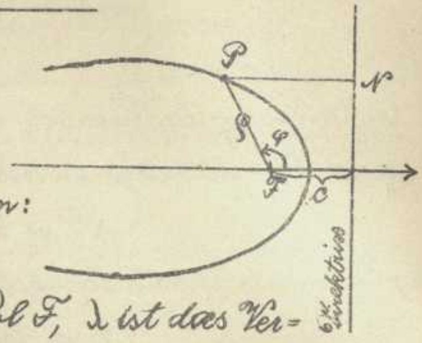

5) Jede Parallele zur Parabelaxe heißt ein Durchmesser der Parabel. Der durch den Berührpunkt einer Tangente gezogene Durchmesser ist der zu ihr konjugierte Durchmesser.

6) Gleichung einer Parabel, bezogen auf eine Tangente und den zu ihr konjugierten Durchmesser als schiefwinklige Koordinatenaxen:

$$\eta^2 = 2p_1\xi, \quad \text{wo } p_1 = 2\cdot FP_1 = 2FT = 2\left(x_1+\frac{p}{2}\right).$$

Die Parabel zeigt inbezug auf jeden Durchmesser schiefe Symmetrie; alle zu einer Tangente parallelen Sehnen werden vom konjugierten Durchmesser halbiert: $MP_2 = MP_2'$.

## Die Polargleichungen der Kegelschnitte.




Nimmt man einen Brennpunkt F als Pol, die Verbindungslinie der beiden Brennpunkte (bei der Parabel die Axe) als Polaraxe, so ist die Gleichung der Kegelschnitte in Polarkoordinaten:

$$\varrho = \frac{\lambda \cdot c}{1 + \lambda \cdot \cos\varphi}.$$

Dabei ist c die Entfernung der Direktrix vom Pol F, $\lambda$ ist das Verhältnis $\frac{PF}{PN}$ (gleich der numerischen Excentrizität $\varepsilon$).

Für die Parabel ist $\lambda = 1$, also $\varrho = \frac{c}{1+\cos\varphi} = \frac{c}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{p}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}$.

Für die Ellipse ist $\lambda < 1$, für die Hyperbel $> 1$. Für beide Fälle ist $\lambda = \frac{e}{a}$; $c = a \cdot \frac{1-\lambda^2}{\lambda}$; $\varrho = \frac{a(1-\lambda^2)}{1+\lambda\cdot\cos\varphi}$.

## Polareigenschaften der Kegelschnitte.

1.) Unter der Polaren eines Punktes $P_3(x_3, y_3)$ inbezug auf die

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Ellipse} & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \text{Hyperbel} & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \text{Parabel} & y^2 = 2px \end{array}\right\} \text{ versteht man die Gerade } \left\{\begin{array}{l} \frac{xx_3}{a^2} + \frac{yy_3}{b^2} = 1 \\ \frac{xx_3}{a^2} - \frac{yy_3}{b^2} = 1 \\ yy_3 = p(x + x_3). \end{array}\right.$$

2.) Die Polare schneidet den Kegelschnitt in den Berührungspunkten der beiden Tangenten vom Pol $P_3$ an die Kurve. Liegt der Pol $P_3$ auf dem Kegelschnitt, so geht die Polare in die Tangente im Punkt $P_3$ über.

3.) Die Pole paralleler Geraden inbezug auf einen Kegelschnitt liegen auf dem zur Richtung dieser Geraden konjugierten Durchmesser.

4.) Liegt ein Punkt $P_4$ auf der Polaren von $P_3$, so liegt auch $P_3$ auf der Polaren von $P_4$.

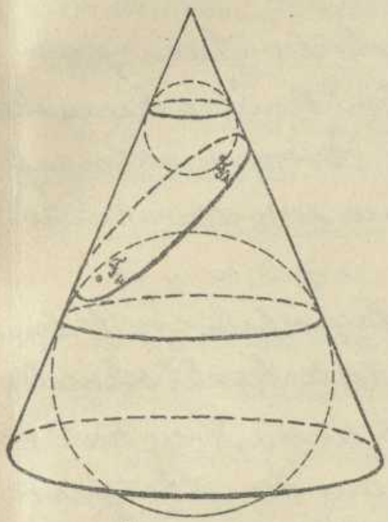
5.) Durchläuft der Punkt P eine Gerade, so drehen sich die zugehörigen Polaren von P um den Pol dieser Geraden; und umgekehrt: Dreht sich eine Gerade G um einen Punkt, so läuft der zugehörige Pol von G auf der Polaren dieses Punktes.

6.) Der Pol eines Durchmessers des Kegelschnittes ist der unendlich ferne Punkt auf der zum Durchmesser konjugierten Richtung.

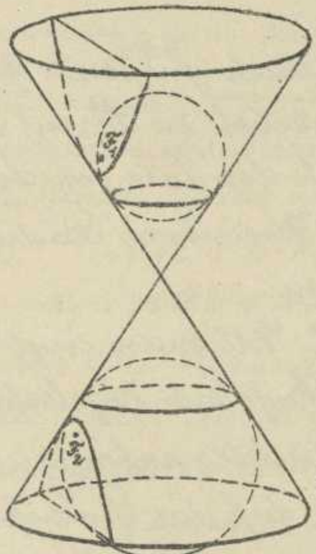
7.) Der Mittelpunkt eines Kegelschnittes ist der Pol der „unendlich fernen Geraden" der Ebene.

## Der Satz von Dandelin-Quetelet.

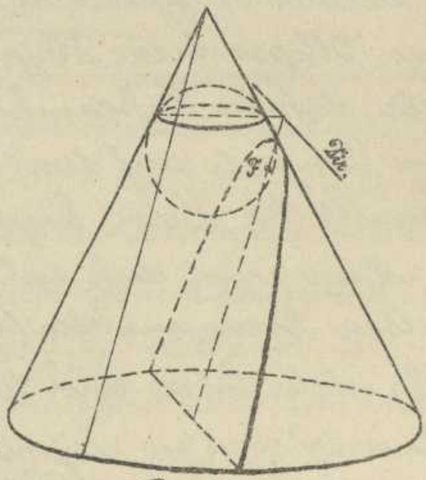
Ein senkrechter Kreiskegel wird von einer beliebigen Ebene nach einer Kurve zweiter Ordnung geschnitten. Die Brennpunkte sind die Berührungspunkte derjenigen Kugeln, welche den Kegelmantel in einem Kreis und außerdem die Schnittebene berühren.




Ellipse.




Hyperbel.




Parabel.

## Aufgaben.

1.) Man zeige geometrisch, daß die Direktrix der Parabel der geometrische Ort aller Punkte ist, von welchen aus zwei aufeinander senkrechte Tangenten an die Parabel gezogen werden können.

2.) Man transformiere die Gleichung der Parabeltangente auf die schiefwinkligen Koordinatenaxen, welche von einer Tangente und ihrem zugehörigen Durchmesser gebildet werden und berechne die Abschnitte einer weiteren Tangente auf diesen Koordinatenaxen.

3.) Beweise, daß der Abschnitt einer Parallelen zur Parabelaxe zwischen einem beliebigen Punkte der Parallelen und seiner Polaren inbezug auf die Parabel von der Parabel halbiert wird.

4.) Von einer Parabel ist der Scheitel, die Axenrichtung und ein Punkt gegeben. Man konstruiere eine Anzahl von Parabelpunkten nebst ihren Normalen.

5.) Es sind die beiden Tangenten von einem Punkte an eine durch Scheitel und Brennpunkt bestimmte Parabel zu konstruieren.

6.) Dieselbe Aufgabe ist auch für eine durch die Axen gegebene Ellipse bezw. Hyperbel zu lösen. Man benütze hiezu den Satz, daß die Fußpunkte der Lote von den Brennpunkten auf eine Tangente auf dem Kreis vom Radius a um den Mittelpunkt der Kurve liegen.

7.) Man zeige, daß sich Ellipsen und Hyperbeln mit denselben Brennpunkten (konfokale Kegelschnitte) senkrecht schneiden.

8.) Es ist die Polare eines Punktes inbezug auf einen Kreis zu konstruieren und zu zeigen, daß das Produkt aus den Abständen des Poles und seiner Polaren vom Kreismittelpunkt konstant und gleich dem Quadrat des Radius ist.

9.) Man zeige, daß die bei dem Quetelet'schen Beweise auftretenden Schnittlinien der Ebenen der Berührungskreise mit der Schnittebene Leitlinien des entstehenden Kegelschnittes sind.

---

21. XII. 1908. **Höhere Mathematik I.** № 7.

## Diskussion der allgemeinen Gleichung 2. Grades in x und y:

$$\mathfrak{A}x^2 + 2\mathfrak{B}xy + \mathfrak{C}y^2 + 2\mathfrak{D}x + 2\mathfrak{E}y + \mathfrak{F} = 0.$$

Die Gleichung stellt einen Kegelschnitt dar, der unter Umständen in ein Geradenpaar zerfällt. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1.) $\Delta_2 = \mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}^2 \neq 0$. Durch eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems $(x, y)$ mithilfe der Formeln $x = \mathfrak{X} + x_0$; $y = \mathfrak{Y} + y_0$ kann man die linearen Glieder in $x$ und $y$ zum Verschwinden bringen, wenn man setzt: $x_0 = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{E} - \mathfrak{C}\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}^2}$; $y_0 = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{D} - \mathfrak{A}\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}^2}$.

$x_0, y_0$ werden die Koordinaten des wirklich vorhandenen Kegelschnittsmittelpunktes. Die Gleichung des Kegelschnittes wird nach der Parallelverschiebung: $\mathfrak{A}\mathfrak{X}^2 + 2\mathfrak{B}\mathfrak{X}\mathfrak{Y} + \mathfrak{C}\mathfrak{Y}^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = 0$, wobei

$$\Delta_2 = \mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}^2; \qquad \Delta_3 = \mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{F} + 2\mathfrak{B}\mathfrak{D}\mathfrak{E} - \mathfrak{B}^2\mathfrak{F} - \mathfrak{A}\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{C}\mathfrak{D}^2.$$

Hierauf kann man durch eine Drehung des Koordinatensystems $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ um einen Winkel $\alpha$, der durch $tg\,2\alpha = \frac{2\mathfrak{B}}{\mathfrak{A} - \mathfrak{C}}$ bestimmt ist, die Kegelschnittsgleichung mithilfe der Transformationsformeln

$\mathfrak{X} = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$; $\mathfrak{Y} = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$ auf die Form bringen:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = 0$$

$\lambda_1$ und $\lambda_2$ sind dabei die stets reellen Wurzeln der quadratischen Gleichung: $\lambda^2 - (\mathfrak{A} + \mathfrak{C}) \cdot \lambda + \mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}^2 = 0$ und ergeben sich zu:

$\left.\begin{matrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\mathfrak{A} + \mathfrak{C} \pm \sqrt{4\mathfrak{B}^2 + (\mathfrak{A} - \mathfrak{C})^2}\right\}$, wobei $\lambda_1$ zum spitzen Winkel $\alpha$ gehört. Nun kann sein:

a.) $\Delta_3 \neq 0$. Die Gleichung $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = 0$ definiert dann

α.) einen imaginären Kegelschnitt, wenn $\lambda_1$ und $\lambda_2$ beide dasselbe Vorzeichen wie $\frac{\Delta_3}{\Delta_2}$ haben,

β.) eine Ellipse, wenn $\lambda_1$ und $\lambda_2$ beide das entgegengesetzte Zeichen von $\frac{\Delta_3}{\Delta_2}$ haben,

γ.) eine Hyperbel, wenn $\lambda_1$ und $\lambda_2$ unter sich verschiedene Zeichen haben:

b.) Ist $\Delta_3 = 0$, lautet also die Gleichung $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 0$, so haben wir

α.) ein imaginäres Geradenpaar (mit reellem Schnittpunkt), wenn $\lambda_1$ und $\lambda_2$ gleiches Vorzeichen besitzen;

β.) ein reelles sich schneidendes Geradenpaar, wenn $\lambda_1$ und $\lambda_2$ entgegengesetztes Vorzeichen besitzen.

2.) $\Delta_2 = AC - B^2 = 0$. Dann ist die anfangs ausgeführte Parallelverschiebung des Koordinatensystems unmöglich. Die allgemeine Kegelschnittsgleichung nimmt die Form an: $\left(x + \frac{B}{A} y\right)^2 + 2\frac{D}{A} x + 2\frac{E}{A} y + \frac{F}{A} = 0$.

Eine Drehung des Koordinatensystems um den Winkel $\varphi$, für den $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{A}{B}$, ergibt die Gleichung: $Y^2 + 2kX + 2mY + n = 0$,

wobei $k = -\frac{A(BD - AE)}{(A^2+B^2)^{\frac{3}{2}}}$, $m = -\frac{A(BE + AD)}{(A^2+B^2)^{\frac{3}{2}}}$; $n = \frac{AF}{(A^2+B^2)^{\frac{3}{2}}}$.

a.) Ist $k \neq 0$, so ergibt eine Parallelverschiebung $X = x' + \frac{1}{2k}(m^2 - n)$; $Y = y' - m$ die Scheitelgleichung einer Parabel in der Form: $y'^2 = -2kx'$.

b.) Ist $k = 0$, lautet die Gleichung $Y^2 + 2mY + n = 0$, so haben wir, je nachdem $m^2 - n > 0$, $< 0$ oder auch $= 0$ ist, zwei reelle oder imaginäre Parallele zur $X$-Axe oder auch eine in die $X$-Axe fallende Doppelgerade.

# Differentialrechnung.

## Die Funktion.

Eine Zahl $y$ (abhängige Variable) ist eine Funktion einer (oder mehrerer) anderer Zahlen $x$ (unabhängige Variable), wenn innerhalb eines gewissen Bereiches zu jedem Wert von $x$ eine (oder mehrere) bestimmte Werte von $y$ angegeben werden können. Bezeichnung: $y = f(x)$.

Einteilung der Funktionen: Rationale ganze Funktionen von $x$ werden aus $x$ und Konstanten durch eine endliche Zahl von Additionen (Subtraktionen) und Multiplikationen (Potenzierungen mit ganzen positiven Exponenten) gebildet. Die rationalen ganzen Funktionen sind für jedes $x$ eindeutig, endlich, stetig und differentiierbar.

ganze transzendente Funktionen und für jeden Wert von $x$ definiert.
Nullstellen von $\sin x$: $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$; Nullstellen von $\cos x$: $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \dots$
Die Nullstellen von $\cos x$ sind Unendlichkeitsstellen von $tg\, x$.
Periodizität der trigonometrischen Funktionen:
$\sin(x\pm 2k\pi)=\sin x$; $\cos(x\pm 2k\pi)=\cos x$; $tg(x\pm k\pi)=tg\, x$; $\sin(x\pm k\pi)=(-1)^k \sin x$, $\cos(x\pm k\pi)=(-1)^k\cdot\cos x$.
Wird in einer Funktion die Rolle der abhängigen und unabhängigen Variabeln vertauscht, so entsteht die zur ursprünglichen Funktion inverse Funktion. Das graphische Bild der inversen Funktion entsteht durch Spiegelung des Bildes der ursprünglichen Funktion an der Geraden $y=x$.
Die inversen Funktionen der rationalen Funktionen sind algebraische Funktionen. Die inverse Funktion der Exponentialfunktion $y=a^x$ ist $y=\overset{a}{\log}\, x$ (Logarithmus $x$ zur Basis $a$). Die inversen Funktionen der trigonometrischen Funktionen sind die zyklometrischen Funktionen:

$$y=\operatorname{arc}\sin x;\qquad y=\operatorname{arc}\cos x;\qquad y=\operatorname{arc} tg\, x.$$

Sie sind unendlich vieldeutig. $\operatorname{arc}\sin x$ und $\operatorname{arc}\cos x$ haben 2 Hauptwerte, die anderen Werte unterscheiden sich von diesen um ganze Vielfache von $2\pi$.
$\operatorname{arc} tg\, x$ hat nur einen Hauptwert, die übrigen Werte unterscheiden sich davon um ganze Vielfache von $\pi$.

## Aufgaben.

1.) Man diskutiere folgende Kurven 2. Ordnung:
a.) $25x^2-14xy+25y^2-90\cdot\sqrt{2}(x+y)+162=0$,
b.) $4x^2+6xy-10y^2+3x-2y-10=0$;
c.) $x^2+2xy+y^2-6x+6y+9=0$;
d.) $2x^2+5xy+3y^2+x+2y-1=0$;
e.) $4x^2-4xy+y^2+8x-4y+4=0$.

2.) Man gebe ein Bild des Verlaufes folgender Funktionen:
a.) $y=x^3-3x+1$;
b.) $y=\frac{x}{x^2-4}$;
c.) $x^3+xy^2-2y^2=0$;
d.) $y=\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$
e.) $y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$;
f.) $y=\operatorname{arc}\operatorname{cotg} x$.

Allgemeinste Form einer rationalen ganzen Funktion $n^{ten}$ Grades:

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots\dots\dots + a_{n-1} x + a_n .$$

Für jede Nullstelle $x = x_1$ läßt sich der Wurzelfaktor $(x - x_1)$ absondern.

Rational gebrochene Funktionen von $x$ werden gebildet durch eine endliche Anzahl von Additionen (Subtraktionen), Multiplikationen und Divisionen (Potenzen mit ganzen positiven und negativen Exponenten) der unabhängigen Variabeln $x$. Allgemeine Form einer rational gebrochenen Funktion: $y = \dfrac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots\dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots\dots + b_{m-1} x + b_m}$.

Ist $n \geqq m$, so unecht gebrochen, für $n < m$ echt gebrochen.

Die Nullstellen des Zählers sind Nullstellen der Funktion, die Nullstellen des Nenners Unendlichkeitsstellen.

Die rational gebrochenen Funktionen sind eindeutig, endlich, stetig und differentiierbar für alle Werte $x$ mit Ausnahme der Unendlichkeitsstellen.

Irrationale Funktionen von $x$ gehen hervor durch die auf $x$ in endlicher Zahl ausgeführten Operationen der Addition (Subtraktion), Multiplikation, Division und Wurzelausziehung (Potenzierung mit rational gebrochenen Exponenten). Die irrationalen Funktionen sind mehrdeutig und nur in gewissen Bereichen (reell) definiert.

Algebraische Funktionen sind implicit durch eine algebraische Gleichung zwischen $x$ und $y$ gegeben. Sie sind mehrdeutig und nur in bestimmten Bereichen definiert. Sie umfassen die rationalen und irrationalen Funktionen, sind aber allgemeiner als diese.

Transzendente Funktionen heißen alle nicht algebraischen Funktionen. Sie entstehen besonders dann, wenn man die elementaren Rechenoperationen der Addition (Subtraktion), Multiplikation und Division unendlich oft ausführt.

Beispiele transzendenter Funktionen:

$y = x^{\sqrt{2}}$, $y = a^x$ (Exponentialfunktion); $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ (trigonometrische Funktionen). Die Funktionen $a^x$, $\sin x$ und $\cos x$ sind

# Orthogonale Kreisbüschel.

## in isothermen Netzen.

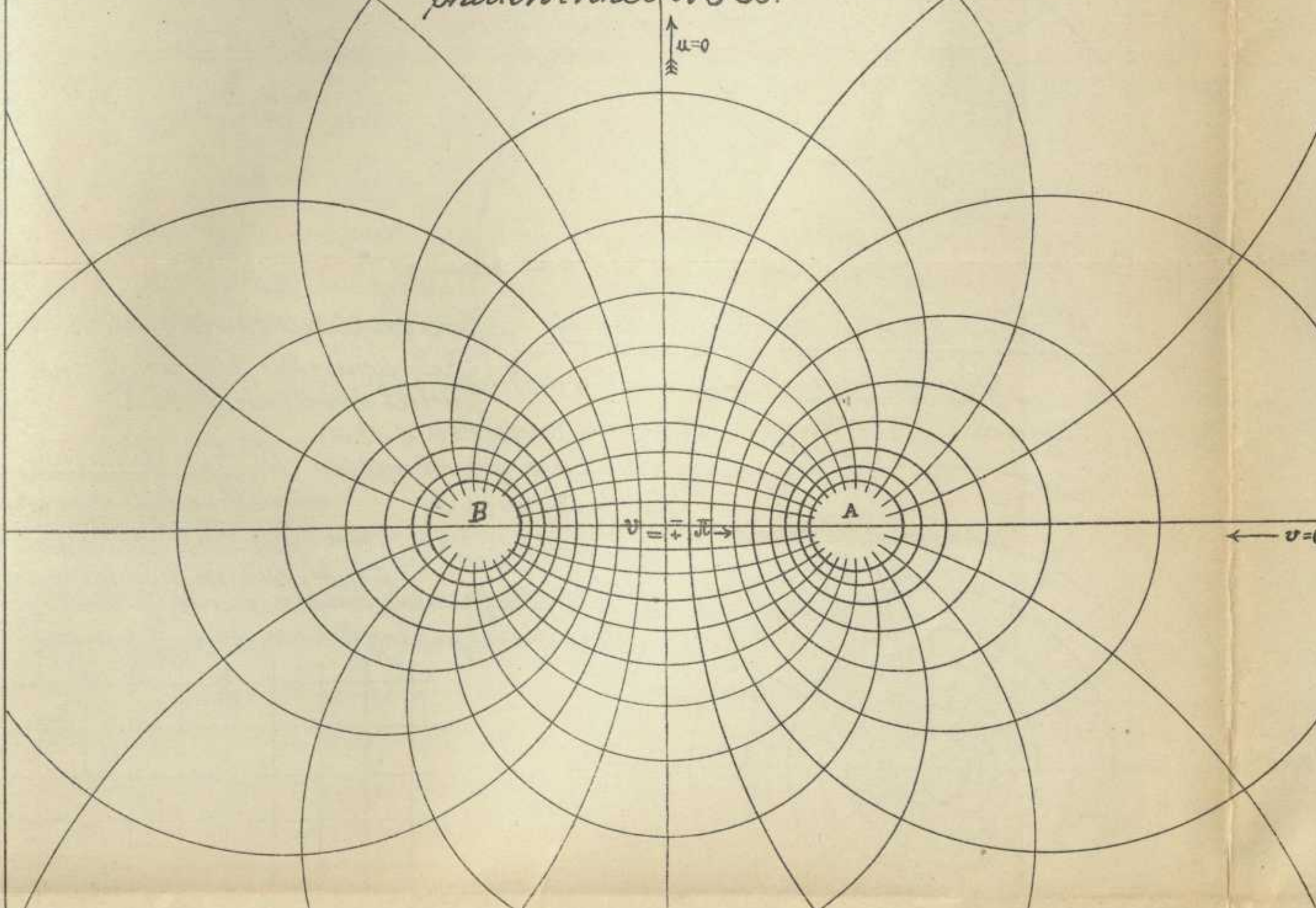
Masseinheit = 2,5 cm. Gezeichnet sind die den Parametern $\frac{\pi}{12} \cdot n$ entsprechenden Kurven.

## I. Ein hyperbolisches und ein elliptisches Kreisbüschel.

Grundpunkte getrennt im Endlichen: $x^2+y^2+1-2x \operatorname{cotg hyp} u = 0;$

$x^2+y^2-1+2y \operatorname{cotg} v = 0;$

Zugleich Abbildung des Streifens von $v=-\pi$ bis $v=+\pi$ der Ebene $w=u+iv$ durch $w=\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$; $z=x+iy$. Gezeichnet für $u=\frac{\pi}{12}\cdot n$, $n=0, \pm 1, \ldots \pm 8$, und für $v=\frac{\pi}{12}\cdot n$; $n=0, \pm 1, \ldots \pm 12$. $u$ ist Lognat des Abstandsverhältnisses $\frac{BP}{AP}$; $v$ der Peripheriewinkel $APB$.



## II Zwei parabolische Kreisbüschel.

Zwei im Endlichen zusammenfallende Grundpunkte.

$$x^2+y^2-\frac{x}{u}=0.$$

$$x^2+y^2+\frac{y}{v}=0.$$

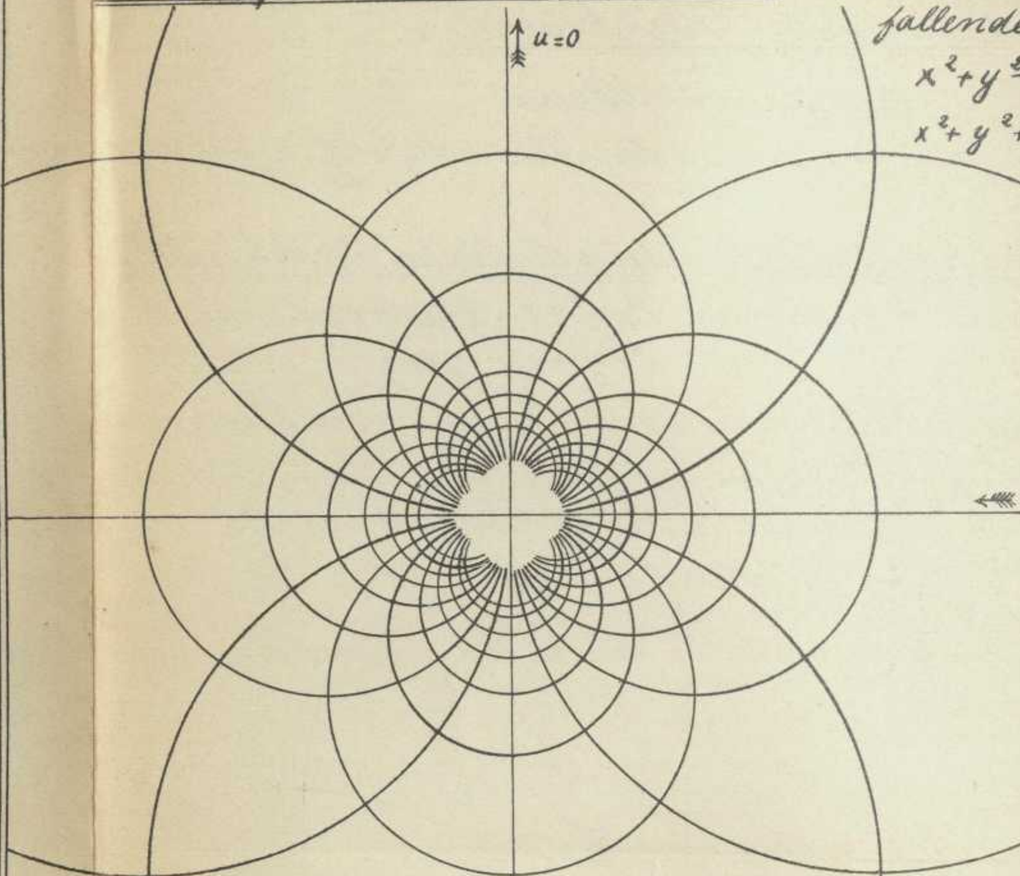
Zugleich Abbildung der Ebene $w=\frac{1}{z}$.

Gezeichnet für $u=\frac{\pi}{12}\cdot n$

$n=0,\pm1,\cdots\pm8.$

$v=\frac{\pi}{12}\cdot n$

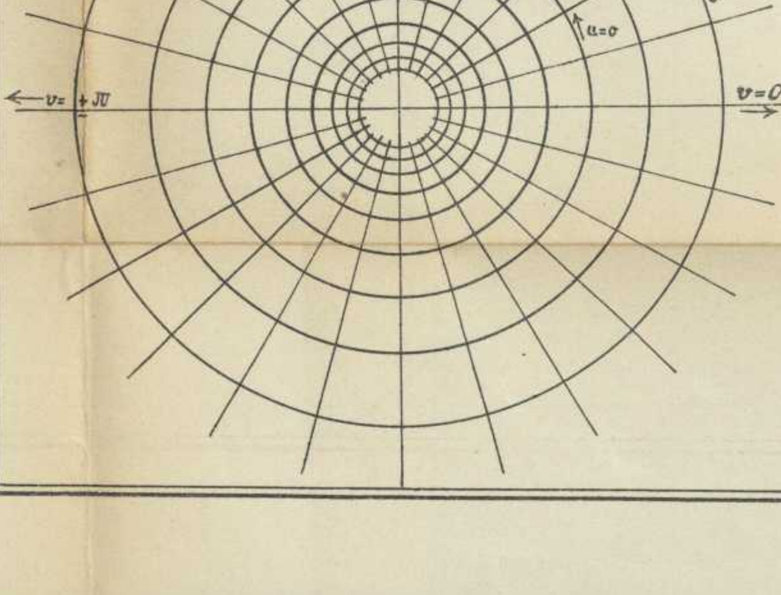
$n=0,\pm1,\cdots\pm8.$




## III. Konzentrische Kreise und Geradenbüschel (samt $g\infty$).

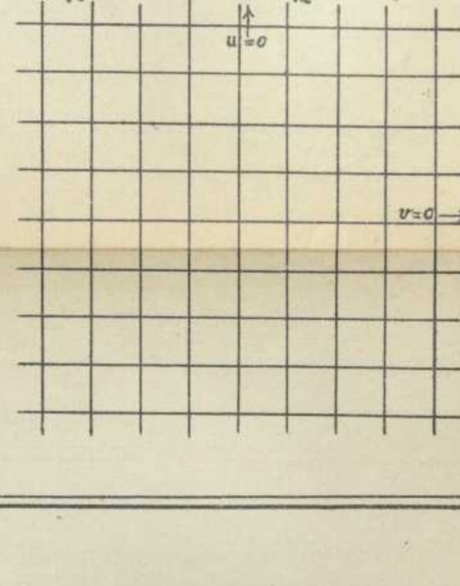
Zwei Paare zusammenfallender Grundpunkte, resp. ein Grundpunkt im Unendlichen.

$x^2+y^2-e^{2u}=0$; $y-x\,\mathrm{tg}\,v=0$; Zugleich Abbildung des Streifens zwischen $v=\pm\pi$ der Ebene $w=\ln z$. Gezeichnet für $u=\frac{\pi}{12}n$; $n=2,1,0,-1\dots-6$. $v=\frac{\pi}{12}\cdot n$; $n=0,\pm1\dots\pm12$.




## IV Zwei Büschel von Parallelgeraden.

(samt $g_\infty$). Zwei im Unendlichen zusammenfallende reelle Grundpunkte. $x-u=0$; $y-v=0$. Gezeichnet für $u=\frac{\pi}{12}n$, $n=0,\pm1,\dots\pm4$, $v=\frac{\pi}{12}n$; $n=0,\pm1,\dots\pm4$.



11. I. 1909. **Höhere Mathematik I.** № 8.

Stetigkeit der Funktionen: Eine Funktion $y=f(x)$ heißt an der Stelle $x$ stetig, wenn der absolute Betrag $|f(x+\Delta x)-f(x)|<\varepsilon$ für jedes noch so kleine $\varepsilon$, sobald man nur $\Delta x$ hinreichend klein nimmt.

Grenzwerte: Man sagt, eine beliebig weit fortsetzbare gesetzmässige Reihe von Zahlen $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n, \ldots$ hat einen Grenzwert $A$, wenn die Differenzen $|A-A_1|, |A-A_2|, \ldots\ldots |A-A_n|, \ldots$ von einer bestimmten Stelle an abnehmen und sich unbegrenzt der Null nähern. Man schreibt dann:

$\lim\limits_{n=\infty}(A-A_n)=0$ oder $\lim\limits_{n=\infty}A_n=A$ oder $|A-A_n|<\varepsilon$ für jedes noch so kleine $\varepsilon$, sobald $n$ genügend groß wird.

Sätze über Grenzwerte: $\lim\limits_{n=\infty}(A_n \pm B_n) = \lim\limits_{n=\infty} A_n \pm \lim\limits_{n=\infty} B_n$;
$\lim\limits_{n=\infty}(A_n \cdot B_n) = \lim\limits_{n=\infty} A_n \cdot \lim\limits_{n=\infty} B_n$; $\lim\limits_{n=\infty}\frac{A_n}{B_n} = \frac{\lim\limits_{n=\infty} A_n}{\lim\limits_{n=\infty} B_n}$, ausgenommen $\lim\limits_{n=\infty} B_n = 0$;
$\lim\limits_{n=\infty} f(A_n) = f(\lim\limits_{n=\infty} A_n)$, wenn $f(A_n)$ eine stetige Funktion ist.

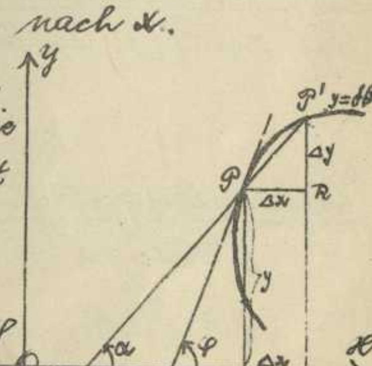
Wichtige Grenzwerte: $\lim\limits_{n=\infty}\frac{x^n}{n!}=0$; $\lim\limits_{x=0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Der Differentialquotient: Ist $y=f(x)$ und ändert sich $x$ um die kleine Größe $\Delta x$, so wird sich unter Voraussetzung der Stetigkeit das $y$ um die kleine Größe $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$ ändern. Man bezeichnet den Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ mit

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

als Differentialquotienten der Funktion $y=f(x)$ nach $x$.

Geometrische Deutung des Differentialquotienten:




Der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\alpha$ bestimmt die Neigung der Sehne $PP'$ gegen die $+X$-Axe. Rückt $P'$ nach $P$, nähert sich also $\Delta x$ der Null, so geht die Sehne in die Tangente in $P$ über und es wird der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x=0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\varphi$ gleich der Neigung der Tangente an die Kurve

$y=f(x)$ im Punkte $P(x,y)$ gegen die $+X$-Axe.

## Differentiation einfacher Funktionen:

$y = \text{const}$; $\quad \frac{dy}{dx} = 0$

$y = x$; $\quad \frac{dy}{dx} = 1$

$y = x^n$; $\quad \frac{dy}{dx} = n\cdot x^{n-1}$ für ganze und gebrochene, positive und negative $n$.

$y = \sin x$; $\quad \frac{dy}{dx} = \cos x$

$y = \cos x$; $\quad \frac{dy}{dx} = -\sin x$

$y = a^x$; $\quad \frac{dy}{dx} = a^x \cdot \lg a$

Speziell: $y = e^x$; $\quad \frac{dy}{dx} = e^x$

Dabei bedeutet $\lg a$ den natürlichen Logarithmus von $a$ zur Basis $e$, wo

$$e = \lim_{\varepsilon=0}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}7182818284 59\ldots$$

## Differentiationsregeln:

$$\frac{d(a\cdot u)}{dx} = a\cdot\frac{du}{dx}.$$

$$\frac{d(u\pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}.$$

$$\frac{d(u\cdot v)}{dx} = u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{du}{dx}.$$

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\cdot\frac{du}{dx} - u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

$$\frac{dF(u)}{dx} = \frac{dF(u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

## Differentiation weiterer Funktionen:

$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$; $\quad \frac{dy}{dx} = n a_0 x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}$.

$y = \operatorname{tg} x$; $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$y = \operatorname{cotg} x$; $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

## Differentiation der inversen Funktionen:

Ist $x = F(y)$ die inverse Funktion zu $y = f(x)$, so ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

## Differentialquotienten einfacher Funktionen (Fortsetzung):

$y = \overset{a}{\log}\, x$; $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cdot\lg a}$; speziell:

$y = \lg x$; $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$.

$y = \arc\sin x\,;\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,;$

$y = \arc\cos x\,;\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,;$

$y = \arc\operatorname{tg} x\,;\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}\,;$

$y = \arc\operatorname{cotg} x\,;\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}\,;$

Dabei sind die Differentialquotienten von $y = \arc\sin x$ und $y = \arc\cos x$ für den ersten Hauptwert genommen; beim Übergang zum zweiten Hauptwert ändert sich das Vorzeichen dieser beiden Differentialquotienten.

## Aufgaben.

I. Man differentiiere folgende Funktionen (das Resultat der Differentiation ist jedesmal beigefügt):

1.) $y = 3x + \frac{x^3}{3} - \frac{2}{5}x^5\,;\qquad \frac{dy}{dx} = 3 + x^2 - 2x^4.$

2.) $y = \frac{a}{3x^6}\,;\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-2a}{x^7}$

3.) $y = \sqrt[3]{x^4}\,;\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}\cdot\sqrt[3]{x}$

4.) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\,;\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{2x\cdot\sqrt{x}}$

5.) $y = \frac{\sqrt{x}}{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,;\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{5}{6x\cdot\sqrt[6]{x^5}}$

6.) $y = \sqrt{\frac{x\cdot\sqrt{x}}{a\cdot\sqrt[3]{x^2}}}\,;\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{5}{12\cdot\sqrt[12]{a^6x^7}}$

7.) $y = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}}}\,;\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{7}{4x^2}\sqrt{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x}}}$

8.) $y = \frac{1}{\sin x}\,;\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\operatorname{cotg} x}{\sin x}$

9.) $y = \frac{ax}{\cos x}\,;\qquad \frac{dy}{dx} = a\cdot\frac{\cos x + x\cdot\sin x}{\cos^2 x}$

10.) $y = 2\sin^2\frac{x}{2}\,;\qquad \frac{dy}{dx} = \sin x$

11.) $y = x\cdot\operatorname{tg} x\,;\qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x}$

12.) $y = (1+x)\cdot e^x\,;\qquad \frac{dy}{dx} = e^x(2+x)$

13.) $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right);\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$

14.) $y = x^n\cdot\sin x\,;\qquad \frac{dy}{dx} = x^{n-1}(x\cos x + n\cdot\sin x)$

15.) $y = (a+x)\sqrt{x}\,;\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a+3x}{2\sqrt{x}}$

16.) $y = \sin(x\cdot\cos x)\,;\qquad \frac{dy}{dx} = (\cos x - x\sin x)\cdot\cos(x\cdot\cos x)$

17.) $y=\sin\left[x^n(1-x)^m\right]$; $\quad \frac{dy}{dx}=x^{n-1}(1-x)^{m-1}\left[n-(n+m)x\right]\cdot\cos\left[x^n(1-x)^m\right]$

18.) $y=tg(x^3)$; $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{\cos^2(x^3)}$

19.) $y=tg^3x$; $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{3\,tg^2x}{\cos^2x}$

20.) $y=tgx-cotgx$; $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{4}{\sin^2 2x}$

21.) $y=lg(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)$; $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{a_1+2a_2x+3a_3x^3}{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3}$

22.) $y=lg(a+b\cdot e^{cx})$; $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{bc\cdot e^{cx}}{a+b\cdot e^{cx}}$

23.) $y=a^x\cdot tgx$; $\quad \frac{dy}{dx}=a^x\left(\frac{1}{\cos^2x}+lga\cdot tgx\right)$

24.) $y=x\cdot arc\cos x$; $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+arc\cos x$

25.) $y=arc\sin\sqrt{x}$; $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

26.) $y=arc\sin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$

27.) $y=arc\,tg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

28.) $y=lg\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$; $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{2}{\sin x}$

29.) $y=e^{-\alpha x}(a\cdot\sin\beta x+b\cdot\cos\gamma x)$; $\quad \frac{dy}{dx}=e^{-\alpha x}\left[a(\beta\cos\beta x-\alpha\sin\beta x)-b(\alpha\cos\gamma x+\gamma\sin\gamma x)\right]$

30.) $y=\sqrt{arc\,tgx+arc\,cotgx}$; $\quad \frac{dy}{dx}=0$

31.) $y=\frac{a^2}{2}arc\sin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$; $\quad \frac{dy}{dx}=\sqrt{a^2-x^2}$

32.) $y=\frac{1}{2}\left(lg(x+\sqrt{1+x^2})+x\sqrt{1+x^2}\right)$; $\quad \frac{dy}{dx}=\sqrt{1+x^2}$

33.) $y=arc\,tg(m\,tgx)$; $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{m}{\cos^2x+m^2\cdot\sin^2x}$

34.) $y=\frac{1}{arc\cos x}$; $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}(arc\cos x)^2}$

35.) $y=lg\left(tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right)$; $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos x}$

36.) $y=lg\frac{a^x-2+a^{-x}}{a^x+2+a^{-x}}$; $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{4\cdot lga}{a^x-a^{-x}}$

37.) $y=lg\sqrt{\frac{a\,tgx-b}{a\cdot tgx+b}}$; $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{ab}{a^2\sin^2x-b^2\cos^2x}$

38.) $y=\frac{arc\,tg(x-1)}{\cos^2x}$; $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\cos x+2(x^2-2x+2)\cdot\sin x\cdot arc\,tg(x-1)}{\cos^3x\cdot(x^2-2x+2)}$

39.) $y=\frac{\log^a(\sin 2x)}{e^{x^2+\sqrt{x}}}$; $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{4\sqrt{x}\cdot\cos 2x-(1+4x\sqrt{x})\sin 2x\cdot lga\cdot\log^a(\sin 2x)}{2\sqrt{x}\cdot\sin 2x\cdot e^{x^2+\sqrt{x}}\cdot lga}$

40.) $y=lg\left[e^{\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}\right]$; $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-1+x+2x^3+\sqrt{1+x^2}}{2x\sqrt{1+x^2}}$.

II. Man berechne die natürlichen Logarithmen folgender Zahlen auf 5 Dezimalen genau: $327$; $0{,}2958$; $\frac{\pi}{2}$.

18. I. 1909. **Höhere Mathematik I.** № 9.

## Logarithmische Differentiation:

Beispiele: 1.) $y = \frac{u^\alpha \cdot v^\beta}{w^\gamma}$; $\lg y = \alpha \lg u + \beta \cdot \lg v - \gamma \cdot \lg w$

$$\frac{1}{y}\,\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\beta}{v}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{\gamma}{w}\cdot\frac{dw}{dx};\quad \text{somit}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u^\alpha \cdot v^\beta}{w^\gamma}\left(\frac{\alpha}{u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\beta}{v}\cdot\frac{dv}{dx} - \frac{\gamma}{w}\cdot\frac{dw}{dx}\right).$$

2.) $y = u^v$; $\lg y = v \cdot \lg u$; $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}\cdot\frac{du}{dx} + \lg u \cdot \frac{dv}{dx}$,

$$\frac{dy}{dx} = u^v\cdot\left(\frac{v}{u}\cdot\frac{du}{dx} + \lg u\cdot\frac{dv}{dx}\right).$$

## Die hyperbolischen Funktionen:

$$y = \cos h x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};\quad \frac{dy}{dx} = \sin h x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

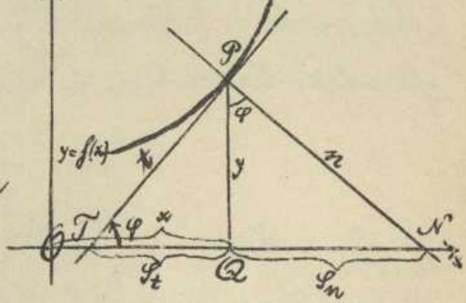
$$y = \sin h x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\quad \frac{dy}{dx} = \cos h x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Dabei gelten die Formeln: $\cos^2 h x - \sin^2 h x = 1$

$$\sin h(x_1 + x_2) = \sin h x_1 \cdot \cos h x_2 + \cos h x_1 \cdot \sin h x_2.$$

$$\cos h(x_1 + x_2) = \cos h x_1 \cdot \cos h x_2 + \sin h x_1 \cdot \sin h x_2.$$

## Gleichung der Tangente und Normale im Punkt $P(x, y)$ an die Kurve $y = f(x)$:




Tangente: $Y - y - (X - x)\cdot\frac{dy}{dx} = 0$;

Normale: $X - x + (Y - y)\cdot\frac{dy}{dx} = 0$,

wobei $X$ und $Y$ die laufenden Koordinaten der Geraden sind.

Länge der Tangente: $PT = t = y \cdot \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{dy}{dx}}$

Länge der Normalen: $PN = n = y \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

Länge der Subtangente: $QT = S_t = \frac{y}{\frac{dy}{dx}}$

Länge der Subnormalen: $QN = S_n = y \cdot \frac{dy}{dx}$.

Ist die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten gegeben durch $\varrho = f(\varphi)$, so ist die Neigung der Tangente im Punkt $P(\varrho, \varphi)$ gegen die Senkrechte zum Radiusvektor:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\varrho}\cdot\frac{d\varrho}{d\varphi}.$$

Länge der Polartangente:

$$PT = \frac{\varrho}{\frac{d\varrho}{d\varphi}} \cdot \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}$$

Länge der Polarnormalen:

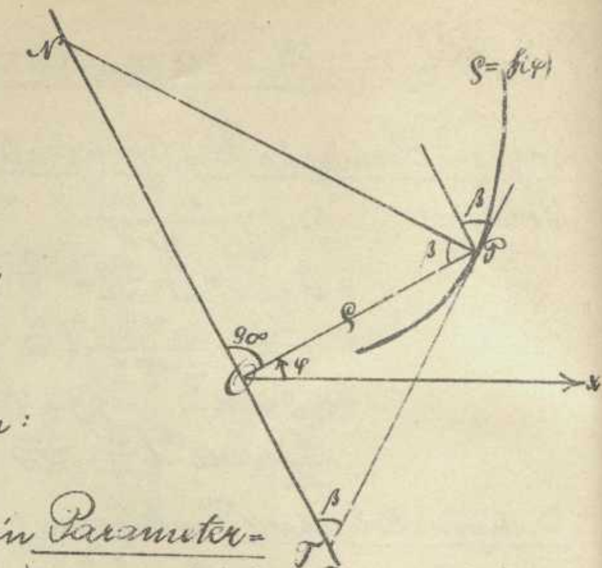
$$PN = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2} .$$

Länge der Polar-Subtangente:

$$OT = \frac{\varrho^2}{\frac{d\varrho}{d\varphi}} .$$

Länge der Polar-Subnormalen:

$$ON = \frac{d\varrho}{d\varphi} .$$




Neigung der Tangente einer in Parameterform gegebenen Kurve $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ im Punkte $(t)$:

$$tg\,\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} .$$

Gleichung der Tangente und Normalen an die Kurve $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$ im Punkte $(x, y)$:

Tangente: $(X - x) \cdot \frac{dy}{dt} - (Y - y) \cdot \frac{dx}{dt} = 0$,

Normale: $(X - x) \cdot \frac{dx}{dt} + (Y - y) \cdot \frac{dy}{dt} = 0$, wobei $X, Y$ die laufenden Koordinaten der Tangente bezw. Normalen sind.

## Aufgaben.

I. Man bilde die Differentialquotienten folgender Funktionen (das Resultat ist beigefügt):

1.) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{ax^2 + bx + c}}$; $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3} \frac{2ax + b}{\sqrt[3]{(ax^2 + bx + c)^4}}$.

2.) $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - 1}$; $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot (\sqrt[3]{x} - 1)^2}$.

3.) $y = a^{\frac{1}{x}} + b$; $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \cdot a^{\frac{1}{x}} \cdot lg\,a$.

4.) $y = a \cdot e^{x^2 + b}$; $\quad \frac{dy}{dx} = 2ax \cdot e^{x^2 + b}$.

5.) $y = 10^{\sqrt{x}}$; $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{lg\,10}{2\sqrt{x}} \cdot 10^{\sqrt{x}}$.

6.) $y = a^{tg(x+1)}$; $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{lg\,a}{\cos^2(x+1)} \cdot a^{tg(x+1)}$.

7.) $y = \frac{(a-x)(a^2-x^2)}{x^3}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{a(x-a)(x+3a)}{x^4}$.

8.) $y = x^x$; $\frac{dy}{dx} = (1+\lg x)\cdot x^x$.

9.) $y = x^{\frac{1}{x}}$; $\frac{dy}{dx} = (1-\lg x)\cdot x^{\frac{1-2x}{x}}$.

10.) $y = (\sin x)^x$; $\frac{dy}{dx} = (x\cdot\operatorname{cotg} x + \lg(\sin x))(\sin x)^x$.

11.) $y = x^{\operatorname{tg} x}$; $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\lg x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)\cdot x^{\operatorname{tg} x}$

12.) $y = x^{\operatorname{arc}\cos x}$; $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\operatorname{arc}\cos x}{x} - \frac{\lg x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\cdot x^{\operatorname{arc}\cos x}$

13.) $y = \frac{\sin x}{x^n}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{x\cos x - n\sin x}{x^{n+1}}$.

14.) $y = \sqrt{\frac{a+b\cdot\cos x}{a-b\cdot\cos x}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{-ab\cdot\sin x}{(a-b\cdot\cos x)\sqrt{a^2-b^2\cdot\cos^2 x}}$.

15.) $y = (\operatorname{arc}\operatorname{tg} x)^{x^2}$; $\frac{dy}{dx} = \left(2x\cdot\lg(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x) + \frac{x^2}{(1+x^2)\operatorname{arc}\operatorname{tg} x}\right)(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x)^{x^2}$.

16.) $y = \frac{e^x}{\cos x}$; $\frac{dy}{dx} = e^x\cdot\frac{\cos x + \sin x}{\cos^2 x}$.

17.) $y = \lg\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$.

18.) $y = \sqrt[3]{\frac{x+\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}+1}}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{3\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2\cdot(x-\sqrt{x}+1)^2}}$

19.) $y = \lg(\lg x)$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cdot\lg x}$.

20.) $y = \lg\sqrt{x+\sin x}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\,\frac{1+\cos x}{x+\sin x}$.

21.) $y = \overset{10}{\log}(ax)$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cdot\lg 10}$.

22.) $y = \frac{1}{(\overset{a}{\log} x)^2}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{x\cdot\lg a\cdot(\overset{a}{\log} x)^3}$.

23.) $y = c\cdot\lg(c-\sqrt{c^2-x^2})+\sqrt{c^2-x^2}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{c-\sqrt{c^2-x^2}}$.

24.) $y = \frac{\operatorname{arc}\operatorname{tg} x}{\lg(\operatorname{tg} x)}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2x\cdot\lg(\operatorname{tg} x) - 2(1+x^2)\cdot\operatorname{arc}\operatorname{tg} x}{(1+x^2)\cdot\sin 2x\cdot(\lg(\operatorname{tg} x))^2}$.

25.) $y = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$; $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x+1}{2x\cdot(x+1)^2\cdot\sqrt{x}}$.

II. Man beweise die Richtigkeit der Additionsformeln für $\cosh(x_1+x_2)$ und $\sinh(x_1+x_2)$ (Vgl. 1. Seite dieses Blattes) und zeige, daß für $y = \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ die Formeln gelten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 h x}; \quad \operatorname{tgh}(x_1+x_2) = \frac{\operatorname{tgh} x_1 + \operatorname{tgh} x_2}{1+\operatorname{tgh} x_1\cdot\operatorname{tgh} x_2}.$$

Ferner

berechne man die inversen Funktionen zu $y = \cosh x$, $y = \sinh x$, $y = \operatorname{tgh} x$ und bestimme ihre Differentialquotienten.

III. Beweise, daß die Kurve $x = c \cdot \lg \frac{c + \sqrt{c^2 - y^2}}{y} - \sqrt{c^2 - y^2}$ konstante Tangentenlänge $c$ hat.

IV. Man gebe ein Bild des Verlaufes folgender Kurven:

1.) Archimedische Spirale: $\rho = a \cdot \varphi$

2.) Hyperbolische Spirale: $\rho = \frac{a}{\varphi}$

3.) Logarithmische Spirale: $\rho = a \cdot e^{k\varphi}$ und zeige, daß

bei 1.) die Polar-Subnormale
bei 2.) die Polar-Subtangente
} konstante Länge hat, während

3.) die logarithmische Spirale jeden Radiusvektor unter konstantem Winkel schneidet.

V. Man zeige, daß das Stück der Tangente an die Kurve $x = a \cdot \cos^3 t$, $y = a \cdot \sin^3 t$ zwischen den Koordinatenaxen konstant und gleich $a$ ist.

---

25. I. 1909. **Höhere Mathematik I.** № 10.

Höhere Differentialquotienten: Ist $y = f(x)$ eine Funktion von $x$, und $\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$ ihr erster Differentialquotient, so heisst

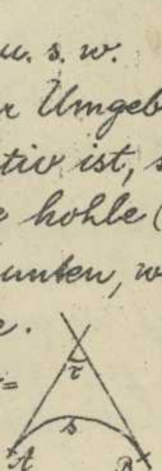
$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x)$ ihr zweiter Differentialquotient,

$\frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = y''' = f'''(x)$ ihr dritter Differentialquotient,

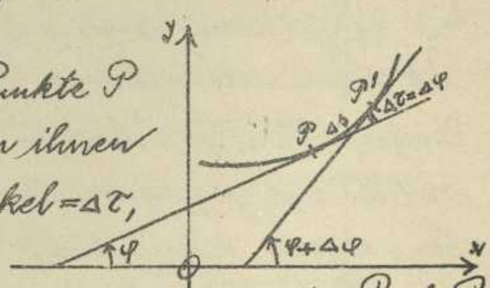
$\vdots$

$\frac{d\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}{dx} = \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ ihr $n^{\text{ter}}$ Differentialquotient, u. s. w.

Kurvendiskussion: Eine Kurve $y = f(x)$ steigt in der Umgebung des Punktes $P(x, y)$, wenn $\frac{dy}{dx}$ für diesen Punkt positiv ist, sie fällt, wenn $\frac{dy}{dx}$ negativ ist. Die Kurve wendet ihre hohle (konkave) Seite nach oben, wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist, nach unten, wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ gibt die Wendepunkte.




Die Krümmung der Kurve: Ist $s$ die Länge des Bogenstückes einer Kurve zwischen 2 Punkten $A$ und $B$, $\tau$ der Winkel, den die Tangenten in $A$ und $B$ an die Kurve miteinander einschliessen (Kontingenzwinkel), so bezeichnet man als durchschnittliche Krümmung des Kurvenstückes $AB$ den Quotienten $K_m = \frac{\tau}{s}$.



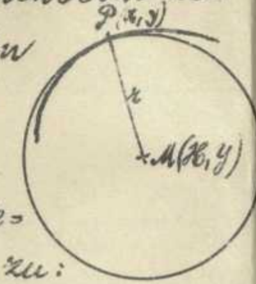

Sind $A$ und $B$ einander benachbarte Punkte $P$ und $P'$ und ist das Bogenstück zwischen ihnen gleich $\Delta s$, der zugehörige Kontingenzwinkel $= \Delta\tau$, so heisst der Grenzwert

$$K = \lim_{\Delta s = 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \lim_{\Delta s = 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$ die Krümmung der Kurve im Punkt $P$.

Der Wert der Krümmung der Kurve $y = f(x)$ im Punkt $P(x, y)$ wird danach:
$$K = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{f''(x)}{\left(1 + f'(x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nimmt man als Kurve einen Kreis vom Radius $r$, so ist dessen

Krümmung in jedem Punkt konstant $= \frac{1}{r}$. Daher bezeichnet man allgemein den reziproken Wert $\frac{1}{k}$ der Krümmung als Krümmungsradius der Kurve $y=f(x)$ im Punkt $(x,y)$, den zugehörigen Kreis als Krümmungskreis, seinen Mittelpunkt M als Krümmungsmittelpunkt. Im allgemeinen durchsetzt der Krümmungskreis im Berührpunkt die Kurve; in einem Wendepunkt geht der zugehörige Krümmungskreis in die Wendetangente über.



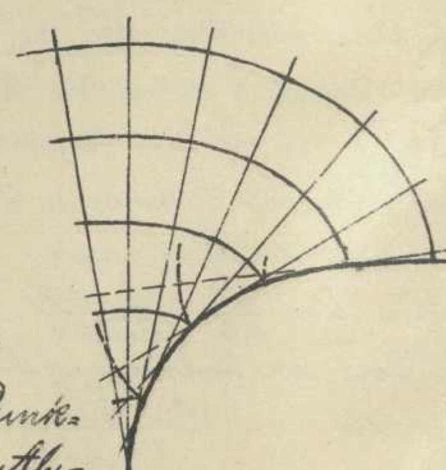

Die Koordinaten $(\mathcal{H}, \mathcal{Y})$ des Krümmungsmittelpunktes M zum Punkt $(x,y)$ der Kurve $y=f(x)$ ergeben sich zu:

$$\mathcal{H} = x - f'(x) \cdot \frac{1+f'(x)^2}{f''(x)}, \qquad \mathcal{Y} = y + \frac{1+f'(x)^2}{f''(x)},$$

während der Krümmungsradius $r = \frac{\left(1+f'(x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}$ wird.

Fasst man in den Ausdrücken für $\mathcal{H}$ und $\mathcal{Y}$ $x$ als Parameter auf, so geben beide Gleichungen die Parametergleichungen des geometrischen Ortes der Krümmungsmittelpunkte, der Evolute der gegebenen Kurve $y=f(x)$.

Jede Normale der gegebenen Kurve ist Tangente an die Evolute, die Evolute kann daher als Umhüllungsgebilde sämtlicher Normalen der gegebenen Kurve aufgefasst werden.



Die Länge eines Bogens der Evolute ist gleich der Differenz der in seinen Endpunkten berührenden Krümmungsradien der gegebenen Kurve. Die gegebene Kurve kann durch Abwickeln eines Fadens von der Evolute erzeugt werden; in diesem Sinne heisst sie Evolvente der Evolute. Sämtliche Punkte des Fadens beschreiben bei der Ab=

wicklung Evolventen. Diese bilden ein System von Parallelkurven zur gegebenen Kurve.

Ist die Gleichung der Kurve in Parameterform gegeben:

$x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, so ist der zugehörige Krümmungsradius $r = \frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-y'x''}$, während die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes $X = x - y' \cdot \frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}$, $Y = y + x' \cdot \frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}$, wobei die Striche die Differentiation nach dem Parameter $t$ bedeuten.

Liegt die Kurvengleichung in Polarkoordinaten vor: $\varrho = f(\varphi)$, so wird der Krümmungsradius $r = \frac{(\varrho^2+\varrho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2+2\varrho'^2-\varrho\varrho''}$, wobei $\varrho' = \frac{d\varrho}{d\varphi}$, $\varrho'' = \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}$.

Bedingung der Wendepunkte:

In Parameterform: $x'y''-y'x'' = 0$

In Polarkoordinaten: $\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho'' = 0$.

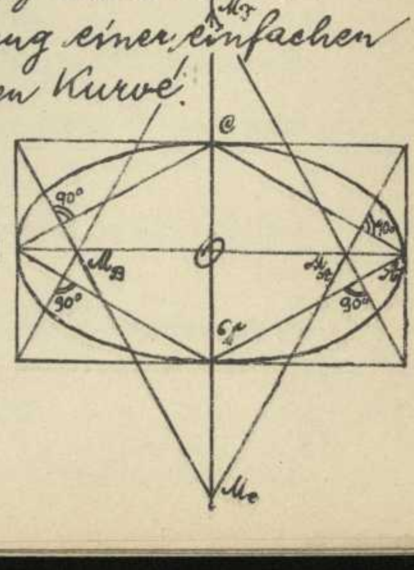
# Aufgaben.

1.) Man zeichne folgende Kurven nebst ihren allenfalsigen Vertikal- und Horizontaltangenten:

a.) $y = \frac{(x-1)(x-5)}{x-2}$; b.) $y = \frac{a x^2}{a^2 - x^2}$.

2.) Man stelle die Gleichung der Evolute der Kurve $y = x^{\frac{3}{2}}$ auf und zeichne die Evolute als Umhüllungsgebilde der Normalen der gegebenen Kurve unter Benützung einer einfachen Tangentenkonstruktion der ursprünglichen Kurve.

3.) Zeichne die Evolute sowie einige innere und äussere Parallelkurven der Ellipse $x = a\cos\lambda$, $y = b\sin\lambda$ und beweise die nebenstehende Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte in den Endpunkten der Axen der Ellipse.



4.) Man zeige, dass die Evolute $(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$ der Ellipse mit den Halbaxen a und b durch Zusammendrükkung in Richtung der y-Axe in eine Asteroide von der Gleichung $\xi^{\frac{2}{3}}+\eta^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{2}{3}}$ übergeht.

5.) Gesucht die Parametergleichungen der Evolute und des Systems von Parallelkurven der Asteroide $x=a\cos^3t$, $y=a\cdot\sin^3t$.

6.) Berechne die Wendepunkte der verkürzten Cykloide
$x=rt-l\cdot\sin t$, $y=r-l\cdot\cos t$ $(l<r)$. Insbesondere sollen für $l=\frac{r}{2}$ auch die Koordinaten der Wendepunkte und die Richtungen der Wendetangenten berechnet und hierauf die Kurve gezeichnet werden.

7.) Man berechne Krümmungsradius und Wendepunkte der Spiralen $\rho=\frac{a}{\sqrt{\varphi}}$.

8.) Die Erdmeridiane sind Ellipsen mit den Halbaxen $a=6377{,}4$ km, $b=6356{,}1$ km. Berechne den Krümmungsradius im Pol und im Äquator und die Entfernung der Krümmungsmittelpunkte vom Erdmittelpunkt.

1. II. 1909. **Höhere Mathematik I.** № 11.

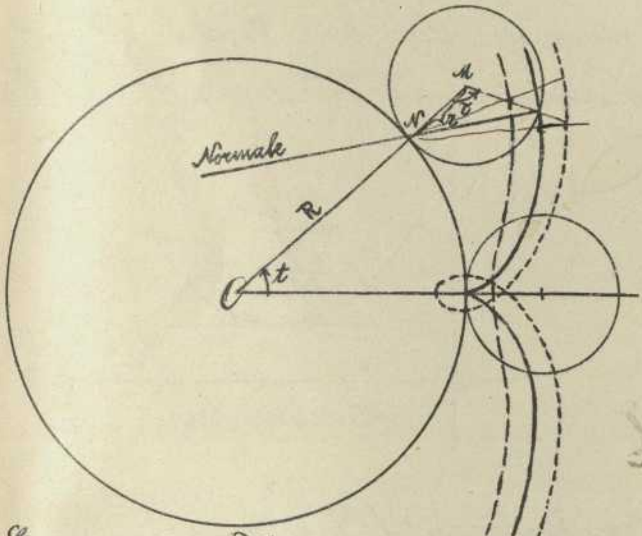
## Gleichungen der Rollkurven (Trochoiden):

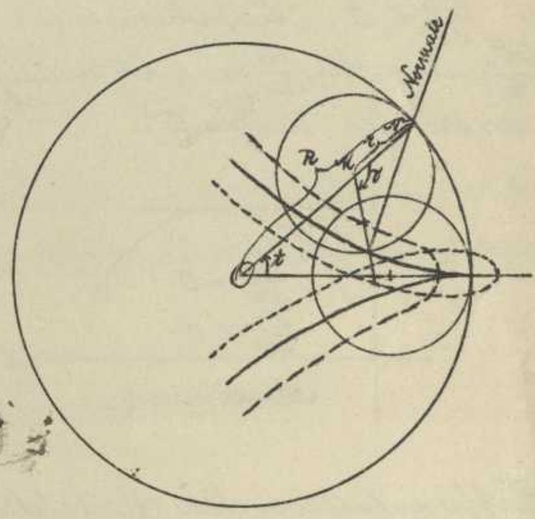
a) Epizykloide (Epitrochoide):

$$x = (R+r)\cos t - b\cdot\cos\left(\frac{R+r}{r}t\right)$$
$$y = (R+r)\sin t - b\cdot\sin\left(\frac{R+r}{r}t\right).$$

b) Hypozykloide (Hypotrochoide):

$$x = (R-r)\cos t + b\cdot\cos\left(\frac{R-r}{r}t\right)$$
$$y = (R-r)\sin t - b\cdot\sin\left(\frac{R-r}{r}t\right).$$




Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

$b < r$: Verkürzte Epi-(Hypo-)Zykloide,

$b = r$: Gemeine Epi-(Hypo-)Zykloide,

$b > r$: Verlängerte Epi-(Hypo-)Zykloide.

Doppelte Erzeugungsweise der gemeinen Trochoiden: Die gemeine Epizykloide für $r = \frac{R}{n}$ ist identisch mit der gemeinen Hypozykloide für $r = \frac{n+1}{n}R$.

Aus der Gleichung der Rollkurven erhält man für $r = \infty$ die Gleichung der Kreisevolventen:

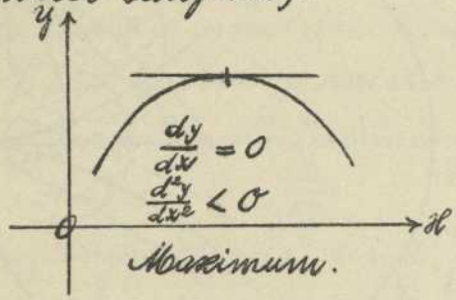
$$\left.\begin{aligned} x &= (R+b)\cos t + Rt\cdot\sin t \\ y &= (R+b)\sin t - Rt\cdot\cos t \end{aligned}\right\}\begin{aligned} &b > 0: \text{ Verkürzte Kreisevolvente,} \\ &b = 0: \text{ Gemeine } \quad " \quad , \\ &b < 0: \text{ Verlängerte } \quad " \quad . \end{aligned}$$

Für alle Rollkurven einschliesslich der Kreisevolventen gilt der

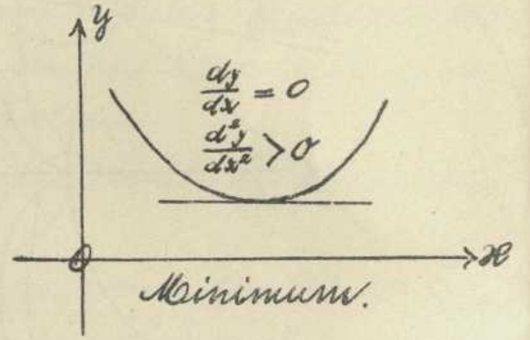
Satz: Die Normale geht stets durch den Berührpunkt des rollenden Kreises mit dem festen Kreis.

## Maxima und Minima:

Eine Funktion einer Variabeln $y = f(x)$ hat für diejenigen Werte $x$ einen Extremwert (von $y$), für welche $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, und zwar hat die Funktion ein Maximum, wenn für das betreffende $x$ $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, ein Minimum, wenn für den betr. Wert $x$ $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$. ($\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ neben $\frac{dy}{dx} = 0$ gibt im allgemeinen einen Wendepunkt mit horizontaler Tangente).



Maximum.



Minimum.

## Differentiation der gerichteten Grössen (Vektoren).

1.) Differentiationsregeln:

$\mathfrak{X} = f(t)\cdot\mathfrak{A}$ ; $\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = \frac{df}{dt}\cdot\mathfrak{A}$, wo $\mathfrak{A}$ ein konstanter Vektor ist.

$\mathfrak{X} = \mathfrak{U} + \mathfrak{W}$ ; $\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = \frac{d\mathfrak{U}}{dt} + \frac{d\mathfrak{W}}{dt}$.

$\mathfrak{X} = f(t)\cdot\mathfrak{U}$ ; $\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = \frac{df}{dt}\mathfrak{U} + f(t)\cdot\frac{d\mathfrak{U}}{dt}$.

$\mathfrak{H} = \mathfrak{U}\mathfrak{W}$ ; $\frac{d\mathfrak{H}}{dt} = \frac{d\mathfrak{U}}{dt}\mathfrak{W} + \mathfrak{U}\frac{d\mathfrak{W}}{dt}$

$\mathfrak{X} = V\mathfrak{U}\mathfrak{W}$ ; $\frac{d\mathfrak{X}}{dt} = V\frac{d\mathfrak{U}}{dt}\mathfrak{W} + V\mathfrak{U}\frac{d\mathfrak{W}}{dt}$.

2.) Ist ein beweglicher Punkt $P$ als Endpunkt des Vektors $\mathfrak{X} = ix + jy + kz$ gegeben, so ist

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d\mathfrak{X}}{dt} = i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} + k\frac{dz}{dt} = \mathfrak{V} \text{ seine Geschwindigkeit} \\ \frac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2} = i\frac{d^2x}{dt^2} + j\frac{d^2y}{dt^2} + k\frac{d^2z}{dt^2} = \mathfrak{G} \text{ seine Beschleunigung} \end{array}\right\} \text{der Größe und Richtung nach.}$$

Größe der Geschwindigkeit: $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$,

Größe der Beschleunigung: $g = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$.

3.) Sind $x, y, z$ Funktionen der von einem festen Punkt aus gemessenen Bogenlänge $s$ der Kurve, welche der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{r} = ix + jy + kz$ beschreibt, so ist

$\frac{d\mathfrak{r}}{ds} = \mathfrak{t}$, wo $\mathfrak{t}$ der Einheitsvektor in Richtung der Tangente ist,

$\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2} = \frac{\mathfrak{n}}{r}$, wo $\mathfrak{n}$ der Einheitsvektor in Richtung der (Haupt-) Normalen gegen den Krümmungsmittelpunkt zu und $r$ der Krümmungsradius der Kurve im betr. Punkte ist.

4.) Ist der Vektor $\mathfrak{r} = ix + jy + kz$ von einem Parameter $t$ abhängig, so ist

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{t} \cdot v = \mathfrak{v}$$

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{t} \cdot \frac{dv}{dt} + \mathfrak{n} \cdot \frac{v^2}{r},$$ wo $\frac{v^2}{r}$ die (normale) Zentripetalbeschleunigung, $\frac{dv}{dt} = \frac{ds}{dt}$ die (tangentiale) Bahnbeschleunigung darstellt.

## Aufgaben.

1.) Man zeichne

a.) die verlängerte und verkürzte Epizykloide für $r = R$ (Pascal'sche Schnecken)

b.) die Cardioide einmal als gemeine Epizykloide für $r = R$, dann als gemeine Hypozykloide für $r = 2R$.

2.) Beweise, daß die gemeine Hypozykloide für $r = \frac{R}{2}$ in eine Gerade, für $r = \frac{R}{4}$ in eine Asteroide übergeht, während die verlängerte oder verkürzte Hypozykloide für $r = \frac{R}{2}$ eine Ellipse wird. Welche Normalenkonstruktion ergibt sich hieraus für die Ellipse?

3.) Man zeige, daß die Epizykloide für $r = \infty$ in die Kreisevolvente übergeht.

4.) Man bilde die Evolute der Kurve $x = R(\cos t + t \sin t)$, $y = R(\sin t - t\cos t)$.

5.) Wo ist die logarithmische Kurve ($y = \lg x$) am stärksten ge-

krümmt und wie groß ist in diesem Punkte der Krümmungs=
radius?

6.) In ein Dreieck ABC soll ein Rechteck von möglichst gros=
sem Inhalt einbeschrieben werden, dessen eine Seite auf AB
liegt. Wie groß sind die Seiten und der Inhalt des Rechtecks?

7.) Aus zwei gegebenen Seiten das größtmögliche Dreieck zu
bilden.

8.) Ein Innenraum, dessen Wand die Form eines Kreiszylin=
dermantels von der Höhe h hat und der von einem halb=
kugelförmigen Gewölbe vom Radius r bedeckt ist, soll so
gebaut werden, dass seine Begrenzungsfläche (Boden in=
begriffen) bei gegebenem Volumen ein Minimum wird.

8. II. 1909. **Höhere Mathematik I.** № 12.

## Integralrechnung.

Ist $\varphi(x) = \frac{df(x)}{dx}$ der Differentialquotient einer Funktion $y = f(x)$, so heisst $f(x)$ das unbestimmte Integral von $\varphi(x)$:

$$\frac{df(x)}{dx} = \varphi(x)\,; \quad f(x) = \int \varphi(x)\,dx + C.$$

Da $\int \varphi(x)\,dx$ hiebei nur bis auf eine willkürliche Konstante $C$ bestimmt ist, nennt man das Integral ein unbestimmtes.

Integrationsregeln: $\int a \cdot u\,dx = a\int u\,dx$, wobei $a$ konstant ist.

$$\int (u \pm v)\,dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx.$$

Methode der Substitution einer neuen Variabeln: Setzt man $x = \psi(z)$, $dx = \psi'(z)\,dz$, so wird $\int \varphi(x)\,dx = \int \varphi(\psi(z)) \cdot \psi'(z)\,dz$. Beispiel: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \lg f(x) + C$.

Methode der partiellen Integration: $\int u \cdot \frac{dv}{dx}\,dx = u \cdot v - \int v \cdot \frac{du}{dx}\,dx$.

Häufig vorkommende Integrale:

1.) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, giltig für jedes $n$ mit Ausnahme von $n = -1$;

2.) $\int \frac{dx}{x} = \lg x + C$;

3.) $\int e^x\,dx = e^x + C$;

4.) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;

5.) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;

6.) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

7.) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$;

8.) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;

9.) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C$.

10.) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \lg(x + \sqrt{x^2 \pm 1}) + C$;

11.) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \lg\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$;

12.) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + C$;

13.) $\int \sqrt{x^2 \pm 1}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 \pm 1} \pm \lg(x + \sqrt{x^2 \pm 1})\right) + C$.

## Aufgaben.

I. Man werte folgende Integrale aus (die Werte derselben sind beigefügt):

1.) $\int 2\,dx = 2x + C$;

2.) $\int \frac{dx}{x^7} = -\frac{1}{6x^6} + C$;

3.) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C$;

4.) $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{6}{13}x^2 \cdot \sqrt[6]{x} + C$,

5.) $\int \frac{1+x+2x^2}{x}\,dx = \lg x + x + x^2 + C$;

6.) $\int \frac{\sqrt{x}(5-x)}{x^2}\,dx = -\frac{2}{\sqrt{x}}(x+5) + C$;

7.) $\int \left(\frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{x}}\right)^3 dx = \frac{2}{5\sqrt{x}}(\beta^3 x^3 + 5\alpha\beta^2 x^2 + 15\alpha^2\beta x - 5\alpha^3) + C$;

8.) $\int (a+bx)^n\,dx = \frac{1}{(n+1)b}(a+bx)^{n+1} + C$;

9.) $\int \frac{x^2+2x+2}{x-1}\,dx = \frac{(x-1)^2}{2} + 4(x-1) + 5\lg(x-1) + C$;

10.) $\int \frac{2x+5}{(x+1)^3}\,dx = -\frac{4x+7}{2(x+1)^2} + C$

11.) $\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx}} = -\frac{2}{b}\sqrt{a-bx} + C$;

12.) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\,dx = x + 4\sqrt{x} + 4\lg(\sqrt{x}-1) + C$;

13.) $\int \frac{x^5}{a^2+x^2}\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{a^2}{2}x^2 + a^4 \lg\sqrt{a^2+x^2} + C$; 14.) $\int \frac{a+bx+cx^2}{1+x^2}\,dx = cx + b\cdot\lg\sqrt{1+x^2} + (a-c)\,\mathrm{arc\,tg}\,x + C$;

15.) $\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x-3}{2} + C$; 16.) $\int \frac{3+10x}{(4+3x+5x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{4+3x+5x^2} + C$;

17.) $\int \frac{5\,dx}{x^2(5-6x)^2} = \frac{12x-5}{5x(5-6x)} - \frac{12}{25}\lg\frac{5-6x}{x} + C$; 18.) $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$;

19.) $\int \sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$; 20.) $\int \frac{(\lg x)^2}{x}\,dx = \frac{1}{3}(\lg x)^3 + C$;

21.) $\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{3x}}\,dx = \frac{1-5\cdot e^{4x}}{5\cdot e^{5x}} + C$; 22.) $\int \frac{dx}{\sin^2(\alpha x+\beta)} = -\frac{1}{\alpha}\cdot\mathrm{cotg}(\alpha x+\beta) + C$;

23.) $\int \frac{\mathrm{arc\,tg}\,x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\mathrm{arc\,tg}\,x)^2 + C$; 24.) $\int e^{\sin x}\cdot\cos x\,dx = e^{\sin x} + C$;

25.) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x + C$; 26.) $\int \mathrm{cotg}\,x\,dx = \lg\sin x + C$;

27.) $\int x\cdot\sqrt[3]{\alpha+\beta x^2}\,dx = \frac{3}{8\beta}\sqrt[3]{(\alpha+\beta x^2)^4} + C$; 28.) $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

29.) $\int \mathrm{arc\,cotg}\,x\,dx = x\cdot\mathrm{arc\,cotg}\,x + \lg\sqrt{1+x^2} + C$; 30.) $\int x^2\cdot e^x\,dx = e^x(x^2-2x+2) + C$

31.) $\int x\cdot\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx = \frac{1}{2}\left((1+x^2)\,\mathrm{arc\,tg}\,x - x\right) + C$; 32.) $\int x^2\cdot\arccos x\,dx = \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{1}{9}(2+x^2)\sqrt{1-x^2} + C$;

33.) $\int x^3 \lg x\,dx = \frac{1}{16}(4x^4\lg x - x^4) + C$; 34.) $\int \sin x\cdot e^x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$;

35.) $\int \frac{\lg x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}(1+\lg x) + C$; 36.) $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx = -x\cdot\mathrm{cotg}\,x + \lg\sin x + C$;

37.) $\int \sin^5 x\,dx = \frac{\cos x}{15}(-15+10\cos^2 x - 3\cos^4 x) + C$; 38.) $\int \sin^6 x\,dx = \frac{1}{192}[60x - 48\sin 2x + 4\sin^3 2x + 9\sin 4x] + C$

39.) $\int \frac{8x^2-29x+24}{x(x-2)(x-3)}\,dx = \lg[x^4(x-2)(x-3)^3] + C$; 40.) $\int \frac{dx}{x^2-2x-8} = \lg\sqrt[6]{\frac{x-4}{x+2}} + C$.

II. Welchen größtmöglichen Flächeninhalt kann ein Kreissektor bei gegebenem Umfang $U$ haben?

III. Wie muß ein Kugelsektor gebildet werden, damit sein Volumen bei gegebener Oberfläche $O$ ein Maximum wird?

IV. Auf einer gegebenen Linie $MN$ einen Punkt $D$ zu finden, sodaß die Summe der Verbindungslinien mit zwei auf derselben Seite von $MN$ liegenden Punkten $A$ und $B$ ein Minimum wird.

V. Ein Körper bewegt sich auf der durch den Endpunkt des Vektors $\mathfrak{X} = i\cdot A\cos nt + j\cdot B\sin nt$ beschriebenen Ellipse; man zeige, daß die wirkende Kraft eine Zentralkraft ist, welche der Entfernung des beweglichen Punktes vom Koordinatenanfangspunkt <u>proportional</u> ist.

15. II. 1909. **Höhere Mathematik I.** № 13.

1.) Definition des bestimmten Integrals:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty}\left[f(a)+f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)+f\left(a+2\frac{b-a}{n}\right)+\cdots\cdots+f\left(a+(n-1)\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right]\cdot\frac{b-a}{n},$$

oder allgemeiner:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty}\left[f(x_1)\cdot\Delta x_1+f(x_2)\cdot\Delta x_2+\cdots\cdots+f(x_n)\cdot\Delta x_n\right],$$ wobei

$\Delta x_1+\Delta x_2+\cdots+\Delta x_n = b-a$ ist und $f(x_k)$ irgend einen Wert der Funktion $f(x)$ innerhalb des Intervalls $\Delta x_k$ bedeutet und beim Grenzübergang keine der Größen $\Delta x_k$ endlich bleiben darf.

2.) Zusammenhang zwischen dem bestimmten und unbestimmten Integral.

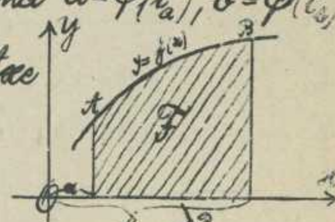
Ist $\Phi(x)=\int f(x)dx$, so ist $\int_a^b f(x)dx = \Phi(b)-\Phi(a)$.

Regel: $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

Das bestimmte Integral ist keine Funktion von $x$, sondern eine Zahl.

3.) Einführung einer neuen Veränderlichen in das bestimmte Integral:

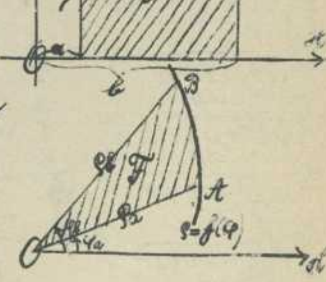
$$\int_{x=a}^{x=b} y\,dx = \int_{t=t_a}^{t=t_b}\psi(t)\cdot\varphi'(t)\,dt,$$ wenn $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ und $a=\varphi(t_a)$, $b=\varphi(t_b)$.




4a.) Flächeninhalt des von zwei Ordinaten, der x-Axe und der Kurve $y=f(x)$ begrenzten Stückes:

$$F=\int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

4b.) Flächeninhalt des von zwei Radienvektoren und der Kurve $\varrho=f(\varphi)$ begrenzten Stückes:




$$F=\int_{\varphi_a}^{\varphi_b}\frac{1}{2}\varrho^2\,d\varphi$$

5.) Bogenlänge $s$ der Kurve:

$y=f(x)$ $\quad$ $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $\quad$ $\varrho=f(\varphi)$

$$s=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \qquad s=\int_{t_a}^{t_b}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt. \qquad s=\int_{\varphi_a}^{\varphi_b}\sqrt{\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi.$$

6.) Schwerpunkt eines Flächenstückes

a.) in rechtwinkligen Koordinaten: $x_0=\dfrac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx}$; $\quad y_0=\dfrac{\int_a^b \frac{1}{2}y^2\,dx}{\int_a^b y\,dx}$;

Schwerpunkt eines Flächenstückes

a) in Polarkoordinaten: $x_0 = \dfrac{\int_{\varphi_a}^{\varphi_e} \frac{1}{3}\varrho^3 \cos\varphi\, d\varphi}{\int_{\varphi_a}^{\varphi_e} \frac{1}{2}\varrho^2\, d\varphi}$, $y_0 = \dfrac{\int_{\varphi_a}^{\varphi_e} \frac{1}{3}\varrho^3 \sin\varphi\, d\varphi}{\int_{\varphi_a}^{\varphi_e} \frac{1}{2}\varrho^2\, d\varphi}$.

γ) <u>Schwerpunkt eines Kurvenbogens</u>

a) in rechtwinkligen Koordinaten:

$$x_0 = \frac{\int_a^b x \cdot \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}, \quad y_0 = \frac{\int_a^b y \cdot \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx};$$

b) in Polarkoordinaten:

$$x_0 = \frac{\int_{\varphi_a}^{\varphi_e} \varrho \cdot \sqrt{\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2} \cdot \cos\varphi\, d\varphi}{\int_{\varphi_a}^{\varphi_e} \sqrt{\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi}, \quad y_0 = \frac{\int_{\varphi_a}^{\varphi_e} \varrho \cdot \sqrt{\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2} \cdot \sin\varphi\, d\varphi}{\int_{\varphi_a}^{\varphi_e} \sqrt{\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi}.$$

## Aufgaben.

I. Man werte folgende Integrale aus (das Resultat ist angegeben):

1) $\int \left(2\sqrt[3]{x} + \frac{6x}{\sqrt[3]{x}} - 9x\right)^2 dx = 27x^3 - \frac{81}{2}x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2} + 12x^2 + \frac{12}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C$

2) $\int \sqrt[6]{x^5}(\sqrt{x}+1)(2-\sqrt{x})^2 dx = \frac{24}{11}x \cdot \sqrt[6]{x^5} - \frac{18}{17}x^2 \cdot \sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{10}x^3 \cdot \sqrt[3]{x} + C$

3) $\int 4x^7(12-x^3)(6-\frac{1}{5}x^3)^3 dx = (6x^2 - \frac{1}{5}x^5)^4 + C$

4) $\int \frac{x^3}{3(1+2x)} dx = \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{24}x - \frac{1}{48}\lg(1+2x) + C$

5) $\int \frac{dx}{-5+6x-x^2} = \frac{1}{4}\lg\frac{x-1}{5-x} + C$

6) $\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

7) $\int \frac{x^2-2}{(x^2-2x+1)^2} dx = \frac{1+3x-3x^2}{3(x-1)^3} + C$

8) $\int \frac{x\,dx}{4-x^4} = \frac{1}{8}\lg\frac{x^2+2}{x^2-2} + C$

9) $\int \frac{21x^6}{(5-7x^3)^3} dx = \frac{14x^3-5}{14(5-7x^3)^2} + C$

10) $\int \frac{12x^{15}\,dx}{(1+x^4)^2} = \frac{3}{2}\,\frac{x^{12}-3x^8-9x^4-9}{1+x^4} + 9 \cdot \lg(1+x^4) + C$

11) $\int \frac{x^2\,dx}{12+5x^2} = \frac{1}{5}\left(x - \frac{2}{5}\sqrt{15}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right) + C$

12) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4+2x}} = \frac{1}{15}(32-8x+3x^2)\sqrt{4+2x} + C$

$\int \frac{x^5\,dx}{1+x^8}$

13.) $\int \frac{dx}{\sqrt{2rx - x^2}} = \arcsin \frac{x-r}{r} + C$

14.) $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$

15.) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \arccos \frac{1}{x} + C$

16.) $\int \cos^3 x \cdot \sin x\, dx = -\frac{1}{4} \cos^4 x + C$

17.) $\int \mathrm{tg}^3 x\, dx = \frac{1}{2\cos^2 x} + \lg \cos x + C$

18.) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^n x}\, dx = \frac{-2}{(n-2)\cdot \sin^{n-2} x} + C$

19.) $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\left( \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \lg \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right) + C$

20.) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x\, dx = x - \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x + C$

II. Man berechne die Bogenlänge der logarithmischen Kurve ($y = \lg x$) zwischen $x = 1$ und $x = 2$.

III. Welchen Inhalt hat das Flächenstück, welches von der Kreisevolvente $x = R(\cos t + t \cdot \sin t)$, $y = R(\sin t - t \cos t)$ zwischen den Punkten mit den Parameterwerten $t = 0$ und $t = t_0$, von dem Kreis $x = R\cos t$, $y = R \sin t$ und der Tangente im Punkt ($t_0$) an denselben begrenzt ist?

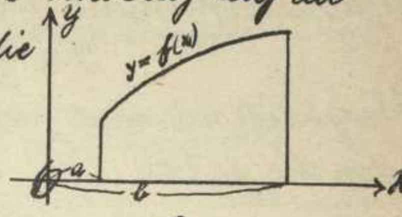
IV. Welches Flächenstück schliesst die Cissoide von der Gleichung $x = 2a \cdot \sin^2 \varphi$, $y = 2a \cdot \sin^2 \varphi \cdot \mathrm{tg}\, \varphi$ mit ihrer Asymptote ($x = 2a$) ein?

V. Man bestimme die Länge einer ganzen Windung der Archimedischen Spiralen $\varrho = a \cdot \varphi$.

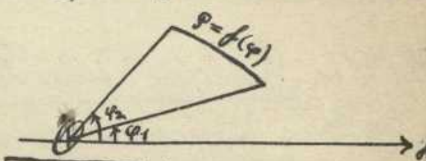
VI. Ein Punkt bewegt sich auf der durch den Vektor $\mathfrak{r} = i \cdot \varrho \cos \varphi + j \cdot \varrho \sin \varphi$ bestimmten Bahn, wobei $\varrho$ und $\varphi$ Funktionen der Zeit $t$ sind. Man berechne die Geschwindigkeit und Beschleunigung und zerlege sie in je 2 Komponenten in Richtung des Vektors $\mathfrak{r}$ und senkrecht dazu.

22. II. 1909. **Höhere Mathematik I.** № 14.

1.) Trägheitsmoment eines von der X-Axe, zwei Ordinaten und der Kurve $y = f(x)$ begrenzten Flächenstückes inbezug auf die X-Axe: $T_y = \int_a^b \frac{1}{3} y^3 dx$; inbezug auf die Y-Axe: $T_x = \int_a^b x^2 y\, dx$.

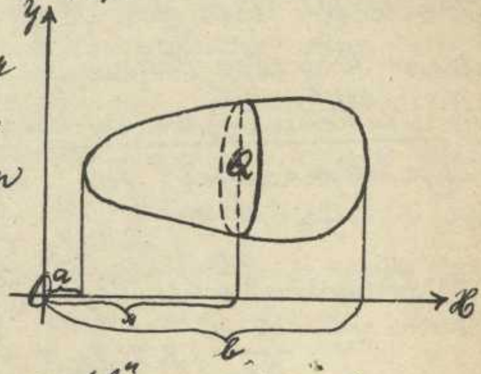



Polares Trägheitsmoment $T_z = T_x + T_y$.
Polares Trägheitsmoment eines Sektors in Polarkoordinaten: $T_z = \frac{1}{4} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^4 d\varphi$




2.) Trägheitsmoment eines Kurvenbogens inbezug auf die X-Axe: $T_y = \int_a^b y^2 ds = \int_a^b y^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$
" " " Y-Axe: $T_x = \int_a^b x^2 ds = \int_a^b x^2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$
Polares Trägheitsmoment $T_z = T_x + T_y = \int_a^b (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$
oder in Polarkoordinaten: $T_z = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$

3.) Volumen von Körpern:
Ist der Flächeninhalt $Q$ eines in der Entfernung $x$ vom Koordinatenanfangspunkt senkrecht zur X-Axe gelegten Querschnittes als Funktion von $x$ ausgedrückt, so ist das Volumen des Körpers $V = \int_a^b Q\, dx$.




Die $x$ Koordinate des Schwerpunktes des Körpers wird:
$$x_0 = \frac{\int_a^b x \cdot Q\, dx}{\int_a^b Q\, dx}.$$

4.) Rotiert das Stück der Kurve $y = f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ um die $x$ Axe, so ist das Volumen des erzeugten Rotationskörpers: $V = \int_a^b \pi y^2 dx$.
Die $x$ Koordinate des Schwerpunktes wird: $x_0 = \dfrac{\int_a^b x y^2 dx}{\int_a^b y^2 dx}$.

Oberfläche des Rotationskörpers:

$$O = 2\pi \int_a^b y\,ds = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx .$$

x-Koordinate des Schwerpunktes der Oberfläche: $x_0 = \frac{\int_a^b x y\,ds}{\int_a^b y\,ds}$

Trägheitsmoment des Rotationskörpers um die x-Axe:

$$J = \frac{\pi}{2}\int_a^b y^4\,dx$$

Trägheitsmoment der Oberfläche eines Rotationskörpers um die x-Axe: $J = 2\pi \int_a^b y^3\,ds.$

5.) Die Guldin'sche Regel:

a.) Das Volumen eines Rotationskörpers oder eines von zwei Meridianebenen begrenzten Teiles desselben ist gleich dem Produkt aus der rotierenden Fläche und dem Weg des Schwerpunktes dieser Fläche.

b.) Die Oberfläche eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus der Bogenlänge der Meridiankurve und dem Weg des Schwerpunktes dieser Kurve.

6.) Näherungsweise Berechnung des Integrals $J = \int_a^b y\,dx$.

a.) Trapezregel (für n gleiche Teile):

$$J = \frac{b-a}{2n}\left[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1})\right]$$

b.) Simpson'sche Regel (für 2n gleiche Teile):

$$J = \frac{b-a}{6n}\left[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{2n-1})\right].$$

## Aufgaben.

1.) Wo liegt der Schwerpunkt eines Ellipsenquadranten? (Gleichung der Ellipse: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$).

Man berechne den Schwerpunkt auch mithilfe der Guldin'schen Regel, wenn der Inhalt F einer Ellipse und das Volumen $V$ eines Ellipsoids bekannt sind zu $F = ab\pi$, $V = \frac{4}{3}abc\pi$.

2.) Welches sind die Koordinaten des Schwerpunktes der Kettenlinie $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ zwischen den Ordinaten $x = -a$ und $x = +a$?

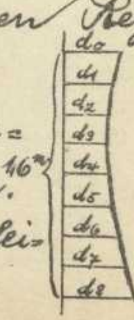
Wie groß wird das Volumen und die Oberfläche des bei Rotation der Kettenlinie um die $x$-Axe entstehenden Rotationskörpers (Catenoid)?

3.) Die Kurve $y = 1 + \sin x$ rotiert um die $x$-Axe. Wie groß wird das Volumen des entstehenden spindelförmigen Rotationskörpers zwischen den Grenzen $x = -\frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{3}{2}\pi$; wo liegt sein Schwerpunkt und wie groß ist sein Trägheitsmoment inbezug auf die Rotationsaxe?

4.) Man berechne das Volumen eines elliptischen Kegels von der Basisfigur $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und der Höhe $h$.

5.) Ein Gewölbe besitzt eine quadratische Basis von der Seitenlänge $b\sqrt{2}$. Die Vertikalebenen durch je zwei gegenüberliegende Ecken des Quadrates schneiden das Gewölbe nach Halbellipsen von den Halbaxen $a$ und $b$. Alle Horizontalschnitte des Gewölbes sind Quadrate. Man berechne den Innenraum des Gewölbes.

6.) Man berechne $\int_2^6 2^x \cdot \overset{10}{\log} x \, dx$ a.) mithilfe der Trapezregel (4 Teile), b.) mithilfe der Simpson'schen Regel (8 Teile).




7.) Die Wandung eines Gefäßes ist eine Rotationsfläche von der gezeichneten Meridiankurve. Die Höhe beträgt $1{,}6^m$. Man kennt die in gleichen Abständen gemessenen Halbmesser:

$d_0 = 0{,}38^m$; $d_1 = 0{,}33^m$; $d_2 = 0{,}30^m$; $d_3 = 0{,}27^m$; $d_4 = 0{,}29^m$;
$d_5 = 0{,}32^m$; $d_6 = 0{,}37^m$; $d_7 = 0{,}41^m$; $d_8 = 0{,}45^m$.
Wie groß ist der Inhalt des Gefäßes? (Simpson'sche Regel!)

---

## Berichtigungen.

Blatt 1 Aufgabe $3_0$ muß es heissen: ... des 4. harmonischen Punktes $P_4$ zu $P_3$ inbezug auf $P_1 P_2$.

Blatt 5 Aufgabe $5_1$ ist richtig: ... gleich der Differenz der Quadrate der Halbaxen.

Blatt 7 2. Seite 11. Zeile soll es heissen: $n = \frac{AF}{A^2 + B^2}$

" 7 2. Seite 16. Zeile " " " ; ... oder auch eine zur X-Axe parallele Doppelgerade.

Blatt 10 1. Seite ist in der 1. Figur der $\sphericalangle\, \tau$ falsch eingezeichnet; richtig ist:


Blatt 11 3. Seite, letzte Zeile vor „Aufgaben" lies $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$.

Ende.

1. III. 1909. Name:

Platz №. Note:

# Höhere Mathematik I. Teil.

## Semestralprüfung W. S. 1908/09.

1.) Welche Kurve beschreibt der Mittelpunkt eines Rechtecks, von dem ein Eckpunkt im Koordinatenanfangspunkt und eine Seite auf der X-Axe liegt, wenn das Verhältnis des Rechteckinhaltes zum Umfang konstant und gleich $a$ gegeben ist?

2.) Gesucht die Gleichung eines Kreises, der seinen Mittelpunkt auf der X-Axe hat, durch den Koordinatenanfangspunkt geht und die Gerade $3x + 4y - 8 = 0$ berührt.

3.) Man untersuche und zeichne den Verlauf der Kurve $y = 2x^3 - x^4$; insbesondere bestimme man diejenigen Punkte, in welchen die Kurve eine horizontale oder Wendetangente hat und stelle die Gleichungen dieser Tangenten auf.

4.) Welchen Radius und welche Höhe muss ein gerader Kreiskegel von gegebenem Volumen $V$ haben, damit seine Mantelfläche ein Minimum wird? Wie gross ist dieser kleinstmögliche Kegelmantel?

5.) Man werte folgende unbestimmte Integrale aus:

a.) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ ; b.) $\int \sqrt{x} \cdot \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}\, dx$.

6.) Welchen Inhalt hat das von den Koordinatenaxen und der Kurve $y = a \cdot \cos^2 \frac{x}{2}$ begrenzte Flächenstück zwischen den Punkten mit den Abscissen $x = 0$ und $x = \pi$? Wie gross ist das Volumen des bei Rotation dieses Flächenstückes um die X-Axe entstehenden Körpers?

(Die Aufgaben sind auf diesem Blatt zu bearbeiten!)

26. IV. 1909. № 1.

# Höhere Mathematik II.

Der Binomialsatz für ganze positive Exponenten:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Die Zahlen $\binom{n}{k}$ heissen Binomialkoeffizienten; es ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots k}$$

Für Binomialkoeffizienten gelten die Gleichungen:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}; \quad \text{insbesondere ist}$$

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, wobei man $0! = 1$ zu setzen hat.

Ferner $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.

Aus dieser Beziehung folgt eine Anordnung der Binomialkoeffizienten in Form des Pascal'schen oder analytischen Dreiecks.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\ 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\ \cdots \end{array}$$

Der Polynomialsatz:

$$(a+b+c+d+\cdots)^n = \sum \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\delta!\cdots} a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \cdots,$$

wobei $\alpha+\beta+\gamma+\delta = n$ sein muß.

## Kombinatorik:

Unter einer Permutation von $n$ Elementen versteht man eine beliebige Anordnung dieser Elemente. Die Zahl der Permutationen aus $n$ Elementen ist $P^{(n)} = n!$

Unter einer Variation von $n$ Elementen zur $p^{\text{ten}}$ Klasse versteht man eine Anordnung von $p$ Elementen, die aus den $n$ gegebenen in bestimmter Reihenfolge herausgegriffen sind.

Zahl der Variationen aus $n$ Elementen zur $p^{\text{ten}}$ Klasse:

Ohne Wiederholung $V_p^{(n)} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

Mit Wiederholung $V_p^{(n)} = n^p$.

Dagegen spricht man von einer Kombination aus $n$ Elementen zur $p^{ten}$ Klasse, wenn die Anordnung der herausgegriffenen Elemente nicht berücksichtigt wird.

Anzahl der Kombinationen

ohne Wiederholung $K_p^{(n)} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \binom{n}{p}$,

mit Wiederholung $\overline{K}_p^{(n)} = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!\,p!} = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}$.

## Aufgaben.

1.) Man entwickle $(1-x^2)^8$ nach dem binomischen Satze.

2.) Wie groß ist die Zahl und die Summe der bei der $n^{ten}$ Potenz auftretenden Binomialkoeffizienten?

3.) Welcher Satz über Binomialkoeffizienten läßt sich aus der Entwicklung von $(1-1)^n$ ableiten?

4.) Man bilde die bei der Entwicklung von $(a+b+c+d)^3$ auftretenden Tetranomialkoeffizienten zu den vorkommenden nebenstehenden Potenzen. Wie viel Glieder kommen allgemein in der Entwicklung von $(a_1+a_2+\cdots+a_n)^p$ vor?

$a^3$
$a^2b,\ a^2c,\ a^2d$
$ab^2,\ abc,\ abd,\ ac^2,\ acd,\ ad^2$
$b^3,\ b^2c,\ b^2d,\ bc^2,\ bcd,\ bd^2,\ c^3,\ c^2d,\ cd^2,\ d^3$

5.) In wie viel Punkten schneiden sich $n$ Ebenen?

6.) Wieviel Gerade lassen sich durch $n$ Punkte legen, wenn $n_1$ dieser Punkte auf einer Geraden und $n_2$ auf einer andern Geraden liegen?

7.) Wie groß ist die Zahl der räumlichen Diagonalen eines Ikosaeders?

8.) Man bestimme die Zahl der Kreise, welche 3 gegebene Kreise von außen oder innen berühren.

9.) Wieviel Figuren sind beim Kegelspiel (mit 9 Kegeln) möglich?

10.) Beim Skatspiel bekommt von 32 Karten jeder der 3 Mitspielenden 10 Karten, während 2 Karten beiseite gelegt werden. Wieviel Verteilungsarten gibt es?

3. V. 1909. **Höhere Mathematik II.** № 2.

<u>Arithmetische Reihe:</u> $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \dots a+(n-1)d, \dots$

Summe der ersten $n$ Glieder: $S_n = n \cdot a + \frac{n(n-1)}{2} d$.

<u>Geometrische Reihe:</u> $a,\ a\cdot q,\ a\cdot q^2,\ a\cdot q^3, \dots\dots a\cdot q^{n-1}, \dots$

Summe der ersten $n$ Glieder: $S_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.

Ist $|q|<1$, so ist $S = \lim_{n=\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$ die Summe der unendlichen geometrischen Reihe.

<u>Unendliche Reihen:</u> Eine unendliche Reihe $u_1, u_2, u_3, \dots u_n, u_{n+1} \dots$ heißt nur dann <u>konvergent,</u> wenn die Summe der ersten $n$ Glieder mit wachsendem $n$ sich einem bestimmten Grenzwert nähert:

$$S = \lim_{n=\infty} S_n = \lim_{n=\infty}(u_1+u_2+u_3+\dots+u_n) = u_0+u_1+u_2+\dots+u_n+u_{n+1}+\dots$$

Dieser Grenzwert heißt dann die Summe der unendlichen Reihe. Dagegen heißt die Reihe <u>divergent,</u> wenn ihre Summe mit wachsendem $n$ unendlich groß wird oder zwischen endlichen Grenzen schwankt.

<u>Notwendiges Konvergenzkriterium:</u> $\lim_{n=\infty} u_n = 0$.

<u>Sätze über unendliche Reihen:</u> 1.) Eine konvergente Reihe bleibt konvergent, wenn man eine endliche Zahl von Gliedern hinzufügt oder wegnimmt.

2.) Eine unendliche Reihe mit lauter positiven Gliedern kann nur entweder konvergent sein oder eine unendlich große Summe haben.

3.) Jeder Bestandteil einer konvergenten Reihe mit nur positiven Gliedern konvergiert für sich.

4.) Eine Reihe mit positiven und negativen Gliedern ist sicher konvergent, wenn die Reihe der absoluten Beträge $|u_1|+|u_2|+|u_3|+|u_4|+\dots$ konvergiert. (Absolute oder unbedingte Konvergenz).

Konvergenzkriterium von Cauchy: Ist $\lim\limits_{n=\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}<1$, so konvergiert die Reihe $u_0+u_1+u_2+\dots+u_n+u_{n+1}+\dots$ sicher, ist $\lim\limits_{n=\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}>1$, so divergiert die Reihe sicher. Für $\lim\limits_{n=\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=1$ versagt das Kriterium.

Potenzreihen: Eine Potenzreihe $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots+a_nx^n+\dots$ konvergiert für jedes $x$, dessen absoluter Betrag der Ungleichung genügt:

$$|x|<\lim_{n=\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Differentiation und Integration der Potenzreihen: Eine konvergente Potenzreihe kann gliedweise differentiiert und integriert werden; die so erhaltenen Reihen konvergieren in demselben Bereiche wie die ursprüngliche Reihe.

## Mittelwertsätze der Integralrechnung.

1.) Ist $y=f(x)$ eine im Intervall von $a$ bis $b$ eindeutige und stetige Funktion, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\cdot f\big(a+\theta(b-a)\big),\quad \text{wo } 0<\theta<1.$$

2.) Seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei im Intervall von $a$ bis $b$ eindeutige und stetige Funktionen und außerdem noch $\psi(x)$ innerhalb dieses Intervalls von einerlei Vorzeichen, so ist

$$\int_a^b\varphi(x)\cdot\psi(x)\,dx=\varphi\big(a+\theta(b-a)\big)\cdot\int_a^b\psi(x)\,dx,\quad \text{wo } 0<\theta<1.$$

Die Taylor'sche Reihe:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}\cdot f'(x)+\frac{h^2}{2!}\cdot f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\dots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)+R_n(x)$$

Dabei kann das Restglied $R_n(x)$ auf eine der beiden Formen gebracht werden: $R_n(x)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta\cdot h)$ nach Lagrange oder nach Cauchy: $R_n(x)=\frac{h^n}{(n-1)!}(1-\theta')^{n-1}f^{(n)}(x+\theta'h)$ $\Big\}$ wobei sowohl $\theta$ als $\theta'$ positiv und kleiner 1 sind.

Ist $\lim_{n=\infty} R_n(x) = 0$, so kann die Taylor'sche Reihe unendlich fortgesetzt werden.
Setzt man in der Taylor'schen Entwicklung $x = 0$ und ersetzt $h$ durch $x$, so ergibt sich die

Maclaurin'sche Reihe:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \cdots\cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_n(x).$$

Das Restglied ist dabei
nach Lagrange: $R_n(x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x)$, nach Cauchy $R_n = \frac{x^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} \cdot f^{(n)}(\theta x)$.

## Reihenentwicklungen einfacher Funktionen.

Exponentialreihe: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\cdots$,
insbesondere für $x = 1$: $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots\cdots$

Trigonometrische Reihen: $\begin{cases} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + - \cdots\cdots \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + - \cdots\cdots \end{cases}$

Die Reihen für $e^x$, $\sin x$ und $\cos x$ konvergieren für jedes noch so große positive und negative $x$.

Logarithmische Reihe: $\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + - \cdots\cdots$

$$\lg(N+1) = \lg N + 2 \cdot \left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \frac{1}{7(2N+1)^7} + \cdots\right]$$

Binomische Reihe: $(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \binom{m}{4}x^4 + \cdots\cdots$

Cyklometrische Reihen: $\begin{cases} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + - \cdots\cdots \\ \arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots\cdots \end{cases}$

Die Reihen für $\lg(1+x)$, $(1+x)^m$, $\operatorname{arc\,tg} x$ und $\arcsin x$ konvergieren für alle Werte von $x$, welche zwischen $-1$ und $+1$ gelegen sind.

## Aufgaben.

1) Man untersuche die Konvergenz folgender Reihen:

a.) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}-\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+-\ldots\ldots$

b.) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\ldots\ldots$

c.) $\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\sin\frac{\alpha}{4}+\frac{1}{8}\sin\frac{\alpha}{8}+\frac{1}{16}\sin\frac{\alpha}{16}+\ldots\ldots$

2.) Die Summe der $n$ ersten Glieder einer unendlichen Reihe sei $S_n=\frac{3n+2}{4n+3}$. Man bestimme das allgemeine Glied, sowie einige Anfangsglieder und gebe die Summe der unendl. Reihe an.

3.) Man zeige, daß die Reihe

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right)+\left(\frac{1}{8^p}+\frac{1}{9^p}+\ldots\ldots+\frac{1}{15^p}\right)+\left(\frac{1}{16^p}+\ldots\right.$$

für gewisse Werte von $p$ kleiner ist als die geometrische Reihe

$$1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{4^{p-1}}+\frac{1}{8^{p-1}}+\frac{1}{16^{p-1}}+\ldots\ldots$$

und deshalb konvergiert. Für welche Werte von $p$ ist dies der Fall?

4.) Für welche Werte von $x$ konvergiert die Reihe:
$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots$ ~~und~~ wie groß ist dann ihre Summe?

5.) Mittels des Taylor'schen Satzes berechne man $\lg 1{,}9$, wenn $\lg 2 = 0{,}6931468$ bekannt ist.

6.) Es soll mithilfe der binomischen Reihe $\sqrt{10}$ auf 6 Dezimalstellen berechnet werden und zwar
a.) als $3\sqrt{1+\frac{1}{9}}$, b.) als $\frac{10}{3}\sqrt{1-\frac{1}{10}}$.

7.) Man entwickle die Funktionen $y=\cos 2x$, $y=\lg\cos x$ und $y=\frac{1}{1+x+x^2}$ nach Potenzen von $x$.

8.) Berechne mithilfe der trigonometrischen Reihen auf 3 Dezimalen a.) $\sin 15^\circ$; b.) $\cos 45^\circ$.

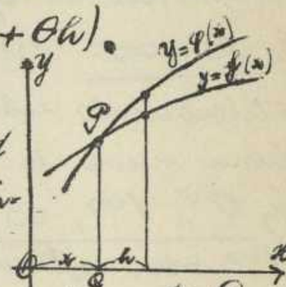
10. V. 1909. № 3.

# Höhere Mathematik II.

**Folgerungen aus dem Taylor'schen Satze:**

Beschränkt man die Entwicklung von $f(x+h)$ nach dem Taylor'schen Satze auf zwei Glieder, so ergibt sich hieraus der Mittelwertsatz der Differentialrechnung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x+\Theta h)$.

**Berührung zweier Kurven:**




Zwei Kurven, deren Gleichungen in der Form $y=f(x)$ und $y=\varphi(x)$ gegeben sind, berühren sich in einem gemeinsamen Punkte $P(x)$ nach der $n^{\text{ten}}$ Ordnung, wenn für diesen Punkt $(x)$ außer $f(x)=\varphi(x)$ auch die 1., 2., ⋯ bis $n^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von $f(x)$ und $\varphi(x)$ einander gleich sind.

Speziell: Ist für den Punkt $(x)$ $f(x)=\varphi(x)$ und $f'(x)=\varphi'(x)$, so berühren sich beide Kurven im Punkte $(x)$ nach der ersten Ordnung. Ist für den Punkt $(x)$ $f(x)=\varphi(x)$, $f'(x)=\varphi'(x)$ und $f''(x)=\varphi''(x)$, so oskulieren sich beide Kurven in dem gemeinsamen Punkte.

Beschränkt man sich in der Taylor'schen Entwicklung von $y=f(x)=f(x_0+(x-x_0))=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\cdots$ auf zwei Glieder, so gibt $y=f(x_0)+(x-x_0)\cdot f'(x_0)$ die Gleichung der Tangente an die Kurve $y=f(x)$ im Punkte $(x_0, y_0)$.

Berücksichtigt man in der Taylor'schen Entwicklung drei Glieder, so ist $y=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)$ die Gleichung der die Kurve im Punkte $(x_0, y_0)$ oskulierenden Parabel (Näherungsparabel).

**Unbestimmte Formen:**

1) $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$: Nehmen zwei Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ für denselben Wert $x=a$ beide den Wert $0$ oder beide den Wert $\infty$ an, so hat der Quotient $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$

für $x=a$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$. Dann ist der wahre Wert dieses Quotienten:

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

2.) $0\cdot\infty$: Ist $\lim\limits_{x=a} f(x)\cdot\varphi(x) = 0\cdot\infty$, so ist $\lim \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \frac{0}{0}$ und nach der vorigen Regel zu behandeln.

3.) $\infty-\infty$: Ist $\lim\limits_{x=a}[f(x)-\varphi(x)] = \infty-\infty$, so führt man diesen Ausdruck über in $\lim\limits_{x=a} \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot\varphi(x)}} = \frac{0}{0}$ und behandelt ihn dann nach 1).

4.) $0^0$, $1^\infty$, $\infty^0$: Nimmt $\lim\limits_{x=a}\left(F(x)^{f(x)}\right)$ eine der 3 Formen $0^0$, $1^\infty$ oder $\infty^0$ an, so hat $\lg \lim\limits_{x=a}\left(F(x)^{f(x)}\right)$ die Form $0\cdot\infty$ und ist nach 2.) zu behandeln.

Wenn das Verfahren in einem Falle versagt und wieder einen unbestimmten Ausdruck ergibt, so führt eine wiederholte Anwendung in der Regel zum Ziel.

## Aufgaben.

1.) Man entwickle nach Potenzen von
$x$ die Funktion $y = \lg \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+x)$ (Bestimmung der ersten 4 Glieder),
$x-1$ " " $y = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5$,
$x-\frac{\pi}{4}$ " " $y = \sin x$.

2.) Beweise folgende Gleichung: $\frac{\pi}{4} = 4\cdot\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{239}$; daraus soll dann eine Reihenentwicklung für $\frac{\pi}{4}$ abgeleitet und mithilfe derselben $\pi$ auf 6 Dezimalen berechnet werden.

3.) Man reduziere die Gleichung der oskulierenden Parabel
$y = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0)$ (vgl. vorige Seite!) auf ihre Scheitelgleichung.

4.) Man ermittle die wahren Werte folgender unbestimmter Ausdrücke:
$\left(\frac{e^{-2x}-1}{x}\right)_{x=0}$; $\left(\frac{1-\cos x - \lg\cos x}{x^2}\right)_{x=0}$; $\left(\frac{\lg x}{\operatorname{cotg} x}\right)_{x=0}$; $\left(\frac{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}}{x}\right)_{x=\infty}$; $\left((x-\frac{\pi}{2})\operatorname{tg} x\right)_{x=\frac{\pi}{2}}$;
$\left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x+x^2}\right)_{x=0}$; $\left(x^{\lg(1+x)}\right)_{x=0}$; $\left(\left(2-\frac{2x}{\pi}\right)^{\operatorname{tg} x}\right)_{x=\frac{\pi}{2}}$; $\left(x^{\frac{1}{x}}\right)_{x=\infty}$; $\left[\left(\cos\sqrt{\frac{2a}{x}}\right)^x\right]_{x=\infty}$.

1) a) $\int \frac{x^2+2x+2}{x-1}\,dx$ b) $\int \frac{2x+5}{(x+1)^3}\,dx$

e) $\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+x-2}$ ~~$(x+2)(x-1)$~~

f) $\int \frac{x\,dx}{x^2+2x+2}$ d) $\int \frac{5\,dx}{x^2(5-6x)^2}$

c) $\int \frac{8x^2-29x+24}{x(x-2)(x-3)}\,dx$

e) $\int \frac{3+10x}{(4+3x+5x^2)^3}\,dx$ (Zähler = Ableitung des Nenners)

f) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$ = (Substitution: $\operatorname{arctg} x = z$)

g) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4+2x}}$ h) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{2x-3}}$

i) $\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$ k) $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

2) Gegeben ist die Gerade $\begin{cases} x+2y-8=0 \\ z=8 \end{cases}$. Man bestimme den Parameter des Rotationsparaboloides $x^2+y^2-2pz=0$ so, daß die Gerade die Fläche berührt. (Skizze!)

$w = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots - a_n z^n + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$

$\frac{1}{1+z^2} = \dots - \frac{a_1}{z} + \dots \frac{b_1}{z^2} \dots$

$b_0 + b_1 + b_2 \dots = 2\pi i\, a_n$

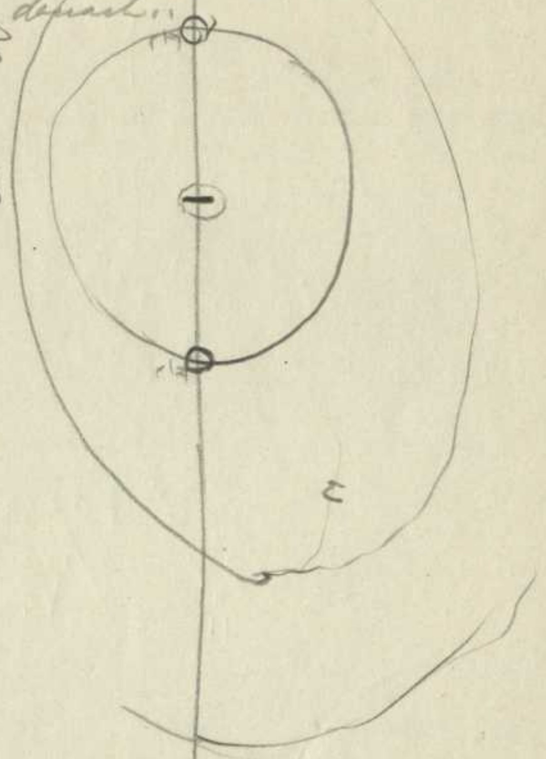
$x^3+x-10$

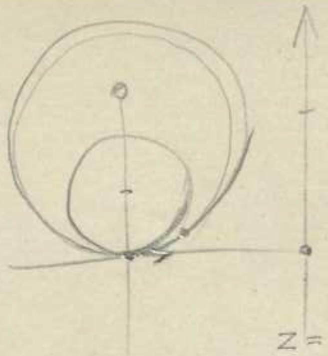
$(x-2)(x^2+2x+5)$

$-1 \pm \sqrt{1-5}$

$f(z) + \zeta(z)$

2) Die kubische Gleichung $x^3+x-10=0$ hat eine ganzzahlige Wurzel; diese suche man. Dann stelle man die quadratische Gleichung auf, die die beiden anderen Wurzeln der kub. Gl. genügen und bestimme diese danach.





$w = f(z)$

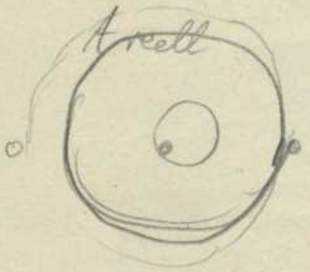
$w$

$f(0) = 0$

$f'(0) = 1$

$w = z + \frac{\alpha z^2}{2} + \cdots$

$z = t + \frac{i t^2}{2\varrho}$




$w = t + \frac{i t^2}{2\varrho}$ $\qquad \alpha = a + ib$

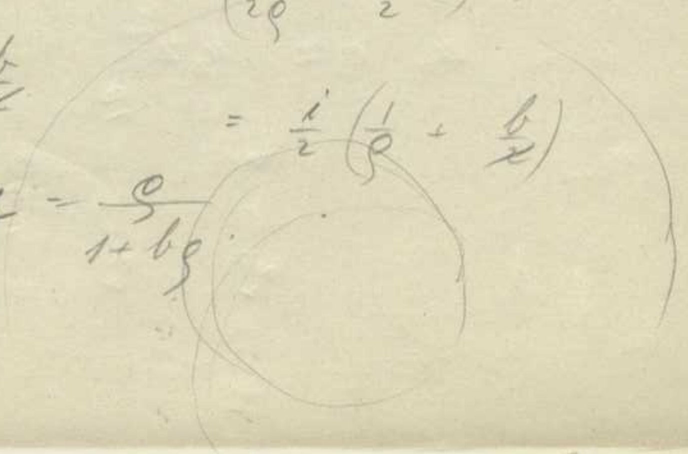
$+ \frac{\alpha t^2}{2} + \cdots$

$= t + \left(\frac{i}{2\varrho} + \frac{i}{2} b\right) t^2$

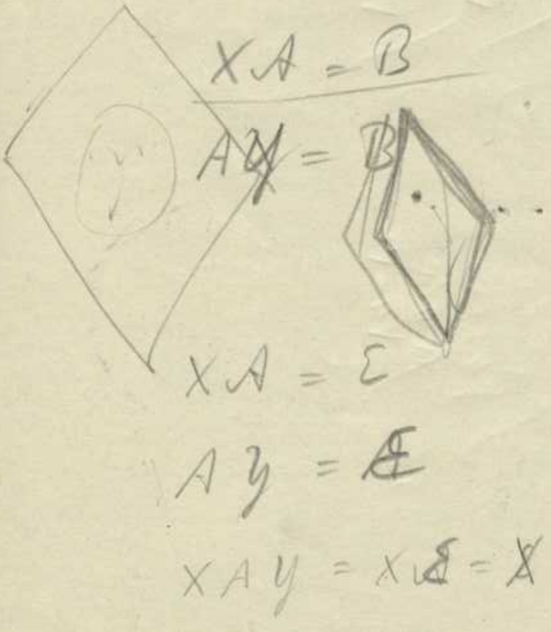
$\frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho} + \frac{b}{\cancel{2}}$

$= \frac{i}{2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{b}{\cancel{2}}\right)$

$\varrho' = \frac{1}{\frac{1}{\varrho} + b} = \frac{\varrho}{1 + b\varrho}$



Man bilde die nebenstehend gezeichneten Bereiche auf eine Halbebene ab. (Die stark ausgezogenen Linien sind die Ränder; in Fig. 1 a und b, in Fig. 2. gegeben.)



$XA = B$

$A\cancel{X} = B$

$XA = \varepsilon$

$Ay = \cancel{\varepsilon}$

$XAy = X\cancel{\varepsilon} = \cancel{X}$

$y = X$

$\varepsilon A = A$

$\varepsilon X = X$

$X\varepsilon' = X$

$\varepsilon\varepsilon' = \varepsilon'$

$\varepsilon\varepsilon' = \varepsilon$

$\varepsilon = \varepsilon'$

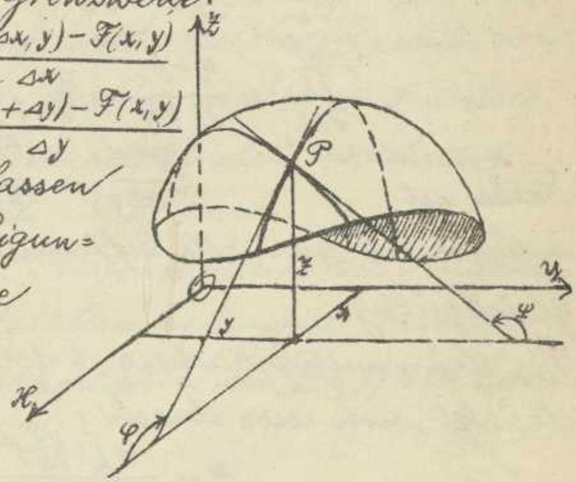
17. V. 1909. **Höhere Mathematik II.** № 4.

## Funktionen zweier unabhängiger Veränderlichen $z = F(x,y)$.

Differentiiert man eine Funktion zweier unabhängiger Veränderlichen $z = F(x,y)$ nach einer der Variabeln und betrachtet dabei die andere als konstant, so erhält man einen der als partielle Differentialquotienten bezeichneten Grenzwerte:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F_x = \lim_{\Delta x = 0} \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = F_y = \lim_{\Delta y = 0} \frac{F(x, y+\Delta y) - F(x,y)}{\Delta y}$$




Die partiellen Differentialquotienten lassen sich geometrisch deuten als die Neigungen der zur $(X,Z)$ bezw. $(Y,Z)$ Ebene parallelen Profilkurven auf der durch die Gleichung $z = F(x,y)$ dargestellten Fläche:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\partial z}{\partial x}\ ; \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{\partial z}{\partial y}\ .$$

Sind in $z = F(x,y)$ $x$ und $y$ Funktionen einer Veränderlichen $t$, so ist
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\ .$$

Statt dessen schreibt man häufig auch:
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\ .$$

Ist speziell $t = x$, so wird hieraus:
$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\ ,$$ wobei $y$ Funktion von $x$ ist.

Wenn stets $z = 0$, so erhält man für die implicite Funktion $F(x,y) = 0$:
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\ .$$

Die Gleichung der Tangente im Punkt $(x,y)$ an die durch die implicite Gleichung $F(x,y) = 0$ gegebene ebene Kurve wird:
$$(X - x)\cdot\frac{\partial F}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0\ .$$

Die Kurve $F(x,y)=0$ besitzt Tangenten parallel der X-Axe in denjenigen Punkten, für welche außer $F(x,y)=0$ auch $\frac{\partial F}{\partial x}=0$ (und $\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$); sie besitzt Tangenten parallel der Y-Axe in den Punkten, für welche $F(x,y)=0$ und $\frac{\partial F}{\partial y}=0$ (und $\frac{\partial F}{\partial x}\neq 0$).

## Partielle Differentialquotienten höherer Ordnung.

Partielle Differentialquotienten 2. Ordnung: Ist $z=F(x,y)$, so wird

$$\frac{\partial \frac{\partial F}{\partial x}}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=F_{xx}\,; \qquad \frac{\partial \frac{\partial F}{\partial x}}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=F_{xy}\,;$$

$$\frac{\partial \frac{\partial F}{\partial y}}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}=F_{yx}\,; \qquad \frac{\partial \frac{\partial F}{\partial y}}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=F_{yy}\,.$$

Dabei ist $\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}$, d.h. die Reihenfolge, in welcher die partielle Differentiation vorgenommen wird, ist gleichgültig.

Der Krümmungsradius $r$ der Kurve $F(x,y)=0$ im Punkte $(x,y)$ drückt sich aus durch:

$$r=\frac{-\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}$$

## Die Taylor'sche Reihe für Funktionen zweier Veränderlicher.

$$F(x+h,y+k)=F(x,y)+\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial F}{\partial x}+k\frac{\partial F}{\partial y}\right)+\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}+k^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)+$$
$$+\frac{1}{3!}\left(h\frac{\partial F}{\partial x}+k\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{(3)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial F}{\partial x}+k\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{(n-1)}+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial F}{\partial \xi}+k\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)^{(n)}_{\substack{\xi=x+\theta h\\ \eta=y+\theta k}}$$

Dabei sind die Ausdrücke von der Form $\left(h\frac{\partial F}{\partial x}+k\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{(n)}$ symbolisch geschrieben; man erhält ihre wirkliche Gestalt, wenn man sie zuerst nach dem binomischen Satze entwickelt und dann $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^i\cdot\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{n-i}$ ersetzt durch $\frac{\partial^i F}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial^{n-i} F}{\partial y^{n-i}}$

## Asymptoten einer Kurve.

Um die Asymptoten einer Kurve zu bestimmen, deren Gleichung

$F(x,y)=0$ in $x$ und $y$ rational vorausgesetzt wird, ordnet man die Kurvengleichung nach Potenzen von $x$ und $y$:

$$F(x,y) = U_n(x,y) + U_{n-1}(x,y) + U_{n-2}(x,y) + \cdots\cdots + U_1(x,y) + U_0 = 0.$$

Die Gleichung $\frac{U_n}{x^n} = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(m) = 0$ gibt dann, nach $\frac{y}{x} = m$ aufgelöst, die Richtungen der $n$ möglichen Asymptoten der Kurve. Ist $m_1$ eine Wurzel dieser Gleichung, so hat die Gleichung der zugehörigen Asymptote die Form: $y = m_1 x + \lambda_1$ dabei ist $\lambda_1$ so zu bestimmen, daß auch der Koeffizient von $x^{n-1}$ in der durch Einsetzen von $y = m_1 x + \lambda_1$ in $F(x,y)=0$ entstehenden Gleichung $F(x, m_1 x + \lambda_1)=0$ verschwindet, während der Koeffizient von $x^n$ von selbst Null wird.

Man erhält auf diese Weise alle Asymptoten mit Ausnahme der zur $y$-Axe parallelen. Letztere bekommt man durch Nullsetzen des Koeffizienten der höchsten in $F(x,y)=0$ vorkommenden Potenz von $y$.

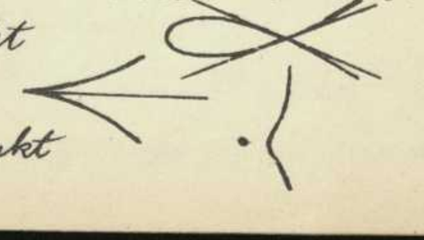
## Singuläre Punkte einer Kurve.

Ist für einen Punkt $P(x,y)$ der Kurve $F(x,y)=0$ gleichzeitig $F(x,y)=0$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, so ist die Tangentenrichtung in diesem Punkte nicht eindeutig bestimmt. Die Gleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

liefert dann im allgemeinen zwei Tangentenrichtungen. Nach dem Vorzeichen der Diskriminante dieser in $\frac{dy}{dx}$ quadratischen Gleichung sind drei Fälle zu unterscheiden:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \begin{cases} > 0 : & \text{Knotenpunkt} \\ = 0 : & \text{Spitze} \\ < 0 : & \text{Isolierter Punkt} \end{cases}$$



In einem Knotenpunkte hat die Kurve zwei verschiedene reelle Tangenten, in einer Spitze fallen die beiden Tangenten in eine zusammen, in einem isolierten Punkte (Einsiedler) sind sie imaginär.

## Aufgaben.

1.) Man bilde $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ aus der folgenden Gleichung:

$$\frac{1}{2}\lg(x^2+y^2)-\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{y}{x}=0.$$

2.) Man untersuche folgende Kurven, insbesondere inbezug auf allenfalls vorhandene Horizontal- und Vertikaltangenten, singuläre Punkte und Asymptoten und zeichne die Kurven:

a.) $x^2y^2+(y^2-a^2)(y+b)^2=0$, wenn $b \lesseqgtr a$ ist (Conchoide);

b.) $x^4-2ay^3-3a^2y^2-2a^2x^2+a^4=0$;

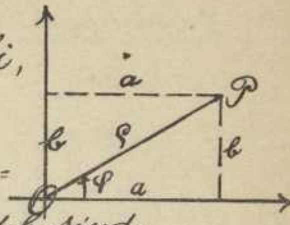
c.) $x^3+6x^2+12x-8y^2+16y=0$;

d.) $x^3-xy^2-a(x^2+y^2)=0$

3.) In welchen Punkten der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ist der Krümmungsradius gleich der großen bezw. kleinen Halbaxe?

24. V. 1909. № 5.

# Höhere Mathematik II.




**Komplexe Zahlen:** Eine komplexe Zahl $a+bi$, wo $i^2=-1$ ist, kann durch einen Punkt $P$ der Zahlenebene repräsentiert werden, dessen Entfernungen von zwei aufeinander senkrechten Axen $a$ und $b$ sind.

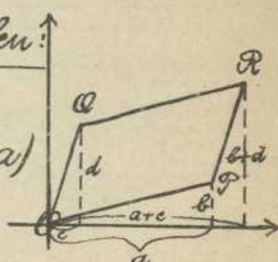
**Trigonometrische Form der komplexen Zahlen:** Hat $P$ die Polarkoordinaten $\rho$ und $\varphi$, so ist

$$a=\rho\cdot\cos\varphi;\quad b=\rho\cdot\sin\varphi;\qquad a+bi=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi);$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a},\quad \rho=+\sqrt{a^2+b^2}=|a+bi|.$$

$\rho$ heißt die Norm (der absolute Betrag), $\varphi$ das Argument der komplexen Zahl.

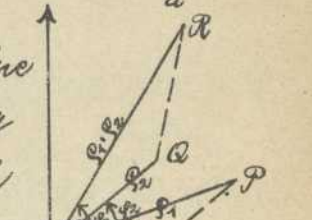
**Addition (und Subtraktion) zweier komplexer Zahlen:**




$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+i(b\pm d).$$

Zwei Zahlen $a+bi$ und $a-bi$, deren Summe reell $(=2a)$ ist, heißen konjugiert komplexe Zahlen.

**Multiplikation zweier komplexer Zahlen:**




Das Produkt zweier komplexer Zahlen ist wieder eine komplexe Zahl, deren Norm gleich dem Produkt der Normen der Faktoren und deren Argument gleich der Summe der Argumente der Faktoren ist:

$$\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=\rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

Das Produkt zweier konjugiert komplexer Zahlen ist reell:

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

**Division zweier komplexer Zahlen:**

$$\frac{\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

**Die Moivre'sche Formel:** $[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=\rho^n\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$, wobei $n$ eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl sein kann.

<u>Zusammenhang zwischen den trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion:</u>

$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ ; $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \cosh i\varphi$

$\cos\varphi - i\sin\varphi = e^{-i\varphi}$ ; $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} = -i \sinh i\varphi$ ; insbesondere

$e^{2k\pi i} = 1$ ; $e^{k\pi i} = -1$ ; $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$ ; $e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i$ .

<u>Der Logarithmus einer komplexen Zahl:</u>

$$lg(a+bi) = lg[\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = lg[\varrho \cdot e^{i\varphi \pm 2k\pi i}] = lg\,\varrho + (\varphi \pm 2k\pi)i$$
$$= lg\left|\sqrt{a^2+b^2}\right| + i \cdot \operatorname{arc} tg\frac{b}{a} \pm 2k\pi i .$$

Der Logarithmus ist also unendlich vieldeutig.

<u>Komplexe Potenzreihen:</u> Eine nach Potenzen der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ fortschreitende unendliche Reihe mit (im allgemeinen) komplexen Koeffizienten: $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$ konvergiert absolut für alle Werte $z$, deren absoluter Betrag der Ungleichung genügt: $|z| < \lim_{n=\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, also im Innern eines Kreises um den Nullpunkt mit dem Radius $R = \lim_{n=\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ (Konvergenzkreis).

## Aufgaben.

1) Konstruiere folgende Punkte der Zahlenebene:

$3+4i$ ; $-0,5+1,7i$ ; $1,9-0,9i$ ; $\cos 300° + i\sin 300°$ .

2.) Beweise, daß die Punkte P, welche durch $x+iy = [\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n$ für veränderliches $n$ in der Zahlenebene bestimmt sind, auf einer logarithmischen Spiralen liegen.

3.) Bestimme den rein imaginären Wert von $\frac{1+2i}{(1-i)^2} - \frac{1-2i}{(1+i)^2}$ sowie durch Rechnung und Konstruktion den Quotienten $\frac{3,5-6,7i}{1,3+4,0i}$

4.) Es ist $\sqrt[3]{-3+4i}$, $\overset{10}{\log}(1+2i)$, $\sin(1+i)$, $tg(1-i)$, $\operatorname{arc} tg\, i$, $i^i$ zu berechnen.

5.) Man drücke $\cos 5\varphi$ und $\sin 6\varphi$ durch Potenzen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ aus; umgekehrt sind $\cos^5\varphi$ und $\sin^6\varphi$ durch Aggregate von sin und cos der mehrfachen Winkel darzustellen.

7/VI. 1909. № 6.

# Höhere Mathematik II.

## Gleichungen höheren Grades.

6) Der Fundamentalsatz der Algebra: Jede Gleichung $n^{ten}$ Grades $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots\cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$ hat $n$ reelle oder komplexe Wurzeln. – Ist $a$ eine Wurzel von $f(x) = 0$, so ist $f(x)$ durch $x - a$ ohne Rest teilbar. Sind $a, b, c, \dots k$ die $n$ Wurzeln, so ist $f(x) = a_0(x-a)(x-b)(x-c)\cdots\cdots(x-k)$.
Bei Gleichungen mit lauter reellen Koeffizienten treten etwaige komplexe Wurzeln stets paarweise konjugiert auf. Das Produkt der Wurzelfaktoren zweier konjugiert komplexer Wurzeln ist reell und positiv: $(x-(u+iv))(x-(u-iv)) = (x-u)^2 + v^2$.
Mehrfache Wurzeln: Ist für einen Wert $x = x_0$ außer $f(x_0)$ auch $\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0)$ gleich $0$, so hat die Gleichung $f(x) = 0$ die Doppelwurzel $x_0$; ist auch $f''(x_0) = 0$, so ist $x_0$ eine dreifache Wurzel; ist noch $f'''(x_0) = 0, \cdots f^{(k-1)}(x_0) = 0$, so ist $x_0$ eine $k$fache Wurzel von $f(x) = 0$.
Die Koeffizienten einer Gleichung sind symmetrische Funktionen der Wurzeln der Gleichung, d.h. Funktionen, welche ihren Wert bei beliebiger Vertauschung der Wurzeln nicht ändern.
Beispiel: Gleichung 4. Grades:

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0 = a_0(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta).$$

Hier ist: $\alpha+\beta+\gamma+\delta = -\frac{a_1}{a_0}$; $\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta = \frac{a_2}{a_0}$;

$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta = -\frac{a_3}{a_0}, \quad \alpha\beta\gamma\delta = \frac{a_4}{a_0}.$$

Jede symmetrische Funktion der Wurzeln einer Gleichung ist durch die Koeffizienten der Gleichung rational darstellbar.

Auflösung der Gleichung 2. Grades:

$$ax^2+bx+c=0\,;\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$b^2-4ac$ heißt die Diskriminante der Gleichung 2. Grades.

$$b^2-4ac\begin{cases} >0: & \text{zwei reelle Wurzeln,}\\ =0: & \text{zwei gleiche Wurzeln;}\\ <0: & \text{zwei konjugiert komplexe Wurzeln.}\end{cases}$$

Gleichung 3. Grades: Die reine Gleichung 3. Grades $x^3-1=0$ hat die drei Wurzeln $1$, $\varepsilon_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.
Dabei ist $\varepsilon_1+\varepsilon_2=-1\,;\quad \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2=1.$
Die allgemeine Gleichung 3. Grades $x^3+ax^2+bx+c=0$ kann durch die Substitution $x=y-\frac{a}{3}$ auf die reduzierte Form gebracht werden: $y^3+py+q=0$, deren Wurzeln die Cardanische Formel gibt:

$$\left.\begin{aligned} y_1&=u+v\\ y_2&=\varepsilon_1 u+\varepsilon_2 v\\ y_3&=\varepsilon_2 u+\varepsilon_1 v\end{aligned}\right\}\text{ wobei }\begin{cases} u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\\ v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}\end{cases}$$

und $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ die komplexen dritten Einheitswurzeln sind.
Nach dem Vorzeichen der Diskriminante $\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$ sind drei Fälle zu unterscheiden:

1) $\Delta>0$ : Eine reelle und zwei konjugiert komplexe Wurzeln;
2) $\Delta=0$ : Drei reelle Wurzeln, von denen zwei einander gleich sind;
3) $\Delta<0$ : Drei reelle Wurzeln in komplexer Form.

Berechnet man in letzterem Falle, der nur für $p<0$ möglich ist, $\varphi$ aus der Gleichung: $\cos\varphi=\frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$, so ist

$$y=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3},\ \text{wo } k=0,1,2.\ \text{(Casus irreducibilis).}$$

Gleichung 4. Grades: Die Gleichung $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ geht durch $x=y-\frac{a}{4}$ über in die reduzierte Form:

$$y^4+py^2+qy+r=0.$$

Um die Wurzeln dieser Gleichung zu finden, hat man die kubische Resolvente $z^3+\frac{p}{2}z^2+\frac{p^2-4r}{16}z-\frac{q^2}{64}=0$ aufzulösen.

Sind $z_1$, $z_2$ und $z_3$ die Wurzeln der Resolvente, so ist $y = \pm\sqrt{z_1} \pm \sqrt{z_2} \pm \sqrt{z_3}$. Dabei sind die Vorzeichen der drei Wurzeln so zu kombinieren, daß ihr Produkt $= -\frac{q}{8}$ ist. — Hat $f(x)=0$ eine <u>Doppelwurzel</u>, so erhält man den zugehörigen Wurzelfaktor ohne Auflösung der Gleichung als gemeinsamen Teiler von $f(x)$ und $\varphi(x) = f'(x)$ durch Kettendivision von $f(x)$ und $\varphi(x)$:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = X(x) + \frac{R_1(x)}{\varphi(x)};$$
$$\frac{\varphi(x)}{R_1} = X_1(x) + \frac{R_2(x)}{R_1(x)};$$
$$\frac{R_1}{R_2} = X_2(x) + \frac{R_3(x)}{R_2(x)};$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\frac{R_{\nu-1}}{R_\nu} = X_\nu(x) + \frac{Const}{R_\nu}.$$

Ist der letzte Rest eine Konstante und von Null verschieden, so gibt dieselbe, gleich Null gesetzt, die Bedingung, daß $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$ eine gemeinsame Wurzel haben (für $\varphi(x)=f'(x)$ die Diskriminante der Gleichung $f(x)=0$); ist der letzte Rest aber gleich Null, so haben $f(x)=0$ und $\varphi(x)=0$ eine gemeinsame Wurzel und der letzte von Null verschiedene Divisor ist der zur gemeinsamen Wurzel gehörige Wurzelfaktor (für $\varphi(x)=f'(x)$ der Wurzelfaktor der Doppelwurzel von $f(x)=0$).

## Näherungsweise Auflösung von Gleichungen.

1) <u>Regula falsi</u>: Sind $x_1$ und $x_2$ zwei Näherungswerte einer Wurzel der Gleichung $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$, so ist $x = x_1 - y_1 : \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ ein genauerer Näherungswert.

2) <u>Newton'sche Näherungsmethode</u>: Ist $x_1$ ein Näherungswert, so ist $x = x_1 - \frac{y_1}{y_1'}$ ein besserer Näherungswert. Dabei ist $y_1' = \frac{dy}{dx}$ für $x = x_1$.

## Aufgaben.

1.) Welche Höhe muß ein in eine Kugel vom Radius $r$ einbeschriebener Zylinder haben, wenn sein Volumen $\frac{2}{3}$ des Kugelvolumens sein soll?

2.) Vorgelegt ist die kubische Gleichung $x^3+ax^2+bx+c=0$. Ohne sie aufzulösen, stelle man diejenige kubische Gleichung auf, deren Wurzeln

a.) bezw. gleich den Quadraten der Wurzeln der gegeb. Gleichung,
b.) bezw. gleich den Produkten aus je zweien der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

3.) Man löse die Gleichungen $x^3+9x^2-2x-1=0$
und $x^4+8x+8=0$.

4.) Von der Gleichung $4x^4-8x^3-7x^2+21x-9=0$ weiß man, daß sie eine Doppelwurzel hat; man löse sie auf Grund dieser Kenntnis.

5.) Man verschaffe sich graphisch angenäherte Wurzelwerte für die transcendente Gleichung $\sin x = 1-\frac{x}{3}$ und berechne dann die kleinste der Wurzeln auf zwei Stellen genau mithilfe der Newton'schen Näherungsformel.

6.) Die Gleichung $x^3+x^2+1=0$ hat eine reelle Wurzel; dieselbe soll a.) mithilfe der Regula falsi, b.) mithilfe der Newton'schen Näherungsmethode auf zwei Stellen berechnet werden.

---

## Berichtigungen des vorigen Übungsblattes (№ 5).

Die Moivre'sche Formel (1. Seite, 2. Zeile von unten) lautet richtig: $[\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n(\varphi+2k\pi)+i\sin n(\varphi+2k\pi))$.

Seite 2, Zeile 5 von oben muß es heißen: $e^{(2k+1)\pi i}=-1$.

---

14. VI. 1909. №. 7.

# Höhere Mathematik II.

## Determinanten.

1.) Die Gleichungen $\begin{cases} a_1x+b_1y=0 \\ a_2x+b_2y=0 \end{cases}$ sind nur dann miteinander verträglich, wenn die „Determinante 2. Ordnung":

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \quad \text{ist.}$$

2.) Auflösung der Gleichungen $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$ :

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} ; \quad y = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} .$$

3.) Aus den 2 homogenen Gleichungen $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{cases}$ folgt

$$x : y : z = +\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} : +\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{Vmatrix} \quad \text{(Matrix).}$$

4.) Die 3 Gleichungen $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}$ sind nur dann miteinander verträglich, wenn die „Determinante 3. Ordnung":

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ist.}$$

5.) Auflösung der 3 Gleichungen $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \end{cases}$

$$x : y : z : 1 = +\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} : +\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{Vmatrix}$$

6.) <u>Sätze</u> über Determinanten beliebiger Ordnung:

Eine Determinante ändert nur ihr Vorzeichen, wenn man zwei Parallelreihen miteinander vertauscht.

Eine Determinante ist Null, wenn sie zwei gleiche (oder proportionale) Parallelreihen enthält.

Haben sämtliche Glieder einer Reihe einen gemeinsamen

Faktor, so kann derselbe vor die Determinante gesetzt werden.
Die Zahl der Glieder in der Entwicklung einer Determinante $n^{\text{ter}}$ Ordnung ist $n!$. Das Vorzeichen eines Produktes $a_k b_n c_p \cdots$ ist positiv, wenn die Anzahl der Vertauschungen (Inversionen), durch welche die Reihe der Zeiger $k\ n\ p \ldots$ in die natürliche Reihe übergeht, eine gerade ist, negativ, wenn sie ungerade.
Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn man zu einer Reihe ein beliebiges Vielfaches einer andern Parallelreihe addiert oder subtrahiert:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+\lambda a_2, & b_1+\lambda b_2, & c_1+\lambda c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Dagegen: $$\begin{vmatrix} a_1+k_1, & b_1, & c_1 \\ a_2+k_2, & b_2, & c_2 \\ a_3+k_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 \\ k_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Vorzeichenschema für die Unterdeterminanten einer Determinante 4. Ordnung:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}.$$

7.) Multiplikation zweier Determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1, & a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2, & a_1\alpha_3+b_1\beta_3+c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1, & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2, & a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1+c_3\gamma_1, & a_3\alpha_2+b_3\beta_2+c_3\gamma_2, & a_3\alpha_3+b_3\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

## Anwendung der Determinanten:

1.) Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.) Bedingung, daß 3 Punkte $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ auf einer Geraden liegen:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

3.) Bedingung, daß 3 Gerade $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases}$ sich in einem

Punkte schneiden: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

4) Inhalt $\Delta$ des Dreiecks $P_1(x_1 y_1)\, P_2(x_2 y_2)\, P_3(x_3 y_3)$: $2\cdot\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$

5) Volumen $V$ des Tetraeders $P_1 P_2 P_3 P_4$: $6V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$

Elimination: Die Aufgabe, aus zwei Gleichungen eine Unbekannte zu eliminieren, ist identisch mit der Forderung, die Gleichung zu finden, welche zwischen den Koeffizienten der beiden Gleichungen bestehen muß, damit sie eine Wurzel gemeinsam haben. Man erhält diese „Resultante" der beiden Gleichungen 1) durch Kettendivision (Vgl. Blatt №6, 3. Seite).
2) Methode von Sylvester zur Bildung der Resultante: Hat man zwei Gleichungen $f(x)^{(n)}=0$ und $\varphi(x)^{(m)}=0$, so multipliziert man der Reihe nach $f(x)^{(n)}=0$ mit $x^{m-1}, x^{m-2}, \dots x^2, x, 1$ und $\varphi(x)^{(m)}=0$ mit $x^{n-1}, x^{n-2}, \dots x^2, x, 1$. Man erhält so $m+n$ Gleichungen, in denen man die $m+n-1$ Größen $x^{m+n-1}, x^{m+n-2}, \dots x^2, x$ als Unbekannte auffassen kann. Die Bedingung, daß diese Gleichungen miteinander verträglich sind, gibt die Resultante $R$.

Beispiel: $a_0x^2+a_1x+a_2=0$ und $b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0$:

$$\begin{aligned} a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2 \qquad\qquad &= 0; \\ a_0x^3+a_1x^2+a_2x \qquad &= 0; \\ a_0x^2+a_1x+a_2 &= 0; \\ b_0x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x \qquad &= 0; \\ b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3 &= 0; \end{aligned} \qquad R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

# Aufgaben.

1.) Man berechne die Werte folgender Determinanten:

a.) $\begin{vmatrix} 8 & -7 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$; b.) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 7 & -3 & 9 \\ 8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$; c.) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 11 & 8 \\ 1 & -5 & 4 & 2 \\ -6 & -2 & 7 & -13 \\ 15 & 8 & 12 & 25 \end{vmatrix}$; d.) $\begin{vmatrix} 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \\ \sin\chi & -\sin\psi & \cos\psi \\ \cos\chi & \cos\psi & \sin\psi \end{vmatrix}$.

2.) Man zeige, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & p & p^2 & p^3 \\ 1 & q & q^2 & q^3 \\ 1 & r & r^2 & r^3 \\ 1 & s & s^2 & s^3 \end{vmatrix} = (p-s)(q-s)(r-s)(p-r)(q-r)(p-q) \text{ ist.}$$

3.) Man bestimme die Werte der Unbekannten $x, y, z$ aus den drei Gleichungen:

$$2x + 3y - z - 2 = 0$$
$$5x - 7y + 4z + 6 = 0$$
$$4x + y + 3z - 14 = 0 \quad .$$

4.) Es ist die Gleichung a.) eines Kreises durch drei gegebene Punkte, b.) eines Kegelschnittes durch fünf gegebene Punkte in Determinantenform darzustellen.

5.) Beweise, daß die drei Geraden $\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ 5x - 6y + 4 = 0 \\ 7x - 12y + 2 = 0 \end{cases}$ sich in einem Punkte schneiden und bestimme die Koordinaten des Schnittpunktes.

6.) Welchen Wert hat das Produkt der beiden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\frac{c}{ab} & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & -\frac{a}{bc} \end{vmatrix} \quad ?$$

7.) Man eliminiere a.) $x$, b.) $y$ aus den beiden Gleichungen:

$$3x^2 - 4y^2 + 2xy - 5x + 6y = 0$$
$$x^3 - 7x^2y + y^3 + 3y = 0.$$

21. VI. 1909. **Höhere Mathematik II** № 8.

## Partialbruchzerlegung und Integration rational gebrochener Funktionen.

Unecht gebrochene Funktionen werden durch Division in eine Summe aus einer ganzen und einer echt gebrochenen Funktion zerlegt.

Partialbruchzerlegung echt gebrochener Funktionen $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$. 1.) Hat $\varphi(x)$ lauter reelle verschiedene Wurzeln $a, b, c, \dots$, so ist $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots$

Dabei ist $A = \frac{f(a)}{\varphi_1(a)} = \frac{f(a)}{\varphi'(a)}$, wo $\varphi_1(x) = \frac{\varphi(x)}{x-a}$ und $\varphi'(x) = \frac{d\varphi}{dx}$.

Analog: $B = \frac{f(b)}{\varphi_2(b)} = \frac{f(b)}{\varphi'(b)}, \quad \dots$

1a.) Sind unter den Wurzeln von $\varphi(x)$ zwei konjugiert-komplexe, so sind auch die Zähler der entsprechenden Partialbrüche konjugiert komplexe. Will man das Imaginäre vermeiden, so faßt man die konjugiert komplexen Partialbrüche zusammen:

$$\frac{P+Q\cdot i}{x-(\alpha+i\beta)} + \frac{P-Q\cdot i}{x-(\alpha-i\beta)} = \frac{2P(x-\alpha)-2Q\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

2.) Hat $\varphi(x)$ eine $\alpha$ fache reelle Wurzel $a$, so ist

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots\dots + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_1}{x-a} + \frac{f_2(x)}{\varphi_1(x)}.$$

Dabei ist $\varphi(x) = (x-a)^\alpha \cdot \varphi_1(x)$ und $A_\alpha = \frac{f(a)}{\varphi_1(a)}$.

2b.) Besitzt $\varphi(x)$ auch mehrfache konjugiert komplexe Wurzeln, so faßt man, um alle Partialbrüche in reeller Form zu erhalten, entsprechende konjugiert komplexe Partialbrüche zusammen.

3.) Zur Bestimmung der Zähler der Partialbrüche kann die Methode der unbestimmten Koeffizienten angewandt werden, wenn man die Form der Partialbruchzerlegung bereits kennt.

Man hat zur Zerlegung von $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ in Partialbrüche anzusetzen:

für jede einfache reelle Wurzel $a$ den Partialbruch $\frac{A}{x-a}$,

" " $\alpha$ fache " " " $b$ " " $\frac{B_\alpha}{(x-b)^\alpha} + \frac{B_{\alpha-1}}{(x-b)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{B_1}{x-b}$,

für je zwei konjugiert komplexe einfache Wurzeln $\alpha \pm i\beta$ den Bruch $\frac{P(x-\alpha)+Q}{(x+\alpha)^2+\beta^2}$, und für je zwei konjugiert komplexe $n$ fache Wurzeln $\gamma \pm i\delta$ den Bruch:

$$\frac{P_n(x-\gamma)+Q_n}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^n}+\frac{P_{n-1}(x-\gamma)+Q_{n-1}}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^{n-1}}+\cdots\cdots+\frac{P_1(x-\gamma)+Q_1}{(x-\gamma)^2+\delta^2}.$$

Man multipliziert dann auf beiden Seiten mit dem gemeinschaftlichen Nenner $\varphi(x)$ und setzt die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von $x$ einander gleich. Daraus ergeben sich lineare Gleichungen für die eingeführten Größen in genügender Zahl.

Integrale der einzelnen Partialbrüche:

$$\int\frac{A}{x-a}dx = A\,\lg(x-a)+C;$$

$$\int\frac{P(x-\alpha)-Q\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \frac{P}{2}\lg((x-\alpha)^2+\beta^2)-Q\operatorname{arctg}\frac{x-\alpha}{\beta}+C;$$

$$\int\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}dx = -\frac{A}{\alpha-1}\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}+C;$$

$$\int\frac{D(x-\alpha)+E}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}dx = D\int\frac{x-\alpha}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}dx + E\int\frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n};$$

$\int\frac{x-\alpha}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}dx$ erhält durch die Substitution $(x-\alpha)^2+\beta^2=u$ die Form $\int\frac{du}{u^n}$; $\int\frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}$ geht durch die Substitution $z=\frac{x-\alpha}{\beta}$ über in $\frac{1}{\beta^{2n-1}}\int\frac{dz}{(1+z^2)^n}$. Dieses Integral kann gelöst werden mithilfe der Rekursionsformel:

$$\int\frac{dz}{(1+z^2)^n}=\frac{1}{2(n-1)}\left\{\frac{z}{(1+z^2)^{n-1}}+(2n-3)\int\frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}}\right\}.$$

Integration irrationaler Funktionen von der Form: $\int R(x,\sqrt[n]{H})dx$

1.) Durch Zurückführung auf rationale Funktionen:

1.) Ist $H=a+bx$, so setzt man $a+bx=t^n$, $x=\frac{t^n-a}{b}$; $dx=\frac{nt^{n-1}}{b}dt$.

2.) Hat $H$ die Form $H=\frac{a+bx}{c+dx}$, so führt die Substitution $\frac{a+bx}{c+dx}=u^n$ zum Ziel.

3.) Ist $H=a+bx+cx^2$ und die Wurzel eine Quadratwurzel, so sind bei der Integration von $\int R(x,\sqrt{H})dx$ zwei Fälle zu unterscheiden: a.) $c>0$; man macht rational durch die Substitution $y=x\sqrt{c}+\sqrt{H}$, $x=\frac{y^2-a}{b+2y\sqrt{c}}$, $dx=\frac{2(y^2\sqrt{c}+by+a\sqrt{c})}{(b+2y\sqrt{c})^2}$, $\sqrt{H}=\frac{y^2\sqrt{c}+by+a\sqrt{c}}{b+2y\sqrt{c}}$.

b) $c < 0$; man substituiert $z = \sqrt{-c}\left(x + \frac{b}{2c}\right)$, $dz = \sqrt{-c}\,dx$, so ist $\mathcal{H} = p^2 - z^2$, wo $p^2 = \frac{4ac - b^2}{4c}$ und man hat das Integral $\int \mathcal{R}(x, \sqrt{\mathcal{H}})\,dx = \int \mathcal{R}_1(z, \sqrt{p^2 - z^2})\,dz$. Setzt man nun
$z = p \sin\varphi$, $dz = p\cos\varphi\, d\varphi$, so ist
$\int \mathcal{R}_1(z, \sqrt{p^2 - z^2})\,dz = \int \mathcal{R}_1(p\sin\varphi, p\cos\varphi)\cdot p\cos\varphi\, d\varphi$. Dieses Integral wird durch die Substitution
$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = u$, $\sin\varphi = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos\varphi = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $d\varphi = \frac{2\,du}{1+u^2}$ auf das Integral einer rationalen Funktion zurückgeführt.

B) <u>Durch Zurückführung auf irrationale Normalintegrale:</u>

Ist $\mathcal{H} = a + bx + cx^2$, so kann man folgende Umformung machen:

$$\mathcal{R}(x, \sqrt{\mathcal{H}}) = \frac{g_1(x) + g_2(x)\sqrt{\mathcal{H}}}{g_3(x) + g_4(x)\sqrt{\mathcal{H}}} = \frac{g_6(x) + g_7(x)\cdot\sqrt{\mathcal{H}}}{g_5(x)} = \mathcal{R}_1(x) + \left[G(x) + \frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]\frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}}$$

Zerlegt man nun $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ in Partialbrüche, so hat man außer $\int \mathcal{R}_1(x)\,dx$ folgende Integrale auszuwerten:

1) $$\int G(x)\cdot\frac{dx}{\sqrt{\mathcal{H}}} = \int (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n)\frac{dx}{\sqrt{\mathcal{H}}} =$$
$$= (B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_{n-1} x^{n-1})\sqrt{\mathcal{H}} + B_n \int \frac{dx}{\sqrt{\mathcal{H}}}$$

Zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten $B_0, B_1, \dots B_n$ erhält man durch Differentiation dieser Gleichung $n+1$ Gleichungen (Methode der unbestimmten Koeffizienten).

2) $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{\mathcal{H}}}$ und $\int \frac{dx}{(x-a)^\alpha \sqrt{\mathcal{H}}}$ werden durch die Substitution $x - a = \frac{1}{z}$ auf den vorigen Fall zurückgeführt.

3) Im Falle komplexer Wurzeln werden die konjugiert komplexen zusammengenommen; hiebei treten (bei einfachen konjugiert komplexen Wurzeln) folgende drei Integrale auf:

$$\int \frac{dx}{(x^2+p^2)\sqrt{q^2-x^2}} = \frac{1}{p\sqrt{p^2+q^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{p^2+q^2}\cdot x}{p\sqrt{q^2-x^2}} + C \;;$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+p^2)\sqrt{x^2-q^2}} = \frac{1}{2p\sqrt{p^2+q^2}} \cdot \lg \frac{p\sqrt{x^2-q^2}+x\sqrt{p^2+q^2}}{p\sqrt{x^2-q^2}-x\sqrt{p^2+q^2}} + C \;;$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+p^2)\sqrt{x^2+q^2}} = \begin{cases} \frac{1}{p\sqrt{q^2-p^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{q^2-p^2}}{p\sqrt{x^2+q^2}} + C, \text{ wenn } p^2 < q^2; \\ \frac{1}{2p\sqrt{p^2-q^2}} \lg \frac{p\sqrt{x^2+q^2}+x\sqrt{p^2-q^2}}{p\sqrt{x^2+q^2}-x\sqrt{p^2-q^2}} + C, \text{ wenn } p^2 > q^2 \end{cases}$$

## Die Lagrange'sche Interpolationsformel.

Eine ganze rationale Funktion $f(x)$, die für $x = a, b, c, d, \dots$ die Zahlenwerte $f(a), f(b), f(c), f(d) \dots$ annimmt, läßt sich durch folgende Formel darstellen:

$$f(x) = f(a)\frac{(x-b)(x-c)(x-d)\dots}{(a-b)(a-c)(a-d)\dots} + f(b)\frac{(x-a)(x-c)(x-d)\dots}{(b-a)(b-c)(b-d)\dots} + f(c)\frac{(x-a)(x-b)(x-d)\dots}{(c-a)(c-b)(c-d)\dots} + \dots$$

## Aufgaben.

1) Man werte folgende Integrale aus:

a) $\int \frac{2x^2-1}{x^3-1}\,dx$ ; b) $\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$ ;

c) $\int \frac{x^2-2}{(x-1)^4}\,dx$ ; d) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5x+3}^5}$ ,

2) Beweise durch Integration die Richtigkeit der Werte der drei Integrale in den ersten Zeilen dieser Seite.

3) Welche ganze rationale Funktion nimmt für $x = -1, 0, 1, 2$ die Werte $y = 0, 1, 3, 2$ an?

28. VI. 1909. № 9.

# Höhere Mathematik II.

<u>Die Newton'sche Interpolationsformel:</u> Kennt man für die in gleichen Intervallen aufeinanderfolgenden Werte $x = 0, h, 2h, 3h, \dots$ die zugehörigen Werte $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots$, so bildet man die Differenzenreihen

$$\Delta_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta_1 = y_2 - y_1, \quad \Delta_2 = y_3 - y_2, \quad \Delta_3 = y_4 - y_3, \quad \dots$$
$$\Delta_0' = \Delta_1 - \Delta_0, \quad \Delta_1' = \Delta_2 - \Delta_1, \quad \Delta_2' = \Delta_3 - \Delta_2, \quad \dots$$
$$\Delta_0'' = \Delta_1' - \Delta_0', \quad \Delta_1'' = \Delta_2' - \Delta_1', \quad \dots$$
$$\Delta_0''' = \Delta_1'' - \Delta_0'', \quad \dots$$

Eine rationale ganze Funktion, welche für die angegebenen $x$ Werte die entsprechenden $y$ Werte annimmt, ist dann bestimmt durch:

$$y = y_0 + \frac{x}{h} \cdot \frac{\Delta_0}{1!} + \frac{x(x-h)}{h^2} \cdot \frac{\Delta_0'}{2!} + \frac{x(x-h)(x-2h)}{h^3} \frac{\Delta_0''}{3!} + \dots .$$

## Analytische Geometrie des Raumes.

(Vgl. Höhere Mathematik I, Übungsblatt № 2).

### Ebene und Gerade.

<u>Die Hesse'sche Normalform der Ebenengleichung:</u>

$$x \cdot \alpha + y \cdot \beta + z \cdot \gamma - r = 0.$$

Dabei sind $\alpha, \beta, \gamma$ die Richtungskosinus eines auf die Ebene gefällten Lotes, $r$ ist der Abstand der Ebene vom Koordinatenanfangspunkt.

Die <u>allgemeine lineare Gleichung</u> $ax + by + cz + d = 0$ stellt immer eine Ebene dar; ihre Normalform ist

$$\frac{ax + by + cz + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0,$$

wobei das Vorzeichen der Wurzel entgegengesetzt dem von $d$ zu nehmen ist.

Abstand eines Punktes $P_1(x_1, y_1, z_1)$ von der Ebene:

$$p = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}};$$ dabei ist $p$ positiv,

wenn $P_1$ und der Ursprung $O$ auf verschiedenen Seiten, negativ, wenn $P_1$ und $O$ auf derselben Seite der Ebene liegen.

Gleichung der Ebene mit den Axenabschnitten $l, m, n$:

$$\frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1.$$

Aufgelöste Form der Ebenengleichung: $z = ax + by + c$.

Dabei ist $c$ der Abschnitt auf der $Z$-Axe, $a$ und $b$ sind die Profilneigungen in der $(XZ)$ bezw. $(YZ)$ Ebene: $a = tg\varphi$, $b = tg\psi$.

Die Böschung der Ebene gegen die $(XY)$ Ebene ist dann

$$tg\gamma = \sqrt{tg^2\varphi + tg^2\psi}. \quad (\gamma \text{ - Böschungswinkel}).$$

Winkel zweier Ebenen $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ und $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$:

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Die Ebenen stehen aufeinander senkrecht, wenn $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$, sie sind parallel, wenn $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$.

Richtungskosinus ihrer Schnittlinie:

$$\alpha : \beta : \gamma = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \right\| \quad \text{oder}$$

$$\alpha = k \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \beta = k \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \gamma = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \text{ wo } k = \frac{1}{\pm\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}}$$

Gleichung der Ebene durch einen Punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

Gleichung der Ebene durch drei Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ u. $P_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Schnittpunkt dreier Ebenen $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0 \end{cases}$

$$x : y : z : 1 = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{matrix} \right\|.$$

Der Schnittpunkt liegt im Unendlichen, wenn $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$; er ist unbestimmt, wenn außerdem noch $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0$, woraus noch

$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0$ und $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0$ folgt. In diesem Falle schneiden sich die drei Ebenen in einer Geraden.

Eine Gerade im Raume wird bestimmt durch die Gleichungen zweier Ebenen, die durch sie hindurchgehen:

$$\begin{cases} \mathfrak{E}_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ \mathfrak{E}_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}.$$

Insbesondere kann man eine Gerade durch die beiden Lotebenen zur $(XZ)$ und $(YZ)$ Ebene darstellen, die durch sie hindurchgehen (Projektionsebenen):

$$\begin{cases} z = px + q \\ z = ry + s \end{cases}.$$

Richtungskosinus dieser Geraden: $\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{p} : \frac{1}{r} : 1$

Parameterdarstellung der Geraden:

1.) wenn zwei Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$ der Geraden gegeben sind:

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}, \quad z = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda} \quad \text{oder}$$

in Vektorform: $\mathfrak{x} = \dfrac{\mathfrak{x}_1 - \lambda \mathfrak{x}_2}{1 - \lambda}$;

2.) wenn ein Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ auf der Geraden und die Richtungskosinus $(\alpha, \beta, \gamma)$ der Geraden bekannt sind:

$$x = x_0 + \rho \cdot \alpha, \quad y = y_0 + \rho \cdot \beta, \quad z = z_0 + \rho \cdot \gamma \quad \text{oder}$$

in Vektorform: $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \rho \mathfrak{u}$, wo $\mathfrak{u}$ der Einheitsvektor in Richtung der Geraden ist.

Kürzester Abstand zweier Geraden $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \rho \mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_2 + \rho \mathfrak{u}_2$:

Richtung des kürzesten Abstandes ist die Richtung des Vektorproduktes $V\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2$. Bezeichnet $|V\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2|$ die Länge dieses Vektors, so ist die Länge des kürzesten Abstandes:

$$\frac{(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1) V\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2}{|V\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2|}.$$

# Aufgaben.

1.) Man werte folgende Integrale aus:

a.) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ ; b.) $\int \frac{x+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\,dx$ ; c.) $\int \frac{4x^4+15x^3-9x^2+14x+46}{\sqrt{x^2+6x+5}}\,dx$.

2.) Gesucht ist die Gleichung einer Ebene, die

a.) durch $P_1(-3, 1, 1)$ geht und zur Ebene $2x-y-z+1=0$ parallel ist;

b.) außer $P_1(-3, 1, 1)$ noch den Punkt $P_2(2, -2, 0)$ enthält und zur gegebenen Ebene senkrecht steht.

3.) Man beweise, daß sich die Halbierungsebenen der Winkel eines Dreikants in einer Geraden schneiden.

4.) Man bestimme eine Gerade so, daß sie

a.) durch einen gegebenen Punkt geht und senkrecht zu einer gegebenen Ebene steht;

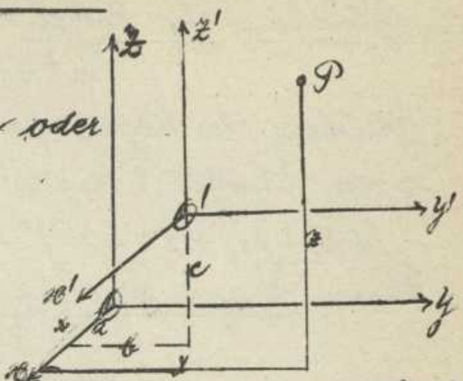
b.) durch $P_0(x_0, y_0, z_0)$ geht und parallel zur Geraden $\begin{cases} z = px+q \\ z = rx+s \end{cases}$ ist;

c.) durch den Punkt $(-1, 0, -3)$ geht, die Gerade $\begin{cases} x-z+1=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$ schneidet und der Ebene $2x+y+z-1=0$ parallel ist.

5. VII. 1909. **Höhere Mathematik II.** № 10.

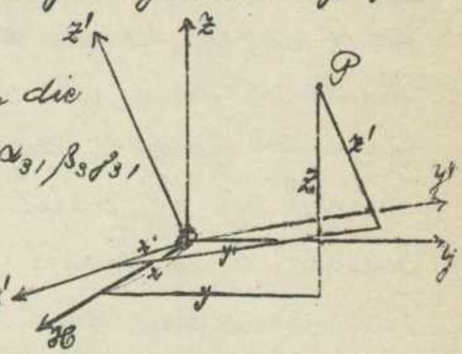
## Koordinatentransformation:

1.) Parallelverschiebung eines rechtwinkligen oder schiefwinkligen Koordinatensystems:




$$x = x' + a \quad ; \quad x' = x - a$$
$$y = y' + b \quad ; \quad y' = y - b$$
$$z = z' + c \quad ; \quad z' = z - c$$

2.) Einführung eines neuen schiefwinkligen Koordinatensystems $(X', Y', Z')$, welches mit dem ursprünglichen rechtwinkligen System $(X, Y, Z)$ den Anfangspunkt gemeinsam hat:




Sind die Richtungskosinus der $X', Y', Z'$ Axe gegen die $X, Y, Z$ Axen bezw. gleich $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ u. $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, so ist

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \\ y &= \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' \\ z &= \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{aligned}\right\} \text{wobei} \quad \begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1 \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1. \end{aligned}$$

Ist das neue Koordinatensystem $(X', Y', Z')$ ebenfalls rechtwinklig, so lauten die nach $x', y', z'$ aufgelösten Transformationsformeln:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \\ z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z \end{aligned}\right\} \text{wobei noch} \quad \begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1 \end{aligned} \quad , \text{ sowie}$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0 \quad ; \quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0 \quad ; \quad \alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3$$
$$\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0 \quad ; \quad \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0 \quad ; \quad \beta_1 = \gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3$$
$$\alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0 \quad ; \quad \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = 0 \quad ; \quad \gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3 ,$$

wozu noch sechs weitere Gleichungen kommen, die aus den letzten drei Gleichungen durch cyklische Vertauschung der Indizes hervorgehen.

## Die Kugel.

Gleichung der Kugel vom Radius $r$ um den Anfangspunkt:

$$x^2+y^2+z^2-r^2=0.$$

Gleichung des Kegels, gebildet von sämtlichen Tangenten, die von einem Punkt $P_1(x_1y_1z_1)$ an die Kugel gezogen werden können:

$$(xx_1+yy_1+zz_1-r^2)^2-(x^2+y^2+z^2-r^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2-r^2)=0.$$

Dieser Tangentialkegel berührt die Kugel in folgendem Kreis:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-r^2=0 \\ xx_1+yy_1+zz_1-r^2=0. \end{cases}$$

Die Ebene $xx_1+yy_1+zz_1-r^2=0$ heißt die Polarebene des Punktes $P_1$, der umgekehrt Pol der Ebene genannt wird.

Ist $P_1$ ein Punkt der Kugel, so geht seine Polarebene durch ihn hindurch und ist Tangentialebene in $P_1$ an die Kugel.

Liegt der Punkt $P_2$ auf der Polarebene $\pi_1$ von $P_1$, so geht die Polarebene $\pi_2$ von $P_2$ durch den Pol $P_1$ von $\pi_1$.

Durchläuft der Punkt $P_1$ eine Gerade, so dreht sich die zugehörig Polarebene um eine zweite Gerade. Umgekehrt: Dreht sich ein Ebene um eine Gerade, so durchläuft der zugehörige Pol eine zweite Gerade. Zwei solche Gerade heißen reziproke Polaren. Ihre Zuordnung ist wechselseitig und eindeutig; ihre Richtungen stehen aufeinander senkrecht.

Gleichung der Kugel vom Radius $r$ um den Punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-r^2=0$$

Potenz eines Punktes $P_1(x_1y_1z_1)$ inbezug auf die Kugel:

$$P=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2-r^2.$$

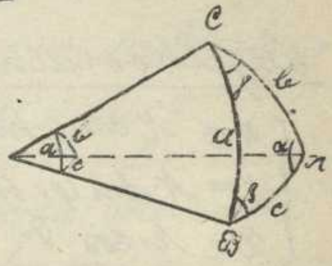
Sie ist gleich dem Quadrat der Tangentenlänge, wenn $P_1$ außerhalb der Kugel liegt, und gleich dem negativen Quadrat der halben kürzesten Sehne durch $P_1$, wenn $P_1$ innerhalb der Kugel gelegen ist.

Die Transformationsdeterminante wird $\Delta = \begin{vmatrix} & & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \pm 1.$

Schema der Richtungskosinus:

| | $x'$ | $y'$ | $z'$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ |
| $y$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ |
| $z$ | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ | $\gamma_3$ |

## Sphärische Trigonometrie.




Sphärisches Dreieck nennt man die Schnittfigur einer Kugel mit einem Dreikant, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt.

Formeln für das sphärische Dreieck:

1) $\sin a : \sin b = \sin\alpha : \sin\beta$ (Sinussatz).

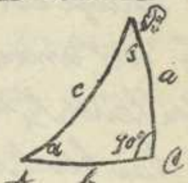
2) $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha$
$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$ (Cosinussatz)

3) $\sin a \cos\beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos\alpha$
$\sin\alpha \cos b = \cos\beta \sin\gamma + \sin\beta\cos\gamma\cos a$ (Sinuscosinussatz)

4) $\operatorname{cotg}\beta \cdot \sin\alpha = \operatorname{cotg} b \cdot \sin c - \cos\alpha\cos c$
$\operatorname{cotg} b \cdot \sin a = \operatorname{cotg}\beta \cdot \sin\gamma + \cos a \cdot \cos\gamma$ (Cotangentensatz),

wozu noch je zwei weitere Formeln kommen, die aus den angeschriebenen durch cyklische Vertauschung hervorgehen.

Formeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck ($\gamma = 90°$):




$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$; $\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin c}$;

$\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}$; $\cos\beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}$

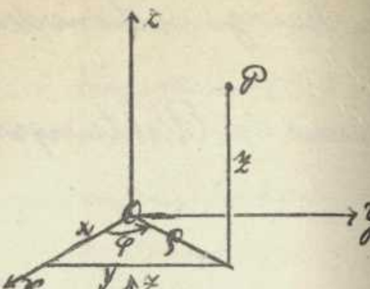
$\cos c = \cos a \cdot \cos b$; $\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$; $\cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$.

Inhalt eines beliebigen sphärischen Dreiecks:

$F = \text{Kugeloberfläche} \cdot \frac{\alpha+\beta+\gamma-180°}{4\cdot 180°} = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha+\beta+\gamma-180°}{180°} = r^2 \cdot \varepsilon$, wo $\alpha+\beta+\gamma-180°$ (in Gradmaß) oder $\varepsilon$ (in Bogenmaß) den sphärischen Exzess und $r$ den Kugelradius bedeutet.

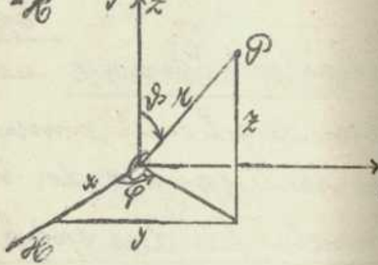
## Zylinderkoordinaten $\varrho, \varphi, z$:

$$\begin{cases} x = \varrho \cos\varphi \; ; \\ y = \varrho \cdot \sin\varphi \; ; \\ z = z \; ; \end{cases} \quad \begin{cases} \varrho = +\sqrt{x^2+y^2} \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \; \begin{cases} \sin\varphi = \frac{y}{\varrho}, \\ \cos\varphi = \frac{x}{\varrho}, \end{cases} \\ z = z \end{cases}$$




## Kugelkoordinaten $r, \varphi, \vartheta$:

$$\begin{cases} x = r \cos\varphi \cdot \sin\vartheta \; ; \\ y = r \cdot \sin\varphi \cdot \sin\vartheta \; ; \\ z = r \cdot \cos\vartheta \; ; \end{cases} \quad \begin{cases} r = +\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \\ \operatorname{tg}\vartheta = \frac{+\sqrt{x^2+y^2}}{z}. \end{cases}$$




## Aufgaben.

1.) Wie groß ist der Neigungswinkel benachbarter Seitenflächen des regulären Tetraeders bezw. Dodekaeders?

2.) Von zwei Orten der Erdoberfläche kennt man die geographischen Längen $l_1$ und $l_2$ sowie die Breiten $b_1$ und $b_2$; man berechne ihre sphärische Entfernung. Beispiel: Berlin $\begin{cases} l_1 = 13^\circ 24' \text{ ö.L.} \\ b_1 = 52^\circ 31' \text{ n.Br.} \end{cases}$, Madrid $\begin{cases} l_2 = 3^\circ 44' \text{ w.L.} \\ b_2 = 40^\circ 25' \text{ n.Br.} \end{cases}$; Erdradius $= 6370$ km.

3.) Man berechne die Dauer des längsten Tages in München (geogr. Breite $\varphi = 48^\circ 9'$) und das Azimut des Sonnenaufgangs an diesem Tage. (Schiefe der Ekliptik $\varepsilon = 23^\circ 27'$).

4.) Von einem Stern mit der Deklination $\delta$ sind 2 Höhen $h_1$ und $h_2$ zu den Zeiten $t_1$ u. $t_2$ gemessen; welches ist die geogr. Breite des Beobachtungsortes

5.) Man berechne den Abstand des Punktes $P_1(x_1, y_1, z_1)$ von der Geraden mit den Gleichungen $\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - r_1 = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z - r_2 = 0 \end{cases}$.

6.) Gegeben ist eine Gerade durch 2 Punkte $P_1(6, 2, -5)$ und $P_2(-2, -4, \frac{10}{3})$. Man bestimme die Gleichung der reziproken Polaren zu $P_1P_2$ in bezug auf die Kugel $x^2+y^2+z^2-16=0$, ermittle die Richtungskosinus derselben sowie Richtung und Länge des Abstandes der beiden Polaren voneinander.

12. VII. 1909. **Höhere Mathematik II.** № 11.

Der geometrische Ort aller Punkte, welche inbezug auf die beiden Kugeln
$$K \equiv x^2+y^2+z^2-2xx_0-2yy_0-2zz_0+p=0$$
und
$$K' \equiv x^2+y^2+z^2-2xx_0'-2yy_0'-2zz_0'+p'=0$$
gleiche Potenz haben, ist eine Ebene (Potenzebene) von der Gleichung
$$K-K' \equiv 2x(x_0-x_0')+2y(y_0-y_0')+2z(z_0-z_0')-(p-p')=0.$$
Dabei ist $p = x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2$ die Potenz des Koordinatenanfangspunktes inbezug auf die Kugel $K=0$. Die stets reelle Potenzebene steht senkrecht auf der Zentralen der beiden Kugeln und enthält den (reellen oder imaginären) Schnittkreis derselben.

Die drei Potenzebenen dreier Kugeln $K=0$, $K'=0$ und $K''=0$ gehen sämtlich durch eine Gerade, die Potenzlinie inbezug auf die drei Kugeln. Sie ist der geometrische Ort aller Punkte, welche inbezug auf $K=0, K'=0$ und $K''=0$ dieselbe Potenz haben. Jede Kugel, welche um einen beliebigen Punkt der Potenzlinie als Mittelpunkt und die Wurzel aus der gemeinsamen Potenz als Radius beschrieben wird, durchsetzt die drei Kugeln rechtwinklig.

Die sechs Potenzebenen von vier Kugeln schneiden sich sämtlich in einem Punkt, dem Potenzpunkt; macht man denselben zum Mittelpunkt einer Kugel vom Radius gleich der Wurzel aus der gemeinsamen Potenz, so schneidet diese Kugel die vier gegebenen Kugeln sämtlich unter rechtem Winkel.

Der geometrische Ort aller Punkte, deren Potenzen inbezug auf zwei Kugeln $K=0$ und $K'=0$ ein gegebenes Verhältnis $\lambda$ haben, ist die Kugel $K-\lambda K'=0$. Der Mittelpunkt dieser Kugel liegt auf der Zentralen von $K=0$ und $K'=0$ und teilt dieselbe im Verhältnis $\lambda$. Für veränderliches $\lambda$ stellt $K-\lambda K'=0$ die Gleichung eines Kugelbüschels dar, dessen sämtliche Kugeln sich in einem reellen, einem Nullkreis oder imaginären Kreise schneiden, dem Schnittkreis von $K=0$ und $K'=0$. Statt $K=0$ und $K'=0$ kann man zwei beliebige Kugeln des Büschels als Grundkugeln wählen. Jede Kugel des Büschels hat die Eigenschaft, daß für jeden Punkt derselben das Potenzverhältnis von zwei beliebigen andern Kugeln des Büschels konstant ist. Im Falle des imaginären gemeinsamen Schnittkreises des Büschels sind die Kugeln desselben die Apollonischen Kugeln (Kugeln der Punkte gleichen Abstandsverhältnisses) zu den beiden dann reell vorhandenen Nullkreisen des Büschels.

Zwei Kugeln $K \equiv x^2+y^2+z^2-2xx_0-2yy_0-2zz_0+p=0$

und $K' \equiv x^2+y^2+z^2-2xx_0'-2yy_0'-2zz_0'+p'=0$

stehen aufeinander senkrecht, wenn $x_0x_0'+y_0y_0'+z_0z_0' = \frac{p+p'}{2}$.
Steht eine Kugel $K''=0$ senkrecht zu $K=0$ und $K'=0$, so steht sie auch senkrecht zu allen Kugeln des Büschels $K-\lambda K'=0$.
Ist neben $K''=0$ auch $K'''=0$ senkrecht zu $K=0$ und $K'=0$, so schneiden sämtliche Kugeln des Büschels $K''-\mu K'''=0$ alle Kugeln des Büschels $K-\lambda K'=0$. Die beiden Büschel bilden dann ein System orthogonaler Kugelbüschel.

## Rotationsflächen.

Ist die Gleichung der Meridiankurve $z=f(\rho)$, so ist die Gleichung der bei Rotation dieser Kurve um die Z-Achse entstehenden Rotationsfläche: $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ oder $\Phi(x^2+y^2, z)=0$.

## Flächen zweiter Ordnung.

1) Gleichungen der Rotationsflächen zweiter Ordnung bei Rotation um die Z-Achse:

Kreiszylinder: $x^2+y^2-a^2=0$;

Kreiskegel vom Öffnungswinkel $2\alpha$: $x^2+y^2-z^2\cdot tg^2\alpha=0$;

Rotationsellipsoid: $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ;
Einschaliges Rotationshyperboloid: $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ;
Zweischaliges Rotationshyperboloid: $-\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ;
Rotationsparaboloid: $x^2+y^2-2pz=0$ .

Man nennt das Rotationsellipsoid ein verlängertes, wenn $c>a$, ein verkürztes (Sphäroid), wenn $c<a$.

2.) Aus den Rotationsflächen zweiter Ordnung gehen durch „homogene Deformation" die allgemeinen Flächen zweiter Ordnung hervor.

Bei der <u>homogenen Deformation</u> $x'=k_1x,\ y'=k_2y,\ z'=k_3z$ gehen Ebenen wieder in Ebenen, Gerade in Gerade über. Teilungsverhältnisse sowie die Verhältnisse paralleler Strecken ~~und~~ die Verhältnisse der Volumina von Körpern bleiben erhalten.

3.) Gleichungen der <u>allgemeinen Flächen zweiter Ordnung</u>:

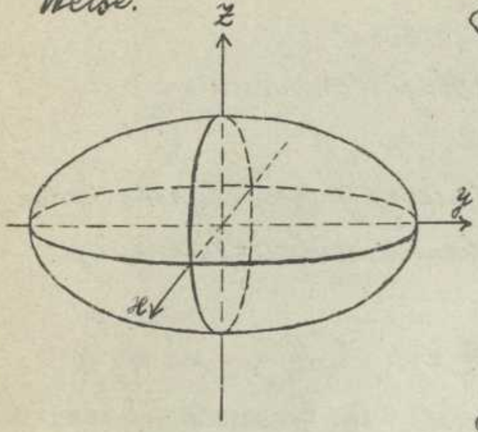
Kegel: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$, wenn die zur Z-Achse senkrechten Schnitte Ellipsen sind;

Elliptischer Zylinder: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
Hyperbolischer Zylinder: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
Parabolischer Zylinder: $y^2-2px=0$
} wobei die Leitlinien parallel zur Z-Achse sind,

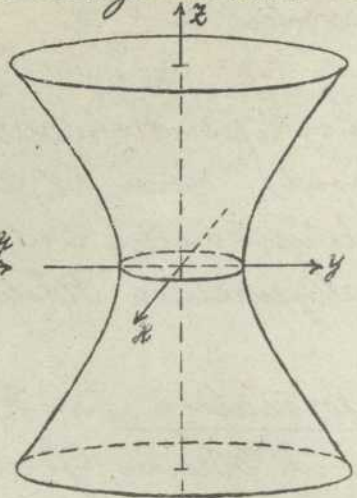
Dreiachsiges Ellipsoid: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ;
Einschaliges Hyperboloid: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ ;
Zweischaliges Hyperboloid: $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ;
Elliptisches Paraboloid: $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0$ ,
Hyperbolisches Paraboloid: $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}-2z=0$
} wobei $p$ und $q$ positiv sind.

Auf dem einschaligen Hyperboloid und dem hyperbolischen Paraboloid liegen zwei Scharen reeller Geraden; bei letzterem ist jede Geradenschar einer festen Ebene parallel. Das einschalige

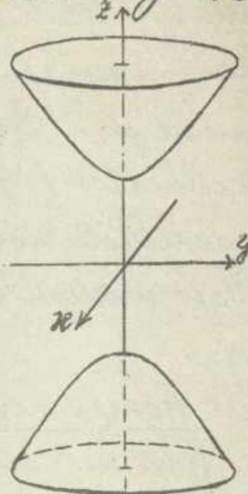
Rotationshyperboloid kann durch Rotation einer zur Z-Achse windschiefen Geraden erzeugt werden und zwar auf zweierlei Weise.




Ellipsoid.




Einschaliges Hyperboloid.




Zweischaliges Hyperboloid.

## Aufgaben.

1.) Man bestimme ein Ellipsoid mit dem Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkt so, daß es durch die Punkte $(1,1,1)$, $(1,2,0)$, $(2,1,0)$ geht.

2.) Welches sind die Achsenlängen des einschaligen Hyperboloids $4x^2+9y^2-6z^2-1=0$? Man gebe die Gleichungen der beiden durch den Punkt des Hyperboloids $(2,1,?)$ gehenden Erzeugenden der Fläche an.

3.) Gegeben ist die Gerade $\begin{cases} x+2y-8=0 \\ z=8 \end{cases}$. Man bestimme den Parameter $p$ des Rotationsparaboloids $x^2+y^2-2pz=0$ so, daß die Gerade die Fläche berührt.

4.) Man zeige, daß die Schnittkurve der beiden Ellipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ und $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}-1=0$ auf einem Kegel und drei Zylindern zweiter Ordnung liegt.

Ende.

Platz №.........          Name: .......................
                                   Note: ...........

# Höhere Mathematik II.

## Semestralexamen S. S. 1909.

1.) Die Funktion $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ soll mithilfe der binomischen Reihe in eine nach positiven Potenzen von $x$ fortschreitende unendliche Reihe entwickelt und die ersten fünf Glieder der Entwicklung angeschrieben werden.

2.) Die Gleichung $x^3+x^2-8x-12=0$ besitzt eine Doppelwurzel. Man benütze diese Kenntnis zur Berechnung der drei Wurzeln der Gleichung.

3.) Man diskutiere die Kurve $y^2(1+x)-x^2=0$ und zeichne dieselbe. Ferner bestimme man Lage und Art allenfalls vorhandener singulärer Punkte der Kurve und die Tangenten in ihnen.

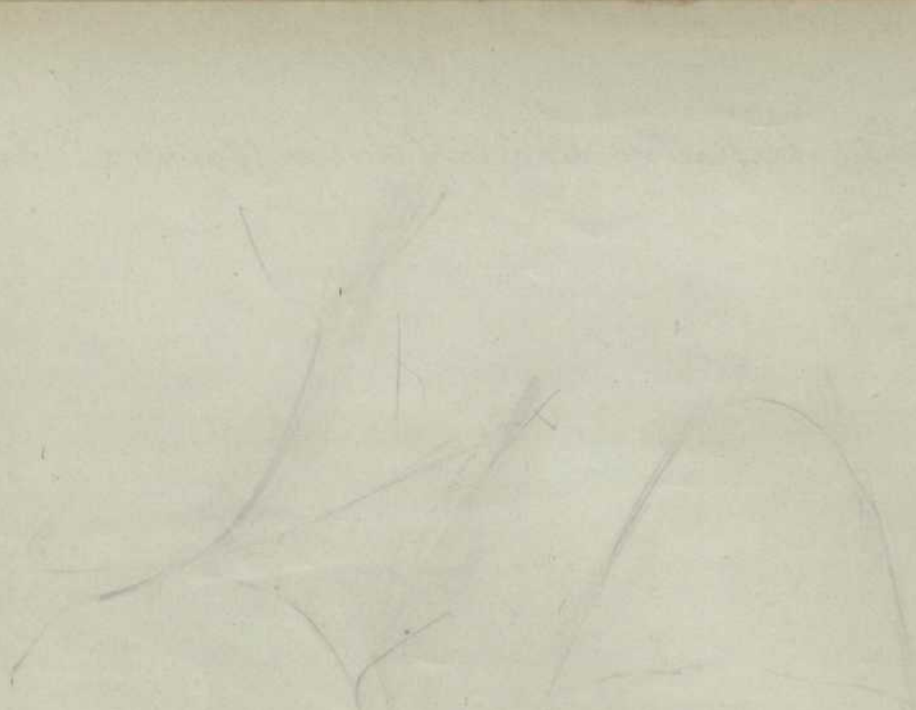
4.) Man werte die beiden Integrale aus:

$$\int\frac{x^3+6x^2-4x+8}{x^2(x^2+4)}\,dx\quad;\qquad\int\frac{x-1}{x\cdot\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx\,.$$

5.) Welches sind die Richtungskosinus der Geraden $\left\{\begin{array}{l}2x+5y-3z+1=0\\ x-y+2z-3=0\end{array}\right.$ ? Man bestimme die Gleichung der Geraden, welche durch den Punkt $P_1(1,-3,2)$ geht und die Z-Achse sowie die gegebene Gerade senkrecht kreuzt.

6.) Man ermittle die Koordinaten des zur Ebene $x-2z-2=0$ als Polarebene der Kugel $x^2+y^2+z^2-4=0$ gehörigen Poles. Wie lautet die Gleichung der Projektion des Schnittkreises von Ebene und Kugel auf die (XY) Ebene?

(NB! Die Aufgaben sind auf diesem Bogen zu bearbeiten.)



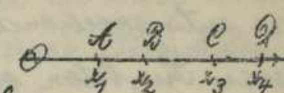
9. XI 1909. **Höhere Mathematik III.** № 1.

## Projektive Geometrie.

Unter einer (geraden) <u>Punktreihe</u> versteht man eine endliche oder unendliche Anzahl von Punkten, welche auf einer Geraden, dem Träger der Punktreihe, liegen. – Unter einem <u>Strahlenbüschel</u> versteht man eine endliche oder unendliche Anzahl von geraden Strahlen, die durch einen Punkt, den Träger des Strahlenbüschels, hindurchgehen.

<u>Doppelverhältnis von vier Punkten einer Geraden:</u>

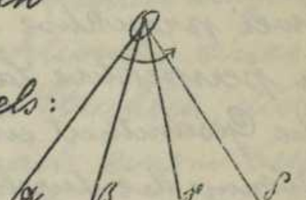
$$k = (ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}.$$




Ist $k = -1$, so liegt das Punktpaar $CD$ harmonisch zum Punktpaar $AB$.

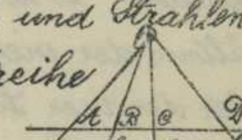
Doppelverhältnis von vier Strahlen eines Büschels:

$$K = (\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)} : \frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\beta\delta)}$$



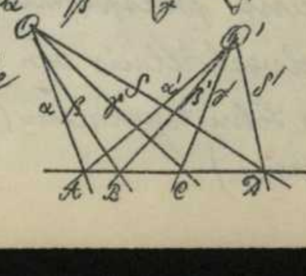

Sind drei Punkte (Strahlen) in bestimmter Reihenfolge und das Doppelverhältnis eines vierten Punktes (Strahles) gegeben, so ist die Lage des vierten Punktes (Strahles) dadurch eindeutig bestimmt.

Definition der <u>perspektiven Lage</u> von Punktreihen und Strahlenbüscheln: Ein Strahlenbüschel und eine Punktreihe liegen perspektiv, wenn die Punkte der Punktreihe durch die entsprechenden Strahlen des Büschels ausgeschnitten werden.




– Zwei Punktreihen liegen perspektiv, wenn sie aus demselben Strahlenbüschel ausgeschnitten werden.


– Zwei Strahlenbüschel liegen perspektiv, wenn sie zur selben Punktreihe perspektiv liegen.



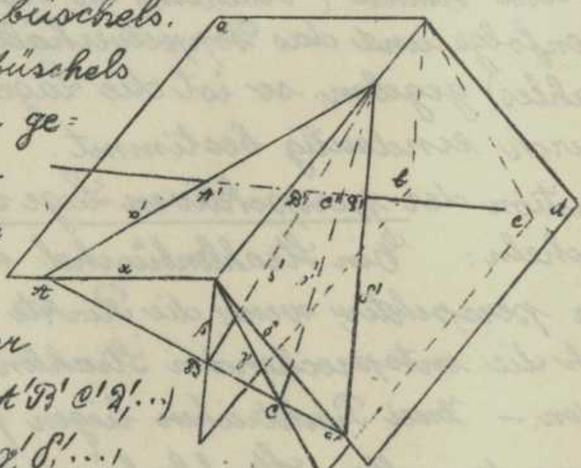
Sind Strahlenbüschel oder Punktreihen in perspektiver Lage, so sind die Doppelverhältnisse von je vier entsprechenden Elementen einander gleich.–

Beliebig gelegene Strahlenbüschel oder Punktreihen, in welchen entsprechende Elemente gleiches Doppelverhältnis besitzen, heissen „projektiv" oder „projektiv auf einander bezogen." (Sie brauchen nicht perspektiv zu liegen.)

Zur Festlegung der projektiven Beziehung genügen drei Paare entsprechender Elemente. Jedes vierte Element des einen Gebildes ist dann eindeutig durch das Doppelverhältnis bestimmt, welches das entsprechende Element des andern Gebildes mit den drei gegebenen Punkten oder Strahlen bildet.

Zwei projektive Punktreihen oder Strahlenbüschel können stets in perspektive Lage gebracht werden.–

Die Gesamtheit einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Ebenen, die durch eine Gerade gehen, heisst Ebenenbüschel, die Gerade die Achse des Ebenenbüschels.



Werden vier Ebenen eines Ebenenbüschels durch eine Gerade oder Ebene geschnitten, so ist das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte oder der vier Schnittstrahlen gleich dem Doppelverhältnis der vier Ebenen. Die Punktreihe ($A'B'C'D'$...) oder das Strahlenbüschel $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$,... heisst perspektiv zu dem Ebenenbüschel ($a, b, c, d$,...). (Das Doppelverhältnis von vier Ebenen definiert man als Doppelverhältnis der Schnittgeraden ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$) mit einer zur Achse senkrechten Ebene.)

Punktreihen, Strahlenbüschel oder Ebenenbüschel, deren Elemente den Ebenen eines Ebenenbüschels so zugeordnet sind, dass je vier entsprechende Elemente gleiches Doppelverhältnis haben, heissen projektiv zu dem Ebenenbüschel. —
Eine endliche oder unendliche Anzahl von Punkten einer Ebene, die nicht sämtlich auf einer Geraden liegen, heisst ein Punktfeld. Eine endliche oder unendliche Anzahl von Geraden, die durch einen Punkt gehen und nicht sämtlich in einer Ebene liegen, heisst ein Strahlenbündel. —
Bei der Zentralprojektion einer ebenen Figur in eine andere Ebene bleiben die Doppelverhältnisse von vier Punkten einer Geraden und von vier Strahlen eines Büschels ungeändert.
Sätze über Kegelschnitte als Zentralprojektionen eines Kreises: 1.) Das Doppelverhältnis von vier Strahlen, die von vier festen Punkten eines Kegelschnittes nach einem beliebigen fünften Punkt des Kegelschnittes gehen, ist konstant.
2.) Der Kegelschnitt kann als geometrischer Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projektiver Strahlenbüschel aufgefasst werden; er geht auch durch die Zentren der beiden Büschel. —

## Aufgaben.

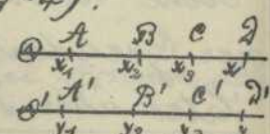
1.) Welches ist das Doppelverhältnis der vier auf der X-Achse liegenden Punkte: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$, $x_4 = 5$ ?
2.) Man bestimme den Punkt $P_4$ so, dass er mit $P_1 (x_1 = 0)$, $P_2 (x_2 = 1)$ und $P_3 (x_3 = 3)$ das Doppelverhältnis $k = \frac{5}{2}$ bildet.
3.) Welche Werte nimmt das Doppelverhältnis $k = (P_1 P_2 P_3 P_4)$ an, wenn $P_4$ nacheinander nach $-\infty$, $P_1$, $P_2$, $P_3$, $+\infty$ rückt ?

4.) Man bestimme die Werte der Doppelverhältnisse $(ABDC)$, $(ACBD)$, $(ACDB)$, $(ADBC)$, $(ADCB)$, wenn $(ABCD) = k$ ist. Was erhält man, wenn die vier Punkte harmonisch liegen?

5.) Berechne das Doppelverhältnis zweier Geraden und ihrer beiden Winkelhalbierenden.

6.) Gegeben drei Punkte $A, B, C$ iner Geraden und vier weitere Punkte $D_1$, $D_2$, $D_3$ und $D_4$ derselben Geraden, welche mit $A$, $B$ und $C$ die Doppelverhältnisse $k_1$, $k_2$, $k_3$ und $k_4$ bilden. Gesucht das Doppelverhältnis $(D_1 D_2 D_3 D_4)$.

7.) Auf zwei projektiven Punktreihen sind je drei Punkte durch ihre Koordinaten gegeben.




Man zeige, dass zwischen den Koordinaten jedes weiteren entsprechenden Punktepaares eine bilineare Gleichung von der Form besteht: $axy + bx + cy + d = 0$.
Wie lautet diese Beziehung in dem speziellen Falle, wenn die beiden Punktreihen a.) ähnlich, b.) kongruent sind?

8.) Man konstruiere dasjenige Paar aufeinander senkrechter Strahlen eines Büschels, dem in einem dazu perspektiven Strahlbüschel wieder ein aufeinander senkrechtes Strahlenpaar entspricht.

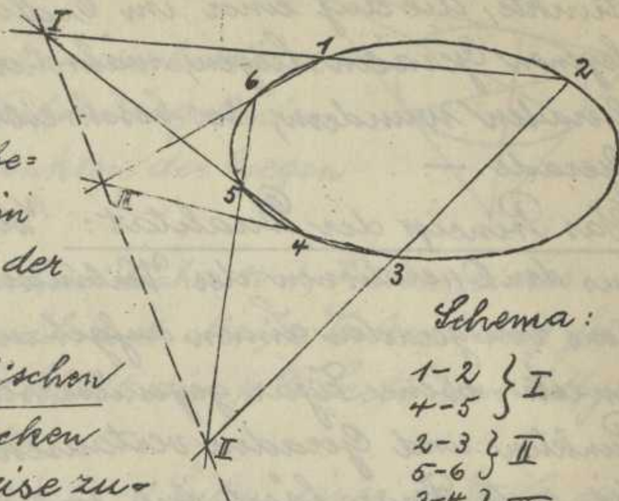
9.) Mithilfe eines Papierstreifens zeichne man durch Konstruktion von entsprechenden Strahlen projektiver Büschel von einem durch fünf Punkte gegebenen Kegelschnitt weitere Punkte.

---

16. XI. 1909. **Höhere Mathematik III.** № 2.

## Der Satz von Pascal:

Die drei Paar Gegenseiten eines einem Kegelschnitt einbeschriebenen Sechsecks schneiden sich in drei Punkten einer Geraden (der „Pascal'schen Geraden".)



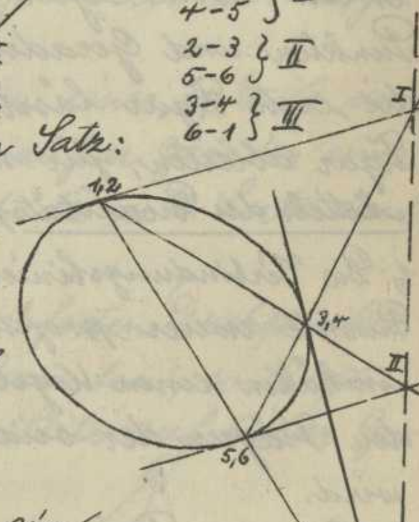

Schema:

$\left.\begin{matrix}1-2\\4-5\end{matrix}\right\}\mathrm{I}$

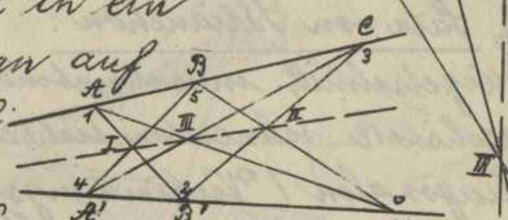
$\left.\begin{matrix}2-3\\5-6\end{matrix}\right\}\mathrm{II}$

$\left.\begin{matrix}3-4\\6-1\end{matrix}\right\}\mathrm{III}$

Spezialisierungen des Pascal'schen Satzes: a) Lässt man die Ecken des Sehnensechseckes paarweise zusammenfallen, so erhält man folgenden Satz: Ist ein Dreieck einem Kegelschnitt einbeschrieben, so liegen die 3 Schnittpunkte der Dreiecksseiten mit den Tangenten in den gegenüberliegenden Ecken auf einer Geraden.




b) Der Pascal'sche Satz behält auch Giltigkeit, wenn der Kegelschnitt in ein Geradenpaar zerfällt: Hat man auf zwei Geraden je drei Punkte A, B, C und A', B', C', so liegen die drei Schnittpunkte der kreuzweisen Verbindungslinien $\left.\begin{matrix}AB'\\BA'\end{matrix}\right\}\mathrm{I}$, $\left.\begin{matrix}BC'\\CB'\end{matrix}\right\}\mathrm{II}$, $\left.\begin{matrix}CA'\\AC'\end{matrix}\right\}\mathrm{III}$ auf einer Geraden.

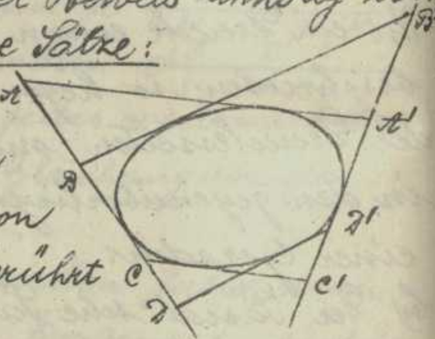



Sätze über Polygone: 1) Drehen sich die Seiten eines veränderlichen n-Ecks um n beliebige aber feste Punkte, während n-1 Ecken auf festen Geraden laufen, so beschreibt die $n^{te}$ Ecke einen Kegelschnitt.

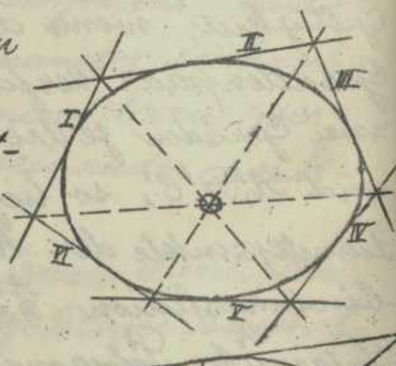
<u>Spezieller Fall:</u> 2.) Drehen sich die Seiten eines n-Ecks um n feste Punkte, die auf einer im Endlichen oder unendlich fern gelegenen Geraden liegen, während n-1 Polygonecken auf festen Geraden wandern, so beschreibt auch die n^te^ Ecke eine Gerade.—

<u>Das Princip der Dualität:</u> Wenn eine ebene Figur nur aus den Operationen des Verbindens von Punkten und des Schneidens von geraden Linien aufgebaut ist, so kann man ihr eine zweite ebene Figur gegenüberstellen, in der die Rolle von Punkten und Geraden vertauscht ist. Aus jedem Satz über die erste Figur lässt sich so ein „dualer" Satz über die zweite Figur ableiten, für welchen ein weiterer Beweis unnötig ist.

<u>Mittels des Dualitätsprincips gewonnene Sätze:</u>

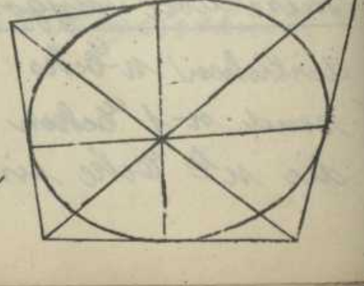



1.) Die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier projektiver Punktreihen umhüllen einen Kegelschnitt, der auch von den Trägern der beiden Punktreihen berührt wird.



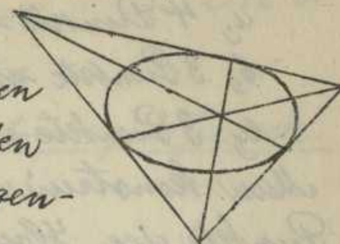

2.) <u>Satz von Brianchon:</u> In jedem einem Kegelschnitt umschriebenen Tangentensechseck schneiden sich die drei Hauptdiagonalen (Verbindungslinien der Gegenecken) in einem Punkt, dem „Brianchon'schen Punkt."

Schema: $\left.\begin{matrix} I-II \\ IV-V \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} II-III \\ V-VI \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} III-IV \\ VI-I \end{matrix}\right\}$.



<u>Spezialisierungen des Satzes von Brianchon:</u>

1.) In jedem einem Kegelschnitt umschriebenen Viereck schneiden sich die Diagonalen und die Verbindungslinien gegenüberliegender Berührpunkte in einem Punkt.



2.) In jedem einem Kegelschnitt umschriebenen Dreieck schneiden sich die Verbindungslinien der Ecken mit den Berührpunkten der Gegenseiten in einem Punkt.—

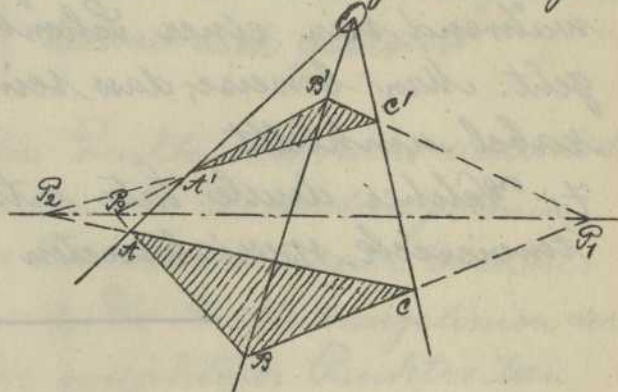
Sätze über Polygone: 1.) Drehen sich (n-1) Seiten eines n-Ecks um feste Punkte, während die n Ecken auf festen Geraden fortrücken, so umhüllt die $n^{te}$ Seite im allgemeinen einen Kegelschnitt.

Spezieller Fall: 2.) Drehen sich die (n-1) Seiten eines n-Ecks um feste Punkte, während die n Ecken auf n Geraden eines Strahlbüschels fortrücken, so geht auch die $n^{te}$ Seite durch einen festen Punkt.

Weitere Spezialisierung: 3.) Liegen die (n-1) festen Drehpunkte der (n-1) Seiten des Polygons auf einer Geraden, so liegt auch der feste Drehpunkt der letzten Seite auf dieser Geraden.

Der Satz von Désargues:

Die drei Schnittpunkte entsprechender Seiten zweier perspektiven Dreiecke liegen auf einer Geraden.




## Aufgaben.

1) Gegeben von einem Kegelschnitt

a.) 5 Punkte, b.) 3 Punkte und die Tangenten in zweien derselben. Man zeichne weitere Kegelschnittspunkte sowie die Tangenten in den gegebenen Punkten.

2.) Von einer Hyperbel sind gegeben

a.) 4 Punkte und die Richtung einer Asymptote,

b.) 3 Punkte und die Richtungen der beiden Asymptoten,

c.) 3 Punkte und eine Asymptote.

Man konstruiere die beiden Asymptoten und weitere Punkte der Hyperbel.

3.) Von einer Parabel kennt man die Achsenrichtung, eine Tangente mit Berührpunkt und einen weiteren Punkt. Gesucht Achse und Scheitel der Parabel.

4.) Von einer Ellipse ist ein Durchmesser der Länge und Richtung nach, die Richtung des hiezu konjugierten Durchmessers sowie eine Tangente gegeben. Man zeichne weitere Tangenten nebst ihren Berührpunkten.

5.) Eine Hyperbel ist durch ihre beiden Asymptoten und eine Tangente gegeben; gesucht weitere Tangenten.

6.) Ein Winkel von konstanter Grösse bewegt sich so in der Ebene, dass sein Scheitel auf einer Geraden wandert, während sein einer Schenkel durch einen festen Punkt geht. Man beweise, dass sein anderer Schenkel eine Parabel umhüllt.

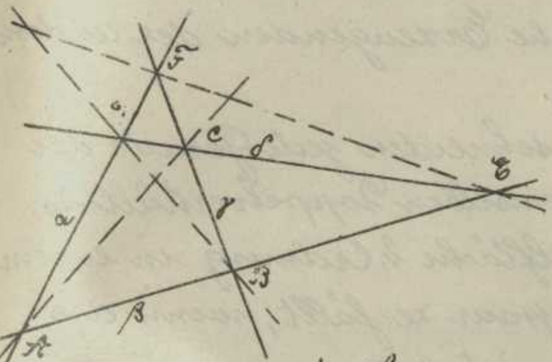
7.) Welcher duale Satz entspricht dem für das Tangentenviereck spezialisierten Brianchon'schen Satze?

---

23. XI. 1909. № 3.

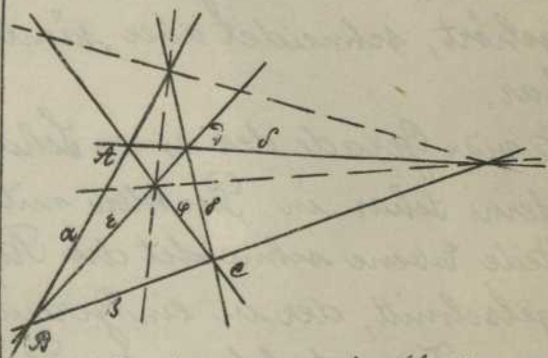
# Höhere Mathematik III.

## Das vollständige Vierseit.



Es besteht aus vier Seiten, sechs Ecken, drei Diagonalen und drei Diagonalschnittpunkten.
Auf jeder Diagonale werden die beiden Ecken durch die beiden Diagonalschnittpunkte harmonisch getrennt.

## Das vollständige Viereck.



Es besteht aus vier Ecken, sechs Seiten, drei Diagonalschnittpunkten und drei Diagonalen.
In jedem Diagonalschnittpunkt werden die beiden Seiten durch die beiden Diagonalen harmonisch getrennt.

Der Dualismus im Raume: Dem Punkte entspricht dualistisch im Raume die Ebene, der Geraden als Verbindungslinie zweier Punkte die Gerade als Schnittlinie zweier Ebenen.

Die Regelflächen 2. Ordnung: 1, Die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte zweier projektiver Punktreihen im Raum bilden die eine Schar von Erzeugenden einer Regelfläche 2. Ordnung. Dieselbe ist im allgemeinen ein einschaliges Hyperboloid.

2, Dieselbe Fläche wird auch gebildet von den Geraden, in welchen sich entsprechende Ebenen zweier projektiven Ebenenbüschel schneiden.

3.) Die Regelfläche 2. Ordnung kann auch erzeugt werden durch alle Geraden, welche drei gegebene windschiefe Geraden schneiden.

4.) Die Fläche enthält zwei Scharen von Geraden. Jede Erzeugende ist windschief zu allen Geraden der Schar, der sie angehört, schneidet aber sämtliche Erzeugenden der andern Schar.

5.) Je vier Gerade der einen Schar schneiden jede Gerade der andern Schar in Punkten mit demselben Doppelverhältnis.

6.) Jede Ebene schneidet die Regelfläche 2. Ordnung in einem Kegelschnitt, der in ein Geradenpaar zerfällt, wenn die Ebene Tangentialebene der Fläche ist.

7.) Sind die unter 1.) erwähnten Punktreihen ähnlich, so ist die erzeugte Fläche ein hyperbolisches Paraboloid, das die unendlich ferne Ebene zur Tangentialebene hat.

Die Raumkurven 3. Ordnung.

1.) Drei projektive Ebenenbüschel erzeugen als geometrischen Ort der Schnittpunkte je dreier entsprechender Ebenen eine Raumkurve 3. Ordnung. Analog sind die Ebenen, welche durch je drei entsprechende Punkte dreier projektiver Punktreihen bestimmt sind, Schmiegungsebenen einer Raumkurve 3. Ordnung.

2.) Die Kurve kann auch als Schnitt zweier einschaliger Hyperboloide aufgefasst werden, welche eine Gerade gemeinsam haben.

3.) Von jedem ihrer Punkte aus wird die Kurve durch einen Kegel 2. Ordnung projiziert. Sie kann also auch als Schnitt zweier Kegel 2. Ordnung erhalten werden, welche eine Erzeugende gemeinsam haben.

4., Nach ihrem Verhalten im Unendlichen lassen sich vier Arten der Raumkurven 3. Ordnung unterscheiden:

a., Drei getrennte reelle unendlich ferne Punkte, drei Asymptoten, kubische Hyperbel;

b., Einen reellen und zwei imaginäre unendlich ferne Punkte, eine Asymptote, kubische Ellipse;

c., Zwei zusammenfallende und ein getrennter unendlich ferner Punkt, eine Asymptote, kubisch hyperbolische Parabel;

d., Drei zusammenfallende unendlich ferne Punkte, keine Asymptote, kubische Parabel.

Symbolische Bezeichnungen: Sind $U=0$ und $V=0$ die Gleichungen zweier Geraden, so haben die vier durch einen Punkt gehenden Geraden $U=0$, $V=0$, $U-\lambda V=0$, $U-\mu V=0$ das Doppelverhältnis $\frac{\lambda}{\mu}$.
Die zwei Strahlbüschel $U-\lambda V=0$ und $U'-\lambda V'=0$ sind projektiv, wenn Strahlen mit gleichem $\lambda$ einander zugeordnet werden; diese projektiven Büschel erzeugen den Kegelschnitt $UV'-VU'=0$, der durch die vier Punkte $\begin{cases}U=0\\V=0\end{cases}$, $\begin{cases}U'=0\\V'=0\end{cases}$, $\begin{cases}U=0\\U'=0\end{cases}$, $\begin{cases}V=0\\V'=0\end{cases}$ hindurchgeht. Durch dieselben vier Punkte gehen alle Kegelschnitte des Kegelschnittbüschels $UV'-kVU'=0$, wo $k$ eine beliebige Konstante bedeutet.
Eine Gleichung von der Form $UV-nW^2=0$ stellt das Büschel von Kegelschnitten dar, welche die Geraden $U=0$ und $V=0$ in ihren Schnittpunkten mit der Geraden $W=0$ berühren. –

# Aufgaben.

1.) Wie viele Gerade gibt es, die vier windschiefe Gerade schneiden?

2.) In welcher Weise kann eine Regelfläche 2. Ordnung konstruiert werden, von der

a, 2 windschiefe Erzeugende und 3 weitere Punkte,

b, 2 windschiefe Erzeugende und 3 weitere Tangenten

gegeben sind?

3.) Alle Punktpaare C, D einer Geraden, welche zu zwei festen Punkten A und B dieser Geraden harmonisch liegen, bilden eine Punktinvolution. Man beweise, dass zwischen den Koordinaten $x$ und $y$ von C und D eine Gleichung besteht von der Form $xy + a(x+y) + b = 0$ und dass A und B die Doppelpunkte der Involution sind.

4.) Ein rechter Winkel dreht sich um seinen Scheitel, der außerhalb einer Geraden liegt. Man zeige, dass die Schenkel des Winkels auf dieser Geraden entsprechende Punkte einer Punktinvolution mit imaginären Doppelpunkten ausschneiden.

5.) Man beweise, dass jede Gerade die Kegelschnitte eines Büschels nach Punktpaaren einer Involution schneidet.

6.) Wieviel Parabeln und wieviel zerfallende Kegelschnitte enthält ein Kegelschnittbüschel?

7., Es soll das zum Kegelschnittbüschel duale Gebilde (die Kegelschnittschar) diskutiert werden.

8., Sind $U=0$, $V=0$ und $W=0$ die Gleichungen dreier Geraden, so ist $\sqrt{U}+\sqrt{V}+\sqrt{W}=0$ die Gleichung eines Kegelschnittes, der die drei Geraden berührt. Beweis!

30.XI.09. № 4.

# Höhere Mathematik III.

Affinität: Zwei Ebenen $(x, y)$ und $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ sind affin aufeinander bezogen, wenn zwischen den Koordinaten entsprechender Punkte die Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{X} &= a_{11}x + a_{12}y\\ \mathfrak{Y} &= a_{21}x + a_{22}y\end{aligned}\right\}\text{ oder nach } x, y \text{ aufgelöst: }\left\{\begin{aligned}\Delta\cdot x &= a_{22}\mathfrak{X} - a_{12}\mathfrak{Y}\\ \Delta\cdot y &= -a_{21}\mathfrak{X} + a_{11}\mathfrak{Y},\end{aligned}\right.$$

wobei $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ die Transformationsdeterminante ist.

Die affine Beziehung im Raume ist bestimmt durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{X} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z\\ \mathfrak{Y} &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z\\ \mathfrak{Z} &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z\end{aligned}\right\}\text{ oder nach } x, y, z \text{ aufgelöst: }\left\{\begin{aligned}\Delta\cdot x &= A_{11}\mathfrak{X} + A_{21}\mathfrak{Y} + A_{31}\mathfrak{Z}\\ \Delta\cdot y &= A_{12}\mathfrak{X} + A_{22}\mathfrak{Y} + A_{32}\mathfrak{Z}\\ \Delta\cdot z &= A_{13}\mathfrak{X} + A_{23}\mathfrak{Y} + A_{33}\mathfrak{Z}.\end{aligned}\right.$$

Dabei bedeutet $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ und $A_{ik}$ die zweireihige Unterdeterminante von $a_{ik}$ mit Vorzeichen.

Eigenschaften der affinen Transformation: Bei der affinen Transformation gehen im Endlichen gelegene Punkte wieder in solche, unendlich fern gelegene Punkte wieder in unendlich ferne Punkte, Gerade wieder in Gerade, parallele Gerade wieder in parallele Gerade über. Das Teilungsverhältnis zwischen Punkten einer Geraden, sowie die Verhältnisse paralleler Strecken, ferner das Verhältnis zweier Flächeninhalte in der Ebene und das Verhältnis zweier Volumina im Raume bleiben erhalten.

Bei der affinen Beziehung zweier Ebenen aufeinander gibt es zwei zu einander senkrechte Richtungen, die sich in den beiden Ebenen entsprechen, die Hauptachsen der Affinität. In Richtung der Hauptachsen finden die größten Längenänderungen statt. Im Raume gibt es drei zu einander senkrechte Richtungen, denen wieder drei aufeinander senkrechte Richtungen entsprechen.

In zweien von ihnen werden die Längen am stärksten geändert. Nimmt man in beiden affinen Ebenen oder Räumen die Hauptachsen zu Koordinatenachsen, so geht die affine Transformation über in die homogene Deformation. Die allgemeine affine Transformation setzt sich daher zusammen aus einer homogenen Deformation und einer Drehung des Koordinatensystems.
Jede beliebige stetige Deformation eines Körpers kann als in den kleinsten Teilen affine Deformation aufgefasst werden.

<u>Kollineation:</u> Die Kollineation in der <u>Ebene</u> ist die allgemeinste Transformation, welche Punkte in Punkte und Gerade in Gerade überführt. Die Kollineation im <u>Raume</u> ist die allgemeinste Transformation, welche Punkte in Punkte, Gerade in Gerade und Ebenen in Ebenen überführt.
Bei der Kollineation bleiben Doppelverhältnisse erhalten. Die unendlich ferne Gerade bzw. Ebene geht in eine im Endlichen gelegene Gerade bezw. Ebene über, die „Fluchtlinie" bezw. „Fluchtebene".
Transformationsformeln der kollinearen Beziehung:
a) In der Ebene:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}} \\ Y &= \frac{a_{21}x+a_{22}y+a_{23}}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}} \end{aligned}\right\} \text{oder nach } x, y \text{ aufgelöst: } \left\{\begin{aligned} \Delta\cdot x &= \frac{A_{11}X+A_{21}Y+A_{31}}{A_{13}X+A_{23}Y+A_{33}} \\ \Delta\cdot y &= \frac{A_{12}X+A_{22}Y+A_{32}}{A_{13}X+A_{23}Y+A_{33}}, \end{aligned}\right.$$

wo $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ und $A_{ik}$ die Unterdeterminante von $a_{ik}$ mit Vorzeichen.

b) Im Raume:

$$X = \frac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}}{a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}}$$

$$Y = \frac{a_{21}x+a_{22}y+a_{23}\cdot z+a_{24}}{a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}}$$

$$Z = \frac{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}}{a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach $x, y, z$ ist analog wie in der Ebene.

Spezieller Fall der räumlichen Kollineation:
<u>Die Reliefperspektive:</u> $X = \frac{cx}{c+y}$, $Y = \frac{ay}{c+y}$, $Z = \frac{cz}{c+y}$.

Das <u>Ellipsoid</u> entsteht durch homogene Deformation der Kugel.
Gleichung des Ellipsoides, bezogen auf die Hauptachsen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Gleichung der Tangentialebene an das Ellipsoid im Punkt $(x_1, y_1, z_1)$ bezw. Gleichung der Polarebene eines nicht auf dem Ellipsoid gelegenen Punktes $(x_1, y_1, z_1)$ als Pol: $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} - 1 = 0.$
Auf jeder durch den Pol gehenden Geraden werden der Pol und der Schnittpunkt mit der Polarebene durch die beiden Schnittpunkte mit dem Ellipsoid harmonisch getrennt.
Der von $P_1(x_1, y_1, z_1)$ an die Fläche gelegte Tangentialkegel von der Gleichung $\left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} - 1\right)^2 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} - 1\right) = 0$ berührt das Ellipsoid längs des Schnittes der Polarebene von $P_1$ mit der Fläche.
<u>Konjugierte Durchmesser</u>: Die Polarebene des unendlich fernen Punktes eines Durchmessers des Ellipsoides geht durch den Mittelpunkt und heisst die zu dem Durchmesser konjugierte Durchmesserebene. Sie ist parallel zu den Tangentialebenen in den Endpunkten des konjugierten Durchmessers. Jeder in ihr liegende Durchmesser heisst zu dem ersten Durchmesser konjugiert.
Zwischen den Richtungskosinus $\alpha, \beta, \gamma$ und $\alpha', \beta', \gamma'$ zweier konjugierter Durchmesser besteht die Gleichung: $\frac{\alpha\alpha'}{a^2} + \frac{\beta\beta'}{b^2} + \frac{\gamma\gamma'}{c^2} = 0.$
Es gibt im Ellipsoid unendlich viele Systeme von drei Durchmessern, die paarweise konjugiert sind. Die Gleichung des Ellipsoides, bezogen auf drei konjugierte Durchmesser als schiefwinklige Koordinatenachsen lautet: $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} - 1 = 0.$

# Aufgaben.

1.) Man diskutiere die durch die Gleichungen $X = \frac{1}{x}$, $Y = \frac{y}{x}$ bestimmte perspektivische Abbildung zweier Ebenen aufeinander. Was entspricht einem zu den Koordinatenachsen parallelen quadratischen Netze sowie dem Einheitskreis $X^2 + Y^2 = 1$ in der andern Ebene? Man zeichne Objekt- und Bildebene!

2.) In einer Ebene ist ein gegebenes Quadrat durch Parallele zu den Seiten in $n$ Teile geteilt. Man konstruiere in einer dazu kollinearen Ebene das Bild dieser Figur, wenn die den Eckpunkten des Quadrates entsprechenden Punkte gegeben sind.

3.) Die Transformationsformeln für die Reliefperspektive (Seite 8) sollen nach $x, y, z$ aufgelöst werden. Welche Fläche entspricht der Kugel $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$? Von welchem Punkt aus müsste man das Relief beleuchten, damit Schlag- und Körperschatten der üblichen Beleuchtung des Objektes von links oben (Projektion der Lichtstrahlen in der $(x, y)$ und $(y, z)$ Ebene unter $45°$ gegen die $y$ Achse geneigt) entsprechen?

4.) Man gebe die Transformationsformeln an für die perspektive Abbildung des Raumes in die $(XZ)$ Ebene. Koordinaten des Auges: $0, -d, h$.

5.) Beweise, dass drei konjugierte Halbmesser eines Ellipsoides ein Tetraeder von konstantem Volumen bestimmen.

6.) Man zeige, dass der Ort der Schnittpunkte von je drei aufeinander senkrechten Tangentialebenen eines Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ eine Kugel vom Radius $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ist.

---

Berichtigung zum vorigen Übungsblatt № 3:

Seite 4, Aufgabe 26.) muss es heissen: .... u. 3 weitere Tangential<u>ebenen</u>.

7. XII. 09. №5.

# Höhere Mathematik III.

Die Kreisschnitte der Flächen 2. Ordnung: Das Ellipsoid, das einschalige und zweischalige Hyperboloid sowie das elliptische Paraboloid können durch zwei Scharen von Parallelebenen nach Kreisen geschnitten werden:

Ellipsoid : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ wobei $a>b>c$; Kreisschnitt $\frac{z}{x}=\pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}$

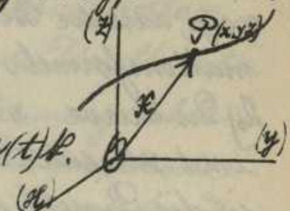
Einschal. Hyperboloid : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ " $a>b$; " $\frac{z}{y}=\pm\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}}$

Zweischal. Hyperboloid : $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ " $a>b$; " $\frac{z}{y}=\pm\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}}$

Ellipt. Paraboloid : $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}-2z=0$ " $p>q$; " $\frac{z}{y}=\pm\sqrt{\frac{p-q}{q}}$.

Satz: Werden die Peripherien zweier in parallelen Ebenen liegender Kreise in die gleiche Anzahl Teile geteilt, so sind die Verbindungslinien entsprechender Teilpunkte Erzeugende eines einschaligen Hyperboloids.

## Raumkurven.




Parameterdarstellung : $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\psi(t)$

In Vektorform: $\mathfrak{r}=xi+yj+zk=f(t)i+\varphi(t)j+\psi(t)k$.

Beispiel: Raumkurven 3. Ordnung:

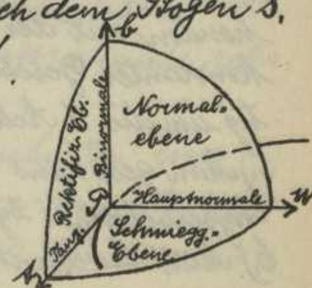
$x=\frac{a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3}{d_0+d_1t+d_2t^2+d_3t^3}$; $y=\frac{b_0+b_1t+b_2t^2+b_3t^3}{d_0+d_1t+d_2t^2+d_3t^3}$; $z=\frac{c_0+c_1t+c_2t^2+c_3t^3}{d_0+d_1t+d_2t^2+d_3t^3}$,

Bogenelement einer Raumkurve : $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$; oder

$s'^2=x'^2+y'^2+z'^2$, wo die Striche (') die Differentiation nach dem Parameter $t$ bedeuten.

Einheitsvektor in Richtung der Tangente: $t=\dot{\mathfrak{r}}=\frac{d\mathfrak{r}}{ds}=\frac{\mathfrak{r}'}{s'}=\alpha i+\beta j+\gamma k$.

Der Punkt (˙) bedeutet dabei die Differentiation nach dem Bogen $s$.




Richtungskosinus der Tangente: $\alpha=\frac{x'}{s'}$; $\beta=\frac{y'}{s'}$; $\gamma=\frac{z'}{s'}$.

Krümmung der Raumkurve $\frac{1}{\rho}=\frac{d\varepsilon}{ds}=\frac{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2-s''^2}}{s'^2}$

$d\varepsilon$ ist dabei der Winkel zweier benachbarter Tangenten.

Einheitsvektor in Richtung der Hauptnormalen:

$w=\rho\cdot\ddot{\mathfrak{r}}=\rho\cdot\frac{\mathfrak{r}''s'-s''\mathfrak{r}'}{s'^3}=ai+bj+ck$

Richtungskosinus der Hauptnormalen:

$$a = \frac{\varrho}{s'^3}(x''s' - s''x'), \quad b = \frac{\varrho}{s'^3}(y''s' - s''y'), \quad c = \frac{\varrho}{s'^3}(z''s' - s''z').$$

Einheitsvektor in Richtung der Binormalen:

$$\mathfrak{b} = V\mathfrak{t}\mathfrak{n} = \varrho\, V\dot{\mathfrak{x}}\ddot{\mathfrak{x}} = \frac{\varrho}{s'^3} V\mathfrak{x}'\mathfrak{x}'' = \lambda i + \mu j + \nu k.$$

Richtungskosinus der Binormalen:

$$\lambda = \frac{\varrho}{s'^3}(y'z'' - z'y''), \quad \mu = \frac{\varrho}{s'^3}(z'x'' - x'z''), \quad \nu = \frac{\varrho}{s'^3}(x'y'' - y'x'').$$

Windung (Torsion, 2. Krümmung) der Raumkurve:

$$w = \frac{d\eta}{ds} = -\mathfrak{n}\dot{\mathfrak{b}} = \varrho^2 \cdot \dot{\mathfrak{x}} V \ddot{\mathfrak{x}} \dddot{\mathfrak{x}} = \frac{\varrho^2}{s'^6} \cdot \mathfrak{x}' V \mathfrak{x}'' \mathfrak{x}''' = \frac{\varrho^2}{s'^6} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

$d\eta$ ist dabei der Winkel zweier benachbarter Schmiegungsebenen.

## Aufgaben.

1.) Zwei Räume sind punktweise derart aufeinander bezogen, dass man die rechtwinkligen Koordinaten $(x, y, z)$ eines Punktes im einen Raum als schiefwinklige Koordinaten $(\xi, \eta, \zeta)$ des entsprechenden Punktes im andern Raum deutet. Man zeige, dass die Beziehung beider Räume eine affine ist, bestimme die Transformationsformeln sowie die der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ entsprechende Fläche.

2.) Die Kurve $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ liegt auf dem Kegel $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ und schneidet dessen Erzeugende unter konstantem Winkel. Beweis! Welches ist die Projektion der Kurve in die $(xy)$ Ebene? Man führe die Bogenlänge der Kurve, gerechnet von $t = -\infty$, als Parameter ein.

3.) Man bestimme die Projektionen in die Koordinatenebenen, ferner Tangente u. Normalebene, Schmiegungsebene, Haupt- u. Binormale sowie Krümmung und Windung der Raumkurven:

a) $x = a\cos t$, $y = a \sin t$, $z = kt$; b) $x = 2\lg t$, $y = t + \frac{1}{t}$, $z = t - \frac{1}{t}$.

Wie gross ist die Bogenlänge der Kurve b), gerechnet von $t = 1$ bis $t$?

4.) Welche Kurve beschreibt ein Punkt, der sich auf einer durch den Ursprung gehenden mit der Z-Achse den konst. Winkel $\alpha$ bildenden Geraden mit konstanter Geschwindigkeit $a$ bewegt, während sich die Gerade gleichzeitig um die Z Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega$ dreht?

5.) Man gebe eine Parameterdarstellung für die Raumkurve, die der Schnitt des hyperbolischen Zylinders $(x-y)^2 - z^2 = 1$ mit dem Kegel $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ ist.

6.) Man beweise die Formel: $\dot{\mathfrak{x}} V \ddot{\mathfrak{x}} \dddot{\mathfrak{x}} = \frac{1}{s'^6} \mathfrak{x}' V \mathfrak{x}'' \mathfrak{x}'''$!

14. XII. 09. № 6.

# Höhere Mathematik III.

## Flächen, die zu einer Raumkurve in Beziehung stehen:

1.) Die Tangenten einer Raumkurve bilden die Erzeugenden der in die Ebene abwickelbaren Tangentenfläche der Raumkurve. Die Fläche wird umhüllt von den Schmiegungsebenen der Kurve. Sie besteht aus zwei Mänteln, welche sich längs der Raumkurve, der Rückkehrkante oder Gratlinie der Tangentenfläche treffen. Die abwickelbare Fläche lässt sich ohne Dehnung allein durch Biegung in die Ebene ausbreiten, wobei die beiden Mäntel einen Teil der Ebene doppelt überdecken.

2.) Die Hauptnormalen einer Raumkurve bilden die Erzeugenden der windschiefen Hauptnormalenfläche der Kurve, welche den geometrischen Ort der Mittelpunkte der Krümmungskreise enthält.

3.) Die Normalebenen einer Raumkurve umhüllen eine abwickelbare Fläche, die Krümmungsachsenfläche (Polarfläche) der Kurve. Dieselbe enthält als Erzeugende die zu den Binormalen parallelen Krümmungsachsen, die Schnittlinien je zweier benachbarter Normalebenen. Der geometrische Ort der Schnittpunkte dreier benachbarter Normalebenen oder zweier benachbarter Krümmungsachsen der Raumkurve enthält die Mittelpunkte der Schmiegungskugeln (Kugel durch 4 benachbarte Kurvenpunkte) und ist die Rückkehrkante der Krümmungsachsenfläche. Die ursprüngliche Raumkurve und der Ort der Mitten ihrer Schmiegungskugeln haben in entsprechenden Punkten parallele Hauptnormalen, während die Tangenten der einen Kurve parallel sind zu den Binormalen der andern. Die Schmiegungsebene der einen Kurve ist parallel zur Normalebene der andern Kurve im entsprechenden Punkt, während entsprechende rektifizierende Ebenen zu einander parallel sind.

4.) Die rektifizierenden Ebenen einer Raumkurve umhüllen eine abwickelbare Fläche, die rektifizierende Fläche der Raumkurve. Bei der Abwicklung dieser Fläche in die Ebene geht die Raumkurve in eine gerade Linie über.

<u>Enveloppen:</u> Zwei aufeinanderfolgende Flächen einer Flächenschar $F(x, y, z, \alpha) = 0$, worin $\alpha$ ein veränderlicher Parameter ist, schneiden sich in einer Kurve; die Gesamtheit dieser Kurven bildet eine Fläche, die <u>Flächenenveloppe</u> der Schar. Ihre Gleichung erhält man durch Elimination von $\alpha$ aus $F = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$.

Je drei aufeinanderfolgende Flächen der Schar schneiden sich in einem oder in mehreren Punkten, deren Gesamtheit eine Raumkurve erfüllt, die <u>Kurvenenveloppe</u> der Flächenschar. Sie ist Rückkehrkante der Flächenenveloppe. Ihre Gleichung bekommt man, indem man $x$, $y$ u. $z$ als Funktionen von $\alpha$ berechnet aus den drei Gleichungen: $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} = 0$. —

## Aufgaben.

1.) Es soll die Windung der Schraubenlinie $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = -r\,\mathrm{tg}\,\varphi \cdot t$ berechnet werden

2.) Es ist geometrisch zu zeigen, dass die Tangentenfläche der gemeinen Schraubenlinie von der $(xy)$ Ebene und jeder hierzu parallelen Ebene nach einer Kreisevolvente geschnitten wird.

3.) Ein Kreis dreht sich um einen seiner Durchmesser mit konstanter Winkelgeschwindigkeit, während zugleich ein Punkt seine Peripherie mit derselben Winkelgeschwindigkeit durchläuft. Man bestimme die von dem Punkt durchlaufene Kurve und ihre Torsion.

4.) Man stelle die Gleichung der Tangentenfläche der Raumkurve 3. Ordnung $x = a \cdot t$, $y = b t^2$, $z = c \cdot t^3$ auf.

5.) Welches ist die Gleichung der rektifizierenden Fläche der gemeinen Schraubenlinie?

6.) Man bestimme die Gleichung der Flächenenveloppe aller Ebenen, die durch den festen Punkt $(0, 0, d)$ gehen und vom Ursprung den konstanten Abstand $p$ haben.

7.) Gegeben die Ebenenschar $a\alpha^3 x + b\alpha^2 y + c\alpha \cdot z + d = 0$, wo $\alpha$ variabel. Welches ist die Kurvenenveloppe der Ebenenschar?

21. XII. 09. № 7.

# Höhere Mathematik III.

Gleichung einer Fläche in impliciter Form: $F(x, y, z) = 0$.
Tangentialebene im Punkt $(x, y, z)$: $(X-x)\frac{\partial F}{\partial x} + (Y-y)\frac{\partial F}{\partial y} + (Z-z)\frac{\partial F}{\partial z} = 0$.
Richtungskosinus der Normalen: $\alpha : \beta : \gamma = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}$.
Gleichung einer Fläche in expliciter Form: $z = f(x, y)$.
Setzt man zur Abkürzung: $\frac{\partial f}{\partial x} = p$, $\frac{\partial f}{\partial y} = q$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = s$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t$, so wird: Tangentialebene im Punkt $(x, y, z)$: $Z - z = p(X-x) + q(Y-y)$.
Richtungskosinus der Normalen: $\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$, $\beta = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$, $\gamma = \frac{-1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$.
Krümmung der Fläche $z = f(x, y)$:

$rt - s^2 > 0$ : elliptische oder positive Krümmung;
$rt - s^2 < 0$ : hyperbolische oder negative Krümmung;
$rt - s^2 = 0$ : parabolische Krümmung, Krümmung Null.

Die Hauptkrümmungsrichtungen einer Fläche fallen in die Tangenten an die Hauptschnitte des Oskulationsparaboloids. Benachbarte Normalen, deren Fußpunkte in einem Hauptschnitt liegen, schneiden sich. Die Tangentialebene der Fläche schneidet aus dem Oskulationsparaboloid die (in elliptisch gekrümmten Punkten imaginären) Asymptoten- oder Haupttangentenrichtungen aus; diese liegen symmetrisch zu den Hauptkrümmungsrichtungen.

Der Satz von Euler: Sind $\varrho_1$ und $\varrho_2$ die Hauptkrümmungsradien in einem Punkt der Fläche, so ist der Krümmungsradius $\varrho$ eines Normalschnittes, der mit dem ersten Hauptschnitt den Winkel $\alpha$ bildet, gegeben durch

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\alpha}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\alpha}{\varrho_2}.$$

Der Satz von Meusnier: Ein schiefer Schnitt, der in der Tangentialebene die gleiche Spur hat wie der Normalschnitt mit dem Krümmungsradius $\varrho$ und der mit diesem Normalschnitt den

Winkel $\delta$ einschliesst, hat den Krümmungsradius $\varrho' = \varrho \cdot \cos\delta$.

## Maxima und Minima von Funktionen zweier Veränderlicher.

Notwendige Bedingung für das Eintreten eines Extremums (Maximum oder Minimum) der Funktion $z = f(x,y)$ ist das gleichzeitige Bestehen der drei Gleichungen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0.$$

Die letzte Ungleichung kann nur erfüllt sein, wenn $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ dasselbe Vorzeichen haben.

Ein Maximum tritt ein, wenn $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$ (und damit auch $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0$) ist, ein Minimum, wenn $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$ (und dann auch $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0$) ist.

## Maxima und Minima von Funktionen dreier Veränderlicher.

Notwendige Bedingung für das Eintreten eines Maximums oder Minimums der Funktion $U = F(x,y,z)$ ist das Verschwinden der drei ersten Differentialquotienten:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung $D_1 = u_{11}$, $D_2 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix}$, $D_3 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{12} & u_{22} & u_{23} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{vmatrix}$, wo $u_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $u_{12} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ u. s. w., so sind die hinreichenden Bedingungen für ein Maximum: $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$, dagegen für ein Minimum $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, $D_3 > 0$.

## Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

Soll die Funktion $z = F(x,y)$ ein Maximum oder Minimum werden und sollen gleichzeitig die Veränderlichen $x$ und $y$ einer Gleichung $\varphi(x,y) = 0$ genügen, so kann man mittels der letzten Gleichung eine Veränderliche eliminieren und hat dann nur die Extremwerte einer Funktion von einer Veränderlichen zu bestimmen. Ist die Elimination nicht in einfacher Weise auszuführen, so führen folgende Methoden zum Ziel:

1.) Diejenigen Wertepaare $x, y$, die den zwei Gleichungen $\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$ und $\varphi(x, y) = 0$ genügen, geben die Maxima und Minima von $z$.

2.) Lagrange'sche Methode der unbestimmten Multiplikatoren: Man führt eine Hilfsfunktion $u = F(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$ ein; die drei Unbekannten $x, y, \lambda$ bestimmen sich dann aus den 3 Gleichungen:

1.) $\frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$; 2.) $\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$; 3.) $\varphi(x, y) = 0$.

Soll eine <u>Funktion von beliebig vielen Veränderlichen $U = F(x, y, z, t, \ldots)$</u> ein Maximum oder Minimum werden, so ist notwendige Bedingung hiefür das Verschwinden sämtlicher ersten Differentialquotienten:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \ldots$$

Ist das Maximum oder Minimum an Nebenbedingungen geknüpft, so bleibt die Lagrange'sche Methode immer anwendbar. <u>Beispiel</u> für eine Funktion von 3 Veränderlichen $U = F(x, y, z)$ und 2 Nebenbedingungen $\varphi(x,y,z) = 0$ und $\psi(x,y,z) = 0$. Aus den fünf Gleichungen

1.) $\frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,$

2.) $\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,$

3.) $\frac{\partial F}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$

4.) $\varphi(x, y, z) = 0$

5.) $\psi(x, y, z) = 0$

sind die fünf Grössen $x, y, z, \lambda, \mu$ zu berechnen.

## <u>Aufgaben.</u>

1.) Man bestimme die ungefähre Gestalt der Fläche $xyz = 1$ und zeige, dass sie überall elliptisch gekrümmt ist.

2.) Es ist geometrisch zu beweisen, dass bei jeder Rotationsfläche die beiden Hauptkrümmungsrichtungen in die

Richtung des Meridians und des Parallelkreises fallen und dass die zwei Hauptkrümmungsradien gegeben sind durch den Krümmungsradius des Meridians und das Stück der Normalen bis zum Schnitt mit der Rotationsachse.

3.) Man wende die Sätze von Euler und Meusnier auf den Kreiszylinder an.

4.) Die Kurve $z = \cos x$ rotiert um die Z-Achse. Man bestimme die Gleichung der parabolischen Kurve der entstehenden Fläche.

5.) Für welchen Punkt der Ebene eines Dreiecks wird die Summe der Abstände von den drei Ecken ein Minimum?

6.) Für welchen Punkten der Kurve $F(x,y) = 0$ ist das Produkt $x \cdot y$ ein Minimum? Beispiel: Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

7.) Die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ergaben durch Messung die Werte $a, b, c$. Wie müssen diese Zahlen korrigiert werden, damit die Summe der Quadrate der Korrektionen ein Minimum wird? ($a = 3{,}02$; $b = 4{,}01$; $c = 4{,}99$).

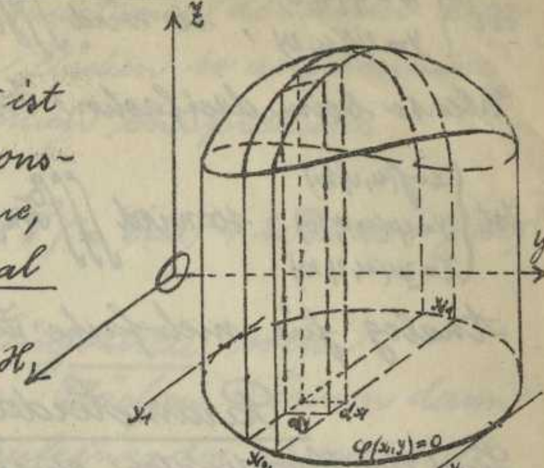
8.) Welches sind die Kantenlängen eines rechtwinkligen Parallelepipeds, das den Inhalt $a^3$ besitzt und eine möglichst kleine Oberfläche hat?

9.) An das Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ soll eine Tangentialebene so gelegt werden, dass sie mit den Koordinatenebenen ein Tetraeder von möglichst kleinem Inhalt bildet. Wie gross ist das Volumen des Tetraeders?

11. I. 1910. № 8.

# Höhere Mathematik III.

## Mehrfache Integrale.




Das Volumen des Körpers, der begrenzt ist von der Fläche $z=f(x,y)$, dem Projektionszylinder $\varphi(x,y)=0$ und der $(XY)$ Ebene, ist bestimmt durch das Doppelintegral

$$V = \iint f(x,y)\,dx\,dy$$

Das Doppelintegral kann in zwei nacheinander ausgeführte einfache Integrale aufgelöst werden:

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx.$$

Die Grenzen $x_1$ und $x_2$ des inneren Integrals sind im allgemeinen nach der Gleichung $\varphi(x,y)=0$ Funktionen von $y$, die Grenzen $y_1$ u. $y_2$ des äusseren Integrals dagegen sind konstante Grössen.

Oberfläche des durch den Zylinder $\varphi(x,y)=0$ aus der Fläche $z=f(x,y)$ ausgeschnittenen Stückes:

$$O = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Das dreifache Integral $\iiint F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ wird gelöst durch drei nacheinander auszuführende einfache Integrationen:

$$\iiint F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,z)\,dx.$$

Dabei sind im allgemeinen $x_1$ und $x_2$ Funktionen von $y$ und $z$, $y_1$ und $y_2$ Funktionen von $z$, während $z_1$ und $z_2$ Konstante sind.

Masse eines Körpers mit variabler Dichte $\varrho(x,y,z)$:

$$M = \iiint \varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Trägheitsmoment eines Körpers inbezug auf die Z-Achse:

$$I_z = \iiint x^2\,dx\,dy\,dz + \iiint y^2\,dx\,dy\,dz, \qquad (\varrho=1).$$

Deviationsmoment inbezug auf die Z-Achse:

$$D_z = \iiint xy\,dx\,dy\,dz \qquad (\varrho=1).$$

## Einführung neuer Veränderlicher in mehrfache Integrale.

Ist $\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$, so wird $\iint f(x,y)\,dx\,dy = \iint f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv.$

Ebenso beim dreifachen Integral:

Ist $\begin{cases} x = f(u,v,w) \\ y = \varphi(u,v,w) \\ z = \psi(u,v,w) \end{cases}$, so wird $\iiint F(x\,y\,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint F(f, \varphi, \psi) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} du\,dv\,dw$

Analog für mehrfache Integrale.

## Parameterdarstellung der Flächen.

Sind die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Fläche als Funktionen zweier Parameter $u$ und $v$ gegeben:

$$x = f(u,v), \quad y = \varphi(u,v), \quad z = \psi(u,v),$$

so kann man die Raumkurven, welche durch diese Gleichungen dargestellt werden, wenn man einen der beiden Parameter konstant hält, als zwei Scharen krummliniger Koordinatenlinien auf der Fläche betrachten.


Quadrat des Linienelements:

$$(ds)^2 = \mathfrak{E}(du)^2 + 2\,\mathfrak{F}\,du\,dv + \mathfrak{G}(dv)^2,$$

wobei $\mathfrak{E} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$,

$\mathfrak{F} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$,

$\mathfrak{G} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$ die sog. Koeffizienten des Linienelementes sind.

Linienelement der Parameterkurve $v = \text{const}$: $ds_1 = \sqrt{\mathfrak{E}}\,du$

Linienelement der Parameterkurve $u = \text{const}$.: $ds_2 = \sqrt{\mathfrak{G}}\,dv$

Winkel der Parameterkurven: $\cos\theta = \frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G}}}$.

Oberflächenelement: $dO = \sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}\,du\,dv$

Die Parameterkurven schneiden sich in allen Punkten senkrecht, in denen $\mathfrak{F} = 0$ ist.

**Abbildung zweier Flächen aufeinander:** Sind die Koordinaten $x, y, z$ und $X, Y, Z$ zweier Flächen Funktionen derselben Parameter $u$ und $v$, so sind die beiden Flächen so aufeinander bezogen, dass sich die Parameterlinien entsprechen.

Die Linienelemente seien mit

$$(ds)^2 = e(du)^2 + 2f\,du\,dv + g(dv)^2 \text{ und } (dS)^2 = E(du)^2 + 2F\,du\,dv + G(dv)^2$$

bezeichnet.

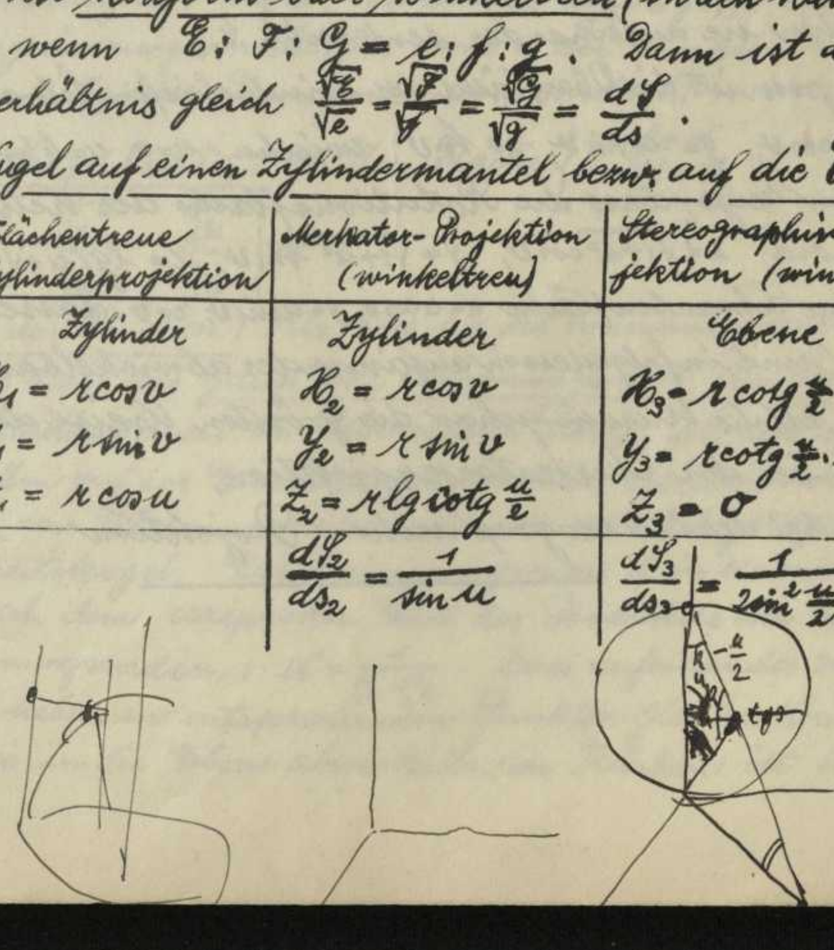
a.) Die Abbildung ist kongruent oder längentreu, wenn $E = e,\ F = f,\ G = g$ ist. Die beiden Flächen können dann durch Verbiegung ohne Dehnung aufeinander abgewickelt werden.

b.) Die Abbildung ist äquivalent oder flächentreu, wenn das Flächenelement auf beiden Flächen dasselbe ist: $EG - F^2 = eg - f^2$.

c.) Die Abbildung ist konform oder winkeltreu (in den kleinsten Teilen ähnlich), wenn $E : F : G = e : f : g$. Dann ist das Vergrösserungsverhältnis gleich $\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{f}} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g}} = \frac{dS}{ds}$.

**Abbildung der Kugel auf einen Zylindermantel bezw. auf die Ebene.**

| | Flächentreue Zylinderprojektion | Merkator-Projektion (winkeltreu) | Stereographische Projektion (winkeltreu) |
|---|---|---|---|
| Kugel | Zylinder | Zylinder | Ebene |
| $x = r\sin u \cdot \cos v$ | $X_1 = r\cos v$ | $X_2 = r\cos v$ | $X_3 = r\,\mathrm{cotg}\frac{u}{2} \cdot \cos v$ |
| $y = r\sin u \cdot \sin v$ | $Y_1 = r\sin v$ | $Y_2 = r\sin v$ | $Y_3 = r\,\mathrm{cotg}\frac{u}{2} \cdot \sin v$ |
| $z = r\cos u$ | $Z_1 = r\cos u$ | $Z_2 = r\lg\mathrm{cotg}\frac{u}{2}$ | $Z_3 = 0$ |
| Vergrösserungsverhältnis | | $\frac{dS_2}{ds_2} = \frac{1}{\sin u}$ | $\frac{dS_3}{ds_3} = \frac{1}{2\sin^2\frac{u}{2}}$ |



# Aufgaben.

1.) Die Achsen zweier gerader Kreiszylinder von gleichem Radius $r$ ($x^2+y^2=r^2$ und $x^2+z^2=r^2$) schneiden sich rechtwinklig. Man bestimme

a.) das beiden Zylindern gemeinsame Volumen;

b.) denjenigen Teil der Fläche des einen Zylinders, welcher innerhalb des andern liegt.

2.) Man berechne das Trägheitsmoment des Kreiskegels $h^2(x^2+y^2)-r^2z^2=0$ inbezug auf seine Achse. (Dichte $\varrho=1$).

3.) Es soll die Masse innerhalb einer Kugel vom Radius $a$ bestimmt werden, wenn die Dichte $\varrho = e^{-\frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

4.) Man zeige, dass die Fläche $x=\frac{1}{u+v}$, $y=\frac{u\cdot v}{u+v}$, $z=\frac{u-v}{u+v}$ ein einschaliges Hyperboloid ist. Welche Kurven werden durch $u=$ const. bezw. $v=$ const. dargestellt? Unter welchem Winkel schneiden sich die Parameterkurven in einem beliebigen Punkt? In welchen Punkten stehen sie aufeinander senkrecht?

5.) Wie gross ist die Oberfläche der windschiefen Schraubenfläche $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=k\cdot v$ zwischen $u=a$, $u=b$ und $v=0$, $v=d$?

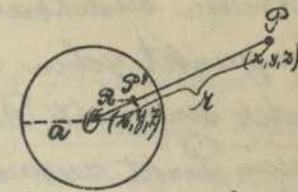
6.) Man zeige, dass die Rotationsfläche der Kettenlinie (das Katenoid $x=\sqrt{1+u^2}\cos v$, $y=\sqrt{1+u^2}\sin v$, $z=\lg(u+\sqrt{1+u^2})$) und die gemeine Schraubenfläche $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$ dasselbe Linienelement haben und infolgedessen aufeinander abwickelbar sind.

7.) In welche Kurven gehen die grössten Kreise der Kugel

a.) bei der Merkatorprojektion,

b.) bei der stereographischen Projektion über?

18. I. 1910. **Höhere Mathematik II.** № 9.




Transformation durch reziproke Radien (Inversion):
Die Transformation durch reziproke Radien gibt die konforme Abbildung zweier Räume aufeinander.
Transformationsformeln: $R \cdot r = a^2$; $X = \frac{a^2 x}{x^2+y^2+z^2}$, $Y = \frac{a^2 y}{x^2+y^2+z^2}$, $Z = \frac{a^2 z}{x^2+y^2+z^2}$

Vergrösserungsverhältnis: $\frac{ds'}{ds} = \frac{R}{r}$.
Bei dieser Abbildung gehen Kugeln wieder in Kugeln, Ebenen in Kugeln durch den Anfangspunkt und umgekehrt über.

Konforme Abbildung zweier Ebenen aufeinander: Ist $Z = f(z)$ eine Funktion von $z$ und setzt man $Z = X + iY$, $z = x + iy$ ($i = \sqrt{-1}$), so lässt sich $X + iY = f(x+iy)$ stets auf die Form bringen:
$X + iY = \varphi(x,y) + i \cdot \psi(x,y)$. Dann vermittelt $X = \varphi(x,y)$, $Y = \psi(x,y)$ eine konforme Abbildung der Ebene. Setzt man $\frac{df(z)}{dz} = f'(z) = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$, so ist $r$ das Vergrösserungsverhältnis und $\alpha$ der Winkel, um den ein Linienelement bei der Transformation verdreht wird. —

Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = \varphi(u,v) \\ z = \psi(u,v) \end{cases}$:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Krümmung der Flächen: Als Mass für die Krümmung einer Fläche in einem Punkt dient das Gauss'sche Krümmungsmass $K = \lim_{\Delta\omega = 0} \frac{\Delta O}{\Delta \omega}$, wobei $\Delta\omega$ das Flächenelement im betrachteten Punkt, $\Delta O$ das sphärische Bild desselben auf der Einheitskugel darstellt. Letzteres wird erhalten durch die zu den Flächennormalen von $\Delta\omega$ parallel gezogenen Radien der Einheitskugel. Das Krümmungsmass $K$ in einem Flächenpunkt ist gleich dem reziproken Wert des Produktes der beiden Hauptkrümmungsradien: $K = \frac{1}{\rho_1 \cdot \rho_2}$. Zwei aufeinander verbiegbare Flächen haben in entsprechenden Punkten gleiches Krümmungsmass. Für die in die Ebene abwickelbaren Flächen ist $K$ überall gleich Null.

Die Krümmungslinien auf einer Fläche sind dadurch definiert, dass längs derselben benachbarte Normalen sich schneiden. Durch jeden Flächenpunkt gehen zwei Krümmungslinien hindurch, deren aufeinander senkrechte Richtungen mit den Hauptschnittrichtungen in diesem Punkt zusammenfallen. Bei den in die Ebene abwickelbaren Flächen ist die eine Schar der Krümmungslinien die der geradlinigen Erzeugenden. Die Krümmungslinien der Rotationsflächen sind die Meridiane und die Parallelkreise; die Hauptkrümmungsradien in jedem Punkt einer Rotationsfläche sind gegeben durch den Krümmungsradius des Meridians und das Stück der Flächennormalen bis zum Schnitt mit der Rotationsachse. —

## Aufgaben.

1) Man beweise, dass das Katenoid

$x=\sqrt{u^2+m^2}\cos v,\quad y=\sqrt{u^2+m^2}\sin v,\quad z=m\lg\frac{u+\sqrt{u^2+m^2}}{m}$ überall gleiche aber entgegengesetzte Hauptkrümmungsradien hat.

2) Die Rotationsfläche der Traktrise $z=a\lg\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\sqrt{a^2-x^2}$ hat konstantes Gauss'sches Krümmungsmass. Beweis!

3) Eine Parabel soll vom Scheitel aus durch reziproke Radien transformiert werden. (Rechnung und Zeichnung).

4) Man diskutiere die durch folgende Funktionen bestimmten konformen Abbildungen der Ebene: a) $Z=az+b$; b) $Z=z^2$; c) $Z=e^z$.

5) Bonne'sche Projektion: $A$ bezw. $A'$ Mittelpunkt des abzubildenden Gebietes; Meridian von $A$ geradlinig abgebildet; Parallelkreis von $A$ wird Kreis vom Radius $A'T'=AT$. Parallelkreis von $P$ wird konzentrischer Kreis durch $P'$ ($A'Q'=AQ$); ferner $QP=Q'P'$! Man zeige geometrisch, dass die Projektion flächentreu ist.

25. I. 1910. **Höhere Mathematik III.** № 10.

## Differentialgleichungen.

Eine Gleichung zwischen der unabhängigen Variabeln $x$, der abhängigen Variabeln $y$ und deren Differentialquotienten heisst eine gewöhnliche Differentialgleichung. Unter der Ordnung einer Differentialgleichung versteht man die Ordnung des höchsten in der Gleichung vorkommenden Differentialquotienten. Unter dem Grad einer in $y$ und dessen Ableitungen rationalen Differentialgleichung versteht man den Exponenten der höchsten in der Gleichung vorkommenden Potenz der Differentialquotienten.

Differentialgleichungen 1. Ordnung und 1. Grades: Sie haben die Form: $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$. Unter einer Lösung der Differentialgleichung versteht man eine Funktion $y = F(x)$, welche der Differentialgleichung identisch genügt. Das allgemeine Integral der Diff-Gleichung 1. Ordnung enthält eine willkürliche Konstante. Gibt man derselben einen bestimmten Wert, so bekommt man ein partikuläres Integral. Lösungen, die nicht durch Spezialisierung der Konstanten aus dem allgemeinen Integral hervorgehen, nennt man singuläre Integrale.

1.) Integration der separierbaren Diff-Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}$:

$$\psi(y)\,dy = \varphi(x)\,dx \quad ; \quad \int \psi(y)\,dy = \int \varphi(x)\,dx + C.$$

2.) Integration der homogenen Diff.-Gleichung von der Form: $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$: Durch die Substitution $z = \frac{y}{x}$, $y = z\cdot x$, $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$ lässt sich die homogene Diff.-Gleichung auf die separierbare Form bringen:

$$\frac{dz}{dx}\cdot x = f(z) - z \quad ; \quad \int \frac{dz}{f(z)-z} = lg(c\cdot x).$$

Zu einer separierbaren Diff.-Gleichung führt auch die Einführung von Polarkoordinaten: $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$.

3.) Die Diff.-Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$ kann durch die Substitutionen $u = a_1x + b_1y + c_1$, $v = a_2x + b_2y + c_2$ auf eine homogene Diff.-Gleichung zurückgeführt werden. Ist speziell $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, so setzt man $z = a_2x + b_2y + c_2$ und erhält dadurch eine direkt separierbare Diff.-Gleichung.

Aufstellung der Diff.-Gleichung der Kurvenschar $F(x,y,c) = 0$: Man eliminiert aus $F(x,y,c) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$ den Parameter $c$.

<u>Trajektorien</u>: Die Diff-Gleichung der <u>Orthogonaltrajektorien der Kurvenschar $F(x,y,c)=0$</u> erhält man, indem man in der Diff-Gleichung dieser Kurvenschar $\frac{dy}{dx}$ durch $-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ ersetzt. Man hat also aus $F(x,y,c)=0$ und $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$ c zu liminieren, um die Diff.-Gleichung der Orthogonaltrajektorien zu erhalten. Die Diff.-Gleichung der <u>Isogonaltrajektorien der Kurvenschar $F(x,y,c)=0$</u>, welche die Kurven dieser Schar unter dem konstanten Winkel $\varphi$ schneiden, erhält man durch Elimination von c aus $F(x,y,c)=0$ und $\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x} + tg\varphi\cdot\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y} + tg\varphi\cdot\frac{\partial F}{\partial x}}$.

Die <u>Niveau- und Fallinien</u> einer Fläche ergeben bei der orthogonalen Projektion in eine horizontale Ebene zwei sich rechtwinklig schneidende Kurvensysteme. Verlauf der Niveaulinien (ausgezogen) und Fallinien (punktiert)

a) in einem Gipfelpunkt oder einer Senke:

b) in einem Sattelpunkt:

## Aufgaben.

1) Durch Separation der Variabeln löse man die Diff.-Gleichungen:
a) $x^2 dy + (y-a)dx = 0$; b) $xy\,dx = (a+x)(b+y)\,dy$; c) $\sin x \cos y\,dy - \cos x \sin y\,dx = 0$

2.) Es sollen die Kurven gefunden werden, für welche in jedem Punkt derselben die Subtangente gleich der $n$ fachen Abscisse ist.

3) Man integriere die homogenen Diff.-Gleichungen:
a) $(x^2-y^2)dy - 2xy\,dx = 0$; b) $x\,dy - y\,dx = dx\sqrt{x^2+y^2}$; c) $x\cdot\frac{dy}{dx} = y + x\cdot tg\left(\frac{y}{x}\right)$

4) Man bestimme die allgemeinen Integrale der Diff.-Gleichungen:
a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-3y+2}{3x-y-2}$; b) $(x+y+2)dx - (x+y)dy = 0$

5.) Man diskutiere das Kurvensystem $\frac{x^2}{a^2} + Cy^2 = 1$ und bestimme die Orthogonaltrajektorien.

6.) Die Differentialgleichung eines Systems konfokaler Kegelschnitte (Beweis!) $\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 1$ ist mit der ihrer Orthogonaltrajektorien identisch.

7.) Gegeben ist die Fläche 2. Ordnung $x^2 + 3y^2 - 2zy = 0$. Man bestimme ihre Gestalt, ferner zeige man, dass die Projektion ihrer Schnitte parallel zur (XY) Ebene in dieser Ebene ein System von Kegelschnitten ist und ermittle die Orthogonaltrajektorien dieses Systems.

1. II. 1910.

# Höhere Mathematik III.

№ 11.

<u>Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung:</u> $\frac{dy}{dx} + y \cdot F(x) = \Phi(x)$.

1.) <u>Integrationsmethode von Jacobi</u>: Man setzt $y = u \cdot v$, so geht die lineare Diff.-Gleichung über in

$$u\left(\frac{dv}{dx} + v \cdot F(x)\right) + v \cdot \frac{du}{dx} = \Phi(x).$$

Wählt man $v$ so, dass $\frac{dv}{dx} + v \cdot F(x) = 0$, $v = e^{-\int F(x)\,dx}$, so reduziert sich die lineare Diff.-Gleichung auf die separierbare Gleichung zwischen $u$ und $x$: $\frac{du}{dx} \cdot v = \Phi(x)$, $u = \int \frac{1}{v} \cdot \Phi(x)\,dx + C$ oder $u = \int e^{\int F(x)\,dx} \cdot \Phi(x)\,dx + C$.

Das allgemeine Integral der linearen Diff.-Gleichung wird daher

$$y = u \cdot v = e^{-\int F(x)\,dx} \cdot \left(\int e^{\int F(x)\,dx} \cdot \Phi(x)\,dx + C\right).$$

2.) <u>Methode von Lagrange</u> (<u>Variation der Konstanten</u>):

Man integriert zunächst die lineare Diff.-Gleichung „ohne zweites Glied": $\frac{dy}{dx} + y \cdot F(x) = 0$; $y = C \cdot e^{-\int F(x)\,dx}$.

Nun ersetzt man die Konstante $C$ durch eine Funktion $u(x)$ und sucht $u(x)$ so zu bestimmen, dass $y = u(x) \cdot e^{-\int F(x)\,dx}$ der gegebenen Diff.-Gleichung mit 2. Glied genügt. Es ergibt sich für $u$ eine direkt separierbare Gleichung. Das Resultat erscheint dann in derselben Form wie unter 1.).

## Differentialgleichungen 1. Ordnung und höheren Grades.

<u>Diskriminantenkurve und singuläres Integral</u>: Die Diskriminantenkurve der Diff.-Gleichung $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ ist der geometrische Ort aller Punkte $(x, y)$, in denen die Gleichung $F(x, y, p) = 0$, wo $p = \frac{dy}{dx}$, zwei zusammenfallende Wurzeln $p$ hat. Man findet die Diskriminantenkurve, indem man aus $F(x, y, p) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$ $p$ eliminiert. In jedem ihrer Punkte fallen zwei von den Fortschreitungsrichtungen, welche die Diff.-Gleichg.

jedem Punkt der Ebene zuordnet, zusammen. Die Integralkurven sitzen im allgemeinen mit Spitzen auf der Diskriminantenkurve auf; ausnahmsweise können sie dieselbe auch berühren. Nur in letzterem Falle, wenn in den Punkten der Diskriminantenkurve deren Fortschreitungsrichtungen mit den beiden zusammenfallenden Richtungen der Integralkurven übereinstimmen, erfüllt die Diskriminantenkurve die Diff-Gleichung und ist ihr singuläres Integral. Dasselbe bildet daher die Enveloppe der partikulären Integrale.

Spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung höheren Grades.

1.) Die Diff-Gleichung $f(p)=0$ hat das allgemeine Integral $f\left(\frac{y-c}{x}\right)=0$. (Scharen von parallelen Geraden).

2.) Das allgemeine Integral der Gleichung $y=\varphi(p)$ erhält man mittels Differentiation dieser Gleichung nach $x$ in Parameterform: $x=\int\frac{\varphi'(p)}{p}dp+C$; $y=\varphi(p)$.

3.) Die Gleichung der Integralkurven der Gleichung $x=\psi(p)$ erhält man mittels Differentiation nach $y$ in der Parameterform:
$$x=\psi(p)\,;\quad y=\int p\cdot\psi'(p)\,dp+C.$$

4.) Das Integral der Diff-Gleichung $\frac{y}{x}=f(p)$, $y=x\cdot f(p)$ lässt sich durch Differentiation nach $x$ finden in der Parameterform: $x=C\cdot e^{\int\frac{f'(p)}{p-f(p)}dp}$, $y=C\cdot f(p)\cdot e^{\int\frac{f'(p)}{p-f(p)}dp}$.

5.) Die verallgemeinerte Clairaut'sche Gleichung $y=x\cdot F(p)+\Phi(p)$ wird durch Differentiation nach $x$ auf die lineare Form gebracht: $\frac{dx}{dp}-x\cdot\frac{F'(p)}{p-F(p)}=\frac{\Phi'(p)}{p-F(p)}$.

6.) Die spezielle Clairaut'sche Gleichung $y=p\cdot x+f(p)$ hat als allgemeines Integral die Geradenscharen $y=C\cdot x+f(C)$. Die Umhüllungskurve dieser Geraden ist singuläres Integral der Diff-Gleichung und hat in Parameterform die Gleichung:
$$x=-f'(p)\,;\quad y=-p\cdot f'(p)+f(p).$$

$\boxed{\frac{dy}{dx} = a\frac{y}{x} + \sqrt{b + c\left(\frac{y}{x}\right)^2}}$ $\quad \frac{xy' - y + 1}{\sqrt{1+y'^2}} = x \quad xy'^2 - 2xyy' + y^2 = kx^2 + kx^2y'^2$

$\frac{dz}{dx} = dz + \sqrt{b + cz^2}$

## Aufgaben.

1) Man bestimme die Isogonaltrajektorien aller Kreise, welche die X-Achse im Koordinatenanfangspunkt berühren. (Speziell: $\varphi = 45°$).

$y'^2(1-k) - 2y'\frac{y}{x} = -\left(\frac{y}{x}\right)^2 + k$

2) Welches sind die Isogonaltrajektorien aller Geraden durch den Koordinatenanfangspunkt?

3) Man löse die linearen Differentialgleichungen:

a) $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}\cdot y = \frac{1}{x^2}$; b) $\frac{dy}{dx} - y\,\mathrm{tg}\,x + \cos x = 0$;

c) $(1+x^2)\frac{dy}{dx} + y - \mathrm{arc\,tg}\,x = 0$.

$y' = \frac{y}{x}\frac{1}{1-k} \pm \sqrt{\left(-\frac{y}{x}\right)^2 + k + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{(1-k)^2}$

4) Man bestimme die allgemeine und, wo vorhanden, auch die singuläre Lösung der Diff.-Gleichungen

a) $p^3 - 7p + 6 = 0$; b) $y = p^2 + 2p^3$;

c) $x = 1 + p^2$; d) $y(1+p^2) - 2px = 0$

e) $y = (x+1)p - p^2$; f) $p^2(2x^2 - y^2) - 2xyp + x^2 = 0$.

5) Welche Kurve hat die Eigenschaft, dass die von ihr, den Geraden $x = a$ und $x = x$ sowie der X-Achse eingeschlossene Fläche der entsprechenden Bogenlänge proportional ist?

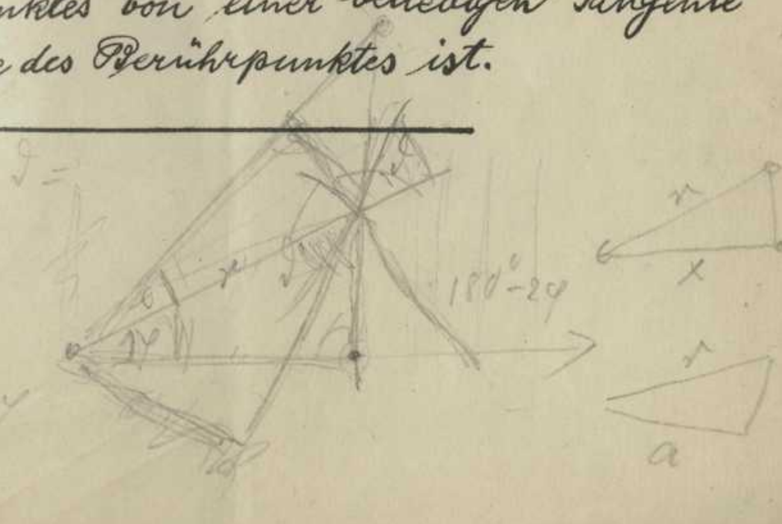
6) Man suche die Kurven, für welche der Abstand des Koordinatenanfangspunktes von einer beliebigen Tangente gleich der Abscisse des Berührpunktes ist.

---

$r \sin\vartheta = r\cos\varphi$

$\vartheta = 90° - \varphi$

$\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{r\,d\varphi}{dr} = \mathrm{cotg}\,\varphi$



# Vorprüfung in höherer Mathematik. April 1922.

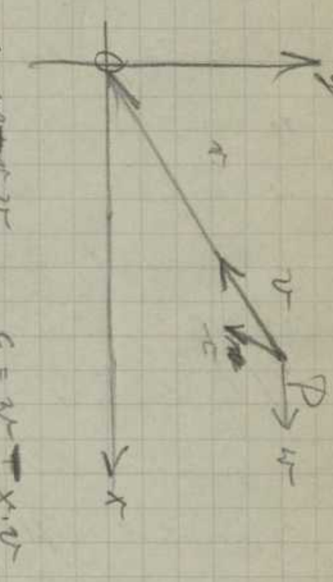
## Elektroingenieure.

1. Agner, Erich
2. Appenzeller, Max
3. Auer, Manfred
4. Augustin, Otto
5. Bacher, Fritz
6. Bagka, Helmut
7. Beßler, Edmund
8. Betzner, Karl
9. Bezner, Eugen
10. Böhme, Wilhelm
11. Boger, Ernst
12. /
12. Bosch, Max
13. Braun, Werner
14. Brintzinger, Wilhelm
15. Clausing, Heinrich
16. Dietz, Karlheinrich
17. Dochtermann, Erwin
18. Eberhardt, Hans
29. Eberspächer, Walter
20. Eisemann, Alexander
21. Emmerich, Eduard
22. Eylau, Johannes
23. Faude, Ernst
24. Gendtner, Fritz
25. Goepfert, Joseph
26. Goldmann, Edmund
27. Grabler, Karl H.
28. Grieger, Otto
29. Güger, Albert
30. Haller, Walther

31. Heinrich, Ernst
32. Herrmann, Johs.
33. Heydan, Allan
34. Hofmann, Otto
35. Hofmann, Werner
36. Irion, Eugen
57. Keller, Richard
38. Keutner, Gerhard
39. Klempp, Helmut
40. Kloker, Joseph
Kraft, Hubert
41. Krauter, Eugen
Krug Erns
42. Kübler, Erwin
43. Kunz, Karl
44. Lämmle, Karl
45. Laub, Hans
46. Lechler, Heinrich
47. Leiste, Ernst
48. Link, Eberhard
49. Maier, Otto
50. Mainzer, Gerhard
51. Manz, Walther
52. Meurath, Franz
53. Menzel, Heinrich
54. Nestel, Hermann
55. Rapp, Karl
56. Rieber, Wilhelm
57. Rücklin, Rudolf
58. Sailer, Karl
59. Schilling, Franz
60. Schneider, Kurt

61. Schumacher, Heinrich
62. Staudenmayer, Wilhelm
63. Stein, Kurt
64. Stern, Walter
65. Thomson, Raimund
66. Wacker, Otto
67. Walz, Gustav
68. Weiland, Rudolf
69. Weisbecker, Alex.
70. Weiß, Erich

Widmann, Otto
Winter, Oskar
Wörule, Otto
Wolf, Hans
v. Wuthenau, Friedr. Karl
Zeyß, Werner
Ziegler, Wilhelm.




$c_x = w - \frac{x \cdot v}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$c_y = - \frac{y \cdot v}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\dot{x} = w - \frac{x \cdot v}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\dot{y} = - \frac{y \cdot v}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{-yv}{w\sqrt{x^2+y^2} - xv}$

$\frac{y}{x} = z$, $y = xz$

$\frac{dy}{dx} = z + xz'$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-v \cdot \frac{y}{x}}{w\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2} - v}$

$z + xz' = \frac{-vz}{w\sqrt{1+z^2} - v}$

$xz' = \frac{-zw\sqrt{1+z^2}}{w\sqrt{1+z^2} - v}$

$\frac{dz\,(w\sqrt{1+z^2} - v)}{zw\sqrt{1+z^2}} = \frac{dx}{x}$

$\frac{dx}{x} = -\frac{dz}{z} + \frac{v}{w}\frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}}$

8. II. 1910. **Höhere Mathematik III.** № 12.

## Differentiation eines bestimmten Integrals nach einem Parameter.

$$J=\int_u^v f(x,t)\,dx\;;\quad \frac{dJ}{dt}=f(v,t)\cdot\frac{dv}{dt}-f(u,t)\cdot\frac{du}{dt}+\int_u^v\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,dx.$$

## Differentialgleichungen höherer Ordnung.

**I. Spezielle Differentialgleichungen 2. Ordnung, die sich allgemein integrieren lassen:**

1) $y''=f(x)$ ; $y=\int dx\int f(x)\,dx+C_1x+C_2$.

2) $y''=f(y)$ geht bei Multiplikation beider Seiten mit $y'$ über in $\frac{1}{2}\frac{d(y'^2)}{dx}=\frac{f(y)\,dy}{dx}$; hieraus $y'=\sqrt{2\int f(y)\,dy+C_1}$

und $x=\int\frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy+C_1}}+C_2$

3) $y''=f(y')$ ; $\frac{dy'}{dx}=f(y')$ ; $x=\int\frac{dy'}{f(y')}+C_1$ ; $y=\int\frac{y'\,dy'}{f(y')}+C_2$.

**II. Differentialgleichungen 2. Ordnung, die sich auf eine Diff-Gleichung 1. Ordnung zurückführen lassen:**

1) $y''=f(x,y')$ ; $\frac{dy'}{dx}=f(x,y')$.

2) $y''=f(y,y')$ ; $\frac{dy'}{dx}=f(y,y')$, daher $y'\frac{dy'}{dy}=f(y,y')$.

**III. Vertauschung der abhängigen und unabhängigen Veränderlichen:** $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ ; $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$.

## Aufgaben.

1) Man integriere die Diff-Gleichung $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=a\,y^2\lg x$. (Subst. $\frac{1}{y}=z$!)

2) Ein Lenkballon wird vom Winde mit konstanter Geschwindigkeit $w$ in Richtung der $X$-Achse abgetrieben. Der Führer richtet denselben stets auf das Ziel O (Koordinatenanfangspunkt) und fährt mit der konst. Geschwindigkeit $v$. Welche Kurve beschreibt der Ballon?

3) In ein trichterförmiges Gefäss, das die Gestalt eines auf der Spitze

stehenden Rotationskegels hat, fliesst in der Zeiteinheit die Wassermenge $b$, während gleichzeitig am Grunde die von der Flüssigkeitshöhe $h$ abhängige Wassermenge $c \cdot \sqrt{h}$ ausfliesst. Man untersuche die Bewegung des Wasserspiegels und die Art der Annäherung an den stationären Zustand.

4.) Welches sind die Kurven gleicher Steigung am parabolischen Zylinder $x^2 - 2pz = 0$? (Steigung = Neigung gegen die XY Eb.).

5.) Durch Differentiation sind aus folgenden bestimmten Integralen neue abzuleiten:

a.) $\int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}$ ; b.) $\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{4a}$ .

6.) Man integriere die folgenden Diff.-Gleichungen:

1

a.) $y'' = x - \cos x$ ; b.) $y'' = \frac{1}{a} \cdot y'$.

c.) $y'' - \frac{1}{x} y' = 0$ ; d.) $y y'' + y'^2 - 1 = 0$

7.) Eine Kurve genügt der Diff.-Gleichung $y'' = \frac{3}{2} y^2$ und berührt die $0$-Achse asymptotisch. Wie lautet die Gleichung der Kurve?

8.) Man stelle die Diff.-Gleichung auf, der

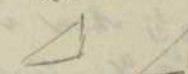
2

a.) alle Geraden der Ebene,

b.) alle Parabeln, deren Achse die X-Achse ist, genügen.

---

$dz$



$x^2 + y^2 + 2ax + 2by = 0$

$(x+a)\, y' + (y+b)\, y''$

$1 + (y+b)\, y''$

$\frac{d^2}{dx^2} +$

14. II. 1910. **Höhere Mathematik III.** № 13.

## Lineare Differentialgleichungen $n^{ter}$ Ordnung.

I. Sind $y_1, y_2, y_3, \dots y_n$ $n$ linear unabhängige Integrale einer linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung ohne 2. Glied:

$$y^{(n)} + P_1(x)\cdot y^{(n-1)} + P_2(x)\cdot y^{(n-2)} + \dots + P_{n-2}(x)\, y'' + P_{n-1}(x)\, y' + P_n(x)\, y = 0,$$

so ist $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots + C_n y_n$, wo $C_1, C_2, C_3, \dots C_n$ willkürliche Konstante sind, das allgemeine Integral.

II. Die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten ohne zweites Glied:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

hat die Funktion $y = e^{\lambda x}$ zum Integral, wenn $\lambda$ eine Wurzel der charakteristischen Gleichung ist:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-2} \lambda^2 + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

Hat diese Gleichung $n$ verschiedene Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_n$, so ist das allgemeine Integral: $y = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n \cdot e^{\lambda_n x}$.
Wenn $m$ gleiche Wurzeln $\lambda_1$ vorhanden sind, so tritt an die Stelle der entsprechenden Summanden des allgemeinen Integrals ein Glied von der Form: $e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_m x^{m-1})$.
Sind $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$ zwei konjugiert komplexe Wurzeln der charakteristischen Gleichung, so kann das Integral $C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$ auf die reelle Form $e^{ax}(A \cos bx + B \sin bx)$ gebracht werden, wo $A$ und $B$ willkürliche Konstanten sind.

III. Das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung mit zweitem Glied:

$$y^{(n)} + P_1 \cdot y^{(n-1)} + P_2 \cdot y^{(n-2)} + \dots + P_{n-2} \cdot y'' + P_{n-1} \cdot y' + P_n \cdot y = V_{(x)}$$

kann erhalten werden, indem man ein beliebiges partikuläres Integral $y_0$ dieser Gleichung, das man oft durch sinngemässes Probieren finden kann, zu dem allgemeinen

Integral der Differentialgleichung ohne zweites Glied addiert:

$$y = y_0 + C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \cdots\cdots + C_n y_n .$$

Ein stets anwendbares Verfahren, um aus dem allgemeinen Integral der linearen Differentialgleichung ohne 2. Glied das der Diff-Gleichung mit 2. Glied zu erhalten, ist die <u>Variation der Konstanten.</u> Man ersetzt die Konstanten $C_1, C_2, \cdots C_n$ durch Funktionen von $x$: $u_1(x), u_2(x), \cdots u_n(x)$, also

$$y = u_1 \cdot y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + \cdots\cdots + u_n y_n$$ und bestimmt die Differentialquotienten $u'(x)$ und hierauf durch Integration die $u(x)$ selbst aus dem folgenden Gleichungssystem:

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 + u_3' y_3 + \cdots\cdots\cdots + u_n' y_n = 0$$
$$u_1' y_1' + u_2' y_2' + u_3' y_3' + \cdots\cdots\cdots + u_n' y_n' = 0$$
$$- - - - - - - - - - - - - -$$
$$u_1' y_1^{(n-2)} + u_2' y_2^{(n-2)} + u_3' y_3^{(n-2)} + \cdots\cdots + u_n' y_n^{(n-2)} = 0$$
$$u_1' y_1^{(n-1)} + u_2' y_2^{(n-1)} + u_3' y_3^{(n-1)} + \cdots\cdots + u_n' y_n^{(n-1)} = V(x) .$$

## <u>Aufgaben.</u>

Man integriere die folgenden linearen Diff.-Gleichungen:

1) $y''' - 7y' + 6 = 0$ ; 2) $y''' - 3y'' + 4y = 0$

3) $y'' + y' + y = 0$ ; 4) $y'''' - a^4 y = 1 + x^2$

5) $4y'' - 2y' - 2y = e^x \sin\frac{x}{2}$ ; 6) $y'' + n^2 y = \frac{1}{\sin(nx)}$ (Var. der Konst.)

7) Man zeige, dass die Diff.-Gleichg. $x^2 y'' + axy' + by = 0$ zwei Partikulärintegrale von der Form $y = x^\alpha$ (bei passender Wahl von $\alpha$) zulässt und bestimme das allgemeine Integral.

8) Man integriere die Diff.-Gleichung der erzwungenen Schwingungen $\frac{d^2x}{dt^2} + m^2 x = \cos nt$ und betrachte insbesondere auch den Fall $m = n$ (Resonanz).

22. II. 1910. **Höhere Mathematik III.** № 14.

## Exakte Differentialgleichungen.

Der Ausdruck $P\,dx + Q\,dy$ heisst das vollständige Differential einer Funktion $U(x, y)$, wenn $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$ ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung hiefür ist: $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$. Ist diese Gleichung erfüllt, so hat die „exakte Differentialgleichung" $P\,dx + Q\,dy = 0$ das allgemeine Integral:

$$U = \int P\,dx + \int\left(Q - \int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\right)dy = C.$$

Jede Differentialgleichung erster Ordnung $M\,dx + N\,dy = 0$ kann durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor in eine exakte Differentialgleichung übergeführt werden; jedoch ist es im allgemeinen nicht möglich, den integrierenden Faktor $v$ zu finden, welche durch folgende partielle Differentialgleichung bestimmt ist:

$$\frac{\partial v}{\partial x}\cdot N - \frac{\partial v}{\partial y}\cdot M + v\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = 0.$$

## Näherungsweise Integration der Differentialgleichungen.

Wenn das Integral einer Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung in eine Potenzreihe entwickelbar ist, so kann man $y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots\dots$ sowie die aus dieser Potenzreihe berechneten Differentialquotienten $y', y'', y''', \dots\, y^{(n)}$ in die Differentialgleichung einsetzen und durch Vergleichung der Koeffizienten gleich hoher Potenzen von $x$ alle Grössen $A_i$ durch die $n$ ersten, welche willkürlich bleiben, ausdrücken.

Methoden zur Bestimmung eines partikulären Integrals der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit gegebenen Anfangswerten $x_0 y_0$:
Man findet die Koordinaten eines benachbarten Punktes der Integralkurve durch folgende Formeln:

1.) $x_1 = x_0 + \Delta x$

$y_1 = y_0 + \Delta y$, wobei

$\Delta_1 y = f(x_0, y_0) \cdot \Delta x$

$\Delta y = f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta_1 y}{2}\right) \cdot \Delta x$

2.) Genauer durch folgende Formeln: $x = x_0 + \Delta x$

$y = y_0 + \Delta y$, wobei

$\Delta_1 y = f(x_0, y_0) \cdot \Delta x$

$\Delta_2 y = f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta_1 y}{2}\right) \cdot \Delta x$

$\Delta_3 y = f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta_2 y}{2}\right) \cdot \Delta x$

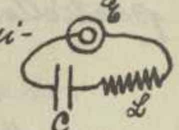
$\Delta_4 y = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta_3 y) \cdot \Delta x$

$\Delta y = \frac{1}{6}\left(\Delta_1 y + 2\Delta_2 y + 2\Delta_3 y + \Delta_4 y\right)$

# Aufgaben.

1.) Welche Gestalt nimmt die Oberfläche einer in einem zylindrischen Gefäss befindlichen Flüssigkeit an, wenn sie mit konstanter Geschwindigkeit $\omega$ um die Gefässachse rotiert?

2.) Ein Stromkreis mit dem Ohm'schen Widerstand $w$, der Selbstinduktion $L$ und der Kapazität $C$ wird durch eine Elektrizitätsquelle von der Spannung $\mathfrak{E}$ gespeist. Wie ändert sich die Stromstärke $i$ mit der Zeit $t$ für den Fall, dass a.) $\mathfrak{E}$ konstant, b.) $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \cdot \sin \alpha t$ ist.




(Ansatz: $\mathfrak{E} = iw + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$, wobei $\frac{dq}{dt} = i$).

3.) Man integriere die exakten Differentialgleichungen:

a.) $y(a-y)\,dx + x(a-2y)\,dy = 0$ ; b.) $\left[e^x(1-y) + \lg y\right]dx + \left[\frac{x}{y} - e^x\right]dy = 0$

4.) Die Diff.-Gleichung $(x^2 \lg x - y)\,dx + x(1+xy)\,dy = 0$ lässt einen nur von $x$ abhängigen, die Diff.-Gleichung $(y^3 + x)\,dx + (x^3 + y)\,dy = 0$ einen nur von $(x^2 + y^2)$ abhängigen Multiplikator zu. Man integriere die Diff.-Gleichungen auf Grund dieser Kenntnis.

5.) Mittels Reihenentwicklung integriere man die Diff.-Gleichung:

$xy'' + 2x^2 y' + y = 0$

6.) Man berechne näherungsweise die durch den Punkt $x=1$, $y=1$ gehende Integralkurve der Diff.-Glchg. $y' = {}^{10}\log \frac{y}{x}$ im Intervall von $x=1$ bis $x=2$, indem man je um $\Delta x = \frac{1}{5}$ weitergeht.

1. III. 1910. **Höhere Mathematik III.** № 15.

**Fourier'sche Reihen:** Eine in dem Intervall von 0 bis $2\pi$ beliebig gegebene Funktion lässt sich durch eine Reihe von der folgenden Form darstellen:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \cdots + A_n \cos nx + \cdots$$
$$+ B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \cdots + B_n \sin nx + \cdots$$

Dabei ist: $A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ ; $A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\,dx$, $B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \cdot dx$.

Diese Reihenentwicklung gilt jedoch nur in dem Intervall von 0 bis $2\pi$; ausserhalben desselben stellt sie nicht etwa die analytische Fortsetzung der Funktion $f(x)$ dar, sondern periodische Wiederholungen derselben.

An Unstetigkeitsstellen von $f(x)$ gibt die Reihenentwicklung das arithmetische Mittel zwischen den beiden durch die Funktion $f(x)$ definierten Werten. —

**Simultane Systeme von Differentialgleichungen:**

Ein System von $n$ Gleichungen zwischen einer unabhängigen Veränderlichen $t$, $n$ abhängigen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ und ihren Differentialquotienten beliebig hoher Ordnung $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots$; $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots$ $\frac{dz}{dt}, \frac{d^2z}{dt^2}, \ldots$ heisst ein System von $n$ simultanen Differentialgleichungen.

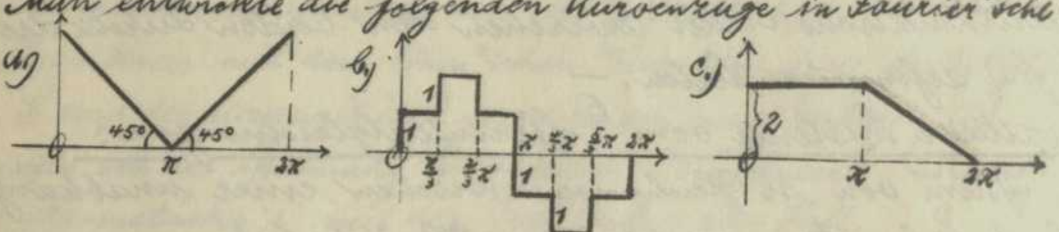
Man kann stets durch fortgesetzte Differentiation der einzelnen Gleichungen so viele Gleichungen erhalten, als zur Elimination von $(n-1)$ abhängigen Veränderlichen samt ihren Differentialquotienten nötig sind. Das Resultat ist <u>eine</u> gewöhnliche Differentialgleichung, deren Ordnung gleich der Summe der Ordnungszahlen der höchsten im simultanen System vorkommenden Differentialquotienten der verschiedenen abhängigen Variabeln ist. Gelingt die Integration dieser

Gleichung, so sind nur mehr Differentiationen und Eliminationen nötig, um die andern abhängigen Variabeln als Funktionen von $t$ auszudrücken.

<u>Einfachster Fall:</u> Um aus den zwei simultanen Differentialgleichungen $\frac{dx}{dt} = f(x, y, t)$ ; $\frac{dy}{dt} = \varphi(x, y, t)$ $x$ und $y$ als Funktionen von $t$ zu bestimmen, bildet man $\frac{d^2x}{dt^2}$ und eliminiert nun aus den 3 Gleichungen $y$ und $\frac{dy}{dt}$. Man erhält eine Differentialgleichung 2. Ordnung : $\frac{d^2x}{dt^2} = F(\frac{dx}{dt}, x, t)$; lässt sich aus dieser $x$ als Funktion von $t$ und zweier willkürlicher Konstanten finden, so gibt die Gleichung $\frac{dx}{dt} = f(x, y, t)$ $y$ als Funktion von $t$ ohne Integration.

## <u>Aufgaben.</u>

1.) Man entwickle die folgenden Kurvenzüge in Fourier'sche Reihen:




2.) Man integriere das System simultaner Differentialgleichungen:
$\frac{dx}{dt} + y = 0$ , $\frac{dy}{dt} + z = 1$ , $\frac{dz}{dt} + x = t$

3.) Welche Kurve beschreibt ein Punkt, der von einem festen Zentrum aus mit einer Kraft angezogen (abgestossen) wird, die seiner Entfernung vom Zentrum direkt proportional ist ?

4.) Ein durch eine elektromotorische Kraft $V = V_0 \sin at$ hervorgerufener Strom $J$ induziert in einem sekundären geschlossenen Leiter einen Strom $i$. Zwischen $V$, $J$ und $i$ bestehen dann die folgenden zu integrierenden Gleichungen:

$$V = R \cdot J + L \cdot \frac{dJ}{dt} + m \frac{di}{dt} \;;\qquad 0 = r \cdot i + l \cdot \frac{di}{dt} + m \frac{dJ}{dt}.$$

($R$, $r$ = Ohm'scher Widerstand, $L$, $l$ = Selbstinduktionskoeffizient, $m$ = wechselseitiger Induktionskoeffizient.)

3. III. 1910.
Platz № .....

Name: . . . . . . . . . . . .
Note : . . . . .

# Höhere Mathematik III.

## Semestralexamen.

1.) Gegeben sind von einer Ellipse zwei zu einander parallele Tangenten und der Berührpunkt auf einer derselben, sowie eine weitere beliebige Tangente mit Berührpunkt. Gesucht ist der Mittelpunkt der Ellipse. (Anwendung des Briandhon'schen Satzes!)

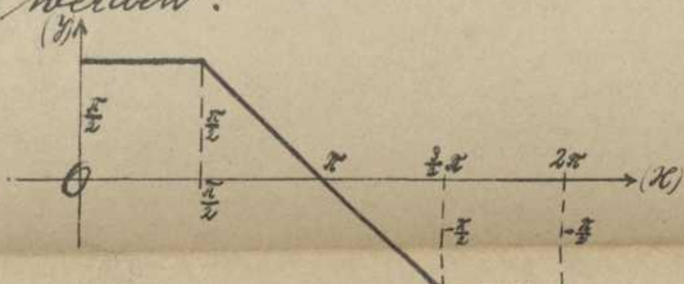
2.) Welches sind die Projektionen der Raumkurve $\left\{\begin{array}{l} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \\ z = \sqrt{2}\cdot \sin t \end{array}\right.$ auf die drei Koordinatenebenen?
Man berechne ferner die Gleichung der Normalebene sowie die Krümmung der Kurve im Punkt mit dem Parameter $t = \frac{\pi}{2}$.

3.) Man integriere die Differentialgleichung: $x(x+2y)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$

4.) Welches ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung:
$y'' + y' = \cos x$ ?

5.) Es sollen $x$ und $y$ als Funktionen von $t$ aus dem simultanen System berechnet werden: $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{y}$ ; $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}$.

6.) Der folgende Kurvenzug soll in eine Fourier'sche Reihe entwickelt werden:




(Die Aufgaben sind auf diesem Bogen zu bearbeiten!)

26.V.1910. № 1.

# Höhere Mathematik IV.

## Partielle Differentialgleichungen.

Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung von der Form $F(x, y, z, p, q) = 0$, wo $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ und $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, sondert aus den $\infty^5$ Flächenelementen des Raumes $\infty^4$ aus. Die Integration der partiellen Differentialgleichung besteht in einer Zusammenfassung von je $\infty^2$ dieser $\infty^4$ Flächenelemente zu einer Integralfläche.

Die Gesamtheit von $\infty^2$ Integralflächen $z = f(x, y, a, b)$ bildet ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung. Setzt man $b = \varphi(a)$ und eliminiert aus den beiden Gleichungen $z = f(x, y, a, \varphi(a))$ und $\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b} \cdot \varphi'(a) = 0$ die Grösse $a$, so erhält man das allgemeine Integral, welches eine willkürliche Funktion enthält. Wenn man für $\varphi(a)$ eine bestimmte Funktion einsetzt, ergibt sich ein partikuläres Integral als Enveloppe von $\infty^1$ Flächen des vollständigen Integrals. Die Enveloppe der Gesamtheit aller $\infty^2$ Integralflächen ist das singuläre Integral und kann durch Elimination von $a$ und $b$ aus den drei Gleichungen $z = f(x, y, a, b)$, $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$ erhalten werden.

## Aufgaben.

1.) Gegeben ein zweifach unendliches System von Raumkurven $f(x, y, z) = C_1$ und $\varphi(x, y, z) = C_2$. Welches ist die Bedingung dafür, dass man auf diesen $\infty^2$ Raumkurven orthogonale Flächen konstruieren kann? Beispiel: a.) $\frac{x}{z} = c_1$, $\frac{y}{z} = c_2$; b.) $x + z = c_1$, $\frac{y}{z} = c_2$.

2.) Welches ist die partielle Diff.-Gleichung aller Rotationsflächen um die z-Achse?

3.) Gegeben die Schar von $\infty^2$ Ebenen: $2ax + 4by - z - a^2 - 2b^2 = 0$.
Man bestimme die partielle Diff.-Gleichung, deren vollständige Lösung die Schar ist. Wie lautet das allgemeine und singuläre Integral der Diff.-Gleichung?

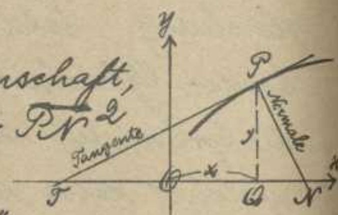
4.) Man löse die Differentialgleichungen:

a.) $\frac{dy}{dx} \cdot \cos x + y \cdot \sin x = x \cdot \cos x + \frac{x^2}{2} \cdot \sin x$

b.) $\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} - z = \cos t \\ \frac{d^2z}{dt^2} + 2z + y = t - \cos t \end{cases}$

5.) Welche Form muss der Meridian einer Rotationsfläche haben, welche, als Brennspiegel aufgefasst, parallel zur Rotationsachse einfallende Lichtstrahlen in einen Punkt F der Achse zurückwirft?

6.) Man bestimme die Kurven von der Eigenschaft, dass in jedem ihrer Punkte P: $\overline{ON} \cdot a = \overline{PN}^2$ ist, (a ist eine gegebene Strecke).
Man ermittle insbesondere auch die singuläre Lösung der Diff.-Gleichung des Problems.



3. V. 1910. **Höhere Mathematik IV.** № 2.

## Die Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordng.

1.) Die Charakteristiken sind die Schnittkurven zweier unendlich benachbarter Integralflächen der vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung. Durch eine partielle Diff-Gleichung 1. Ordnung sind $\infty^3$ Charakteristiken im Raume bestimmt. Jede Integralfläche wird von $\infty^1$ Charakteristiken überdeckt. Die Flächenelemente einer Integralfläche längs einer auf derselben liegenden Charakteristik bilden einen „charakteristischen Streifen". Die Aufsuchung anderer, nicht direkt durch Spezialisierung der Konstanten aus der vollständigen Lösung zu erhaltenden Integralflächen geschieht durch andere entsprechende Aneinanderreihung der charakteristischen Streifen.

2.) Die Charakteristiken auf einer Integralfläche lassen sich auch finden durch Aneinanderreihung der Linienelemente, längs welcher die durch die Diff-Gleichung 1. Ordnung in jedem Raumpunkt bestimmten Elementarkegel die Integralfläche berühren.

3.) Eine beliebige Raumkurve bestimmt im allgemeinen eine Integralfläche. Nur wenn die Raumkurve eine Charakteristik ist, gibt es $\infty^1$ Integralflächen, welche dieselbe enthalten und sich längs ihr berühren. Die Charakteristiken lassen sich deshalb auch definieren als diejenigen Raumkurven, durch die unendlich viele Integralflächen hindurchgehen, die sämtlich mit der Charakteristik einen charakteristischen Streifen gemeinsam haben. Die Bestimmung der Charakteristiken aus dieser Definition verlangt die Auflösung eines simultanen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen. —

## Die Integration einer partiellen Diff-Gleichung 1. Ordnung u. 1. Grades

$P(x,y,z)\cdot p + Q(x,y,z)\cdot q = R(x,y,z)$, wo $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ und $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, lässt sich nach Lagrange auf die Integration des folgenden simultanen Systems gewöhnlicher Diff.-Gleichungen zurückführen:

$$dx : dy : dz = P : Q : R.$$

Sind die Integralkurven dieses Systems (die Charakteristiken der partiellen Diff.-Gleichung 1. Ordng. u. 1. Grades) gefunden in der Form $y = \varphi(x, a, b)$, $z = \psi(x, a, b)$ und fasst man $\infty^1$ von ihnen zu einer Fläche zusammen, indem man $b = \chi(a)$ setzt und $a$ aus den Gleichungen $y = \varphi(x, a, \chi(a))$, $z = \psi(x, a, \chi(a))$ eliminiert, so erhält man ein Integral der partiellen Diff.-Gleichung. Das allgemeine Integral der Diff.-Gleichung lässt sich hier explizit auf folgende Weise finden: Man drückt $a$ und $b$ aus $y = \varphi(x, a, b)$ und $z = \psi(x, a, b)$ durch $x$, $y$ und $z$ aus und setzt dann die gefundenen Funktionen in $b = \chi(a)$ ein, wo $\chi(a)$ eine willkürliche Funktion von $a$ ist.

Jede Integralfläche enthält unendlich viele Integralkurven des Lagrange'schen Systems und jede aus einfach unendlich vielen Integralkurven gebildete Fläche ist ein Integral der partiellen Diff.-Gleichung 1. Ordnung und 1. Grades.

## Aufgaben.

1) Die partielle Diff.-Glchg. $p^2 + q^2 = tg^2\alpha$ definiert die Flächen konstanter Böschung. Die Ebenen von der Gleichung $z = ax + \sqrt{tg^2\alpha - a^2} \cdot y + b$ bilden das vollständige Integral der Diff.-Glchg. der Böschungsflächen. Beweis! Wie können hieraus die Böschungsflächen geometrisch erzeugt werden? Man bestimme geometrisch die Böschungsfläche der Ellipse u. gebe ihre ungefähre Form an.

2) Man löse die part. Diff.-Gleichungen:

a) $x \cdot p - y \cdot q = \frac{x^2}{y}$; b) $(y - bz) \cdot p - (x - az) \cdot q = bx - ay$; c) $p - z \cdot q = x + y$.

3) Welches sind die Flächen, für welche die Tangentialebene in jedem Punkt $(x, y, z)$ auch den Punkt $(0, 0, k \cdot z)$ enthält?

4) Wie lautet die Gleichung aller Flächen, deren Normalen sämtlich die $Z$-Achse schneiden?

5) Man bestimme die zu den Paraboloiden $x^2 + y^2 - 2cz = 0$ ($c$ = Parameter) orthogonalen Flächen. Von den letzteren ermittle man speziell noch diejenige Fläche, welche die Gerade $x = 1$, $z = 0$ enthält.

10. V. 1910. **Höhere Mathematik IV.** № 3.

Die lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten u. ohne 2. Glied: $a\cdot r + b\cdot s + c\cdot t + d\cdot p + e\cdot q + f\cdot z = 0$, (wo zur Abkürzung $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$ gesetzt wurde), wird durch eine Exponentialfunktion von der Form $z = e^{\lambda x + \mu y}$ befriedigt, wenn $\lambda$ und $\mu$ der charakteristischen Gleichung:

$$a\lambda^2 + b\cdot\lambda\mu + c\cdot\mu^2 + d\cdot\lambda + e\cdot\mu + f = 0$$

genügen. Aus ihr ergeben sich zu jedem Wert von $\lambda$ zwei Werte $\mu$ und $\mu'$. Das allgemeine Integral enthält infolgedessen zwei Reihen von unendlich vielen willkürlichen Konstanten:

$$z = C_1\cdot e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} + C_2\cdot e^{\lambda_2 x + \mu_2 y} + C_3\cdot e^{\lambda_3 x + \mu_3 y} + \ldots\ldots$$
$$+ C_1'\cdot e^{\lambda_1 x + \mu_1' y} + C_2'\cdot e^{\lambda_2 x + \mu_2' y} + C_3'\cdot e^{\lambda_3 x + \mu_3' y} + \ldots\ldots$$

Zerfällt die charakteristische Gleichung in zwei Linearfaktoren:

$$[\mu - (m\lambda + n)]\cdot[\mu - (m'\lambda + n')] = 0,$$

so gehen in das Integral zwei willkürliche Funktionen ein:

$$z = e^{ny}\cdot \varphi_1(x + my) + e^{n'y}\cdot \varphi_2(x + m'y).$$

Die Differentialgleichung der Wärmeleitung in einem linearen Medium ist: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, wobei $u$ die Temperatur, $t$ die Zeit, $a^2 = \frac{k}{\rho\cdot c}$ ($k$ = Leitfähigkeit, $\rho$ = Dichte, $c$ = spezifische Wärme).

Verschiedene Formen des Integrals:

1) $u = \Sigma\, e^{-k_i^2 a^2 t}\cdot(A_i \cos k_i x + B_i \sin k_i x)$, wenn die Temperaturverteilung für $t = 0$ gegeben ist;

2) $u = \Sigma\, C_i\cdot e^{-x\sqrt{\frac{\pi}{a^2 T_i}}}\cdot\cos\left(\frac{2\pi t}{T_i} - x\sqrt{\frac{\pi}{a^2 T_i}}\right)$, wenn sich an der Begrenzung $x = 0$ die Temperatur periodisch ändert.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad u = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4a^2 t}}$$

# Aufgaben.

1.) Man zeige, dass $u = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4a^2 t}}$, wo $\alpha$ eine willkürliche Konstante, der Diff.-Gleichung der Wärmeleitung genügt.

2.) Ein Stab von konstantem Querschnitt hat an verschiedenen Stellen $x$ verschiedene Temperaturen $u$. Er befindet sich in einem Medium von der konstanten Temperatur $U$ und gibt an dasselbe Wärme proportional $u - U$ ab.

a.) Man leite die Diff.-Gleichung der Wärmebewegung:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 (u - U)$$ ab;

b.) Man führe in der vorigen Gleichung $u - U = v \cdot e^{-b^2 t}$ ein und zeige, dass sie in die Gleichung $\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ übergeht.

3.) Bei einer mittleren Jahrestemperatur von $10°$ und einer jährlichen Schwankung von $40°$ zeigt ein Thermometer in $10^m$ Bodentiefe eine Schwankung von nur $0{,}2°$. Man berechne daraus das $a^2$ der betreffenden Bodenschicht. Wie tief dringt der Frost ein? Wann wird die äusserste Frostgrenze erreicht? Dabei soll die Temperatur an der Oberfläche als Cosinuswelle angenommen werden.

4.) Wie tief dringt unter den Annahmen des vorigen Beispiels eine tägliche Temperaturschwankung von $10°$ ein, bis sie auf $0{,}2°$ abgeschwächt ist?

5.) Zur Repetition: Welches sind die Kurven, für welche das Produkt aus Krümmungsradius und Projektion des Radiusvektors auf die Normale gleich dem Quadrat des Radiusvektors ist?

24. V. 1910. **Höhere Mathematik IV.** №4.

## Die Bewegung einer schwingenden Saite

lässt sich durch ein Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$


darstellen, wobei $x$ die Entfernung vom Koordinatenanfangspunkt, $z$ den (kleinen) Ausschlag und $t$ die Zeit bedeutet.

Verschiedene Formen des Integrals:

1) $z = f(x+at) + \varphi(x-at)$, wo $f$ und $\varphi$ zwei willkürliche Funktionen sind,

2) $z = \frac{1}{2}[\chi(x+at) + \chi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(x)\,dx$, worin $z = \chi(x)$ die Gestalt und $\frac{\partial z}{\partial t} = \psi(x)$ die Geschwindigkeit der Saite für $t=0$ bestimmt.

3) Lösung durch eine Fourier'sche Reihe:

$z = \sum_0^\infty \left(A_n \cos\left(n\frac{\pi a t}{l}\right) + B_n \sin\left(n\frac{\pi a t}{l}\right)\right) \cdot \sin\frac{n\pi x}{l}$ ; dabei ist $l$ die Länge der Saite, ferner

$$A_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l \chi(x) \cdot \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad B_n = \frac{2}{a\pi n} \cdot \int_0^l \psi(x) \cdot \sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

## Aufgaben.

1) Die Differentialgleichung der Wärmebewegung in einer Kugel ist unter der Voraussetzung, dass die Temperatur $u$ nur eine Funktion des Radius $r$: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$.
Man leite die Gleichung ab und vereinfache sie durch die Substitution: $v = u \cdot r$.

2.) Welches ist das allgemeine Integral der Diff. Glchg: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$?

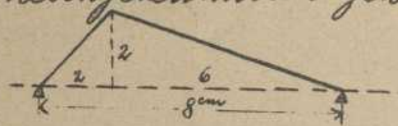
3) Man führe die partielle Diff.-Gleichung:

$$b \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + c\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + d \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

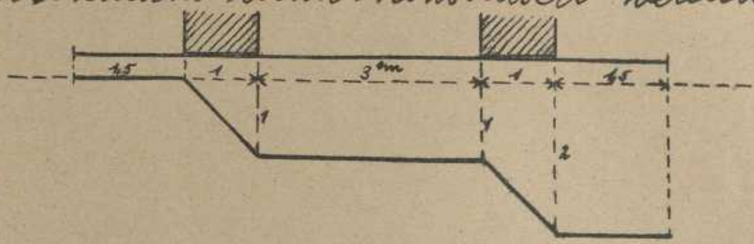
durch die Substitution $x = \alpha u + \beta v$, $y = \gamma u + \delta v$ mit passend ge-

wählten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ auf die Diff.-Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$ zurück und gebe demnach das allgemeine Integral an.
Spezieller Fall: $c = 0$; $\frac{b}{d} = -a^2$.

4.) Man konstruiere die Gestalt der nebengezeichneten gezupften Saite für verschiedene Zeiten $t$:




5.) Die Gestalt der folgenden mit zwei Hämmern gleichzeitig angeschlagenen Saite soll für verschiedene Zeiten konstruiert werden:




## Zur Wiederholung:

6.) Man diskutiere die Fläche $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, bestimme insbesondere auch die Schnitte mit den Koordinatenebenen und mit Parallelebenen hiezu und versuche die Fläche zu zeichnen. Ferner berechne man das Volumen des von der Fläche und den Ebenen $z = 0$, $y = 0$, $x = 1$ eingeschlossenen Stückes.

7.) Die Differentialgleichung $(\cos x + 2 \sin x \cdot \sin y)\,dx + \cos x \cos y\,dy = 0$ besitzt einen nur von $x$ abhängigen integrierenden Faktor. Man bestimme ihr allgemeines Integral.

---

Berichtigung des Übungsblattes № 3: Auf Seite 2 muss es in Aufgabe 1) erste Zeile heissen: $u = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4a^2 t}}$.

---

31. I. 1910. № 5.

# Höhere Mathematik IV.

Die Gestalt einer von der Ebene wenig abweichenden gleichgespannten Membran ist durch eine Fläche $z = F(x, y)$ gegeben, welche die Laplace'schen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

erfüllt und gegebenen Grenzbedingungen genügt.

Der reelle und der imaginäre Teil jeder Funktion einer komplexen Veränderlichen $z = f(x + iy) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ genügt derselben Differentialgleichung. Dabei bestehen die Gleichungen: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Der absolute Betrag von $f'(x + iy)$ ist gleich der Böschung $\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$ der Integralfläche $z = u(x, y)$, das an der $Y$-Achse gespiegelte Argument von $f'(x + iy)$ gibt die Richtung des Gefälles an.

Aus einem Integral $z = u(x, y)$ der Laplace'schen Differentialgleichung kann man auf folgende Weise ein neues Integral erhalten: Man bildet die $XY$ Ebene konform in eine neue Ebene ab und überträgt die $z$ Ordinaten der Punkte der $(XY)$ Ebene auf die entsprechenden Punkte der Bildebene.

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. $z = f(x + iy) + \varphi(x - iy)$ ist nur reell, wenn $f$ und $\varphi$ konjugiert komplexe Funktionen sind.

## Aufgaben.

1) Die Laplace'sche Diff.-Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ soll auf Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ transformiert werden. Man zeige, dass die Diff. Gleichung bei einer Drehung des Koordinatensystems um die $Z$-Achse unverändert bleibt.

2.) Man beweise, dass $u = \lg\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ der Diff.-Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügt.

3.) Ein kreisförmiger Reifen hat eine Deformation erlitten, durch welche er in die auf einem Kreiszylinder vom Radius a liegende Kurve $z = c\cdot\sin 2\varphi$ übergegangen ist. Welche Gestalt nimmt eine in den Reifen eingespannte Membran an? (Man setze: $z = f(r)\cdot\sin 2\varphi$).

4.) Man zeige, dass sich die Diff.-Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -k^2$ mittels einer Substitution von der Form $z = u + \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$ auf die einfachere $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ zurückführen lässt, wenn $\alpha, \beta$ u. $\gamma$ passend gewählt werden. Wie heisst das allgemeine Integral der vorgelegten Diff.-Gleichung.

5.) Die Diff.-Gleichung einer Membran von der Spannung $\sigma$, die mit einer von der (XY) Ebene begrenzten Flüssigkeitsschicht vom spez. Gewicht $\rho$ belastet ist, lautet: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\rho}{\sigma}\cdot z$. Welcher Bedingung müssen $\alpha$ und $\beta$ genügen, damit $z = k\cdot\sin\alpha x\cos\beta y$ die Diff.-Gleichung erfüllt? Für welche Spannung $\sigma$ lässt sich hiemit die Lösung für eine Membran angeben, die in einen horizontalen rechteckigen Rahmen von den Seitenlängen $\ell$ und b eingespannt ist?

6.) Die Diff.-Gleichung einer ursprünglich ebenen durch Randkräfte unendlich wenig verbogenen Platte lautet:
$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0$. Man zeige, dass $z = f(w) + x\cdot\varphi(w)$, wo $w = x \pm iy$, der Diff.-Gleichung genügt.

7.) Zur Wiederholung: Man diskutiere und zeichne die Kurve
$y^2 = x(x-\alpha)(x-\beta)$ a.) für $\alpha < \beta$, b.) für $\alpha = \beta$.
Wie gross ist das Volumen des zwischen $x=0$ und $x=\alpha$ eingeschlossenen Körpers, der entsteht durch Rotation des entsprechenden Flächenstückes um die X-Achse unter der Annahme $\alpha=1, \beta=2$ bezw. $\alpha=\beta=1$.

7.VI.1910. **Höhere Mathematik IV.** №6

## Theorie der Felder.

Unter einem Feld versteht man die Verteilung einer skalaren oder vektoriellen Grösse (Feldgrösse) in der Ebene oder im Raum.

Ein räumliches skalares Feld ist demnach die Gesamtheit der Zahlenwerte, welche wir den Punkten des Raumes nach irgend einem Gesetz zuordnen: $V = f(x, y, z) = F(r)$, wobei $r = ix + jy + k\cdot z$. Der Vektor:

$\operatorname{grad} V = i\frac{\partial V}{\partial x} + j\frac{\partial V}{\partial y} + k\frac{\partial V}{\partial z}$ (Gradient von $V$) steht in jedem Punkt auf der Fläche konstanter Feldgrösse $V =$ konst. senkrecht und gibt somit die Richtung des Gefälles im skalaren Felde an. Seine Komponenten sind den Richtungskosinuss der Flächennormalen proportional:

$\alpha : \beta : \gamma = \frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y} : \frac{\partial V}{\partial z}$; folglich sind die Orthogonaltrajektorien der Flächen $V =$ konst. durch das simultane System bestimmt:

$dx : dy : dz = \frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y} : \frac{\partial V}{\partial z}$. Die Grösse des Gradienten:

$|\operatorname{grad} V| = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}$ ist gleich der Grösse des Gefälls.

Die Änderung der Feldgrösse beim Übergang zu einem Nachbarpunkt ist

$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial x}dz = (\operatorname{grad} V, dr)$.

Hat man 2 skalare Felder, so kann man durch Addition der jedem Punkte zugeordneten Feldgrössen ein neues Feld erzeugen: $V = V_1 + V_2$. Der Gradient desselben ist gleich der vektoriellen Summe der Gradienten der beiden gegebenen Felder: $\operatorname{grad} V = \operatorname{grad}(V_1 + V_2) = \operatorname{grad} V_1 + \operatorname{grad} V_2$.

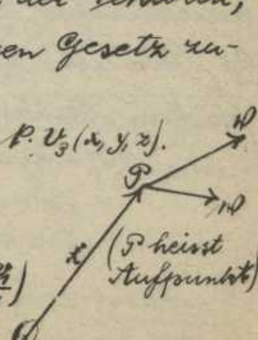
Ist $z = f(x, y)$ ein ebenes Feld, so ist der absolute Wert des Gradienten die Böschung der Fläche $z = f(x, y)$ und seine Richtung der Gefällsrichtung entgegengesetzt.

Unter einem Vektorfeld versteht man die Gesamtheit der Vektoren, welche den Punkten des Raumes nach irgend einem stetigen Gesetz zugewiesen sind: $v = f(r)$, wobei $r = ix + jy + kz$ und

$v = i\cdot v_1(x, y, z) + j\cdot v_2(x, y, z) + k\cdot v_3(x, y, z)$.

Man ordnet ausserdem noch jedem Punkt einen zweiten Vektor (Wirbelvektor) zu durch:

$$w = \operatorname{curl} v = i\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)$$



Kraftlinien des Feldes $\mathfrak{v}$: $\quad dx : dy : dz = v_1 : v_2 : v_3$.

Wirbellinien des Feldes $\mathfrak{v}$: $\quad dx : dy : dz = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) : \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) : \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)$.

Ist $\mathfrak{v}$ das Gradientenfeld eines skalaren Feldes: $\mathfrak{v} = \text{grad}\, V$, so ist es wirbelfrei: $\quad \text{curl grad}\, V = 0$.

Fasst man $\mathfrak{v}$ als Geschwindigkeit einer stationär strömenden inkompressiblen Flüssigkeit auf, so ist $\quad \text{div}\, \mathfrak{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$ die pro Raumeinheit und Zeiteinheit neu auftretende Flüssigkeitsmenge.

$\text{div}(\mathfrak{v}' + \mathfrak{v}'') = \text{div}\, \mathfrak{v}' + \text{div}\, \mathfrak{v}''$; $\quad \text{curl}(\mathfrak{v}' + \mathfrak{v}'') = \text{curl}\, \mathfrak{v}' + \text{curl}\, \mathfrak{v}''$.

Satz von Gauss: $\quad \iiint\limits_{\text{Raum}} \text{div}\, \mathfrak{v}\, dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\text{Oberfläche}} (\mathfrak{v}, d\mathfrak{f})$.

## Aufgaben.

1.) Man berechne: $\quad$ a.) $\text{grad}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ; $\quad$ b.) $\text{grad}(U \cdot V)$.

2.) Welches ist die Grösse und Richtung der Strömungsgeschwindigkeit in einem ebenen Feld mit dem Geschwindigkeitspotential $V = \lg r$?

3.) Berechne das Potential einer gleichmässig mit Masse belegten Kreisscheibe inbezug auf einen Punkt der Achse.

4.) In zwei Punkten $x = a$ und $x = -a$ der $X$-Achse befinden sich a.) gleiche, b.) entgegengesetzt gleiche Massen. Man untersuche durch Zeichnung die Gestalt der Potentialflächen.

5.) Man zeige, dass der reelle Teil von $W = a(\lg(w-1) - \lg(w+1))$, wo $W = u + iv$ und $w = x + iy$, das Potential eines ebenen Feldes ist, dessen Potentialkurven und Kraftlinien zu einander orthogonale Kreisbüschel bilden.

6.) Beweise, dass $\text{div curl}\, \mathfrak{v} = 0$. Was bedeutet das hydrodynamisch?

7.) Man bestimme die Kraftlinien und Wirbellinien des Drehfeldes: $\mathfrak{v} = \omega(-iy + jx)$.

14. VI. 1910. **Höhere Mathematik IV.** № 7.

## Diskussion der allgemeinen Fläche 2. Ordnung:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

zur Abkürzung seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} ; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

| Art der Fläche | $\Delta_4$ | $\Delta_3$ | $\Delta_2$ | $a_{11}, a_{22}, a_{33}$ |
|---|---|---|---|---|
| Ellipsoid | $<0$ | gleiches Zeichen mit $a_{11}$ | $>0$ | alle gleiches Zeichen, nicht Null. |
| Zweischaliges Hyperboloid | $<0$ | Alle übrigen Fälle ausser $\Delta_3 = 0$ | | |
| Imaginärer Kegel | $=0$ | gleiches Zeichen mit $a_{11}$ | $>0$ | alle gleiches Zeichen, nicht Null. |
| Reeller Kegel | $=0$ | Alle übrigen Fälle ausser $\Delta_3 = 0$. | | |
| Imaginäre Fläche | $>0$ | gleiches Zeichen mit $a_{11}$ | $>0$ | alle gleiches Zeichen, nicht Null. |
| Einschaliges Hyperboloid | $>0$ | Alle übrigen Fälle ausser $\Delta_3 = 0$ | | |
| Elliptisches Paraboloid | $<0$ | $=0$ | | |
| Zylinder | $=0$ | $=0$ | | |
| Hyperbolisches Paraboloid | $>0$ | $=0$ | | |
| Ebenenpaar | $=0$ | Alle Unterdeterminanten 3. Ordnung von $\Delta_4$ gleich Null. | | |
| Doppelebene | $=0$ | Alle Unterdeterminanten 2. Ordnung von $\Delta_4$ gleich Null. | | |

Die Koordinaten $(x_0\, y_0\, z_0)$ des Mittelpunktes der Fläche sind durch folgende 3 Gleichungen bestimmt:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = 0 \\ a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = 0 \end{cases}.$$

Auf ein nach dem Mittelpunkt parallel verschobenes Koordinaten-

System bezogen lautet die Gleichung der Fläche:

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + a_{33}z'^2 + \frac{\Delta_4}{\Delta_3} = 0.$$

Die Richtungen $(x':y':z')$ der Hauptachsen ergeben sich aus zweien von den 3 folgenden Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} (a_{11}-\lambda)x' + a_{12}y' + a_{13}z' = 0 \\ a_{12}x' + (a_{22}-\lambda)y' + a_{23}z' = 0 \\ a_{13}x' + a_{23}y' + (a_{33}-\lambda)z' = 0, \end{array}\right\}$$ wenn $\lambda$ eine Wurzel der folgenden Gleichg. ist: $$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12} & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}-\lambda, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichung der Fläche, bezogen auf die Hauptachsen, ist dann:

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 + \frac{\Delta_4}{\Delta_3} = 0.$$

Wenn $\underline{\Delta_3 = 0}$ ist, liegt der Mittelpunkt unendlich fern (Paraboloide). Man dreht dann zunächst das Koordinatensystem, sodass die dem Wert $\lambda_3 = 0$ entsprechende ausgezeichnete Richtung zur $\zeta$ Achse wird und erhält: $\lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + 2a\xi + 2b\eta + 2c\zeta + d = 0$. Eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems ergibt hierauf die Schlussgleichung: $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2cZ = 0$ (Scheitelgleichung).

## Aufgaben.

1.) Die Gleichungen der folgenden Flächen 2. Ordnung sind auf das ausgezeichnete Koordinatensystem zu transformieren und zu diskutieren:

a.) $5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy - 4yz - 6 = 0$; b.) $xz + 4x + y - 1 = 0$

c.) $xy + yz + zx \pm 1 = 0$; d.) $z^2 - 6y - 8x = 0$

2.) Wie gross ist das Volumen eines durch eine allgemeine Gleichung 2. Gra des gegebenen Ellipsoides?

3.) Wie viele Paraboloide u. wie viele Kegel enthält das Büschel von Flächen 2. Ordng.: $(a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \dots + a_{44}) + \kappa(b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + \dots + b_{44}) = 0$?

4.) Zur Wiederholung: Der Mittelpunkt eines Kreises vom Radius $r$ bewegt sich so auf der Kurve $x = a\cos u$, $y = a\sin u$, $z = b\cdot u$, dass die Kreisebene stets parallel zur $(XY)$ Ebene bleibt. Man zeige, dass

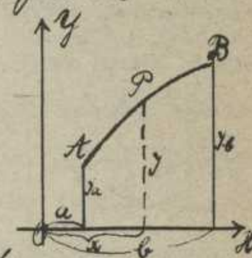
$x = a\cos u + r\cos v$, $y = a\sin u + r\sin v$, $z = b\cdot u$ die Gleichung der Fläche ist, welche der Kreisumfang beschreibt. Wie lautet das Linienelement, welches sind die Parameterkurven und längs welcher Kurve stehen sie aufeinander senkrecht?

21. VI. 1910. **Höhere Mathematik IV.** № 8.

## Variationsrechnung.

1) Variation eines einfachen Integrals $V = \int_a^b f(x, y, y')\,dx$, wobei $y' = \frac{dy}{dx}$ und $f$ eine bekannte Funktion von $x$, $y$ und $y'$ ist. $y$ soll als Funktion von $x$ derart bestimmt werden, dass das Integral $V$ ein Extremum wird. Die notwendige Bedingung hiefür ist:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0.$$




Wenn die Funktion $f$ das $x$ nicht explizit enthält, ist ein 1. Integral dieser Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$f = y' \frac{\partial f}{\partial y'} + C.$$

Die beiden Konstanten, welche in das allgemeine Integral eingehen, reichen im allgemeinen hin, um die durch 2 vorgegebene Punkte $A$ und $B$ gehende Lösung zu finden.

2.) Variation eines Integrals mit Bedingungsgleichung:

$$V = \int_a^b f(x, y, z, y', z')\,dx \quad ; \quad U = \varphi(x, y, z) = 0 \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx},\ z' = \frac{dz}{dx}\right).$$

$y$ und $z$ sind als Funktionen von $x$ so zu bestimmen, dass $V$ ein Extremum wird und gleichzeitig $U = 0$ erfüllt ist. Die notwendigen Bedingungen sind:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) &= \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right) &= \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \varphi(x, y, z) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Diese 3 Gleichungen bestimmen $y$, $z$ und $\lambda$ als Funktionen von $x$ mit 2 Konstanten, welche dazu benützt werden können, eine durch 2 gegebene Flächenpunkte gehende Lösung zu finden.

## Aufgaben.

1) Welches ist die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte der Ebene?

2.) Man stelle die Differentialgleichung der kürzesten Linien einer Fläche auf, deren Linienelement in Parameterform gegeben ist zu $ds^2 = E(u,v)\,du^2 + G(u,v)\,dv^2$.

3.) Man zeige, dass $ds^2 = du^2 + (f(u))^2 dv^2$ das Linienelement einer Rotationsfläche um die Z Achse mit den Meridiankurven $v =$ konst. und den Parallelkreisen $u =$ konst darstellt. Ferner stelle man die Differentialgleichung der kürzesten Linien der Rotationsfläche auf und weise nach, dass diese Gleichung auf die Form $\frac{d}{du}\left(\frac{p^2 \cdot \frac{dv}{du}}{\sqrt{1+p^2\left(\frac{dv}{du}\right)^2}}\right) = 0$ gebracht werden kann.

4.) Man bestimme die Form, die ein Sprengloch besitzt, nachdem das zu sprengende Material herausgeschleudert ist.

Dabei wird angenommen, dass das zu sprengende Material homogen ist und die Natur zur Absprengung einer gewissen Materialmenge die kleinst mögliche Kraft aufwendet. Ferner wird die senkrecht zur Oberfläche des Minentrichters gerichtete Kraftkomponente der Explosionskraft, welch letztere parallel zur Achse des Minentrichters wirkt, proportional zur Fläche des Trichters vorausgesetzt.

5.) Man bestimme die kürzesten Linien auf der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

Zur Wiederholung:

6.) Was ergibt sich als Ort der Schnittpunkte aller Tangenten der Raumkurve $x = at$, $y = at^2$, $z = at^3$ mit der $(XZ)$ oder $(YZ)$ Ebene und mit Parallelebenen hiezu?

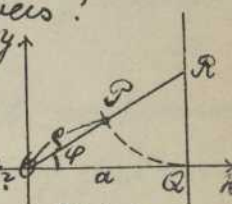
7.) Gegeben ist die Fläche $z = \frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^2}$. Man diskutiere ihre Gestalt, suche die parabolische Kurve der Fläche und bestimme deren Projektionen in die 3 Koordinatenebenen. Ferner berechne man das Volumen des Körpers, der von den Ebenen $x = +1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = 3$, der $XY$ Ebene und der Fläche begrenzt ist.

28. VI. 1910. № 9.

# Höhere Mathematik IV.

## Wiederholungsaufgaben.

1.) Zieht man durch den Koordinatenanfangspunkt 2 beliebige zu einander senkrechte Strahlen, welche die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ schneiden, so umhüllen die Verbindungslinien der Schnittpunkte je der Strahlen mit der Ellipse den Kreis $x^2+y^2=\frac{a^2 \cdot b^2}{a^2+b^2}$. Beweis!




2.) Welches ist die Gleichung der Kurve, die der Punkt P beschreibt, wenn man auf dem Radiusvektor OR jedesmal die Strecke RQ = RP von R aus abträgt? Wie gross wird OP für $\varphi=\frac{\pi}{2}$? Man bestimme den Flächeninhalt zwischen der Kurve und der X-Achse.

3.) Für ein System von Kurven gilt die folgende Beziehung: $F-x^2=a^2\cdot\frac{dy}{dx}$ wobei F der Flächeninhalt zwischen der X-Achse, der Kurve und den beiden Ordinaten $x=0$ und $x=x$ ist. Wie lautet die endliche Gleichung des Kurvensystems? Von den Kurven des Systems soll diejenige gezeichnet werden, die im Punkt $x=0$, $y=a$ die Neigung $\operatorname{tg}\alpha=2$ gegen die X-Achse hat.

4.) Die ebene Bewegung eines Punktes ist durch folgende zwei Gleichungen bestimmt:

$$x+\frac{dy}{dt}\cdot t=0$$
$$y+\frac{dx}{dt}\cdot t=0.$$

Wie lauten die endlichen Bewegungsgleichungen und welches ist die Bahnkurve?

5. VII. 1910. **Höhere Mathematik IV.** № 10.

## Variationsrechnung.

3.) Das Isoperimeter-Problem:

$$V = \int_a^b f(x, y, y')\,dx \quad ; \quad U = \int_a^b \varphi(x, y, y')\,dx = c.$$

$y$ soll als Funktion von $x$ so bestimmt werden, dass das Integral $V$ zu einem Extremum wird, während gleichzeitig das Integral $U$ einen vorgegebenen Wert $c$ annimmt. $f$ und $\varphi$ sind bekannte Funktionen von $x$, $y$ und $y' = \frac{dy}{dx}$.

Man bildet eine Hilfsfunktion $W = V + \lambda \cdot U$, wo $\lambda$ eine Konstante ist, und stellt die notwendige Bedingung für das Eintreten eines Extremums von $W$ auf:

$$\frac{\partial(f + \lambda\cdot\varphi)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial(f + \lambda\varphi)}{\partial y'}\right) = 0.$$

In die Lösung dieser Differentialgleichung gehen 2 Konstante und der Parameter $\lambda$ ein, welche es bei geeigneter Wahl ermöglichen, die Kurve durch 2 gegebene Punkte zu legen und die Bedingung $U = c$ zu erfüllen.

4.) Beispiele: a.) Die Rotationsfläche, welche zugleich Minimalfläche ist, entsteht durch Drehung einer Kettenlinie um die $X$-Achse.

b.) Die Linie kürzester Fallzeit (Brachystochrone) ist eine nach unten konvexe gemeine Zykloide.

c.) Die kürzesten Linien auf einer Fläche haben die Eigenschaft, dass ihre Hauptnormale stets mit der Flächennormalen zusammenfällt oder dass ihre Schmiegungsebene die Flächennormale enthält.

d.) Unter allen geschlossenen ebenen Kurven hat der Kreis bei gegebenem Umfang den grössten Inhalt.

# Aufgaben.

1.) Zwischen 2 feste Punkte A und B eine Kurve von gegebener Länge l derart zu legen, dass das von den Ordinaten dieser Punkte, der X-Achse und der Kurve eingeschlossene Flächenstück ein Maximum wird.

2.) Unter allen Kurven von derselben Länge l, welche durch dieselben 2 festen Punkte gehen, diejenige zu finden, welche, um die X-Achse rotierend, den Körper vom grössten Volumen erzeugt.

3.) Durch 2 Punkte A und B eine Kurve von der Länge l so zu legen, dass der Schwerpunkt des Flächenstückes, das von der X-Achse, den Ordinaten von A und B und der Kurve begrenzt wird, möglichst hoch liegt.

4.) Ein Rotationskörper, welcher die X-Achse = Rotationsachse in 2 gegebenen Punkten A und B schneidet und das gegebene Volumen V hat, soll so bestimmt werden, dass das Trägheitsmoment desselben inbezug auf die Y-Achse ein Minimum wird.

Ende.

8. VII. 1910.

Name: . . . . . . . . . . . . . . . .

Note: . . . . . . . .

# Höhere Mathematik IV. Teil.

## Semestralexamen.

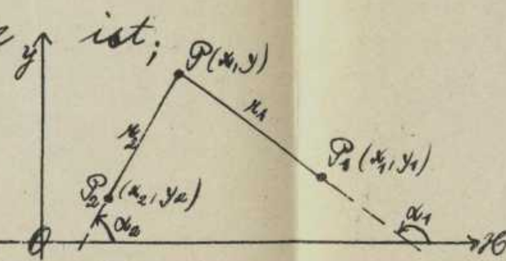
1.) Durch Zurückführung auf das Lagrange'sche Hilfssystem bestimme man das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung: $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y^2} = 0.$
Man ermittle insbesondere noch die Gleichung derjenigen Integralfläche, welche durch die Hyperbel $x=0,\ y.z=1$ hindurchgeht.

2.) Man untersuche, ob es Funktionen $z=f(u)$, wo $u=x^2+y^2$ ist, gibt, die der partiellen Diff.-Gleichung $z^2\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)-u=0$ genügen und bestimme diese Funktionen durch Zurückführung der partiellen Diff.-Gleichung auf eine gewöhnliche Diff.-Gleichung zwischen $z$ und $u$.

3.) Man integriere die lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ durch Einführung von $z = e^{\lambda x + \mu y}$.

4.) Berechne

a.) $\operatorname{div}[\mathfrak{u}, \mathfrak{r}]$, wo $\mathfrak{u} = iu_1 + ju_2 + ku_3$ konstant und $\mathfrak{r} = ix + jy + kz$ ist;




b.) Grösse und Richtung des Gradienten des skalaren Feldes
$$V = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} + \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2} = r_1 + r_2$$
und drücke dieselben durch die Winkel $\alpha_1$ und $\alpha_2$ aus.

5.) Es soll die Art und der Mittelpunkt folgender Fläche 2. Ordnung bestimmt werden: $x^2 + 3y^2 + 4yz + 8z = 0$

6.) Gesucht die Kurve, für welche das Integral $\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx$ ein Extremum wird und die durch die beiden Punkte $(1, 0)$ und $(0, 1)$ hindurchgeht.

(Die Aufgaben sind auf diesem Bogen zu bearbeiten!)

volt.

8. XI. 09. **Höhere Mathematik I.** № 1.

## Formeln.

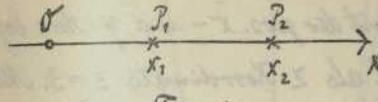


Fig. 1.

1.) Entfernung zweier auf der $x$-Axe gelegener Punkte (mit Berücksichtigung der Richtung):

$$\overrightarrow{P_1P_2} = x_2 - x_1 . \quad \left[\overrightarrow{P_2P_1} = x_1 - x_2\right] \quad \text{(Fig. 1.)}$$

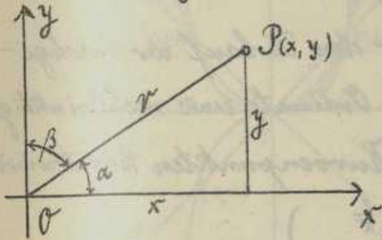


Fig. 2.

2.) Die Entfernung eines Punktes $P(x,y)$ vom Koordinatenanfangspunkt ist gleich dem absoluten Betrag der Wurzel:

$$\sqrt{x^2+y^2} = r \quad \text{(Fig. 2.)}$$

Winkel $\alpha$ (bzw. $\beta$) des „Radiusvektors" $OP$ mit der positiven $x$- (bzw. $y$-) Axe ist gegeben durch:

$$tg\alpha = \frac{y}{x} \;;\; \sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \;;\; \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{r} = \sin\alpha$$

Dabei ist: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ und $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$.

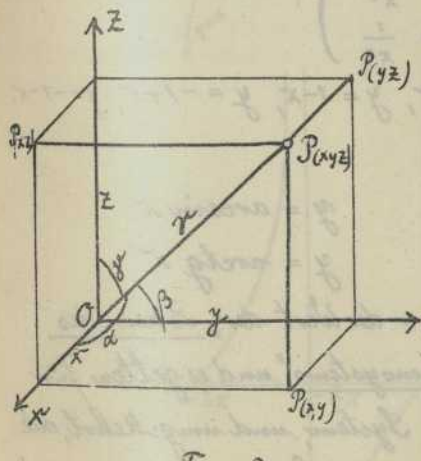


Fig. 3.

3.) Entfernung des Punktes $P(x,y,z)$ vom Koordinatenanfangspunkt:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad \text{(Fig 3.)}$$

Winkel $\alpha, \beta, \gamma$ des Radiusvektors $OP$ gegen die positiven Koordinatenaxen:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \;;\quad \cos\beta = \frac{y}{r} \;;\quad \cos\gamma = \frac{z}{r} .$$

Dabei ist: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

---

## Aufgaben.

1.) Man berechne die Entfernung der Punkte $P_1, P_2$ der $x$-Axe mit den Abscissen:

a.) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$  b.) $x_1 = -1$, $x_2 = 4$  c.) $x_1 = 3$, $x_2 = -2$  d.) $x_1 = -5$, $x_2 = -3$.

2.) Wie gross ist die Entfernung des Punktes $P$ der Ebene mit den Koordinaten:

a.) $x = 2$, $y = 3$ b.) $x = -4$, $y = -1$ c.) $x = 3$, $y = -4$

vom Anfangspunkt? Welchen Winkel bildet $OP$ mit der positiven $x$-Axe?

3.) Vom Nullpunkt aus ist ein Strahl $OP$ gezogen, der mit der pos. $x$- und $y$-Axe bezw. die Winkel $\alpha = 45^0$ und $\beta = 60^0$ bildet. Der Endpunkt $P$ hat als $z$-Koordinate $z = 3$. Man berechne Winkel $\gamma$ und die übrigen Koordinaten von $P$.

4.) Man suche ein angenähertes geometrisches Bild für den Verlauf der nachgenannten Funktionen, indem man $x$ als Abscisse, $y$ als Ordinate eines rechtwinkligen Koordinatensystems betrachtet und eine Anzahl von Kurvenpunkten konstruiert:

a.) $\left.\begin{array}{l} y = x;\ y = -x \\ y = x^2 \\ y = x^3 \\ y = x^4 \end{array}\right\}$ Fig 4. b.) $\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ y = \frac{1}{x^2} \\ y = \frac{1}{x^3} \\ y = \frac{1}{x^4} \end{array}\right\}$ Fig 5.

c.) $y = 2x$, $y = 3x$, $y = \frac{x}{2}$, $y = -\frac{x}{3}$; $y = 1+x$, $y = 1-x$, $y = -1+x$, $y = -1-x$.
$y = 2x^2$, $y = 3x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$, $y = -3x^2$.

d.) $\left.\begin{array}{l} y = \sin x \\ y = \cos x \end{array}\right\}$ Fig 7. $\left.\begin{array}{l} y = \operatorname{tang} x \\ y = \operatorname{cotang} x \end{array}\right\}$ Fig 6. $\begin{array}{l} y = \arcsin x \\ y = \operatorname{arctg} x. \end{array}$

e.) $\left.\begin{array}{l} y = \overset{10}{\log} x \\ y = \overset{e}{\log} x \end{array}\right\}$ Fig. 8. Dabei ist $e = 2{,}71828\ldots$ der Wert der „Basis des natürlichen Logarithmensystems" und es gelten für den Übergang vom natürlichen zum dekadischen System, und umgekehrt, die Gleichungen:

$$\overset{10}{\log} x = \overset{10}{\log} e \cdot \overset{e}{\log} x = 0{,}43429\ldots \cdot \overset{e}{\log} x$$
$$\overset{e}{\log} x = \overset{e}{\log} 10 \cdot \overset{10}{\log} x = 2{,}30258\ldots \cdot \overset{10}{\log} x.$$

f.) $y = \overset{10}{\log} \sin x$, $y = \overset{10}{\log} \operatorname{tg} x$.
$y = \overset{e}{\log} \sin x$, $y = \overset{e}{\log} \operatorname{tg} x$.

g.) $\left.\begin{array}{l} y = e^x;\ y = e^{-x}. \\ y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \text{ [Kettenlinie]} \end{array}\right\}$ Fig 9.

5.) Man zeichne mit Hilfe der Kurve $y = \sin x$ (Fig 7.) die Kurven:
$$y = 2 \sin x, \quad y = \sin 2x, \quad y = \sin \frac{x}{2}.$$

6.) Die Abscissen der Schnittpunkte der Kurven $y = \cos x$ und $y = \frac{1}{x}$ sind Wurzeln der Gleichung $\cos x - \frac{1}{x} = 0$.

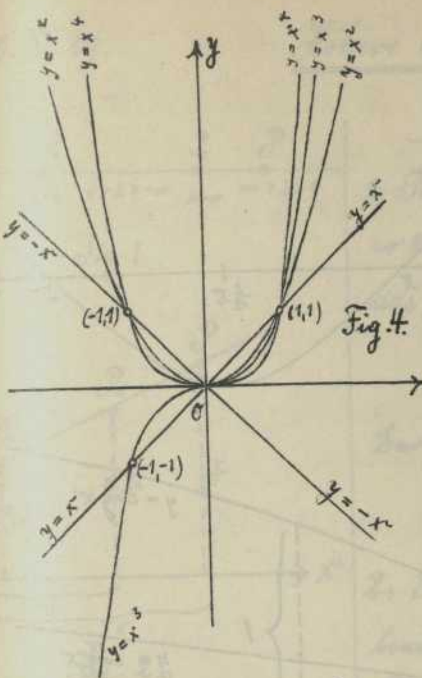



Fig. 4.

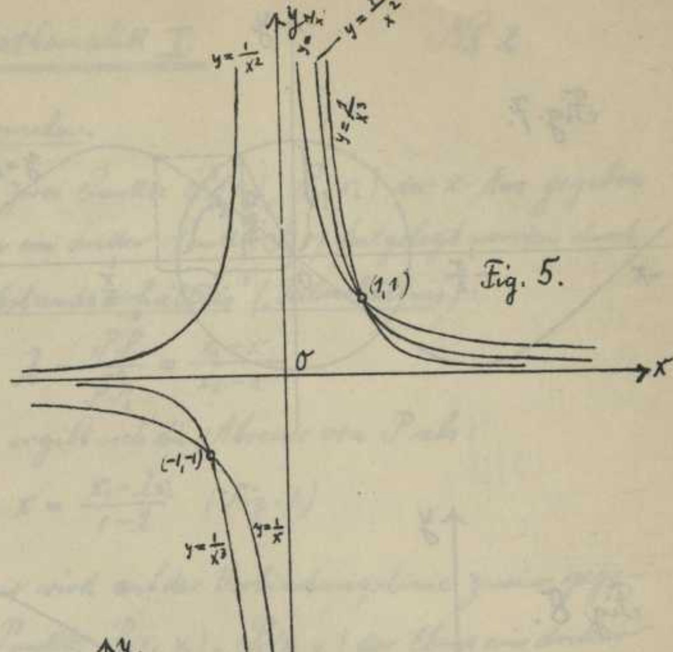



Fig. 5.

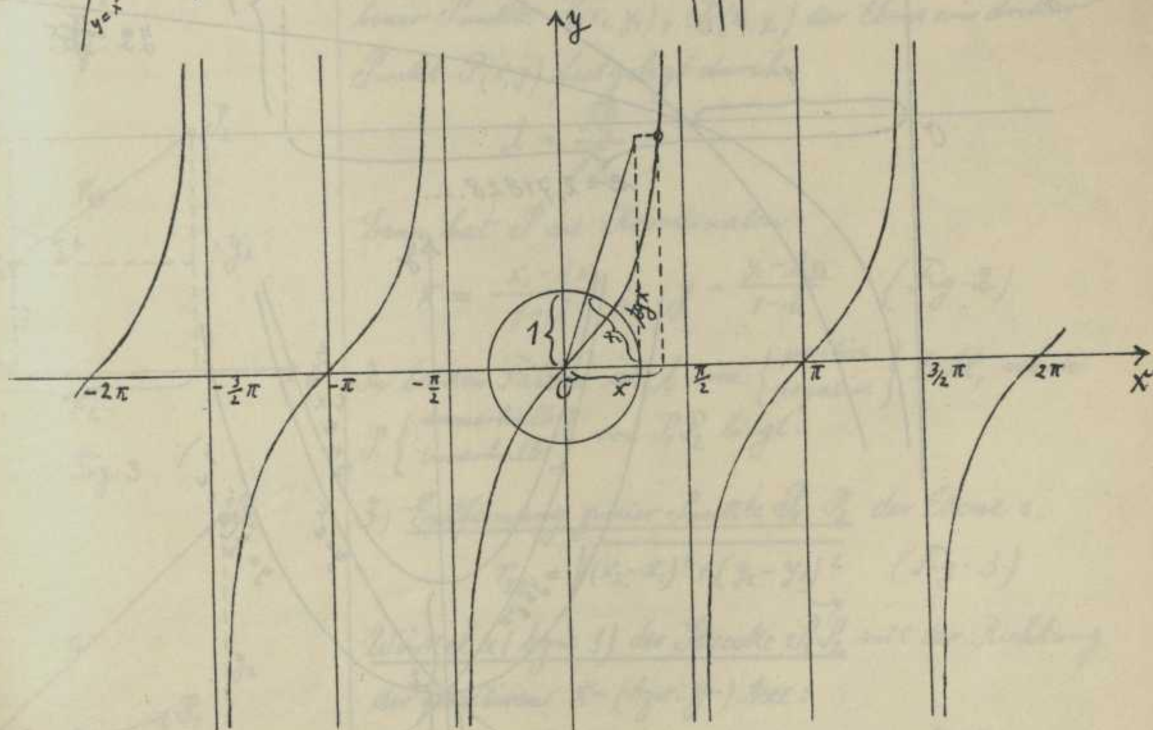



Fig. 6. $y = \tan x$.

$$\operatorname{tang}(x) = \operatorname{tang}(x+\pi) = \dots = \operatorname{tang}(x+n\pi)$$

Fig. 7.

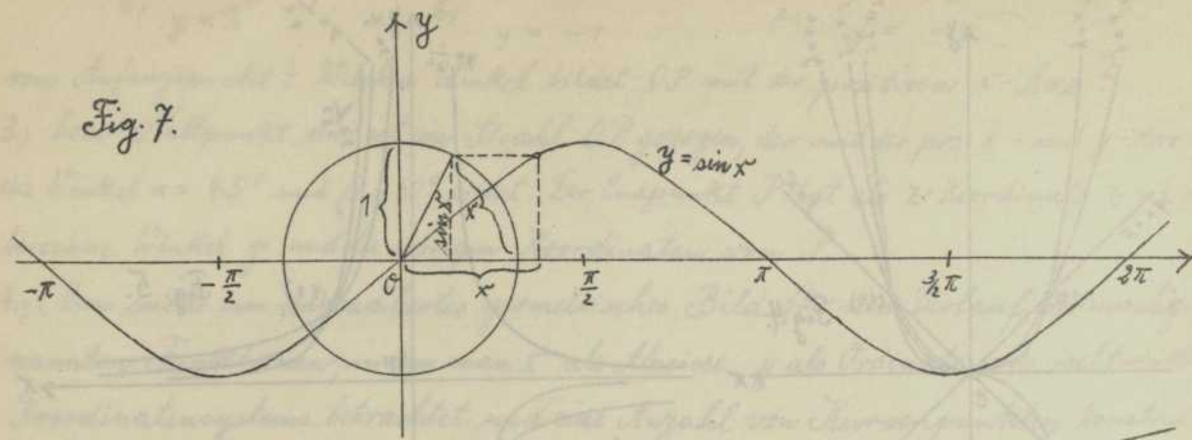
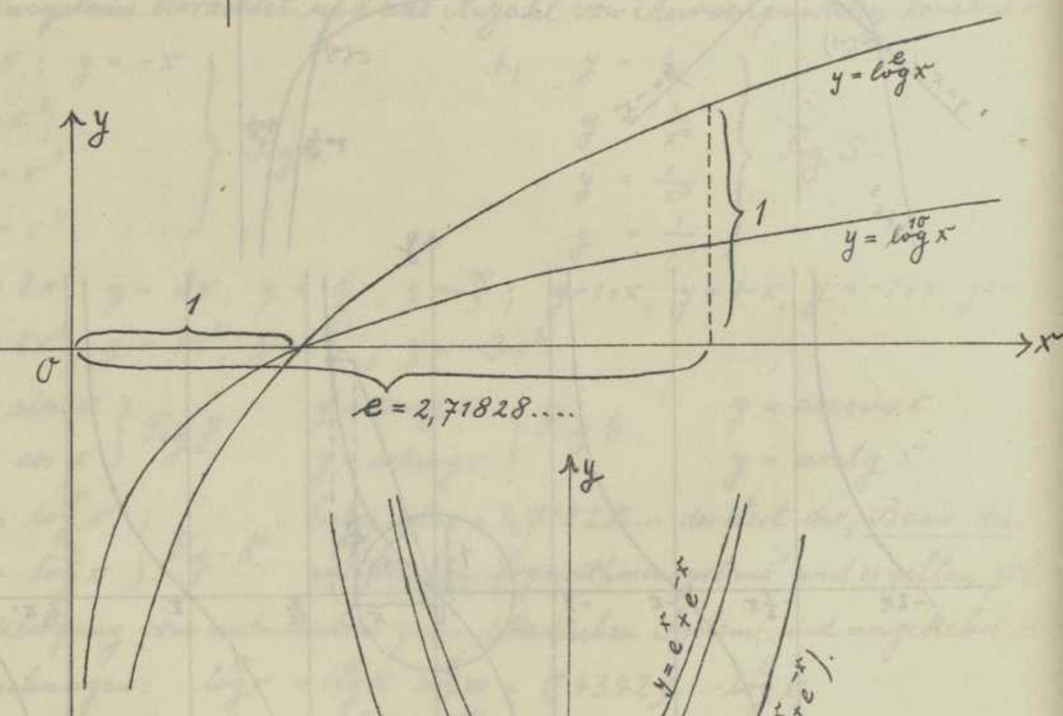



Fig. 8.



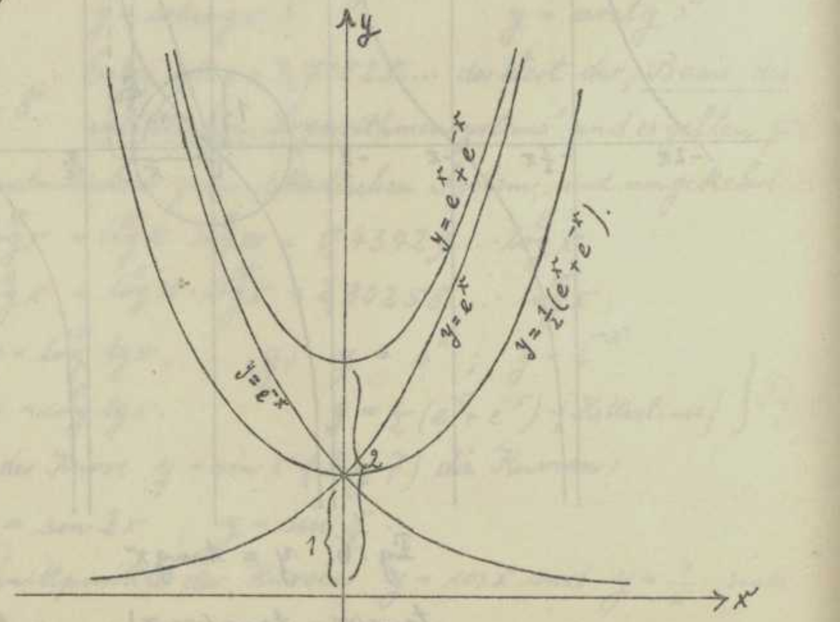
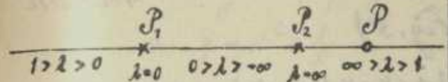




Fig. 9.

15. XI. 09. **Höhere Mathematik I.** № 2.




Fig·1

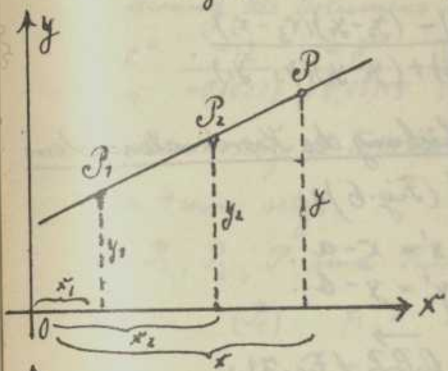


Fig. 2.

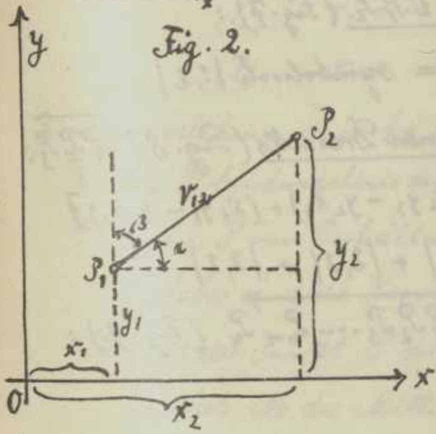


Fig. 3

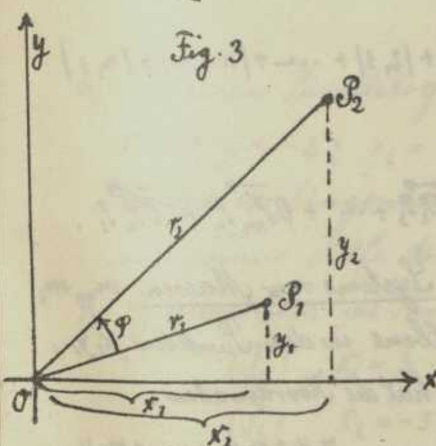


Fig. 4

## Formeln.

1.) Sind zwei Punkte $P_1(x_1)$, $P_2(x_2)$ der $x$-Axe gegeben, so kann ein dritter Punkt $P(x)$ festgelegt werden durch das „Abstandsverhältnis" („Teilverhältnis"):

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{PP_2}} = \frac{x_1 - x}{x_2 - x}$$

Daraus ergibt sich die Abscisse von $P$ als:

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda} \quad (\text{Fig. 1.})$$

2.) Ebenso wird auf der Verbindungslinie zweier gegebener Punkte $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ der Ebene ein dritter Punkt $P(x, y)$ festgelegt durch

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{PP_1}}{\overrightarrow{PP_2}}$$

Dann hat $P$ die Koordinaten:

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}\ ; \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda} \quad (\text{Fig. 2.})$$

In beiden Fällen ist $\lambda$ eine $\left\{\begin{matrix}\text{positive}\\ \text{negative}\end{matrix}\right\}$ Zahl, wenn $P \left\{\begin{matrix}\text{ausserhalb}\\ \text{innerhalb}\end{matrix}\right\}$ von $P_1P_2$ liegt.

3.) <u>Entfernung zweier Punkte $P_1$, $P_2$</u> der Ebene:

$$r_{12} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} \quad (\text{Fig. 3.})$$

<u>Winkel $\alpha$ (bzw. $\beta$) der Strecke $\overrightarrow{P_1P_2}$</u> mit der Richtung der positiven $x$-(bzw. $y$-) Axe:

$$\cos\alpha = \frac{x_2-x_1}{r_{12}}\ ; \quad \sin\alpha = \frac{y_2-y_1}{r_{12}}\ ; \quad tg\,\alpha = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

$$\cos\beta = \frac{y_2-y_1}{r_{12}} = \sin\alpha.$$

Dabei ist: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$

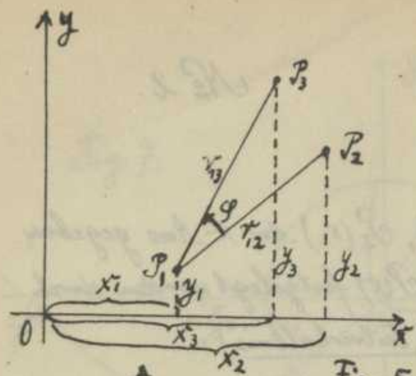



Fig. 5.

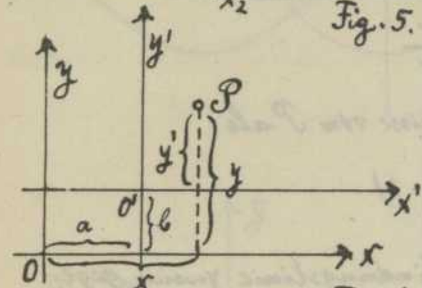



Fig. 6.

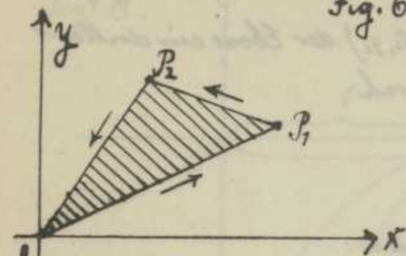



Fig. 7

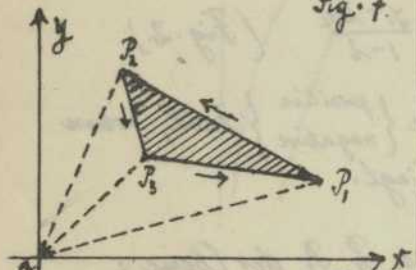



Fig. 8

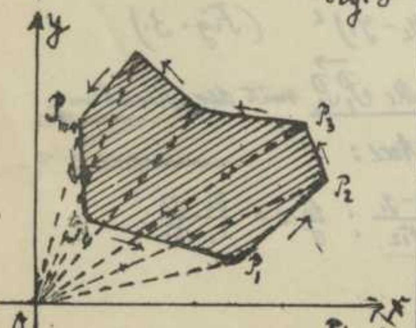



Fig. 9.

4.) Winkel der Radiusvektoren nach $P_1$ und $P_2$ (Fig. 4.)

$\cos\varphi = \dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{r_1\cdot r_2}$ ; $\sin\varphi = \dfrac{x_1y_2 - x_2y_1}{r_1 r_2}$ ; $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1x_2+y_1y_2}$

5.) Winkel $P_2P_1P_3 = \varphi$ (Fig. 5)

$$\cos\varphi = \frac{(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)}{r_{12}\cdot r_{13}}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)}{(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)}.$$

6.) Formeln für eine Verschiebung des Koordinatensystems parallel zu sich selbst (Fig. 6):

$$x = x'+a\ ;\qquad x' = x-a.$$
$$y = y'+b\ ;\qquad y' = y-b.$$

7.) Fläche eines Dreiecks $\overrightarrow{OP_1P_2}$ (Fig. 7):

$$\Delta = \tfrac{1}{2}(x_1y_2 - y_1x_2) = \text{symbolisch } |1,2|.$$

8.) Fläche eines allgemeinen Dreiecks (Fig. 8) $\overrightarrow{P_1P_2P_3}$:

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\left[(x_1y_2-y_1x_2)+(x_2y_3-y_2x_3)+(x_3y_1-y_3x_1)\right]$$
$$= \text{symbolisch } |1,2|+|2,3|+|3,1|.$$

9.) Fläche eines Polygons $\overrightarrow{P_1P_2P_3\cdots P_{n-1}P_n}$ (Fig. 9):

$$F = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}(x_1y_2-y_1x_2)\ + \\ +(x_2y_3-y_2x_3) \\ +\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ +(x_{n-1}y_n-y_{n-1}x_n) \\ +(x_ny_1-y_nx_1)\end{bmatrix} = |1,2|+|2,3|+\cdots+|n-1,n|+|n,1|$$

$= \text{Summe der } \Delta\Delta:\ \overrightarrow{OP_1P_2}+\overrightarrow{OP_2P_3}+\cdots+\overrightarrow{OP_{n-1}P_n}+\overrightarrow{OP_nP_1}.$

10.) Der Schwerpunkt eines Systems von Massen $m_1, m_2 \ldots\ldots m_n$, die in der xy-Ebene in den Punkten $x_1y_1$, $x_2y_2$, ..... $x_ny_n$ liegen, hat die Koordinaten:

$$x = \frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}\ ;\qquad y = \frac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots+m_ny_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}.$$

# Aufgaben.

1.) Man zeichne folgende Kurven:

a.) $y = x^2 + \frac{1}{x}$; b.) $y = \frac{x}{2} + \sin x$; c.) $y = \frac{x}{2} \cdot \sin x$.

2.) Setzt man das Volumen einer Wassermasse von $0^0$ Cels. gleich 1, so beträgt die Änderung des Volumens $\Delta V$ bei

| $t^0$ | $-12$ | $-8$ | $-4$ | $+4$ | $+8$ | $+12$ | $+16$ | $+20$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta V$ | $+0{,}00237$ | $+0{,}00115$ | $+0{,}00049$ | $-0{,}00012$ | $+0{,}00001$ | $+0{,}00034$ | $+0{,}00088$ | $0{,}00160$ |

Man ersetze die Tabelle durch eine Zeichnung, indem man $1^0 = 3\,mm$; $0{,}0001\,V = 4\,mm$ setzt.

3.) $P_1$, $P_2$, $P$ sind Punkte der $x$-Axe mit den Abscissen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(P_1)$ | $x_1 = 3$ | $-1$ | $3$ |
| $(P_2)$ | $x_2 = -3$ | $1$ | $4$ |
| $(P)$ | $x = 0$ | $2$ | $2$. |

In welchem Teilverhältnis $\lambda$ teilt $P$ die Strecke $P_1P_2$?

4.) Die Verbindungslinie der Punkte $P_1\,(x_1 = 1,\ y_1 = -1)$ und $P_2\,(x_2 = 5,\ y = 2)$ soll durch $P$ im Verhältnis $\lambda = 4$, durch $Q$ im Verhältnis $\lambda = -3$ geteilt werden. Welches sind die Koordinaten von $P$ und $Q$?

5.) Teilt der Punkt $P$ die Strecke $P_1P_2$ im Verhältnis $\lambda$, $Q$ im Verhältnis $-\lambda$, und ist $M$ die Mitte von $P_1P_2$, so gilt die Beziehung:

$$(\overrightarrow{MP_1})^2 = \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}.$$

6.) Von einem Parallelogramm sind 3 Ecken $A, B, C$ mit den Koordinaten $x_1 = 1,\ y_1 = -2$; $x_2 = 3,\ y_2 = 0$; $x_3 = -2,\ y_3 = 1$ gegeben. Man suche den Schnittpunkt der Diagonalen des Parallelogramms (als Halbierungspunkt) und mit seiner Hilfe den vierten Eckpunkt. Drei Lösungen!

7.) Gegeben sind die Punkte

| | | |
|---|---|---|
| $(P_1)$ | $x_1 = 3$; $y_1 = 2$ | $x_1 = 2$; $y_1 = -1$ |
| $(P_2)$ | $x_2 = -5$; $y_2 = 6$ | $x_2 = 1$; $y_2 = 5$. |

Man berechne den Winkel der Rad.-Vektoren $\overrightarrow{OP_1}$ und $\overrightarrow{OP_2}$ und den Inhalt des $\Delta\ \overrightarrow{OP_1P_2}$.

8.) Gegeben sind 3 Punkte $P_1, P_2, P_3$ mit den Koordinaten:

$x_1 = 4;$ $x_2 = 2;$ $x_3 = -3.$

$y_1 = 1;$ $y_2 = 5;$ $y_3 = 3.$

Man berechne Seitenlängen, Winkel und Flächeninhalt des Dreiecks.

9.) Man suche die Koordinaten desjenigen Punktes, der gleichweit von den Punkten: $x_1 = 2;$ $x_2 = 3;$ $x_3 = -4$
$y_1 = 6;$ $y_2 = -2;$ $y_3 = -3$ entfernt ist.

10.) Wie gross ist der Inhalt des Sechsecks mit den Ecken:

$x_1 = 3;$ $x_2 = 2;$ $x_3 = 0;$ $x_4 = -1;$ $x_5 = -4;$ $x_6 = 1;$

$y_1 = 1;$ $y_2 = 3;$ $y_3 = 6;$ $y_4 = 3;$ $y_5 = 0;$ $y_6\ -2$ ?

11.) Die Formel für den Schwerpunkt eines Massensystems ist unabhängig von einer Verschiebung des Koordinatensystems. Beweis!

12.) Man berechne den Schwerpunkt eines Dreiecks mit den Ecken $x_1, y_1;$ $x_2, y_2;$ $x_3, y_3$, wenn in den Ecken die Massen

a.) 1, 1, 1

b.) 1, 2, 3 angebracht sind.

13.) Man zeige, dass der Schwerpunkt von 2 Massen $m_1$ und $m_2$ durch innere Teilung der Verbindungsstrecke im umgekehrten Verhältnis der Massen $\left(\lambda = -\frac{m_2}{m_1}\right)$ erhalten wird.

---

22. XI. 09. **Höhere Mathematik I.** № 3.

## Die Gerade.

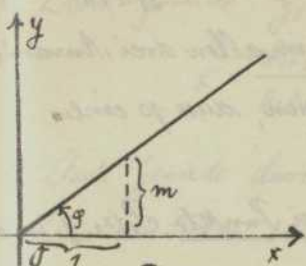


Fig. 1

1.) Gleichung einer Geraden durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems, die mit der positiven x-Axe den Winkel $\varphi$ bildet:

$$y = mx = tg\varphi \cdot x. \quad \text{also} \quad m = tg\varphi. \quad \text{(Fig. 1)}$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ gibt diese Gleichung $x = \frac{y}{m} = 0$ d. h. die y-Axe.

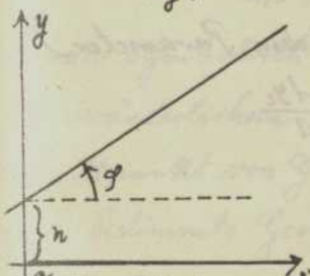


Fig. 2

2.) Gleichung einer Geraden, die mit der positiven x-Axe den Winkel $\varphi$ bildet und auf der y-Axe die Ordinate $n$ abschneidet:

$$y = mx + n = tg\varphi\, x + n \qquad \text{(Fig. 2)}$$

Für $m = \infty$ und $n = \infty$ ergibt diese Gleichung $x = \frac{y}{m} - \frac{n}{m} = const$ d. h. die Geraden parallel zur y-Axe.

3.) <u>Allgemeinste Form der Gleichung einer Geraden:</u>

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{Linear!}$$

Dabei ist $m = -\frac{a}{b}$; $n = -\frac{c}{b}$.

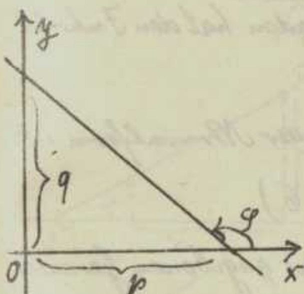


Fig. 3.

4.) Gleichung einer Geraden, die auf der x- bezw. y-Axe die Abschnitte $p$ bezw $q$ macht:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0.$$

Dabei ist $tg\varphi = -\frac{q}{p}$. Diese Formel stellt die Geraden durch den Anfangspunkt nicht dar. (Fig. 3.)

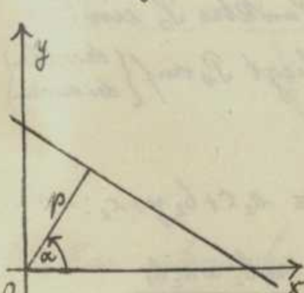


Fig. 4.

5.) „<u>Hesse'sche Normalform</u>" der Gleichung einer Geraden:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad \text{(Fig. 4)}$$

$p$ ist die Länge des vom Anfangspunkt auf die Gerade gefällten Lotes, $\alpha$ der Winkel dieses Lotes mit der positiven x-Axe.

Die allgemeinste Form der Geradengleichung $ax + by + c = 0$ wird durch Division mit $\pm\sqrt{a^2+b^2}$ auf die Normalform gebracht:

$$\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\cdot x + \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}\,y + \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

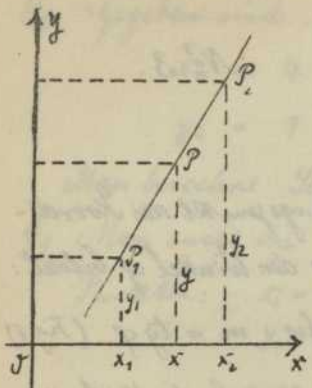


Fig. 5.

Es ist also: $\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin\alpha = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$; $p = \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$.

Das Vorzeichen der Quadratwurzel ist in allen drei Ausdrücken gleich zu nehmen und so zu bestimmen, dass $p$ eine positive Zahl wird.

6.) Gleichung einer Geraden, die durch zwei Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ geht (Fig. 5)

A.) in „Parameterdarstellung" mit dem Parameter $\lambda$:

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}\ ;\ y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda}.$$

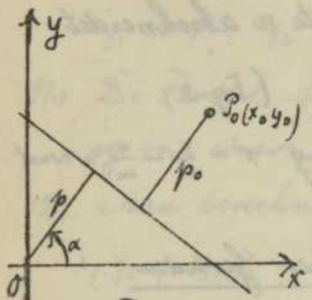


Fig. 6.

B.) nach Elimination von $\lambda$:

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1},$$

oder: $(xy_1 - x_1y) + (x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y - xy_2) = 0$ d.h.: das Dreieck der Punkte $xy$, $x_1y_1$, $x_2y_2$ einer Geraden hat den Inhalt Null.

7.) Die Entfernung des Punktes $P_0(x_0 y_0)$ von einer Geraden in der Normalform ist

$$p_0 = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p \quad (\text{Fig. } 6.)$$

Um den Abstand eines Punktes von der in allgemeiner Form gegebenen Geraden zu finden, bringt man dieselbe auf die Normalform und trägt an Stelle der laufenden Koordinaten $x, y$ die Koordinaten $x_0, y_0$ des Punktes $P_0$ ein.

Anmerkung: Ergibt sich $p_0$ als eine $\left\{\begin{matrix}\text{negative}\\ \text{positive}\end{matrix}\right\}$ Zahl, so liegt $P_0$ auf $\left\{\begin{matrix}\text{derselben}\\ \text{der anderen}\end{matrix}\right\}$ Seite der Geraden wie der Koordinatenanfangspunkt.

8.) Winkel zweier Geraden $G_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ und $G_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$:

$$\cos\psi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\ ;\ \sin\psi = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}\ ;\ \operatorname{tg}\psi = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2}.$$

Bedingung für das Senkrechtstehen der beiden Geraden ($\psi = \frac{\pi}{2}$) : $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$

Bedingung für den Parallelismus der beiden Geraden ($\psi = 0$) : $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$

9.) Zwei Gerade $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ schneiden sich in dem Punkt:

$$x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \;; \qquad y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} .$$

10.) Jede Gerade durch den Schnittpunkt der Geraden $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ lässt sich in der Form schreiben:

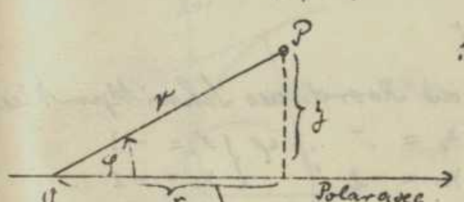
$$a_1 x + b_1 y + c_1 - \lambda (a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$$

oder symbolisch: $\quad G_1 - \lambda G_2 = 0.$

Bei veränderlichem $\lambda$ stellt diese Gleichung das „Strahlbüschel" durch den Schnittpunkt von $G_1$ und $G_2$ dar; für einen bestimmten Wert von $\lambda$ ergibt sich eine bestimmte Gerade des Büschels.

Die Gleichungen der $\left\{ \begin{array}{l} \text{„inneren"} \\ \text{„äusseren"} \end{array} \right\}$ Halbierungslinien des Winkels der beiden Geraden sind:

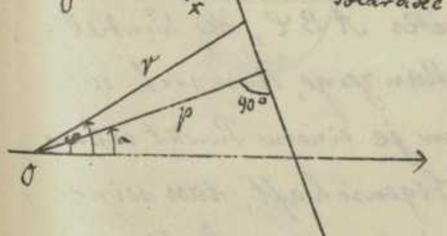
$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0.$$




11.) Polarkoordinaten.

$r$ = Radiusvektor ; $\varphi$ = Polarwinkel

$$\begin{array}{l} x = r \cos\varphi \\ y = r \sin\varphi \end{array} \;; \quad r = +\sqrt{x^2 + y^2} \;; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$




Gleichung einer Geraden in Polarkoordinaten $r, \varphi$:

$$r \cdot \cos(\varphi - \alpha) - p = 0.$$

---

## Aufgaben.

1.) Man untersuche ob die Punkte

a.) $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ y_1 = \frac{4}{3} \end{array} \right.$ b.) $\left\{ \begin{array}{l} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 \end{array} \right.$ c.) $\left\{ \begin{array}{l} x_3 = -3 \\ y_3 = 4 \end{array} \right.$ auf der Geraden: $2x + 3y - 6 = 0$ liegen.

2.) Durch die zwei Punkte $P_1 \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 4 \end{cases}$ und $P_2 \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = -1 \end{cases}$ ist eine Gerade gelegt. Man stelle ihre Gleichung auf, bestimme ihre Winkel mit den Axen und die Abschnitte auf den Axen. Ferner suche man die Normalform der Geraden und bestimme die Länge der Lote, die a.) vom Nullpunkt, b.) von $P_3 \begin{cases} x_3 = -2 \\ y_3 = 3 \end{cases}$, c.) von $P_4 \begin{cases} x_4 = 2 \\ y_4 = 1 \end{cases}$ auf die Gerade gefällt werden.

3.) Man suche die Gleichung der Geraden, die durch den Schnittpunkt von den beiden Geraden $2x + y - 4 = 0$ und $2x - 3y + 6 = 0$ geht und

a.) mit der x-Axe den Winkel $135^\circ$ bildet;

b.) auf der y-Axe die Strecke $+1$ abschneidet;

c.) durch den Punkt $x_1 = -2$; $y_1 = 3$ geht;

d.) zur Geraden $4x - y - 1 = 0$ parallel ist;

e.) auf dieser Geraden senkrecht steht;

f.) mit dieser Geraden den Winkel $60^\circ$ bildet;

g.) vom Punkt $x_1 = 1$; $y_1 = 1$ die senkrechte Entfernung 1 hat.

4.) Man zeige, dass die 3 Geraden

$$x + y = 1 \; ; \; y = 2x - 1 \; ; \; 5x - 4y - 2 = 0$$

sich in einem Punkt schneiden und bestimme die Koord. des Schnittpunktes.

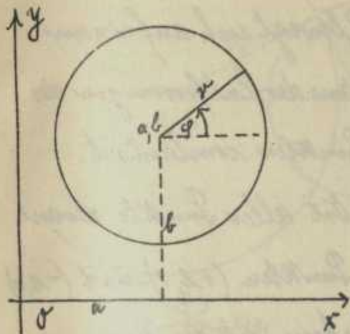
5.) Gegeben sind 3 Punkte $A \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases}$; $B \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = -2 \end{cases}$; $C \begin{cases} x_3 = -3 \\ y_3 = -7 \end{cases}$

Wie heissen die Gleichungen der Seiten des Dreiecks $ABC$, der Winkelhalbierenden und der Mittelsenkrechten? Man zeige, dass sich die Winkelhalbierenden und Mittelsenkrechten in je einem Punkt schneiden. Ferner suche man den Punkt von der Eigenschaft, dass seine Abstände von den Seiten $AB$, $BC$, $CA$ sich wie $1 : 2 : 3$ verhalten.

6.) Es soll der geometrische Ort eines Punktes bestimmt werden, für welchen die Differenz der Quadrate der Entfernungen von den beiden festen Punkten $A \begin{cases} x_1 = a \\ y_1 = 0 \end{cases}$ und $B \begin{cases} x_2 = -a \\ y_2 = 0 \end{cases}$ constant $= m^2$ ist.

29. XI. 09. **Höhere Mathematik I.** № 4.

## Der Kreis.

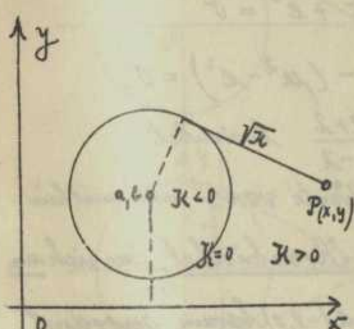



1.) Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt a, b und dem Radius r: $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$ oder in Parameterdarstellung: $x=a+r\cos\varphi$, $y=b+r\sin\varphi$.

Speziell: Kreis um den Anfangspunkt als Mittelpunkt

$$x^2+y^2=r^2$$

bezw. $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.




2.) Die allgemeine Gleichung 2. Grades in $x$ und $y$

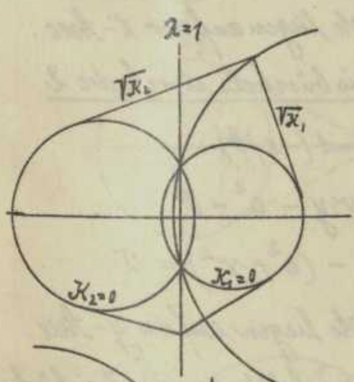
$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

stellt einen Kreis dar, wenn gleichzeitig die beiden Bedingungen erfüllt sind: $A=C$ und $B=0$.

3.) Unter Potenz eines Punktes $x\,y$ inbezug auf einen Kreis versteht man den Ausdruck:

$$K=(x-a)^2+(y-b)^2-r^2.$$

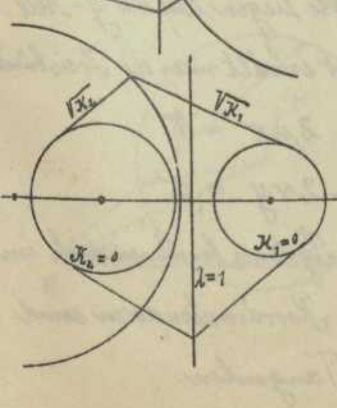
Die Potenz ist gleich dem Quadrat der Länge der Tangente von dem Punkt $x, y$ aus an den Kreis.



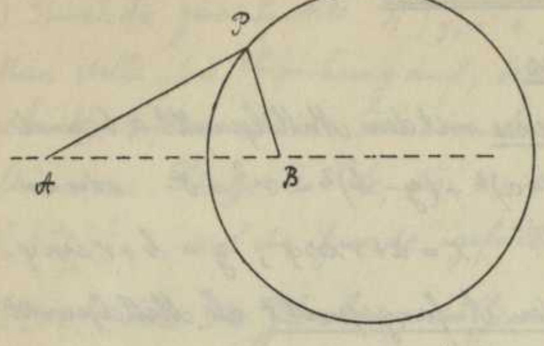

4.) Der geometrische Ort aller Punkte, deren Potenzen inbezug auf 2 feste Kreise

$$K_1 \equiv (x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2=0$$

$$K_2 \equiv (x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2^2=0$$

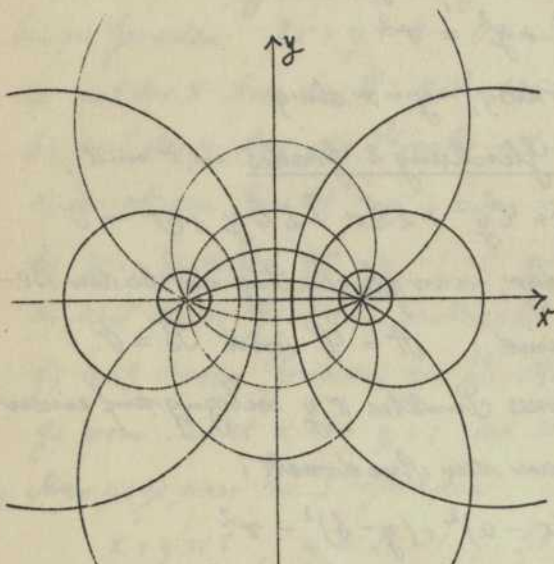



im Verhältnis $\lambda$ stehen, ist der Kreis $K_1-\lambda K_2=0$, der durch die Schnittpunkte von $K_1=0$ und $K_2=0$ hindurchgeht. Sind speziell für Punkte $x, y$ die Potenzen und mithin die Tangenten an beide Kreise gleich, also $\lambda=1$, so ist der Ort dieser Punkte




$K_1 - K_2 = 0$ eine Gerade, die <u>Chordale</u> der beiden Kreise.

Speziell: der Punkt P bewegt sich auf einem Kreise, wenn das Verhältnis der Entfernungen des Punktes von 2 festen Punkten constant ist.




5. a.) Der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände von 2 festen Punkten $(+e, 0)$ und $(-e, 0)$ das Verhältnis $\sqrt{\lambda}$ haben, ist der Kreis

$$x^2 + y^2 - 2\mu x + e^2 = 0$$

oder: $(x-\mu)^2 + y^2 - (\mu^2 - e^2) = 0$,

wo $\mu = e\,\frac{1+\lambda}{1-\lambda}$ bedeutet

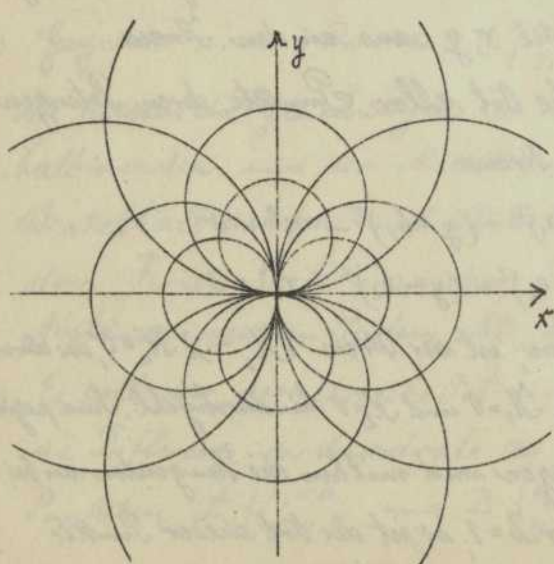
Für alle beliebigen Werte von $\lambda$ und mithin von $\mu$ erhält man das <u>Kreisbüschel</u>, das sich <u>um die 2 Punkte</u> $(+e,0)$ und $(-e,0)$ herum anordnet. Alle Kreismittelpunkte liegen auf der $x$-Axe.

b.) Gleichung des <u>Kreisbüschels durch die 2 festen Punkte</u> $(+e, 0)$ und $(-e, 0)$:

$$x^2 + y^2 - 2\nu y - e^2 = 0$$

oder: $x^2 + (y-\nu)^2 - (e^2 + \nu^2) = 0$

Alle Kreismittelpunkte liegen auf der $y$-Axe.

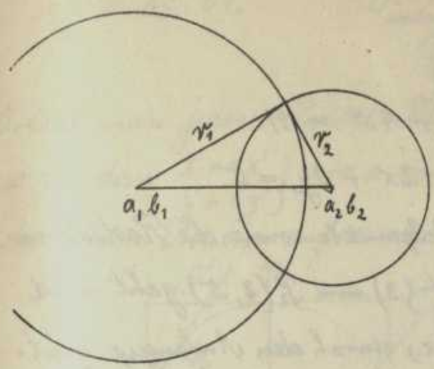



6.) Wird in 5.) $e = 0$, so erhält man die Kreisbüschel

a.) $x^2 + y^2 - 2\mu x = 0$

b.) $x^2 + y^2 - 2\nu y = 0$

Die Kreise eines jeden Systems berühren sich im Anfangspunkt und die Koordinatenaxen sind die gemeinsamen Tangenten.



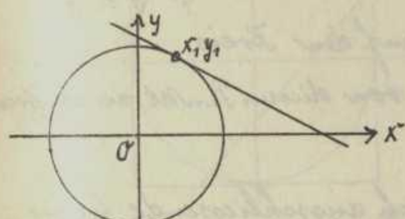

7.) Bedingung für das Senkrechtstehen zweier Kreise:

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2=0 \quad \text{und}$$

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2^2=0 \quad \text{ist:}$$

$$(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2=r_1^2+r_2^2$$

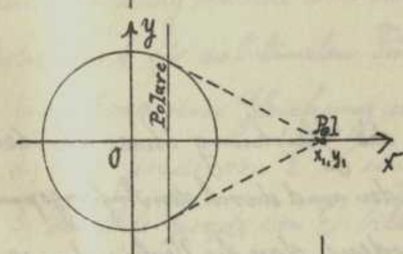
Diese Bedingung wird von den beiden Kreisbüscheln 5.) und 6.) erfüllt, so dass jeder Kreis des einen Büschels jeden Kreis des andern Büschels rechtwinkelig schneidet




8.) Gleichung der Tangente im Punkt $x_1, y_1$ an den Kreis

$$x^2+y^2-r^2=0 \quad \text{ist:}$$

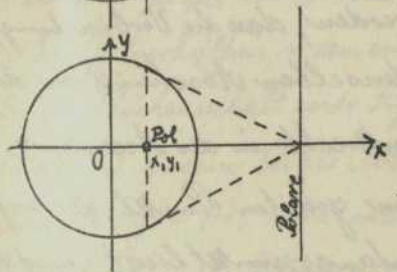
$$xx_1+yy_1-r^2=0.$$




Liegt der Punkt $x_1, y_1$ nicht auf dem Kreis, sondern beliebig in der Ebene, so stellt die Gleichung

$$xx_1+yy_1-r^2=0$$

die Polare des Punktes inbezug auf den Kreis dar.




Gleichung der Tangente an den Kreis

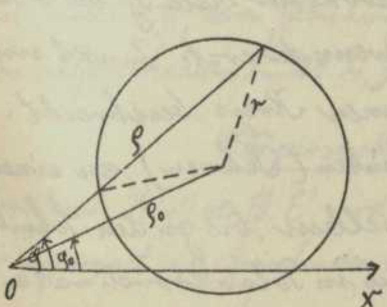
$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$$

im Punkte $x_1 y_1$ ist:

$$(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)-r^2=0$$

9.) Gleichung des Kreises in Polarkoordinaten:

$$\rho^2-2\rho\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho_0^2-r^2=0.$$




Speziell: Kreis durch den Anfangspunkt:

$$\rho-2\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)=0.$$

Kreis um den Anfangspunkt:

$$\rho=r.$$

## Aufgaben.

1.) Man bringe die Kreisgleichungen:

a.) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$ c.) $4x^2 + 4y^2 - 4x = 11$

b.) $2x^2 + 2y^2 + 3x - 4y = 0$ d.) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$.

auf die Form $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$ und gebe Lage der Mittelpunkte, sowie die Radien an.

2.) Man bestimme und zeichne einen Kreis, der durch die Punkte $P_1(-1, 3)$ und $P_2(2, 5)$ geht und a.) den Radius 4 hat; b.) die $x$-Axe berührt; c.) durch den Anfangsp. geht.

3.) Bestimme die Polare vom Punkt $P(1, 3)$ inbezug auf den Kreis $x^2 + y^2 - 4x - 3y = 8$, sowie die beiden Tangenten von diesem Punkt an den Kreis. Welches sind die Berührpunkte der Tangenten?

4.) Zeichne den Punkt, der inbezug auf drei a.) sich ausschliessende b.) in einander liegende Kreise gleiche Potenz hat.

5.) Welches sind die Schnittpunkte der Kreise $x^2 + y^2 + 6x - 7y = 8$ und $x^2 + y^2 = 5$? welches die Gleichung ihrer Chordale? Welcher Kreis geht durch die Schnittpunkte der beiden und durch den Anfangspunkt?

6.) Es soll der Ort eines Punktes $P$ so bestimmt werden, dass die Verbindungslinie desselben mit einem festen Punkt $A$ denselben Abschnitt in der $x$-Axe bilde, wie die in $P$ auf $PA$ errichtete Senkrechte in der Axe der $y$.

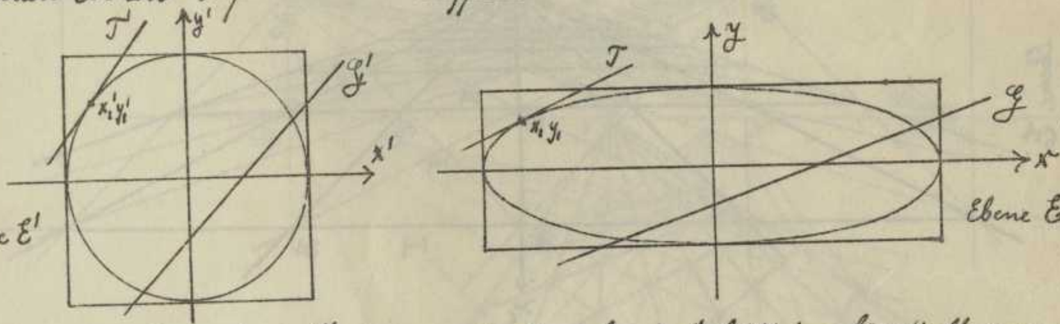
7.) Gegeben ist ein Punkt $\xi, \eta$. Man suche einen zweiten Punkt, der auf der Verbindungsgeraden des ersten mit dem Anfangspunkt liegt, und dessen Distanz vom Anfangspunkt gerade das Reciproke der Distanz des ersten vom Anfangspunkt ist. Man beweise, dass, wenn der erste Punkt sich auf einem Kreise bewegt, auch der zweite einen Kreis beschreibt.

8.) Zieht man durch den Punkt $P$ beliebige Sekanten (oder Sehnen) an einen Kreis, so ist das Produkt der Abschnitte derselben bis zu den Schnittpunkten mit dem Kreise constant. Beweis in Polarkoordinaten!

6. XII. 09. **Höhere Mathematik I.** № 5.

## Die affine Abbildung.

Ordnet man jedem Punkt $P'(x', y')$ einer Ebene $E'$ einen Punkt $P(x, y)$ einer Ebene $E$ so zu, dass $\left.\begin{array}{l} x = ax' \\ y = by' \end{array}\right\}$, wo $a$ und $b$ gegebene Konstanten sind, so heisst diese Abbildung der beiden Ebenen auf einander affin.




Diese Abbildung bedeutet eine Veränderung des Masstabes im Verhältnis $a$ für die Abscissen und im Verhältnis $b$ für die Ordinaten. Für $a = b$ wird die Abbildung ähnlich. Bei der affinen Abbildung wird

1.) der Grad einer Gleichung in $x$ und $y$ nicht geändert; somit

2.) eine Gerade von $E'$ in eine Gerade von $E$ abgebildet

3.) Parallele Gerade von $E'$ bilden sich wieder als Parallelen in $E$ ab

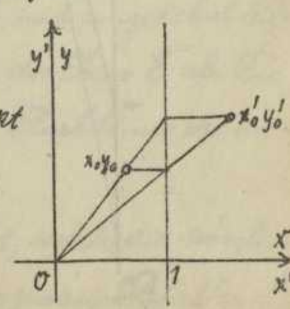
4.) Das Teilverhältnis, in dem ein Punkt eine Strecke teilt, bleibt erhalten

5.) Der Flächeninhalt einer Figur ist im Bilde $ab$ mal so gross wie im Original

6.) Winkel ändern bei der Abbildung im allgemeinen ihre Grösse.

Der Kreis $x'^2 + y'^2 - 1 = 0$ wird in die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ abgebildet. Der Mittelpunkt der Ellipse liegt im Anfangspunkt, die Ellipsenaxen sind $2a$ und $2b$. Die Kreistangente $T'$ im Punkt $x_1', y_1'$, deren Gleichung ist: $x'x_1' + y'y_1' - 1 = 0$, geht über in die Ellipsentangente $T$ im entsprechenden Punkt $x_1, y_1$, deren Gleichung ist: $\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} - 1 = 0$.

## Die perspektivische Abbildung.




Dem Punkte $P(x'y')$ der Eb. $E'$ wird der Punkt $P(xy)$ der Ebene $E$ als Bildpunkt so zugeordnet, dass zwischen den Koord. die Beziehungen bestehen:

$$x = \frac{1}{x'} \qquad x' = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{y'}{x'} \qquad y' = \frac{y}{x}.$$

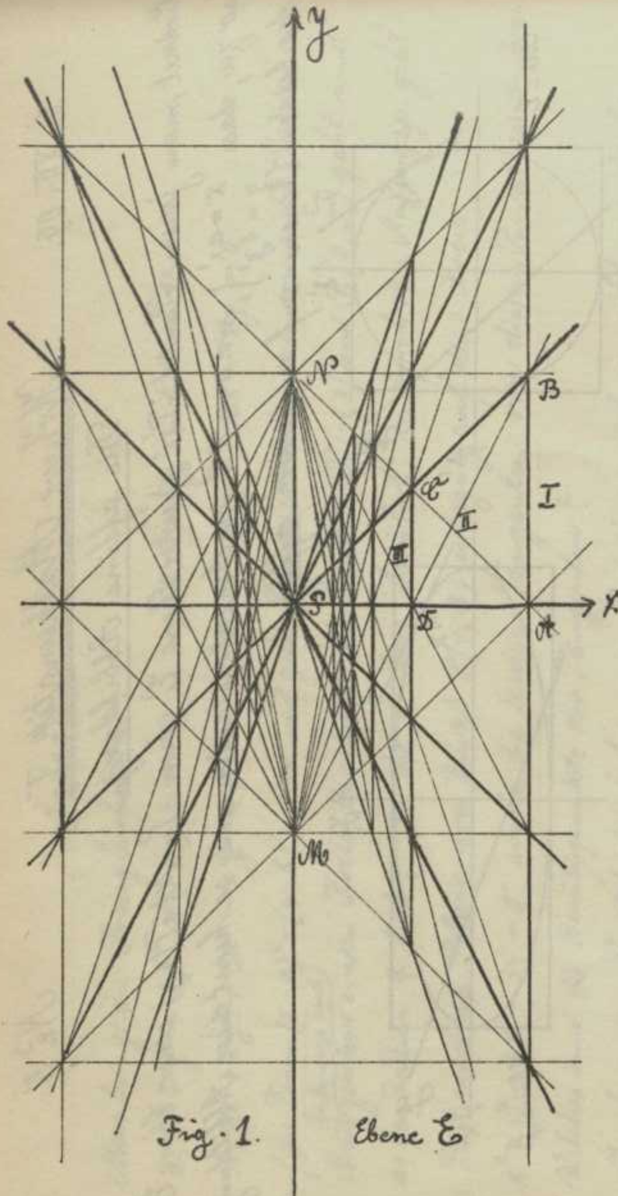



Fig. 1. Ebene E

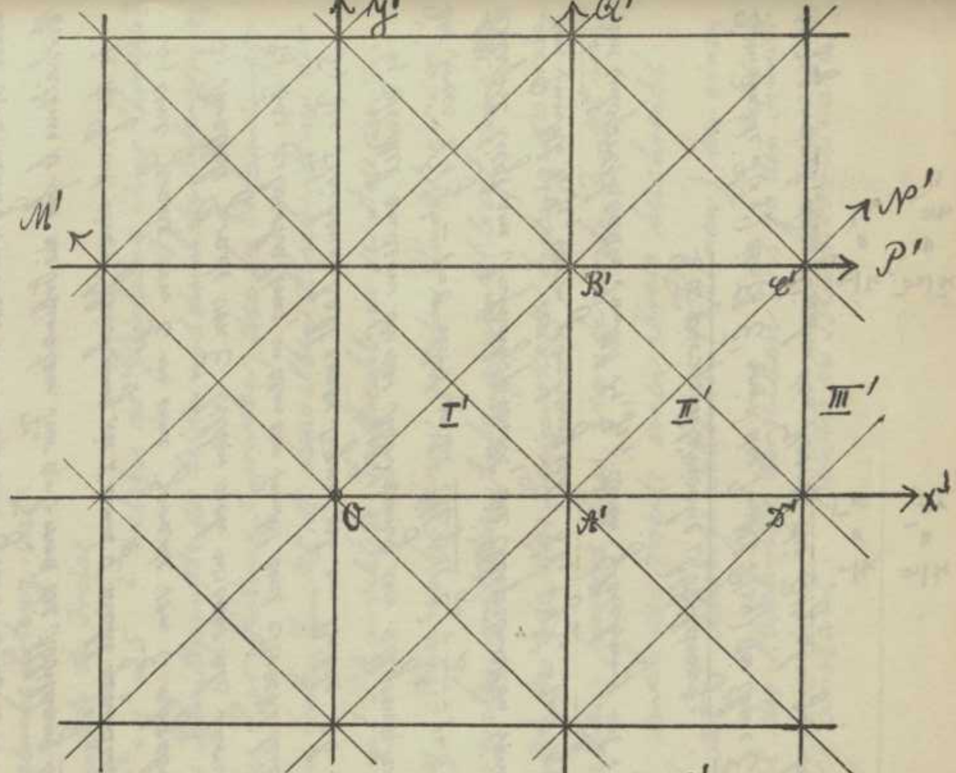



Fig. 2. Ebene E'.

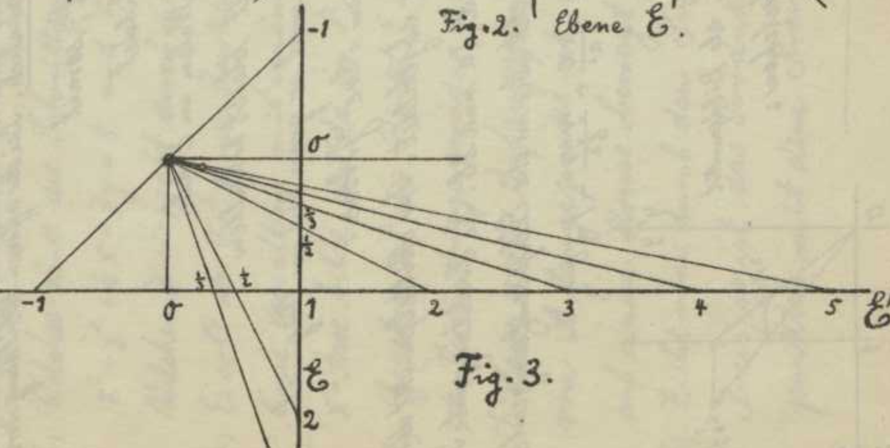



Fig. 3.

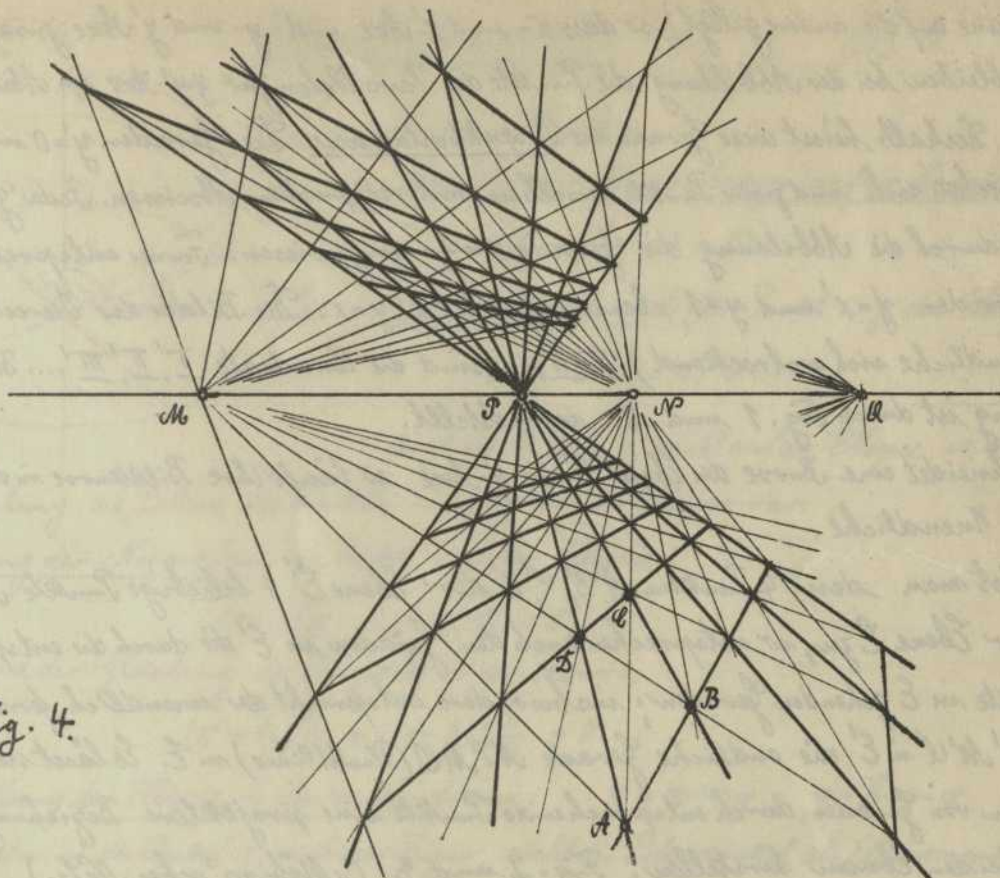



Fig. 4.

Die durch diese Gleichungen bewirkte Abbildung der Ebene $E'$ auf die Ebene $E$, die ebenso die Abbildung von $E$ auf $E'$ darstellt, heisst „perspektivische Abbildung". Dabei wird bei der affinen Abbildung der Grad einer Gleichung in $x$ und $y$ nicht geändert, also gehen Gerade in Gerade über. Parallele Gerade verwandeln sich in ein Büschel von Geraden, dessen Mittelpunkt (Schnittpunkt aller Geraden des Büschels) auf der $y$-Axe liegt. Dieser Punkt ist der Fluchtpunkt der Richtung der parallelen Geraden. Alle Punkte der $y'$-Axe ($x'=0$) bilden sich in Punkte $\left.\begin{matrix} x=\infty \\ y=\infty \end{matrix}\right\}$ der Ebene $E$ ab, und umgekehrt bilden sich alle Punkte der $y$-Axe in die unendlich fernen Punkte der Ebene $E'$ ab. Die Bildgerade der unendlich fernen Gerade der einen Ebene ist die Fluchtlinie der andern Ebene.

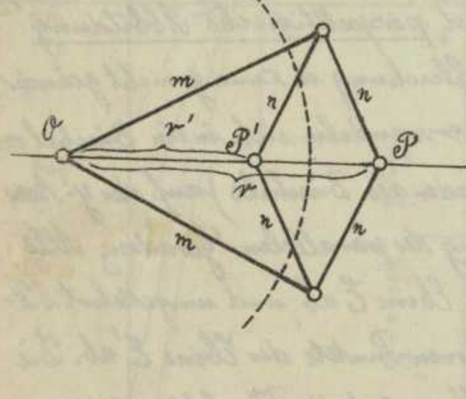
Die Punkte der Geraden $x'=1$ entsprechen den Punkten der Geraden $x=1$, welche die nämliche Ordinate haben. Denkt man sich die Original- und die Bildebene zusammenfallend, (die eine auf die andere gelegt), so dass $x$- und $x'$-Axe und $y$- und $y'$-Axe zusammenfallen, so bleiben bei der Abbildung die Punkte der Parallelen zur $y$-$y'$-Axe im Abstand 1 erhalten. Deshalb heisst diese Gerade die <u>Perspektivitätsaxe.</u> Die Geraden $y'=0$ und $y=0$ entsprechen sich und zwar Punkte derselben mit reciproken Abscissen. Jeder Geraden $x'=a$ ist durch die Abbildung die Gerade $x=\frac{1}{a}$ zugewiesen. Ferner entsprechen sich die Geraden $y=x'$ und $y=1$, ebenso $y'=1$ und $y=x$. Die Bilder der Vierecke $\underline{I}$ (ins Unendliche sich erstreckend), $\underline{II}$, $\underline{III}$,... sind die Quadrate $\underline{I}'$, $\underline{II}'$, $\underline{III}'$.... Diese Abbildung ist durch Fig. 1 und 2. dargestellt.

Schneidet eine Kurve der Ebene $E'$ die $y'$-Axe, so läuft ihre Bildkurve in der Ebene $E$ ins Unendliche.

Weist man den 4 Punkten $A', B', C', D'$ der Ebene $E'$ 4 beliebige Punkte $A, B, C, D$ einer Ebene $E$ zu, so entsprechen auch den Geraden in $E'$ die durch die entsprechenden Punkte in $E$ gehenden Geraden; insbesondere entspricht der unendlich fernen Geraden $N'P'M'Q'$ in $E'$ die endliche Gerade $NPMQ$ (Fluchtlinie) in $E$. Es lässt sich so durch Ziehen von Geraden durch entsprechende Punkte eine projektive Beziehung zwischen den beiden Ebenen herstellen. Fig. 2 und 4. (<u>Möbius'sches Netz.</u>)

---

## <u>Aufgaben.</u>




1.) Man zeige, dass zwischen den in nebenstehender Figur vorkommenden Strecken die Beziehung besteht:

$$r \cdot r' = (m^2 - n^2). \text{ (Poncelet'scher Inversor.)}$$

2.) In Figur 2.) ($x', y'$-Ebene) seien folgende Kreise gezeichnet:

a.) $x'^2 - 3x' + y'^2 + 2 = 0$; b.) $x'^2 - 3x' + y'^2 - y' + 2 = 0$;

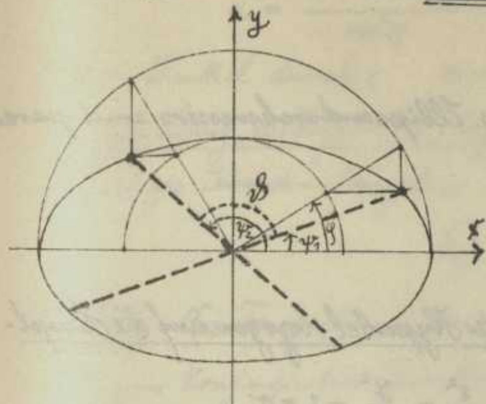
c.) $x'^2 + y'^2 - 1 = 0$; d.) $x'^2 + y'^2 - 4 = 0$;

e.) $x'^2 - x' + y'^2 = 0$; f.) $x'^2 - 2x' + y'^2 = 0$.

Welches sind ihre Bilder in Figur 1.) und 4.) ?

---

13. XII. 09. **Höhere Mathematik I.** № 6.




## I.) Die Ellipse.

1.) Gleichung der Ellipse bezogen auf die Hauptaxen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

2.) Gleichung der Tangente im Punkt $x_1, y_1$ der Ellipse:

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} - 1 = 0.$$

Liegt der Punkt $x_1, y_1$ nicht auf der Ellipse, so stellt diese Gleichung die „Polare" des Punktes inbezug auf die Ellipse dar.

3.) Gleichung der Normalen im Punkt $x_1, y_1$ der Ellipse:

$$(x - x_1)\frac{y_1}{b^2} - (y - y_1)\frac{x_1}{a^2} = 0,$$

entsprechend der Gleichung der Tangente in der Form:

$$(x - x_1)\frac{x_1}{a^2} + (y - y_1)\frac{y_1}{b^2} = 0.$$

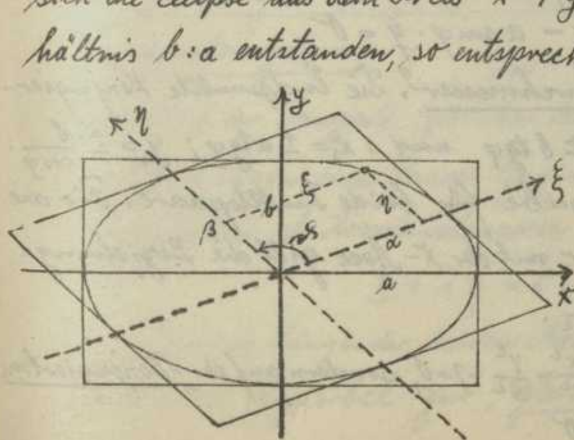
4.) Darstellung der Ellipse in Parameterform: $x = a \cdot \cos\varphi$ ; $y = b \cdot \sin\varphi$.

[Der Parameter ist der Winkel $\varphi$ in obiger Figur, nicht der Polarwinkel des Ellipsenpunktes].

5.) Zwei Durchmesser der Ellipse mit den Gleichungen:

$$b\sin\varphi \cdot x - a\cos\varphi \cdot y = 0 \quad \text{und:} \quad b\cos\varphi \cdot x + a\sin\varphi \cdot y = 0$$

heissen zwei zu einander „Konjugierte Durchmesser". Der Winkel $\varphi$ ist wieder der Winkel in obiger Figur und für beide Durchmesser als derselbe anzunehmen. Denkt man sich die Ellipse aus dem Kreis $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ durch Verkürzung der Ordinaten im Verhältnis $b : a$ entstanden, so entsprechen die Endpunkte zweier konjugierter Durchmesser den Endpunkten zweier senkrechter Kreisdurchmesser, die mit der x-Axe die Winkel $\varphi$ und $\varphi + \frac{\pi}{2}$ bilden. Für die Winkel $\psi_1, \psi_2$ gilt: $\operatorname{tg}\psi_1 \cdot \operatorname{tg}\psi_2 = -\frac{b^2}{a^2}$




6.) Die Längen $2\alpha$ und $2\beta$ dieser konjugierten Durchmesser sind gegeben durch:

$$\alpha^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi \quad \text{und} \quad \beta^2 = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi.$$

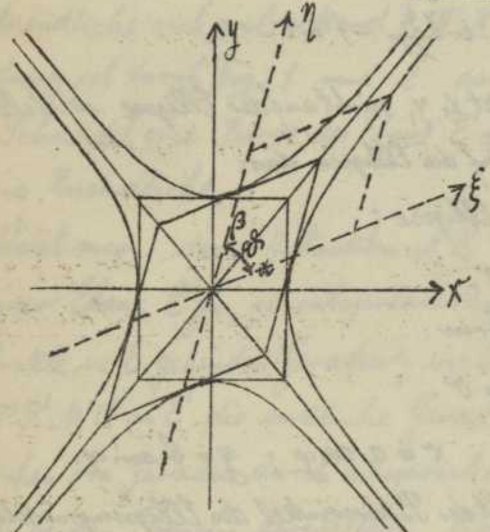
ihr Winkel durch: $\alpha \cdot \beta \cdot \sin\vartheta = a \cdot b$.

7.) <u>Gleichung der Ellipse bezogen auf ein Paar konjugierter Durchmesser</u> (schiefwinkliges Koordinatensystem $\xi, \eta$):

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0.$$

8.) <u>Satz</u>: Die Tangenten in den Endpunkten eines Ellipsendurchmessers sind parallel zum konjugierten Durchmesser.

## II. Die Hyperbel.




1.) <u>Gleichung der Hyperbel bezogen auf die Hauptaxen:</u>

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

2.) <u>Gleichung der Tangente</u> im Punkt $x_1 y_1$ der Hyperbel:

$$\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} - 1 = 0$$

Liegt der Punkt $x_1 y_1$ nicht auf der Hyperbel, so stellt diese Gleichung die „Polare" des Punktes inbezug auf die Hyperbel dar.

3.) <u>Gleichung der Normalen</u> im Punkt $x_1, y_1$:

$$(x - x_1)\frac{y_1}{b^2} + (y - y_1)\frac{x_1}{a^2} = 0$$

entsprechend der Gleichung der Tangente in der Form: $(x - x_1)\frac{x_1}{a^2} - (y - y_1)\frac{y_1}{b^2} = 0.$

4.) <u>Darstellung der Hyperbel in Parameterform</u>: $x = \frac{a}{\cos\varphi}$ ; $y = b \operatorname{tg}\varphi.$

5.) Zwei Durchmesser der Hyperbel mit den Gleichungen:

$$b \sin\varphi \cdot x - a y = 0 \qquad \text{und} \qquad b x - a \sin\varphi \cdot y = 0$$

heissen zwei zu einander „<u>konjugierte Durchmesser</u>". Die Endpunkte konjugierter Durchmesser sind: $x_1 = \pm \frac{a}{\cos\varphi}$ ; $y_1 = \pm b \operatorname{tg}\varphi$ und: $x_2 = \pm a \operatorname{tg}\varphi$ ; $y_2 = \pm \frac{b}{\cos\varphi}$. $\varphi$ ist der Winkel von Formel 4.) und derselbe für beide Punktepaare. Für die Winkel $\psi_1, \psi_2$ der konjugierten Durchmesser mit der $x$-Axe gilt die Beziehung:

$$\operatorname{tg}\psi_1 \cdot \operatorname{tg}\psi_2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Die Punkte $x_2, y_2$ liegen nicht auf der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, sondern auf der „<u>konjugierten Hyperbel</u>":

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

6.) <u>Die Längen $2\alpha$ und $2\beta$ dieser konjugierten Durchmesser</u> sind gegeben durch

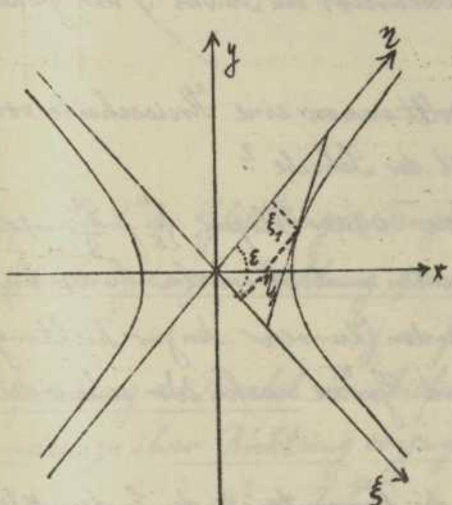
$$\alpha^2 = \frac{a^2+b^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\ ; \quad \beta^2 = \frac{b^2+a^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi},$$

ihr Winkel durch: $\alpha\cdot\beta\sin\vartheta = a\cdot b$.

7.) <u>Gleichung der Hyperbel, bezogen auf ein Paar konjugierter Durchmesser</u> (schiefwinkliges Koordinatensystem $\xi, \eta$):

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$$

8.) <u>Satz</u>: Die Tangenten in den Endpunkten eines Hyperbeldurchmessers sind parallel zum konjugierten Durchmesser.




9.) <u>Gleichungen der „Asymptoten" der Hyperbel</u>:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

<u>Asymptotenwinkel $\varepsilon$</u>: $\sin\varepsilon = \frac{2ab}{a^2+b^2}$, oder $\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{b}{a}$

10.) <u>Gleichung der Hyperbel, bezogen auf die Asymptoten</u> als (schiefwinklige) Koordinatenaxen:

$$\xi\cdot\eta = \frac{a^2+b^2}{4}; \quad \text{oder auch: } \xi\eta\sin\varepsilon = \frac{ab}{2}.$$

Hieraus folgt: a.) das durch den Punkt $\xi, \eta$ und die Asymptoten gebildete Parallelogramm hat constanten Inhalt ($= \frac{ab}{2}$); b.) das durch die Tangente im Punkt $\xi, \eta$ und die Asymptoten gebildete Dreieck hat constanten Inhalt ($= a\cdot b$).

11.) <u>Gleichung der Tangente an die Hyperbel</u> im Punkt $\xi_1, \eta_1$ <u>inbezug auf dasselbe Koordinatensystem</u>:

$$\xi\eta_1 + \eta\xi_1 = \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Das Stück der Tangente zwischen den Asymptoten wird im Berührpunkt $\xi_1, \eta_1$ halbiert.

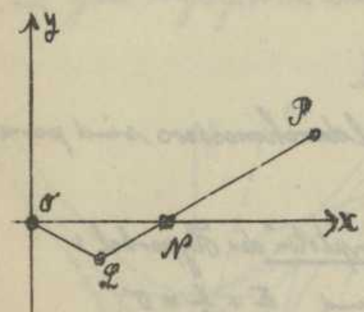
12.) Gleichungen eines Paares zu einander <u>konjugierter Durchmesser</u>, bezogen auf die Asymptoten als Koordinatenaxen:

$$\xi + \lambda\eta = 0 \quad \text{und} \quad \xi - \lambda\eta = 0$$

13.) Sind die Längen der beiden Axen gleich, also $a = b$, so wird die Ellipse zum Kreise, die Hyperbel zur „<u>gleichseitigen Hyperbel</u>": $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0$. Für

diese spezielle Hyperbel stehen die Asymptoten aufeinander senkrecht; auf diese jetzt rechtwinkligen Axen bezogen lautet die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel:
$$\xi \cdot \eta = \frac{a^2}{2}.$$

## Aufgaben.




1.) Die constante Strecke $OL$ ist um $O$ drehbar. $OL$ ist in $L$ drehbar mit $LP$ verbunden und der Punkt $N$ von $LP$, dessen Entfernung von $L$ immer $= OL$ ist, ist auf der $x$-Axe geführt. Was für eine Kurve beschreibt ein Punkt $P$ der Geraden $LP$?

2.) Auf der Peripherie eines Kreises vom Radius $r$ rollt innen eine Kreisscheibe vom Radius $\frac{r}{2}$. Welche Kurve beschreibt irgend ein Punkt der Scheibe?

3.) Man bestimme die Hauptaxen und ev. Asymptoten a.) der Ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$ b.) der Hyperbel $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} - 2 = 0$, ferner die Tangenten und Normalen beider im Punkt $x_1 = 4$, $y_1 = ?$ Ferner bestimme man bei beiden Kurven den zur Richtung $y = x$ konjugierten Durchmesser der Gleichung und Grösse nach. Wo schneidet dieser im Falle b.) die Hyperbel?

4.) Welches ist der Ort der Punkte, in denen sich die Tangenten in den Endpunkten je zweier konjugierter Durchmesser schneiden?

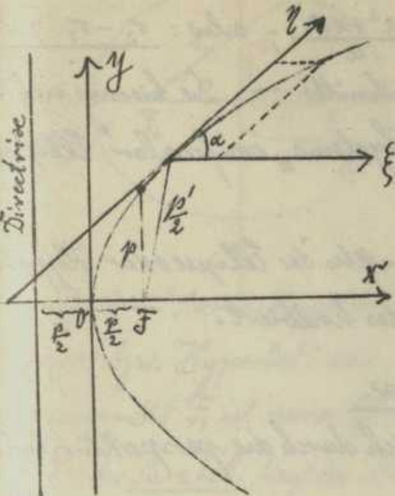
5.) Man bestimme das Paar von gleichlangen konjugierten Durchmessern einer Ellipse, ferner ihre Länge und Winkel mit der $x$-Axe. Welchem Parameterwert $\varphi$ entsprechen dieselben?

6.) Was stellt die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = a^2$ dar, wenn man $x = \xi$, $y = \eta$ als schiefwinklige Koordinaten deutet?

7.) Man beweise, dass der Abstand des Ellipsenmittelpunktes von der Tangente, die den $\sphericalangle \alpha$ mit der $x$-Axe bildet, gleich $\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}$ ist. Mit Hilfe hiervon ermittle man den Ort aller Punkte, von denen aus sich ein Paar aufeinander senkrechter Tangenten an die Ellipse ziehen lässt.

20. XII. 09 **Höhere Mathematik I.** № 7.

## I. Die Parabel.




1.) Gleichung der Parabel bezogen auf die Hauptaxe und die Scheiteltangente:

$$y^2 = 2px.$$

2.) Gleichung der Tangente im Punkt $x_1 y_1$ der Parabel.

$$yy_1 = p(x+x_1)$$

Liegt der Punkt $x_1 y_1$ nicht auf der Parabel, so stellt diese Gleichung die „Polare" des Punktes inbezug auf die Parabel dar.

3.) Gleichung der Normalen im Punkt $x_1 y_1$ der Parabel

$$(x-x_1)y_1 + (y-y_1)p = 0,$$

entsprechend der Gleichung der Tangente: $(x-x_1)p - (y-y_1)y_1 = 0$

4.) Gleichung des zur Richtung $y = x\cdot tg\alpha$ „conjugierten Durchmessers" der Parabel:

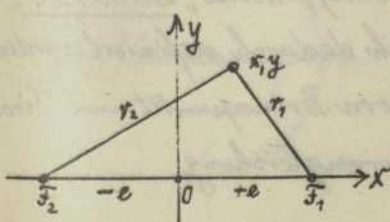
$$y = p\cdot \operatorname{cotg}\alpha \quad (\text{parallel zur } x\text{-Axe}).$$

5.) Gleichung der Parabel in schiefwinkeligen Koordinaten, bezogen auf eine Tangente und den zu ihrer Richtung conjugierten Durchmesser:

$$\eta^2 = 2\frac{p}{\sin^2\alpha}\cdot\xi \qquad \text{oder:} \qquad \eta^2 = 2p'\xi.$$

wo $p' = \frac{p}{\sin^2\alpha}$ die doppelte Entfernung des Berührpunktes der Tangente vom Brennpunkt F ist. [cf. III. 4].

## II. Brennpunkt.




1.) Eine Kurve von der Eigenschaft, dass entweder a.) die Summe; oder b.) die Differenz der Entfernungen aller Punkte von 2 festen Punkten $F_1(+e,0)$ und $F_2(-e,0)$ constant ist, dass also: a.) $r_2 + r_1 = 2a$; b.) $r_2 - r_1 = 2a$ ist, stellt sich dar durch die Gleichung: $(a^2-e^2)x^2 + a^2y^2 - a^2(a^2-e^2) = 0.$ Dabei sind 2 Fälle zu unterscheiden: a.) $a > e$ ..... $e^2 = a^2 - b^2$ ..... Ellipse: $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$

b.) $a < e$ ..... $e^2 = a^2 + b^2$ ....... Hyperbel: $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$

Für jeden Punkt $x_1, y_1$ der Ellipse ist: $r_1 = \frac{a^2 - ex_1}{a}$, $r_2 = \frac{a^2 + ex_1}{a}$; also: $r_2 + r_1 = 2a$.

" " " " Hyperbel ": $r_1 = -\frac{a^2 - ex_1}{a}$, $r_2 = \frac{a^2 + ex_1}{a}$; also: $r_2 - r_1 = 2a$.

Die Punkte $F_1, F_2$ heissen „Brennpunkte" des Kegelschnitts. — Die hieraus sich ergebende Konstruktion eines Kegelschnitts, bezw. eines Systems „confocaler" Ellipsen und Hyperbeln siehe Beiblatt Seite 3.

2.) Satz. Die Winkel der beiden Brennstrahlen eines Punktes der Ellipse oder Hyperbel werden durch die Tangente und Normale dieses Punktes halbiert.

## III. Brennpunkt und Directrise.

1.) Die Kreise $(x'-1)^2 + y'^2 = \lambda^2$ der Ebene E' bilden sich durch die perspektivische Transformation (cf. Blatt 5) in die Kurven

$$(1-x)^2 + y^2 = \lambda^2 x^2 \quad \text{oder umgeformt:} \quad \frac{\left(x - \frac{1}{1-\lambda^2}\right)^2}{\frac{\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}} = 1$$

der Ebene E ab.

Dabei sind 3 Fälle zu unterscheiden:

I.) $\lambda < 1$ : Ellipse

II.) $\lambda = 1$ : Parabel

III.) $\lambda > 1$ : Hyperbel.

Der Kreismittelpunkt bildet sich in den Punkt $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ ab. Dieser Punkt ist ein Brennpunkt bei der Ellipse und Hyperbel, der Brennpunkt der Parabel. Die Gerade, in welche sich die $\infty$ ferne Gerade der Ebene E' abbildet (die y-Axe), heisst „Directrise".

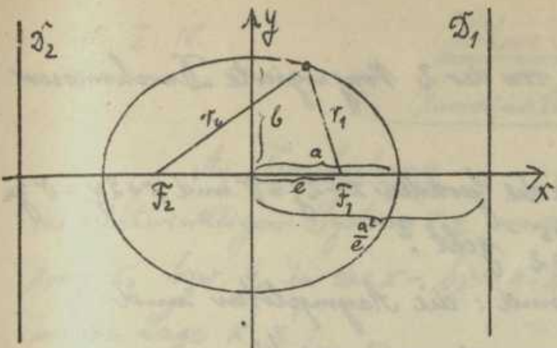
2.) Die Kurven Ellipse, Parabel, Hyperbel können auch dadurch definiert werden, dass das Verhältnis der Abstände jedes Kurvenpunktes von Brennpunkt und Directrise gleich $\lambda$ ist. Denn die hieraus sich ergebende Kurvengleichung

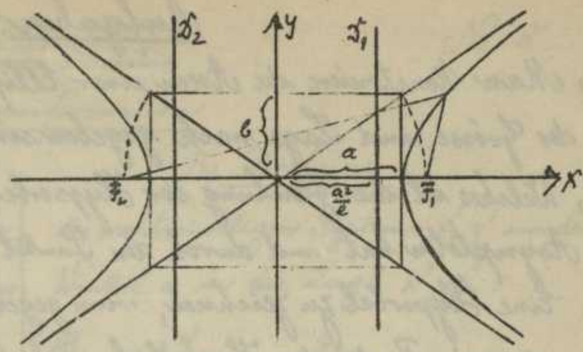
$$(x-1)^2 + y^2 = \lambda^2 x^2$$

ist mit der obigen identisch. (cf. Figur des Beiblattes Seite 2).

3.) Die Brennpunkte der Ellipse liegen auf der grossen Axe im Abstand $\pm e = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$ vom Mittelpunkt; die der Hyperbel auf der „reellen" Axe in der Entfernung $\pm e = \pm\sqrt{a^2+b^2}$ vom Mittelpunkt.

Zieht man im Abstand $\pm \frac{a^2}{e}$ die Parallelen zur kleinen Axe der Ellipse (bezw. zur



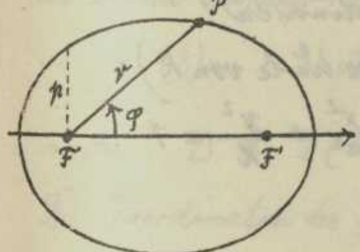

„imaginären" Axe der Hyperbel), so stellt jede dieser Parallelen eine Directrise $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ der Ellipse (bzw. Hyperbel) dar. Der Abstand eines beliebigen Ellipsen-(Hyperbel-)punktes vom Brennpunkt $F_1$ ist dann $\frac{e}{a}$ mal so gross als der Abstand des Punktes von der Geraden $\mathfrak{D}_1$.

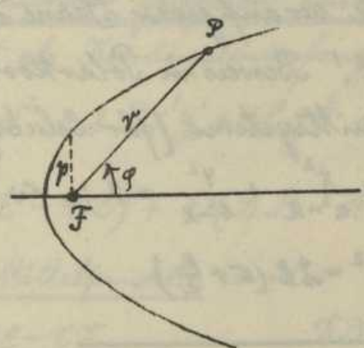
4.) Bei der Parabel liegt der Brennpunkt $F$ (Fig. der ersten Seite) auf der Axe der Parabel im Abstand $\frac{p}{2}$ von der Scheiteltangente, die Directrise im Abstand $-\frac{p}{2}$ von der Scheiteltangente parallel zu ihr.

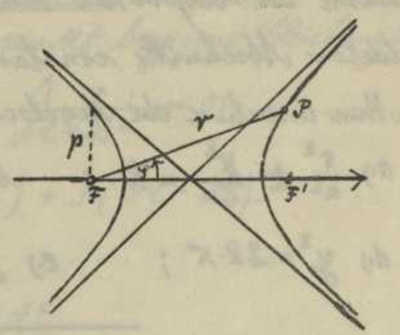
Satz. Die Winkel zwischen dem Brennstrahl eines Parabelpunktes und der durch ihn zur Axenrichtung gezogenen Parallelen werden durch die Tangente und Normale halbiert.

## IV. Kegelschnitte in Polarkoordinaten.

bezogen auf einen (bezw. den) Brennpunkt als Pol und die grosse (reelle) Axe als Anfangsrichtung:




Gleichung der Ellipse:

$$r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$$

$p = \frac{b^2}{a}$; $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} < 1$.

Gleichung der Parabel:

$$r = \frac{p}{1-\cos\varphi}$$

Gleichung der Hyperbel:

$$r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$$

$p = \frac{b^2}{a}$; $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} > 1$.

# Aufgaben.

1.) Man konstruiere die Axen einer Ellipse, von der 2 konjugierte Durchmesser der Grösse und Lage nach gegeben sind.

2.) Welches ist die Gleichung der Hyperbel, die die Geraden $x-2y=0$ und $x+2y=0$ zu Asymptoten hat und durch den Punkt $\begin{matrix}x=5\\y=2\end{matrix}$ geht?

3.) Eine Hyperbel zu zeichnen, wenn gegeben sind: die Asymptoten und
   a.) ein Punkt der Hyperbel (Zeichnung weiterer Punkte!)
   b.) eine Tangente (Zeichnung weiterer Tangenten!)

4.) Die Fusspunkte der Senkrechten von den Brennpunkten einer Ellipse (bzw. Hyperbel) auf die Tangenten liegen auf dem Kreis über der grossen (bzw. reellen) Axe als Durchmesser. Bei der Parabel liegen diese Fusspunkte auf der Scheiteltangente. Beweis!

5.) Zieht man von einem Punkt der Directrise einer Parabel die beiden Tangenten an dieselbe, so stehen diese aufeinander senkrecht. Beweis!

6.) Von einer Parabel ist Directrise und Brennpunkt gegeben. Man bestimme die Tangenten von einem Punkt an die Parabel und ihre Berührpunkte, ohne die Parabel zu zeichnen.

7.) Zieht man durch den Brennpunkt eines Kegelschnitts Sehnen, so ist die Summe der reciproken Werte der auf jeder Sehne durch den Brennpunkt gebildeten Abschnitte constant! Beweis in Polarkoordinaten!

8.) Man discutiere die Kegelschnittsysteme (für beliebige Werte von $k$):

a.) $\dfrac{x^2}{a^2} \pm \dfrac{y^2}{b^2} = k$; b.) $\dfrac{x^2}{a^2-k} + \dfrac{y^2}{b^2-k} = 1$; c.) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{k} = 1$

d.) $y^2 = 2k \cdot x$; e.) $y^2 = 2k\left(x + \dfrac{k}{2}\right)$.

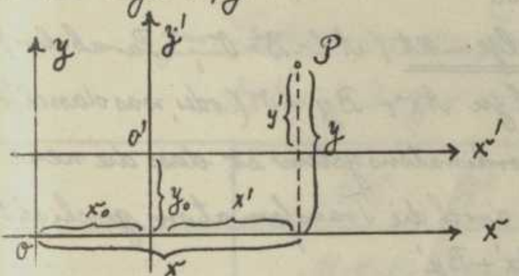
---

10. I. 10. **Höhere Mathematik I.** № 8.

## I.) Koordinatentransformation.

### A.) Verschiebung

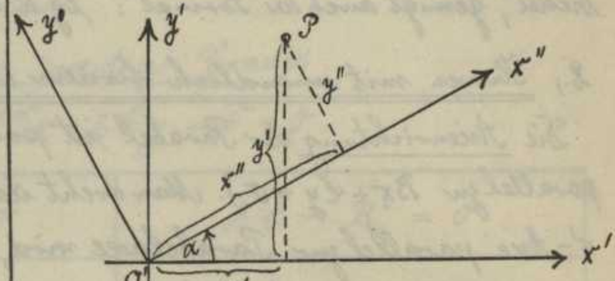
des rechtwinkligen Systems $x, y$ um den Betrag $x_0$ bzw. $y_0$ in der $x$- bzw. $y$-Richtung in die Lage $x', y'$:



$$x = x' + x_0 \qquad x' = x - x_0$$
$$y = y' + y_0 \qquad y' = y - y_0$$

### B.) Drehung

des rechtwinkligen Systems $x', y'$ um den Winkel $\alpha$ in die Lage $x'', y''$:



$$x' = x''\cos\alpha - y''\sin\alpha \qquad x'' = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha$$
$$y' = x''\sin\alpha + y''\cos\alpha \qquad y'' = -x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

## II. Diskussion der allgemeinen Kurve zweiten Grades.

$$(1)\ldots\ \mathcal{A}x^2 + 2\mathcal{B}xy + \mathcal{C}y^2 + 2\mathcal{D}x + 2\mathcal{E}y + \mathcal{F} = 0$$

1.) Kurven mit im Endlichen gelegenen Mittelpunkt ($\mathcal{AC} - \mathcal{B}^2 \gtrless 0$).

Die auf den Mittelpunkt als Koordinatenanfangspunkt bezogene Gleichung lautet:

$$(2)\ldots\ldots\ \mathcal{A}x'^2 + 2\mathcal{B}x'y' + \mathcal{C}y'^2 + \frac{\Delta}{\mathcal{AC}-\mathcal{B}^2} = 0,$$

wobei $\Delta = \mathcal{D}(\mathcal{BE} - \mathcal{CD}) + \mathcal{E}(\mathcal{DB} - \mathcal{AE}) + \mathcal{F}(\mathcal{AC} - \mathcal{B}^2)$.

Die Koordinaten des Mittelpunktes sind:

$$x_0 = \frac{\mathcal{BE} - \mathcal{CD}}{\mathcal{AC} - \mathcal{B}^2}\ ; \qquad y_0 = \frac{\mathcal{DB} - \mathcal{AE}}{\mathcal{AC} - \mathcal{B}^2}$$

Die Richtungen $\alpha$ und $90° + \alpha$ der Hauptaxen der Kurve gegen die $x$-Axe sind gegeben durch: $\quad \operatorname{tang} 2\alpha = \dfrac{2\mathcal{B}}{\mathcal{A} - \mathcal{C}}$

Die Asymptotenrichtungen $\varphi_1$ und $\varphi_2$ bestimmen sich aus:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0 \quad \text{zu:} \quad tg\,\varphi = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{C}.$$

<u>Die Gleichung der Kurve bezogen auf die Hauptaxen</u> ist:

$$(3) \ldots\ldots \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \frac{\Delta}{AC - B^2} = 0,$$

wo $\lambda_1, \lambda_2$ die Wurzeln der Gleichung: $\lambda^2 - (A+C)\lambda + AC - B^2 = 0$ sind.
Der zu $\lambda_1$ gehörige Winkel $\alpha$, also der Winkel, den die $x''$-Axe gegen die $x$-Axe bildet, genügt auch der Formel: $tg\,\alpha = \frac{\lambda_1 - A}{B}$.

2.) <u>Kurven mit unendlich fernem Mittelpunkt</u> ($AC - B^2 = 0$; Parabeln).

Die <u>Axenrichtung</u> der Parabel ist parallel zu $Ax + By = 0$ (oder, was dasselbe ist, parallel zu $Bx + Cy = 0$). Man dreht das Koordinatensystem so, dass die neue $x'$-Axe parallel zur Parabelaxe wird, was durch die Transformation geschieht:

$$x = \frac{Bx' + Ay'}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad ; \quad y = \frac{-Ax' + By'}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Dann nimmt die vorgelegte Kurvengleichung die Form an:

$$y'^2 + 2\mathfrak{L}x' + 2\mathfrak{M}y' + \mathfrak{N} = 0.$$

wo abgekürzt: $\mathfrak{L} = \frac{A(DB - AE)}{(\sqrt{A^2+B^2})^3}$; $\mathfrak{M} = \frac{A(DA + BE)}{(\sqrt{A^2+B^2})^3}$; $\mathfrak{N} = \frac{AF}{A^2 + B^2}$.

Die Koordinaten des <u>Scheitels</u> der Parabel im Koordinatensystem $x'y'$ sind:

$$x_0' = \frac{\mathfrak{M}^2 - \mathfrak{N}}{2\mathfrak{L}} \quad ; \quad y_0' = -\mathfrak{M}.$$

Die Verschiebung des Anfangspunkts in diesen Scheitel ergibt als schliessliche Gleichungsform:

$$y''^2 + 2\mathfrak{L}x'' = 0. \quad (\text{Also ist der Parameter der Parabel } p = -\mathfrak{L}).$$

3.) <u>Zerfallende Kegelschnitte</u>. ($\Delta = 0$)

Wenn $\Delta = 0$, so zerfällt der Kegelschnitt in ein <u>Paar von Geraden</u>

a.) Ist $AC - B^2$ nicht Null, so bestimmt sich der <u>Schnittpunkt</u> der beiden Geraden als: $x_0 = \frac{BE - CD}{AC - B^2}$; $y_0 = \frac{BD - AE}{AC - B^2}$;

die <u>Richtungen</u> derselben aus $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$ (cf 1.)

b.) Ist zugleich mit $\Delta = 0$ auch $AC - B^2 = 0$, so hat man das <u>Paar paralleler Geraden</u>: $Ax + By + D = \pm\sqrt{D^2 - AF}$.

c.) Ist zugleich $\Delta = 0$; $AC - B^2 = 0$, und noch $D^2 - AF = 0$, so hat man <u>eine</u> doppelt zählende <u>Gerade</u>: $Ax + By + D = \pm 0$.

## III. Tabelle

### zur Diskussion der Kurven zweiten Grades.

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">$AC - B^2 \gtrless 0$</td><td colspan="3">$AC - B^2 = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$\Delta \gtrless 0$<br>Eigentliche Kurven zweiten Grades.</td><td colspan="3">Mittelpunktskurven.</td><td colspan="3" rowspan="5">Parabel.</td></tr>
<tr><td>$AC - B^2 < 0$</td><td colspan="2">$AC - B^2 > 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Hyperbel</td><td colspan="2">$A \cdot \Delta$ oder $C \cdot \Delta$</td></tr>
<tr><td>$> 0$<br>Imaginäre Kurve</td><td>$< 0$<br>Ellipse</td></tr>
<tr><td colspan="2">$A = C$ und $B = 0$<br>Kreis</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\Delta = 0$<br>Zerfallende Kurven zweiten Grades.</td><td colspan="3">Paar sich schneidender Geraden</td><td colspan="3">Paar paralleler Geraden.</td></tr>
<tr><td colspan="3">$AC - B^2$</td><td colspan="3">$D^2 - AF$ oder $E^2 - CF$</td></tr>
<tr><td>$< 0$<br>Reelles Paar</td><td colspan="2">$> 0$<br>Imaginäres Paar.</td><td>$> 0$<br>Reelles Paar</td><td>$= 0$<br>Doppelgerade</td><td>$< 0$<br>Imaginäres Paar.</td></tr>
</table>

$$\Delta = D(BE - CD) + E(DB - AE) + F(AC - B^2).$$

## Aufgaben.

1.) Statt eines Koordinatensystems $x, y$ soll man ein neues System $x', y'$ einführen, dessen Anfangspunkt der Punkt $P_1(x_1 = -2;\ y_1 = 1)$ ist und dessen $x'$-Axe durch den Punkt $P_2\ (x_2 = 1;\ y_2 = 2{,}5)$ geht. Wie heisst die Gleichung derjenigen Geraden im neuen System $x'y'$, deren Gleichung im alten $x + y - 1 = 0$ war?

2.) Man bestimme mit Hilfe der obigen Tabelle die Art folgender Kurven 2. Grades:

a.) $x^2 + 4xy + 3y^2 - 2x - 2y + 21 = 0$; d.) $x^2 + xy + y - 1 = 0$;

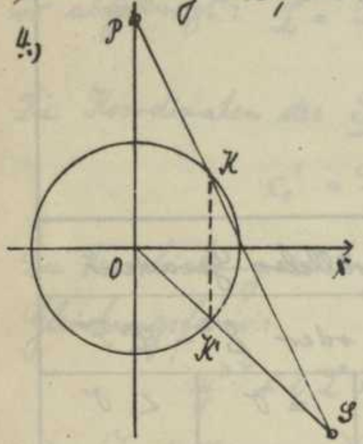
b.) $4x^2 + 5y^2 + 40x - 8y + 101 = 0$; e.) $3y^2 + 6y + 3x - 5 = 0$;

c.) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 2y \pm 1 = 0$; f.) $xy - y^2 + 2y - x - 1 = 0$.

Man bestimme von einigen derselben, Lage, Grösse und Normalgleichung.

3.) Man zeige, dass die Gleichung $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ einen Kegelschnitt darstellt. Man bestimme die Art dieses Kegelschnitts, untersuche seine Lage zum Koordinatensystem und bestimme die Koordinaten des Berührpunktes einer Tangente, die mit der $x$-Axe den Winkel $\varphi$ einschliesst. (Vorprüf. 1906)

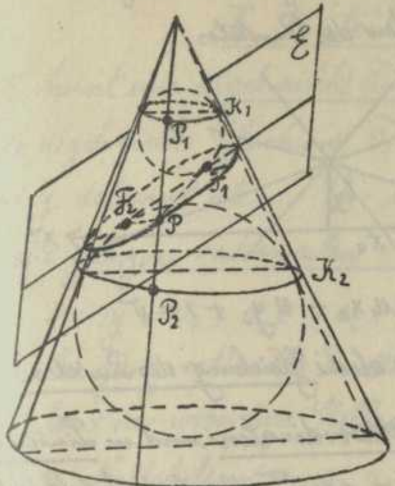
4.)




Gegeben ist der Kreis $x^2 + y^2 = a^2$. Man ziehe von dem festen Punkt $P(x = 0,\ y = b)$ aus die Gerade $PK$ nach einem Punkt $K$ des Kreises. Ferner ziehe man durch den Mittelpunkt $O$ des Kreises die Gerade $OK'$, für welche der Punkt $K'$ symmetrisch liegt zu $K$ inbezug auf die $x$-Axe. $PK$ und $OK'$ schneiden sich in $S$. Welches ist der geometrische Ort des Punktes $S$, wenn $K$ den Kreis durchläuft? Man discutiere die Kurve für verschiedene Wahl von $b$. (Vorprüfung 1896).

5.) Der durch einen beliebigen Punkt $P$ einer Ellipse und durch deren beiden Brennpunkte gelegte Kreis schneidet die $y$-Axe in den Punkten, in denen die Tangente und Normale an die Ellipse im betreffenden Punkt $P$ die $y$-Axe schneiden. Beweis!

17. I. 10. **Höhere Mathematik I.** № 9.

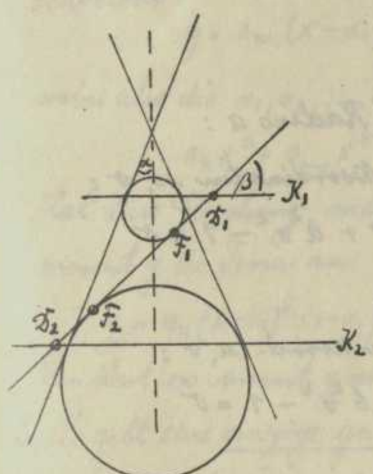



## I. Satz von Dandelin-Quetelet.

Ein senkrechter Kreiskegel wird von einer beliebigen Ebene nach einer Kurve 2. Ordnung geschnitten. Die Brennpunkte derselben sind die Berührpunkte derjenigen 2 Kugeln mit der Schnittebene, welche sowohl die Schnittebene als den Kegelmantel berühren.

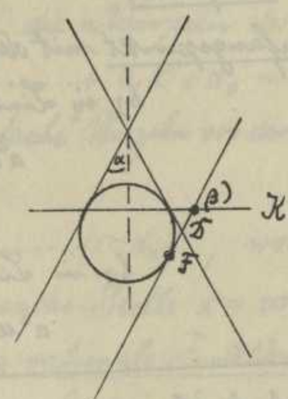
$$PP_1 = PF_1 \quad ; \quad PP_2 = PF_2 .$$

$$PF_1 + PF_2 = PP_1 + PP_2 = P_1P_2 = \text{const}$$ (für die Ellipse in nebenstehender Figur.)



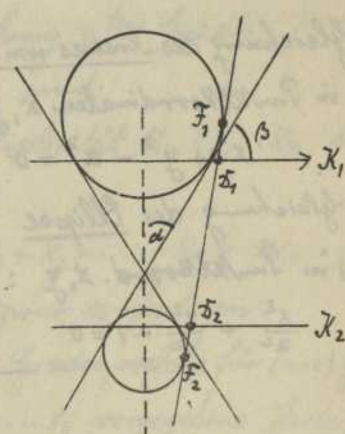

$\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$

Ellipse




$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

Parabel.




$\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$

Hyperbel.

---

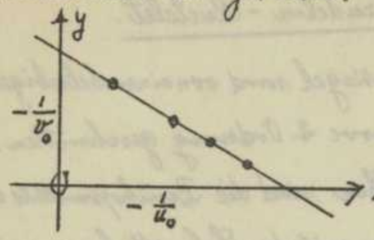
## II. Linienkoordinaten.

| | |
|---|---|
| Hält man in der Gleichung | Hält man umgekehrt in der Gleichung |

$$(1) \ldots\ldots ux + vy + 1 = 0$$

| | |
|---|---|
| die Grössen $u_0$ und $v_0$ fest, so gilt dieselbe für alle Punkte $(x, y)$ welche auf der durch $u_0, v_0$ | die Grössen $x_0$ und $y_0$ fest, so gilt dieselbe für alle Geraden $(u, v)$, welche durch den durch $x_0, y_0$ |

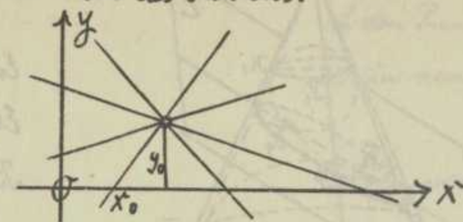
bestimmten Geraden liegen. $u_0, v_0$ heissen die Koordinaten der Geraden.




$$(2) \ldots\ldots \quad u_0 x + v_0 y + 1 = 0$$

bezeichnen wir als die <u>Gleichung der Geraden</u>

bestimmten Punkt gehen. $x_0, y_0$ heissen die Koordinaten des Punktes.




$$(3) \ldots \quad u x_0 + v y_0 + 1 = 0$$

bezeichnen wir als die <u>Gleichung des Punktes</u>.

Man kann von jeder Kurve die Gleichung in <u>Punktkoordinaten</u> und in <u>Linienkoordinaten</u> aufstellen, je nachdem man sie als <u>Punkt</u>- oder <u>Tangentengebilde</u> (d.h. (als eingehüllt von ihren Tangenten) betrachtet.

<u>Beispiele.</u>

1.) Gleichung des <u>Kreises um den Anfangspunkt</u> mit dem Radius $a$:

a.) in Punktkoordinaten $x, y$:

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

b.) in Linienkoordinaten $u, v$:

$$a^2 u^2 + a^2 v^2 - 1 = 0$$

2.) Gleichung der <u>Ellipse</u>

a.) in Punktkoord. $x, y$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

b.) in Linienkoord. $u, v$:

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 - 1 = 0$$

---

<u>Aufgaben</u>

1.) Man bestimme die Gleichung in Linienkoordinaten

a.) der Parabel $y^2 = 2px$

b.) der Hyperbeln $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ und $x \cdot y = 1$.

2.) Man zeichne tangentenweise die Kurven a.) $v = u^2$ b.) $v = -\frac{8}{27} u^3$.

3.) Eine bewegliche Gerade schneidet die 2 Geraden $x = +a$ und $x = -a$ so, dass das Produkt der Abschnitte auf den beiden Geraden, von der $x$-Axe aus gerechnet, constant $= b^2$ ist. Wie heisst die Gleichung der Kurve in Linienkoordinaten, welche von der beweglichen Geraden umhüllt wird?

24. I. 10. **Höhere Mathematik I.** № 10.

## I. Einteilung der Funktionen.

A.) $y$ heisst eine algebraische Funktion von $x$, wenn der Zusammenhang beider durch eine algebraische Gleichung $F(x,y)=0$ (mit ganzen positiven Exponenten) zwischen $x$ und $y$ definiert ist. Wir unterscheiden:

1.) die ganzen rationalen Funktionen:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots + a_n x^n.$$

a.) Die ganze rationale Funktion $n^{ten}$ Grades nimmt jeden beliebigen Wert für $n$ Stellen $x$ an, wobei diese Stellen auch zusammenrücken können. Sie hat insbesondere $n$ „Nullstellen" $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ und lässt sich mit Hilfe derselben in der Form schreiben:

$$y = a_n (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots\ldots(x-\alpha_n),$$

wobei also die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die $n$ Wurzeln der Gleichung $n^{ten}$ Grades

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad \text{sind.}$$

Hat diese Gleichung „mehrfache" Wurzeln von der Multiplicität $k_1, k_2, \ldots k_n$, so nimmt $y$ die Form an

$$y = a_n (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots\ldots(x-\alpha_n)^{k_n}, \quad \text{wobei} \quad k_1 + k_2 + \cdots + k_n = n.$$

Den Wert $\infty$ nimmt $y$ nur an der Stelle $x = \infty$ und zwar $n$-fach an.

b.) Es gibt eine einzige ganze rationale Funktion $n^{ten}$ Grades, welche für $(n+1)$ gegebene und voneinander verschiedene Werte $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n$ vorgegebene Werte $y_0, y_1, y_2 \cdots y_n$ annimmt. Sie kann dargestellt werden in der Form:

$$y = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\cdots(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)}$$

$$+ \cdots\cdots + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}.$$ [Interpolationsformel von Lagrange.]

c.) Daher sind zwei ganze rationale Funktionen $n^{ten}$ Grades $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ und $b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$ identisch, wenn sie übereinstimmen für $(n+1)$ Werte $x_0, x_1, \ldots x_n$. Dann ist also $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\ldots a_n = b_n$.

2.) die <u>rationalen gebrochenen Funktionen</u>:

$$y = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m} = \frac{a_n (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)}{b_m (x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_m)}.$$

a.) Ist $n > m$, so nimmt $y$ einen bestimmten Wert $y = y_0$ an $n$ Stellen an. Die <u>Nullstellen</u> liegen bei $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$; die <u>Unendlichkeitsstellen</u> bei $x = \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$ und bei $x = \infty$ [an dieser Stelle $x = \infty$ wird die Funktion $(n-m)$ fach unendlich.]

b.) Ist $n < m$, so nimmt $y$ einen bestimmten Wert $y = y_0$ an $m$ Stellen an. Die <u>Nullstellen</u> liegen bei $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ und bei $x = \infty$ [an dieser Stelle wird die Funktion $(m-n)$ fach Null]; die <u>Unendlichkeitsstellen</u> bei $x = \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$.

c.) Ist $n = m$, so nimmt $y$ einen bestimmten Wert $y = y_0$ an $n = m$ Stellen an. Die <u>Nullstellen</u> liegen bei $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$; die <u>Unendlichkeitsstellen</u> bei $x = \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$. Im Unendlichen bleibt die Funktion endlich und hat den Wert $\frac{a_n}{b_m}$.

d.) <u>Partialbruchzerlegung</u>. Die rationale gebrochene Funktion

$$y = \frac{P^{(m)}_{(x)}}{Q^{(n)}_{(x)}} = G^{(m-n)}_{(x)} + \frac{R^{(m-1)}_{(x)}}{b_n (x-\alpha)^a \cdot (x-\beta)^b (x-\gamma)^c \cdots (x-\kappa)^k}$$

lässt sich so darstellen, dass die Unendlichkeitsstellen voneinander getrennt sind, nämlich:

$$\begin{aligned} y = {} & c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{m-n} x^{m-n} \\ & + \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_3}{(x-\alpha)^3} + \cdots + \frac{A_a}{(x-\alpha)^a} \\ & + \frac{B_1}{(x-\beta)} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \frac{B_3}{(x-\beta)^3} + \cdots + \frac{B_b}{(x-\beta)^b} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{K_1}{(x-\kappa)} + \frac{K_2}{(x-\kappa)^2} + \frac{K_3}{(x-\kappa)^3} + \cdots + \frac{K_k}{(x-\kappa)^k}. \end{aligned}$$

Die $A$, $B$, .. $K$ werden erhalten, indem man beiderseits mit $Q(x)$ multipliziert und die Coëfficienten gleich hoher Potenzen von $x$ links und rechts einander gleichsetzt (Satz 1.c.).

3.) die irrationalen Funktionen, definiert durch die Gleichung

$$F(\overset{(m)}{x}, \overset{(n)}{y}) = 0$$

vom $m^{ten}$ Grade in $x$, vom $n^{ten}$ Grad in $y$. Unter diese fallen diejenigen, für welche $y$ aus $x$ unter Zuhilfenahme von Wurzelanziehen gewonnen wird.

B.) $y$ heisst eine transcendente Funktion von $x$, wenn der Zusammenhang von $x$ und $y$ sich nicht in der oben definierten algebraischen Form $F(x\,y)=0$ darstellen lässt.

Beispiele: $y = \overset{a}{\log} x$, $y = \sin x$ etc; oder die dazu inversen Funktionen:

$$y = a^x, \quad y = \arcsin x \text{ etc.}$$

## Aufgaben.

1.) Wie heisst die Gleichung der Kurve, die durch eine ganze rationale Funktion 3. Ordnung $G^{(3)}(x)$ dargestellt wird und durch die Punkte $(-2,0)$; $(0,2)$; $(1,1)$; $(2,3)$ geht? Man zeichne die Kurve und bestimme ihre Maxima und Minima.

2.) Eine ganze rationale Funktion 4. Grades hat bei $x = -2; -1; +1; +3$ einfache Nullst. Wie heisst dieselbe, wenn die durch sie definierte Kurve durch den Punkt $P(0,a)$ geht: Man zeichne alle möglichen Kurven, wenn $a$ variiert.

3.) Eine Kurve 3. Ordnung $y = G^{(3)}(x)$ berührt die $x$-Axe in $x=1$ und schneidet die $x$-Axe in $x=-1$, die $y$-Axe in $y=1$. Wie heisst ihre Gleichung?

4.) Man suche die Null- und Unendlichkeitsstellen der Funktionen

a.) $y = \dfrac{x}{x^2-x-2}$; b.) $y = \dfrac{x^2+x}{x^2-3x+2}$; c.) $y = \dfrac{x^2+x-2}{x^3-x^2-2x}$

und zeichne die durch sie dargestellten Kurven.

5.) Man zerlege folgende Ausdrücke in Partialbrüche:

a.) $\dfrac{5x^2+x-28}{x^2-2x-8}$; b.) $\dfrac{1}{x(x+1)^2(x+2)}$; c.) $\dfrac{5x^3-11x^2+5x+4}{(x-1)^4}$.

## II. Grenzwerte.

1.) Eine unendliche Zahlenfolge $u_0, u_1, u_2 \dots u_n, \dots, u_{n+p}, \dots$ von der Eigenschaft, dass zu jeder beliebig klein gegebenen Zahl $\varepsilon$ eine Zahl $n$ so gefunden werden kann, dass für jedes positive ganze $p$ $|u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$ ist, heisst eine convergente Zahlenfolge und definiert als ihren „Grenzwert" oder „limes" eine neue Zahl.

2.) Der „lim" einer Summe ist gleich der Summe der lim; der lim eines Produktes gleich dem Produkte der lim der Faktoren; der lim eines Quotienten gleich dem Quotienten der lim, sofern der Nenner nicht den Grenzwert Null hat.

## III. Definition der Stetigkeit.

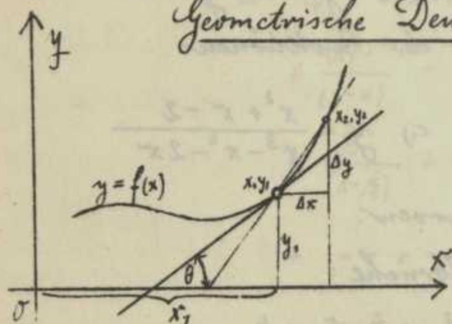
Eine Funktion $y = f(x)$ heisst in der Umgebung der Stelle $x_1, y_1$ stetig, wenn die Differenz $y_2 - y_1$ in dieser Umgebung vorgeschrieben klein gemacht werden kann, dadurch dass die Differenz $x_2 - x_1$ genügend klein gemacht wird.

## IV. Definitionsgleichung des Differentialquotienten.

einer Funktion $y = f(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right]_{x_2 = x_1} = \lim \left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]_{\Delta x = 0} = \lim \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right]_{\Delta x = 0}$$

### Geometrische Deutung des Differentialquotienten:




$$\operatorname{tg} \theta = \lim \left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right]_{x_2 = x_1} = \lim \left[\frac{\Delta y}{\Delta x}\right]_{\Delta x = 0}$$

$$= \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x_1, y_1}.$$

Gleichung der Tangente im Punkt $x_1, y_1$: $\quad y - y_1 = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x_1, y_1} \cdot (x - x_1).$

Gleichung der Normalen im Punkt $x_1, y_1$: $\quad y - y_1 = -\frac{1}{\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x_1, y_1}} \cdot (x - x_1)$

---

25. I. 10. **Höhere Mathematik I.** № 11.

## I. Differentiationsregeln.

1. $y = a \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = 0.$
2. $y = \varphi(x) + a \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi}{dx}.$
3. $y = a \cdot \varphi(x) \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = a \cdot \frac{d\varphi}{dx}.$
4. $y = u \pm v \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}.$
5. $y = u \cdot v \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}.$
6. $y = \frac{u}{v} \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}.$
7. $y = F(z)$, während $z = f(x)$ ; $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}.$

## II. Differentialquotienten der einfachsten expliciten Funktionen.

1. $y = x^m \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = m x^{m-1}.$
2. $y = e^x \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = e^x.$
3. $y = a^x \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = a^x \overset{e}{\log} a.$
4. $y = \overset{e}{\log} x \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$
5. $y = \overset{a}{\log} x \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \overset{a}{\log} e.$
6. $y = \sin x \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \cos x.$
7. $y = \cos x \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = -\sin x.$
8. $y = \operatorname{tang} x \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$
9. $y = \operatorname{cotg} x \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$
10. $y = \operatorname{arctg} x \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$
11. $y = \operatorname{arccotg} x \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$
12. $y = \arcsin x \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $y = \arccos x \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Vorzeichen im Quadranten:
I + ; II − ; III − ; IV + .
I − ; II − ; III + ; IV + .

## III. Angabe einiger Grenzwerte.

1. $\lim \left[\frac{\sin x}{x}\right]_{x=0} = 1.$
2. $\lim \left[\frac{x^n}{n!}\right]_{n=\infty} = 0.$
3. $\lim \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]_{m=\infty} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n} + \cdots = 2{,}718282\ldots = e$ (Definition von $e$)
4. $\lim \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx}\right]_{m=\infty} = \lim \left[\left(1+\frac{x}{p}\right)^p\right]_{p=\infty} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$
$= e^x.$

Diese Reihe convergiert für jeden Wert von $x$.

## Aufgaben.

1.) Man suche durch Einsetzen der Zahlenwerte $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{10}$, $x = \frac{1}{100}$ etc eine Zahlenreihe für a.) $\frac{\overset{10}{\log}(1+x)}{x}$ ; b.) $\frac{x - \sin x}{x^3}$ auf, und schliesse daraus auf die Grenzwerte, welche die beiden Ausdrücke für $x = 0$ ergeben werden.

2.) Man differentiiere die folgenden Funktionen:

1.) $y = x + \frac{x^2}{2}$ ; 2.) $y = \frac{1}{m} x^m - p x^{p-1} + \frac{q}{x}$ ; 3.) $y = \sqrt[3]{x} + \frac{2}{x^3}$ ;
4.) $y = \frac{1}{1+x}$ ; 5.) $y = (a+bx)(c+ex)$ ; 6.) $y = \sqrt{\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}}$ ; 7.) $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$ ;
8.) $y = x^p \cdot \sqrt[n]{a+bx}$ ; 9.) $y = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ ; 10.) $y = e^{ax}$ ;
11.) $y = a^{x^2+bx}$ ; 12.) $y = x \cdot e^{\frac{2}{x}}$ ; 13.) $y = \overset{e}{\log} \frac{x}{1-x^2}$ ;
14.) $y = \sin(px+q)$ ; 15.) $y = \operatorname{tang}(x^3)$ ; 16.) $y = x^n \cdot (\cos x)^2$ ;
17.) $y = \frac{\sin x}{x}$ ; 18.) $y = \operatorname{tang} x - \operatorname{cotg} x - 2x$ ; 19.) $y = \sin(x \cdot \cos x)$ ;
20.) $y = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ; 21.) $y = x^3 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ ; 22.) $y = \frac{\arccos x}{\log \sin x}$ ;
23.) $y = \sin(a \overset{10}{\log} x)$ ; 24.) $y = e^{-kx}(a \sin x + b \cos x)$ ; 25.) $y = \log\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)$

3.) Man suche die Gleichungen der Tangente und Normale der Kurven:

a.) $y = 1 + x - x^3$ im Schnittpunkt mit der $y$-Axe;

b.) $y = \sin x$ in den Punkten, welche die Abscissen $x = 0$ ; $x = \frac{\pi}{4}$ ; $x = \frac{\pi}{2}$ besitzen.

---

31. I. 10 **Höhere Mathematik I.** № 12.

Definition der „Basis des natürlichen Logarithmensystems" e als Grenzwert:

$$e = \lim_{m=\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m .$$

Tabelle zur Berechnung des Ausdruckes $\varepsilon = \frac{1}{k!} \cdot \frac{k+1}{k}$, von $k = 1$ bis $k = 11$.

| $k$ | $k!$ | $\frac{1}{k!}$ | $\frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k}$ | $\varepsilon = \frac{1}{k!} \frac{k+1}{k}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 0,5 | 1,5 | 0,75 |
| 3 | 6 | 0,1666667 | 1,3333333 | 0,2222222 |
| 4 | 24 | 0,0416667 | 1,25 | 0,0520835 |
| 5 | 120 | 0,0083333 | 1,2 | 0,01 |
| 6 | 720 | 0,0013889 | 1,1666667 | 0,0016204 |
| 7 | 5040 | 0,0001984 | 1,1428571 | 0,0002268 |
| 8 | 40320 | 0,0000248 | 1,125 | 0,0000279 |
| 9 | 362880 | 0,0000028 | 1,1111111 | 0,0000031 |
| 10 | 3628800 | 0,0000003 | 1,1 | 0,0000003 |
| 11 | 39916800 | 0,0000000 | 1,0909091 | 0,0000000 |

Es ist: $\lim_{m=\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \lim_{m=\infty} \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) + \dots + \frac{1}{(k-1)!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\dots\left(1-\frac{k-2}{m}\right)\right]$

$$+ \lim_{m=\infty} R_k = \lim_{m=\infty} S_k + \lim_{m=\infty} R_k , \text{ wobei}$$

$$R_k = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{m}\right) \cdot \left[1 + \frac{1}{k+1}\left(1-\frac{k}{m}\right) + \frac{1}{(k+1)(k+2)}\left(1-\frac{k}{m}\right)\left(1-\frac{k+1}{m}\right) + \dots \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(m-1)}\left(1-\frac{k}{m}\right)\left(1-\frac{k+1}{m}\right)\dots\left(1-\frac{m-2}{m}\right) + \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots m}\left(1-\frac{k}{m}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\right]$$

Geht man in der Summe $S_k$ zur Grenze über, indem man $m = \infty$ setzt, so werden alle die Quotienten mit dem unendlich grossen Nenner $m$ und dem endlichen Zähler zu Null und es kommt: $\lim_{m=\infty} S_k = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(k-1)!}$

Die Vernachlässigung der Quotienten ist in $R_k$ (bei den Gliedern in der Klammer), wo die Zähler grösser und grösser werden und mit dem Nenner $m$ ins Unendliche wachsen, nicht mehr gestattet. Indes sieht man, dass diese Glieder kleiner sind als die entsprechenden in der unendlichen geometrischen Reihe: $1+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\dots+\frac{1}{(k+1)^m}+\dots$, mithin ist:

$$\lim_{m=\infty} R_k < \frac{1}{k!}\lim_{m=\infty}\left[1+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}+\dots+\frac{1}{(k+1)^m}+\dots\right], \text{ also } < \frac{1}{k!}\cdot\frac{k+1}{k}.$$

Die obenstehende Tabelle gibt die Werte des Ausdruckes $\frac{1}{k!}\cdot\frac{k+1}{k}$ von $k=1$ bis $k=11$, die also stets grösser sind wie die Reste $R_k$. Man sieht, dass sie für beliebig grosse $k$ beliebig klein werden, dass also von dem Wert $e=\lim_{m=\infty}(1+\frac{1}{m})^m$ beliebig viele Dezimalen berechnet werden können.

Zur Lösung der umgekehrten Aufgabe, die Anzahl der Glieder zu finden, die notwendig sind, um den Rest kleiner als eine vorgeschriebene Zahl $\varepsilon$ zu machen, dient der Ansatz $\varepsilon = \frac{1}{k!}\cdot\frac{k+1}{k} > R_n$. Obiger Tabelle kann man die gesuchte Zahl $k$ entnehmen, welche dieser Gleichung bzw. Ungleichung genügt. (Für $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ findet man $k=7$.) Berechnet man die Reihe $e=\lim(1+\frac{1}{m})^m$ für verschiedene Werte $k$ und rechnet die Differenz des entstehenden Näherungswertes mit dem für $k=11$ berechneten Näherungswert von $e$ aus, der auf 7 Dezimalen genau ist, so ergibt sich die Tabelle:

| $k$ | $e$ | Differenz | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1,7182818 | |
| 2 | 2 | 0,7182818 | |
| 3 | 2,5 | 0,2182818 | |
| 4 | 2,6666667 | 0,0516151 | |
| 5 | 2,7083333 | 0,0099485 | 1 Dezimalstelle genau |
| 6 | 2,7166667 | 0,0015151 | 2 Dezimalstellen genau |
| 7 | 2,7180555 | 0,0002263 | 3 " " |
| 8 | 2,7182540 | 0,0000278 | 4 " " |
| 9 | 2,7182788 | 0,0000030 | 4 " " |
| 10 | 2,7182815 | 0,0000003 | 6 " " |
| 11 | 2,7182818 | 0,0000000 | 7 " " |

Noch genauere Berechnung ($k=16$) gibt $e = 2,718281828459$; $e$ ist hier auf 10 Dezimalstellen genau berechnet.

Nach Berechnung dieses Grenzwertes lassen sich die Differentialquotienten angeben von:

$$y = \overset{a}{\log} x \,, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\cdot \overset{a}{\log} e \,; \qquad y = a^x \,, \quad \frac{dy}{dx} = a^x \cdot \overset{e}{\log} a \,.$$

$$y = \overset{e}{\log} x \,, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \,; \qquad y = e^x \,, \quad \frac{dy}{dx} = e^x \,.$$

## Höhere Differentialquotienten.

Ist $y = f(x)$ eine Funktion von $x$ in expliciter Form, so heisst:

$\frac{dy}{dx} = f'(x) = y'$ ihr erster Differentialquotient,

$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = y''$ ihr zweiter Differentialquotient,

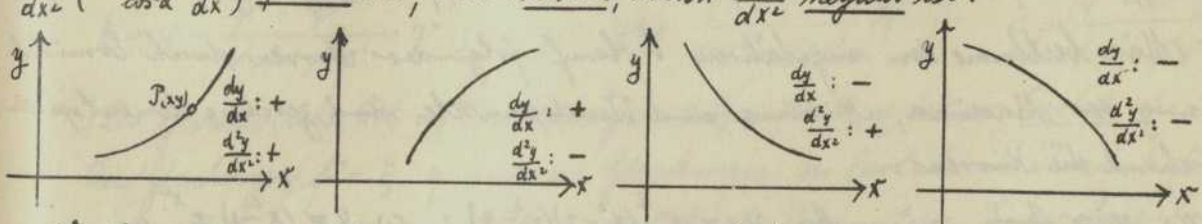
$\frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x) = y'''$ ihr dritter Differentialquotient,

. . . . . . . .

$\frac{d\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}{dx^n} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x) = y^{(n)}$ ihr $n^{\text{ter}}$ Differentialquotient.

## Diskussion allgemeiner Kurven von der Gleichung $y = f(x)$.

Eine Kurve $y = f(x)$ steigt in der Nähe eines Punktes $P(x;y)$, wenn $\frac{dy}{dx} (= tg\,\alpha)$ positiv ist; sie fällt, wenn $\frac{dy}{dx}$ negativ ist. Die Kurve wendet ihre konkave Seite nach oben, wenn $\frac{d^2y}{dx^2}\left(= \frac{1}{\cos^2\alpha}\,\frac{d\alpha}{dx}\right)$ positiv ist, nach unten, wenn $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist.




Der Punkt $(xy)$ ist inbezug auf seine Umgebung höchster oder tiefster Punkt der Kurve, wenn die Tangente in ihm zur $x$-Axe parallel („horizontal") ist, d.h. wenn $\frac{dy}{dx} = 0$. Und zwar hat die Kurve in dem Punkt $P$

a.) ein Maximum (so dass die Kurve unterhalb der Tangente liegt), wenn $\frac{dy}{dx} = 0$ und $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

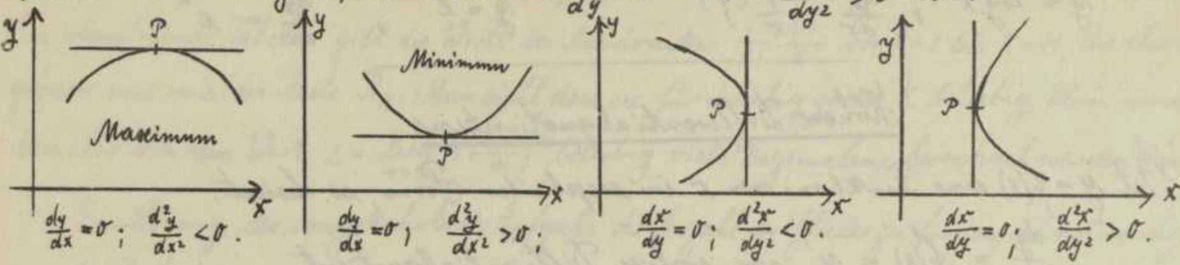
b.) ein Minimum (so dass die Kurve oberhalb der Tangente liegt), wenn $\frac{dy}{dx} = 0$ und $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$.

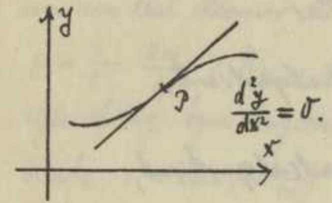
In dem Punkte $P(xy)$ verläuft die Tangente parallel zur $y$-Axe („vertikal"), wenn

$\frac{dy}{dx} = \infty$, also $\frac{dx}{dy} = 0$ ist. Dabei liegt die Kurve

a.) links von der Tangente, wenn ausser $\frac{dx}{dy} = 0$ noch $\frac{d^2x}{dy^2} < 0$,

b.) rechts von der Tangente, wenn ausser $\frac{dx}{dy} = 0$ noch $\frac{d^2x}{dy^2} > 0$ ist.




Die Kurve $y = f(x)$ hat an den Stellen Wendepunkte, wo $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. Der Wert von $\frac{dy}{dx}$ ist dabei beliebig. Die Tangente in einem Wendepunkt heisst Wendetangente.

## Aufgaben.

1.) Man differenziere folgende Funktionen und bilde von einigen auch die höheren Diff.-Quotienten:

1. $y = \log\sqrt{1-x^2}$; 2. $y = \log \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 3. $y = \frac{x^n}{\log x}$; 4. $y = ax \cdot e^{bx^2}$; 5. $y = \cos x \cdot e^{\sin x}$;

6. $y = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$; 7. $y = \frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$; 8. $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$;

9. $y = e^{ax}(a\cos x + \sin x)$; 10. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x + \frac{1}{2}\log(1-x^2)$; 11. $y = \cos(ax)\cdot\sin\left(\frac{b}{x^2}\right)$;

12. $y = x^x$; 13. $y = (\sin x)^x$; 14. $\sqrt{x}^{\sqrt{x}}$; 15. $y = (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{x}}$.

2.) Man bestimme den ungefähren Verlauf folgender Kurven durch Ermittelung der Maxima, Minima und Wendepunkte und zeichne dementsprechend die Kurven:

a.) $y = \frac{1}{1+x^2}$; b.) $y = x^2(x^2-1)(x^2-4)$; c.) $y = (x^2-1)e^x$;

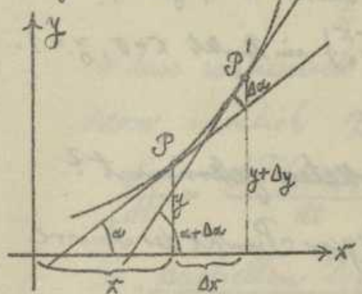
d.) $y = 2a\cdot\cos^2\frac{x}{2a}$ (Vorpr. 1908); e.) $y = x - 2\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$ (Vorpr. 1909)

3.) Unter allen Dreiecken mit gegebenen Längen a und b zweier Seiten hat das rechtwinklige mit den Katheten a und b den grössten Flächeninhalt. Beweis!

7. II. 10. **Höhere Mathematik I.** № 13.

## Krümmung einer Kurve.

Hat das Bogenstück einer Kurve zwischen zwei benachbarten Punkten $P$ und $P'$ die Länge $\Delta s$ und schliessen die Tangenten in diesen beiden Punkten den Winkel $\Delta\alpha$ (Kontingenzwinkel) ein, so heisst der Grenzwert $\lim\left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right)_{\Delta s=0} = \frac{d\alpha}{ds}$ das Krümmungsmass der Kurve im Punkte $P$. Der Kreis, der die Kurve in $P$ berührt und dieselbe Krümmung wie sie hat, heisst „Krümmungskreis", sein Mittelpunkt „Krümmungsmittelpunkt", sein Radius $\varrho$ „Krümmungsradius". Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind:




$$\xi = x - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\ ; \quad \eta = y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\ ; \quad \varrho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Liegt eine Kurve in Parameterdarstellung vor, gegeben durch die Gleichungen:

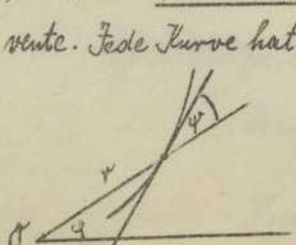
$$x = \varphi(t)\ ;\ y = \psi(t) \qquad \text{so ist:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\ ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\cdot\psi'(t)}{\varphi'(t)^3}$$

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes, ferner der Krümmungsradius sind:

$$\xi = \varphi - \frac{\varphi'^2+\psi'^2}{\varphi'\psi''-\varphi''\psi'}\cdot\psi'\ ; \quad \eta = \psi + \frac{\varphi'^2+\psi'^2}{\varphi'\psi''-\varphi''\psi'}\cdot\varphi'\ ; \quad \varrho = \frac{\left[\varphi'^2+\psi'^2\right]^{3/2}}{\varphi'\psi''-\varphi''\psi'}.$$

Der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte $\xi, \eta$ ist die Evolute der Kurve. Die Gleichungen für $\xi, \eta$ sind die Gleichungen der Evolute in Parameterform, im ersten Fall mit $x$, im letzteren mit $t$ als Parameter. Die gegebene Kurve selbst ist eine Evolvente der Evolute. Die Tangenten der Evolute sind die Normalen der Evolvente. Jede Kurve hat nur eine Evolute, dagegen unendlich viele Evolventen.




Liegt die Gleichung einer Kurve auf Polarkoordinaten bezogen vor: $r = f(\varphi)$, und schliesst der Radiusvektor mit der Tangente in seinem Endpunkt den Winkel $\psi$ ein, so ist: $\operatorname{tg}\psi = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}} = \frac{r}{r'}$. Krümmungsrad. $\varrho = \frac{\left[r^2+r'^2\right]^{3/2}}{r^2+2r'^2-rr''}$.

## Aufgaben.

1.) Man drücke die Differentialquotienten $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2x}{dy^2}$, $\frac{d^3x}{dy^3}$ ... durch die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ... einer Funktion $y = f(x)$ aus.

2.) Man berechne den Krümmungsradius der Kurve

a.) $y = x^2$
b.) $y = x^3$
c.) $y = x^{\frac{3}{2}}$
} im Nullpunkt;

d.) $y = \overset{e}{\log} x$ im Punkt $x = 1$, $y = 0$;
e.) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ im Punkt $x = 0$, $y = 1$.

3.) An welcher Stelle ist die Kurve $y = x^3$ am stärksten gekrümmt?

4.) Man suche den Krümmungsradius in einem beliebigen Punkt der Kurve

a.) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

b.) $x = a(t - \sin t)$ ; $y = a(1 - \cos t)$

c.) $r = a \cdot e^{\varphi}$

d.) $r = 1 - \cos\varphi$

Welches ist der Winkel der Tangente mit dem Radiusvektor im Fall c.) und d.)?

5.) Man suche die Evolute der Parabel und Ellipse.

6.) Man zeichne die Parabel, welche mit der Cosinuslinie $y = \cos x$ im Punkt $x = 0$, $y = 1$ Tangente und Krümmungskreis gemein hat und deren Scheitel dieser Punkt ist.

7.) Gesucht ist ein Zylinder von möglichst grossem Volumen, dessen Oberfläche gleich $\mathfrak{A}$ gegeben ist.

14. II. 10. **Höhere Mathematik I.** № 14.

## Differentiation impliciter Funktionen

I. A.) Hängen die Variabeln $x$ und $y$ von der unabhängigen Variabeln $t$ ab, und ist $z$ wieder als Funktion von $x$ und $y$ dargestellt, also

$$z = F(x,y)\ ; \quad x = \varphi(t)\ ; \quad y = \psi(t),$$

so dass schliesslich auch $z$ als von $t$ allein direkt abhängig dargestellt werden kann, nämlich $z = F(\varphi(t), \psi(t))$, so ist der Differentialquotient von $z$ nach $t$:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dF(\varphi(t),\psi(t))}{dt} = \frac{dF(x,y)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{d\psi}{dt}$$

Die „<u>partiellen Differentialquotienten</u>" $\frac{\partial F}{\partial x}$ (bzw $\frac{\partial F}{\partial y}$) werden so gebildet, als ob $y$ (bzw $x$) constant wären.

B.) Ist speziell $x = t\ ;\ y = f(t) = f(x)$, so ist demnach:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dF(xy)}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}\,.$$

die Gesamtänderung von $F(x,y)$ als Summe der direkten Änderung infolge des Zuwachses von $x$ und der indirekten Änderung infolge des Zuwachses von $y$, der selbst wieder eine Folge des Zuwachses von $x$ ist, darstellend.

C.) Besteht allgemein die Gleichung $F(x,y) = 0$, so ist diese Gesamtänderung gleich Null, also:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = 0,$$

und es ergibt sich daraus der Differentialquotient von $y$ nach $x$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

II. <u>Gleichung der Tangente und Normale</u> im Punkt $x_1, y_1$ der Kurve $F(xy) = 0$:

Tangente: $$(x - x_1)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_1,y_1} + (y - y_1)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_1 y_1} = 0.$$

Normale: $$(x - x_1)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x_1,y_1} - (y - y_1)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_1,y_1} = 0.$$

## III. Höhere Differentialquotienten. $F(x,y)=0$

Abkürzende Schreibweise: $\frac{\partial F}{\partial x}=F_1$; $\frac{\partial F}{\partial y}=F_2$; $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=F_{11}$; $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=F_{22}$; $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y \cdot \partial x}=F_{12}=F_{21}$ u.s.f.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_1}{F_2}=\varphi(x,y); \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{F_{11}F_2^2-2F_{12}F_1F_2+F_{22}F_1^2}{F_2^3}=\psi(xy).$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} \quad \text{etc.}$$

## IV. Krümmungsradius $\varrho$ und Koordinaten $\xi, \eta$ des Krümmungsmittelpunktes einer Kurve $F(xy)=0$:

$$\varrho=\frac{(F_1^2+F_2^2)^{3/2}}{F_{11}F_2^2-2F_{12}F_1F_2+F_{22}F_1^2};$$

$$\xi=x-\frac{F_1(F_1^2+F_2^2)}{F_{11}F_2^2-2F_{12}F_1F_2+F_{22}F_1^2}.$$

$$\eta=y-\frac{F_2(F_1^2+F_2^2)}{F_{11}F_2^2-2F_{12}F_1F_2+F_{22}F_1^2}.$$

---

### Aufgaben

1.) Man bilde $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ für folgende implicite Funktionen:

a.) $x^2+y^2-(ax+b)^2=0$;
b.) $x^2y^2+(y^2-a^2)(y-b)^2=0$;
c.) $y-x+m\sin y=0$;
d.) $e^x\cos y-e^y\cos x=0$;
f.) $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{y}}-x^2\operatorname{tg}y=0$;
g.) $\sin(x\cdot y)+e^{xy}-xy^2=0$.

2.) Man stelle Gleichung der Tangente und Normale, sowie den Krümmungsradius auf in einem beliebigen Punkt der Kurven:

a.) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$.
b.) $xy^2-a^2(a-x)=0$.
c.) $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$.
d.) $x^4+y^4-a^4=0$.

3.) Man bestimme mit Hilfe der Formeln (IV.) die Evolute der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$.

4.) Welches ist die Evolute

a.) der Asteroide $\begin{cases} x=a\cos^3t \\ y=a\sin^3t \end{cases}$;
b.) der Kreisevolvente $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$?

---

21. II. 10. **Höhere Mathematik I.** № 15.

## A.) Unendliche Reihen.

I. Eine unendliche Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots$ in inf. convergiert, wenn $\lim (u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n)_{n=\infty}$ als endlicher Grenzwert existiert; dieser Grenzwert heisst dann die Summe der unendlichen Reihe. Andernfalls divergiert die Reihe.

Convergenzkriterien:

Ist $\lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|_{n=\infty} < 1$, so convergiert die Reihe;

" $> 1$, so divergiert die Reihe;

" $= 1$, so bleibt die Frage der Convergenz zunächst unentschieden.

Eine unendliche Potenzreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$ in inf. convergiert sicher, solange $|x| < \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|_{n=\infty}$ bleibt.

II. Reihe von Taylor.

Form a.): $$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(x_0) + \dots$$
$$\dots + \frac{(x-x_0)^n}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n} f^{(n)}(x_0) + R_n.$$

„Restglied" $$R_n = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n(n+1)} \cdot f^{(n+1)}\big(x_0 + \theta(x-x_0)\big), \text{ wobei } 0 < \theta < 1.$$

Form b.): $$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1} \cdot f'(x_0) + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''(x_0) + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{1\cdot 2 \cdots n} f^{(n)}(x_0) + R_n$$

„Restglied" $$R_n = \frac{h^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n(n+1)} \cdot f^{(n+1)}(x_0 + \theta h), \text{ wobei } 0 < \theta < 1.$$

III. Reihe von Maclaurin.

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} \cdot f'(0) + \frac{x^2}{1\cdot 2} f''(0) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{1\cdot 2 \cdots n} f^{(n)}(0) + R_n.$$

„Restglied" $$R_n = \frac{x^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n(n+1)} f^{(n+1)}(\theta x); \quad 0 < \theta < 1.$$

IV. Spezielle Reihenentwickelungen.

1.) Binomische Reihe

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^3 + \dots \quad \Big\} \text{ convergiert für } -1 < x < +1.$$

2.) <u>Logarithmische Reihen.</u> — convergiert für

a.) $\overset{e}{\log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdot + \cdots \quad \Big\} -1 < x < +1$

b.) $\overset{e}{\log} z = 2\left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \cdots\cdots\right] \quad \Big\} \; 0 < z < \infty$

3.) <u>Exponentialreihe</u>

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots\cdots$$

4.) <u>Sinus- und Cosinusreihe.</u>

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \cdot - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdot - \cdots$$

} convergieren für <u>jedes</u> $x$.

5.) <u>Arcus-Tangensreihe.</u> — convergiert für

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdot + \cdots \quad \Big\} -1 < x < +1.$$

<u>V.</u> Aus den Reihenentwickelungen <u>IV.</u> 3.) und 4.) folgt der <u>Euler'sche Satz:</u>

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \;;\; e^{-ix} = \cos x - i \sin x, \text{ wobei } i^2 = -1.$$

und umgekehrt:

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right); \quad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right).$$

Weiter folgt aus <u>IV.</u> 2.) und 5.):

$$\overset{e}{\log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{2}{i}\operatorname{arctg}(ix); \text{ und umgekehrt: } \operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i}\overset{e}{\log}\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right).$$

## B.) <u>Complexe Zahlen.</u>

Jede complexe Zahl $x+iy$ lässt sich in der Form $x+iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ darstellen, wo $r = \sqrt{x^2+y^2}$ der „Modul" oder der „absolute Betrag" von $x+iy$ heisst, $\varphi$ bis auf Vielfache von $2\pi$ durch $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$; $\cos\varphi = \frac{x}{r}$; $\sin\varphi = \frac{y}{r}$ bestimmt ist und „Argument" von $x+iy$ heisst.

Der Euler'sche Satz gibt dann auch die Darstellung:

$$x+iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\cdot e^{\varphi i}$$

$$\overset{e}{\log}(x+iy) = \overset{e}{\log} r + i(\varphi + 2k\pi)$$

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

## C.) Maxima und Minima.

Nehmen an der Stelle $x = x_0$ gleichzeitig die ersten $n$ Differentialquotienten der Funktion $y = f(x)$ den Wert $0$ an, ist also:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = 0\,;\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0} = 0\,;\ \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=x_0} = 0\,;\ \ldots\ldots\ldots \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_{x=x_0} = 0,$$

während der $(n+1)^{\text{te}}$ Differentialquotient an dieser Stelle $\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_{x=x_0} \gtrless 0$ ist, so ist der Punkt $x = x_0,\ y = f(x_0)$ ein ausgezeichneter Punkt („singulärer") Punkt der Kurve $y = f(x)$. Hinsichtlich der Art der Singularität hat man zu entscheiden, ob $n$ eine gerade oder ungerade Zahl ist.

a.) Ist $n$ ungerade (speziell auch $n = 1$), so hat die Kurve in diesem Punkt ein Minimum, wenn $\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_{x=x_0}$ positiv ist; ein Maximum, wenn $\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_{x=x_0}$ negativ ist.

b.) Ist $n$ gerade, so ist in dem Punkt weder ein Maximum noch ein Minimum vorhanden, sondern ein Wendepunkt mit horizontaler Tangente.

## D.) Unbestimmte Formen.

1.) $\frac{0}{0}$. Ist $\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a} = \frac{0}{0}$, also scheinbar unbestimmt, so ist $\left[\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\right]_{x=a}$ zu bilden. Ist dies bestimmt, so ist es zugleich der wahre Wert von $\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a}$. Ist auch $\left[\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\right]_{x=a} = \frac{0}{0}$, so ist $\left[\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)}\right]_{x=a}$ zu bilden u.s.f. Der erste nicht unbestimmte Quotient ist der gesuchte wahre Wert.

2.) $\frac{\infty}{\infty}$. Ist $\left[\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]_{x=a} = \frac{\infty}{\infty}$, so wird der wahre Wert nach der selben Regel wie unter 1.) durch Bildung von $\left[\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\right]_{x=a}$ etc. gefunden.

3.) $0\cdot\infty$. Ist $\left[\varphi(x)\cdot\psi(x)\right]_{x=a} = 0\cdot\infty$, so ermittelt man den wahren Wert aus $\left[\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}\right]_{x=a} = \frac{0}{0}$ nach Regel 1.).

4.) $0^0;\ 1^\infty;\ \infty^0$. Statt eines solchen unbestimmten Ausdrucks $\left[(\varphi(x))^{\psi(x)}\right]_{x=a}$ sucht man zunächst den Wert des Exponenten in dem gleichwertigen $\left[e^{\psi(x)\cdot\log\varphi(x)}\right]_{x=a}$ nach den Regeln 1.) 2.) 3.).

5.) $\infty-\infty$. Ist $\left[\varphi(x)-\psi(x)\right]_{x=a} = \infty-\infty$, so bestimmt man $\left[\frac{\frac{1}{\psi(x)}-\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{\psi(x)\cdot\varphi(x)}}\right]_{x=a} = \frac{0}{0}$ nach Regel 1.) als wahren Wert.

## Aufgaben.

1.) Man prüfe die Convergenz der Reihen:

a.) $\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) + \frac{1}{8}\sin\left(\frac{\alpha}{8}\right) + \cdots$

b.) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n+1)} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5 \cdots (n+2)} + \cdots$

2.) Man entwickle folgende Funktionen nach dem Maclaurin'schen Satze:

a.) $y = \log\cos x$; b.) $y = \operatorname{tg} x$; c.) $y = \arcsin x$.

3.) Man berechne $\sqrt{10}$ nach dem binomischen Satz auf 6 Dezimalen und zwar

a.) als $3\sqrt{1+\frac{1}{9}}$; b.) als $\frac{10}{3}\sqrt{1-\frac{1}{10}}$.

4.) Man gebe eine Zusammenstellung von möglichst bequemen Formeln zur Berechnung der natürlichen Logarithmen der ganzen Zahlen unter 20 an!

5.) Man entwickle nach Potenzen von

a.) $x$ : $\frac{1}{1+x+x^2+x^3}$ und $\sin 2x - 2x\cos x + \frac{x^2}{3}\sin x$.

b.) $(x-2)$ : $x^4 - 5x^2 + 8x - 7$.

c.) $(x-\alpha)$ : $y$, wenn $\sin y = k\cdot\sin x$ ist.

6.) In der Gauss'schen Zahlenebene liegt ein reguläres Sechseck von der Seitenlänge 1, so dass der Mittelpunkt in den Nullpunkt, eine Ecke auf die reelle Axe fällt. Welche complexen Zahlen entsprechen den Ecken?

7.) Man suche den Zahlenwert von a.) $\overset{10}{\log}(1+2i)$; b.) $\sin\left(\frac{1+i}{2}\right)$!

8.) Man untersuche die Kurven $y = x^4$ und $y = x^5$ auf Maxima und Minima!

9.) Man bestimme die wahren Werte der unbestimmten Formen:

$$\left[\frac{x^3-1}{x-1}\right]_{x=1};\quad \left[\frac{\overset{10}{\log}(1+x)}{x}\right]_{x=0};\quad \left[\frac{x-\sin x}{x^3}\right]_{x=0};\quad \left[\frac{\log x}{\operatorname{cotg} x}\right]_{x=0};\quad \left[\frac{e^x - e^{\sin x}}{x-\sin x}\right]_{x=0};$$

$$\left[\frac{1}{\log x} - \frac{a}{x^a-1}\right]_{x=1};\quad \left[x^{\log(1+x)}\right]_{x=0};\quad \left[\frac{\log(x-a)}{\log(e^x-e^a)}\right]_{x=a};\quad \left[\arccos\frac{x}{a}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}\right]_{x=a};$$

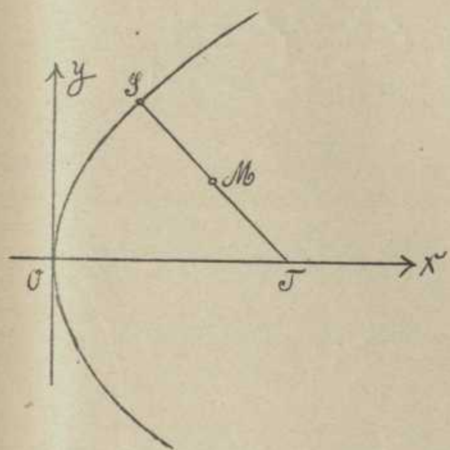
$$\left[x^{\frac{1}{x}}\right]_{x=\infty};\quad \left[x^{\log(1-x)}\right]_{x=1}.$$

Name: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ Note: _ _ _ _ _ _

Platznummer: _ _ _ _ _ _ _ _

# Höhere Mathematik I.

## Semestralprüfung. W. S. 1909/10.




1.) Gegeben ist die Parabel $y^2 = 2px$. Zieht man alle möglichen Normalen und halbiert das zwischen der Kurve und der x-Axe gelegene Stück ST derselben, so liegen die Mittelpunkte M auf einer Parabel, die durch den Brennpunkt der ursprünglichen geht. Beweis!

2.) Man bestimme Lage, Gestalt und Normalgleichung des Kegelschnittes

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4\sqrt{2}\,x - 4\sqrt{2}\,y + 8 = 0.$$

3.) Es sollen die Maxima, Minima und Wendepunkte der Kurve

$$y = \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x$$

bestimmt und die Kurve gezeichnet werden.

4.) Wie bestimmen sich die Coëfficienten $a_0, a_1, a_2$ der Gleichung $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, wenn die durch sie dargestellte Parabel

a.) durch die 3 Punkte $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = -1 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x_3 = 2 \\ y_3 = -1 \end{cases}$ geht;

b.) folgende Eigenschaften hat: 1.) sie geht durch den Punkt $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ ; 2.) ihre Tangente in diesem Punkt schneidet die x-Axe unter einem Winkel von 45°; 3.) der Krümmungsradius in demselben Punkt hat die Länge $\sqrt{2}$.

5.) Man differentiiere: a.) $y = \log^{e}\left(\cos\frac{x}{a}\right)$ ; b.) $y = \sqrt{a^2-x^2}\,\arccos\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ;

c.) $y = \dfrac{e^{ax^2+bx+c}}{2ax+b}$ ; d.) $y = \dfrac{\sin\sqrt{1-x} + \cos\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}}$

6.) Man bilde die ersten und zweiten partiellen Differentialquotienten von

a.) $F = \arcsin\frac{x}{y} + \frac{y}{\sqrt{x}}$ ; b.) $F = \operatorname{tang}\sqrt{x^2+y^2} - e^{-\frac{y^2}{x^2}}$.

7.) Man entwickele $y = (x^2+1)e^{2x}$ in eine Reihe nach Potenzen von $x$.

(Die Aufgaben sind auf diesem Blatt zu lösen.)

28. IV. 10. **Höhere Mathematik II.** № 1.

# Integralrechnung.

I. Die Differentialrechnung behandelte die Aufgabe, wenn eine Funktion von $x$, $y = F(x)$, gegeben ist, den Differentialquotienten dieser Funktion nach $x$, $\frac{dy}{dx} = f(x)$, zu bestimmen. Die Integralrechnung beschäftigt sich mit der umgekehrten Aufgabe, wenn der Differentialquotient einer Funktion allgemein gegeben ist, die Funktion selbst zu bestimmen.

Ist also der Differentialquotient von $y$ als eine bekannte Funktion $f(x)$ gegeben, somit $\frac{dy}{dx} = f(x)$, so nennt man $y$ das Integral dieser Funktion $f(x)$ nach $x$ genommen und man führt die mit $\frac{dy}{dx} = f(x)$ durchaus gleichbedeutende Schreibweise ein:

$$y = \int f(x)\,dx = F(x)$$

Die Funktion $y = F(x)$ ist durch die vorgeschriebene Bedingung nicht vollständig, sondern nur bis auf eine willkürliche additive Konstante $C$ bestimmt, da ja auch $\frac{d(y+C)}{dx} = f(x)$ ist. Man nennt deshalb

$$y = \int f(x)\,dx + C = F(x) + C$$

das unbestimmte Integral der Funktion $f(x)$. Fordert man, dass die durch dasselbe gegebene Kurve durch den Punkt $x_0, y_0$ hindurchgeht, so wird

$$C = y_0 - F(x_0), \text{ und daher: } y - y_0 = F(x) - F(x_0).$$

## II. Integrationsregeln.

1. $\int a\cdot f(x)\,dx = a\cdot\int f(x)\,dx$
2. $\int[\varphi(x) + \psi(x) + \cdots + \chi(x)]\,dx = \int\varphi(x)\,dx + \int\psi(x)\,dx + \cdots + \int\chi(x)\,dx$.
3. $\int(u\cdot\frac{dv}{dx})\,dx = u\cdot v - \int(v\cdot\frac{du}{dx})\cdot dx$. „Partielle Integration". Auch zu schreiben:
$\int\varphi(x)\cdot\psi(x)\,dx = \varphi(x)\cdot\int\psi(x)\,dx - \int\left[\frac{d\varphi}{dx}\cdot\int\psi(x)\,dx\right]dx$.
4. Substitutionsmethode. Ist $\frac{dy}{dx} = f(x)$, also $y = \int f(x)\,dx$, und setzt man $x = \varphi(z)$, so ist $\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dz} = f(\varphi(z))\cdot\varphi'(z)$, also $y = \int f(\varphi(z))\,\varphi'(z)\,dz$. Man hat demnach im Integrale $\int f(x)\,dx$ $x$ durch $\varphi(z)$ und $dx$ durch $\varphi'(z)\,dz$ zu ersetzen, um die Substitution durchzuführen.

## III. Grundintegrale

1.) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. [Giltig für alle Zahlen $n$ ausser $n = -1$!]

2.) $\int \frac{1}{x} dx = \overset{e}{\log} x + C$.

3.) $\int e^x dx = e^x + C$; $\quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\overset{e}{\log} a} + C$

4.) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$; $\quad \int \cos x\, dx = \sin x + C$

5.) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + C$; $\quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$

6.) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C'$. $\quad [C' - C = \frac{\pi}{2}]$.

7.) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C'$. $\quad [C' - C = \frac{\pi}{2}]$.

---

## Aufgaben.

1.) Man integriere:

I.) a.) $\int dx$; b.) $\int \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) dx$; c.) $\int \sqrt[4]{3x^5}\, dx$; d.) $\int (1-\cos x)\frac{dx}{2}$;

e.) $\int \frac{1-2x+x^2-x^4}{x^3} dx$; f.) $\int \left(\frac{a}{\sqrt{x}} - b\sqrt[3]{x}\right)^2 dx$; g.) $\int \frac{x^4+x^2+1}{x^2+1} dx$.

II.) Durch Substitution: a.) $\int \frac{dx}{a+bx}$; b.) $\int \sqrt{1-x}\, dx$; c.) $\int a^{3x} dx$;

d.) $\int \frac{x\, dx}{1+x^4}$; e.) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$; f.) $\int \sin^3 x \cdot \cos x \cdot dx$; g.) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

h.) $\int \frac{(\log x)^2}{x} dx$; i.) $\int \sin^3 x \cdot dx$.

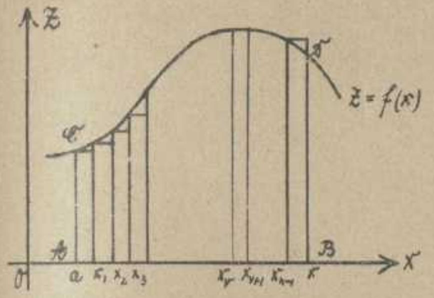
III.) Durch partielle Integration: a.) $\int x \cdot \log x \cdot dx$; b.) $\int x^2 \cos x\, dx$;

c.) $\int \arcsin x \cdot dx$; d.) $\int \cos^2 x\, dx$; e.) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$; f.) $\int \log x \cdot \frac{dx}{x^2}$.

2.) Gesucht ist die Kurve, deren Tangentenlänge (vom Berührpunkt bis zum Schnittpunkt mit der $x$-Axe gerechnet) proportional der Ordinate und umgekehrt proportional der Abscisse des Berührpunktes ist.

2. V. 10. **Höhere Mathematik II.** № 2.

## I. Bestimmte Integrale




Der Flächeninhalt von ABCD, begrenzt durch das Stück der Abscissenaxe von $A(x=a)$ bis $B(x=x)$, die Ordinaten AC und BD, und das Stück CD der Kurve $z = f(x)$ ist bestimmt als Summe von Flächenstreifen parallel zur z-Axe gleich dem Grenzwert der Summe der einzelnen Rechtecke, durch die jene Streifen näherungsweise ersetzt werden können, für eine bis in unendlich schmale Streifen fortgesetzte Teilung; somit [Inhalt ABCD = y]:

$$y = \lim \left[(x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \cdots + (x_{\nu+1} - x_\nu) f(x_\nu) + \cdots + (x - x_{n-1}) f(x_{n-1})\right]$$

Oder, wenn speziell die Streifen alle dieselbe Breite $\Delta x$ haben:

$$y = \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ n = \infty \\ n\Delta x = x - a}} \left[\Delta x \cdot f(a) + \Delta x f(a + \Delta x) + \cdots + \Delta x \cdot f(a + \nu \Delta x) + \cdots + \Delta x \cdot f(a + (n-1)\Delta x)\right]$$

Man nennt diesen Grenzwert der Summe <u>das bestimmte Integral von $f(x)$, genommen zwischen den Grenzen a und x</u>, und schreibt dafür:

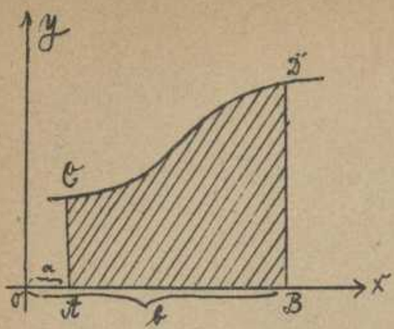
$$y = \int_{x=a}^{x=x} f(x)\, dx.$$

Der Zusammenhang mit dem durch $\frac{dy}{dx} = f(x) = \frac{dF}{dx}$ definierten unbestimmten Integral von $f(x)$,

$$F(x) + Const = \int f(x)\, dx$$

wird dadurch gegeben, dass der Zuwachs $\Delta y$ unserer Fläche bei einer Verschiebung der rechten Grenzordinate BD um $\Delta x$ gerade gleich $\Delta x \cdot f(x)$ ist, also tatsächlich $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x)$. y wird demnach durch die Funktion $F(x) + C$ dargestellt, wo die bisher willkürliche Constante sich durch die Bemerkung bestimmt, dass die Fläche y für den speziellen Wert $x = a$ zu Null zusammenschrumpft, also $0 = F(a) + C$ wird. Das bestimmte Integral nimmt somit den Wert an:

$$y = \int_{x=a}^{x=x} f(x)\, dx = F(x) - F(a).$$




## II. Anwendungen.

1.) Kurve $y = f(x)$.

<u>Fläche</u> ABCD zwischen den Ordinaten $x = a$ und $x = b$:

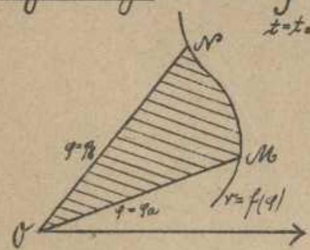
$$= \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}.$$

<u>Bogenlänge</u> CD $= \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} ds = \int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

2.) <u>Parameterdarstellung</u>. Kurve: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$.

<u>Fläche</u> zwischen den Ordinaten $x = a = \varphi(t_a)$ und $x = b = \varphi(t_b)$ $= \displaystyle\int_{t=t_a}^{t=t_b} \psi(t)\cdot\varphi'(t)\cdot dt$.

<u>Bogenlänge</u> CD $= \displaystyle\int_{t=t_a}^{t=t_b} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,dt$.




3.) <u>Polarkoordinaten.</u>

Kurve $r = f(\varphi)$

<u>Fläche</u> OMN $= \displaystyle\int_{\varphi=\varphi_a}^{\varphi=\varphi_b} \frac{1}{2} r^2\,d\varphi$.

<u>Bogen</u> MN $= \displaystyle\int_{\varphi=\varphi_a}^{\varphi=\varphi_b} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi$.

---

## III. Partialbruchzerlegung.

1.) Der Quotient zweier rationaler Funktionen von $x$ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ kann durch Ausdividieren jedenfalls auf die Form $G(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ gebracht werden, wo $R(x)$ von niedrigerem Grade in $x$ als $Q(x)$ ist.

2.) a. Sind $\alpha, \beta, \dots \lambda$ die sämtlichen (einfachen) Wurzeln der Gleichung $l^{\text{ten}}$ Grades $Q(x) = 0$, so lässt sich $\frac{R(x)}{Q(x)}$ darstellen als:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma} + \dots\dots + \frac{L}{x-\lambda} \quad \left[= \frac{R(x)}{a_0(x-\alpha)(x-\beta)\dots\dots(x-\lambda)}\right]$$

Die Zahlen $A, B, \dots L$ lassen sich durch Fortschaffen der Nenner und Vergleichung der Coëfficienten gleich hoher Potenzen von $x$ auf der rechten und linken Seite, oder durch:

$A = \frac{R(\alpha)}{Q'(\alpha)}$; $B = \frac{R(\beta)}{Q'(\beta)}$; $\dots\dots$ $L = \frac{R(\lambda)}{Q'(\lambda)}$ finden. $\left[Q' = \frac{dQ}{dx}\right]$.

b.) Sind $\alpha$ und $\beta$ zwei conjugiert complexe Wurzeln von $Q(x)=0$, so können die conjugiert complexen Terme $\frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$ in den reellen Ausdruck $\frac{Mx+N}{(x-m)^2+n^2}$ zusammengezogen werden. $[\alpha = m+in\,;\ \beta = m-in]$

c.) Bei mehrfach vorkommenden Wurzeln vergl. Teil I. Blatt 10, A. 2. d.) Die Grössen $A, B, C \dots K$ in dieser Formel bestimmen sich wieder durch Coëffizientenvergleichung.

d.) Kommt die complexe Wurzel $\alpha = m+in$ doppelt vor, so ist auch die dazu conjugierte Wurzel $\beta = m-in$ Doppelwurzel von $Q(x)=0$, und die vier entsprechenden Terme der Partialbruchzerlegung können durch

$$\frac{M_1x+N_1}{(x-m)^2+n^2} + \frac{M_2x+N_2}{[(x-m)^2+n^2]^2}$$

ersetzt werden. Die $M_1, N_1, M_2, N_2$ werden wieder durch Coëfficientenvergleichung gefunden.

Ähnlich bei mehrfach vorkommenden complexen Wurzeln.

IV. Das Integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ über eine gebrochene rationale Funktion führt also auf die folgenden Grundintegrale:

1. $\int \frac{dx}{x-\alpha} = \log(x-\alpha)\,;$

2. $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k} = -\frac{1}{(k-1)} \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}}\,;$

3. $\int \frac{dx}{(x-m)^2+n^2} = \frac{1}{n} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x-m}{n}\right);$

4. $\int \frac{(x-m)\,dx}{(x-m)^2+n^2} = \frac{1}{2} \log\left[(x-m)^2+n^2\right];$

5. $\int \frac{(x-m)\,dx}{[(x-m)^2+n^2]^k} = -\frac{1}{2(k-1)} \cdot \frac{1}{[(x-m)^2+n^2]^{k-1}}\,;$

6. $\int \frac{dx}{[(x-m)^2+n^2]^k}$ durch die Substitution $\frac{x-m}{n} = \operatorname{tg}\varphi\,;\ dx = \frac{n\,d\varphi}{\cos^2\varphi}$ und darauf folgende partielle Integration lösbar.

## Aufgaben.

1.) Man berechne den Wert der folgenden bestimmten Integrale:

a.) $\int\limits_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{2}\,dx$; b.) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; c.) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}$; d.) $\int\limits_0^{10} x^2 e^{-x}\,dx$; e.) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotg} x\,dx$;

f.) $\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$; g.) $\int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$; h.) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x}$; i.) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$; k.) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot e^{-x^2}\,dx$.

2.) Man berechne das Flächenstück zwischen der $x$-Axe,

der Kurve a.) $y^2 = x^3$ und den Ordinaten: $x=0$ und $x=2$

b.) $y = \frac{c}{2}\left(x^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$ " " " $x=0$ " $x=c$

Ferner berechne man die Bogenlänge zwischen denselben Ordinaten.

3.) Die Kurve $x=t^2$; $y = t - \frac{t^3}{3}$ bildet eine Schleife zwischen $t=-\sqrt{3}$ und $t=\sqrt{3}$. Man berechne deren Inhalt und Umfang.

4.) Die „Lemniscate" $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ hat die Gestalt einer Doppelschleife. Man zeichne sie und berechne ihren Flächeninhalt.

5.) Man integriere die folgenden rational gebrochenen Funktionen durch Partialbruchzerlegung:

a.) $\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}\,dx$; b.) $\int \frac{x^2\,dx}{x^2+2x+5}$; c.) $\int \frac{dx}{a^3+x^3}$;

d.) $\int \frac{8x^2+1}{(2x-3)^3}\,dx$; e.) $\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}\,dx$. f.) $\int \frac{dx}{x^3(1+x+x^2)^2}$.

9. V. 10. **Höhere Mathematik II.** № 3.

## I. Irrationale Integrale.

1.) Integrale, unter denen ausser $x$ nur noch der Ausdruck $\sqrt[n]{ax+b}$ rational vorkommt, also Integrale von der Form $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx$, werden durch die Substitution: $\sqrt[n]{ax+b} = z$, $x = \frac{z^n - b}{a}$; $dx = \frac{n z^{n-1} dz}{a}$ rational in $z$ gemacht und nach Blatt 2, III und IV gelöst.

2.) Integrale, unter denen $x$ ausser in rationaler Weise noch in dem einen Wurzelausdruck $\sqrt{a+bx+cx^2}$ vorkommt, also Integrale von der Form:

$$\int R(x, \sqrt{a+bx+cx^2})\,dx$$

können auf folgende Arten auf rationale zurückgeführt, also nach Blatt 2 gelöst werden:

a.) $c$ sei positiv. Man substituiert: $\sqrt{a+bx+cx^2} = z - \sqrt{c}\,x$. Daraus folgt:

$$x = \frac{z^2 - a}{b + 2\sqrt{c}\,z}\ ; \quad dx = \frac{2(\sqrt{c}\,z^2 + bz + a\sqrt{c})}{(b+2\sqrt{c}\,z)^2}\,dz; \quad \text{und:}$$

$$\sqrt{a+bx+cx^2} = \frac{\sqrt{c}\,z^2 + bz + a\sqrt{z}}{b + 2\sqrt{c}\,z}.$$

b.) $a$ sei positiv. Man subst. $\sqrt{a+bx+cx^2} = xz - \sqrt{a}$; es folgt: $x = \frac{b + 2\sqrt{a}\,z}{z^2 - c}$;

$$dx = \frac{-2(\sqrt{a}\,z^2 + bz + c\sqrt{a})}{(z^2-c)^2}\,dz\ ; \quad \text{und} \quad \sqrt{a+bx+cx^2} = \frac{\sqrt{a}\,z^2 + bz + c\sqrt{a}}{z^2 - c}.$$

c.) $b^2 - 4ac$ sei positiv. Dann sind die beiden Wurzeln der Gleichung $a+bx+cx^2 = 0$ reell, also $a+bx+cx^2 = c(x-\alpha)(x-\beta)$ reell darstellbar. Man subst.: $\sqrt{a+bx+cx^2} = z(x-\alpha)$.

Dann ist: $x = \frac{3c - \alpha z^2}{c - z^2}$; $dx = \frac{2cz(\beta-\alpha)}{(c-z^2)^2}\,dz$; und: $\sqrt{a+bx+cx^2} = \frac{cz(\beta-\alpha)}{c - z^2}$.

d.) Ist gleichzeitig $c < 0$ und $b^2 - 4ac < 0$, also auch $a < 0$, so ist das vorgelegte Integral für reelle $x$ stets imaginär.

3.) Spezieller Fall. Das Integral $\int \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\,dx$ lässt sich darstellen:

$$= \left[P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \dots + P_{n-1} x^{n-1}\right] \cdot \sqrt{a+bx+cx^2} + P_n \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Die Zahlen $P_0, P_1, P_2 \dots P_n$ sind, nachdem beiderseits differentiiert worden ist, nach der Methode der unbestimmten Coëfficienten zu bestimmen.

II. 1.) Die Integrale unter I. können auch auf trigonometrische Integrale zurückgeführt werden, indem man die Glieder mit $x$ unter dem Wurzelzeichen zu einem vollständigen Quadrat ergänzt: $a+bx+cx^2 = c\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 + \left(a - \frac{b^2}{4c}\right)$. Dann wird

$$\sqrt{a+bx+cx^2} = \sqrt{a-\frac{b^2}{4c}}\cdot\sqrt{1+\left[\frac{\sqrt{c}\,(x+\frac{b}{2c})}{\sqrt{a-\frac{b^2}{4c}}}\right]^2}$$

Auf diese Weise enthält das Integral, je nach den Vorzeichen von a und c, einen der Ausdrücke
1.) $\sqrt{1+z^2}$; 2.) $\sqrt{1-z^2}$; 3.) $\sqrt{z^2-1}$. Diese werden bzw. rational gemacht durch die Substitution
1.) $z = tg\,\varphi$; $\sqrt{1+z^2} = \frac{1}{\cos\varphi}$; 2.) $z = \cos\varphi$; $\sqrt{1-z^2} = \sin\varphi$; 3.) $z = \frac{1}{\cos\varphi}$; $\sqrt{z^2-1} = tg\,\varphi$.

2.) Setzt man stattdessen $\sqrt{a+bx+cx^2} = \sqrt{\frac{(2cx+b)^2+(4ac-b^2)}{4c}}$, so ist zu substituieren

$2cx+b = \sqrt{4ac-b^2}\;tg\,\varphi$, wenn $c>0$ und $4ac-b^2>0$,

$2cx+b = \sqrt{b^2-4ac}\cdot\cos\varphi$, wenn $c<0$ und $b^2-4ac>0$,

$2cx+b = \sqrt{b^2-4ac}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}$, wenn $c>0$ und $b^2-4ac>0$ ist.

3.) <u>Häufig vorkommende irrationale Integrale</u>:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C. \qquad \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \log(x+\sqrt{x^2\pm a^2}) + C. \qquad \int\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \pm\frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2\pm a^2}) + \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} + C.$$

III.) <u>Trigonometrische Integrale</u>. Integrale, die nur die trigonometrischen Funktionen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $tg\,\varphi$ und zwar in rationaler Weise, unter dem Integralzeichen enthalten, also Integrale von der Form:

$\int$ Rat. Funkt. $(\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ tg\,\varphi)\,d\varphi$ werden durch die Substitution:

$$tg\frac{\varphi}{2} = z;\quad \sin\varphi = \frac{2z}{1+z^2};\quad \cos\varphi = \frac{1-z^2}{1+z^2};\quad tg\,\varphi = \frac{2z}{1-z^2};\quad d\varphi = \frac{2\,dz}{1+z^2}$$

in z rational gemacht, sind also nach Blatt 2.) integrierbar.

IV.) <u>Trigonometrische und transcendente Integrale.</u>

1.) $\int\sin x\cdot dx = -\cos x + C$; 2.) $\int\cos x\,dx = \sin x + C$;

3.) $\int\frac{dx}{\sin x} = \log(tg\frac{x}{2}) + C = \log(c\cdot tg\frac{x}{2})$; 4.) $\int\frac{dx}{\cos x} = -\log[tg(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})] + C = \log[C\cdot cotg(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})]$

5.) $\int tg\,x\cdot dx = -\log\cos x + C$; 6.) $\int cotg\,x\,dx = \log\sin x + C$.

7.) $\int\frac{dx}{\sin x\cdot\cos x} = \log tg\,x + C$.

In den folgenden Integralen bedeuten m, n, p ganze Zahlen.

8. a.) $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx = \frac{1}{m+n} \sin^{m+1} x \cdot \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cdot \cos^{n-2} x \, dx$

b.) $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx = -\frac{1}{m+n} \sin^{m-1} x \cdot \cos^{n+1} x + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cdot \cos^n x \, dx$

9.) a.) $\int \cos^n x \cdot dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$

b.) $\int \sin^m x \, dx = -\frac{1}{m} \sin^{m-1} x \cos x + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x \, dx$

c.) $\int \cos^n x \cdot \sin x \, dx = -\frac{1}{n+1} \cos^{n+1} x + C$

d.) $\int \sin^m x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} x + C$

10. a.) $\int \frac{dx}{\cos^p x} = \frac{1}{p-1} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{p-1} x} + \frac{p-2}{p-1} \int \frac{dx}{\cos^{p-2} x}$.

b.) $\int \frac{dx}{\sin^p x} = -\frac{1}{p-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{p-1} x} + \frac{p-2}{p-1} \cdot \int \frac{dx}{\sin^{p-2} x}$.

11. a.) $\int x^n \sin x \, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \, dx$.

b.) $\int x^n \cos x \cdot dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x \, dx$.

12. a.) $\int \frac{\sin x}{x^n} dx = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin x}{x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{\cos x}{x^{n-1}} dx$

b.) $\int \frac{\cos x}{x^n} dx = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\cos x}{x^{n-1}} - \frac{1}{n-1} \int \frac{\sin x}{x^{n-1}} dx$

Die Integrale 12a.) und b.) führen schliesslich auf $\int \frac{\sin x}{x} dx$ und $\int \frac{\cos x}{x} dx$ (sog. Integralsinus und Integralcosinus), deren Lösung in endlicher Form nicht möglich ist.

13.) $\int f(e^x) dx$ wird durch die Substitution $e^x = z$, $dx = \frac{dz}{z}$ in das Integral $\int f(z) \cdot \frac{dz}{z}$ übergeführt.

14.) $\int f(\log x) \frac{dx}{x}$ geht durch die Substitution $\log x = z$, $\frac{dx}{x} = dz$ über in: $\int f(z) dz$.

15.) $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$.

16.) $\int \frac{e^x}{x^n} dx = -\frac{1}{n-1} \frac{e^x}{x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^x}{x^{n-1}} dx$.

17.) $\int x^p (\log x)^n dx$ geht durch die Substit. $\log z$, $x^p = e^{pz}$ über in: $\int e^{(p+1)z} \cdot z^n dz$

18.) $\int \frac{x^p dx}{(\log x)^n} = \int \frac{e^{(p+1)z} dz}{z^n}$ (durch dieselbe Substitution)

19.) $\int \frac{dx}{\log x}$ („Integrallogarithmus") ist in endlicher Form nicht lösbar.

## Aufgaben.

1.) Man werte die unter IV. gegebenen Integrale aus.

2.) Man löse die irrationalen Integrale:

a.) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{a+bx}}$ ; b.) $\int x\sqrt[3]{a-x}\,dx$ ; c.) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$ ; d.) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$ ;

e.) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}\,dx$ ; f.) $\int \frac{\sqrt{x^2-4x+5}}{x}\,dx$ ; g.) $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-5}}$ ; h.) $\int \frac{dx}{(x^2+p^2)\sqrt{1-x^2}}$ ;

i.) $\int \frac{30x^5+30x^4+12x^3+21x^2-15x-1}{\sqrt{3x^2+2x+4}}\,dx$.

3.) Man löse folgende trigonometrische Integrale:

a.) $\int \frac{d\varphi}{\sin^3\varphi}$ ; b.) $\int tg^2\varphi\cdot d\varphi$ ; c.) $\int \frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}\,d\varphi$ ; d.) $\int \frac{\sin^3\varphi\,d\varphi}{\cos^4\varphi}$ ;

e.) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\,dx$ ; f.) $\int \frac{dx}{a+b\,tg\,x}$.

4.) Man integriere ferner:

a.) $\int (a+bx)^2 \log x\,dx$ ; b.) $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ ; c.) $\int \cos ax\cdot\sin bx\,dx$.

5.) Man berechne die Bewegung eines fallenden Körpers, wenn ausser der Fallbeschleunigung noch die Verzögerung durch den Luftwiderstand in Betracht gezogen wird, der a.) proportional der Geschwindigkeit; b.) proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit; c.) gleich einer Summe von 2 Termen angenommen wird, von denen der erste proportional $v$, der zweite proportional $v^2$ ist.

---

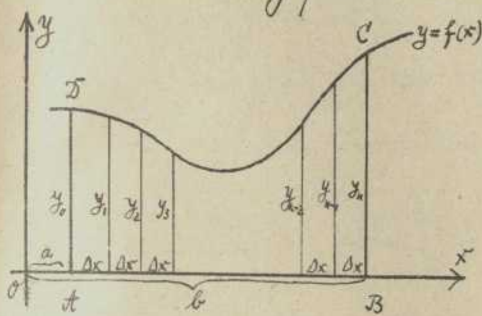
~~Ko~~Korrektur zu Blatt 2: Aufgabe 2.b.) muss es heissen:

$$y = \frac{c}{2}\left(\underline{e}^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) \text{ statt } y = \frac{c}{2}\left(x^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

23. V. 10. **Höhere Mathematik II.** № 4.

## I. Näherungsverfahren zur Ermittelung von Integralen.

1.) Durch Reihenentwickelung. Wenn keine andere der bekannten Methoden zum Ziel führt, die Integration $\int f(x)\,dx$ zu vollziehen, kann man sie gewöhnlich wenigstens mit beliebiger Annäherung durch Entwickelung von $f(x)$ nach dem Taylorschen Satz in eine Potenzreihe, und darauffolgende Integration der einzelnen Summanden durchführen. Dabei ist die Entwickelung freilich nur innerhalb des Konvergenzbezirkes von $f(x)$ brauchbar.




2.) Das bestimmte Integral $\int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = J$ [dargestellt durch den Flächeninhalt in nebenstehender Figur] wird näherungsweise gefunden, indem man das Intervall in eine Anzahl von $n$ äquidistanten Teilen, also die Fläche $ABCD$ in $n$ gleich breite Streifen teilt. Man berechnet nun die $(n+1)$ Ordinaten (Funktionswerte) an den Teilungspunkten: $y_0, y_1, \cdots y_n$. Ersetzt man jeden Streifen durch ein Trapez mit denselben Ecken und summiert, so erhält man als entsprechenden Näherungswert für den gesuchten Flächeninhalt $\int_a^b f(x)\,dx$ (Trapezregel):

$$\frac{b-a}{2n}\left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots\cdots + 2y_{n-2} + 2y_{n-1} + y_n\right] = \frac{\Delta x}{2}\left[y_0 + 2y_1 + \cdots\cdots + 2y_{n-1} + y_n\right].$$

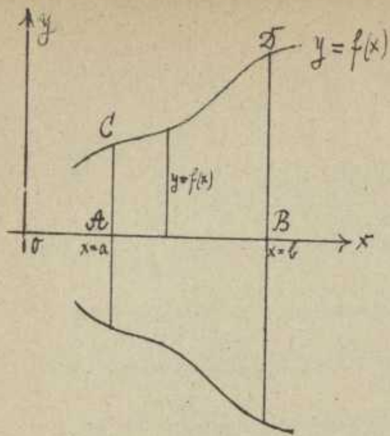
$\Delta x$ = Streifenbreite $\frac{b-a}{n}$.

Grössere Genauigkeit erhält man ohne wesentliche Mehrrechnung durch die Simpsonsche Regel:

$$J = \frac{\Delta x}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots\cdots + 4y_{n-3} + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right].$$

Dabei ist aber nötig, dass $n$ als gerade Zahl gewählt wird. [Bei der Simpsonschen Regel werden die Kurvenstücke statt durch ihre Sehnen durch Parabelbögen durch je drei Kurvenpunkte ersetzt.]

Zur mechanischen Auswertung von Integralen dienen endlich auch die Planimeter und die Integraphen.




## II. Rotationsflächen.

Die Fläche ABCD bzw. der Bogen CD erzeugt bei der Rotation um die x-Axe ein

$$\underline{\text{Volumen}} = \pi \int_{x=a}^{x=b} y^2\,dx$$

bzw. eine $\underline{\text{Oberfläche}} = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} y\,ds = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$

III. Koordinaten $\xi, \eta$ des Schwerpunktes der Fläche ABCD, und Trägheitsmomente $T_x$, $T_y$ dieser Fläche inbezug auf die x-Axe bzw. y-Axe als Drehaxe bei gleichmässiger Massenbelegung $\sigma$:

$$\xi = \frac{\int_{x=a}^{x=b} x\cdot y\,dx}{\int_{x=a}^{x=b} y\,dx}\;; \qquad T_x = \frac{\sigma}{3}\int_a^b y^3\,dx.$$

$$\eta = \frac{\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{2} y^2\,dx}{\int_{x=a}^{x=b} y\,dx}\;; \qquad T_y = \sigma\cdot\int_a^b x^2 y\,dx.$$

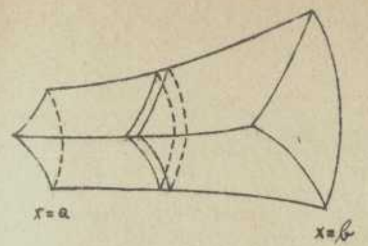
IV. Koordinaten $\xi, \eta$ des Schwerpunktes des Kurvenbogens CD:

$$\xi = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}\;; \qquad \eta = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}$$

V. Die Guldinsche Regel.

1.) Das Volumen eines Rotationskörpers oder eines von zwei Meridianebenen begrenzten Teiles desselben ist gleich dem Produkt aus der rotierenden Fläche und dem Weg des Schwerpunktes dieser Fläche.

2.) Die Oberfläche eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkt aus der Bogenlänge der Meridiankurve und dem Weg des Schwerpunktes dieser Kurve.




VI. Das Volumen eines Körpers, welcher durch zwei zur $x$-Axe senkrechte Ebenen und übrigens durch stetige Flächen begrenzt ist, lässt sich berechnen, wenn man den Querschnitt an einer beliebigen Stelle $x$ finden kann als Funktion $u$ von $x$, durch $\int_{x=a}^{x=b} u(x) \cdot dx$.

---

## Aufgaben.

1.) Man bestimme $\log 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ nach der Trapez- und der Simpsonschen Regel, indem man das Intervall a.) in 2; b.) in 4 Teile teilt. Ebenso berechne man $\log 3 = \int_0^2 \frac{dx}{1+x}$.

2.) Aus $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ soll $\pi$ nach einem Näherungsverfahren berechnet werden.

3.) Man suche den Umfang der Ellipse $x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$ mittels der Simpsonsche Regel oder durch Reihentwickelung.

4.) Der Kreis $x^2 + (y-\beta)^2 - a^2 = 0$ $[\beta > a]$ rotiere um die $x$-Axe. Welches ist das Volumen des Kreisringes?

5.) Man bestimme Inhalt und Oberfläche des Körpers, welcher durch Rotation des Stückes der Kettenlinie

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

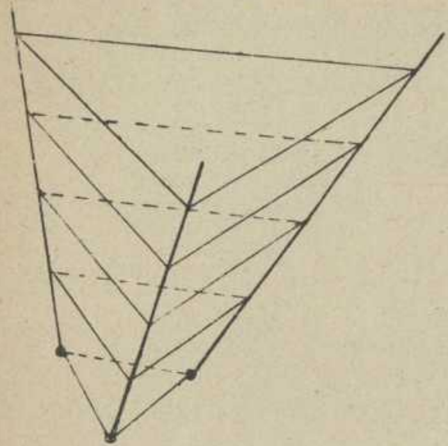
zwischen $x = -c$ und $x = +c$ um die $x$-Axe entsteht.

6.) Ebenso für die Cycloide (zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$):

$$x = a(\varphi - \sin\varphi)$$
$$y = a(1 - \cos\varphi),$$

wenn diese a.) um die $x$-Axe, b.) um die $y$-Axe rotiert.

7.) Wie gross ist der Kubikinhalt des Paraboloids: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ zwischen $z = 0$ und $z = c$?



8.) Drei beliebige windschiefe Geraden werden von allen möglichen Ebenen parallel zur $xy$-Ebene geschnitten. Verbindet man immer die in einer solchen Ebene liegenden 3 Schnittpunkte durch Geraden, so entsteht ein von drei krummen Flächen begrenzter Raum. Man berechne den Kubikinhalt desselben zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = h$.

9.) Über der Parabel $z = 1 - y^2$ in der $zy$-Ebene, sowie über der Parabel $x = 1 - y^2$ in der $xy$-Ebene erhebt sich senkrecht zur $zy$-Ebene, bzw. senkrecht zur $xy$-Ebene je ein Zylinder (parabolischer Zylinder). Wie gross ist der Rauminhalt des Körpers, der von diesen beiden Zylindern einerseits, und den Ebenen $x = 0$ und $z = 0$ andererseits begrenzt wird?

10.) Die Horizontalschnitte einer Fläche bilden, in die $(xy)$-Ebene projiciert, das System von Ellipsen: $x^2 + cy^2 - y = 0$ (wobei $c$ ein variabeler Parameter). Die Endpunkte der in die $(yz)$-Ebene fallenden Hauptaxe einer jeden Ellipse liegen ferner in der $z$-Axe bzw. in der Hyperbel $z = \frac{1}{y}$. Wie gross ist der Rauminhalt der Fläche zwischen den Ebenen $z = 1$ und $z = 2$?

---

Korrektur zu Blatt 3.:

Seite 3, Zeile 2 muss es heissen:

8.b.) $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx = -\frac{1}{m+n} \sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx.$

30. V. 10. **Höhere Mathematik II** № 5.

# Die Determinanten.

## I. Definition der Determinanten durch Entwickelung nach Unterdeterminanten.

Unter der „Determinante" zweiten Grades $\Delta_2$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$ versteht man den Wert: $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$; $[= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12}]$

Unter der Determinante dritten Grades $\Delta_3$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ den Wert: $$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$[= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}].$$

Analog führt man die Determinanten vierten Grades durch Entwicklung nach „Unterdeterminanten" auf solche dritten Grades zurück.

<u>Allgemein</u> ergibt sich die Determinante $n^{\text{ten}}$ Grades $\Delta_n$ als:

$\Delta_n = = \sum_1^n {}^i \, a_{ik} A_{ik} = \sum_1^n {}^k \, a_{ik} A_{ik}$, wo $A_{ik}$ die durch Streichen der Zeile $i$ und der Kolonne $k$ entstehende (zusammengeschobene) Determinante $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, <u>genommen mit dem Vorzeichen von $(-1)^{i+k}$</u>, ist.

Gemäss den Sätzen II.) ist daher $\sum_1^n {}^i \, a_{il} A_{ik} = 0$, und $\sum_1^n {}^k \, a_{lk} A_{ik} = 0$, wenn $l$ von $k$, bezw. von $i$, verschieden ist

## II. Sätze über Determinanten.

1.) Der Wert einer Determinante wechselt das Vorzeichen, wenn in ihr zwei Reihen (oder zwei Kolonnen) mit einander vertauscht werden. <u>Eine Determinante mit zwei gleichen Reihen (oder zwei gleichen Kolonnen) hat demnach den Wert Null.</u>

2.) Ein <u>allen</u> Gliedern einer Reihe oder Kolonne gemeinsamer Faktor kann als Faktor vor die Determinante herausgezogen werden.

3.) Durch Addition einer mit einem beliebigen Faktor multiplicierten Reihe (Kolonne) zu einer andern Reihe (Kolonne) wird der Wert der Determinante nicht geändert. Durch derartige Additionen kann man alle Glieder einer Reihe (oder Kolonne) bis auf eines zu Null machen, und so die Determinante auf eine solche nächst niederer Ordnung reducieren. Kann man aber einmal durch derartige Additionen alle Glieder der Reihe (oder Kolonne) ohne Ausnahme zu Null machen, so ist der Wert der ganzen Determinante Null.

4.) Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man die erste, zweite, ... etc Reihe als erste, zweite ... etc Kolonne schreibt, und umgekehrt. Die Reihen einerseits und die Kolonnen andererseits spielen also ganz äquivalente Rollen.

III. 1.) Sind zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten vorgelegt:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{array}\right\}, \text{ so ergibt sich als Auflösung:}$$

$$x : y : 1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Man erhält diese Lösung aus der „Matrixe" der Coëffizienten: $\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{Vmatrix}$ durch Streichen der entsprechenden Coëfficienten Kolonnen. Man beachte dabei den Wechsel der Vorzeichen!

2.) Sind drei lineare Gleichungen mit drei Unbekannten vorgelegt:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0 \end{array}\right\}, \text{ so heisst } \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{Vmatrix} \text{ wieder die Matrixe}$$

des Gleichungssystems, und die Lösung wird in Determinantenform wieder durch Streichen der entsprechenden Coëfficienten Kolonnen unter jedesmaliger Zeichenänderung gewonnen als:

$$x : y : z : 1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3.) Ganz analog ist bei $n$ linearen Gleichungen mit $n$ Unbekannten zur Lösung zu verfahren.

4.) Sind $n$ lineare Gleichungen mit nur $(n-1)$ Unbekannten vorgelegt, so sind sie nur dann miteinander verträglich, wenn die aus den sämtlichen Coëfficienten des Gleichungssystems gebildete Determinante $n^{\text{ten}}$ Grades gleich Null wird.

## IV. Multiplicationssatz für Determinanten dritten Grades.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13} & a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{23} & a_{11}b_{31}+a_{12}b_{32}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{23}b_{13} & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23} & a_{21}b_{31}+a_{22}b_{32}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{12}+a_{33}b_{13} & a_{31}b_{21}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{23} & a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33} \end{vmatrix}$$

## V. Zweite Definition der Determinanten.

Die Determinante vierten (analog allgemein $n^{\text{ten}}$) Grades:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44}$$

bezeichnet symbolisch die Summe der $4!$ (allgemein $n!$) Produkte, die aus dem Produkt $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ ($a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$), dem „Diagonalgliede", durch Permutation der vorderen (Zeilen-) oder der hinteren (Kolonnen-) Indices gewonnen werden können, in jedes Produkt positiv oder negativ genommen, je nachdem die Zahl der zu seiner Bildung aus $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ ($a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$) nötigen Indexvertauschungen eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Ein solches Produkt enthält je ein Glied aus jeder Reihe und Kolonne der Determinante als Faktor; und andererseits stellen diese sämtlichen Produkte die sämtlichen möglichen solchen Zusammenstellungen von $n$ Faktoren, je einer aus einer Reihe und einer Kolonne, dar.

---

## Aufgaben.

1.) Man berechne den Zahlenwert der folgenden Determinanten:

$$a.)\ \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 9 & -7 \end{vmatrix};\quad b.)\ \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 7 & -6 & 1 \\ -1 & 8 & 2 \end{vmatrix};\quad c.)\ \begin{vmatrix} 8 & 3 & -5 \\ -6 & 3 & -9 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix};\quad d.)\ \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 8 & 2 \\ 3 & 1 & -5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ebenso den expliciten Ausdruck für die Determinanten:

$$e.)\ \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix};\quad f.)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}.$$

2.) Man zeige, von der Formel (8.) von Teil I, Blatt 2 ausgehend, dass der Inhalt des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$: $\quad \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ ist.

3.) Wie lautet die Bedingung dafür, dass drei Gerade der $(xy)$-Ebene sich in einem Punkt schneiden, in Determinantenform?

4.) Man stelle die Gleichung a.) einer Geraden durch 2 gegebene Punkte; b.) eines Kreises durch 3 gegebene Punkte in Parameterform auf.

5.) Man bestimme $x, y, z$ durch Determinantenrechnung aus den 3 linearen Gleichungen:

$$6x+3y-z-6=0;\quad 2x-5y+4z-21=0;\quad 8x-2y-4z-6=0.$$

6.) Man zeige, dass der Wert der Determinante 3. Grades: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ aus dem Schema:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

richtig erhalten wird, indem man die 3 von links oben nach rechts unten durchstrichenen Produkte mit positivem, die 3 von rechts oben nach links unten durchstrichenen Produkte mit negativem Vorzeichen anschreibt und summiert. (Beweis durch Ausrechnen!)

7.) Durch 3 Punkte $x_1 y_1$; $x_2 y_2$; $x_3 y_3$ einer Parabel $y^2 = 2px$ sind Tangenten gelegt. Man beweise, dass das Dreieck, welches von diesen Tangenten eingeschlossen wird, an Fläche halb so gross ist, als das Dreieck, welches entsteht, wenn man die 3 Berührpunkte verbindet.

---

0. VI. 10. **Höhere Mathematik II.** № 6.

## Complexe Zahlen.

I. Addition complexer Zahlen.

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c) + i(b+d)$$

II. Multiplication und Division complexer Zahlen.

$$(a+bi)(c+di) = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1\cdot e^{i\varphi_1}\cdot r_2\cdot e^{i\varphi_2} =$$
$$= r_1 r_2\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right].$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

Speziell ist: $\frac{1}{\alpha+i\beta} = \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}$.

III. Potenzieren und Radicieren von complexen Zahlen (für reelle Exponenten):

$$(a+bi)^{\frac{m}{n}} = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left[\cos\frac{m(\varphi+2k\pi)}{n} + i\sin\frac{m(\varphi+2k\pi)}{n}\right].$$

Man erhält, wenn $m$ und $n$ relativ prim sind, $n$ verschiedene Wurzelwerte für $k = 0, 1, 2, \dots n-1$.

---

## Sätze aus der Gleichungstheorie.

I. Jede Gleichung $n^{ten}$ Grades: $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0$ besitzt $n$ Wurzeln $x_1, x_2, \dots x_n$ und lässt sich in der Form des Produktes $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n) = 0$ schreiben. Sind 2 dieser Wurzeln ($x_1$ und $x_2$) gleich, so verschwindet für $x = x_1$ ausser $f(x)$ auch der Differentialquotient $f'(x)$. Sind die Zahlen $a_1, a_2, \dots a_n$ alle reell, so sind die Wurzeln reell oder paarweise conjugiert complexe, d.h. neben einer Wurzel $p+iq$ existiert stets noch eine zweite Wurzel $p-iq$. — Es ist:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = \sum x_i = -a_1$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = \sum x_i x_k = +a_2$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \sum x_i x_k x_l = -a_3$$
$$\vdots$$
$$x_1 x_2 x_3 x_4 \cdots x_{n-1} x_n = (-1)^n a_n.$$

Jede <u>symmetrische Funktion</u> der Wurzeln $x_1, x_2, \dots x_n$ lässt sich ohne Auflösung der Gleichung rational durch die Coëfficienten $a_1, a_2 \dots a_n$ darstellen.

<u>Descartes'sche Zeichenregel.</u> Jede Gleichung $f(x) = 0$ mit reellen Coëfficienten $a_1 \dots a_n$ hat höchstens so viele positive reelle Wurzeln, als $f(x)$ Zeichenwechsel enthält, und höchstens so viele negative, als $f(-x)$ Zeichenwechsel enthält.

<u>Sturm'scher Satz.</u>

$$
\begin{aligned}
f(x) &= Q_1 f_1(x) - f_2(x) \\
f_1(x) &= Q_2 f_2(x) - f_3(x) \\
f_2(x) &= Q_3 f_3(x) - f_4(x) \\
&\vdots \\
f_{n-2}(x) &= Q_{n-1} f_{n-1}(x) - f_n(x)
\end{aligned}
$$

Man dividiert $f(x)$ durch seinen Differentialquotienten $f'(x) = f_1(x)$; es bleibt ein Rest. Diesen <u>kehrt man im Vorzeichen um</u> und bezeichnet den im Vorzeichen umgekehrten Rest mit $f_2(x)$. Nun dividiert man $f_1(x)$ durch $f_2(x)$; der wieder im Vorzeichen umgekehrte Rest sei $f_3(x)$ u.s.f. Die letzte so erhaltene Grösse $f_n(x)$ ist eine constante Zahl.

Berechnet man nun die Zahlenwerte von : $\left\{\begin{matrix} f(\alpha), & f_1(\alpha), & f_2(\alpha), & \dots \\ f(\beta), & f_1(\beta), & f_2(\beta), & \dots \end{matrix}\right\}$ für 2 gegebene Zahlen $\alpha, \beta$ und zählt ab, wieviele Zeichenwechsel in der oberen, wieviele in der unteren Zeile vorkommen, so gibt die Differenz dieser Zeichenwechsel die Anzahl der zwischen $x = \alpha$ und $x = \beta$ liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ an.

## <u>II. Zerlegung einer Gleichung mit mehrfachen Wurzeln.</u>

Bezeichnet $P_1$ das Produkt der Faktoren von $f(x)$, welche jeder nur einmal, $P_2$ das Produkt der Faktoren, welche je zweimal vorkommen, u.s.f., so ist:

$$
\left.\begin{aligned}
f(x) &= P_1 P_2^2 P_3^3 P_4^4 \dots P_k^k \\
f'(x) &= P_2 P_3^2 P_4^3 \dots P_k^{k-1} \cdot Q_1
\end{aligned}\right\} \; f_1(x) \text{ grösster gemeinschaftlicher Teiler.}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= P_2 P_3^2 P_4^3 \dots P_k^{k-1} \\
\varphi_1'(x) &= P_3 P_4^2 \dots P_k^{k-2} \cdot Q_2
\end{aligned}\right\} \; \varphi_2(x) \quad " \quad " \quad "
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= P_3 P_4^2 \dots P_k^{k-2} \\
\varphi_2'(x) &= P_4 \dots P_k^{k-3} \; Q_3
\end{aligned}\right\} \; \varphi_3(x) \quad " \quad " \quad "
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_3(x) &= P_4 \dots P_k^{k-3} \qquad \text{u.s.f.} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{f(x)}{\varphi_1(x)} = P_1 P_2 P_3 P_4 \cdots P_k \\ f_2(x) &= \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = P_2 P_3 P_4 \cdots P_k \\ f_3(x) &= \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_3(x)} = P_3 P_4 \cdots P_k \\ &\vdots \end{aligned}\right. \qquad \frac{f_1}{f_2} = P_1, \quad \frac{f_2}{f_3} = P_2, \quad \vdots$$

Durch Auflösung von $P_1 = 0$, $P_2 = 0$ ...... erhält man alle Wurzeln der Glg. $f(x) = 0$.

III. Näherungsverfahren, anwendbar auf algebraische und transcendente Gleichungen.

1.) Zunächst sucht man (ev. auf graphischem Weg oder durch Probieren) sich einen angenäherten Wert $\xi_1$ der gesuchten Wurzel der vorgelegten Gleichung $f(x) = 0$ zu verschaffen. Dann gibt die Newton'sche Näherungsmethode den im allgemeinen weit genaueren zweiten Näherungswert: $\xi_1 - \frac{f(\xi_1)}{f'(\xi_1)}$, mit dem man nun ebenso einen dritten etc. finden kann.

2.) Liegt eine Wurzel von $f(x) = 0$ zwischen $\xi_1$ und $\xi_2$, so gibt die Regula falsi den Näherungswert: $\xi_1 + \frac{(\xi_2 - \xi_1)\, f(\xi_1)}{f(\xi_1) - f(\xi_2)}$

IV. Die allgemeine cubische Gleichung $x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$ wird durch die Substitution $x = y - \frac{a_1}{3}$ auf die Form: $y^3 + py + q = 0$ gebracht, deren Wurzeln sich nach der Cardanischen Formel ergeben als:

$$y_1 = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$y_2 = \varepsilon \cdot u + \varepsilon^2 v \qquad \text{wobei } \varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$y_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v \qquad \varepsilon^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$y = u + v, \quad 3u \cdot v = -p, \quad u^3 + v^3 = -q, \quad u^3 - v^3 = \sqrt{q^2 + \tfrac{4}{27}p^3}$$

Ist also $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$, so ist die Wurzel $y_1$ reell, $y_2$ und $y_3$ sind die beiden conjugiert complexen Wurzeln:

$$y_2 = -\frac{u+v}{2} + i\sqrt{3} \cdot \frac{u-v}{2} \quad ; \quad y_3 = -\frac{u+v}{2} - i\sqrt{3} \cdot \frac{u-v}{2}.$$

Ist aber $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$, so sind alle drei Wurzeln reell, erscheinen aber in obiger Formel in imaginärer Form: „casus irreducibilis". Für diesen Fall ist die trigonometrische Auflösung zu verwenden. Man setzt: $\cos\varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ und erhält als die drei reellen Wurzeln:

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\frac{\varphi}{3} \quad ; \quad y_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\left(\frac{\varphi+\pi}{3}\right); \quad y_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{3}\right)$$

---

## Aufgaben.

1.) Man suche den Zahlenwert von $\sqrt[3]{-1+2i}$.

2.) Die Gleichung $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$ hat eine Doppelwurzel. Welches sind die 4 Wurzeln der Gleichung?

3.) Vorgelegt ist die cubische Gleichung $x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$; ohne sie aufzulösen, stelle man diejenige cubische Gleichung auf, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind.

4.) Durch Anwendung des Sturm'schen Satzes trenne man die Wurzeln der Gleichung: $x^4 - 8x^2 + 4x + 1 = 0$ und berechne die grösste der reellen Wurzeln nach einem Näherungsverfahren auf 2 Dezimalen genau.

5.) Die reelle Wurzel der Gleichung: $x^3 - 2x - 5 = 0$ soll auf 4 Dezimalen genau berechnet werden.

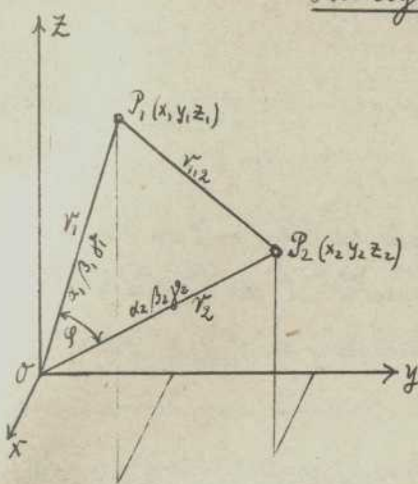
6.) Man verschaffe sich graphisch angenäherte Wurzelwerte für die transcendente Gleichung $\sin x = 1 - \frac{x}{3}$ und berechne eine der Wurzeln nach dem Newton'schen Näherungsverfahren genauer.

7.) Wie hoch muss ein in eine Kugel vom Radius $r$ einbeschriebener Zylinder sein, wenn sein Volumen die Hälfte des Kugelvolumens sein soll?

---

13. VI. 10. **Höhere Mathematik II.** № 7.

## Analytische Geometrie des Raumes.




I.) 1.) Entfernung der beiden Punkte $P_1(x_1 y_1 z_1)$ und $P_2(x_2 y_2 z_2)$ von einander:

$$r_{12} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

2.) Winkel $\varphi$ der Radienvektoren $OP_1$ und $OP_2$:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{r_1 \cdot r_2} = \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2$$

[dabei sind $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \ldots$ die Richtungscosinus!]

3.) Inhalt des Dreiecks $OP_1P_2$:

$$\Delta = \frac{1}{2} r_1 \cdot r_2 \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix} \right\|^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x_1y_2-y_1x_2)^2+(y_1z_2-y_2z_1)^2+(z_1x_2-x_1z_2)^2}$$

4. Volumen des Tetraeders mit den Ecken $O(0,0,0)$; $P_1(x_1,y_1,z_1)$; $P_2(x_2,y_2,z_2)$; $P_3(x_3,y_3,z_3)$:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix};$$

Volumen des Tetraeders mit den Ecken $P_1, P_2, P_3, P_4$:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

5.) Winkel $\varphi$ der zwei (ev. auch windschiefen) Richtungen $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_3P_4}$:

$$\cos\varphi = \frac{(x_2-x_1)(x_4-x_3)+(y_2-y_1)(y_4-y_3)+(z_2-z_1)(z_4-z_3)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \cdot \sqrt{(x_4-x_3)^2+(y_4-y_3)^2+(z_4-z_3)^2}}$$

$$= \lambda_{12} \cdot \lambda_{34} + \mu_{12} \cdot \mu_{34} + \nu_{12}\nu_{34}$$ (wobei die $\lambda, \mu, \nu$ bezw. die Richt.-cosinus)

6.) Koordinaten des Schwerpunktes eines im Raum verteilten Systems von n Massenpunkten:

$$x = \frac{\sum_1^n m_i x_i}{\sum_1^n m_i}; \quad y = \frac{\sum_1^n m_i y_i}{\sum_1^n m_i}; \quad z = \frac{\sum_1^n m_i z_i}{\sum_1^n m_i}.$$

II. Eine Gleichung zwischen x, y, z stellt geometrisch eine Fläche vor, zwei gleichzeitig geltende Gleichungen eine Raumkurve (als Schnitt zweier Flächen).

## III. Die Ebene.

1.) Formen der Gleichung einer Ebene.

a.) $Ax + By + Cz + D = 0$. (allgemeinste Form).

b.)
$$\left.\begin{array}{l} \underset{\downarrow}{\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}\,x + \underset{\downarrow}{\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}\,y + \underset{\downarrow}{\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}\,z + \underset{\downarrow}{\dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}} = 0 \\ \text{oder: } \cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - p = 0. \end{array}\right\} \text{„Normalform"}$$

Die so bestimmten Winkel $\alpha, \beta, \gamma$ sind die Winkel, welche die Ebene mit den Koordinatenebenen $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ bzw. bildet, — oder, was dasselbe ist, die Winkel, welche die Richtung der Normalen der Ebene mit den Koordinatenaxen der $x, y, z$ bildet.

c.) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} - 1 = 0$

$a, b, c$ sind die Stücke, welche die Ebene auf den Koordinatenaxen, vom Nullpunkt ab gerechnet, abschneidet.

d.) Gleichung einer Ebene durch den Punkt $P_1(x_1 y_1 z_1)$ mit den Richtungswinkeln $\alpha, \beta, \gamma$ gegen die Koordinatenebenen:

$$(x - x_1)\cos\alpha + (y - y_1)\cos\beta + (z - z_1)\cos\gamma = 0.$$

2.) Länge des Lotes $p_0$ vom Punkt $P_0(x_0 y_0 z_0)$ auf die Ebene:

| | |
|---|---|
| $0 = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p$ | $0 = Ax + By + Cz + D$ |
| ist: | ist: |
| $p_0 = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p$ | $p_0 = \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. |

Das Vorzeichen von $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ ist so zu wählen, dass $\dfrac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = -p$ eine negative Zahl wird. Also haben Punkte, welche mit dem Anfangspunkt auf derselben Seite der Ebene liegen, einen negativen Abstand von ihr, die Punkte auf der entgegengesetzten Seite einen positiven.

3.) Neigungswinkel der beiden Ebenen $\left\{\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{array}\right.$ gegen einander:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Bedingung für das <u>Senkrechtstehen</u>: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

<u>Zwei</u> Bedingungen für den <u>Parallelismus</u>: $A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2$.

## IV. Die Gerade im Raum.

### Formen der Gleichungen einer Geraden.

1.) $\left.\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{array}\right\}$ Gerade als Schnitt zweier allgemeiner Ebenen.

Richtungswinkel $\lambda, \mu, \nu$ dieser Geraden gegen die Axen:

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = (B_1C_2 - B_2C_1) : (C_1A_2 - C_2A_1) : (A_1B_2 - A_2B_1) = \left\| \begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{matrix} \right\|.$$

2.) Gerade durch zwei gegebene Punkte $P_1(x_1y_1z_1)$ und $P_2(x_2y_2z_2)$:

a.) Parameterdarstellung (wobei der Parameter $\mu$ das Teilverhältnis ist, in welchem der allgemeine Punkt $P(xyz)$ der Geraden die Strecke $\overrightarrow{P_1P_2}$ teilt):

$$x = \frac{x_1 - \mu x_2}{1-\mu}; \quad y = \frac{y_1 - \mu y_2}{1-\mu}; \quad z = \frac{z_1 - \mu z_2}{1-\mu}.$$

b.) $$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

3.) $\left.\begin{array}{l} x = rz + \varrho \\ y = sz + \sigma \end{array}\right\}$ Gerade, dargestellt als Schnitt der beiden Ebenen, durch welche sie in (xz)-Ebene, bzw. in die (yz)-Ebene projiciert werden kann (also der beiden Ebenen, parallel zur y-, bzw. x-Axe, die man durch die Gerade legen kann). —

Richtung: $\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = r : s : 1$.

4.) Gerade durch den gegebenen Punkt $P_1(x_1y_1z_1)$ mit der vorgeschriebenen Richtung $\lambda, \mu, \nu$:

$$\frac{x - x_1}{\cos\lambda} = \frac{y - y_1}{\cos\mu} = \frac{z - z_1}{\cos\nu}.$$

Oder in <u>Parameterdarstellung</u> [als Parameter $\varrho$ ist die Länge $P_1P$ vom gegebenen Punkt $P_1$ bis zum allgemeinen Punkt $P(xyz)$ der Geraden eingeführt]:

$$x = x_1 + \varrho\cos\lambda; \quad y = y_1 + \varrho\cos\mu; \quad z = z_1 + \varrho\cos\nu.$$

---

## Aufgaben.

1.) Gegeben ist ein Tetraeder durch seine 4 Ecken $O(0,0,0)$; $P_1(2,-1,3)$; $P_2(1,2,2)$; $P_3(-1,1,4)$. Man berechne Kanten, Winkel, Oberfläche und Volumen des Tetraeders $OP_1P_2P_3$ und stelle die Gleichungen der Kante $P_1P_2$, der Ebene $P_1P_2P_3$, sowie der von $O$ auf $P_1P_2P_3$ gefällten Senkrechten auf.

2.) Man gebe die Gleichung der Ebene an, welche

a.) durch die Punkte $P_1(0,1,1)$; $P_2(1,0,1)$ geht und zur Ebene $x-y+2z-1=0$ senkrecht steht;

b.) die Gerade $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ enthält und vom Punkt $P(1,1,1)$ den Abstand 1 hat;

c.) die Gerade $\begin{cases} x=z-1 \\ y=-2z \end{cases}$ enthält und mit der $Z$-Axe den $\sphericalangle\ 30^0$ bildet;

d.) senkrecht zur $(xy)$-Ebene steht und von den Punkten $P_1(0,-1,0)$ und $P_2(0,2,1)$ je die Abstände 1 hat.

3.) Man bestimme die Gleichungen der Geraden, welche parallel zur Ebene $x+y+z=0$ ist, durch den Punkt $P(2,2,-1)$ geht und die Gerade 2.c.) schneidet.

4.) Wie findet man die Mittelpunkte der einem Tetraeder ein- und umbeschriebenen Kugel?

5.) Von einem Tetraeder seien die Gleichungen der 4 Seitenflächen gegeben:

$$\begin{aligned} x+y+z\phantom{-1} &= 0 \\ x+y\phantom{+z}-1 &= 0 \\ y+z-1 &= 0 \\ x\phantom{+y}+z-1 &= 0 \end{aligned}$$

Man soll die Koordinaten a.) der 4 Ecken; b.) des Schwerpunktes; c.) der Mittelpunkte der um- und einbeschriebenen Kugel; d.) das Volumen berechnen; e.) die Gerade bestimmen, die 2 gegenüberliegende Kanten schneidet; f.) die Projektionen dieser Geraden auf die 3 Koordinatenebenen angeben; g.) den kürzesten Abstand zweier gegenüberliegender Kanten berechnen. (Vorprüfung 1909).

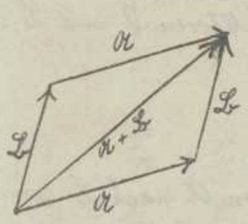
20. VI. 10. **Höhere Mathematik II.** № 8.

## I. Vektoren.

1.) Einen Vektor nennt man jede Grösse, der ausser ihrem numerischen Wert noch eine Richtung im Raum zukommt. Einen solchen Vektor als Inbegriff von Zahlenwert und Richtung bezeichnet man durch $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$, und kann ihn als eine gerichtete Strecke darstellen, deren Länge der Zahlenwert („Tensor") des Vektors ist und mit $A, B, C \ldots$ bezeichnet wird, während ihre Richtung die des Vektors ist.

Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie gleiche Richtung und Grösse haben, ungeachtet an welcher Stelle des Raumes sie sich befinden.

2.) Die Addition zweier Vektoren geschieht durch Aneinandersetzen beider (Fig.!)



Aus dieser Konstruktion folgt:

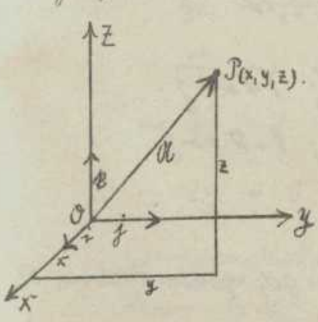
$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}$$

Daraus folgt: Ist $\mathfrak{a}$ der „Einheitsvektor" in der Richtung $\mathfrak{A}$, (also Tensor von $\mathfrak{a}$ gleich 1) so ist $\mathfrak{A} = A \cdot \mathfrak{a}$

Der Vektor $-\mathfrak{A}$ ist dem Tensor nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt dem Vektor $\mathfrak{A}$.

3.) Ein Vektor kann stets nur auf einerlei Weise in drei Vektoren zerlegt werden, die vorgeschriebene Richtungen haben (wenn nur diese 3 Richtungen nicht in einer Ebene liegen):

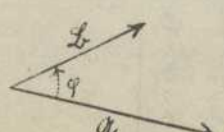
$$\mathfrak{D} = a \cdot \mathfrak{A} + b \cdot \mathfrak{B} + c\,\mathfrak{C}.$$



Zerlegung eines Vektors $\mathfrak{A}$ in Komponenten nach den drei rechtwinkeligen Koordinatenaxen $x, y, z$, deren Einheitsvektoren mit $i, j, k$ bezeichnet werden:

$$\mathfrak{A} = x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k. \qquad \text{Tensor } A = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

4.) Das innere oder skalare Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ nennt man den Ausdruck



$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = A B \cos \varphi \quad [\text{Figur.}]$$

Demnach ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$; $\mathfrak{A}^2 = A^2$

$$ii = 1;\ jj = 1;\ kk = 1;\ ij = 0;\ jk = 0;\ ki = 0.$$

$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0$ [wo $A \neq 0$; $B \neq 0$] ist die Bedingung dafür, dass die beiden Vektoren auf einander senkrecht stehen.

Das skalare Produkt ist eine reine Zahl ohne Richtung.

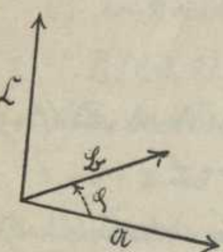
Aus $\mathfrak{A} = x_1 i + y_1 j + z_1 k$ und $\mathfrak{B} = x_2 i + y_2 j + z_2 k$ ergibt sich das skalare Produkt:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 .$$

Es gilt weiter:

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})(\mathfrak{C}+\mathfrak{D}) = \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{D}.$$

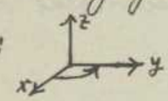
5.) Das äussere oder Vektorprodukt zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ [geschrieben $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$] definiert man als einen neuen Vektor $\mathfrak{C}$, der senkrecht auf beiden Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ steht,




und dessen Tensor

$$C = AB \sin\varphi.$$

Dabei wird der Winkel $\varphi$ in der Richtung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ gemessen und ist derjenige der beiden Winkel zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, der kleiner als $180^\circ$ ist.

Die Richtung von $\mathfrak{C}$ (senkrecht zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$) ist so zu bestimmen, dass von $\mathfrak{C}$ aus gesehen die Drehrichtung des Winkels $\varphi$ im entgegengesetzten Sinn des Uhrzeigers läuft. (Im Einklang mit den Festsetzungen für unser Koordinatensystem: 

.)

Aus der Definition des Vektorproduktes folgt:

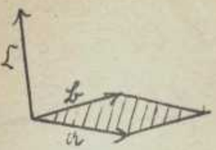
$$V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = -V\mathfrak{B}\mathfrak{A};\quad V\mathfrak{A}\mathfrak{A} = 0. \qquad Vij = k;\quad Vjk = i;\quad Vki = j.$$

$$Vii = 0;\quad Vjj = 0;\quad Vkk = 0. \qquad Vji = -k;\quad Vkj = -i;\quad Vik = -j.$$

Ferner gilt: $V(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})(\mathfrak{C}+\mathfrak{D}) = V\mathfrak{A}\mathfrak{C} + V\mathfrak{A}\mathfrak{D} + V\mathfrak{B}\mathfrak{C} + V\mathfrak{B}\mathfrak{D}$

Sind $x_1, y_1, z_1$ und $x_2, y_2, z_2$ die Koord. der Endpunkte der von $O$ aus gezogenen Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so ist:

$$V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\, i + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\, j + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\, k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$




Geometrisch gedeutet ist das Vektorprodukt $V\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ dem Tensor nach gleich dem Inhalt des von den Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gebildeten Parallelogramms.

Es gilt endlich noch:

$$V\mathfrak{a}V\mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}\cdot(\mathfrak{a}\mathfrak{c}) - \mathfrak{c}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}) = \begin{vmatrix} \mathfrak{b} & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{a}\mathfrak{b} & \mathfrak{a}\mathfrak{c} \end{vmatrix}. \quad \text{(skalar!)}$$

6.) Inhalt eines Parallelepipeds, das durch 3 vom Nullpunkt ausgehende Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bestimmt wird:

$$v = \mathfrak{a}V\mathfrak{b}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}V\mathfrak{c}\mathfrak{a} = \mathfrak{c}V\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

---

## II. Die Gattungen der Flächen 2. Ordnung.

| | | |
|---|---|---|
| 1.) | $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ | Kugel |
| 2.) | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ | dreiaxiges Ellipsoid. Kann durch „affine" Transformation $x = ax'$; $y = by'$; $z = cz'$ aus der Kugel $x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 = 0$ abgeleitet werden. |
| 3.) | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ | einschaliges Hyperboloid |
| 4.) | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ | zweischaliges Hyperboloid. |
| 5.) | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ | imaginäre Fläche. |
| 6.) | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$ | elliptisches Paraboloid |
| 7.) | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$ | hyperbolisches Paraboloid. |
| 8.) | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ | reeller Kegel (Asymptotenkegel zu 3.) und 4.)) |
| 9.) | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ | imaginärer Kegel (Asymptotenkegel zu 2.)). |
| 10.) | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ | elliptischer Zylinder. |
| 11.) | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ | hyperbolischer Zylinder. |
| 12.) | $\frac{x^2}{a^2} - 2y = 0$ | parabolischer Zylinder. |

Dabei ist 1.) auf den Mittelpunkt, 2.)–5.) auf Mittelpunkt und Hauptaxen, 6.)–7.) auf Scheitel und Axen, 8.)–9.) auf Spitze und Axen bezogen.

Die Geraden auf dem einschal. Hyperboloid und dem hyperbol. Paraboloid.

Aus der Fläche $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ oder: $\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) - \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) = 0$

liegen die beiden Scharen von Geraden:

$$\text{I.}\begin{cases}\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right)=0\\ \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)+\left(1-\frac{y}{b}\right)=0\end{cases} \quad \text{und} \quad \text{II.}\begin{cases}\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\mu\left(1-\frac{y}{b}\right)=0\\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)+\left(1+\frac{y}{b}\right)=0\end{cases} \quad (\lambda \text{ und } \mu \text{ Parameter})$$

Auf der Fläche $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2z=0$ oder: $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)-2z=0$ liegen die zwei Geradenscharen

$$\text{I.}\begin{cases}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)+2\lambda=0\\ \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)+z=0\end{cases} \quad \text{und} \quad \text{II.}\begin{cases}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)+\mu z=0\\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)+2=0.\end{cases}$$

Jede Gerade der Schar I. schneidet jede Gerade der Schar II. und umgekehrt. Dagegen sind alle Geraden ein und derselben Schar zu einander windschief.

---

## Aufgaben.

1.) Man berechne die Ausdrücke a.) $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^2+(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})^2$; b.) $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})$ und deute das Resultat geometrisch.

2.) Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ die 3 Seiten eines Dreiecks der Grösse und Richtung nach, so ist $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=0$. Man zeige, dass $\mathfrak{c}^2=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^2$ dann einfach den Cosinussatz darstellt.

3.) Gegeben sind zwei Einheitsvektoren $\mathfrak{n}_1=\cos\alpha_1\, i+\cos\beta_1\cdot j+\cos\gamma_1\cdot k$ und $\mathfrak{n}_2=\cos\alpha_2\cdot i+\cos\beta_2\cdot j+\cos\gamma_2\cdot k$. Man berechne den Sinus des Winkels $\theta$, den sie mit einander bilden, als Länge ihres Vektorproduktes.

4.) Der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{r}=\mathfrak{a}\cos\lambda+\mathfrak{b}\sin\lambda$ beschreibt bei variabelm $\lambda$ eine Ellipse. Beweis!. Ferner sind die beiden Vektoren $\mathfrak{r}_1=\mathfrak{a}\cos\lambda_1+\mathfrak{b}\sin\lambda_1$ und $\mathfrak{r}_2=-\mathfrak{a}\sin\lambda_1+\mathfrak{b}\cos\lambda_1$ zwei konjugierte Halbmesser derselben.

5.) Der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{r}=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\lambda+\mathfrak{c}\lambda^2$ beschreibt bei variabelem $\lambda$ eine Parabel; der des Vektors $\mathfrak{r}=\mathfrak{a}\lambda+\frac{\mathfrak{b}}{\lambda}$ eine Hyperbel.

6.) Sind die Kanten eines Parallelepipeds durch die Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ gegeben, so sind dessen 4 Diagonalen $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$; $-\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$; $\mathfrak{a}-\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$; $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\mathfrak{c}$. Man beweise, dass die Summe der Quadrate der 4 Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der Kanten ist.

27. VI. 10. **Höhere Mathematik II.** № 9.

## I. Entwickelung einer Funktion von zwei Variabeln nach dem Taylor'schen Satz:

a.) $$f(x_0+h,\, y_0+k) = f(x_0 y_0) + \frac{1}{1!}\left[h\bar{f_1} + k\bar{f_2}\right] + \frac{1}{2!}\left[h^2\bar{f_{11}} + 2hk\,\bar{f_{12}} + k^2\bar{f_{22}}\right]$$
$$+ \frac{1}{3!}\left[h^3\bar{f_{111}} + 3h^2k\,\bar{f_{112}} + 3hk^2\bar{f_{122}} + k^3\bar{f_{222}}\right] + \frac{1}{4!}\left[\cdots\cdots\right] + \cdots\cdots$$

Dabei ist: $\bar{f} = f(x_0 y_0)$; $\bar{f_1} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$; $\bar{f_2} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_0y_0}$; $\bar{f_{11}} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{x_0y_0}$; $\bar{f_{12}} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_{x_0y_0}$ u.s.f.

Merkregel: Die Glieder 3. Ordnung (analog $n^{\text{ter}}$ Ordnung) erhält man, indem man den Ausdruck $\frac{1}{3!}\left[h\bar{f_1} + k\bar{f_2}\right]^3$ nach dem binomischen Satz entwickelt und dann $f_{111} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ statt $f_1^3$; $f_{112}$ statt $f_1^2 f_2$; $f_{122}$ statt $f_1 f_2^2$ .... etc schreibt.

b.) $$z = f(xy) = \bar{f} + \frac{1}{1!}\left[(x-x_0)\bar{f_1} + (y-y_0)\bar{f_2}\right] + \frac{1}{2!}\left[(x-x_0)^2\bar{f_{11}} + 2(x-x_0)(y-y_0)\bar{f_{12}} + (y-y_0)^2\bar{f_{22}}\right]$$
$$+ \frac{1}{3!}\left[(x-x_0)^3\bar{f_{111}} + 3(x-x_0)^2(y-y_0)\bar{f_{112}} + 3(x-x_0)(y-y_0)^2\bar{f_{122}} + (y-y_0)^3\bar{f_{222}}\right]$$
$$+ \frac{1}{4!}\left[(x-x_0)^4\bar{f_{1111}} + \cdots\cdots \quad\right] + \cdots\cdots$$

## II. Entwickelung einer Funktion von drei Variabeln nach dem Taylor'schen Satz:

$$F(xyz) = \bar{F} + \frac{1}{1!}\left[(x-x_0)\bar{F_1} + (y-y_0)\bar{F_2} + (z-z_0)\bar{F_3}\right]$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[(x-x_0)^2\bar{F_{11}} + (y-y_0)^2\bar{F_{22}} + (z-z_0)\bar{F_{33}} + 2(x-x_0)(y-y_0)\bar{F_{12}} + 2(y-y_0)(z-z_0)\bar{F_{23}}\right.$$
$$\left. + 2(z-z_0)(x-x_0)\bar{F_{31}}\right]$$
$$+ \frac{1}{3!}\left[\text{Glieder 3. Ordnung} \ldots\right] + \cdots\cdots$$

Dabei ist wieder $\bar{F} = F(x_0 y_0 z_0)$; $\bar{F_1} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x_0y_0z_0}$; .. $\bar{F_3} = \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{x_0y_0z_0}$ u.s.w.

## III. Ergänzungen zur Kurvendiscussion.

a.) Doppelpunkte. Nimmt in einem Punkte $x_0 y_0$ der ebenen Kurve $f(xy) = 0$ der Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = -\frac{f_1}{f_2}$ den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ an, so ist dieser Punkt ein Doppelpunkt der Kurve. Für einen solchen wird also gleichzeitig erfüllt sein: $\bar{f} = f(x_0y_0) = 0$; $\bar{f_1} = 0$ und $\bar{f_2} = 0$. In diesem Punkte sind dann zwei Tangenten an die Kurve vorhanden, und man erhält deren Gleichungen durch Zerlegung von

$$(x-x_0)^2\,\bar f_{11} + 2(x-x_0)(y-y_0)\,\bar f_{12} + (y-y_0)^2\,\bar f_{22} = 0$$

in zwei lineare Faktoren. Je nachdem dabei

$$\bar f_{12}^{\,2} - \bar f_{11}\bar f_{22} \begin{cases} >0 \\ =0 \\ <0 \end{cases} \text{ ist, erhält man } \begin{cases} \text{einen Doppelpunkt mit 2 reellen Tangenten (Fig. 1.)} \\ \text{eine Spitze mit 2 zusammenfallenden Tangenten (Fig. 2)} \\ \text{einen isolierten Punkt mit 2 imaginären Tangenten. (Fig. 3.)} \end{cases}$$

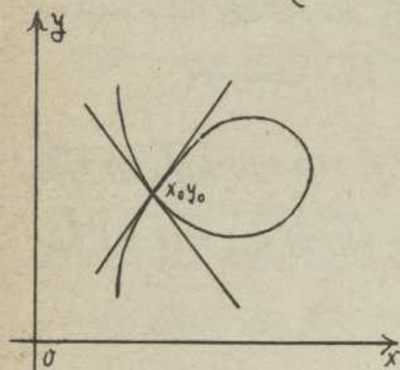


Fig. 1.

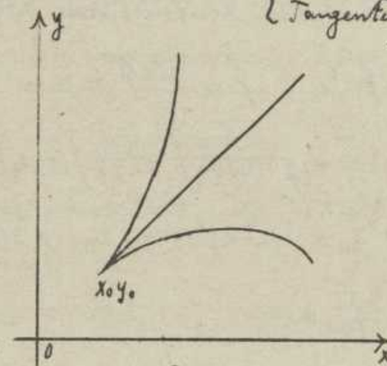


Fig. 2.

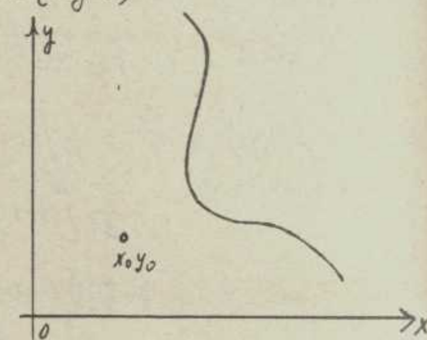


Fig. 3.

b.) Asymptoten. Setzt man in die Gleichung einer algebraischen Kurve $y = mx + n$ ein und bestimmt $m$ und $n$ so, dass die Coëfficienten der beiden höchsten Potenzen von $x$ gleich Null werden, so wird die Gerade $y = mx + n$ eine Asymptote der Kurve sein. Man erhält so alle Asymptoten der Kurve, mit Ausnahme derjenigen, die zur $y$-Axe parallel sind ($m = \infty$). Diese letzteren findet man durch Einsetzen von $x = p$ in die Kurvengleichung und Bestimmung von $p$, so dass die zwei höchsten Potenzen der Kurvengleichung verschwinden.

## IV. Die verschiedenen Formen der Darstellung von Flächen und Raumkurven.

| Flächen | Raumkurven |
|---|---|
| 1.) a.) $F(x\,y\,z) = 0$ | 1.) $\left.\begin{array}{l}\Phi(x\,y\,z) = 0 \\ \Psi(x\,y\,z) = 0\end{array}\right\}$ |
| b.) $z = f(x\,y)$. | |

2.) Parameterdarstellung.

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \\ z &= \chi(u, v) \end{aligned}\right\}$$

V. a.) Tangentialebene

1.) Im Punkt $x_0, y_0, z_0$:

a.) $(x-x_0)\overline{F_1} + (y-y_0)\overline{F_2} + (z-z_0)\overline{F_3} = 0$

b.) $z - z_0 = (x-x_0)\overline{f_1} + (y-y_0)\overline{f_2}$

2.) Im Punkt $u_0, v_0$; dabei sei $x_0 = \varphi(u_0 v_0)$; $y_0 = \psi(u_0 v_0)$; $z_0 = \chi(u_0 v_0)$.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{u_0 v_0} & \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{u_0 v_0} \\ y-y_0 & \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_{u_0 v_0} & \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{u_0 v_0} \\ z-z_0 & \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{u_0 v_0} & \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{u_0 v_0} \end{vmatrix} = 0$$

b.) Normale

1.) Im Punkt $x_0 y_0 z_0$:

a.) $\dfrac{x-x_0}{\overline{F_1}} = \dfrac{y-y_0}{\overline{F_2}} = \dfrac{z-z_0}{\overline{F_3}}$

b.) $\dfrac{x-x_0}{\overline{f_1}} = \dfrac{y-y_0}{\overline{f_2}} = \dfrac{z-z_0}{-1}$.

2.) Im Punkt $u_0, v_0$:

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_{u_0 v_0}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{u_0 v_0} - \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{u_0 v_0}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{u_0 v_0}} = \frac{y-y_0}{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{u_0 v_0}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{u_0 v_0} - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{u_0 v_0}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{u_0 v_0}}$$

$$= \frac{z-z_0}{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{u_0 v_0}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{u_0 v_0} - \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{u_0 v_0}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_{u_0 v_0}}.$$

2.) Parameterdarstellung.

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \\ z &= \chi(t) \end{aligned}\right\}$$

V. a.) Tangente

1.) Im Punkt $x_0, y_0, z_0$:

$$\left.\begin{aligned} (x-x_0)\overline{\Phi_1} + (y-y_0)\overline{\Phi_2} + (z-z_0)\overline{\Phi_3} &= 0 \\ (x-x_0)\overline{\Psi_1} + (y-y_0)\overline{\Psi_2} + (z-z_0)\overline{\Psi_3} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

2.) Im Punkt $t_0$; dabei sei $x_0 = \varphi(t_0)$; $y_0 = \psi(t_0)$; $z_0 = \chi(t_0)$.

$$\frac{x-x_0}{\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0}} = \frac{y-y_0}{\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0}} = \frac{z-z_0}{\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0}}$$

b.) Normalebene.

1.) Im Punkt $x_0 y_0 z_0$:

$$(x-x_0)(\overline{\Phi_2}\,\overline{\Psi_3} - \overline{\Psi_2}\,\overline{\Phi_3}) + (y-y_0)(\overline{\Phi_3}\,\overline{\Psi_1} - \overline{\Psi_3}\,\overline{\Phi_1}) + (z-z_0)(\overline{\Phi_1}\,\overline{\Psi_2} - \overline{\Psi_1}\,\overline{\Phi_2}) = 0$$

2.) Im Punkt $t_0$:

$$(x-x_0)\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + (y-y_0)\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0} + (z-z_0)\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} = 0$$

## Aufgaben.

1.) Man entwickele a.) $z = \sin(x-y)$ an der Stelle $x=0$; $y=\frac{\pi}{4}$; b.) $z = \frac{1}{1-x+y^2}$ an der Stelle $x=1$, $y=1$ nach dem Taylor'schen Satz.

2.) Man untersuche die Gestalt folgender Kurven, insbesondere auf Doppelpunkte u. Asymptoten:

a.) $x^3+y^3-3axy=0$

b.) $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$ (Lemniscate)

c.) $y^2(2a-x)-x^3=0$ (Cissoide)

d.) $x^2y-3x^2-y=0$

e.) $(x+y+1)^2-(1-x)^3=0$.

3.) Man bestimme Tang.-Ebene und Normale in einem beliebigen Punkt der Fläche $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0$. Wenn weiter die $z$-Koordinate dieses Punktes und die Länge seiner Normale bis zur $(xy)$-Ebene gleich $N$ bekannt sind, sollen die $x$- und $y$-Koord. des Punktes gefunden werden.

4.) Man bestimme ferner Tangentialebene und Normale in einem beliebigen Punkt der Fläche

a.) $\left.\begin{aligned} x &= a\sin u\cos v\\ y &= b\sin u\sin v\\ z &= c\cos u\end{aligned}\right\}$ (Ellipsoid).

b.) $\left.\begin{aligned} x &= u\cos v\\ y &= u\sin v\\ z &= \tfrac{1}{2}v^2\end{aligned}\right\}$

Wie heissen die Gleichungen in rechtwinkligen Koordinaten?

5.) Tangente und Normalebene aufzustellen in einem beliebigen Punkt der Raumkurve:

a.) $\left.\begin{aligned} x &= at\\ y &= bt^2\\ z &= ct^3\end{aligned}\right\}$

b.) $\left.\begin{aligned} x &= \cos t\\ y &= \sin t\\ z &= \cos^2 t\end{aligned}\right\}$

An welchen Stellen läuft die Tangente horizontal? Welches sind in rechtwinkl. Koord. die Projektionen in die einzelnen Koordinatenebenen?

6.) Man zeige, dass der Ort des Schnittpunktes von drei zu einander senkrechten Tangentialebenen an das Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ eine Kugel ist!

---

<u>Berichtigung</u>: In Blatt 8, Seite 3, Zeile 4 von oben muss es statt „(skalar)" heissen: „wieder ein <u>Vektor</u>".

11. VII. 10. **Höhere Mathematik II.** № 10.

## I. Zur Theorie der Flächen.

1.) Ist in einem Punkt $x_0 y_0 z_0$ der Fläche $F(xyz)=0$ gleichzeitig ausser $\overline{F}=0$ noch $\overline{F}_1=0$, $\overline{F}_2=0$, $\overline{F}_3=0$, so ist dieser Punkt ein Knotenpunkt der Fläche, und die Fläche wird in der Umgebung dieses Punktes durch den Tangentialkegel dargestellt:

$$0=\overline{F}_{11}(x-x_0)^2+\overline{F}_{22}(y-y_0)^2+\overline{F}_{33}(z-z_0)^2+2\overline{F}_{12}(x-x_0)(y-y_0)+2\overline{F}_{23}(y-y_0)(z-z_0)+2\overline{F}_{31}(z-z_0)(x-x_0).$$

2.) Flächenkrümmung. Bildet man für einen Punkt der Fläche $F(xyz)=0$ die Determinante:

$$\Delta=\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_1 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 & 0 \end{vmatrix}$$

so bestimmt sich die Art der Krümmung der Fläche in diesem Punkt nach dem Vorzeichen von $\Delta$.

Ist $\Delta<0$, so heisst die Krümmung dort elliptisch; die Tangentialebene schneidet die Fläche in einer Kurve, für die der Berührpunkt ein isolierter Punkt ist.

Ist $\Delta>0$, so heisst die Krümmung dort hyperbolisch; die Tangentialebene schneidet die Fläche in einer Kurve, für die der Berührpunkt ein Doppelpunkt mit reellen Tangenten ist.

Ist $\Delta=0$, so heisst die Krümmung dort parabolisch; die Tangentialebene schneidet die Fläche in einer Kurve, für die der Berührpunkt ein Doppelpunkt mit zusammenfallenden Tangenten (eine Spitze) ist. Die Punkte einer Fläche, in denen die Flächenkrümmung parabolisch ist, bilden die parabolische Kurve der Fläche. Die Kurve trennt im allgemeinen die elliptisch und hyperbolisch gekrümmten Teile der Fläche von einander.

Speziell für die Form der Flächengleichung $z=f(xy)$, wird die Bedingung für

$$\left.\begin{matrix}\text{elliptische}\\ \text{hyperbolische}\\ \text{parabolische}\end{matrix}\right\}\text{Krümmung}:\quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}\left\{\begin{matrix}>0\\ <0\\ =0\end{matrix}\right.$$

Ist die Gleichung einer Fläche 2. Ordnung in der allgemeinen Form gegeben:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0,\quad \text{so ist:}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},\quad \text{wo } a_{ik}=a_{ki} \text{ ist, und daher:}$$

$\Delta < 0$ : Kugel; Ellipsoid; zweischaliges Hyperboloid; ellipt. Paraboloid (elliptische Krümmung).
$\Delta > 0$ : einschaliges Hyperboloid; hyperbolisches Paraboloid; imaginäre Fläche (hyperbol. " ).
$\Delta = 0$ : Kegel; Zylinder; Ebenenpaar (parabolische Krümmung.)

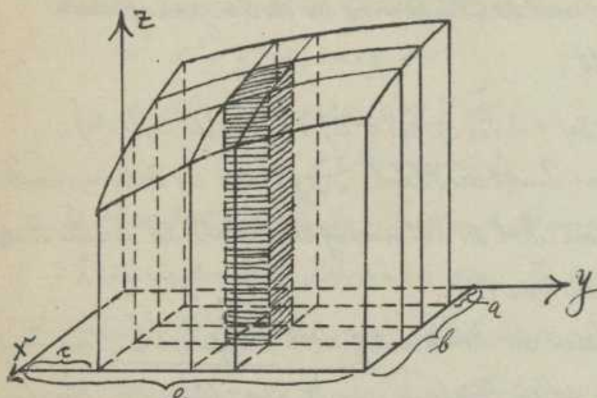



Fig. 1.

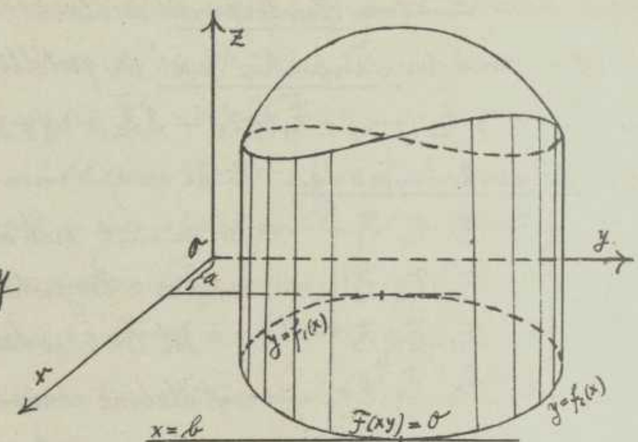



Fig. 2.

## II. Flächen- und Volumenintegrale. – Mehrfache Integrale.

1.) Das Volumen des prismatoidischen Körpers, begrenzt unten durch die Ebene $z=0$, oben durch die Fläche $z=\varphi(xy)$, seitlich durch die Ebenen $x=a$, $x=b$, sowie $y=c$, $y=e$ ergibt sich als

$$V=\int_{x=a}^{x=b} dx \int_{y=c}^{y=e} \varphi(xy)\,dy.$$

2.) Das Volumen des Körpers, begrenzt unten durch die Ebene $z=0$, oben durch die Fläche $z=\varphi(xy)$, und seitlich durch den Zylinder $F(xy)=0$ (Fig. 2), ergibt sich als:

$$V=\int_{x=a}^{x=b} dx \int_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} \varphi(xy)\,dy$$

Dabei ist angenommen, dass die geschlossene Kurve $F(xy)=0$ für jeden Wert $x$ zwei Werte von $y$, also durch Auflösung nach $y$ für den untern bezw. obern Kurventeil $y=f_1(x)$ bzw. $y=f_2(x)$ ergibt.

3.) Die geschlossene Fläche $\Phi(xyz)=0$ projiciert sich ihrem Umriss nach in die Ebene $z=0$ durch einen Zylinder, der die Fläche in allen den Punkten berührt, in denen die Tangentialebene parallel zur $z$-Axe ist. Die Gleichung dieses Umrisszylinders wird also gefunden durch Elimination von $z$ aus $\Phi(xyz)=0$ und $\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0$.

Das Resultat dieser Elimination sei $F(xy)=0$. Weiter ergibt die geschlossene Fläche $\Phi=0$

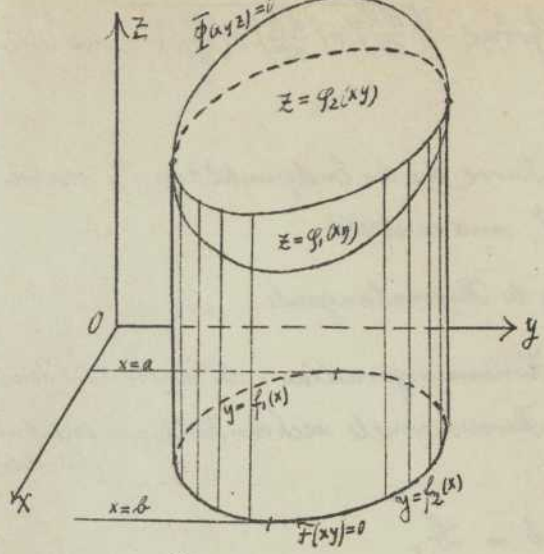



Fig. 3.

durch Auflösung nach $z$ für jedes Wertepaar $xy$ (mindestens) zwei Werte von $z$, nämlich $z=\varphi_1(xy)$ für die untere, $z=\varphi_2(xy)$ für die obere Flächenschale bis zur Umrisskurve (Fig. 3.)

Dann ist das Volumen des von der Fläche eingeschlossenen Körpers

$$V=\int_{x=a}^{x=b} dx \int_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} [\varphi_2(xy)-\varphi_1(xy)]\,dy.$$

Die Grenzen für $x$ und $y$ werden wie in 2.) berechnet.

4.) Die Oberfläche eines krummen Flächenstückes auf der Fläche $z=\varphi(xy)$, seitlich begrenzt durch die Ebenen $x=a$, $x=b$; $y=c$; $y=e$ (d. h. deren Schnittkurven mit der Fläche) ist als Summe der Flächenelemente $\cos\gamma \cdot dw = dx\,dy$, wo $\gamma$ der Neigungswinkel des Flächenelements gegen die $xy$-Ebene, oder:

$$dw = dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2} \qquad \text{gleich:}$$

$$O=\int_{x=a}^{x=b} dx \int_{y=c}^{y=e} \sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\,dy.$$

Ist die Begrenzung des Flächenstückes die Schnittkurve des Zylinders $F(xy)=0$ mit der Fläche, so ist die Oberfläche des Flächenstücks

$$O=\int_{x=a}^{x=b} dx \int_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} \sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}\,dy.$$

---

## III. Differentiation der Vektoren.

1.) Ist der Vektor $\mathfrak{R}=\mathfrak{X}i+\mathfrak{Y}j+\mathfrak{Z}k$ von einer skalaren Grösse (z. B. der Zeit) abhängig, so ergibt die Differentiation nach $t$ einen neuen Vektor $\mathfrak{V}=\frac{d\mathfrak{X}}{dt}i+\frac{d\mathfrak{Y}}{dt}j+\frac{d\mathfrak{Z}}{dt}k=\frac{d\mathfrak{R}}{dt}$ (die Geschwindigkeit). Dabei ist $V=\sqrt{\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\mathfrak{Y}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dt}\right)^2}=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$ der absolute Betrag der Geschwindigkeit; $v_x, v_y, v_z$ ihre Komponenten in den Koordinatenrichtungen.

Nochmalige Differentiation nach $t$ ergibt die Beschleunigung

$$\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} = \mathfrak{L} = \frac{d^2X}{dt^2}i + \frac{d^2Y}{dt^2}j + \frac{d^2Z}{dt^2}k$$ mit der Grösse $\sqrt{\left(\frac{d^2X}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2Y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2Z}{dt^2}\right)^2}$ und den Komponenten: $\frac{d^2X}{dt^2}, \frac{d^2Y}{dt^2}, \frac{d^2Z}{dt^2}$.

2.) Bedeutet s die Bogenlänge, gemessen auf der Kurve, die der Endpunkt von $\mathfrak{R}$ beschreibt, indem s von t abhängig ist, so ist $\frac{ds}{dt} = V$, und es stellt

$\frac{d\mathfrak{R}}{ds} = \mathfrak{t}$ den Einheitsvektor in Richtung der Kurventangente,

$\frac{d^2\mathfrak{R}}{ds^2} = \frac{1}{r}\cdot\mathfrak{n}$ das Produkt des reciproken Krümmungsradius r der Kurve mit dem Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ in Richtung der Kurvennormale nach dem Krümmungscentrum hin dar.

Daraus folgt dann die Darstellung:

$$\frac{d\mathfrak{R}}{dt} = V\cdot\mathfrak{t}; \quad \frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} = \frac{V^2}{r}\cdot\mathfrak{n} + \frac{dV}{dt}\cdot\mathfrak{t} = \mathfrak{L},$$

wo $\frac{V^2}{r}$ die Zentripetalbeschleunigung, $\frac{dV}{dt}$ die Bahnbeschleunigung ist.

3.) Ist eine <u>skalare</u> <u>Funktion</u> $\Phi(xyz) = 0$ gegeben (z. B. das „Potential"), so ist der <u>daraus abgeleitete Vektor</u>

$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot i + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot j + \frac{\partial\Phi}{\partial z}k$ von grosser Wichtigkeit (z. B. die aus dem Potential $\Phi$ folgende Kraft angebend).

Wird dagegen die „Operation $\nabla$" auf einen <u>Vektor</u> $\mathfrak{A} = A_1 i + A_2 j + A_3 \cdot k$ angewendet, so ergibt sie den <u>skalaren Ausdruck</u>:

$\nabla\mathfrak{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$ (die „<u>Divergenz</u>" von $\mathfrak{A}$, abgekürzt div $\mathfrak{A}$).

Endlich kann aus dem <u>Vektor</u> $\mathfrak{A}$ noch durch Differentiation nach x, y, z <u>ein neuer Vektor</u> abgeleitet werden, nämlich:

$$\text{curl}\,\mathfrak{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)k$$

In symbolischer Schreibweise lässt sich dies auch durch die Determinante darstellen:

$$\text{curl}\,\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix};$$ analog wie das Vektorprodukt $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ sich darstellen lässt: $$V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

## Aufgaben.

1.) Man discutiere und zeichne die Kurven

a.) $3x^2y - y^3 + 3(x^2+y^2) - 2 = 0$ ; b.) $x^3 - xy^2 - ay^2 = 0$.

c.) $x^3 - xy^2 - a(x^2+y^2) = 0$.

2.) Gegeben das Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$. a.) Man leite die Gleichung des Tangentialkegels von einem beliebigen Punkt an das Ellipsoid ab. b.) Wie muss ein leuchtender Punkt P liegen, damit das von ihm beleuchtete Ellipsoid in eine Ebene parallel zur xy-Ebene einen kreisförmigen Schatten wirft?

3.) Welches ist die parabolische Kurve der Fläche

a.) $z = \cos\sqrt{x^2+y^2}$ ; b.) $z = \frac{a^3}{a^2+x^2+y^2}$ ? Welcher Art ist die Krümmung in den einzelnen Teilen der Fläche?

4.) An welchen Stellen hat die Fläche $z = x^2 + \cos y$ horizontale Tangentialebenen? Durch welche Flächen 2. Ordnung kann die Fläche an diesen Stellen näherungsweise dargestellt werden? Wo ist die Fläche parabolisch gekrümmt?

5.) Man bestimme die Knotenpunkte der Fläche $x^2 + y^2 + x(z^2-1) = 0$ sowie die Tangentialkegel daselbst.

6.) Wie gross ist das Volumen des Körpers, begrenzt von der Fläche $xyz = a^3$, der xy-Ebene und den Ebenen $x = a$ ; $x = 2a$ ; $y = b$, $y = 2b$ ?

7.) Welches ist das Volumen des Körpers, begrenzt von dem Paraboloid $2z = x^2 - y^2$, der xy-Ebene und dem Zylinder $x^2 + y^2 = a^2$ ? Wie gross ist das Flächenstück, das der Zylinder aus dem Paraboloid ausschneidet?

8.) Gegeben ist der Vektor $\mathfrak{R} = a(\cos t\, i + \sin t\, j + \frac{1}{2} t \cdot k)$. Man gebe die Geschwindigkeit und Beschleunigung (auch als Vektoren) an, die der Endpunkt des Vektors zur Zeit t besitzt, ferner die Komponenten beider a.) in Richtung der Tangente ; b.) in Richtung des Radiusvektors vom Nullpunkt aus c.) in Richtung der Senkrechten vom Kurvenpunkt auf die z-Axe.

9.) Man gebe den Vektor an, der eine nach dem Anfangspunkt hin wirkende, mit dem umgekehrten Quadrat der Entfernung abnehmende Anziehungskraft darstellt, und beweise, dass sowohl die Divergenz als auch der Curl dieses Vektors Null ist.

10.) Ein Vektorprodukt wird nach der analogen Produktregel wie ein gewöhnliches Produkt differenziert, also $\frac{dV\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{dt} = V\frac{d\mathfrak{a}}{dt}\mathfrak{b} + V\mathfrak{a}\frac{d\mathfrak{b}}{dt}$. Beweis durch Ausrechnen! Man beweise nun durch Vektorenrechnung, dass, wenn von Punkt O aus eine nur von der Entfernung OP abhängige Kraft auf P wirkt, OP in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume überstreicht.

---

Name: ________________          Note: ____

# Höhere Mathematik II.

## Semestralprüfung. S.S. 1910.

1.) Man integriere

a.) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+1}\,dx$ ; b.) $\int_{x=-\infty}^{x=0} x\,e^{ax}\,dx$ ; c.) $\int_{x=0}^{x=1} x\sqrt{1-x^2}\,dx$ ; d.) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$.

2.) Man werte das bestimmte Integral $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x}\,dx$ durch Anwendung der Simpsonschen Regel aus, wobei als Anzahl der Streifen $n=4$ angenommen sei.

3.) Wie ist $\lambda$ zu wählen, damit die drei homogenen linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} x - y + 4\lambda z &= 0 \\ \lambda x + 3y + 2z &= 0 \\ 3x + \lambda y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

mit einander verträglich sind?

4.) Die Gleichung $x^3 - x - 2 = 0$ hat zwischen $x=1$ und $x=2$ eine reelle Wurzel. Man berechne diese nach einem Näherungsverfahren auf 2 Dezimalen genau.

5.) Man bestimme Doppelpunkte und Asymptoten der Kurve $x^2 - y^2 - x^2 y = 0$ und zeichne die Kurve.

6.) Man discutiere die Fläche $z = \cos x + \cos y$ durch Schnitte parallel zur (xz)-Ebene und (yz)-Ebene. An welchen Stellen ist die Tangentialebene parallel zur (xy)-Ebene? Welche von diesen Stellen sind höchste und tiefste Punkte, welche sind Sattelpunkte?

(Die Aufgaben sind auf diesem Blatt zu bearbeiten).

4. XI. 10. **Höhere Mathematik III.** № 1.

## Differentialgleichungen.

I. Eine Gleichung zwischen der unabhängigen Variabeln $x$, der abhängigen $y$ und beliebig hohen Differentialquotienten von $y$ nach $x$, also eine Gleichung von der Form:

$$\mathfrak{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

heisst eine totale Differentialgleichung für $y$. Ist der höchste darin vorkommende Differentialquotient der $n^{te}$, so sagt man, die Differentialgleichung ist von der $n^{ten}$ Ordnung.

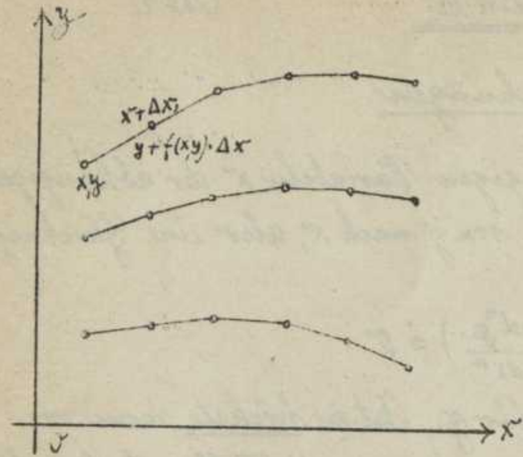
II. Totale Differentialgleichungen erster Ordnung.

$$\mathfrak{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Gelingt es, eine Funktion $y = f(x)$ so zu finden, dass sie in die Differentialgleichung eingesetzt dieselbe identisch erfüllt, so ist $y = f(x)$ ein partikuläres Integral der Differentialgleichung. Das allgemeine Integral, von dem alle partikulären Integrale nur Spezialfälle sind, enthält bei einer Differentialgleichung erster Ordnung eine willkürliche Constante $C$; dadurch dass man für dieselbe andere und andere bestimmte Werte annimmt, erhält man die einzelnen partikulären Integrale.

Die Lösung einer Differentialgleichung sucht man auf die früher behandelte Auswertung von Integralen einer Variabeln (auf „Quadraturen") zurückzuführen.

III. Die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, wo $f(xy)$ im betrachteten Bereich der $xy$-Ebene als eindeutige Funktion von $x$ und $y$ vorausgesetzt wird, gibt für jeden Punkt $x, y$ einen Wert $\frac{dy}{dx}$, d. h. eine zugehörige Fortschreitungsrichtung. Folgt man dieser Richtung eine kleine Strecke vom Punkt $x, y$ an bis zum Punkt $x + \Delta x$, $y + \Delta y = y + f(xy) \cdot \Delta x$, so gibt die Differential-




gleichung für diesen neuen Punkt eine neue (von der ersten wenig abweichende) Fortschreitungsrichtung, in der man wieder eine kleine Strecke fortzuschreiten hat, u.s.w. So erhält man durch die Zusammensetzung solcher Stückchen einen geradlinig gebrochenen Polygonzug, der beim Übergang zur Grenze (d.h. wenn $\Delta x$ unendlich klein wird) in eine Kurve übergeht, welche eine Lösung der Differentialgleichung darstellt, da ihre Tangentenrichtung überall gerade die durch die Differentialgleichung geforderte ist.

Je nach Wahl des Ausgangspunktes (vergl. Figur) erhält man verschiedene Kurven, die insgesamt als Kurvenschar mit einem Parameter das allgemeine Integral mit einer willkürlichen Konstanten $C$, einzeln je ein partikuläres Integral darstellen.

Das oben angegebene geometrische Verfahren kann als graphische Näherungsmethode zur approximativen Lösung der Differentialgleichung dienen.

## IV. Einfach integrierbare Differentialgleichungen erster Ordnung.

1. Der einfachste Fall, dass nämlich in der Differentialgleichung ausser $\frac{dy}{dx}$ nur $x$ oder nur $y$ vorkommt, ist die Aufgabe der früher behandelten Integralrechnung. Denn aus

$$\Phi\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \Psi\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

folgt durch Auflösung nach $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) \qquad \text{bzw.} \quad \frac{dy}{dx} = \psi(y) \quad \text{d.h.} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\psi(y)}$$

Die allgemeinen Integrale sind also:

$$y = \int \varphi(x)\,dx + C \qquad \text{bezw.} \qquad x = \int \frac{1}{\psi(y)}\,dy + C.$$

2. Die Differentialgleichung

$$\varphi_1(x) \cdot \psi_1(y) \frac{dy}{dx} = \varphi_2(x) \cdot \psi_2(y)$$

wird durch <u>Separation der Variabeln</u> integriert und ergibt als allgemeines Integral:

$$\int \frac{\psi_1(y)}{\psi_2(y)}\,dy = \int \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}\,dx + C$$

3. Eine Differentialgleichung, die sich auf die Form:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

(<u>homogene Differentialgleichung</u>) bringen lässt, wird durch die Substitution $y = x \cdot z$ also $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$ in die separierbare, also nach 2.) lösbare Differentialgleichung übergeführt:

$$\varphi(z) \cdot \left[z + x\frac{dz}{dx}\right] + \psi(z) = 0.$$

Das allgemeine Integral ergibt sich als:

$$\log x = -\int \frac{\varphi(z)}{\psi(z) + z \cdot \varphi(z)}\,dz + C.$$

---

## <u>Aufgaben.</u>

1. Vorgelegt sind die Differentialgleichungen:

$$a.)\ \frac{dy}{dx} = x\,; \qquad b.)\ \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2}\,; \qquad c.)\ \frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Man gebe das allgemeine Integral und dasjenige partikuläre jeder derselben an, das durch das Wertepaar $\left\{\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ erfüllt wird. Dann suche man sich nach der unter <u>III.</u> gegebenen Methode durch Zeichnung eines Polygonzuges näherungsweise ein Bild von dieser durch den Nullpunkt gehenden Kurve zu verschaffen, indem man der Reihe nach $\Delta x = 1$; $\Delta x = \frac{1}{2}$; $\Delta x = \frac{1}{4}$ wählt, und vergleiche die so erhaltenen Näherungen mit der exakten Lösung.

2. Ebenso suche man das allgemeine Integral der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{4y}$ und dasjenige partikuläre, das durch $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ befriedigt wird. Ferner stelle man wie in Aufgabe 1.) auch dieses (partikuläre) Integral näherungsweise durch Polygonzüge dar für $\Delta x = 2$; $\Delta x = 1$; $\Delta x = \frac{1}{2}$.

3. Man zeige, dass $y = -(x-1)$ und $y = \frac{1-x}{x}$ zwei partikuläre Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x-1}\right)^2 \quad \text{sind.}$$

4. Man integriere die separierbaren Differentialgleichungen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\ ; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\ ; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}\ ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}\ ; \quad \frac{dy}{dx} = 2\,\frac{y}{x}\ ;$$

$$\frac{dy}{dx} = k\cdot\frac{y}{x}\ ; \quad \frac{dy}{dx} = 2\cdot\frac{y-1}{x+1}\ ; \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{x\cdot y}\ ; \quad y\,\frac{dy}{dx} + \sin x = 0\ ;$$

$$y(1-x^2)\,dy - x(1+y^2)\,dx = 0.$$

5. Man integriere die homogenen Differentialgleichungen:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}}\ ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}\ ; \quad x\,dy - y\,dx = dx\sqrt{x^2+y^2}\ ; \quad \frac{dy}{dx} = \left(1+\log\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x}.$$

6. Wie heisst die Gleichung des Büschels der Kreise, welche die y-Axe im Nullpunkt berühren? Welches ist die Differentialgleichung des Büschels?

7. Man forme durch passende Verschiebung des Koordinatenanfangspunktes die Diff.-Gl.: $(x - 3y + 2)\,dx + (3x - y - 2)\,dy = 0$ in eine homogene Diff.-Gl. um und suche deren Integral.

---

22. XI. 10. **Höhere Mathematik III.** № 2.

## Lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

I. Eine lineare Diff.-Gl. erster Ordnung ist eine Diff.-Gl., in welcher der erste Differentialquotient und die abhängige Variabele nur im ersten Grad vorkommen. Sie hat die Form

$$\frac{dy}{dx} + X_1 y = X_2 . \qquad (X_1 \text{ und } X_2 \text{ Funktionen von } x \text{ allein})$$

1.) Die „reducierte" lineare Diff.-Gl. erster Ordnung: $\frac{dy}{dx} + X_1 y = 0$ wird durch Separation der Variabeln integriert und ergibt:

$$y = C \cdot e^{-\int X_1 dx} = C \cdot y_1 , \quad \text{wo } y_1 \text{ ein beliebiges particuläres Integral.}$$

2.) Die „erweiterte" lineare Diff.-Gl. erster Ordnung: $\frac{dy}{dx} + X_1 y = X_2$ wird durch den Ansatz $y = z(x) \cdot y_1$, wo $y_1$ ein particuläres Integral der reducierten Gleichung ist, übergeführt in: $\frac{dz}{dx} \cdot y_1 = X_2$, woraus sich als allgemeines Integral ergibt:

$$z = \int X_2 \cdot y_1^{-1} dx + C.$$

Das gesuchte allgemeine Integral der erweiterten Diff.-Gl. ist also:

$$y = y_1 \int X_2 \cdot y_1^{-1} dx + C \cdot y_1 .$$

Daraus lässt sich der Satz ableiten: Das allgemeine Integral der erweiterten linearen Diff.-Gl. 1. Ordnung setzt sich zusammen aus einem beliebigen particulären Integral der erweiterten Diff.-Gl. plus dem allgemeinen Integral der reducierten Gleichung.

II. Eine Differentialgleichung von der Form:

$$\frac{dy}{dx} + X_1 y = X_2 y^n$$

wird durch die Substitution $y^{1-n} = v$ auf die Gleichung

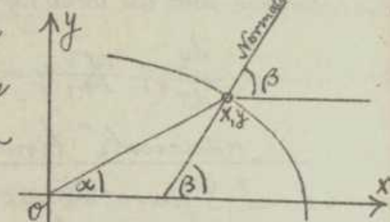
$$\frac{1}{1-n} \cdot \frac{dv}{dx} + X_1 v = X_2$$

zurückgeführt, die nach I. integrierbar ist.

## Aufgaben.

1.) Der Bogen einer Kurve, von ihrem Schnittpunkt mit der Abscissenaxe bis zu ihrem Punkt $x, y$ gerechnet, soll a.) gleich der doppelten Abscisse $x$; b.) gleich der Summe $x^2 + y$; c.) gleich der Differenz $e^x - y$ sein. Man suche die Kurve.

2.) Es soll aus Glas vom Brechungsindexe $n$ eine Linse in Form eines Rotationskörpers geschliffen werden von der Beschaffenheit, dass alle Strahlen, die parallel zur Axe des Körpers ($x$-Axe) einfallen, nach dem Koordinatenanfangspunkt $O$ gebrochen werden. Welche Form muss der Meridian dieses Körpers haben? (Snellius'sches Brechungsgesetz: $n = \frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$.)




3.) Man integriere die folgenden linearen Differentialgleichungen:

a.) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 2x^2$. b.) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+2}{x^2}$.

c.) $2x\frac{dy}{dx} - y = \frac{3}{2}x^2$. d.) $\frac{dy}{dx} + ay = m\sin x + n\cos x$.

e.) $\frac{dy}{dx} + 2\frac{y}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. f.) $\frac{dy}{dx}\cos x + y\sin x = x\cos x + \frac{x^2}{2}\sin x$.

ferner nach II. zu integrieren:

g.) $x\frac{dy}{dx} - 2y + 3xy^2 = 0$. h.) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\log x}{y^2}$.

4.) Man integriere Aufgabe 3.b.) mittels der Substitution: $y = z - \frac{1}{x}$; ebenso Aufg. 3.g.) mittels der Subst.: $y = \frac{z}{x}$.

5.) Eine Spule von der Selbstinduktion $\mathfrak{L}$ und dem Widerstande $\mathfrak{R}$ rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $w$ im gleichförmigen magnetischen Feld (Drehaxe senkrecht zur magnetischen Kraft). Für den Strom $i$ in der Spule gilt sodann die Diff.-Gl.:

$$\mathfrak{L}\cdot\frac{di}{dt} + \mathfrak{R}i = A\cdot w\sin(wt).$$

$A$ ist dabei proportional der magnetischen Kraft. Man verfolge den Verlauf des Stromes.

29. XI. 10. **Höhere Mathematik III.** № 3.

I. Der Ausdruck $M dx + N dy$ wo $M$ und $N$ Funktionen der beiden Variabelen $x$ und $y$ sind, ist ein „vollständiges Differential", d. h. identisch mit einem Ausdruck:

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy,$$

wenn die Bedingung $\quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad$ (nämlich beide $= \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y}$) erfüllt ist.

Wenn dies der Fall ist, so wird die Funktion $f$ gefunden als:

$$f = \int M dx + \varphi(y),$$

wo die Integration über $M$ so auszuführen ist, als ob $y$ constant wäre, und $\varphi(y)$ eine noch unbekannte, bloss von $y$, nicht auch von $x$ abhängige Funktion ist. Diese Funktion $\varphi(y)$ bestimmt sich aus:

$$N = \frac{\partial \int M dx}{\partial y} + \frac{d\varphi}{dy}$$

woraus sich $\frac{d\varphi}{dy} = N - \frac{\partial \int M dx}{\partial y}$ als nur von $y$ abhängig ergeben, $x$ mithin herausfallen muss; dies gibt zugleich eine Kontrolle für die Richtigkeit der Rechnung. Man könnte auch analog $f = \int N dy + \psi(x)$ und $M = \frac{\partial \int N dy}{\partial x} + \frac{d\psi}{dx}$ zur Berechnung von $f$ verwenden.

Die Differentialgleichung $M dx + N dy = 0$ hat dann das allgemeine Integral

$$f(x,y) = \text{Const.}$$

II. Jeder Differentialausdruck $M dx + N dy$ lässt sich durch Multiplikation mit einer geeigneten Funktion $\mu(x,y)$ auf die Form eines vollständigen („totalen") Differentials $df$ bringen. Die Funktion $\mu(x,y)$ heisst ein „integrierender Faktor" („Multiplikator") für den Differentialausdruck; sie muss der partiellen Differentialgleichung genügen:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}\cdot N - \frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = 0.$$

Gelingt es, irgendwie einen intgr. Faktor $\mu$ der Diff.-Gl. $M dx + N dy = 0$ zu finden, sodass also

$$\mu M dx + \mu N dy \equiv df = 0$$

ein totales Differential darstellt, so ist nach I. das allgemeine Integral der Diff.-Gleichung auf Quadraturen zurückgeführt.

III. Ist ein integrierender Faktor $\mu$ der Diff.-Gl. $M dx + N dy = 0$ bekannt, so hat jeder weitere integrierende Faktor $\nu$ die Form:

$$\nu = \mu \cdot \Phi(f),$$

wo $\Phi$ eine ganz beliebige Funktion des Integrals $f =$ Const ist. Lässt sich daher ausser $\mu$ noch ein weiterer integrierender Faktor $\nu$ finden, so ist

$$\frac{\nu}{\mu} = \Phi(f) = \text{Const}$$

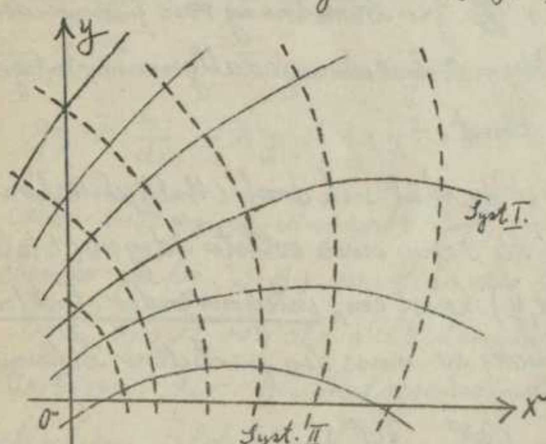
das allgemeine Integral der Differentialgleichung.

IV. Weiss man, dass eine Diff.-Gl. $M dx + N dy = 0$ einen nur von $x$, nicht auch von $y$ abhängigen integrierenden Faktor zulässt, so wird speziell für diesen die obige partielle Diff.-Gl. für $\mu$ sich in eine totale verwandeln und der betreffende integrierende Faktor durch Quadratur gefunden werden können.

Das Analoge gilt, wenn man weiss, dass ein nur von $y$, oder nur von $\left(\frac{y}{x}\right)$, oder nur von $(x \cdot y)$, von $(x^2 + y^2)$ etc. abhängiger integrierender Faktor vorhanden ist.

## V. Trajektorien.

1) Ist ein Kurvensystem $F(x, y, C) = 0$ gegeben, so ergibt sich durch Elimination des Parameters $C$ aus:




$$F = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

die Differentialgleichung des Systems, die in jedem Punkt $x, y$ der Ebene eine Richtung $\left(\frac{dy}{dx}\right)_I$ definiert. Für ein zweites Kurvensystem (II), welches das erste überall unter einem gegebenen Winkel $\alpha$ schneiden soll, gilt dann die Differentialgleichung:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{II} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_I + tg\,\alpha}{1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)_I \cdot tg\,\alpha}.$$

Dadurch ist wieder für jeden Punkt der Ebene eine zweite Richtung als Funktion des Ortes ($tg\,\alpha = \lambda(x, y)$) bestimmt, die mit der ersten im nämlichen Punkt den Winkel $\alpha$ bildet.

Man hat hier für $\left(\frac{dy}{dx}\right)_I$ den aus den zwei obigen Gleichungen (nach Elimination von C) gefundenen Wert einzusetzen. Die Integralkurven der Differentialgleichung für $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{II}$ sind die gesuchten Trajektorien.

Ist insbesondere $A$ = Const., so wird das System I durch das System II überall unter dem gleichen Winkel $\alpha$ („isogonal") geschnitten; die gesuchten Trajektorien heissen in diesem Fall Isogonaltrajektorien. Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (vergl. Figur), also für Orthogonaltrajektorien, gilt:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{II} = \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_I}.$$

2.) Ist die Gleichung des Systems I in Polarkoordinaten $r = f(\varphi)$ gegeben, und bildet man $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)_I$, eliminiert sodann zwischen den beiden Gleichungen den Parameter C des Kurvensystems, so ist die Differentialgleichung für die Trajektorien

$$r\cdot\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_{II} = \frac{r\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_I + tg\,\alpha}{1 - r\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_I\cdot tg\,\alpha}.$$

Speziell gilt für das Orthogonalsystem $(\alpha = \frac{\pi}{2})$:

$$r\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_{II} = -\frac{1}{r\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_I}.$$

---

## Aufgaben.

1.) Man zeige, dass die linke Seite von $\left[e^x(1-y) + \log y\right]dx + \left[\frac{x}{y} - e^x\right]dy = 0$ ein totales Differential ist, und integriere die Differentialgleichung.

2.) Die Diff.-Gl. $(2x-y)\,dy + (2a-y)\,dx = 0$ lässt einen von $y$ allein abhängigen integrierenden Faktor zu. Auf Grund dieser Angabe integriere man die Gleichung; im Verlauf der Rechnung wird sich die Richtigkeit der Angabe erweisen.

3.) Die Differentialgleichung $(1+y^2)\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$ besitzt einen nur von $(x\cdot y)$, ebenso einen nur von $(x+y)$ abhängigen integr. Faktor. Man ermittle beide und das allgemeine Integral der Differentialgleichung.

4.) Man bestimme die Orthogonaltrajektorien folgender Kurvensysteme:

a.) $y^2 = 2a(x - C)$;   [$C$ = variabler Parameter.]

b.) $x^2 + \frac{y^2}{C} - 1 = 0$;

c.) $x^2 + 3y^2 - 2Cy = 0$ (Vorprüfung 1909.)

d.) $r^2 = C \cdot tg(2\varphi)$.

5.) Gesucht sind die Orthogonaltrajektorien
  a.) des Systems kongruenter Parabeln, die sämtlich die $y$-Axe zur Scheiteltangente haben
  b.) der Kreise mit demselben Radius $a$, die alle durch den Anfangspunkt gehen (Polarkoordinaten!).

6.) Man bestimme die Diff.-Gl. des Kurvensystems $\frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} - 1 = 0$ und zeige, dass die Diff.-Gl. der Orthogonaltrajektorien mit ihr identisch ist (Confocale Ellipsen und Hyperbeln).

7.) Gesucht sind die Isogonaltrajektorien aller Kreise, die die $y$-Axe im Nullpunkt berühren (z. B. $\alpha = 45^\circ$).

8.) Auf einer sehr grossen dünnen Kupferplatte sind zwei Elektroden $A$ und $B$ aufgesetzt. Die Kurven gleicher elektrischer Spannung („Äquipotentialkurven") haben dann die Gleichung $\frac{r_1}{r_2}$ = Const., wenn $r_1$ und $r_2$ die Entfernungen von $A$ und $B$ bedeuten. Man suche die Kurven der elektrischen Strömung, die senkrecht zu den Äquipotentialkurven verlaufen.

9. Ein Boot wird beim Übersetzen eines Flusses mit der constanten Geschwindigkeit $a$ stets nach ein und demselben Punkte des jenseitigen Ufers hingerudert. Welche Kurve beschreibt das Boot, wenn das Wasser überall die Geschwindigkeit $b$ besitzt? Man unterscheide die Fälle $a > b$ und $a < b$.

6. XII. 10. **Höhere Mathematik III.** № 4.

## Besondere Differentialgleichungen 1. Ordnung.

(Abkürzende Bezeichnung: $\frac{dy}{dx} = p$; also $dy = p\,dx$.)

I. $F(p) = 0$. Lösung: $F\left(\frac{y+C}{x}\right) = 0$.

II. $F(x, p) = 0$. Diese Gleichung gibt, je nachdem sie nach $p$ oder $x$ auflösbar ist:

a.) $p = f(x)$, also: $y = \int f(x)\,dx + C$.

b.) $x = \varphi(p)$, woraus dann durch Differentiation folgt:

$dx = \frac{dy}{p} = \varphi'(p)\,dp$, also $y = \int p\cdot\varphi'(p)\,dp + C$. Diese Gleichung, mit $x = \varphi(p)$ zusammengenommen, gibt die Integralkurven in Parameterdarstellung (mit $p$ als Parameter).

III. $F(y, p) = 0$. Diese Gleichung gibt, je nachdem sie nach $p$ oder $y$ auflösbar ist:

a.) $p = f(y)$, also $dx = \frac{dy}{f(y)}$; $x = \int \frac{dy}{f(y)} + C$.

b.) $y = \varphi(p)$, woraus durch Differentiation folgt:

$dy = p\,dx = \varphi'(p)\,dp$, also: $x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}\,dp + C$

Diese Gleichung, mit $y = \varphi(p)$ zusammengenommen, gibt die Integralkurven in Parameterdarstellung (mit $p$ als Parameter).

IV. $F(x, y, p) = 0$. Ist diese allgemeine Diff.-Gl. 1. Ordnung nach $y$ auflösbar, folgt also daraus: $y = f(x, p)$, so erhält man durch Differentiation hieraus die Diff.-Gl.: $p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx}$ zwischen den Variabeln $x$ und $p$. Bisweilen ist diese neue Diff.-Gl. leichter zu integrieren als die ursprünglich vorgelegte. Gelingt diese Integration, so gibt das erhaltene Integral mit $F(x, y, p) = 0$ zusammen die gesuchten Integralkurven, ausgedrückt durch den Parameter $p$.

V. $y = \varphi(p)\cdot x + \psi(p)$. Allgemeine Clairault'sche Gleichung (spezieller Fall von IV.).

Die Differentiation nach $p$ ergibt:

$$[p - \varphi(p)]\cdot\frac{dx}{dp} - \varphi'(p)\cdot x - \psi'(p) = 0$$

Dies ist eine lineare, nach Blatt 2. integrierbare Differentialgleichung

Die <u>spezielle Clairault'sche Gleichung</u>:

$$y = p\cdot x + \psi(p)$$

gibt differentiiert: $\quad \frac{dp}{dx}\left[x + \psi'(p)\right] = 0.$

Der erste Faktor $\frac{dp}{dx}$ gleich Null gesetzt, gibt $p = C$, somit

$$y = Cx + \psi(C).$$

Dieses <u>System von Geraden</u> stellt also <u>das allgemeine Integral</u> der vorgelegten Diff.-Gl. dar. Der zweite Faktor $x + \psi'(p) = 0$, zusammen mit $y = px + \psi(p)$, also:

$$\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = -p\cdot\psi'(p) + \psi(p) \end{cases}$$

gibt die Umhüllungskurve dieses Geradensystems ($p$ ist Parameter), die das <u>singuläre Integral</u> (siehe unten) der Differentialgleichung darstellt.

## <u>Discriminantenkurve einer Differentialgleichung.</u>

Ergibt die Auflösung der Diff.-Gl. $F(x, y, p) = 0$ nach $p$ für einen Teil der Ebene $n$ reelle Werte von $p$, also $n$ reelle Fortschreitungsrichtungen, für einen andern Teil der Ebene aber $m$, so heisst die Trennungskurve dieser beiden Teile der Ebene die <u>Discriminantenkurve</u> der Differentialgleichung. Im allgemeinen fallen jedesmal je zwei Fortschreitungsrichtungen auf der Discriminantenkurve zusammen.

Ist die Gleichung $F(x, y, p) = 0$ eine in $p$ rationale Gleichung beliebigen Grades, so ist die Discriminantenkurve $D(x, y) = 0$ gegeben durch die zwei Bedingungsgleichungen:

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ \dfrac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0, \end{cases}$$

aus denen $p$ zu eliminieren ist, sowie eventuell durch:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \infty, \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \infty$$

$$\text{d.h.} \quad \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x}} = 0, \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}} = 0 .$$

## Singuläre Lösungen von Differentialgleichungen.
## Envelossen des Integralkurvensystems.

I. Gegeben ist die Differentialgleichung $F(x, y, p) = 0$.
Existiert eine Lösung der Diff.-Gl., die nicht (wie jedes partikuläre Integral) aus dem allgemeinen Integral durch Spezialisierung des Zahlenwertes der Constanten $C$ hervorgeht, so heisst diese Lösung eine singuläre Lösung der Diff.-Gl.

Ist eine singuläre Lösung vorhanden, so ist sie in der Discriminantenkurve enthalten. Um die singuläre Lösung aufzufinden, hat man also $p$ aus den zwei Gleichungen:

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ \dfrac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0 \end{cases}$$

zu eliminieren. Genügt dann der für die Discriminantenkurve $D(x,y) = 0$ oder einen Teil derselben berechnete Wert von $\frac{dy}{dx}$ der vorgelegten Diff.-Gl., so ist dieselbe oder der betreffende Teil singuläre Lösung.

II. Gegeben ist das Integralkurvensystem $\Phi(x, y, C) = 0$.

Eine singuläre Lösung („Umhüllende" der Integralkurven) ergibt sich durch Elimination von $C$ aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0 \end{cases}$$

Auch die Gleichungssysteme $\Phi = 0$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \infty$ d.h. $\frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}} = 0$

oder $\Phi = 0$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \infty$ d.h. $\frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} = 0$

können Envelossen ergeben, wenn nicht zugleich auch $\frac{\partial \Phi}{\partial C} = \infty$ wird.

---

## Aufgaben.

1.) Man suche die Discriminantenkurven der Differentialgleichungen:

a.) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{y}{x} = 0$ ; b.) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} + 1 = 0$ ;

c.) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{y}{x} + 1 = 0$ ; d.) $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - x\frac{dy}{dx} + 1 = 0$ .

Stellen die Discr.-Kurven ganz oder teilweise singuläre Lösungen dar? Man suche auch die allgemeinen Integrale.

2.) Man bestimme die Enveloppe: a.) des Systems von Ellipsen: $\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{(a-\lambda)^2} - 1 = 0$ ;

b.) des Systems von Kreisen: $(x-\cos\lambda)^2 + (y-\sin\lambda)^2 - \frac{1}{4}\sin\lambda = 0$.

3.) In dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$ ziehe man parallel zur y-Axe eine Schar von Sehnen und über denselben als Durchmesser Kreise. Es soll die Enveloppe dieses Kreissystems gesucht werden.

4.) Man integriere: a.) $1+p+p^3 = 0$ ; b.) $y = p+p^3$ ; c.) $x = p+p^3$ ;

d.) $p = y^{3/2}$ ; e.) $p = y^{4/3}$ ; f.) $y = px+p^2$ ; g.) $y = -\frac{x}{p} + \frac{1}{3p^2}$ ;

h.) $y = px - p^{3/2}$.

5.) Es sollen die Evolventen des Kreises in der Weise bestimmt werden, dass man sie als Orthogonaltrajektorien der Kreistangenten betrachtet.

6.) Welche Kurve wird von den Normalen der Parabel $y^2 = 2px$ umhüllt?

7.) Man integriere die Diff.-Gl.: $(a_1x + b_1y)\frac{dy}{dx} + (a_2x + b_2y) = 0$ und untersuche die je nach Wahl von $a_1, b_1, a_2, b_2$ durch sie definierten verschiedenen Kurvensysteme.

---

Korrektur zu Blatt 3. In Aufgabe 4. c.) soll es heissen:

$$x^2 + \underline{\underline{3y^2}} - 2cy = 0$$

13. XII. 10. **Höhere Mathematik III.** № 5.

## Integration durch Reihenentwickelung.

I. Die Diff.-Gl. $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ liefert für jeden Punkt $x, y$ den Wert $\frac{dy}{dx}$ für die durch den Punkt gehende Integralkurve. Durch Differentiieren erhält man $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$ oder, wenn $\frac{dy}{dx}$ durch seinen Wert $f(x,y)$ ersetzt wird: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f(x,y)$, sodass nun $\frac{d^2y}{dx^2}$ durch $x$ und $y$ allein ausgedrückt ist. Analog findet man durch wiederholtes Differentiieren $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ etc. durch $x$ und $y$ allein dargestellt.

Sucht man nun die durch den bestimmten Punkt $x_0, y_0$ gehende spezielle (also partikuläre) Integralkurve $y = F(x)$, so lässt sich diese durch die Entwickelung nach dem Taylor'schen Satz im Punkt $x_0, y_0$ darstellen als

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x-x_0)^2}{1 \cdot 2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 \frac{(x-x_0)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Die Koëfficienten dieser Potenzentwickelung lassen sich gemäss dem Obigen als Funktionen von $x_0$ und $y_0$ allein darstellen, sind also als bekannt anzusehen. Die Lösung gilt, solange die Reihe convergiert. An singulären Punkten lässt sich keine solche Entwickelung geben.

Betrachtet man in der vorigen Formel etwa $y_0$ als eine willkürlich zu wählende Grösse, so stellt diese Formel <u>alle</u> Integralkurven (also das <u>allgemeine Integral</u>) in ihrer Entwickelung für ihre Punkte mit der bestimmten Abscisse $x_0$ vor. $y_0$ vertritt dann die Stelle der willkürlichen Constanten $C$.

II. Häufig wird man es vorziehen, $y$ von vornherein als Reihe

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots$$

mit unbestimmten Coëfficienten $a_i$ in die Diff.-Gl. einzusetzen und durch Identificierung der Coëfficienten gleich hoher Potenzen von $(x - x_0)$ auf beiden Seiten der Gleichung die Grössen $a_i$ zu bestimmen. Dabei wird sich $a_0$ nicht bestimmen lassen (es bleibt willkürlich und vertritt die Stelle der Integrationsconst. $C$); dagegen werden sich $a_1, a_2, a_3 \dots$ alle durch $a_0$ ausdrücken lassen.

# Differentialgleichungen höherer Ordnung.

I. Eine Gleichung zwischen $x$, $y$ und den Differentialquotienten von $y$ nach $x$ bis zum $n^{ten}$ einschliesslich heisst eine totale Differentialgleichung $n^{ter}$ Ordnung. Das allgemeine Integral derselben enthält $n$ wesentlich verschiedene willkürliche Constanten.

II. Integration von Diff.-Gl. $n^{ter}$ Ordnung durch Reihenentwickelung.

Das Integral einer Diff.-Gl. $n^{ter}$ Ord. stellt sich nach dem Taylor'schen Satz als Reihe dar:

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x-x_0) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2} + \cdots + \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0 \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0 \frac{(x-x_0)^n}{n!} + \left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_0 \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots$$

Dabei können $y_0$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0$, … bis $\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0$ als willkürliche Constanten angenommen werden, während alsdann $\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0$, $\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_0$, …. sich mittels der Diff.-Gl. bestimmen lassen. Die Lösung gilt, solange die Reihe convergiert.

Man kann auch unmittelbar für $y$ die Reihe mit unbestimmten Coëfficienten

$$y = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots$$

in die Diff.-Gl. einsetzen und durch Identificierung beider Seiten die $a_i$, soweit sie nicht willkürlich gewählt werden können, bestimmen.

III. Geometrisch repräsentiert das allgemeine Integral einer Diff.-Gl. $n^{ter}$ Ord. ein $n$-fach unendliches System von Kurven der $xy$-Ebene, sodass man für eine partikuläre Kurve etwa noch $n$ beliebige Punkte, durch die sie gehen soll, vorschreiben kann, oder auch einen Punkt und die $(n-1)$ ersten Differentialquotienten in diesem Punkte wählen kann.

Speziell repräsentiert das allgemeine Integral einer Diff.-Gl. zweiter Ordnung ein 2-fach unendliches System von Kurven der $xy$-Ebene, sodass man für eine partikuläre Kurve dieses Systems noch 2 beliebige Punkte, durch die sie gehen soll, oder einen Punkt und die Richtung der Kurventangente in ihm vorschreiben kann.

# Einfache spezielle Fälle von Differentialgleichungen 2. Ordnung.

(Abkürzende Schreibweise: $\frac{dy}{dx} = y'$ ; $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$).

1.) $y'' = f(x)$. Integriert: $y = \int [\int f(x)dx] dx + C_1 x + C_2 = x\int f(x)dx - \int x f(x)dx + C_1 x + C_2$

2.) $y'' = f(y')$. Integriert: $x + C_1 = \int \frac{dy'}{f(y')}$ ; $y + C_2 = \int \frac{y'dy'}{f(y')}$.

Die Lösung erscheint in Parameterform mit $y'$ als Parameter.

3.) $y'' = f(y)$; also $\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot y' = f(y)$ : separierbare Diff.-Gl.; integriert:

$y'^2 = 2\int f(y)dy + C_1$, also: $x + C_2 = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}}$.

4.) $y'' = f(y', x)$. Die Substitution $y' = p$ gibt für $p$ eine Diff.-Gl. erster Ordnung. Ist diese nach einer der früheren Methoden gelöst und ergibt sich dadurch $p = F(x, C_1)$, so ist : $y = \int F(x, C_1) dx + C_2$.

5.) $y'' = f(y', y)$; somit $y'\frac{dy'}{dy} = f(y', y)$. Diese Diff.-Gl. wird durch die Substitution $y' = p$ auf eine solche von der ersten Ordnung zwischen $p$ und $y$ reduciert. Ergibt sich durch Integration $p = F(y, C_1)$, so ist $x = \int \frac{dy}{F(y, C_1)} + C_2$.

---

## Aufgaben.

1.) Man integriere durch Reihenentwickelung

a.) $\frac{dy}{dx} = x - y$ ; b.) $\frac{dy}{dx} = \log x + \log y$ ; c.) $\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0$.

2.) Man integriere die Differentialgleichungen:

a.) $y'' = x - \sin x$ ; b.) $y'' = (y')^3$ ; c.) $y'' = \frac{1}{y^2}$ ;

d.) $y'' = y' \cdot \operatorname{tg} x$ ; e.) $1 + y'^2 + y y'' = 0$.

3.) Man integriere die Diff.-Gl. 2. Ordnung: $(mx+n)y'' + y' = 0$ und untersuche Lage und Gestalt der durch dieselbe gegebenen zweifach unendlichen

Schar von Kurven für den spez. Fall $n=0$; $m=2$. Man greife aus dieser Kurvenschar diejenigen heraus, welche die $x$-Axe unter einem Winkel von $45^\circ$ schneiden, bestimme die Enveloppe derselben und zeichne dieses Kurvensystem. Ferner ermittle man die Integrale der gegebenen Gleichung für die besonderen Fälle $m=0$ und $m=1$ und zeichne diese Integralkurven. (Vorprüfung 1910).

4.) Bei einer Kurve proiciert sich der Krümmungsradius, vom Kurvenpunkt bis zum zugehörigen Krümmungsmittelpunkt gezeichnet, stets in der constanten Länge $a$ auf die Ordinatenaxe. Man suche die Kurve.

5.) Man bestimme die Kurvenschar, die den Winkel zwischen den beiden Scharen $r=\lambda a^\varphi$ und $r=\mu\cdot b^\varphi$ logarithmischer Spiralen überall halbiert. $\lambda$ und $\mu$ sind die Parameter der beiden Scharen.

6.) Auf einer beliebigen Bahnkurve $F(x,y)=0$ bewegt sich ein Mensch, der an einem Seil von gegebener Länge $a$ eine Last nachzieht. Man stelle die Diff.-Gl. der („Tractrixe"-) Kurve auf, welche die Last dabei beschreibt. (Die Tangente der Tractrixe zielt stets nach dem Ort des Führers.) Dann spezialisiere man für den Fall, dass die Kurve $F(x,y)=0$ a.) eine Gerade ($x$-Axe); b.) ein Kreis ist.

7.) Aufgaben zur Repetition der bisherigen Methoden:

a.) $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}e^{x+y}$ (separierbar)

b.) $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$ (homogen)

c.) $x\frac{dy}{dx}+y=\log x$ (linear)

d.) $(a\sqrt{x^2+y^2}-cx)dx+(b\sqrt{x^2+y^2}-cy)dy=0$ [von $(x^2+y^2)$ allein abhäng. integr. Faktor.]

e.) $y=xp^2-p^4$ (allgemeine Clairault'sche Gleichung)

f.) $y=px+\sqrt{1+p^2}$ (spezielle " " " )

---

Korrektur zu Blatt 4: Aufgabe 1. c.) muss heissen:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)+1=0.$$

20. XII. 10. **Höhere Mathematik III.** № 6.

# Die linearen Differentialgleichungen.

## I. Die reducierte lineare Diff.-Gl. zweiter Ordnung mit constanten Coëfficienten.

$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_2 y = 0$ hat als allgemeines Integral: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, wo $r_1$ und $r_2$ die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ sind.

Sind die beiden Wurzeln conjugiert imaginär, also $r_1 = p + iq$; $r_2 = p - iq$, so gibt man dem Integral die Form: $y = e^{px}(A\cos qx + B\sin qx)$,

oder auch die Form: $y = \Gamma \cdot e^{px}\sin(qx + \gamma)$.

Dabei sind $A$ und $B$, bzw. $\Gamma$ und $\gamma$ die beiden willkürlichen Constanten.

Sind endlich die beiden Wurzeln $r_1$ und $r_2$ gleich, so ist das gesuchte allgemeine Integral: $y = e^{r_1 x}(C_1 + C_2 x)$.

## II. Die erweiterte lineare Diff.-Gl. zweiter Ordnung mit constanten Coëfficienten

$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_2 y = F(x)$ wird durch „Variation der Constanten" im Integral der zugehörigen reducierten Diff.-Gl. integriert. Sind $y_1$ und $y_2$ zwei verschiedene partikuläre Integrale dieser letzteren, so ist das allgemeine Integral der erweiterten Gleichung $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$. Nun führt man die Substitution ein:

$y = u(x)\cdot y_1 + v(x)\cdot y_2$. Alsdann wird:

$$\frac{dy}{dx} = \left(u\frac{dy_1}{dx} + v\frac{dy_2}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dx}y_1 + \frac{dv}{dx}y_2\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(u\frac{d^2y_1}{dx^2} + v\frac{d^2y_2}{dx^2}\right) + \left(\frac{du}{dx}\frac{dy_1}{dx} + \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dy_2}{dx}\right) + \cdots\cdots$$

Setzt man $y$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ in die vorgelegte Diff.-Gl. ein, so verschwinden die Coëfficienten von $u$ und $v$, da $y_1$ und $y_2$ Integrale der reducierten Glg sind, und die erweiterte Diff.-Gl. wird erfüllt, wenn gleichzeitig

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dx}\cdot y_1 + \frac{dv}{dx}\cdot y_2 &= 0 \\ \frac{du}{dx}\cdot\frac{dy_1}{dx} + \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dy_2}{dx} &= F(x) \end{aligned}\right\}$$

gesetzt wird. Daraus erhält man nun $\frac{du}{dx}$ und $\frac{dv}{dx}$ und dann durch Integration $u$ und $v$, somit endlich das gesuchte $y$.

Für $y_1$ und $y_2$ hat man, wenn $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$ reelle Wurzeln hat: $e^{r_1 x}$ und $e^{r_2 x}$,

" " imaginäre " " : $e^{px}\sin qx$ und $e^{px}\cos qx$,

" " zus.-fallende " " : $e^{r_1 x}$ und $x\cdot e^{r_1 x}$.

III. Allgemeine Sätze über lineare Diff.-Gl. mit nicht constanten Coëfficienten

1.) Sind $y_1$ und $y_2$ zwei verschiedene partikuläre Integrale der reducierten Diff.-Gl. $\frac{d^2y}{dx^2} + \varphi(x)\frac{dy}{dx} + \psi(x)\cdot y = 0$, so ist $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ deren allgemeines Integral.

2.) Sind $y_1$ und $y_2$ zwei verschiedene partikuläre Integrale der verkürzten Diff.-Gl., so kann die erweiterte Diff.-Gl.: $\frac{d^2y}{dx^2} + \varphi(x)\frac{dy}{dx} + \psi(x)\cdot y = F(x)$ stets analog wie unter II.) durch die Substitution $y = u y_1 + v y_2$ gelöst werden.

3.) Kennt man ein partikuläres Integral $\bar{y}$ der erweiterten Diff.-Gl. und zwei partikuläre Integrale $y_1$ und $y_2$ der reducierten, so ist das allgemeine Integral der erweiterten Diff.-Gl.: $y = \bar{y} + C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Speziell bei constanten Coëfficienten $a_1, a_2$ an Stelle von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ existiert, wenn $F(x)$ eine ganze rationale Funktion $n^{ten}$ Grades in $x$, oder eine periodische Funktion von der Form $\sum(A_i \cos k_i x + B_i \sin k_i x)$, oder eine Exponentialfunktion von der Form $\sum A_i e^{k_i x}$ ist, immer ein und nur ein partikuläres Integral der erweiterten Diff.-Gl., das bzw. eine ganze rationale Funktion $n^{ten}$ Grades, eine Summe von periodischen Funktionen derselben Form, oder eine Summe von Exponentialfunktionen von derselben Form ist. Man erhält dann dieses ausgezeichnete partikuläre Integral durch Ansatz einer Funktion von der Form von $F(x)$ mit unbestimmten Coëfficienten; die Coëfficienten lassen sich durch Einsetzen in die Diff.-Gl. und Coëfficientenvergleichung bestimmen.

IV. Die reducierte lineare Diff.-Gl. $n^{ter}$ Ordnung mit constanten Coëfficienten:

$\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots\cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0$ hat zum allg. Integral:

$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \cdots\cdots + C_n e^{r_n x}$, wo die $r_i\ (i = 1, 2, \ldots n)$ die $n$ als verschieden vorausgesetzten Wurzeln der „charakteristischen Gleichung" $n^{ten}$ Grades

$$r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \cdots\cdots + a_{n-1} r + a_n = 0$$ sind.

Sind complexe Wurzeln vorhanden, also $r_1 = r' + ir''$; $r_2 = r' - ir''$ ein Paar conjugiert imaginärer Wurzeln, so kann der ihnen im allgemeinen entsprechende Ausdruck $C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ durch die reelle Form $e^{r'x}(A \sin r''x + B \cos r''x)$ oder auch durch $\Gamma e^{r'x}\sin(r''x + \gamma)$ ersetzt werden, wo $A$ und $B$, bzw. $\Gamma$ und $\gamma$ die beiden willkürlichen Constanten (an Stelle von $C_1, C_2$) sind.

Sind $\nu$ Wurzeln der charakteristischen Gleichung einander gleich, $r_1 = r_2 = \dots = r_\nu$, so tritt an Stelle der $\nu$ entsprechenden Summanden im allgemeinen Integral der Ausdruck:

$$e^{r_1 x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots\dots + C_\nu x^{\nu-1}).$$

V. 1.) Kennt man von irgend einer reducierten linearen Diff.-Gl. $n^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \varphi_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \varphi_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots\dots + \varphi_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + \varphi_n(x)\cdot y = 0,$$

wo die Coëfficienten $\varphi_i$ ganz beliebige Funktionen von $x$ sein können, $n$ partikuläre voneinander verschiedene (d.h. nicht linear aus einander zusammensetzbare) Integrale $y_1, y_2 \cdots y_n$, so ist das allgemeine Integral: $\quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$.

2.) Kennt man von der erweiterten linearen Diff.-Gl. mit nicht constanten Coëfficienten

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \varphi_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \varphi_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots\dots + \varphi_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + \varphi_n(x)\, y = F(x)$$

ein einziges partikuläres Integral $y = \Phi(x)$, und ausserdem das allgemeine Integral der zugehörigen reducierten Gleichung als $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$, so ist das allgemeine Integral der erweiterten Diff.-Gl.: $\quad y = \Phi(x) + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots\dots + C_n y_n$.

[Ein solches partikuläres Integral $\Phi(x)$ lässt sich in gewissen Fällen durch Probieren finden]

VI. Um das allgemeine Integral der erweiterten Diff.-Gl.

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \varphi_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots\dots + \varphi_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + \varphi_n(x)\, y = F(x)$$

methodisch zu finden, wenn dasjenige der zugehörigen reducierten Diff.-Gl. als $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ bekannt ist, benützt man die Substitution

$$y = u_1(x)\, y_1 + u_2(x)\, y_2 + \dots\dots + u_n y_n \quad (\text{„Variation der Constanten"})$$

Setzt man dann:

$$\frac{du_1}{dx} y_1 + \frac{du_2}{dx} y_2 + \dots\dots + \frac{du_n}{dx} y_n = 0$$

$$\frac{du_1}{dx}\frac{dy_1}{dx} + \frac{du_2}{dx}\frac{dy_2}{dx} + \dots\dots + \frac{du_n}{dx}\frac{dy_n}{dx} = 0$$

$$\frac{du_1}{dx}\cdot\frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{du_2}{dx}\frac{d^2y_2}{dx^2} + \dots\dots + \frac{du_n}{dx}\cdot\frac{d^2y_n}{dx^2} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{du_1}{dx}\cdot\frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}} + \frac{du_2}{dx}\cdot\frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}} + \dots\dots + \frac{du_n}{dx}\cdot\frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}} = 0$$

so ergibt sich durch Einsetzen in die durch die angegebene Substitution erhaltene Diff.-Gl. die weitere

$$\frac{du_1}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} + \frac{du_2}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}} + \dots\dots + \frac{du_n}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} = F(x).$$

Aus diesen $n$ Gleichungen lassen sich nun die $n$ Grössen $\frac{du_1}{dx}, \frac{du_2}{dx}, \dots \frac{du_n}{dx}$ berechnen, und durch Quadraturen $u_1, u_2, \dots u_n$ finden, also auch das allgemeine Integral $y$ der erweiterten Diff.-Gl.

VII. Speziell bei der linearen Diff.-Gl. mit constanten Coëfficienten ist nach IV.) $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$, .... $y_n = e^{r_n x}$ bekannt, somit die vorige Methode für die erweiterten linearen Diff.-Gl. mit constanten Coëfficienten erfolgreich durchführbar. Doch wird die Durchführung im allgemeinen sehr mühsam.

Hat aber $F(x)$ eine von den unter III. 3.) angegebenen Formen, so gilt das dort für die Diff.-Gl. zweiter Ordnung Gesagte auch hier, und es lässt sich ein partikuläres Integral $\Phi(x)$ der erweiterten Diff.-Gl. nach der unter III. 3.) gegebenen Methode immer finden.

---

## Aufgaben.

1.) a.) $y'' + y' - 2y = 0$ ; b.) $y'' - 2ay' + a^2 y = 0$ ; c.) $2y'' + 2y' + 3y = 0$.

2.) a.) $y'' + a^2 y = \sin bx$ ; b.) $4y'' + 4y' + 3y = x^2 + x - 2$ ; c.) $y'' - 2y' + y = e^{mx} + \cos mx$

3.) a.) $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 2y = 0$ ; b.) $\frac{d^4y}{dx^4} \pm a^4 y = 0$ ;

c.) $\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^2y}{dx^2} - 6y = \cos mx$.

4.) Die Diff.-Gl. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = K \cdot x$ hat ein partikuläres Integral von der Form $A \cdot x \cdot \log x$. Die reducierte Gleichung hat zwei partik. Integrale von der Form $x^n$. Welches ist das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung?

5.) Ein Punkt $P_1$ („Hase") bewegt sich mit der constanten Geschwindigkeit $a$ auf der $x$-Axe; ein zweiter Punkt $P_2$ („Hund") verfolgt ihn mit der constanten Geschwindigkeit $b$, so dass die Richtung von $P_2$ stets auf $P_1$ hinzielt. Welche Kurve beschreibt $P_2$? („Verfolgungskurve").

---

3. I. 11. **Höhere Mathematik III.** № 7.

## Die linearen Differentialgleichungen.

I. Ist von der reducierten linearen Differentialgleichung $n$ ter Ordnung

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \varphi_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \varphi_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots\cdots + \varphi_n y = 0$$

ein partikuläres Integral $y = y_1$ bekannt, so lässt sich mit Hilfe der Substitution $y = u(x) \cdot y_1$ und $\frac{du}{dx} = v(x)$ die Diff.-Gl. auf eine solche von der $(n-1)$ ten Ordnung

$$\frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} + \psi_1 \frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} + \psi_2 \frac{d^{n-3} v}{dx^{n-3}} + \cdots\cdots + \psi_{n-1} \cdot v = 0$$

reducieren. Man hat dann: $y = y_1 \cdot \left[ \int v(x)\,dx + C_n \right]$.

Dieses Verfahren lässt sich fortsetzen, so dass, wenn $m$ partikuläre Integrale bekannt sind, eine Diff.-Gl. $(n-m)$ ter Ordnung hergestellt werden kann.

II. Die Riccati'sche Diff.-Gl. $\frac{dy}{dx} + X_0 y^2 + X_1 y + X_2 = 0$ lässt sich im allgemeinen in endlicher Form nicht integrieren. Kennt man aber ein partikuläres Integral $y = y^{I}$ dieser Gleichung, dann wird das allgemeine Integral mit Hilfe der Substitution $y = y^{I} + \frac{1}{\eta(x)}$ aus der linearen Diff.-Gl. 1. Ordnung:

$$\frac{d\eta}{dx} - \eta\left(2X_0\, y^{I} + X_1\right) - X_0 = 0 \qquad \text{gewonnen.}$$

Sind zwei partikuläre Integrale $\eta^{II}$ und $\eta^{III}$ dieser linearen Gleichung bekannt, so ist das allgemeine Integral derselben aus

$$\frac{\eta - \eta^{II}}{\eta - \eta^{III}} = C \qquad \text{gegeben.}$$

Kennt man von der Riccati'schen Gleichung drei partikuläre Integrale $y^{I}, y^{II}, y^{III}$, so gilt für das allgemeine Integral derselben die Form:

$$\frac{y - y^{II}}{y - y^{III}} : \frac{y^{I} - y^{II}}{y^{I} - y^{III}} = \text{Const.}$$

Leitet man aus der speziellen Riccati'schen Gleichung $\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m$, wo $a, b, m$ Constanten sind, durch die Substitution $y = \frac{u}{x^2} + \frac{1}{ax}$ die neue Riccati'sche Gleichung $\frac{du}{dx} + a\frac{u^2}{x^2} = bx^{m+2}$ ab und aus dieser wieder durch die Substitutionen

$u = \frac{1}{z}$ und $x = t^{\frac{1}{m+3}}$ die Gleichung:

$$\frac{dz}{dt} + \frac{1}{m+3}\, b z^2 - \frac{1}{m+3}\, a t^{-\frac{m+4}{m+3}} = 0\,;$$

sowie durch die Substitutionen $u = \frac{1}{z}$ und $x = t^{\frac{1}{m+1}}$ die Gleichung:

$$\frac{dz}{dt} + \frac{1}{m+1}\, b z^2 \cdot t^{\frac{2}{m+1}} - \frac{a}{m+1}\, t^{-\frac{m+2}{m+1}} = 0,$$

so ergibt sich hieraus durch Wiederholung der Substitution die Integrabilität der ursprünglichen Gleichung $\frac{dy}{dx} + a y^2 = b x^m$ für alle Fälle von $m = -\frac{4k}{2k \pm 1}$, wo $k$ ganzzahlig ist.

---

## Aufgaben.

1.) Durch den zylindrischen Ring zwischen 2 conaxialen Kreiszylindern von der Länge $l$ strömt eine Flüssigkeit. Der Ring sei mit Flüssigkeit stets vollständig angefüllt; bei allen Flüssigkeitsteilchen auf einem Zylinder mit der gleichen Axe sei die Geschwindigkeit gleich gross, an den Wandungen sei sie Null; an den Enden der Röhre herrschen die Drucke $p_1$ und $p_2$. Ist $\mu$ eine von der Natur der Flüssigkeit abhängige Constante, so besteht zwischen dem Radius $r$ eines conaxialen Zylinders und der Geschwindigkeit $v$ der Strömung längs desselben die Diff.-Gl.

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dv}{dr} + \frac{p_2 - p_1}{\mu \cdot l} = 0 \quad \text{(Poiseuille'sches Gesetz.)}$$

2.) Man führe die Diff.-Gl. $(a+bx)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (a+bx) \cdot m \frac{dy}{dx} + ny = 0$ durch die Substitution $a + bx = e^t$ auf eine lineare Diff.-Gl. zwischen $y$ und $t$ mit constanten Coëfficienten zurück und integriere sie. Andererseits zeige man, dass die Gleichung zwei partikuläre Integrale von der Form $y = (a+bx)^\varrho$ bei passender Wahl von $\varrho$ zulässt. Wie heisst jetzt das allgemeine Integral? Endlich löse man noch: $(a+bx)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + m(a+bx)\frac{dy}{dx} + ny = Mx + N$, indem man ein partikuläres Integral durch Probieren sucht.

3.) An der Innenseite des Kreises $x^2 + y^2 = a^2$ werden parallel zur $x$-Axe auffallende Strahlen reflectiert. Man suche in Parameterform die „Brennlinie" d.h. die Enveloppe dieser reflectierten Strahlen.

---

10. I. 11. <u>Höhere Mathematik III.</u> № 8

I. <u>Simultane Differentialgleichungen</u>. Sind $n$ Diff.-Gl. zwischen $n$ abhängigen Variabeln $x, y, z \ldots$, <u>einer</u> unabhängigen Variabeln $t$ und den Differentialquotienten der ersteren gegeben, so heisst die Gesamtheit dieser Diff.-Gl. ein <u>System von $n$ simultanen totalen Differentialgleichungen</u>.

Durch fortgesetztes Differentiieren der Diff.-Gl. kann man genügend viele Gleichungen erhalten, um $(n-1)$ Variable samt allen ihren Diff.-Quotienten eliminieren zu können, und man wird dann auf den Fall einer gewöhnlichen Diff.-Gl. zurückkommen, in der nur noch <u>eine</u> abhängige Variable (die $n^{te}$) samt ihren Diff.-Quotienten und die unabhängige Variable steht.

Ist hier $x$ durch Integration als Funktion von $t$ gefunden, so sind soweit möglich die übrigen Funktionen $y, z, \ldots$ ohne weitere Integrationen zu bestimmen.

Sind die höchsten in einem simultanen System auftretenden Differentialquotienten der $n$ abhängigen Variabeln der $k_1, k_2 \ldots k_n^{\,te}$, so enthält die allgemeine Lösung des Systems insgesamt $k_1+k_2+\cdots+k_n$ willkürliche Constanten.

II. Umgekehrt kann man <u>jede Diff.-Gl. $n^{ter}$ Ordnung</u>

$$\varphi\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots \frac{d^nx}{dt^n}, t\right) = 0$$

mittels der Substitutionen

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = z; \quad \ldots \ldots \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} = u; \quad \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = v$$

<u>ersetzen durch ein System von $n$ simultanen Diff.-Gl. erster Ordnung</u>:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi\left(x, y, z, \ldots u, v, \frac{dv}{dt}, t\right) = 0; \\ &\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = z; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \frac{du}{dt} = v. \end{aligned}\right\}$$

III. <u>Differentialgleichungen der Mechanik</u>. Die Diff.-Gl. für die Bewegung eines Punktes $x, y, z$ haben in der Mechanik gewöhnlich die Form eines Systems von simultanen Diff.-Gl. 2. Ordnung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right),$$

wo $m$ die Masse des Punktes, $t$ die Zeit ist.

Statt das Eliminationsverfahren I. anzuwenden, sucht man gewöhnlich durch passende Kombination der Gleichungen direkt integrable Verbindungen herzustellen; solche sind vor allem das „<u>Integral der lebendigen Kraft</u>": $\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \frac{m}{2}v^2 = \int\left[X\,dx+Y\,dy+Z\,dz\right]$

[Ist $X = \frac{\partial U}{\partial x}$; $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$; $Z = \frac{\partial U}{\partial z}$ ($U = U(x,y,z) =$ „Potentialfunktion"), so ergibt sich unmittelbar:

$$\frac{m}{2}(v^2 - v_0^2) = U - U_0;]$$

und die drei „Flächensätze":

$$m\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right) = \int (yX - xY)\,dt$$
$$m\left(z\frac{dy}{dt} - y\frac{dz}{dt}\right) = \int (zY - yZ)\,dt$$
$$m\left(x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt}\right) = \int (xZ - zX)\,dt.$$

Ist speziell $yX - xY = 0$, so ist:

$$y\,dx - x\,dy = c \cdot dt$$

(spezieller Flächensatz).

---

## Aufgaben.

1.) Das System linearer Diff.-Gl. 1. Ordnung mit constanten Coëfficienten

$$\frac{dx}{dt} + a_1 x + a_2 y + a_3 z = \varphi(t)$$
$$\frac{dy}{dt} + b_1 x + b_2 y + b_3 z = \psi(t)$$
$$\frac{dz}{dt} + c_1 x + c_2 y + c_3 z = \chi(t)$$

führt auf die Integration einer linearen Diff.-Gleichung 3. Ordnung. Beweis!

2.) Die Gleichung für die Stromstärke in einem Stromkreis bei constantem Widerstand $R$ und veränderlicher elektromotorischer Kraft $\varphi(t)$ lautet unter Berücksichtigung der Selbstinduktion:

$$\mathcal{L}\frac{dx}{dt} + Rx = \varphi(t).$$

Die Gleichungen für die Stromstärken in 2 Stromkreisen mit Berücksichtigung der gegenseitigen Induktion:

$$\mathcal{L}\frac{dx}{dt} + \mathcal{M}\frac{dy}{dt} + Rx = \varphi(t)$$
$$\mathcal{M}\frac{dx}{dt} + \mathcal{N}\frac{dy}{dt} + Sy = \psi(t)$$

Dabei bedeuten $R$ und $S$ die Widerstände, $\mathcal{L}$ und $\mathcal{N}$ die Selbstinduktionscoëfficienten in Stromkreis 1) und 2), $\mathcal{M}$ den Coëfficienten der wechselseitigen Induktion und $\varphi(t), \psi(t)$ die äusseren elektromot. Kräfte. Man untersuche den Verlauf der Ströme für die 3 Fälle: a.) constante Stromquellen in beiden Kreisen; b.) Wechselströme in Stromkreis 1.) d.h. $\varphi(t) = e \cdot \sin pt$; $\psi(t) = 0$; c.) Öffnungs- und Schliessungsstrom.

3.) Man integriere die Systeme simultaner Gleichungen:

a.) $$\frac{dy}{dx} = 2z - 3y + x. \qquad \frac{dz}{dx} = 2y.$$

b.) $$\frac{dx}{dt} + y + z = 0 \qquad \frac{dy}{dt} + z + x = 0 \qquad \frac{dz}{dt} + x + y = 0$$

c.) $$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 y = 0 \qquad \frac{d^2y}{dt^2} - k^2 x = \sin kx.$$

4.) Discussion der Planetenbewegung!

17. I. 11. Höhere Mathematik III. № 9.

## Partielle Differentialgleichungen.

I. Eine Beziehung zwischen einer abhängigen Variablen, mehreren unabhängigen und den partiellen Ableitungen der ersteren nach den letzteren, heisst eine partielle Differentialgleichung.

Ist der höchste vorkommende Differentialquotient der $n^{te}$, so heisst die Diff.-Gleichung eine solche von der $n^{ten}$ Ordnung.

Das allgemeine Integral derselben enthält dann $n$ willkürliche Funktionen analog wie das allgemeine Integral einer totalen Diff.-Gl. $n^{ter}$ Ordnung $n$ willkürliche Constanten enthält.

II. Die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit 2 unabhängigen Variabeln $x, y$ und einer abhängigen Variabeln $z$:

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} - R = 0$$

wo $P, Q, R$ beliebige Funktionen der 3 Variabeln $x, y, z$ sein können.

A.) Geometrische Lösung.

Sind $x, y, z$ die Koordinaten eines Punktes im Raume, so ist die Bedingung dafür, dass eine Fläche $z = f(x, y)$ eine „Integralfläche" der Diff.-Gl. ist, die, dass die Diff.-Gl. in jedem Punkt $x, y, z$ der Fläche durch die in diesem Punkt für die Fläche geltenden Werte $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ befriedigt wird. Die geometrische Bedeutung der Diff.-Gl. lässt sich dann dahin aussprechen, dass

die Flächennormale $\dfrac{X-x}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \dfrac{Y-y}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \dfrac{Z-z}{-1}$

senkrecht auf der Geraden $\dfrac{X-x}{P} = \dfrac{Y-y}{Q} = \dfrac{Z-z}{R}$ stehen soll

(Dabei sind $X, Y, Z$ die laufenden Koordinaten.) Demnach muss die Tangentialebene jeder Integralfläche in jedem Flächenpunkt $x, y, z$ diese betreffende Gerade in sich enthalten, oder was dasselbe ist, die Integralflächen selbst enthalten stets

im Punkt $x, y, z$ die Richtung: $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$.
Diese letzten beiden Gleichungen sind aber nichts anderes als ein System von 2 simultanen totalen Diff.-Gl. erster Ordnung, deren Lösung nach den früher gegebenen Methoden erzielt werden kann. Das Resultat dieser Integration sei:

$$\psi(x, y, z, C_1, C_2) = 0 \qquad \chi(x, y, z, C_1, C_2) = 0$$

oder: $$F(x, y, z) = C_1 \qquad G(x, y, z) = C_2$$

oder: $$x = \Psi(z, C_1, C_2) \qquad y = X(z, C_1, C_2).$$

Das allgemeine Integral enthält zwei willkürliche Constanten $C_1$, $C_2$ und repräsentiert geometrisch eine zweifach unendliche Schar von Raumkurven (die sich aus den oben definierten Richtungen zusammenfügen. Die Raumkurven (die "<u>Charakteristiken</u>" der partiellen Diff.-Gl.) müssen aber nach dem obigen auf der Integralfläche liegen. Man erhält somit die gesuchten Integralflächen, wenn man aus den 2-fach unendlich vielen Raumkurven durch Annahme einer ganz willkürlichen Beziehung zwischen $C_1$ und $C_2$, $\Phi(C_1, C_2) = 0$ [oder $C_1 = \varphi(C_2)$] einfach unendlich viele Raumkurven herausgreift und durch Elimination von $C_1$ und $C_2$ aus $\Phi = 0$ und den beiden Integralgleichungen die Fläche sucht, die sie überdecken. Diese Fläche ist stets (für beliebiges $\Phi$) eine der gesuchten Integralflächen. Demnach ergeben sich die

## B.) <u>Rechenregeln</u>:

Um die partielle Diff.-Gl. $P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} - R = 0$ zu lösen, integriere man das System simultaner totaler Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

Ergeben sich für dieses Gleichungssystem als Integralgleichungen:

$$\psi(x, y, z, C_1, C_2) = 0 \text{ und } \chi(x, y, z, C_1, C_2) = 0$$

und lassen wir zwischen $C_1$ und $C_2$ eine ganz willkürliche Funktion bestehen:

$$\Phi(C_1, C_2) = 0,$$

so wird durch Elimination von $C_1$ und $C_2$ aus $\chi$ und $\psi$ und $\Phi$ das <u>allgemeine</u>

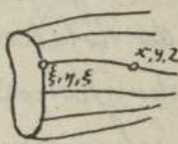
Integral erhalten. Lassen sich die Integralgleichungen in der Form schreiben:

$$F(x,y,z) = C_1 \; ; \quad G(x,y,z) = C_2 ,$$

so ist: $\Phi\left(F(x,y,z),\ G(x,y,z)\right) = 0$ das allgemeine Integral.

III. Je nach Wahl der Funktion $\Phi$ erhält man verschiedene partikuläre Integrale der partiellen Diff.-Gl. Statt nun $\Phi$ beliebig zu wählen, kann man für das partikuläre Integral spezielle („Grenz"-) Bedingungen vorschreiben, indem man z. B., geometrisch gesprochen, verlangt, dass die partikuläre Integralfläche eine beliebige vorgegebene Raumkurve enthält. Mit Hilfe dieser Bedingungen lässt sich dann $\Phi$ berechnen.

Ist die Raumkurve in den laufenden Koordinaten $\xi, \eta, \zeta$ gegeben durch die Gleichungen:




$$g(\xi, \eta, \zeta) = 0 \text{ und } h(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

so bestehen (da sie auf der Fläche liegen soll) noch die Gleichungen:

$$\psi(\xi, \eta, \zeta, C_1, C_2) = 0 \text{ und } \chi(\xi, \eta, \zeta, C_1, C_2) = 0$$

Eliminiert man aus diesen 4 Gleichungen $\xi, \eta, \zeta$, so ergibt sich eine Beziehung zwischen $C_1$ und $C_2$:

$$\Phi(C_1, C_2) = 0.$$

Die gesuchte partikuläre Integralfläche wird sodann erhalten durch Elimination von $C_1, C_2$ aus den 3 Gleichungen:

$$\psi(x,y,z,C_1,C_2) = 0 \; ; \quad \chi(x,y,z,C_1,C_2) = 0 \; ; \quad \Phi(C_1, C_2) = 0.$$

Für die andern oben gegebenen Formen der Integralgleichungen vereinfacht sich die Rechnung entsprechend.

IV. Sind $\infty^2$ partikuläre Integralflächen der partiellen Diff.-Gl. bekannt, also etwa ein Flächensystem $L(x,y,z,a,b) = 0$, wo $L$ Funktionszeichen und $a$, $b$ zwei willkürliche Constanten sind, so sagt man, es sei damit das „vollständige Integral" der partiellen Differentialgleichung gegeben, und man erhält weitere partikuläre Integralflächen als Enveloppen von $\infty^1$ beliebig aus den gegebenen herausgegriffenen Integralflächen.

## Aufgaben.

1.) Man integriere folgende partielle Diff.-Gl. 1. Ordnung ($p = \frac{\partial z}{\partial x}$; $q = \frac{\partial z}{\partial y}$):

a.) $p + q = 0$; b.) $xp + 2yq = 0$;

c.) $z = px + qy + x^2 + y^2$; d.) $x^2 p - xyq + y^2 = 0$;

e.) $(mz - ny)p + (nx - lz)q = ly - mx$; f.) $yp - xq = 2z^2 y$,

und discutiere die dadurch definierten Raumkurven.

2.) Man suche die partielle Differentialgleichung

a.) der Kegelflächen, die ihre Spitzen im Nullpunkt haben;

b.) der Rotationsflächen um die Z-Axe;

c.) der Konoidflächen, deren Erzeugende horizontal sind und die Z-Axe schneiden.

3.) Was ergibt die Methode dieses Blattes, auf die partielle Diff.-Gl. des integrierenden Faktors (cf. Blatt 3) angewendet?

4.) Gegeben ist ein zweifach unendliches System von Raumkurven:

$$\left.\begin{aligned} \psi(x, y, z) &= C_1 \\ \chi(x, y, z) &= C_2 \end{aligned}\right\}$$

Man suche die Bedingung dafür, dass man auf diesen Raumkurven orthogonale Flächen konstruieren kan

[Die Richtung der Flächennormale, die durch $\frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y} : -1$ gegeben ist, soll diese be sein, wie die der Kurventangente $dx : dy : dz$ im gleichen Punkt. Letzter lässt sich aus den gegebenen Kurvengleichungen berechnen.]

Beispiel: die Geraden durch den Nullpunkt, $\frac{x}{z} = c_1$; $\frac{y}{z} = c_2$.

5.) Man suche diejenigen Flächen, bei denen jede Tangentialebene auf der Z-Axe ein Stück abschneidet, das n-mal so gross ist als die Z-Koordinat des Berührpunktes der Tangentialebene. Von den so gefundenen Flächen bestimme man speziell diejenige, welche aus der Ebene $z = 1$ die Parabe $y = x^2$ ausschneidet.

---

Korrektur zu Blatt 8: die 2. Gleichung von Aufg. 3. c.) muss heissen:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - k^2 x = \sin kt.$$

24. I. 11. **Höhere Mathematik III.** № 10.

## Partielle Differentialgleichungen.

I. Ist allgemein eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung gegeben in der Form
$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$
so werden aus den $\infty^5$ Flächenelementen des Raums $\infty^4$ abgesondert. Durch einen Punkt des Raumes gehen $\infty^1$ Ebenen, welche im allgemeinen eine Kegelfläche umhüllen, während bei den auf Blatt 9 besprochenen linearen partiellen Differentialgleichungen von der Form
$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} - R = 0$$
diese Ebenen ein Büschel bilden. Die Integration besteht in der Zusammenfassung von je $\infty^2$ dieser Flächenelemente zu einer Integralfläche, wobei in jedem Punkte eine Ebene des betreffenden Kegels herausgenommen wird.

Die Gesamtheit von $\infty^2$ Integralflächen $z = f(x, y, a, b)$ bildet ein vollständiges Integral. Setzt man $b = \varphi(a)$ und eliminiert aus den Gleichungen
$$z = f(x, y, a, \varphi(a)) \quad \text{und}$$
$$\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}\cdot\varphi'(a) = 0$$
die Grösse $a$, so erhält man das allgemeine Integral, welches eine willkürliche Funktion enthält. Indem man für $\varphi(a)$ eine bestimmte Funktion einsetzt, erhält man ein partikuläres Integral als Enveloppe von $\infty^1$ Flächen des vollständigen Integrals. Die Enveloppe der Gesamtheit aller Integralflächen ist das singuläre Integral und kann durch Elimination von $a$ und $b$ aus den 3 Gleichungen $z = f(x, y, a, b)$; $\frac{\partial z}{\partial a} = 0$; $\frac{\partial z}{\partial b} = 0$ erhalten werden.

Die lineare partielle Diff.-Gl. 2. Ordnung mit constanten Coëfficienten:
$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + d\frac{\partial z}{\partial x} + e\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + f\cdot z = 0$$

wird durch eine Exponentialfunktion von der Form $z = e^{\lambda x + \mu y}$ befriedigt, wenn $\lambda$ und $\mu$ der charakteristischen Gleichung genügen:

$$a\lambda^2 + b\lambda\mu + c\mu^2 + d\cdot\lambda + e\mu + f = 0.$$

Aus ihr ergeben sich zu jedem Wert von $\lambda$ 2 Werte, $\mu$ und $\mu'$. Das allgemeine Integral enthält infolgedessen zwei Reihen von unendlich vielen willkürlichen Constanten:

$$z = c_1 e^{\lambda_1 x + \mu_1 y} + c_2 e^{\lambda_2 x + \mu_2 y} + c_3 e^{\lambda_3 x + \mu_3 y} + \dots$$
$$+ c_1' e^{\lambda_1 x + \mu_1' y} + c_2 e^{\lambda_2 x + \mu_2' y} + c_3 e^{\lambda_3 x + \mu_3' y} + \dots$$

Wenn die charakteristische Gleichung in 2 Linearfaktoren zerfällt:

$$[\mu - (m\lambda + n)] \cdot [\mu - (m'\lambda + n')] = 0,$$

so gehen in das Integral 2 willkürliche Funktionen ein:

$$z = e^{ny} \cdot \varphi_1(x + my) + e^{n'y} \cdot \varphi_2(x + m'y).$$

## II. Spezielle partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung.

1.) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = 0.$ Lösung: $z = \Phi(x) + \Psi(y)$ : „Rückungsflächen"
$\Phi$ und $\Psi$ sind 2 willkürlich wählbare Funktionen.

2.) $\dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$ Differentialgleichung der Wärmeleitung in einem linearen Medium; dabei ist $u$ die Temperatur, $t$ die Zeit, $a^2 = \frac{k}{\varrho \cdot c}$, wo $k$ die Leitfähigkeit, $\varrho$ die Dichte, $c$ die spezifische Dichte sind.
Lösung: $$u = \sum_{i=0}^{i=\infty} e^{-k_i^2 a^2 t} \cdot (A_i \cos k_i x + B_i \sin k_i x)$$

3.) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ Differentialgleichung der schwingenden Saite und der Wellenbewegung; dabei ist $x$ die Entfernung des schwingenden Punktes vom Anfangspunkt, $z$ Ausschlag, $t$ Zeit. Allgemeine Lösung:

$$z = \Phi(x + at) + \Psi(x - at).$$

Ist für die Zeit $t=0$ die Form der Saite durch $z = F(x)$ und die Geschwindigkeit an jeder Stelle durch $\frac{\partial z}{\partial t} = G(x)$ gegeben, so ist: $F(x) = \Phi(x) + \Psi(x)$

$G(x) = a\Phi'(x) - a\Psi'(x)$, woraus folgt:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} F(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x G(x)\,dx$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{2} F(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x G(x)\,dx.$$ Somit:

$$z = \frac{1}{2}\left[F(x+at) + F(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} G(x)\,dx.$$

4.) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. Differentialgleichung der Wärmeverteilung (auch der Verteilung der elektrischen Spannung, etc.) in der Ebene. Allgemeine Lösung: $z = \Phi(x+iy) + \Psi(x-iy)$.

Auch genügt jede Funktion einer complexen Veränderlichen $z = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ derselben Differentialgleichung, ebenso ihr reeller und ihr imaginärer Teil für sich.

III. Die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung und zweiten Grades

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y}\right)^2 = 0$ ist die Diff.-Gl. der abwickelbaren Flächen. Die allgemeine Lösung ergibt sich durch Elimination von $c$ aus:

$$z = cx + \varphi(c)\cdot y + \psi(c)$$
$$0 = x + \varphi'(c)\cdot y + \psi'(c).$$

---

## Aufgaben.

1.) Man führe die partielle Differentialgleichung

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

durch die Substitution: $u = \mu_1 x + \nu_1 y$

$v = \mu_2 x + \nu_2 y$

mit passend gewählten Coëfficienten $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ auf die Diff.-Gl.: $\frac{\partial^2 z}{\partial u\cdot\partial v} = 0$

zurück und gebe dann das allgemeine Integral an.

2.) Man zeige, dass die Diff.-Gl.: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ bei einer Drehung des Koordinatensystems um die Z-Axe unverändert bleibt.

3.) Die Diff.-Gl. für Kugelwellen ist:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

wo $v$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen ist. Durch die Substitution $\varphi = \frac{\psi}{r}$ lässt sich diese Diff.-Gl. auf eine bekannte zurückführen und integrieren.

4.) Das Problem der Ausbreitung der Wärme in einer Richtung führt auf die Diff.-Gl. $\frac{\partial v}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, wo $v$ die Temperatur ist. Man zeige, dass $v = \frac{c}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4\kappa^2 t}}$ ein partikuläres Integral derselben ist und dem Vorgange entspricht, dass ein zur Zeit $t = 0$ in die Schicht $x = 0$ gebrachtes Wärmequantum sich mit der Zeit ausbreitet.

5.) Man beweise, dass die Diff.-Gl.:

$$z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial z}{\partial y} y + f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

das vollständige Integral $z = ax + by + f(a, b)$ zulässt. Wie heisst das allgemeine Integral in dem Falle, dass $f\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ gleich $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$ ist?

6.) Wie lautet die partielle Diff.-Gl. aller Flächen, deren Tangentialebene gegen die $(xy)$-Ebene einen constanten Neigungswinkel hat? („Böschungsfläche").

31. I. 11. **Höhere Mathematik III.** № 11.

I. Formeln zur Drehung des Koordinatensystems aus der Lage $x'', y'', z''$ in die Lage $x', y', z'$, wobei die Neigungswinkel der alten Axen gegen die neuen aus dem beistehenden Schema ersichtlich sind:

$$x'' = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\beta_1 + z'\cos\gamma_1$$
$$y'' = x'\cos\alpha_2 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\gamma_2$$
$$z'' = x'\cos\alpha_3 + y'\cos\beta_3 + z'\cos\gamma_3$$

| | $x'$ | $y'$ | $z'$ |
|---|---|---|---|
| $x''$ | $\alpha_1$ | $\beta_1$ | $\gamma_1$ |
| $y''$ | $\alpha_2$ | $\beta_2$ | $\gamma_2$ |
| $z''$ | $\alpha_3$ | $\beta_3$ | $\gamma_3$ |

und analog umgekehrt:

$$x' = x''\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 \quad \text{etc.}$$

Zwischen den Winkeln bestehen dabei die Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\cos\beta_3 = 0 \\ \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cdot\cos\gamma_2 = 0 \\ \cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1 \\ \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1 \end{array}\right\}$$

und noch je zwei weitere analoge. Sie folgen daraus, dass beide Systeme rechtwinklige sein sollen.

II. Formeln zur Discussion der Flächen zweiter Ordnung.

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

Wir benutzen die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

wo $a_{ik} = a_{ki}$ und ihre Unterdeterminanten 3. Grades $A_{ik}$ (zu $a_{ik}$ gehörig)

1. Mittelpunktsflächen $A_{44} \gtrless 0$, nicht Null.

Die Koordinaten $\xi, \eta, \zeta$ des Mittelpunktes ergeben sich aus:

$$\xi : \eta : \zeta : 1 = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix} \right\|$$

Die durch Parallelverschiebung des Koordinatensystems auf den Mittelpunkt transformierte Gleichung der Fläche ist dann:

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{23}y'z' + 2a_{31}z'x' + \frac{\Delta}{A_{44}} = 0.$$

Sind zweitens $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die (stets reellen) Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

so sind die Quadrate der drei halben Hauptaxen $(a^2, b^2, c^2)$ der Fläche gleich: $-\frac{\Delta}{A_{44}}\cdot\frac{1}{\lambda_1}$; $-\frac{\Delta}{A_{44}}\cdot\frac{1}{\lambda_2}$; $-\frac{\Delta}{A_{44}}\cdot\frac{1}{\lambda_3}$, und die auf die Hauptaxen transformierte Flächengleichung ist:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + \frac{\Delta}{A_{44}} = 0.$$

Die Richtungswinkel $\alpha, \beta, \gamma$ der zu einem Werte $\lambda$ gehörigen Hauptaxe bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\cos\alpha + a_{12}\cos\beta + a_{13}\cos\gamma &= 0 \\ a_{21}\cos\alpha + (a_{22}-\lambda)\cos\beta + a_{23}\cos\gamma &= 0 \\ a_{31}\cos\alpha + a_{32}\cos\beta + (a_{33}-\lambda)\cos\gamma &= 0 \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Dabei ist eine der 3 ersten Gleichungen eine Folge der beiden andern.

2. <u>Parabolische Flächen.</u> $A_{44} = 0.$

Die cubische Gleichung für $\lambda$ hat hier eine Wurzel, etwa $\lambda_3$, gleich Null. Die Koordinaten des Mittelpunktes $\xi, \eta, \zeta$ ergeben sich unendlich gross. Nimmt man zunächst eine Drehung des Koordinatensystems vor, so lautet nach dieser, auf die zu den $\lambda$ gehörigen Richtungen als Koordinatenaxen bezogen, die Flächengleichung:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2mx' + 2ny' + 2lz' + a_{44} = 0,$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{aligned} m &= a_{14}\cos\alpha_1 + a_{24}\cos\beta_1 + a_{34}\cos\gamma_1 \\ n &= a_{14}\cos\alpha_2 + a_{24}\cos\beta_2 + a_{34}\cos\gamma_2 \\ l &= a_{14}\cos\alpha_3 + a_{24}\cos\beta_3 + a_{34}\cos\gamma_3 \end{aligned}$$

gesetzt ist, und $\alpha_1$ bis $\gamma_3$ die Winkel der neuen Axen gegen die alten, die ganz wie oben gerechnet werden, bedeuten.

Durch die Parallelverschiebung $x' = x'' + x_0'$; $y' = y'' + y_0'$; $z' = z'' + z_0'$ kann die Gleichung des Paraboloids auf die Form gebracht werden:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z'' = 0.$$

Die Koordinaten $x_0'$, $y_0'$, $z_0'$ des neuen Anfangspunktes des verschobenen Koordinatensystem (des „Scheitels" des Paraboloids) ergeben sich als:

$$x_0' = -\frac{m}{\lambda_1}\ ;\ y_0' = -\frac{n}{\lambda_2}\ ;\ z_0' = -\frac{1}{2l}\left[a_{44} - \frac{m^2}{\lambda_1} - \frac{n^2}{\lambda_2}\right].$$

## 3. Tabelle zur Discussion der Flächen zweiter Ordnung.

| $\Delta$ | $A_{44}$ | $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$ | |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | Zylinder zweiter Ordnung<br>Sind ausserdem alle $A_{ik} = 0$, so hat man ein Ebenenpaar | |
| $0$ | $\gtrless 0$ | Kegel zweiter Ordnung | |
| $<0$ | $0$ | elliptisches Paraboloid | |
| $>0$ | $0$ | hyperbolisches Paraboloid. | |
| $<0$ | $\lesseqgtr 0$ | Ellipsoid oder<br>zweischaliges Hyperboloid | Je zu unterscheiden nach der Realität des Asymptoten-Kegels |
| $>0$ | $\lesseqgtr 0$ | einschaliges Hyperboloid oder<br>imaginäre Fläche zweiter Ordnung | |

Der Asymptotenkegel einer Mittelpunktsfläche ist:

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{23}y'z' + 2a_{31}z'x' = 0$$

Der Kegel ist imaginär, wenn gleichzeitig:

$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ und $a_{11}A_{44} >$ ist, sonst ist er immer reell.

## Aufgaben.

1.) Man bestimme die Art folgender Flächen 2. Ordnung und bringe sie auf die kanonische Form:

a.) $5x^2 - y^2 + z^2 + 6xz + 4xy + 2x + 4y + 6z = 8$

b.) $5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy - 4yz - 6 = 0$.

c.) $3x^2 + y^2 + z^2 + 4yz + 5\sqrt{2}\,xy + 5\sqrt{2}\,xz = 8$.

d.) $x^2 + y^2 + 3z^2 + 3xy + 4xz + 5yz + 3x + 2y + z = 4$

e.) $4z^2 - 5y^2 + 8z - 20y + 2x = 0$

2.) Von welcher Art ist die durch die Gleichung $ayz + bzx + cxy + abc = 0$ dargestellte Fläche? Man berücksichtige auch die Fälle, wo eine oder mehrere der Constanten $a, b, c$ gleich Null sind.

3.) Unter welcher Bedingung ist die Ebene $Ax + By + Cz + 1 = 0$ eine Tangentialebene der in allgemeiner Form gegebenen Fläche 2. Ordnung?

4.) Was für Flächen werden durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0$$

dargestellt, wenn der Parameter $\lambda$ von $-\infty$ bis $+\infty$ variiert?

5.) Die Gleichung

$(2x^2 + y^2 + 4z^2 - 8z - 1) + \lambda(3x^2 + y^2 + 8z^2 - 16z - 1) = 0$ ($\lambda$ = variabler Parameter) stellt ein Büschel von Flächen 2. Ordnung dar. Für welche Werte von $\lambda$ erhält man Kegel?

6.) Welche Flächen 2. Ordnung werden durch die Gleichungen

a.) $$x = u\cos v \qquad y = u\sin v \qquad z = u^2\cos 2v$$

b.) $$x = \frac{1}{u+v} \qquad y = \frac{u\cdot v}{u+v} \qquad z = \frac{u-v}{u+v}$$

dargestellt? Man discutiere die Kurven $u$ = Const und $v$ = Const.

7. II. 11. **Höhere Mathematik III.** № 12.

## Flächenkrümmung.

I. Zur Untersuchung des Verhaltens einer Fläche in einem ihrer Punkte denken wir sie auf ein Koordinatensystem $\xi, \eta, \zeta$ bezogen, dessen Anfangspunkt der zu untersuchende Punkt, und dessen $\zeta$-Axe die Flächennormale in ihm ist. Dann gibt die Entwickelung nach dem Taylor'schen Satze bei geeigneter Wahl der $\xi$- und $\eta$-Axe für die Fläche eine Reihe von der Form: $\zeta = \frac{1}{2}(\alpha\xi^2 + \beta\eta^2) + \frac{1}{3!}(\dots$ Glieder 3. Ordnung $\dots) + \dots$. Demnach ist die Gestalt der Fläche dort angenähert charakterisiert durch die des Paraboloids

$$\zeta = \frac{1}{2}(\alpha\xi^2 + \beta\eta^2).$$

II. Die beiden „Hauptkrümmungsradien" der Fläche im betrachteten Punkte [die Krümmungsradien der Symmetrieschnitte oder „Hauptschnitte" des Näherungsparaboloids, also mit der $\xi\zeta$- und $\eta\zeta$-Ebene] sind dann:

$$\varrho_1 = \frac{1}{\alpha} \quad \text{und} \quad \varrho_2 = \frac{1}{\beta}.$$

Sie stellen den grössten und kleinsten Wert (unter Berücksichtigung des Vorzeichens!) vor, die der Krümmungsradius irgend eines „Normalschnittes" der Fläche d.h. der Schnittkurve der Fläche mit irgend einer Ebene durch die Flächennormale (die $\zeta$-Axe) im betrachteten Punkt $P$ besitzen kann. Die Angabe der beiden Hauptkrümmungsradien in $P$ genügt zur Bestimmung der Gestalt des Näherungsparaboloids, also zur angenäherten Charakterisierung der Fläche in der nächsten Umgebung von $P$.

III. Berechnung des Krümmungsradius irgend eines ebenen Schnittes der Fläche in einem Punkte, nachdem dort die Hauptkrümmungsradien $\varrho_1, \varrho_2$ schon bekannt sind.

1. Satz von Euler. Der Krümmungsradius $\varrho_\varphi$ eines beliebigen Normalschnittes der Fläche, der mit dem Hauptschnitt $\varrho_1$ den Winkel $\varphi$ bildet, ergibt sich aus

$$\frac{1}{\varrho_\varphi} = \frac{\cos^2\varphi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho_2}.$$

2. Satz von Meusnier. Der Krümmungsradius $\varrho_{\varphi,\psi}$ ($PF$) eines beliebigen schiefen Schnittes $TPBA$, der mit dem Normalschnitt $TPDC$ (dessen Krümmungsradius $\varrho_\varphi = PE$) dieselbe Spur $T$ in der Tangentialebene in $P$ (also dieselbe Flächentangente)

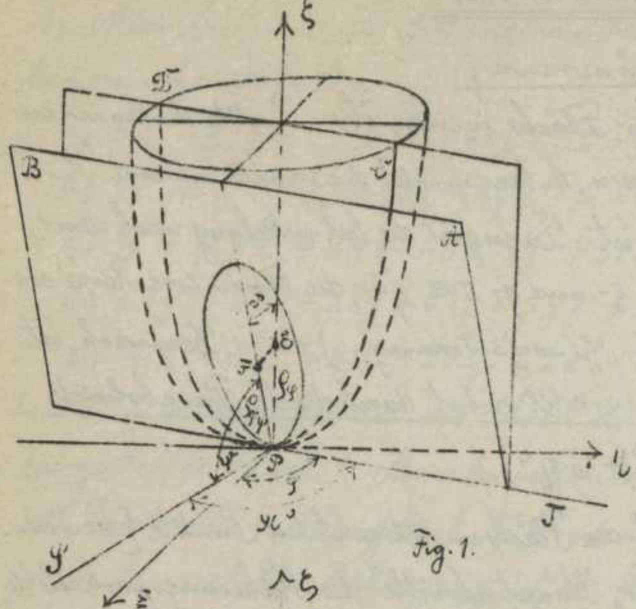


Fig. 1.

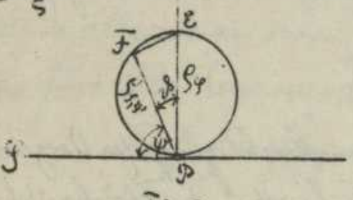


Fig. 2.

gemein hat, und der gegen die Tangentialebene den Winkel $\psi$ $(= \sphericalangle FPG)$, gegen den zugehörigen Normalschnitt also den $\sphericalangle \vartheta = \frac{\pi}{2} - \psi$ $(= \sphericalangle EPF)$ bildet, ergibt sich als

$$\varrho_{\varphi,\psi} = \varrho_\varphi \sin\psi = \varrho_\varphi \cos\vartheta .$$

Der Krümmungsmittelpunkt $F$ des schiefen Schnittes wird also als senkrechte Projektion des Krümmungsmittelpunkts $E$ des zugehörigen Normalschnittes erhalten (Fig. 2).

## IV. Berechnung der Hauptkrümmungsradien $\varrho_1$ und $\varrho_2$.

1. Ist die Fläche durch die Gleichung in impliciter Form $F(xyz) = 0$ gegeben, so sind die beiden Hauptkrümmungsradien $\varrho_1$ und $\varrho_2$ in einem Punkt $x, y, z$ gegeben durch:

$$\varrho_{1,2} = -\frac{1}{\lambda_{1,2}} \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}\,;$$

dabei sind $\lambda_1, \lambda_2$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} F_{11}-\lambda & F_{12} & F_{13} & F_1 \\ F_{21} & F_{22}-\lambda & F_{23} & F_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33}-\lambda & F_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2. Ist die Fläche in der expliciten Form $z = f(x,y)$ gegeben, und sind $\lambda_1, \lambda_2$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\lambda^2(1+f_1^2+f_2^2) + \lambda\left[f_{11}(1+f_2^2) + f_{22}(1+f_1^2) - 2f_{12}f_1f_2\right] + (f_{11}f_{22} - f_{12}^2) = 0,$$

so sind die Hauptkrümmungsradien:

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{\lambda_{1,2}} \sqrt{1+f_1^2+f_2^2}$$

V. Die Lage der Hauptschnitte ist dadurch bestimmt, dass ihre Spuren in der Tangentialebene die beiden stets reellen Winkelhalbierenden der zwei (reellen oder conjugiert imaginären) Richtungen sind, in denen die Tangentialebene die Fläche schneidet.

Die Tangenten der beiden Hauptschnitte in einem Flächenpunkt bestimmen die Richtungen der beiden „Krümmungslinien" in diesem Punkt. Letztere Kurven können auch durch ihre Eigenschaft definiert werden, dass stets die Flächennormalen in zwei benachbarten Punkten einer Krümmungslinie sich schneiden. Durch jeden Flächenpunkt gehen zwei, und zwar aufeinander senkrechte Krümmungslinien. Die Differentialgleichungen der Krümmungslinien sind:

1.) für $F(x,y,z)=0$:

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = 0 \text{ und: }$$

$$\begin{vmatrix} F_1 & dF_1 & dx \\ F_2 & dF_2 & dy \\ F_3 & dF_3 & dz \end{vmatrix} = 0.$$

2.) für $z = f(x,y)$:

$$dz = f_1 dx + f_2 dy \quad \text{und:}$$

$$\begin{vmatrix} f_1 & df_1 & dx \\ f_2 & df_2 & dy \\ -1 & 0 & dz \end{vmatrix} = 0$$

VI. Unter dem Gauss'schen „Krümmungsmass" $K$ einer Fläche in einem ihrer Punkte $x, y, z$ versteht man das Produkt der reciproken Hauptkrümmungsradien in diesem Punkte. Es ist also:

1.) für $F(x\,y\,z)=0$:

$$K = \frac{1}{\rho_1 \cdot \rho_2} = -\frac{\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_1 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 & 0 \end{vmatrix}}{(F_1^2+F_2^2+F_3^2)^2}$$

2.) für $z = f(x,y)$:

$$K = \frac{1}{\rho_1 \cdot \rho_2} = \frac{f_{11} f_{22} - f_{12}^2}{(1+f_1^2+f_2^2)^2}$$

Eine Fläche ist also in einem Punkte elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch gekrümmt, je nachdem dort $K > 0$, $= 0$, oder $< 0$ ist.

Hat das Krümmungsmass $K$ einer Fläche für alle ihre Punkte den selben Wert $c$, so heisst die Fläche eine „Fläche von constantem Krümmungsmass." Ist $c = 0$, so heisst die Fläche auch eine in die Ebene abwickelbare Fläche.

VII. Unter der „mittleren Krümmung" der Fläche in einem Punkte versteht man die Summe $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$ der reciproken Hauptkrümmungsradien in dem Punkte. Flächen, bei denen diese Summe für alle ihre Punkte dieselbe ist (= Const.), heissen Flächen „constanter mittlerer Krümmung". Ist $c = 0$, so heissen sie „Minimalflächen".

## Aufgaben.

1.) Man suche den Krümmungsradius der Schnittkurve des Paraboloids $z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}\right)$ mit einer Ebene durch den Nullpunkt, die mit der $x$- bezw. $y$-Axe die Winkel $45°$ bzw. $60°$ bildet, und zwar bestimme man den Krümmungsradius im Nullpunkte.

2.) Welches sind die Hauptkrümmungsradien a.) des Paraboloids $z = x \cdot y$ im Scheitel und im Punkt $x = 1, y = -2$; b.) der Fläche $z = y^2 - x^3$ im Punkte $x = 1; y = 1$? Welches ist die parabolische Kurve dieser letzteren Fläche?

3.) Man berechne die Hauptkrümmungsradien für einen beliebigen Punkt $x_0, y_0, z_0$ a.) des ellipt. Paraboloids $2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$; b.) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$. Für welche Punkte sind die Hauptkrümmungsradien gleich und gleichgerichtet?

Man zeige, dass allgemein für die Fläche $z = f(x,y)$ die Bedingung für das Gleichwerden der Hauptkrümmungsradien in die 2 Bedingungen zerlegt werden kann:

$$\frac{f_{11}}{1+f_1^2} = \frac{f_{12}}{f_1 f_2} = \frac{f_{22}}{1+f_2^2}.$$

4.) Man versuche, die Differentialgleichungen der Krümmungslinien des Paraboloids $2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ zu integrieren.

5.) Man stelle die Gleichung der Fläche auf, die der geometrische Ort für die Krümmungsmittelpunkte aller Schnittkurven der Fläche $z = f(x,y)$ mit Ebenen durch einen Punkt der Fläche in diesem Punkte ist.

6.) Man bestimme die „Niveaukurven" ($z$ = Const) und „Fallinien" (Orthogonaltrajektorien zu den erstern) der Fläche in Aufg. 2. b.)

14. II. 11. **Höhere Mathematik III** № 13.

## Parameterdarstellung einer Fläche. – Geometrie auf der Fläche.

1.) Die Fläche sei mit Hilfe der Parameter $u$ und $v$ dargestellt in der Form:

$$x = \varphi(u,v); \quad y = \psi(u,v); \quad z = \chi(u,v).$$

Beispiele:

a.) $\left.\begin{array}{l} x = r\cdot\cos u\cdot\cos v \\ y = r\cdot\cos u\cdot\sin v \\ z = r\cdot\sin u \end{array}\right\}$ Kugel. $u$ = Breite, $v$ = Länge. (Polarkoordinaten im Raum)

b.) $\left.\begin{array}{l} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = f(u) \end{array}\right\}$ Beliebige Rotationsfläche um die z-Axe.

c.) $\left.\begin{array}{l} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = k\cdot v \end{array}\right\}$ Windschiefe Schraubenfläche.

Man führt die folgenden Abkürzungen ein:

$$\mathcal{E} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$\mathcal{F} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\chi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\mathcal{G} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

2.) Die Entfernung der beiden Flächenpunkte $u, v$ und $u+du$, $v+dv$ (das „Linienelement" der Fläche in der Fortschreitungsrichtung $du, dv$) ist gegeben durch:

$$ds^2 = \mathcal{E}du^2 + 2\mathcal{F}du\,dv + \mathcal{G}dv^2.$$

Speziell das Linienelement der Parameterkurve

$u$ = Const., also in der Fortschreitungsrichtung $du = 0$, ist $ds_u = \sqrt{\mathcal{G}}\,dv$

bezw. $v$ = Const., " " " $dv = 0$, " $ds_v = \sqrt{\mathcal{E}}\,du$

3.) der Winkel zwischen zwei Kurven auf der Fläche, die sich im Punkt $u, v$ schneiden und deren Fortschreitungsrichtungen dort durch $du_1, dv_1$ bezw. $du_2, dv_2$ repräsentiert werden, ergibt sich aus:

$$\cos\vartheta = \frac{\mathcal{E}du_1du_2 + \mathcal{F}(du_1dv_2 + du_2dv_1) + \mathcal{G}dv_1dv_2}{ds_1\cdot ds_2}.$$

Dabei sind $ds_1$ und $ds_2$ die zu den beiden Kurven gehörigen Linienelemente, also:

$$ds_1 = \sqrt{\mathcal{E}\,du_1^2 + 2\mathcal{F}du_1 dv_1 + \mathcal{G}\,dv_1^2}$$

$$ds_2 = \sqrt{\mathcal{E}du_2^2 + 2\mathcal{F}du_2 dv_2 + \mathcal{G}\,dv_2^2}$$

Speziell für den Winkel $\Theta$ der Kurven $u$ = Const. und $v$ = Const gegeneinander ist:

$$\cos\Theta = \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} \quad ; \quad \sin\Theta = \frac{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}} .$$

Ist also überall auf der Fläche die Grösse $\mathcal{F} = 0$, so stehen die Kurven $u$ = Const. und $v$ = Const. überall senkrecht auf einander d.h. diese beiden Kurvensysteme sind zwei Orthogonalsysteme von Raumkurven auf der Fläche.

4.) Das „Oberflächenelement" der Fläche ist in dieser Darstellung

$$d\omega = ds_u \cdot ds_v \cdot \sin\Theta = \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}\,du\,dv$$

Das von zwei auf der Fläche liegenden Kurven $v = \mathcal{V}_1(u)$ und $v = \mathcal{V}_2(u)$, die sich in den beiden Punkten $\bar{u}, \bar{v}$ und $\bar{\bar{u}}, \bar{\bar{v}}$ schneiden, begrenzte Stück der Oberfläche ist demnach:

$$\text{Oberfläche} = \int_{\bar{u}}^{\bar{\bar{u}}} du \int_{v=\mathcal{V}_1(u)}^{v=\mathcal{V}_2(u)} \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}\,dv .$$

Speziell für $x = u$; $y = v$ also $z = f(x,y)$ erhält das Oberflächenelement die Form:

$$d\omega = \sqrt{1+f_1^2+f_2^2}\,dx\,dy = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx \cdot dy ,$$

das ganze Oberflächenstück wird somit:

$$\text{Oberfläche} = \int_{x=a}^{x=b} dx \int_{y=\mathcal{Y}_1(x)}^{y=\mathcal{Y}_2(x)} \sqrt{1+f_1^2+f_2^2}\,dy .$$

5.) Das Volumen eines Körpers, der unten von der $xy$-Ebene, oben von der Fläche $z = f(xy)$ und seitlich von den Zylindern $y = \mathcal{Y}_1(x)$ ; $y = \mathcal{Y}_2(x)$, die sich für $x = a$ und $x = b$ schneiden, begrenzt wird, ist:

$$\text{Volumen} = \int_{x=a}^{x=b} dx \int_{y=\mathcal{Y}_1(x)}^{y=\mathcal{Y}_2(x)} f(xy)\,dy .$$

---

## Aufgaben.

1.) Man zeige, dass die Gleichungen

a.) $$\left.\begin{aligned} x &= a\,u\cos v \\ y &= b\,u\sin v \\ z &= u^2 \end{aligned}\right\}$$ ein ellipt. Paraboloid;

b.) $$\left.\begin{aligned} x &= a\sin u\cos v \\ y &= b\sin u\sin v \\ z &= c\cos u \end{aligned}\right\}$$ ein dreiaxiges Ellipsoid

darstellen. Man stelle Linien- und Flächenelement, sowie den Winkel $\Theta$ der Kurven $u=$ Const. und $v=$ Const. auf. Wo ist $\Theta = \frac{\pi}{2}$?

2.) Man stelle die Koordinaten $x, y, z$ des hyperbolischen Paraboloids $z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}\right)$ als Funktionen von $u, v$ dar, wobei $u=$ Const. und $v=$ Const die beiden Scharen von Erzeugenden sein sollen.

3.) Gegeben ist die Kugel in Parameterdarstellung

$$\left.\begin{aligned} x &= \sin u\cdot\cos v \\ y &= \sin u\cdot\sin v \\ z &= \cos u \end{aligned}\right\}$$

Wie heisst die Gleichung $F(u,v)=0$ derjenigen Kurven, welche die Meridiane $v=$ Const unter dem constanten Winkel $\alpha$ schneiden?

4.) Welches ist die Gleichung der Fläche

$$\left.\begin{aligned} x &= u\cos v \\ y &= u\sin v \\ z &= \tfrac{1}{2}v^2 \end{aligned}\right\}$$

in rechtwinkeligen Koordinaten? Man discutiere die Kurven $u=$ Const. und $v=$ Const. Wie gross ist das Flächenstück zwischen $u=0,\ u=1;\ v=0,\ v=1$?

5.) Man discutiere die Gestalt der Fläche $z = x\cdot y\sqrt{1-x^2-y^2}$ durch Vertikalschnitte durch die $z$-Axe. Welches ist das Volumen des Körpers begrenzt von der Fläche und der $xy$-Ebene?

6.) Gegeben sind folgende Flächen:

a.) $z = c\log\left[c+\sqrt{c^2-x^2-y^2}\right] - c\log\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{c^2-x^2-y^2}$ (Rot.-Fläche der Tractrixkurve)

b.) $z = \log\sin x - \log\sin y$

c.) $z = \frac{h}{2\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ (Gerade windschiefe Schraubenfläche)

d.) $\sqrt{x^2+y^2} = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{z}{m}} + e^{-\frac{z}{m}}\right)$ (Rot.-Fläche der Kettenlinie) e.) $(xz^2-y)^2-4(1-xy)(y^2-z)=0$

Man zeige, dass die Fläche

a.) konstantes negatives Krümmungsmass besitzt;

b.) c.) und d.) Minimalflächen sind;

e.) eine abwickelbare Fläche ist.

Man beweise auch, dass b.) die einzige Form einer Rückungsfläche $z=\varphi(x)+\psi(y)$ ist, die eine Minimalfläche ist.

---

Korrektur zu Blatt 12:

In Aufgabe 1.) muss es heissen:

„.... die mit der x- bezw. y-Axe die Winkel 45° bezw. 30° bildet ...!

21. II. 11. **Höhere Mathematik III.** № 14.

# I. Abbildung von Flächen.

1.) Eine „Abbildung einer Fläche auf eine andere" erhält man, wenn man den Punkten der ersten je solche der zweiten zuordnet. Ist

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ z = \chi(u,v) \end{array}\right\} \text{die erste Fläche,} \qquad \left.\begin{array}{l} x = \Phi(u',v') \\ y = \Psi(u',v') \\ z = X(u',v') \end{array}\right\} \text{die zweite,}$$

so gibt jedes Gesetz, das einem Wertepaar $u, v$ ein Wertepaar $u', v'$ zuordnet, eine Abbildung. Es sei $u' = g(u,v)$; $v' = h(u,v)$.

Ersetzt man hiernach $u', v'$ durch ihre Werte in $u, v$, so geht die Darstellung der zweiten Fläche über in:

$$\left.\begin{array}{l} x = \Phi[g(u,v), h(u,v)] = \mathcal{L}(u,v) \\ y = \Psi[g(u,v), h(u,v)] = \mathcal{M}(u,v) \\ z = X[g(u,v), h(u,v)] = \mathcal{N}(u,v) \end{array}\right\}$$

und zugeordnete Punkte werden durch dieselben Werte $u, v$ auf beiden Flächen dargestellt.

2.) Die Abbildung heisst „conform" („winkeltreu"), wenn zwei beliebige Kurven auf der Fläche I sich stets unter demselben Winkel schneiden, wie ihre Bildkurven auf Fläche II. Die Bedingung für die Conformität ist:

$$\mathcal{E} : \mathcal{F} : \mathcal{G} = \mathcal{E}' : \mathcal{F}' : \mathcal{G}' \quad \text{(also zwei Bedingungsgleichungen!)}$$

Bei der conformen Abbildung ist das Bild in den kleinsten Teilen dem Original ähnlich.

3.) Die Abbildung heisst „flächentreu", wenn jedes Flächenelement (somit auch jedes endliche Flächenstück) der ersten Fläche in ein gleich grosses, wenn auch der Gestalt nach verzerrtes, Flächenelement der zweiten Fläche abgebildet wird. Dafür ist die Bedingung:

$$\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 = \mathcal{E}'\mathcal{G}' - \mathcal{F}'^2 \quad \text{(eine Bedingungsgleichung!)}$$

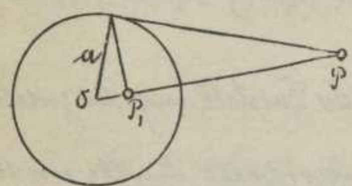
4.) Zugleich winkeltreu und flächentreu ist eine Abbildung, wenn $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$; $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$; $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$ ist. Daraus folgt dann, dass die zweite Fläche in diesem Fall durch eine Verbiegung ohne Dehnung aus der ersten Fläche hergestellt werden kann.

5.) Durch die „stereographische Projektion" werden alle Punkte einer Kugel von einem Punkt derselben (dem „Pol" der Projektion) aus auf die Tangentialebene im diametral gegenüberliegenden Kugelpunkt projiciert. Es entspricht alsdann dem Punkt der Kugel (Radius 1): der Punkt der Ebene: woraus auch folgt:

$$\left.\begin{aligned} x &= \sin u \cdot \cos v \\ y &= \sin u \cdot \sin v \\ z &= \cos u + 1 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \xi &= 2 \operatorname{cotg}\frac{u}{2} \cos v \\ \eta &= 2 \operatorname{cotg}\frac{u}{2} \cdot \sin v \\ \zeta &= 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= \frac{4\xi}{\xi^2+\eta^2+4} \\ y &= \frac{4\eta}{\xi^2+\eta^2+4} \\ z &= \frac{2(\xi^2+\eta^2)}{\xi^2+\eta^2+4} \end{aligned}$$

Die Abbildung ist conform; Kreise auf der Kugel werden in Kreise (ausnahmsweise auch Gerade) der Ebene abgebildet.

6.) Bei der Abbildung „durch reciproke Radien" in der Ebene wird das Bild $P_1$ des Punktes $P$ dadurch bestimmt, dass $P_1$ und $P$ mit einem fest gegebenen Punkt $O$ (Zentrum der Abbildung) auf einer Geraden liegen und weiter das Produkt $OP_1 \cdot OP = a^2 =$ Konst. gegeben ist. Diese Transformation führt jeden Kreis in einen Kreis über und verwandelt zwei Kurven, die sich in einem bestimmten Punkt $Q$ schneiden, in zwei Kurven, die sich in dem entsprechenden Punkt $Q_1$ unter demselben Winkel schneiden (conform). Insbesondere wird jede Gerade in einen Kreis durch $O$, und jeder Kreis durch $O$ in eine Gerade übergeführt. Zwischen den Koordinaten des Punktes $P(x,y)$ und des entsprechenden $P_1(x_1, y_1)$ bestehen die Beziehungen:




$$x_1 = \frac{a^2 x}{x^2+y^2} \; ; \quad y_1 = \frac{a^2 y}{x^2+y^2} \, .$$

7.) Setzt man $z = x+iy$ und $w = u+iv$; und es ist $w$ eine beliebige Funktion von $z$: $w = f(z)$, also (nach Trennung des Reellen und Imaginären): $u + iv = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$; so bestehen zwischen $\varphi$ und $\psi$ die Beziehungen:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \; ; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \, .$$

Hieraus folgt durch Differenzieren für jede der Funktionen $\varphi$ und $\psi$ allein eine Bedingungsgleichung:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \; ; \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \, .$$

Deutet man $x, y$ und $u, v$ als rechtwinklige Koordinaten in zwei Ebenen, so wird durch die Funktion $w = f(z)$ die Ebene der $x, y$ conform auf die Ebene der $u, v$ abgebildet. Dem Linienelement $ds$ in der $xy$-Ebene $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$ entspricht ein Linienelement $d\sigma$ der $u,v$-Ebene

$$d\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2} \cdot \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2} \cdot \sqrt{dx^2+dy^2} .$$

Dabei ist $\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}$ das „Vergrösserungsverhältnis"

## II. Mehrfache Integrale.

1.) Einführung neuer Variabeln $u, v$ statt $x, y$ unter dem Doppelintegral:

$$\iint F(x,y)\,dx\,dy = \iint F[\varphi(u,v), \psi(u,v)] \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv, \text{ wenn } \begin{array}{l} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{array}$$

Die Kurvensysteme $u =$ Const und $v =$ Const. teilen das Integrationsgebiet der $xy$-Ebene in $\infty^2$ Elemente. Die Integration über $v$ fasst diese in Streifen entlang $u =$ Const zusammen, die Integration über $u$ summiert alsdann die Streifen über das Gesamtgebiet. Die Grenzen von $v$ sind durch die Schnittpunkte der Grenzkurve mit $u =$ Const. bestimmt, die Grenzen von $u$ sind die äussersten auf der Grenzkurve vorhandenen Werte von $u$.

2.) Einführung von $u, v, w$ statt $x, y, z$ unter dem dreifachen Integral:

$$\iiint F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint F(\varphi, \psi, \chi) \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial w} & \frac{\partial\psi}{\partial w} & \frac{\partial\chi}{\partial w} \end{vmatrix} du \cdot dv \cdot dw.$$

Dabei ist: $x = \varphi(u,v,w)$; $y = \psi(u,v,w)$; $z = \chi(u,v,w)$.

3.) Masse eines Körpers mit der variabeln Dichte $\mu$:

$$M = \iiint \mu(x,y,z)\,dx \cdot dy \cdot dz.$$

4.) Trägheitsmomente des Körpers bezüglich der 3 Koordinatenaxen:

$$T_x = \iiint \mu \cdot (y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz; \quad T_y = \iiint \mu \cdot (z^2 + x^2)\,dx\,dy\,dz; \quad T_z = \iiint \mu \cdot (x^2 + y^2)\,dx \cdot dy\,dz.$$

Deviations- (Zentrifugal-) Momente:

$$D_{x,y} = \iiint \mu \cdot xy\,dx\,dy\,dz; \quad \text{analog } D_{y,z} \text{ und } D_{z,x}.$$

5.) Trägheitsmoment des Körpers bezüglich einer Axe durch den Nullpunkt mit den Richtungscosinus $\alpha, \beta, \gamma$:

$$T = \alpha^2 T_x + \beta^2 T_y + \gamma^2 T_z - 2\alpha\beta D_{x,y} - 2\beta\gamma D_{y,z} - 2\gamma\alpha D_{z,x}.$$

Trägt man auf jeder durch den Nullpunkt gehenden Richtung $\alpha, \beta, \gamma$ die Wurzel $\frac{1}{\sqrt{T}}$ aus dem reziproken Wert des zugehörigen Trägheitsmomentes $T$ auf, so liegen die Endpunkte auf dem Trägheitsellipsoid:

$$x^2 T_x + y^2 T_y + z^2 T_z - 2xy D_{x,y} - 2yz D_{y,z} - 2zx D_{z,x} = 1.$$

# Aufgaben.

1.) Man bilde eine Kugel auf die Ebene so ab, dass die Breitenkreise in concentrische Kreise der Ebene, die Meridiane in die Geraden durch deren Zentrum übergehen, und die Abbildung a.) winkeltreu; b.) flächentreu ist

2.) Der Kegel $\left.\begin{array}{l} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = \sqrt{k^2-1}\,u \end{array}\right\}$ ist auf die Ebene $\left.\begin{array}{l} x = ku\cos\frac{v}{k} \\ y = ku\cdot\sin\frac{v}{k} \\ z = 0 \end{array}\right\}$ conform und flächentreu abgebildet. Beweis! (Abwickelung des Kegels auf die Ebene.)

3.) Man bilde eine Rotationsfläche auf einen Kreiszylinder so ab, dass die Breitenkreise beider Flächen sich gegenseitig entsprechen, die Meridiane in die Erzeugenden des Zylinders übergehen, und die Abbildung a.) winkeltreu b.) flächentreu ist.

4.) Eine Hyperbel soll vom Mittelpunkt aus durch reziproke Radien transformiert werden.

5.) Man untersuche folgende conforme Abbildungen, wobei $z = x+iy$; $w = u+iv$.
a.) $w = \frac{1}{z}$; b.) $w = az+b$; c.) $w = z^2$; d.) $w = z^n$; e.) $w = e^z$.

6.) Gegeben das Paraboloid $z = x^2+py^2$; man berechne den Kubikinhalt des durch die Ebene $z = 2x+3$ abgeschnittenen endlichen Teiles desselben.

7.) Wie gross ist der Kubikinhalt des von der $xy$-Ebene, dem Zylinder $x^2+y^2-ax=0$ und dem Rotationsparaboloid $x^2+y^2-cz=0$ begrenzten Körpers? Man wende auch ebene Polarkoordinaten $x = \varrho\cos\varphi$; $y = \varrho\sin\varphi$ an.

8.) Es soll das Volumen des 3-axigen Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ bestimmt werden mit Hilfe der Substitutionen:

$$x = au;\quad y = bv\sqrt{1-u^2};\quad z = cw\sqrt{(1-u^2)(1-v^2)}.$$

---

Name: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ Note: _ _ _ _ _

# Höhere Mathematik III.

## Semestralprüfung. – 8. März 1911.

1.) Man integriere
a.) die Clairault'sche Gleichung: $y = px + p^{2/3}$, wobei $p = \frac{dy}{dx}$;
b.) die Differentialgleichung 2. Ordnung: $y' = y'' \cdot x$, wobei $y' = \frac{dy}{dx}$; $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$.
Ferner discutiere man die Integralkurven und bestimme bei a.) die singuläre Lösung.

2.) Man stelle die Differentialgleichung des Kurvensystems

$$x^2 - y^2 - cx = 0$$

auf, sowie die Diff.-Gl. der Orthogonaltrajektorien und integriere diese. Welches ist der ungefähre Verlauf beider Kurvensysteme?

3.) Man integriere die Diff.-Gl. 2. Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = \cos x$$

und gebe die Gleichung derjenigen partikulären Integralkurve an, welche die x-Axe im Nullpunkt berührt.

4.) Man integriere die partielle Differentialgleichung

$$\frac{z^2}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{z}.$$

Welche partikuläre Integralfläche enthält die Gerade $\left\{ \begin{matrix} x = z \\ y = 1 \end{matrix} \right\}$?

5.) Man errichte längs der beiden durch den Nullpunkt gehenden Erzeugenden des Paraboloids

$$z = x^2 - y^2$$

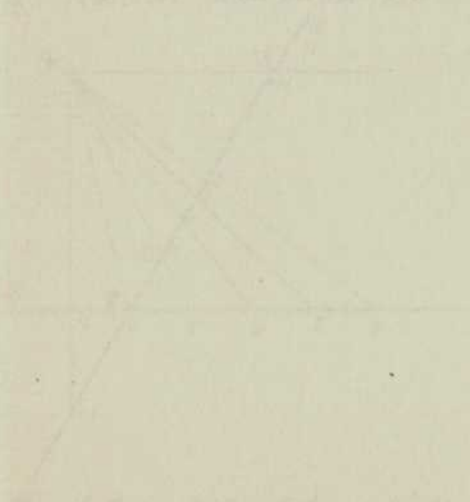
die Flächennormalen. Die Normalen längs einer Erzeugenden liegen selbst wieder auf einer Fläche 2. Ordnung. Welches ist die Gleichung und Art der so entstandenen Fläche?

6.) Man bilde das Rotationsellipsoid

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos u \cdot \sin v \\ y &= a \sin u \cdot \sin v \\ z &= c \cdot \cos v \end{aligned} \right\}$$

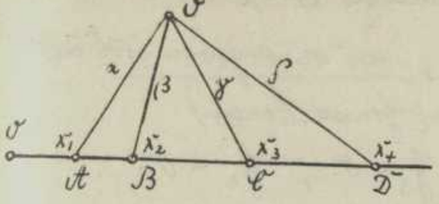
in die Ebene so ab, dass die Breitenkreise in Kreise um den Nullpunkt, die Meridiane in die Geraden durch den Nullpunkt übergeführt werden, und die Abbildung flächentreu ist.

[Die Aufgaben sind auf diesem Blatt zu bearbeiten].



2. V. 11. **Höhere Mathematik IV.** № 1.

I. Das Doppelverhältnis von 4 Punkten $A, B, C, D$ einer Geraden oder von 4 durch sie gehenden Strahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eines Zentrums $O$ ist:

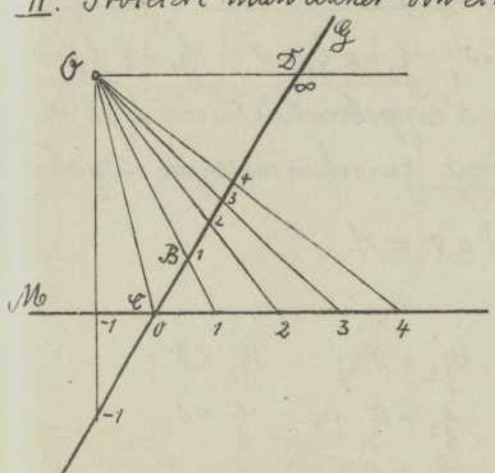



$$\Delta = (ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}$$
$$= (\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)} : \frac{\sin(\alpha\delta)}{\sin(\beta\delta)}.$$

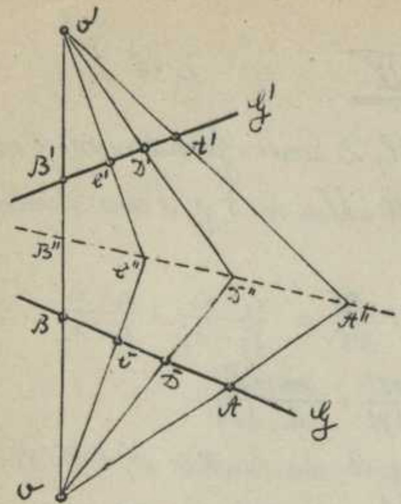
Wählt man von den 4 Punkten (Strahlen) drei, z. B. die Punkte $B, C, D$ (Strahlen $\beta, \gamma, \delta$), zu Grundpunkten (Grundstrahlen), so ist die Lage des vierten Punktes $A$ (vierten Strahles $\alpha$) durch das Doppelverhältnis $(ABCD)$ (durch $(\alpha\beta\gamma\delta)$) eindeutig bestimmt.

Legt man die Grundpunkte $B, C, D$ in die Punkte $1, 0, \infty$, so geht die Bestimmung von $A$ in die gewöhnliche Koordinatenbestimmung über; denn es wird für $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = \infty$ : $\Delta = x_1$.

II. Proiciert man daher von einem Zentrum aus einen Masstab $M$ auf eine durch dessen Nullpunkt gehende Gerade $G$ und bezeichnet diesen sich selbst entsprechenden Schnittpunkt beider Geraden mit $C$, die den Punkten 1 und $\infty$ entsprechenden Punkte mit $B$ und $D$, so gibt die Zahl an jedem Punkt des Masstabes das Doppelverhältnis $(ABCD)$ des entsprechenden Punktes $A$ der Geraden $G$ und der drei Punkte $B, C, D$ an.



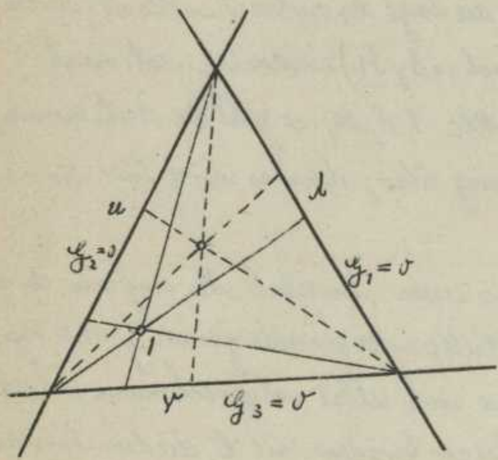

III. Soll zu 3 Punkten $B', C', D'$ (s. d. Figur auf der nächsten Seite) einer Geraden ein vierter $A'$ gefunden werden, so dass $(A'B'C'D') = (ABCD)$, gleich dem Doppelverhältnis der 4 Punkte $A, B, C, D$ einer andern Geraden $G$ ist, so proiciert man beide Punktreihen von zwei beliebigen Punkten $O$ und $O'$ der Geraden $BB'$, so dann $(A''B''C''D'') = (ABCD)$ ist und $A'$ durch $O'A''$ bestimmt wird.




**IV.** Sind $G_3 - \mu G_4 = 0$; $G_3 - G_4 = 0$; $G_3 = 0$; $G_4 = 0$ die Gleichungen von 4 Strahlen (Ebenen) eines Büschels durch den Punkt (die Axe) $\begin{cases} G_3 = 0 \\ G_4 = 0, \end{cases}$ so ist ihr Doppelverhältnis $\Delta = \mu$.

Für $\mu = 1$; $\mu = 0$; $\mu = \infty$ ergeben sich dabei die Grundstrahlen (Grundebenen):

$$G_3 - G_4 = 0 \;;\quad G_3 = 0 \;;\quad G_4 = 0.$$




**V.** Legen wir das von den 3 Geraden $G_1 = 0$; $G_2 = 0$; $G_3 = 0$ gebildete Dreieck als <u>Koordinatendreieck</u> zugrunde und wählen einen beliebigen Punkt als Einheitspunkt, durch den die 3 Geraden

$$G_2 - G_3 = 0 \;;\quad G_3 - G_1 = 0 \;;\quad G_1 - G_2 = 0$$

gehen, so wird ein beliebiger Punkt der Ebene durch die 3 Strahlen

$$G_2 - \lambda G_3 = 0 ;\quad G_3 - \mu G_1 = 0 ;\quad G_1 - \nu G_2 = 0,$$

also durch die 3 Doppelverhältnisse $\lambda, \mu, \nu$ bestimmt, soferne zwischen diesen die Beziehung besteht:

$$\lambda \mu \nu = 1.$$

Wir haben also:

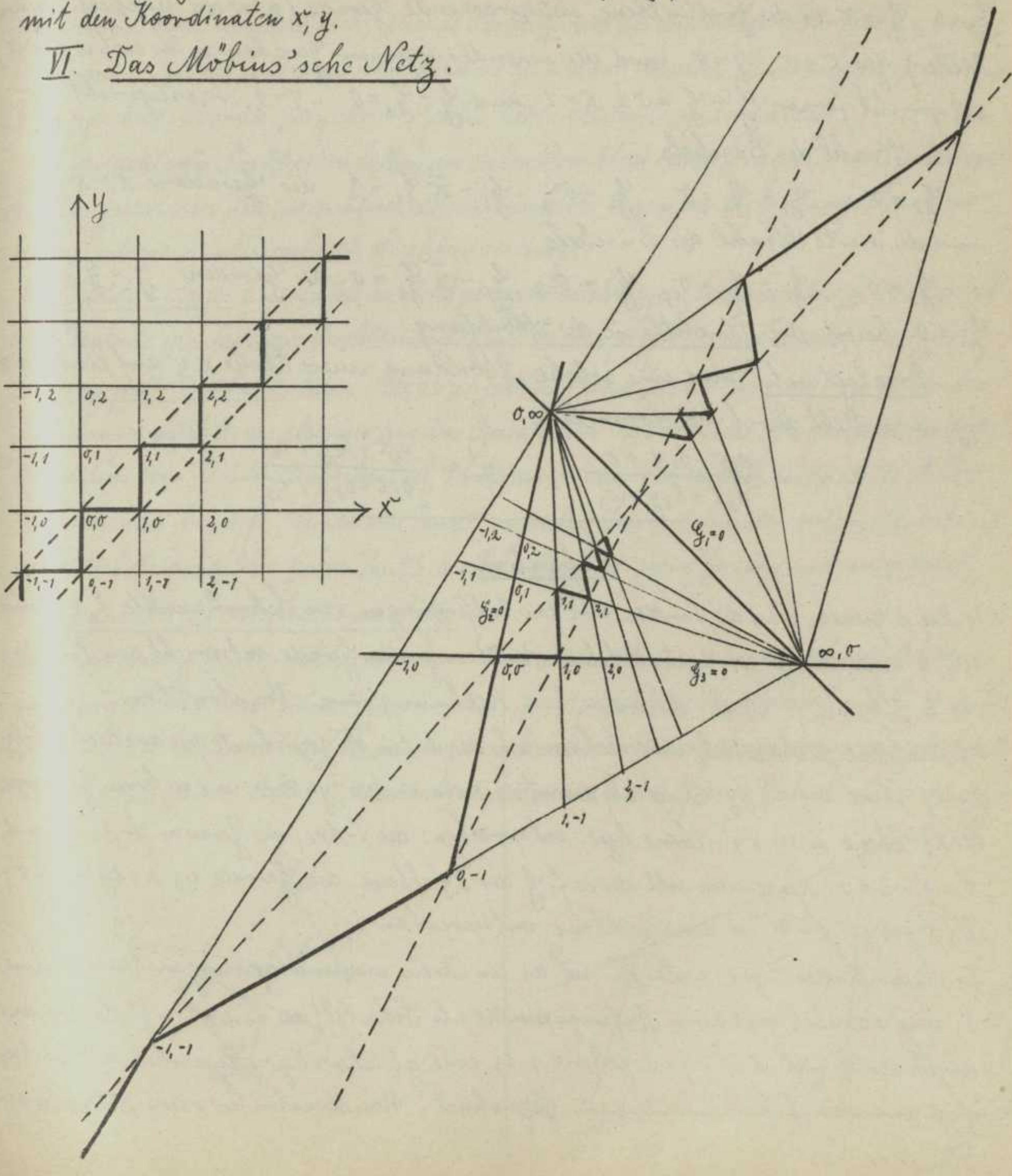
$$\begin{array}{llll} G_2 - \lambda G_3 = 0 ; & G_2 - G_3 = 0 ; & G_2 = 0 ; & G_3 = 0 ; \\ G_3 - \mu G_1 = 0 ; & G_3 - G_1 = 0 ; & G_3 = 0 ; & G_1 = 0 ; \\ G_1 - \nu G_2 = 0 ; & G_1 - G_2 = 0 ; & G_1 = 0 ; & G_2 = 0 . \end{array}$$

Zum Übergang von diesen Koordinaten zu den gewöhnlichen rechtwinkligen setze man:

$$\begin{array}{llll} Y - y Z = 0 ; & Y - Z = 0 ; & Y = 0 ; & Z = 0 . \\ Z - \frac{1}{x} X = 0 ; & Z - X = 0 ; & Z = 0 ; & X = 0 . \\ X - \frac{x}{y} Y = 0 ; & X - Y = 0 ; & X = 0 ; & Y = 0 . \end{array}$$

Ist hier $Z=0$ die unendlich weite Gerade, so ergeben sich im Endlichen $\frac{X}{Z}=x$ und $\frac{Y}{Z}=y$ als die gewöhnlichen Punktkoordinaten und $\frac{Y}{X}=\frac{y}{x}$ als die Richtung des Strahles vom Koordinatenanfangspunkt nach dem Punkt mit den Koordinaten $x, y$.

## VI. Das Möbius'sche Netz.



Die umstehenden Figuren veranschaulichen die perspectivische Abbildung einer in quadratische Felder eingeteilten Ebene auf eine andere. Sind nämlich die Geraden $G_2=0$, $G_3=0$, $G_1=0$ in der zweiten Ebene entsprechende Gerade (also die perspectivischen Bilder) zu $x=0$, $y=0$ und der unendlich fernen Geraden in der ersten Ebene, entspricht ferner $G_1-G_2=0 \ldots\ldots x=1$ und $G_1-G_3=0 \ldots\ldots y=1$, so entspricht der vierte Strahl des Büschels

$$G_2=0,\quad G_1-G_2=0,\quad G_1=0,\quad G_1-\bar{x}G_2=0$$ der Geraden $x=\bar{x}$,

und der vierte Strahl des Büschels

$$G_3=0,\quad G_1-G_3=0,\quad G_1=0,\quad G_1-\bar{y}G_3=0$$ der Geraden $y=\bar{y}$.

$G_1=0$ heisst die Fluchtlinie der Abbildung.

Analytisch wird eine solche Abbildung einer Ebene $x, y$ auf eine zweite $x'y'$ vermittelt durch die Formeln:

$$x'=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_3x+b_3y+c_3}\quad;\quad y'=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_3x+b_3y+c_3}\,.$$

## Aufgaben.

1.) Auf 2 Geraden sind die Punkte mit den Entfernungen vom Schnittpunkte 2, 4, 5 und 1, 2, 3 einander zugeordnet. Welcher Punkt der zweiten Gerade entspricht dem Punkte a.) 6; b.) 8; c.) 12 der ersten? Rechnung und Konstruktion!

2.) Man bilde zeichnerisch und rechnerisch das unter VI. gezeichnete quadratische Netz der $xy$-Ebene auf die $x'y'$-Ebene ab, derart dass der $x$-Axe, $y$-Axe und $\infty$ fernen Geraden der $xy$-Ebene in der $x'y'$-Ebene bzw. entsprechen: die $x'$-Axe, die Geraden $y'-2x'=0$ und $x'+y'-3=0$. Ausserdem soll der $\infty$ f. G. der $x'y'$-Ebene die Gerade a.) $x+2y+2=0$; b.) $x+2y-2=0$ in der $xy$-Ebene entsprechen.

3.) In der linken Figur unter VI. sei a.) ein Kreis um den Ursprung mit dem Radius 1; b.) eine Parabel mit dem Anfangspunkt als Scheitel, der Linie $x=y$ als Axe und durch den Punkt $x=1$; $y=0$ gehend; c.) eine gleichseitige Hyperbel mit der Axe $y=0$ und dem Scheitel $x=2$, $y=0$ gezeichnet. Man konstruiere deren Bilder in der Figur rechts.

9. V. 11. **Höhere Mathematik IV.** № 2.

I. a) Perspektive Lage. Strahlbüschel und Punktreihe liegen perspektivisch, wenn die Strahlen des Büschels durch die entsprechenden Punkte der Punktreihe hindurchgehen. 2 Punktreihen liegen perspektivisch, wenn sie durch Gerade aus demselben Büschel ausgeschnitten werden. 2 Büschel sind perspektiv, wenn sie zu ein und derselben Punktreihe perspektiv sind. Je 4 entsprechende Elemente perspektiver Gebilde haben gleiches Doppelverhältnis.

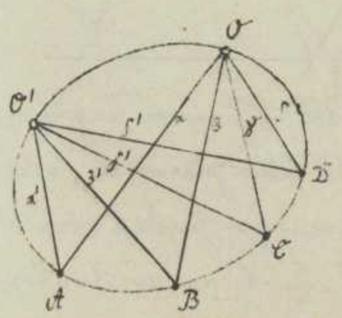
Bei perspektiven Punktreihen fallen im Schnittpunkt der beiden „Träger" 2 entsprechende Punkte zusammen. Bei perspektiven Strahlbüscheln liegen im Verbindungsstrahl der beiden Zentren 2 entsprechende Strahlen vereinigt.

b) Projektive Lage. Zwei Gebilde, die nicht perspektivisch liegen, bei denen aber je 4 entsprechende Elemente gleiches Doppelverhältnis haben, heissen projektiv auf einander bezogen.

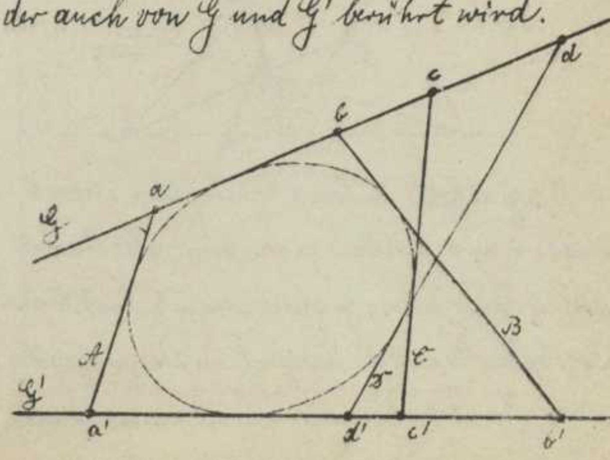
II. Prinzip der Dualität. Jedem Satz der projektiven Geometrie der Ebene, der keine metrischen Beziehungen enthält, der also nur aus den Operationen des Verbindens von Punkten und des Schneidens von Geraden aufgebaut ist, kann man einen zweiten Satz an die Seite stellen, indem man die Begriffe „Gerade" und „Punkt" im ersten Satz miteinander vertauscht. Dabei entspricht der Verbindungslinie zweier Punkte der Schnittpunkt zweier Geraden und umgekehrt.

III. Dualistisch entsprechende Sätze.

a) Bringt man je 2 entsprechende Strahlen zweier projektiven Büschel O und O' zum Schnitt, so liegen diese Schnittpunkte auf einem Kegelschnitt, der auch durch O und O' hindurchgeht.

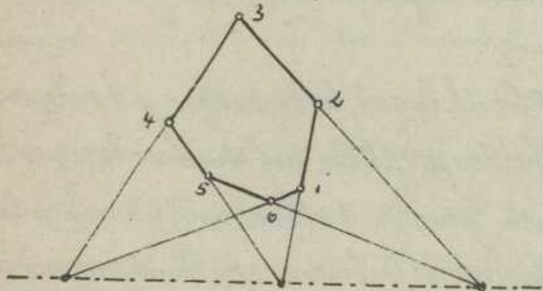



a) Verbindet man je 2 entsprechende Punkte zweier projektiven Punktreihen G und G', so umhüllen diese Verbindungslinien einen Kegelschnitt, der auch von G und G' berührt wird.

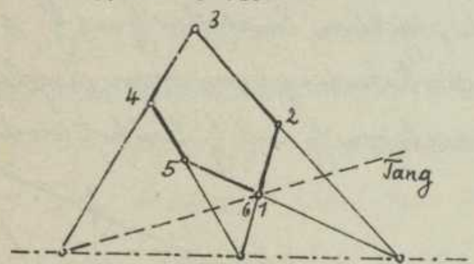


## b.) Satz von Pascal.

Gehören die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 dem Erzeugnisse zweier projektiver Strahlbüschel an, liegen also auf einem Kegelschnitt und bilden ein diesem einbeschriebenes Sechseck, so liegen die Schnittpunkte der Geraden: 12 und 45; 23 und 56; 34 und 61 auf einer Geraden



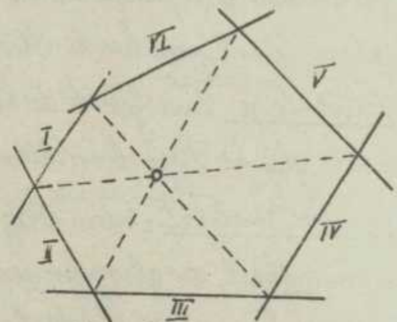

1. Spezialfall: 2 Punkte, 6 und 1, fallen zusammen; also Fünfeck mit Tangente in einer Ecke; zugleich, wenn 5 Punkte eines Kegelschnittes gegeben sind, Konstruktion der Tangente in einem derselben:



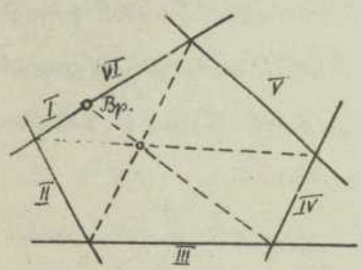

2. Spezialfall: 2 Paare von Punkten, etwa 6 und 1; 2 und 3 fallen zusammen; also Viereck mit 2 Tangenten; zugleich, wenn 4 Punkte eines Kegelschnitts und die Tangente in einem gegeben sind, Konstruktion der Tangente in einem weiteren:

## b.) Satz von Brianchon.

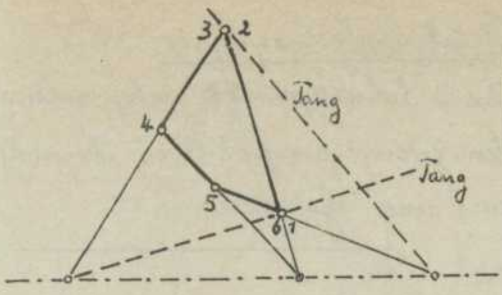
Gehören die Geraden I, II, III, IV, V, VI dem Erzeugnisse zweier projektiver Punktreihen an, berühren also einen Kegelschnitt und bilden ein diesem umschriebenes Sechsseit, so gehen die Verbindungslinien der Punkte: I II und IV V; II III und V VI; III IV und VI I durch einen Punkt.



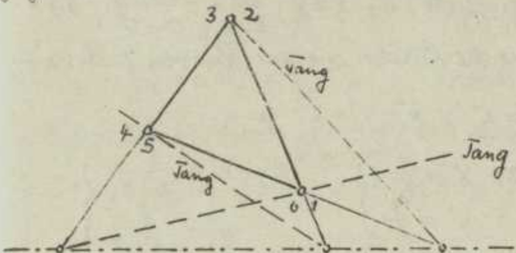

1. Spezialfall: 2 Tangenten, VI und I, fallen zusammen; also Fünfseit mit Berührpunkt in einer Seite; zugleich, wenn 5 Tangenten eines Kegelschnitts gegeben sind, Konstruktion des Berührpunktes einer derselben:



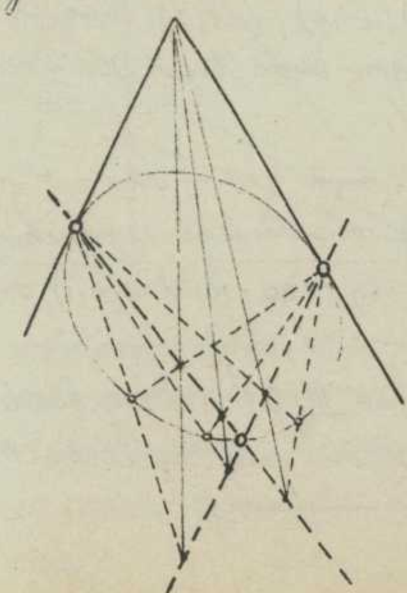

2. Spezialfall: 2 Paare von Tangenten, etwa VI und I; II und III fallen zusammen; also Vierseit mit 2 Berührpunkten; zugleich, wenn 4 Tangenten eines Kegelschnitts und der Berührpunkt einer gegeben sind, Konstruktion des Berührpunktes einer weiteren:

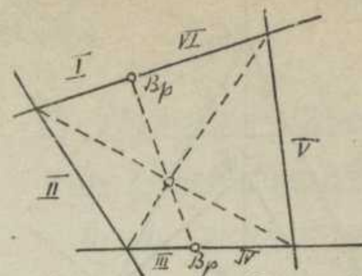



3. Spezialfall: 3 Paare von Punkten, 6 und 1; 2 und 3; 4 und 5, fallen zusammen; also Dreieck mit den 3 Tangenten in den Ecken; zugleich, wenn 3 Punkte und die Tangenten in zweien derselben gegeben sind, Konstruktion der dritten:

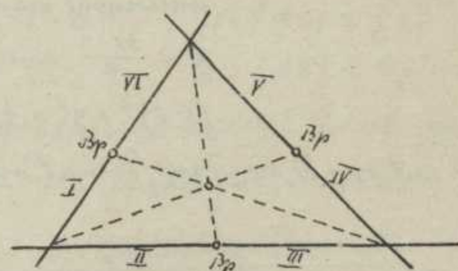



c.) Konstruktion beliebig vieler Punkte eines Kegelschnitts, aus 3 Punkten und den Tangenten in zweien derselben:

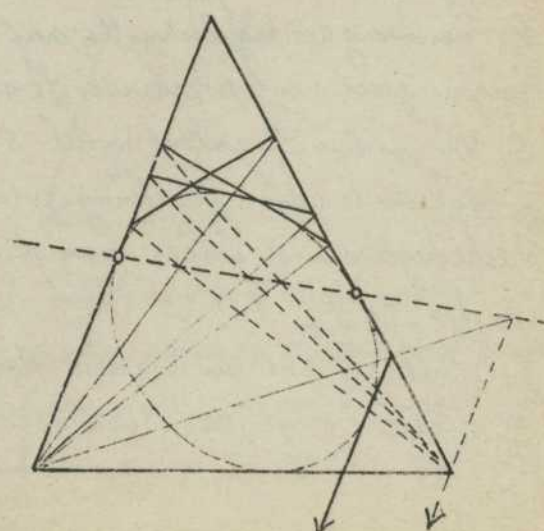


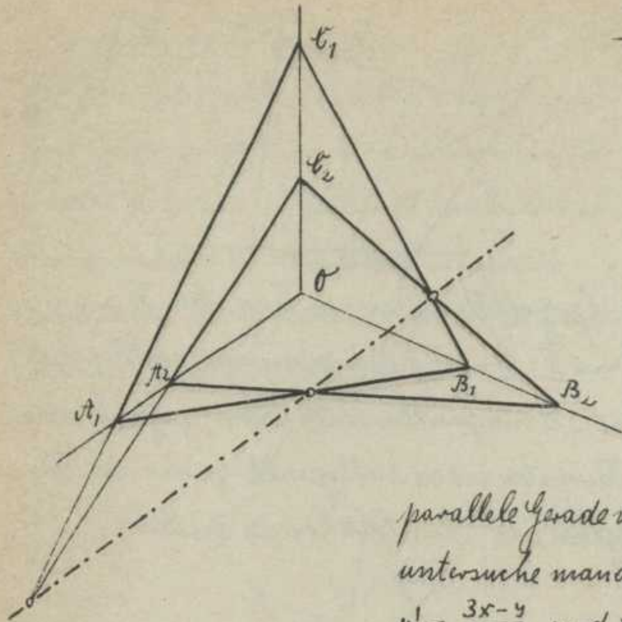



3. Spezialfall: 3 Paare von Tangenten, VI und I; II und III; IV und V, fallen zusammen; also Dreiseit mit 3 Berührpunkten in den Seiten; zugleich, wenn 3 Tangenten und die Berührpunkte zweier derselben gegeben sind, Konstruktion des dritten:




c.) Konstruktion beliebig vieler Tangenten eines Kegelschnitts, aus 3 Tangenten und den Berührpunkten zweier derselben:






## IV. Satz von Desargues

Die 3 Schnittpunkte entsprechender Seiten zweier perspektiven Dreiecke liegen auf einer Geraden.

## Aufgaben.

1.) Man zeige, dass bei der „affinen Transformation
$$x' = a_{11}x + a_{12}y$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y$$
parallele Gerade wieder in parallele Gerade übergehen. Speziell untersuche man die Beispiele: a.) $x' = x$; $y' = -\frac{x}{2} + y$; b.) $x' = \frac{x}{2} - y$, $y' = \frac{3x-y}{2}$ und zeichne die Bilder einiger Kurven z. B.: $x^2 + y^2 = 1$; $(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$; $y^2 = x$; $x^2 - y^2 = 1$ u. a.

2.) Man untersuche die Transformationen a.) $\left.\begin{array}{l} x' = \frac{1}{x} \\ y' = \frac{y}{x} \end{array}\right\}$; b.) $\left.\begin{array}{l} x' = \frac{1}{x+y} \\ y' = \frac{y}{x+y} \end{array}\right\}$

und zeichne wie in № 1 die Bilder einiger Kurven.

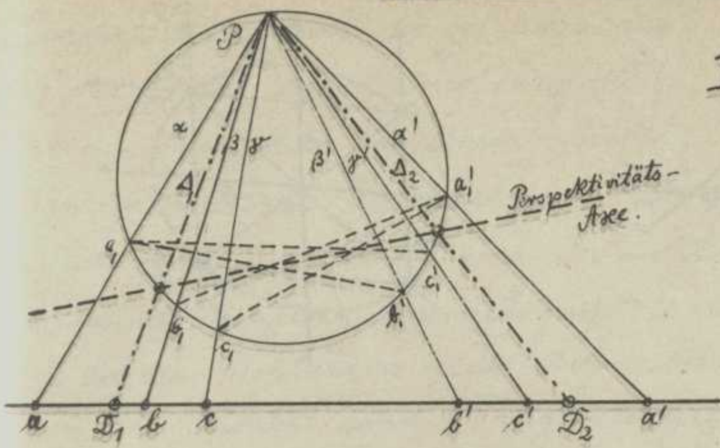
3.) Einen Kegelschnitt zu zeichnen, der a.) durch 5 Punkte; b.) durch 5 Tangenten gegeben ist.

4.) Gegeben seien die 5 Punkte: $(1,0)$; $(-1,0)$; $(0,1)$; $(2,2)$; $(-2,1)$. Man bestimme die Gleichung des Kegelschnitts, auf dem sie liegen, durch Aufstellung der Gleichungen zweier entsprechender Strahlenbüschel.

5.) Die beiden Strahlenbüschel $x + \lambda(y-1) = 0$; und $y + 1 - 2\mu x = 0$ erzeugen je nach der linearen Beziehung zwischen $\lambda$ und $\mu$ verschiedene Kegelschnitte. Welche Kegelschnitte erhält man für a.) $\lambda = 2\mu$; b.) $\lambda = 4\mu$; c.) $\lambda = 2(\mu+1)$; d.) $\lambda = \frac{3}{2\mu}$ e.) $\lambda = 1 + \frac{1}{2\mu}$ ?

6.) Man zeichne die aus den Konstruktionen III. c.) sich ergebenden Spezialfälle (vergl. das Blatt über „Konstruktion von Kegelschnitten").

16. V. 11. **Höhere Mathematik IV.** № 3.




## I. Steiner'sche Konstruktion der Doppelelemente $D_1, D_2$ und $\Delta_1, \Delta_2$ zweier projektiver Gebilde mit demselben Träger.

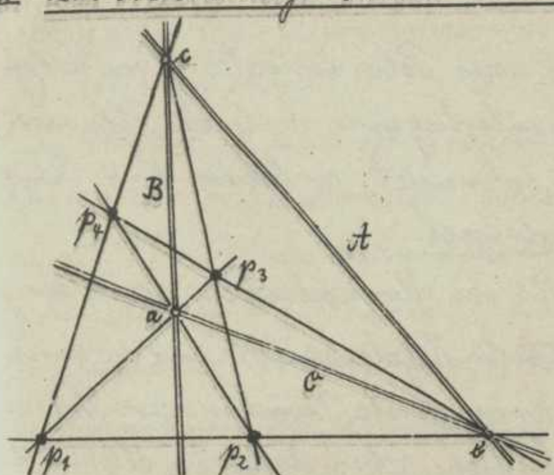
## II. Werte des Doppelverhältnisses: $\Delta = (abcd) = (cdab) = (badc) = (dcba)$

$(abcd) = \Delta$ ; $(acbd) = 1 - \Delta$ ; $(abdc) = \frac{\Delta}{\Delta - 1}$ ;

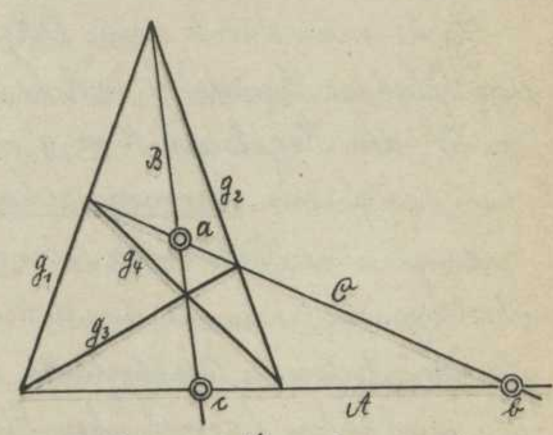
$(adcb) = \frac{1}{\Delta}$ ; $(adbc) = \frac{1}{1-\Delta}$ ; $(acdb) = \frac{\Delta - 1}{\Delta}$ .

Das Doppelverhältnis $\Delta = -1$ (mit den dazugehörigen 2 und $\frac{1}{2}$) heisst harmonisch.
Für $\Delta = +1$ (bzw. 0 und $\infty$) fallen zwei der vier Punkte zusammen.

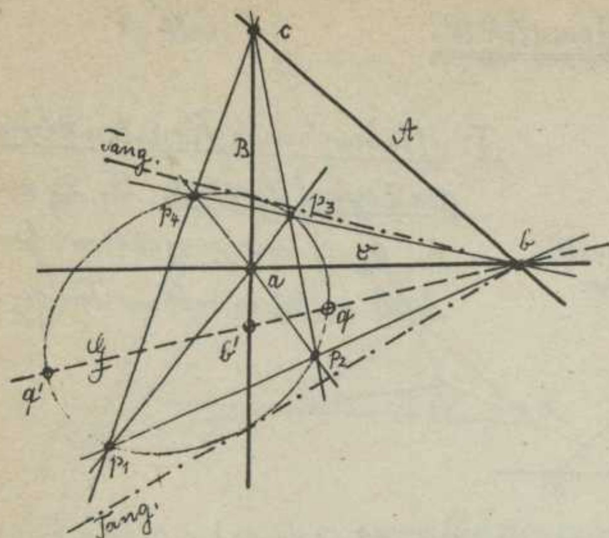
## III. Das vollständige Viereck und das vollständige Vierseit.

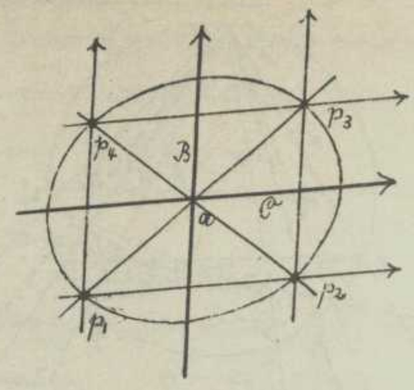



Im vollständigen Viereck werden je zwei Gegenseiten durch die Verbindungslinien ihres Schnittpunktes mit den Schnittpunkten je zweier anderer Gegenseiten harmonisch getrennt.




Im vollständigen Vierseit werden je zwei Gegenecken durch die Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie mit den Verbindungslinien je zweier anderer Gegenecken harmonisch getrennt.




## IV. Pol, Polare und Polardreieck.

Legt man durch die 4 Ecken $p_1, p_2, p_3, p_4$ eines vollständigen Vierecks einen Kegelschnitt, so ist jede Seite des Dreiecks abc Polare zur gegenüberliegenden Ecke inbezug auf diesen Kegelschnitt; umgekehrt ist jeder Eckpunkt des Dreiecks Pol zur gegenüberliegenden Dreiecksseite. Das Dreieck abc heisst Polardreieck.

Zieht man durch einen Eckpunkt eines Polardreiecks, etwa durch b, eine beliebige Gerade G, welche die gegenüberliegende Seite des Polardreiecks in b', den Kegelschnitt in q und q' schneidet, so bilden die 4 Punkte b, b', q, q' ein harmonisches Quadrupel.

Liegt eine Seite eines Polardreiecks im Unendlichen, so ist der gegenüberliegende Eckpunkt der Mittelpunkt des Kegelschnitts, und die durch ihn gehenden Seiten des Polardreiecks sind konjugierte Durchmesser. Die vorhin erwähnten harmonischen Eigenschaften gehen dabei in Symmetrieeigenschaften über. Unter den Paaren konjugierter Durchmesser findet sich ein senkrechtes Paar, die Axen des Kegelschnitts; ferner 2 zusammenfallende Paare, die Asymptoten.

## Aufgaben.

1.) Einen Kegelschnitt zu zeichnen aus
a.) vier Punkten und einer Tangente;
b.) vier Tangenten und einem Punkt.

2.) Man zeichne eine Hyperbel
a.) aus einer Asymptote und 3 Punkten;
b.) aus der Richtung einer Asymptote und 4 Punkten;
c.) aus den Richtungen beider Asymptoten und 3 Punkten.

3.) Von einer Parabel sind 4 Tangenten gegeben; man zeichne
a.) deren Berührungspunkte;
b.) die Tangente parallel einer gegebenen Richtung;
c.) Axe und Scheitel.

4.) Eine Ellipse zu zeichnen aus einem Durchmesser, der Richtung des konjugierten Durchmessers und einem Punkt.

5.) Eine Hyperbel zu zeichnen aus einem Durchmesser, der Richtung des konjugierten Durchmessers und
a.) einem Punkt; b.) einer Tangente.

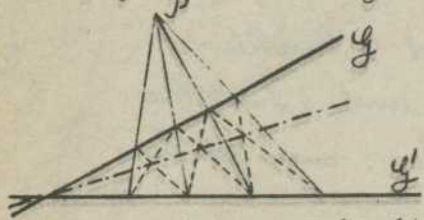
6.) Zwei Winkel $\varphi$ und $\psi$ drehen sich um ihre festliegenden Scheitel, während der Schnittpunkt zweier Schenkel sich auf einer Gerade bewegt. Der Ort des Schnittpunktes der beiden andern Schenkel ist als Kegelschnitt (Beweis!), und zwar leicht als Ellipse, Parabel oder Hyperbel erkennbar (Newton's Erzeugungsmethode).

7.) Die Schnittpunkte eines durch 5 Punkte gegebenen Kegelschnitts mit einer beliebigen Geraden zu konstruieren.
Man behandle auch die duale Aufgabe!

8.) Drei Punkte a, b, c der Abscissenaxe mit den Abscissen $x_a = 2$; $x_b = 4$; $x_c = 8$ seien gegeben. Man berechne den 4. harmonischen Punkt zu a, c bezüglich b und konstruiere ihn a.) unter Zuhilfenahme des Zirkels; b.) mittels des Lineals allein.

9.) Hat man 4 harmonische Punkte a, b, c, d und ist m die Mitte von ac, so gilt die Beziehung $(am)^2 = mb \cdot md$. Man beweise mittels dieser Beziehung: Werden über je zwei zusammengehörigen von 4 harmonischen Punkten Halbkreise beschrieben, so schneiden sich diese orthogonal.

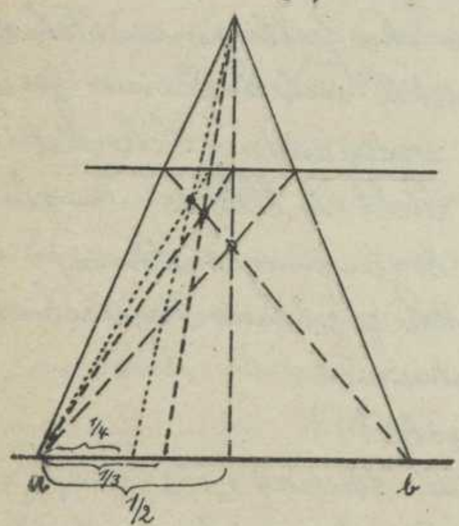
10.) Gegeben sind 2 Gerade G und G' und ein Punkt P. Zieht man

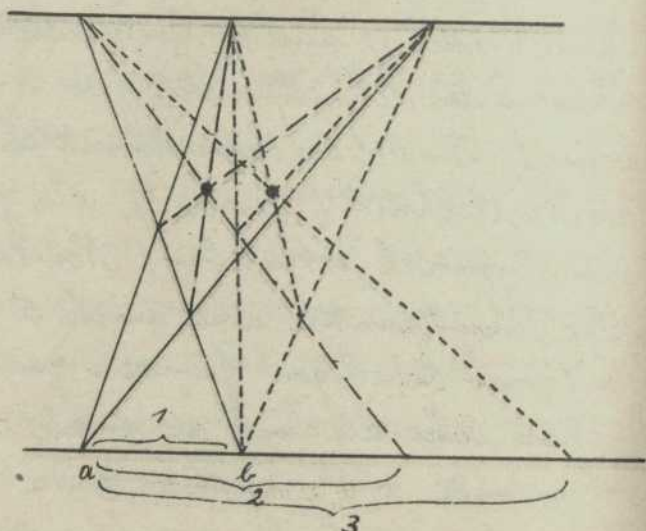



durch P beliebige Gerade und konstruiert in jedem der dadurch entstehenden Vierecke den Schnittpunkt der Diagonalen, so liegen alle diese Schnittpunkte auf einer Geraden, die durch den Schnittpunkt von G, G' hindurchgeht. – Man stelle den dualen Satz hierzu auf!

11.) Man ziehe unter Benützung von 10.) von einem Punkt Q nach dem unzugänglichen Schnittpunkt zweier Geraden G und G' die Verbindungslinie.

12.) Zwei parallele Gerade sind gegeben. Man teile eine gegebene Strecke ab der einen in 2, 3, 4.... gleiche Teile, andererseits verdopple und verdreifache man sie. Die nachstehende Zeichnung, die mit Anwendung nur des Lineals ausgeführt ist, soll erläutert und bewiesen werden.



30. V. 11. **Höhere Mathematik IV.** № 4.

# Raumkurven.

I. Eine Raumkurve ist als Schnitt zweier Flächen

$$\Phi(x, y, z) = 0 \text{ und } \Psi(x, y, z) = 0$$

bestimmt. Die Projektion derselben auf die xy-Ebene erhält man durch Elimination der Variabeln z aus beiden Gleichungen.

II. Setzt man $x = \varphi(t)$, so können mittels der obigen Gleichungen auch y und z als Funktionen des Parameters t dargestellt werden, und die Kurve ist definiert durch

$$x = \varphi(t); \quad y = \psi(t); \quad z = \chi(t).$$

III. Abkürzend schreibt man $\frac{dx}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = x'$; $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = x''$; $\frac{ds}{dt} = s'$ .... etc

Dann sind:

1.) Das Bogenelement: $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt.$

2.) Die Richtungscosinus der Tangente $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ bestimmt durch

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = x' : y' : z'; \text{ also: } \alpha_1 = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{x'}{s'} = \frac{dx}{ds} \text{ etc.}$$

3.) Die Richtungscosinus der Hauptnormalen $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, d.h. der Normalen in der durch 3 unendlich nahe aufeinander folgende Kurvenpunkte definierten Schmiegungsebene (vgl. 7.):

$$\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = \frac{d^2x}{ds^2} : \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{d^2z}{ds^2}, \text{ wo } \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{x''s' - s''x'}{s'^3}$$ aus der weitmaligen Differentiation von $\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} : \frac{ds}{dt}$ nach s sich ergibt.

4.) Die Richtungscosinus der Binormalen $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ d.h. der Normalen auf der Schmiegungsebene:

$$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = \left\| \begin{matrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{matrix} \right\|$$

5.) Die Gleichungen der Tangente im Punkt $x_0, y_0, z_0$:

$$\frac{x-x_0}{\alpha_1} = \frac{y-y_0}{\beta_1} = \frac{z-z_0}{\gamma_1}.$$

6.) Die Gleichung der Normalebene dort:

$$(x-x_0)\alpha_1 + (y-y_0)\beta_1 + (z-z_0)\gamma_1 = 0.$$

7.) Die Gleichung der Schmiegungsebene dort:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} = 0 = \alpha_3(x-x_0) + \beta_3(y-y_0) + \gamma_3(z-z_0).$$

8.) Die Gleichung der rectificierenden Ebene d. h. der Ebene durch die Tangente und die Binormale:

$$(x-x_0)\frac{d^2x}{ds^2} + (y-y_0)\frac{d^2y}{ds^2} + (z-z_0)\frac{d^2z}{ds^2} = 0 = (x-x_0)\alpha_2 + (y-y_0)\beta_2 + (z-z_0)\gamma_2 = 0$$

9.) Der Radius der ersten Krümmung, bestimmt durch 3 auf einander folgende unendlich nahe Punkte der Kurve, gleich dem Verhältnis des Bogenelements zum Winkel zweier auf einander folgender Bogenelemente (dem „Contingenzwinkel"):

$$\varrho_1 = \frac{ds}{d\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}} = \frac{s'^2}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2}}$$

10.) Der Radius der zweiten Krümmung oder Torsion, bestimmt durch das Verhältnis des Bogenelements zum Winkel zweier folgender Schmiegungsebenen, also durch 4 unendlich nahe Punkte:

$$\frac{1}{\varrho_2} = \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(x'y''-y'x'')^2 + (y'z''-z'y'')^2 + (z'x''-x'z'')^2} = \frac{\varrho_1^2}{s'^6} \cdot \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

II.) Die Bedingung für die „Wendeberührebene":

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0.$$

Ist dies überall erfüllt, so ist die Kurve eine ebene Kurve.

IV. Wählt man die Bogenlänge $s$, von einem festen Punkt der Kurve ab gerechnet, zum Parameter $t$, so ist:

$$\frac{ds}{dt} = 1 \; ; \; \frac{d^2s}{dt^2} = 0.$$

---

## Aufgaben.

1.) Man bestimme a.) Tangente und Normalebene; b.) die Binormale und die Schmiegungsebene; c.) die Hauptnormale und die rectificierende Ebene; d.) den Radius der ersten Krümmung; e.) den Radius der Torsion; f.) die Projektionen in die Koordinatenebenen für die Kurven:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cdot\cos t \\ y &= a\cdot\sin t \\ z &= k\cdot t \end{aligned}\right\} \text{Schraubenlinie.} \qquad \left.\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \\ z &= t^2 \end{aligned}\right\} ; \qquad \left.\begin{aligned} x &= at \\ y &= bt^2 \\ z &= ct^3 \end{aligned}\right\} \text{Kubische Ellipse.} \qquad \left.\begin{aligned} x &= \cos^2 t \\ y &= \sin^2 t \\ z &= \cos t \end{aligned}\right\}.$$

in einem beliebigen Punkt $t_0$; ferner berechne man das Bogenstück von $t=0$ bis $t=t_0$, wobei für die dritte Kurve speziell $a=2$, $b=1$, $c=\frac{1}{3}$ gesetzt werde.

2.) Man suche die Wendeberührebene der obigen Kurven.

3.) Unter welcher Bedingung ist die Kurve

$$\begin{aligned} x &= a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ y &= b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 \\ z &= c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 \end{aligned}$$

eine ebene Kurve?

4.) Die Flächen $x^2+y^2=a^2$ und $y^2+z^2=b^2$ schneiden sich in einer Raumkurve. Man bestimme deren Projektion in die $xz$-Ebene, sowie die Gestalt der Kurve, speziell auch für $a=b$.

5.) In die Gleichungen der Raumkurve:

$$\left.\begin{aligned} z^3 &= 27\cdot r\cdot y^2 \\ (3r-z)^3 &= 27\, r\, x^2 \end{aligned}\right\}$$ führe man a.) einen beliebigen Parameter; b.) den Bogen, vom Punkt $x=r$; $y=0$; $z=0$ aus gerechnet, als Parameter ein.

6.) Die Kurve

$$\left.\begin{aligned} x &= e^t\cdot\cos(at) \\ y &= e^t\cdot\sin(at) \\ z &= c\cdot e^t \end{aligned}\right\}$$ liegt auf dem Kegel $x^2+y^2-\frac{z^2}{c^2}=0$ und schneidet dessen Erzeugende unter constantem Winkel (Konische Spirale). Beweis! Was ist ihre Projektion in die $(xy)$-Ebene? Man führe den Bogen als Parameter ein, gerechnet von $t=t_0$, speziell $t=-\infty$. Endlich berechne man das Verhältnis der ersten zur zweiten Krümmung. Dasselbe ist constant!

7.) Die Gleichungen einer Kurve „constanter Steigung" gegen die $xy$-Ebene ($\gamma_1 =$ const.) sind:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(s) \\ y &= \psi(s) \\ z &= k\cdot s \end{aligned}\right\}$$ ausgedrückt durch den Bogen $s$ als Parameter. Man beweise, dass das Verhältnis der beiden Krümmungen für solche Kurven constant ist (vergl. 6.) als Beispiel).

8.) Die Tangentenfläche der Kurve:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(s) \\ y &= \psi(s) \\ z &= \chi(s) \end{aligned}\right\}$$ hat die Gleichungen: $$\left.\begin{aligned} x &= u\cdot\varphi'(s) + \varphi(s) \\ y &= u\cdot\psi'(s) + \psi(s) \\ z &= u\cdot\chi'(s) + \chi(s) \end{aligned}\right\}$$ ($u$ und $s$ Parameter

Man zeige analytisch, dass sie abwickelbar ist. Als Beispiel stelle man die Gleichungen der Tangentenfläche der Schraubenlinie

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cdot\cos t \\ y &= r\cdot\sin t \\ z &= k\cdot t \end{aligned}\right\}$$ auf, wobei zuerst der Bogen $s$ einzuführen ist.

---

20. VI. 11. **Höhere Mathematik IV.** № 5.

## Fourier'sche Reihen.

I. Ein im Intervall $x = 0$ bis $x = \pi$ beliebig vorgegebener Linienzug, dessen Ordinaten endlich und eindeutig sind, der aber eine beliebige endliche Zahl von Unstetigkeiten, Sprungstellen und dergl. besitzen und in seinen verschiedenen Teilen ganz verschiedenen analytischen Gesetzen folgen kann, kann einheitlich durch die unendliche Cosinusreihe dargestellt werden:

$$y = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \dots + A_n \cos nx + \dots,$$

wobei die constanten Coëfficienten $A$ sich durch

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_{\xi=0}^{\xi=\pi} f(\xi)\cos(n\xi)\,d\xi \qquad \left[\text{ausnahmsw.: } A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\xi=0}^{\xi=\pi} f(\xi)\,d\xi\right].$$

berechnen, und $f(\xi)$ die Ordinate an der Stelle $\xi$ bedeutet.

Ebensogut kann man auch die Entwickelung in eine unendliche Sinusreihe:

$$y = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \dots + B_n \sin nx + \dots$$

herstellen, wo die constanten Coëffizienten $B$ sich berechnen durch

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_{\xi=0}^{\xi=\pi} f(\xi)\sin n\xi\,d\xi$$

Bei der Berechnung der Coëfficienten $A$ und $B$ ist also, sofern etwa das analytische Gesetz für $f(\xi)$ im Intervall wechselt, das Integral für $A$ bezw. $B$ in entsprechend viele Teilintegrale zu zerlegen, deren Berechnung einzeln vorzunehmen ist. Ist der Kurvenzug bloss zeichnerisch gegeben, so hat die Auswertung dieser Integrale graphisch, oder durch Näherungsverfahren wie die Simpson'sche Regel zu erfolgen.

Die Identität der Reihe und des Kurvenzugs ist nur im Intervall von 0 bis $\pi$ vorhanden. Für eine Sprungstelle von $y$ in diesem Intervall ergibt die Reihe als zugehörigen Wert von $y$ das arithmetische Mittel der beiden Ordinatenwerte an der Sprungstelle. Die Fortsetzung der beiden Reihen nach der negativen Seite von 0 bis $-\pi$ gestaltet sich so, wie Fig. 1 und 2 zeigen, da der Cosinus eine gerade, der Sinus eine ungerade Funktion von $x$ ist. Endlich wiederholen sich die gezeichneten Kurvenstücke, da die Reihen beide die Periode $2\pi$ haben.

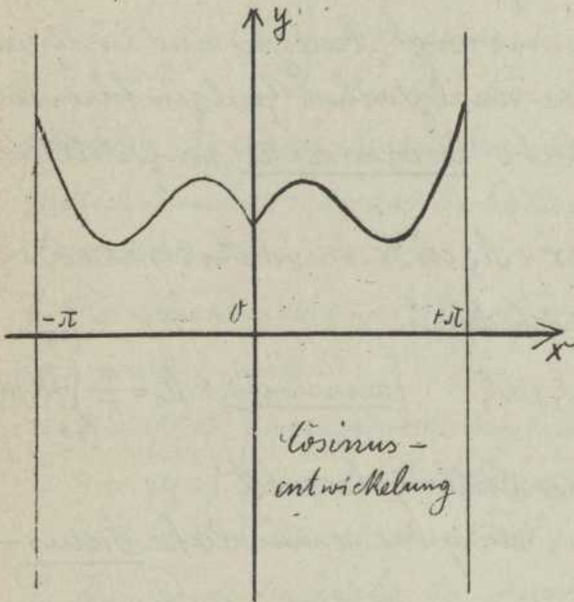



Fig. 1.

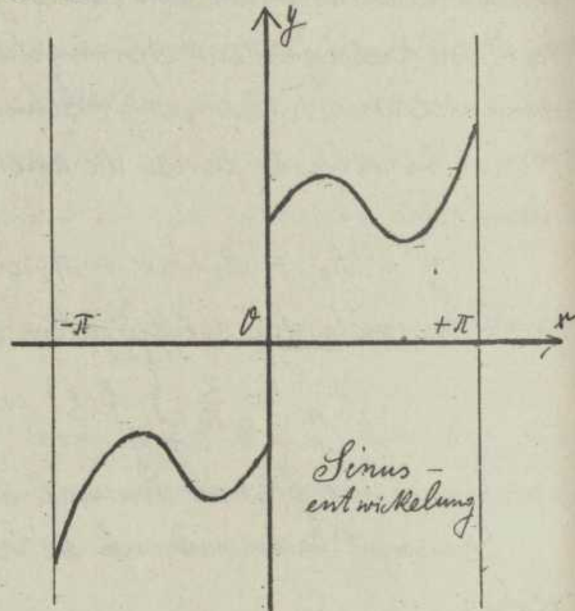



Fig. 2.

II. Ein im Intervall von $x = -\pi$ bis $x = +\pi$ verlaufender Linienzug lässt sich in die Doppelreihe entwickeln:

$$y = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots\ldots + a_n \cos nx + \ldots\ldots$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots\ldots + b_n \sin nx + \ldots\ldots$$

Dabei berechnen sich die constanten Coëfficienten, wie folgt:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\xi=-\pi}^{\xi=+\pi} f(\xi)\cos(n\xi)\,d\xi \quad ; \quad \left[\text{ausnahmsweise: } a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{\xi=-\pi}^{\xi=+\pi} f(\xi)\,d\xi\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\xi=-\pi}^{\xi=+\pi} f(\xi)\sin(n\xi)\,d\xi.$$

Die Cosinusentwickelung der ersten Zeile der Doppelreihe repräsentiert dann $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$; die Sinusentwickelung der zweiten Zeile: $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Durch die

Transformation $x = \frac{\pi}{l} z$ erhält man aus den entwickelten Reihen analoge im Intervall $z = 0$ bis $z = l$, bezw. $z = -l$ bis $z = +l$ giltige.

III. Die Lösung des Problems der schwingenden Saite (cf. Teil III. Blatt № 10) lässt sich auch in der Form schreiben:

$$Z = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ A_n \cos n(x+at) + B_n \sin n(x+at) + C_n \cos n(x-at) + D_n \sin n(x-at) \right]$$

(„Übereinanderlagerung von harmonischen Schwingungen")

An die Stelle der willkürlichen Funktionen $\Phi$ und $\Psi$ von Teil III. № 10 treten hier die unendlich vielen willkürlichen Constanten $A_n, B_n, C_n, D_n$. Die Anfangsbedingungen $z = F(x)$ und $\frac{\partial z}{\partial t} = G(x)$ für $t = 0$ liefern zur Berechnung dieser Constanten die Beziehungen:

$$A_n + C_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\xi) \cos n\xi \, d\xi \, ; \qquad C_n - A_n = \frac{1}{\pi a n} \int_{-\pi}^{+\pi} G(\xi) \sin n\xi \, d\xi$$

$$B_n + D_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\xi) \sin n\xi \, d\xi \, ; \qquad B_n - D_n = \frac{1}{\pi a n} \int_{-\pi}^{+\pi} G(\xi) \cos n\xi \, d\xi$$

Werden die Punkte $x = 0$ und $x = \pi$ der Saite festgehalten, so ist die Lösung des allgemeinen Problems der stehenden Schwingungen:

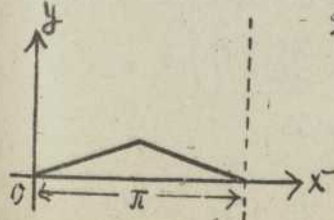
$$Z = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ A_n \sin(nx) \cdot \cos(ant) + B_n \sin(nx) \cdot \sin(ant) \right]$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(\xi) \sin(n\xi) \, d\xi \; ; \; B_n = \frac{2}{\pi \cdot an} \int_0^{\pi} G(\xi) \sin(n\xi) \, d\xi .$$

---

## Aufgaben.

1.) Man entwickle die Funktionen a.) $y = x^2$; b.) $y = e^{\frac{x}{\pi}}$ in Fourier'sche Reihen von der Periode $2\pi$, oder auch von einer beliebigen Periode.




2.) Ebenso nebenstehenden Linienzug, ~~dessen~~ Stücken der Geraden

$$y = \frac{x}{2} \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{2}(x - \pi)$$

zusammengesetzt ist. Wie heisst die Entwickelung für eine stehende Schwingung, wenn die Saite zur Zeit $t=0$ die durch diesen gebrochenen Linienzug angegebene Form und die Geschwindigkeit Null besitzt?

3.) Man gebe den Verlauf und die Obertöne bei der stehenden Schwingung einer Saite von der Länge $\pi$ an, wenn die Saite zur Zeit $t=0$ sich ohne Geschwindigkeit in der Ruhelage befand, in diesem Moment aber dem Teile der Saite zwischen $\frac{10}{12}\pi$ und $\frac{11}{12}\pi$ die Geschwindigkeit 1 mitgeteilt wird. (Typus der angeschlagenen Klaviersaite.)

27. VI. 11. Höhere Mathematik IV. № 6.

## Variationsrechnung.

1.) Variation eines einfachen Integrals $V = \int_a^b f(x, y, y')\,dx$

Dabei ist $y' = \frac{dy}{dx}$ und $f$ eine bekannte Funktion von $x, y, y'$. – Aufgabe: $y$ als Funktion von $x$ derart zu bestimmen, dass das Integral ein Maximum oder Minimum wird. Man ändere („variiere") $y$ in $y + \varepsilon\,\delta y$, $\frac{dy}{dx}$ in $\frac{d(y+\varepsilon\,\delta y)}{dx} = \frac{dy}{dx} + \varepsilon\,\frac{d\,\delta y}{dx}$, wobei die Variation $\delta y$ im Intervall a bis b willkürlich und nur bei a und b gleich Null ist. Dann ist die Änderung des Integrals in erster Annäherung gegeben durch die erste Variation:

$$\int f\left(x, y+\varepsilon\,\delta y, \frac{dy}{dx} + \varepsilon\,\frac{d\,\delta y}{dx}\right)dx - \int f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)dx = \varepsilon\left[\int \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y \cdot dx + \int \frac{\partial f}{\partial y'} \cdot \frac{d\,\delta y}{dx}\,dx\right]$$

und nach partieller Integration:

$$= \varepsilon\left[\int \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y \cdot dx - \int \frac{d\,\frac{\partial f}{\partial y'}}{dx}\,\delta y \cdot dx\right] = \varepsilon \int \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d\,\frac{\partial f}{\partial y'}}{dx}\right]\delta y \cdot dx.$$

Die Bedingung, unter welcher das vorgegebene Integral ein Maximum oder Minimum wird, ist also:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d\,\frac{\partial f}{\partial y'}}{dx} = 0$$

2.) Variation eines Doppelintegrals $V = \iint F\left(z, x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx \cdot dy$.

Aufgabe: $z$ als Funktion von $x$ und $y$ so zu bestimmen, dass das Doppelintegral $V$ ein Maximum oder Minimum wird. Variiert man analog wie oben $z$ in $z + \varepsilon\,\delta z$; $\frac{\partial z}{\partial x}$ in $\frac{\partial(z+\varepsilon\,\delta z)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \varepsilon\,\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}$; und $\frac{\partial z}{\partial y}$ in $\frac{\partial(z+\varepsilon\,\delta z)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} + \varepsilon\,\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}$, so ist die erste Variation:

$$\iint F\left(z+\varepsilon\,\delta z, x, y, \frac{\partial z}{\partial x} + \varepsilon\,\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} + \varepsilon\,\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right)dx\,dy - \iint F\left(z, x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$= \varepsilon \iint \left[\frac{\partial F}{\partial z}\,\delta z + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial\,\delta z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right] dx\,dy, \quad \text{wobei } \frac{\partial z}{\partial x} = p;\ \frac{\partial z}{\partial y} = q.$$

Nach partieller Integration:

$$= \varepsilon \iint \left[\frac{\partial F}{\partial z}\,\delta z - \frac{\partial\,\frac{\partial F}{\partial p}}{\partial x}\,\delta z - \frac{\partial\,\frac{\partial F}{\partial q}}{\partial y}\,\delta z\right] dx \cdot dy.$$

Also ist die Bedingung, unter welcher das Doppelintegral ein Maximum oder Minimum wird:

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial \frac{\partial F}{\partial p}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{\partial F}{\partial q}}{\partial y} = 0.$$

Beispiel: <u>das Problem der Minimalflächen</u>. Es ist eine Kurve im Raum gegeben. Man soll eine Fläche $z = f(x,y)$ von kleinstem Flächeninhalt durch sie legen. Das zu variierende Doppelintegral ist also:

$$F = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy;$$

und als Bedingung dafür, dass $z = f(x,y)$ Minimalfläche ist, ergibt sich

$$\frac{\partial \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{\partial y} = 0, \text{ oder}$$

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0,$$

$$\text{wobei } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

3.) <u>Variation eines Integrals mit Bedingungsgleichungen.</u>

$$V = \int_a^b f(x, y, z, y', z')\, dx \quad ; \quad \varphi(x, y, z) = 0. \qquad y' = \frac{dy}{dx}; \; z' = \frac{dz}{dx}.$$

<u>$y$ und $z$ als Funktionen von $x$ so zu bestimmen, dass $V$ ein Maximum oder Minimum wird und gleichzeitig $\varphi = 0$ erfüllt ist</u>. Die Bedingungen sind:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d \frac{\partial f}{\partial y'}}{dx} &= \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d \frac{\partial f}{\partial z'}}{dx} &= \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \varphi(xyz) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Diese 3 Gleichungen bestimmen $y, z, \lambda$ als Funktionen von $x$ mit 2 Constanten, welche dazu benützt werden können, eine durch 2 gegebene Flächenpunkte gehende Lösung zu finden.

Beispiel: <u>die geodätischen Linien</u>.

---

## <u>Aufgaben zur Repetition.</u>

I.) Man integriere die Differentialgleichungen:

1.) $\sin x \cos y\, dx - \cos x \sin y\, dy = 0$ (separierbar)

2.) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 3xy + x^2}{x^2}$ (homogen)

3.) $(2x-y+1)\,dx+(2y-x+1)\,dy=0$ (totales Differential)

4.) $(r^3-\cos 3\varphi)\,dr+r\sin 3\varphi\,d\varphi=0$ (von $r$ allein abhäng. integr. Faktor)

5.) $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{\sin x}=\cos x-1$ (lineare Diff.-Gl. 1. Ordnung)

6.) $x\frac{dy}{dx}+y=y^2\log x$ (auf eine lineare Diff.-Gl. reducierbar.)

7.) $y=-\frac{x}{p}+\frac{1}{3p^2}$ (allgemeine Clairault'sche Gleichung)

8.) $y=px-p^3$ (spezielle Clairault'sche Gleichung).

9.) $y=\frac{x^2}{2}+xp+p^2$ (differentiieren!)

10.) $\left[x(x+y)+a^2\right]\frac{dy}{dx}=y(x+y)+b^2$ (Substit.: $x=u+v$; $y=Ku-v$, wobei $K$ passend zu wählen ist)

11.) $y''(1+y^2)+2yy'(1+y')=0$ (enthält $x$ nicht explicit).

12.) $y'''-y'=x\cdot\sin x$ (linear mit const. Coefficienten)

13.) $\frac{dx}{dt}=y+t$; $\frac{dy}{dt}=z+1$; $\frac{dz}{dt}=x$ (System simultaner Diff.-Gl.)

14.) $(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}-(x-z)\frac{\partial z}{\partial y}=x-y$ (partielle Diff.-Gl.)

II. 1.) Eine Kurve hat die Eigenschaft, dass das Stück der Tangente vom Schnittpunkt mit der $y$-Axe bis zum Fusspunkt des Lotes vom Anfangspunkt auf sie die constante Länge $a$ hat. (Führt auf eine Clairault'sche Gleichung. Singuläre Lösung!).

2.) Die Projektion des Krümmungsradius einer Kurve auf die $x$-Axe ist gleich dem Quadrat der Länge der Normalen dividiert durch das Quadrat der Ordinate des Kurvenpunktes. Man suche die Kurvengleichung, sowie die Orthogonaltrajektorien aller derjenigen Kurven dieser Gattung, die durch den Anfangspunkt gehen.

III. 1.) Man untersuche die Fläche $z=x^3+y^3-6xy$ auf höchste und tiefste Punkte sowie auf Sattelpunkte. Welches ist die parabolische Kurve der Fläche?

2.) Gegeben die Fläche $z=a\cos\frac{x}{a}+a\cos\frac{y}{a}$. a.) Welches ist die parabolische Kurve der Fläche? b.) Welche Teile sind positiv, welche negativ gekrümmt? c.) Welche Punkte haben horizontale Tangentialebenen? d.) Welche von diesen Punkten sind Gipfelpunkte, welche Sattelpunkte und welche Tiefenpunkte? e.) Welches ist die Differentialgleichung der Fallinien und welches das allgemeine Integral derselben?

3.) Man discutiere die Gestalt der Fläche

$$x^2 + 2y^2 = z^3(1-z)$$

durch Untersuchung ihrer Horizontalschnitte und ihrer Vertikalschnitte durch die z-Axe. Welches sind die Fallinien der Fläche? Man berechne das Volumen des von der Fläche eingeschlossenen Körpers durch Integration über seine Horizontalschnitte. Welches ist das Gauss'sche Krümmungsmass für den Punkt $z = 1$?

IV. 1.) Man bestimme das Gesamtvolumen des Körpers, der durch die Fläche

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} = 1$$

begrenzt ist, indem man substituiert: $x = a\cos^3\varphi \cdot \sin^3\psi$; $y = b\sin^3\varphi \sin^3\psi$; $z = c\cos^3\psi$. Welches sind die Kurvensystem $\varphi = $ Const. und $\psi = $ Const., durch welche bei diesen Koordinaten das Integrationsgebiet in Elemente zerlegt wird?

2.) Gegeben der parabolische Zylinder $z = y - \frac{x^2}{2p}$. Welches ist die Oberfläche des durch die Ebenen $z = 0$ und $y = a$ ausgeschnittenen Zylinderhufes? (Bei der Berechnung des Doppelintegrals integriere man zweckmässig zuerst nach $y$).

Name - - - - - - - - - - - - - - - Note - - - - - -

# Höhere Mathematik IV.

## Semestralprüfung. – 12. Juli 1911.

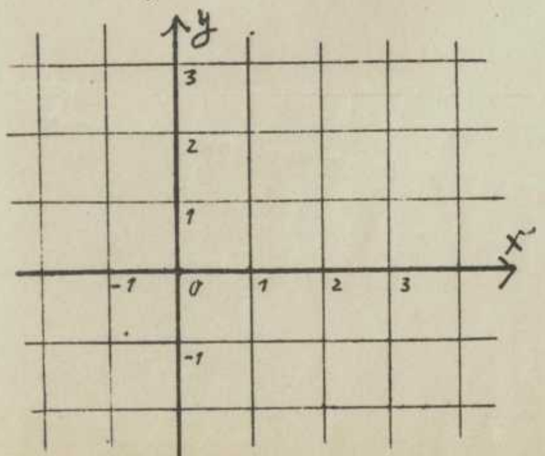
Zeit: $1\frac{1}{2}$ Stunden.

1.) Gegeben ist die Raumkurve

$$x = \cos^2 t$$
$$y = \cos t \cdot \sin t$$
$$z = \sin t \, .$$

Man zeige, dass die Kurve auf einer Kugel mit dem Anfangspunkt als Mittelpunkt liegt und bestimme ihre Projektionen in die 3 Koordinatenebenen. In welchen Punkten geht die Tangente parallel zur $xy$-Ebene? Welches ist die zweite Krümmung der Kurve? Wo ist diese Null?

2.) Man bilde nebenstehendes quadratisches Netz in die $x'y'$-Ebene ab



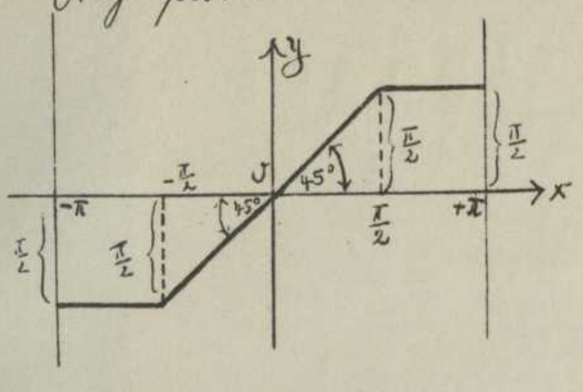

mittels der Formeln

$$x' = \frac{x}{y} \; ; \; y' = \frac{1}{y}$$

und zeichne die Bilder der Kurven:

a.) $x^2+y^2=1$; b.) $x^2+y^2-2y=0$; c.) $y^2=x$; d.) $x^2-y^2=1$.

3.) Von einer Hyperbel ist gegeben: eine Asymptote, eine Tangente mit Berührpunkt und die Richtung der zweiten Asymptote. Man zeichne weitere Punkte der Kurve und bestimme die zweite Asymptote.




4.) Man entwickle nebenstehenden Linienzug in eine Fourier'sche Reihe.

(Die Aufgaben sind auf diesem Blatt zu bearbeiten.)

7. XI. 10. Nr. 1.

# Höhere Mathematik I.

## Elemente der analytischen Geometrie der Ebene.

1.) Darstellung von Punkten einer Geraden durch Zahlen:

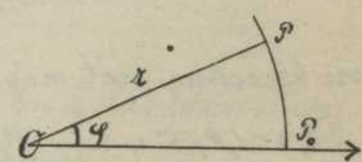
Der erforderliche Fixpunkt heißt Ursprung, Anfangspunkt oder Nullpunkt.


$OP = x$, $OP_1 = x_1$ ... heißen Abszissen der Punkte $P, P_1$ ...

2.) Darstellung von Punkten in der Ebene durch Zahlen:

a.) in Polarkoordinaten:

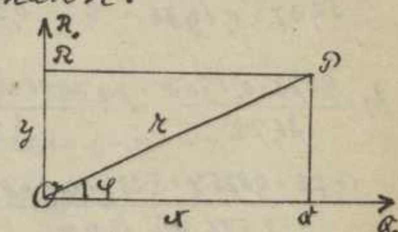
O heißt der Pol
$OP_0$ die Polarachse } Fixelemente.




Der Radius vektor (Fahrstrahl) $r$ und der Polarwinkel $\varphi$ heißen die Polarkoordinaten des Punktes P.

b.) in rechtwinkeligen (Cartesischen) Koordinaten:

$OQ_0$, die Abszissen- od. X-achse,
$OR_0$, " Ordinaten- od. Y-achse. } Fixelemente

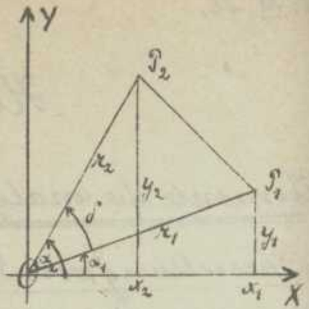



Die Abszisse $OQ = RP = x$ oder kurz „das $x$ des Punktes P" und die Ordinate $QP = OR = y$ oder kurz „das $y$ des Punktes P" heißen die rechtwinkeligen (Cartesischen) Koordinaten des Punktes P.

Der Übergang von Cartesischen zu Polarkoordinaten und umgekehrt geschieht durch die Formeln:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \qquad \text{bezw.} \qquad r = +\sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = y/x.$$

Punkt $(a; b)$ oder $(a, b)$ bedeutet: Punkt, dessen $x = a$ und dessen $y = b$ ist.




3.) Für den Winkel zweier Radienvektoren $OP_1$ und $OP_2$ gilt:

$$\sin\delta = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{r_1 \cdot r_2}; \quad \cos\delta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{r_1 \cdot r_2}; \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1 x_2 + y_1 y_2},$$

wobei $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ und $r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$.

4.) Der Inhalt des Dreiecks $OP_1P_2$ ist:

$$\triangle OP_1P_2 = \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

## Aufgaben.

I.) Man berechne mit möglichster Genauigkeit mittels des Rechenschiebers:

1.) $37{,}4 \cdot 1{,}875 = ?$ $\quad 13{,}87 \cdot 0{,}0694 = ?$ $\quad 105{,}8 \cdot 0{,}784 = ?$

$56{,}874 \cdot 13{,}58 = ?$ $\quad 0{,}2437 \cdot 0{,}783 = ?$ $\quad 0{,}0072 \cdot 23{,}65 = ?$

2.) $3{,}874 : 0{,}687 = ?$ $\quad 0{,}6835 : 0{,}02743 = ?$ $\quad 1{,}871 : 34{,}86 = ?$

$52{,}37 : 0{,}1936 = ?$ $\quad 0{,}2834 : 4{,}875 = ?$ $\quad 0{,}1005 : 28{,}3 = ?$

3.) $\dfrac{6{,}573 \cdot 0{,}1758}{36{,}72} = ?$ $\quad \dfrac{0{,}1842 \cdot 79{,}83}{3{,}469} = ?$ $\quad \dfrac{2{,}783 \cdot 0{,}1075}{0{,}4378 \cdot 0{,}8624} = ?$ $\quad \dfrac{2{,}873 \cdot 0{,}7659 \cdot 10{,}878}{0{,}0946 \cdot 36{,}87 \cdot 1{,}465} = ?$

$\dfrac{14{,}76 \cdot 0{,}8754 \cdot 3{,}287 \cdot 0{,}0683}{2{,}586 \cdot 0{,}1342} = ?$ $\quad \dfrac{18{,}68 \cdot 0{,}0953}{3{,}087 \cdot 0{,}638 \cdot 10{,}583 \cdot 0{,}0784} = ?$

4.) $\sqrt{7{,}46} = ?$ $\quad \sqrt{78{,}5} = ?$ $\quad \sqrt{583{,}2} = ?$ $\quad \sqrt{0{,}3468} = ?$ $\quad \sqrt{123{,}84} = ?$ $\quad \sqrt{0{,}0683} = ?$

II.) Gegeben sind die beiden Punkte $P_1(x_1 = 1{,}532;\ y_1 = 0{,}552)$ und $P_2(x_2 = 4{,}225;\ y_2 = 2{,}175)$. Wie groß ist der Abstand der Punkte von einander und dessen Neigung gegen die X-achse? Man berechne den Flächeninhalt von Dreieck $OP_1P_2$ und den Winkel $P_1OP_2$.

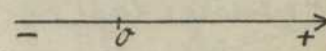
Man rechne dasselbe für die Punkte $(0{,}763;\ 1{,}335)$ und $(2{,}042;\ 4{,}002)$.

14. VI. 10. Nr. 2.

# Höhere Mathematik I.

## I. Negative Werte der Koordinaten auf der geraden Linie.

1.) Wir treffen die Verabredung:




Von den beiden Stücken, in welche die Gerade durch den Ursprung zerfällt, bezeichnen wir das eine als +, das andere als − und zeichnen das positive durch einen Pfeil aus. Bei horizontaler Lage der Geraden wählen wir die + Seite nach rechts, bei vertikaler Lage nach oben.

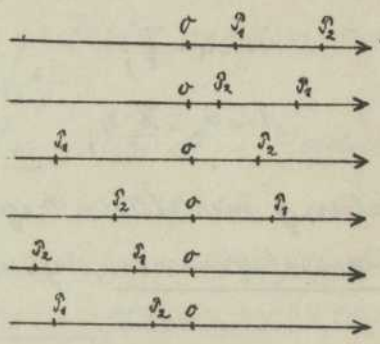
$|a|$ heißt der absolute Betrag von $a$ und bedeutet:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{wenn } a \text{ positiv} \\ -a, & \text{"} \ a \text{ negativ (d.h. man muß sich in } a \text{ das Vorzeichen mit inbegriffen denken.)} \end{cases}$$

2.) Für den Abstand $P_1P_2$ zweier Punkte in Richtung $P_1 \to P_2$ oder $\overrightarrow{P_1P_2}$ gilt

$$\overline{P_1P_2} = x_2 - x_1.$$

Die Formel faßt die 6 Fälle zusammen:




$x_2 > x_1 > 0$: $|P_1P_2| = |x_2| - |x_1| = x_2 - x_1$

$x_1 > x_2 > 0$: $|P_1P_2| = |x_1| - |x_2| = x_1 - x_2$

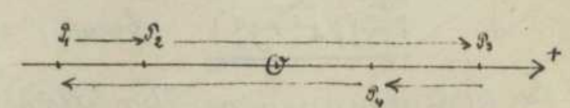
$x_2 > 0 > x_1$: $|P_1P_2| = |x_2| + |x_1| = x_2 - x_1$

$x_1 > 0 > x_2$: $|P_1P_2| = |x_2| + |x_1| = x_1 - x_2$

$0 > x_1 > x_2$: $|P_1P_2| = |x_2| - |x_1| = x_1 - x_2$

$0 > x_2 > x_1$: $|P_1P_2| = |x_1| - |x_2| = x_2 - x_1$

Für $n$ beliebige Punkte $P_1, P_2 \ldots P_n$ gilt

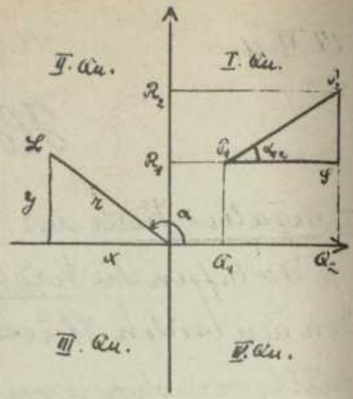



$$0 = P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + \ldots + P_{n-2}P_{n-1} + P_{n-1}P_n + P_nP_1.$$

## II. Negative Werte der Koordinaten in der Ebene.

1.) Die 2 Koordinatenachsen teilen die ganze Ebene in 4 Quadranten. Über die Vorzeichen

| Quadrant | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | + | − | − | + |
| $y$ | + | + | − | − |




der Koordinaten eines Punktes in einem der 4 Quadranten trifft man vorstehende Festsetzung.

$\overrightarrow{Q_1Q_2} = x_2 - x_1$ und $\overrightarrow{R_1R_2} = y_2 - y_1$ heißen die Projektionen von $\overrightarrow{P_1P_2}$ auf die X- bezw. Y-achse.

Für beliebige Lage von $P_1$ und $P_2$ gilt:

$$r_{12}^2 = \overline{P_1P_2}^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2;\quad \text{speziell: } r^2=x^2+y^2.$$

2.) Definition der trigonometrischen Funktionen.

Verabredung. Die durch den kürzesten Winkelraum vollzogene Drehung der positiven X-achse in die Lage der positiven Y-achse definiere den positiven Drehsinn.

In der Trigonometrie trifft man die Vorzeichenfestsetzung für Winkel:

| von | -360° bis -270° | bis -180° | bis -90° | bis 0° | bis 90° | bis 180° | bis 270° | bis 360° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sin | + | + | − | − | + | + | − | − |
| cos | + | − | − | + | + | − | − | + |
| tg u. ctg | + | − | + | − | + | − | + | − |

Die Beziehungen: $\cos\alpha = \frac{x}{r}$; $\sin\alpha = \frac{y}{r}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$;

$\cos\alpha_{12} = \frac{x_2-x_1}{r_{12}}$; $\sin\alpha_{12} = \frac{y_2-y_1}{r_{12}}$; $\operatorname{tg}\alpha_{12} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

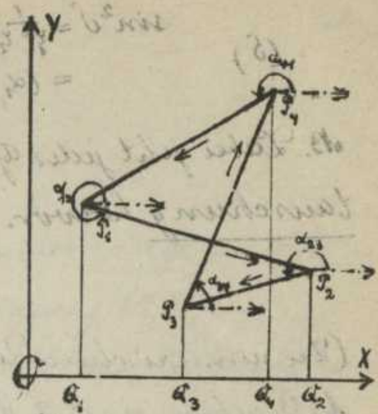
stehen ganz allgemein im Einklang mit diesen trigonometrischen Festsetzungen, wenn wir noch übereinkommen, daß wir in diesen Formeln stets setzen

$$r = \left|\sqrt{x^2+y^2}\right| \quad \text{bezw.} \quad r_{12} = \left|\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\right|$$

NB. Zur Bestimmung eines Winkels genügt die Kenntnis einer trigonometr. Funktion nicht. — Die obigen Formeln bestimmen den Winkel, den die Richtung $O \to L$ bezw. $P_1 \to P_2$ mit der + Richtung der X-achse einschließt.

Die Formeln Blatt Nr 1,3 gelten für ganz allgemeine Lage de Punkte $P_1$ und

$P_2$ in der Koordinatenebene.

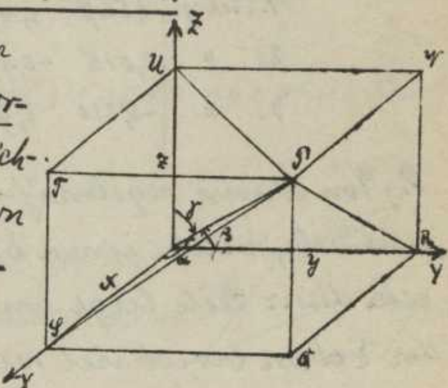



3.) Projektionssatz. Die algebraische Summe der Projektionen eines geschlossenen n-Ecks auf eine beliebige Gerade ist null, wenn das n-Eck in einem bestimmten Sinn durchlaufen wird d.h.

$$\overrightarrow{P_1P_2}\cos\alpha_{12}+\overrightarrow{P_2P_3}\cos\alpha_{23}+\dots+\overrightarrow{P_{n-1}P_n}\cos\alpha_{n-1,n}+\overrightarrow{P_nP_1}\cos\alpha_{n1}=0$$

Die Umkehrung des Projektionssatzes ist nur zulässig, wenn er für zwei Achsenrichtungen als giltig vorausgesetzt wird.

III. Elemente der analytischen Geometrie des Raumes.



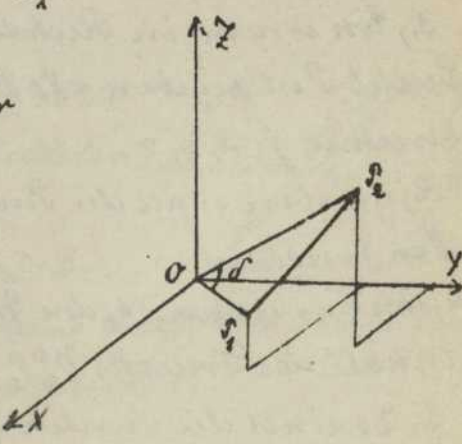

Drei zu einander rechtwinkelige durch einen Punkt (den Ursprung) gehende Gerade (die Koordinatenachsen) werden derart mit einem Richtungssinn versehen, daß die positive X-achse von der positiven Z-achse aus gesehen, im Gegenuhrzeigersinn (positiven Drehsinn) in die positive Y-achse gedreht werden kann. („Rechtssystem.")

Grundformeln. Aus dem Radiusvektor

(1) $$r^2=x^2+y^2+z^2$$

und $x=r\cos\alpha$, $y=r\cos\beta$, $z=r\cos\gamma$ folgt für die Richtungscosinusse ($\cos\alpha \parallel \alpha$, $\cos\beta \parallel \beta$, $\cos\gamma \parallel \gamma$):

(2) $$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \quad \text{oder} \quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$




Der Abstand zweier Punkte $P_1(x_1,y_1)$ und $P_2(x_2,y_2)$ ist bestimmt durch:

(3) $$r_{12}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

Für den Winkel zweier Radienvektoren ist:

(4) $$\cos\delta=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{r_1\cdot r_2}=\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2.$$

$$(5)\qquad \sin^2\delta = \frac{1}{r_1^2 r_2^2}\left\{(x_1y_2-y_1x_2)^2+(y_1z_2-z_1y_2)^2+(z_1x_2-x_1z_2)^2\right\}$$
$$= (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2+(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)^2+(\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1)^2.$$

NB. Dabei geht jedes Glied aus dem vorhergehenden durch zyklische Vertauschung hervor.

## Aufgaben.

(Die numerischen Rechnungen sind mittels des Rechenstabs auszuführen)

1.) Gegeben sind 2 Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$. Man berechne deren Entfernung und den Winkel derselben gegen die X-achse.

| | $x_1$ | $y_1$ | $x_2$ | $y_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1. Beisp. | 1,567 | 0,485 | −3,259 | 2,105 |
| 2. " | 2,015 | −0,905 | −1,052 | −9,260 |
| 3. " | −5,230 | 3,902 | 1,212 | −4,445 |

2.) Von einem regelmäßigen Fünfeck mit der Seitenlänge a liegt eine Seite, welche einen Endpunkt in O hat, auf der Y achse. Die Gegenecke dieser Seite liege im 1. Quadranten; es sollen die Koordinaten der Ecken berechnet werden.

3.) Von einem in Richtung der negativen Z-achse liegenden Punkt P ist gegeben $\sphericalangle XOP = \alpha = 70°$; $\sphericalangle YOP = \beta = 30°$ und $OP = r = 5$; man berechne $\gamma$; $x, y, z$.

4.) Gegeben sind die Punkte: $\left\{\begin{array}{lll} x_1 = 2,51 & y_1 = 3,23 & z_1 = -1,85 \\ x_2 = -1,22 & y_2 = -2,84 & z_2 = 5,28. \end{array}\right.$
Man berechne:
a, ihre Entfernung b, den Winkel der Radienvektoren c, den Flächeninhalt des Dreiecks $OP_1P_2$.

5.) Es sind die Punkte $P_1(a,0,0)$, $P_2(0,b,0)$, $P_3(0,0,c)$ gegeben. Das Lot von O auf die Ebene $P_1P_2P_3$ habe die Länge p. Es soll bewiesen werden, daß $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}$. Außerdem berechne man den Inhalt des Dreiecks $P_1P_2P_3$.

21. XI. 10 Nr. 3

# Höhere Mathematik I.

## Die Grundbegriffe der Vektoranalysis.

1.) Definition. Ein Vektor ist eine Strecke von bestimmter Länge, die mit Richtung und Richtungssinn versehen ist. Bezeichnung: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ ...

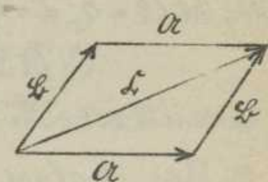
2.) Zwei Vektoren heißen einander gleich, wenn sie in Länge, Richtung und Richtungssinn übereinstimmen.

Anmerkung. Das Wort „gleich" fordert in der Mathematik immer die Angabe von Beziehungen, in welchen es verstanden wird, darf also in dem angegebenen Sinn verwendet werden.

3.) Unter dem absoluten Betrag eines Vektors ist seine Länge ohne Rücksicht auf seine Richtung zu verstehen.

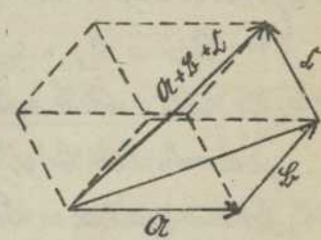
Bezeichnung: $|\mathfrak{A}|, |\mathfrak{B}|$ ... oder $A, B$ ...

4.) Die Summe zweier Vektoren wird definiert als die Diagonale des durch die beiden Vektoren bestimmten Parallelogramms.




$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \qquad \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}.$$

5.) Die Summe dreier Vektoren {Resultante} ist die Diagonale des in nebenstehender Weise gebildeten Parallelepipeds.




$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A} + \mathfrak{C} + \mathfrak{B} = \ldots$$

6.) $n \cdot \mathfrak{A}$ ist ein Vektor von derselben Richtung wie $\mathfrak{A}$ aber von $n$-facher Länge wie $\mathfrak{A}$. $n$ bedeutet dabei eine algebraische Zahl.

$$n(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = n \cdot \mathfrak{A} + n \cdot \mathfrak{B}.$$

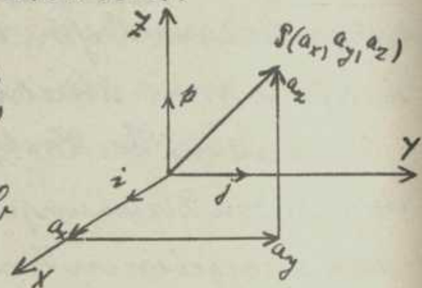
7.) Die Subtraktion ist definiert als Umkehrung der Addition.

$\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ bedeutet demnach genau das gleiche wie $\mathfrak{C} + \mathfrak{B} = \mathfrak{A}$.

8.) Nullvektor heißt ein Vektor von der Länge null. Seine Richtung ist unbestimmt.

9.) Man kann jeden Vektor in eine Summe beliebig vieler Vektoren, seiner Komponenten, zerlegen, insbesondere in Vektoren, welche in Richtung der Achsen eines Koordinatenkreuzes liegen. Sind $a_x, a_y, a_z$ die Koordinaten des Endpunkts eines vom Ursprung ausgehenden Vektors $\mathfrak{a}$ und sind $i$, $j$, $k$ die Einheitsvektoren (d. h. Vektoren von der Länge eins) in Richtung der Koordinatenachsen so ist

$$\mathfrak{a} = a_x \cdot i + a_y \cdot j + a_z \cdot k.$$




10.) Ist $\mathfrak{a} = a_x i + a_y j + a_z k$ und $\mathfrak{b} = b_x i + b_y j + b_z k$, so ist $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (a_x + b_x) i + (a_y + b_y) j + (a_z + b_z) k$.

11.) Das skalare (innere) Produkt von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ wird definiert durch

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos(\mathfrak{a}\mathfrak{b}).$$

NB. $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ist eine reine Zahl, kein Vektor.

12.) Ist $\mathfrak{a} = a_x i + a_y j + a_z k$ und $\mathfrak{b} = b_x i + b_y j + b_z k$, so ist

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z;$$

speziell ist: $ii = jj = kk = 1$; $ij = jk = ki = 0$.

13.) Das skalare Produkt eines Vektors in einen Einheitsvektor ist die Projektion dieses Vektors auf die Richtung des Einheitsvektors z. B. $\mathfrak{a} \cdot i = a_x$.

14.) Es gilt $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$; jedoch $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c} \neq \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})$

15.) Ein skalares Produkt kann 0 sein, ohne daß einer der beiden Vektoren 0 wird, nämlich wenn sie aufeinander senkrecht stehen.

16.) Das Vektorprodukt (äußere Produkt) ist ein Vektor, dessen Länge

$$|V\mathfrak{a}\mathfrak{b}| = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \sin(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$$

und dessen Richtung durch die Regel festgelegt ist: $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $V\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (vgl. Nr 2, III).

17.) Ist $\mathfrak{A} = a_x i + a_y j + a_z k$ und $\mathfrak{B} = b_x i + b_y j + b_z k$, so ist

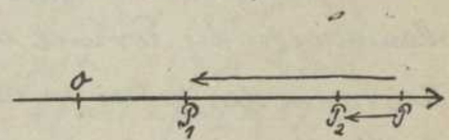
$$V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (a_y b_z - b_y a_z)\, i + (a_z b_x - b_z a_x)\, j + (a_x b_y - b_x a_y)\, k.$$

18.) Es gilt ferner: $V\mathfrak{B}\mathfrak{A} = -V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$; $\quad V\mathfrak{A}(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}) = V\mathfrak{A}\mathfrak{B} + V\mathfrak{A}\mathfrak{C}$;

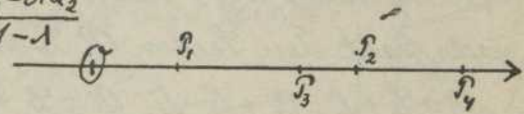
speziell gilt: $Vii = Vjj = Vkk = 0$; $\quad Vij = k,\ Vjk = i,\ Vki = j$;

$Vji = -k,\ Vkj = -i,\ Vik = -j$.

## Vom Teilungsverhältnis, Doppelverhältnis und Schwerpunkt auf der Geraden.




1.) $\lambda = \frac{PP_1}{PP_2} = \frac{x_1 - x}{x_2 - x}$ heißt das Teilungsverhältnis der Strecke $P_1P_2$; umgekehrt ist $x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}$




2.) Das Doppelverhältnis von 4 Punkten $P_1, P_2, P_3, P_4$ ist definiert durch

$$D.V.(P_1P_2P_3P_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} \cdot \frac{x_4 - x_2}{x_4 - x_1}.$$

Satz. $D.V.(P_1P_2P_3P_4) = D.V.(P_2P_1P_4P_3) = D.V.(P_3P_4P_1P_2) = D.V.(P_4P_3P_2P_1)$

Harmonisches Doppelverhältnis heißt jenes mit dem Wert $-1$.

3.) Definitionen.

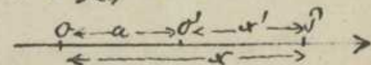
a.) $m \cdot x$ heißt das statische Moment des Punktes mit der Masse $m$ und der Abszisse $x$ in bezug auf den Ursprung.

b.) Das statische Moment eines Massenpunktsystems ist die algebraische Summe der statischen Momente der einzelnen Massenpunkte. („algebraische Summe" bedeutet: einschließlich des Vorzeichens.)

c.) Der Schwerpunkt ist ein gedachter Massenpunkt, für den

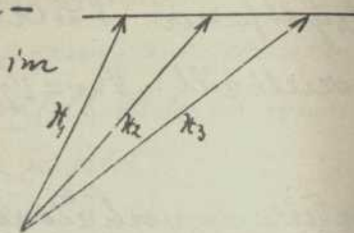
1.) die Masse $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu$

2.) das statische Moment $M \cdot X = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu$




Satz. Die Lage des Schwerpunkts ist unabhängig vom Ursprung; denn allgemein gilt: $\underline{\underline{x' = x - a}}$.

# Aufgaben.




1.) Der Vektor $\mathfrak{r}_3$, dessen Endpunkt die Verbindungsstrecke der Endpunkte von $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ im Verhältnis $\lambda$ teilt, ist gegeben durch

$$\mathfrak{r}_3 = \frac{\mathfrak{r}_1 - \lambda\mathfrak{r}_2}{1-\lambda} = \frac{\mathfrak{r}_1}{1-\lambda} - \frac{\lambda}{1-\lambda}\cdot\mathfrak{r}_2 .$$

Man beweise die Formel und gebe insbesondere die Deutung der zweiten Form des Satzes an der Figur.

2.) Man zeige, daß die räumlichen Diagonalen eines Parallelepipeds mit den Seiten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ die Werte haben:

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c},\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\mathfrak{c},\ \mathfrak{a}-\mathfrak{b}+\mathfrak{c},\ -\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}.$$

3.) Beweise, daß die vier Raumdiagonalen dieses Parallelepipeds sich in einem Punkt schneiden.

4.) Der Winkel $\theta$ der beiden Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1 = \cos\alpha_1 \cdot i + \cos\beta_1 j + \cos\gamma_1 k$ und $\mathfrak{e}_2 = \cos\alpha_2\, i + \cos\beta_2 j + \cos\gamma_2 k$ ist gegeben durch:

$$\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_2 = \cos\theta = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 .$$

5.) Was bedeutet $(V\mathfrak{e}_1\,\mathfrak{e}_2)^2$, und wie läßt sich diese Größe durch die Komponenten von $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ ausdrücken?

6.) Man zeige, daß $\mathfrak{a}V\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ den Rauminhalt des durch die 3 Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bestimmten Parallelepipeds ergibt und daß $\mathfrak{a}V\mathfrak{b}\mathfrak{c} = (V\mathfrak{a}\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c}$.

7.) Man beweise die Formel $V\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = V\mathfrak{a}\mathfrak{b} + V\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ auf geometrischem Weg.

28.XI.10. Nr. 4.

# Höhere Mathematik I.

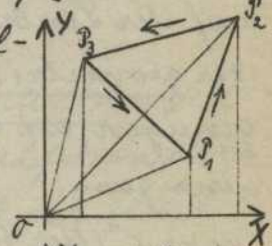
## I. Flächenmessung.

Treffen wir die Verabredung: Wir legen einem Flächenstück das + Vorzeichen bei, wenn wir die Berandung desselben im + Sinn [vgl Nr. 2, II, 2] durchlaufen, während wir der umlaufenen Fläche im entgegengesetzten Fall das − Vorzeichen beilegen, so gilt:

Polygonfläche $P_1P_2P_3\dots P_{n-1}P_n = OP_1P_2 + OP_2P_3 + OP_3P_4 + \dots + OP_{n-2}P_{n-1} + OP_{n-1}P_n + OP_nP_1$

$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+\dots+(x_ny_1-x_1y_n)\}$$

symbolisch $= [1,2]+[2,3]+\dots+[n-1,n]+[n,1]$



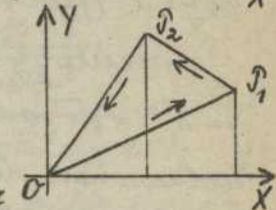

Bemerkung. Für überschlagene Figuren erhält man die algebraische Summe der umlaufenen Flächen.

speziell ist: $\underline{\Delta P_1P_2P_3} = \Delta OP_1P_2 + \Delta OP_2P_3 + \Delta OP_3P_1$

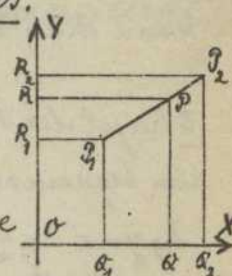
$$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)\}$$

symbolisch $\underline{= [1,2]+[2,3]+[3,1]}$.

$$\underline{\underline{\Delta OP_1P_2 = \frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1) = [1,2]}}.$$




## II. Vom Teilungsverhältnis und Schwerpunkt in der Ebene; Parallelverschiebung des Koordinatensystems.

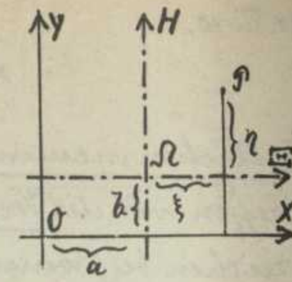



1.) Ein Punkt P, welcher die Strecke $P_1P_2$ im Verhältnis $\lambda = \frac{PP_1}{PP_2}$ teilt, hat die Koordinaten: $x = \frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}$; $y = \frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}$.

2.) Definitionen. a.) Das statische Moment eines Massenpunktes inbezug auf eine Gerade ist das Produkt der Masse des Punktes in den mit dem Vorzeichen genommenen Abstand des Punktes von der Geraden.

b.) Der Schwerpunkt eines Massenpunktsystems in der Ebene ist ein gedachter Punkt, dem

1.) die Masse $M = \sum m$ zugeschrieben wird und dessen Koordinaten




X, Y bestimmt sind durch

2.) $M\cdot X = \sum m\cdot x$ 3.) $M\cdot Y = \sum m\cdot y$.

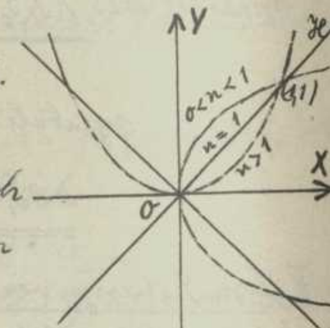
3.) Für den Übergang von einem Koordinatensystem (X, Y) zu einem in der Ebene parallel verschobenen (Ξ, H) gilt:

$$\underline{x = a + \xi} \qquad \underline{y = b + \eta}$$

<u>III. Gleichungen von Linien.</u> – <u>Der Begriff „unendlich".</u> – <u>Asymptote.</u>

<u>Gleichung einer Linie</u> nennen wir diejenige Gleichung, welche von den Koordinaten eines beliebigen Punktes erfüllt sein muß, der auf der Linie liegt.

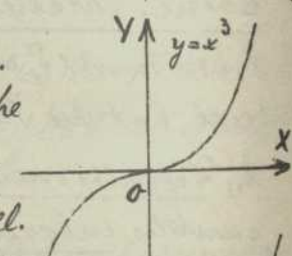
Der <u>geometrische Ort</u> der Punkte, die einer gewissen Bedingung genügen, ist die Gesamtheit aller Punkte, die dieser Bedingung genügen.




a.) $y = x^n$ (für beliebige $+n$): Gleichung der allgem. Parabel.

speziell: $y = x^2$, die apollonische Parabel.

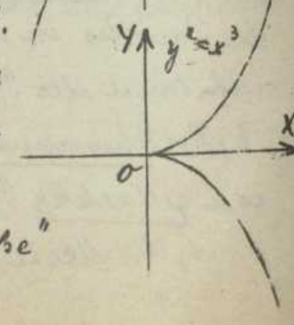
$y = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ oder $x = y^n$ geht aus der Kurve $y = x^n$ durch Vertauschen der Achsen d.h. durch Umklappen um OH hervor. – Für $y = x^n$, wobei $n = \frac{p}{q}$, also für $y = x^{p/q}$ kann man das Gleichungspaar: $\begin{cases} x = t^q \\ y = t^p \end{cases}$ anschreiben.




<u>t</u> heißt der <u>Parameter</u> dieser Kurvendarstellung, welche am bequemsten zur Berechnung der Koordinaten $(x, y)$ ist.

b.) $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ (für beliebige $+n$): Gleichung d. allgem. Hyperbel.

speziell: $y = \frac{1}{x}$ oder $x\cdot y = 1$, die gleichseitige apoll. Hyperbel.



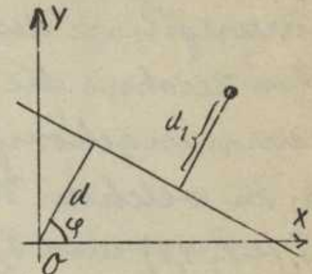

Die Aussage <u>„für $x = 0$ wird $y = \infty$ (unendlich)"</u> <u>bedeutet</u>:

1.) zu $x = 0$ gehört überhaupt kein Wert $y$, d.h. die Hyperbeln schneiden die Y-achse nicht,

2.) „sehr kleinen" Werten von $x$ entsprechen „sehr große"

28. XI. 10 Nr. 4

# Höhere Mathematik I.
## (Fortsetzung zu Nr. 4)



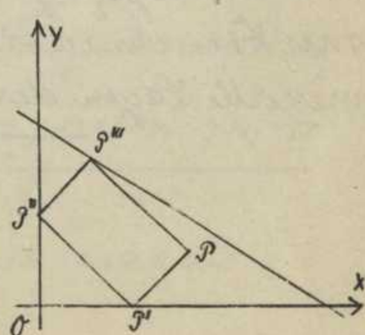

VIII. Die Hesse-sche Normalform der geraden Linie lautet: $x\cos\varphi + y\sin\varphi - d = 0$.
Die allgemeine Gleichungsform der Geraden $ax+bx+c=0$ wird durch Multiplikation mit $1/\pm\sqrt{a^2+b^2}$ auf die Normalform gebracht; dabei ist das Vorzeichen der Wurzel so zu wählen, daß $c/\pm\sqrt{a^2+b^2}$ negativ wird.

Der Abstand eines Punktes $P_1(x_1, y_1)$ von einer Geraden wird erhalten, indem man in die Hesse-sche Normalform derselben die Koordinaten des Punktes einsetzt, d.h. es ist

$$d_1 = x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - d \quad \text{oder} \quad d_1 = \frac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}},$$

wobei das Vorzeichen der Wurzel wieder so zu wählen ist, daß $c/\pm\sqrt{a^2+b^2}$ negativ wird; $d_1$ wird negativ oder positiv je nachdem $P_1(x_1, y_1)$ auf derselben Seite der Geraden liegt wie der Ursprung oder nicht.

### Aufgaben.




1, Eine Gerade bewegt sich so, daß sie auf den Achsen eines rechtwinkeligen Systems die gleichen Stücke $OP'$ und $OP''$ abschneidet; über $P'P''$ ist ein Rechteck $PP'P''P'''$ so konstruiert, daß sich $P'''$ auf einer festen Geraden $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$ bewegt. Was ist der Ort der Ecke $P$?

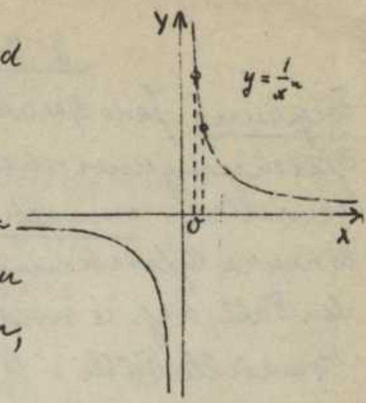
2.) Wie lautet die Gleichung des geometrischen Ortes eines Punktes $P$, für den die Summe der Quadrate seiner Abstände von der Halbierungslinie des ersten Quadranten und der $y$-achse $k^2$ ist? Man zeichne die Kurve punktweise durch Berechnung zusammengehöriger Wertepaare der Koordinaten.

3.) In welchem Verhältnis teilen die Schnittpunkte der durch $P_1(-1; 1,5)$ und $P_2(2,5; 3)$ bestimmten Geraden mit den Achsen die Strecke $P_1P_2$?

4.) Man lege durch Punkt $P(0, -2)$ eine zur Geraden $12x - 5y - 29 = 0$ parallele und eine dazu rechtwinkelige Gerade. Wie lauten die Gleichungen dieser Geraden, und wie groß ist der Abstand der parallelen Linien? Wie groß ist der in der Hesse-schen Normalform auftretende Polarwinkel der Geraden?

5.) Man stelle die Gleichungen derjenigen Geraden auf, welche durch den Punkt $(-1, 2)$ gehen und vom Ursprung den Abstand 1 haben. Wie lautet die Gleichung einer durch den Punkt $(0, -1)$ gehenden Geraden, welche mit der $x$-achse einen Winkel $\alpha = 135°$ einschließt? Man berechne die Winkel und den Flächeninhalt des von den drei Geraden gebildeten Dreiecks. Welches sind die Abstände des Punktes $(1,1)$ von den drei Geraden?

6.) Man zeige, daß sich die drei Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks in einem Punkte schneiden. Man wähle als spezielle Lagen der Eckpunkte: $P_1(0,0)$, $P_2(x_1, 0)$ $P_3(x_3, y_3)$.

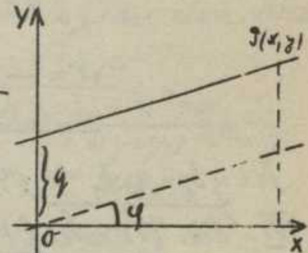



Werte von y (dabei haben die Ausdrücke „sehr klein" und „sehr groß" nur für die Anwendungen Sinn.)

3.) wir können ein beliebig großes y erhalten, wenn wir nur x hinlänglich klein wählen, d.h. wenn irgend eine Zahl M gegeben ist, so kann man zu ihr eine andere positive Zahl $\delta$ so bestimmen, daß das $y > M$, sobald $x < \delta$ ist.

Die Y-achse heißt in diesem Fall Asymptote, aber auch nur dann, wenn die angegebenen 3 Bedingungen erfüllt sind. (NB. Eine Parallele zur Y-achse ist keine Asymptote). Für die Hyperbeln ist auch die X-achse Asymptote.

## IV. Gleichung der geraden Linie.

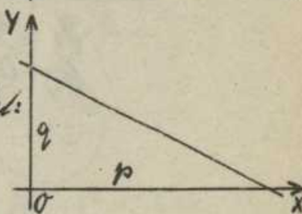



1.) Eine beliebige gerade Linie (siehe Figur) kann dargestellt werden in der Form

$$y = x \operatorname{tg} \varphi + q.$$

Ausnahme. Parallele zur Y-achse haben die Gleichung

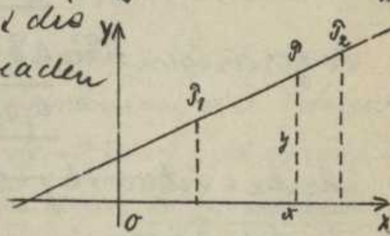
$$x = a.$$




2.) Die sogen. Abschnittsgleichung einer Geraden lautet:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

3.) Sind 2 Punkte $P_1(x_1 y_1)$ und $P_2(x_2 y_2)$ gegeben, so ist die Gleichung der durch dieselben gehenden Geraden

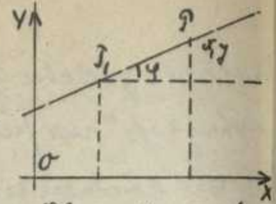



$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda} \\ y &= \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda} \end{aligned}\right\} \quad \text{(Parameterform)}$$

oder $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y-y_2}{x-x_2}$ oder $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ oder $(x_1 y_2 - y_1 x_2) + (x_2 y - y_2 x) + (x y_1 - y x_1) = 0$

Die letzte Form sagt aus, daß $\Delta P P_1 P_2 = 0$ ist.

4.) Ist $P_1(x_1, y_1)$ und $\varphi$ gegeben (Figur siehe nächste Seite), so lautet die Gleichung der dadurch bestimmten Geraden:




$$y - y_1 = (x - x_1)\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Folgerung. Jede Gerade läßt sich durch eine lineare Gleichung zwischen kartesischen Koordinaten darstellen. umgekehrt: jede in den kartesischen Koordinaten lineare Gleichung $ax+by+c=0$ stellt eine Gerade dar, ausgenommen den Fall, daß $a$ und $b$ beide null sind.

Spezielle Fälle: $a=0$ gibt $y=-\frac{c}{b}$ als Gleichung d.h. eine $\parallel$ zur X-achse

$b=0$ " $x=-\frac{c}{a}$ " " " " $\parallel$ " Y- "

V. Der Schnittpunkt zweier Geraden

$g_1: a_1x+b_1y+c_1=0$

$g_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ hat die Koordinaten

$$x=-\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1} \qquad y=-\frac{a_1c_2-c_1a_2}{a_1b_2-a_2b_1}$$

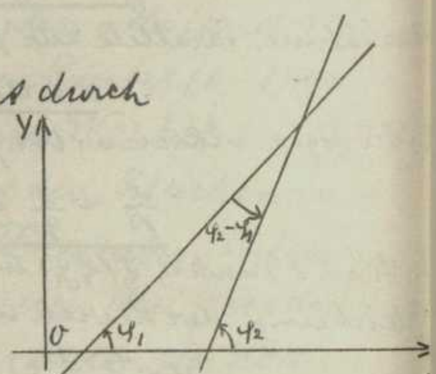
Ist $a_1b_2-a_2b_1=0$ oder $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$, so ist $x=y=\infty$ d.h. $g_1 \parallel g_2$.

VI. Der Winkel zweier Geraden

$g_1: a_1x+b_1y+c_1=0$

$g_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ ist bestimmt durch

$$\mathrm{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{a_1b_2-b_1a_2}{a_1a_2+b_1b_2}.$$




Folgerungen: Für $a_1b_2-b_1a_2=0$ ist $g_1 \parallel g_2$

" $a_1a_2+b_1b_2=0$ " $g_1 \perp g_2$.

Merke: Ist $ax+by+c=0$ eine bestimmte vorgelegte Gerade, so sind in der Form:

1.) $ax+by+c_1=0$ alle dazu $\parallel$ Geraden

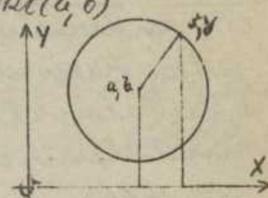
2.) $bx-ay+c_2=0$ " " $\perp$ " enthalten.

$c_1$ und $c_2$ sind dabei noch anderweitig zu bestimmende Größe

5.XII.10. Nr. 5.

# Höhere Mathematik I.

**Der Kreis.** 1.) Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt $(a, b)$ und dem Radius $r$: $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$.




Eine Gleichung der Form: $x^2+y^2+2\mathfrak{D}x+2\mathfrak{E}y+\mathfrak{F}=0$ wird für

$\mathfrak{D}^2+\mathfrak{E}^2-\mathfrak{F} \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} 0$ von den Punkten eines Kreises, nur von einem einzigen Punkt, überhaupt von keinem reellen Punkt befriedigt.

2.) Der Kreis $x^2+y^2-r^2=0$ und die Gerade $ax+by+c=0$ haben für

$r \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 2 reelle Schnittpunkte, 2 zusammenfallende Schnittpunkte (den Berührpunkt), überhaupt keinen reellen Punkt gemein.

3.) Die Gleichung der Tangente für den Berührpunkt $(x_1, y_1)$ an den Kreis

$x^2+y^2-r^2=0$ ist $xx_1+yy_1-r^2=0$

$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$ " $(x-a)(x_1-a)+(y-b)(y_1-b)-r^2=0$

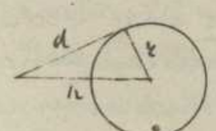
$x^2+y^2+2\mathfrak{D}x+2\mathfrak{E}y+\mathfrak{F}=0$ " $xx_1+yy_1+\mathfrak{D}(x+x_1)+\mathfrak{E}(y+y_1)+\mathfrak{F}=0$

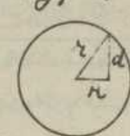
4.) Die Potenz eines Punktes $P(x_1, y_1)$ in bezug auf einen Kreis

$x^2+y^2+2\mathfrak{D}x+2\mathfrak{E}y+\mathfrak{F}=0$ ist $x_1^2+y_1^2+2\mathfrak{D}x_1+2\mathfrak{E}y_1+\mathfrak{F}$

$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$ " $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2$

Geometrische Bedeutung:




$d^2=R^2-r^2$ $\qquad -d^2=R^2-r^2=(R+r)(R-r)$

5.) Die Schnittpunkte zweier Kreise $x^2+y^2+2\mathfrak{D}_1x+2\mathfrak{E}_1y+\mathfrak{F}_1=0$ und $x^2+y^2+2\mathfrak{D}_2x+2\mathfrak{E}_2y+\mathfrak{F}_2=0$ bestimmt man, indem man die Schnittpunkte der Geraden $2(\mathfrak{D}_1-\mathfrak{D}_2)x+2(\mathfrak{E}_1-\mathfrak{E}_2)y+(\mathfrak{F}_1-\mathfrak{F}_2)=0$ mit einem der Kreise berechnet. Die Gerade heißt Chordale oder Potenzlinie. Irgend einer ihrer Punkte hat in bezug auf beide Kreise gleiche Potenz.

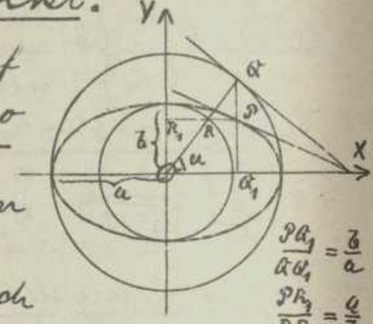
6.) Die Gesamtheit aller Kreise mit der gleichen Potenzlinie heißt ein Kreisbüschel. Die Schnittpunkte der Kreise mit der Chordalen heißen Grundpunkte. Die Gleichung eines beliebigen Kreises des Büschels ist:

$$x^2+y^2+2\,\frac{\mathfrak{D}_1-\lambda\mathfrak{D}_2}{1-\lambda}\cdot x+2\,\frac{\mathfrak{E}_1-\lambda\mathfrak{E}_2}{1-\lambda}+\frac{\mathfrak{F}_1-\lambda\mathfrak{F}_2}{1-\lambda}=0.$$

A bedeutet das Verhältnis der Potenzen eines beliebigen Punktes dieses Kreises in bezug auf die beiden gegebenen Kreise.

7.) Die unter 5 angeschriebenen Kreise schneiden sich rechtwinkelig, wenn $2D_1D_2+2E_1E_2-(F_1+F_2)=0$ ist. Zu jedem Kreisbüschel kann ein anderes derart angegeben werden, daß jeder Kreis desselben jeden Kreis des gegeben Büschels rechtwinkelig schneidet.

8.) Die Potenzlinien dreier Kreise schneiden sich in einem und demselben Punkt, dem Potenzpunkt.




$\frac{PQ_1}{QQ_1}=\frac{b}{a}$

$\frac{PR_1}{RR_1}=\frac{a}{b}$

**Die Ellipse.** 1.) Gleichung der Ellipse bezogen auf die Halbachsen $a, b$ als Koordinatenachsen: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$

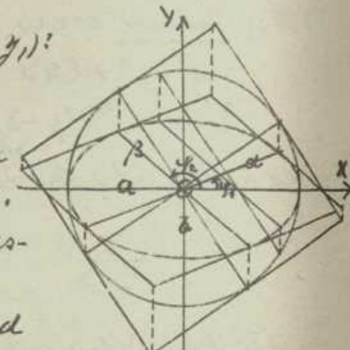
Sie entsteht aus dem Kreis $x^2+y^2-a^2=0$ durch Verkürzung aller Kreisordinaten nach dem konstanten Verhältnis $b/a$ oder aus dem Kreis $x^2+y^2-b^2=0$ durch Vergrößerung aller Abszissen nach dem Verhältnis $a/b$.

2.) Parameterdarstellung der Ellipse: $x=a\cos u$ $\quad y=b\sin u$.

$u$ heißt exzentrische Anomalie.

3.) Gleichung der Tangente an die Ellipse im Punkt $(x_1, y_1)$:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1=0$$




4.) Konjugierte Durchmesser sind solche, von denen jeder die zum anderen parallelen Sehnen halbiert. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind parallel zur konjugierten Richtung des Durchmessers. Zwei konjugierte Richtungen sind verknüpft durch die Beziehung: $\operatorname{tg}\varphi_1\cdot\operatorname{tg}\varphi_2=-\frac{b^2}{a^2}=\mathrm{const.}$

Für den Kreis ist $\operatorname{tg}\varphi_2=-\operatorname{ctg}\varphi_1$, d.h. $\varphi_2=90^\circ+\varphi_1$, d.h. im Kreis sind die konjugierten Richtungen rechtwinkelig.

Für die konjugierten Halbmesser gilt:

$\alpha^2+\beta^2=a^2+b^2=\mathrm{const}$ und $\alpha\cdot\beta\cdot\sin(\varphi_2-\varphi_1)=a\cdot b=\mathrm{const}$, d.h. alle einer und derselben Ellipse umschriebenen Parallelogramme haben denselben Flächeninhalt.

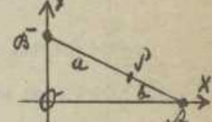
2.) Die Chordale zweier Kreise halbiert die gemeinsame Tangente derselben. Beweis?

3.) Man suche die Gleichung des Kreises, der durch die drei Punkte (1, 1) (0, −1) (−2, 0) geht.

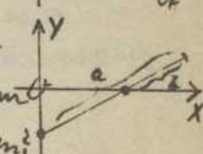
4.) Man suche denjenigen Kreis des Kreisbüschels $x^2+y^2-2\lambda x+1=0$ an den von dem Punkt $P_1(2,1)$ eine Tangente von der Länge $\frac{1}{2}$ gezogen werden kann.

5.) Zwei Kreise mit den Gleichungen $x^2+y^2-2a_1x-2b_1y=0$ und $x^2+y^2-2a_2x-2b_2y=0$ gehen durch den Ursprung des Koordinatensystems. Eine gleichfalls durch den Nullpunkt gehende veränderliche Gerade von der Gleichung $y=x\cdot tg\,\varphi$ schneidet die beiden Kreise außer in O noch in den Punkten A bezw. B. Welches ist der Ort des Punktes, der die Strecke AB in konstantem Verhältnis $\lambda$ teilt? Was bilden sämtliche Örter, die zu allen möglichen Werten $\lambda$ gehören? Für welche Werte von $\lambda$ berührt der zugehörige Ort eine der Koordinatenachsen? (Vorprüfung S. S. 1901)

6.) a.) Die Endpunkte der Strecke $AB = a + b$ durchlaufen die Koordinatenachsen. Welche Kurve beschreibt der Punkt P, welcher AB von innen im Verhältnis $b/a$ teilt?



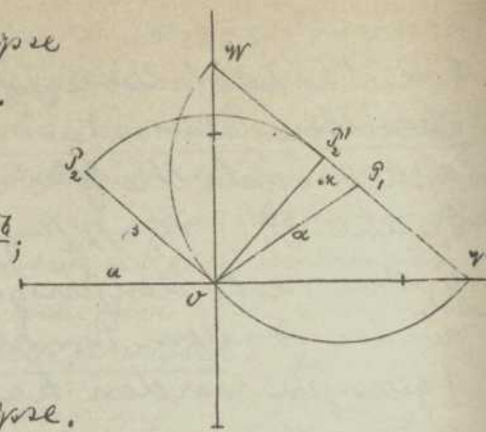

b.) Welches ist der geometrische Ort des Punktes P, welcher $AB = a - b$ von außen im Verhältnis $a/b$ teilt, wenn die Endpunkte von AB sich auf den Koord.achsen bewegen?




7.) Jede Ellipsentangente schneidet auf den beiden Scheiteltangenten Ordinaten $d_1$ und $d_2$ aus, deren Produkt $b^2$ ist. Das zwischen den Scheiteltangenten ausgeschnittene Stück einer solchen Tangente erscheint von den Brennpunkten aus unter rechtem Winkel. Beweis?

8.) Man bestimme Hauptachsen, Brennpunkte und Leitlinien der Ellipse $x^2/12 + y^2/4 - 1 = 0$, weiter Tangente und Normale im Punkt (3, 1) der Ellipse, endlich den zum Durchmesser nach diesem Punkt konjugierten Durchmesser der Gleichung und der Länge nach.

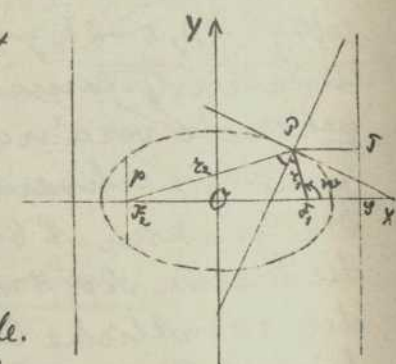
5.) Konstruktion der Hauptachsen einer Ellipse aus 2 konjugierten Halbmessern $\alpha$ und $\beta$.




$$\alpha = OP_1 \qquad \beta = OP_2.$$

Mache $OP_2' \perp OP_2$, dann ist $P_1P_2' = a - b$.
Mache $P_1M = P_2'M$, dann ist $MO = MV = MW = \frac{a+b}{2}$;
also $P_1W = a$ und $P_1V = b$.
OV und OW sind bezw. die Richtungen der Achsen a und b.

6.) Brennpunktseigenschaften der Ellipse.




Auf der großen Achse jeder Ellipse liegen im Abstand $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ vom Mittelpunkt 2 Punkte von der Art daß $PF_1 + PF_2 = r_1 + r_2 = 2a$.

$F_1, F_2$ heißen die Brennpunkte der Ellipse,
$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ die lineare Exzentrizität,
$\varepsilon = c/a$ die numerische ".

Die Winkel zwischen den Brennstrahlen werden halbiert durch die Tangente und Normale.

Die Polargleichung der Ellipse ist $\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos w}$
wobei $p = b^2/a$ der Halbparameter
$w$ die wahre Anomalie heißt. Letztere wird von demjenigen Scheitel aus gerechnet, welcher dem als Pol gewählten Brennpunkt am nächsten liegt. Die Halbachsen der Ellipse und die lineare Exzentrizität drücken sich durch den Halbparameter $p$ und die numerische Exzentrizität $\varepsilon$ so aus:

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \qquad c = \frac{p \cdot \varepsilon}{1-\varepsilon^2}$$

Zu jedem Brennpunkt einer Ellipse gibt es eine Parallele im Abstand $a^2/c$ von der kleinen Achse derart, daß $F_1P/PS = \varepsilon = \frac{c}{a}$ (also kleiner als eins). Diese Linie heißt Direktrix (Leitlinie).

## Aufgaben.

1.) Man konstruiere die Chordale zu zwei sich nicht schneidenden Kreisen.

# Orthogonale Kreisbüschel.

in isothermen Netzen.

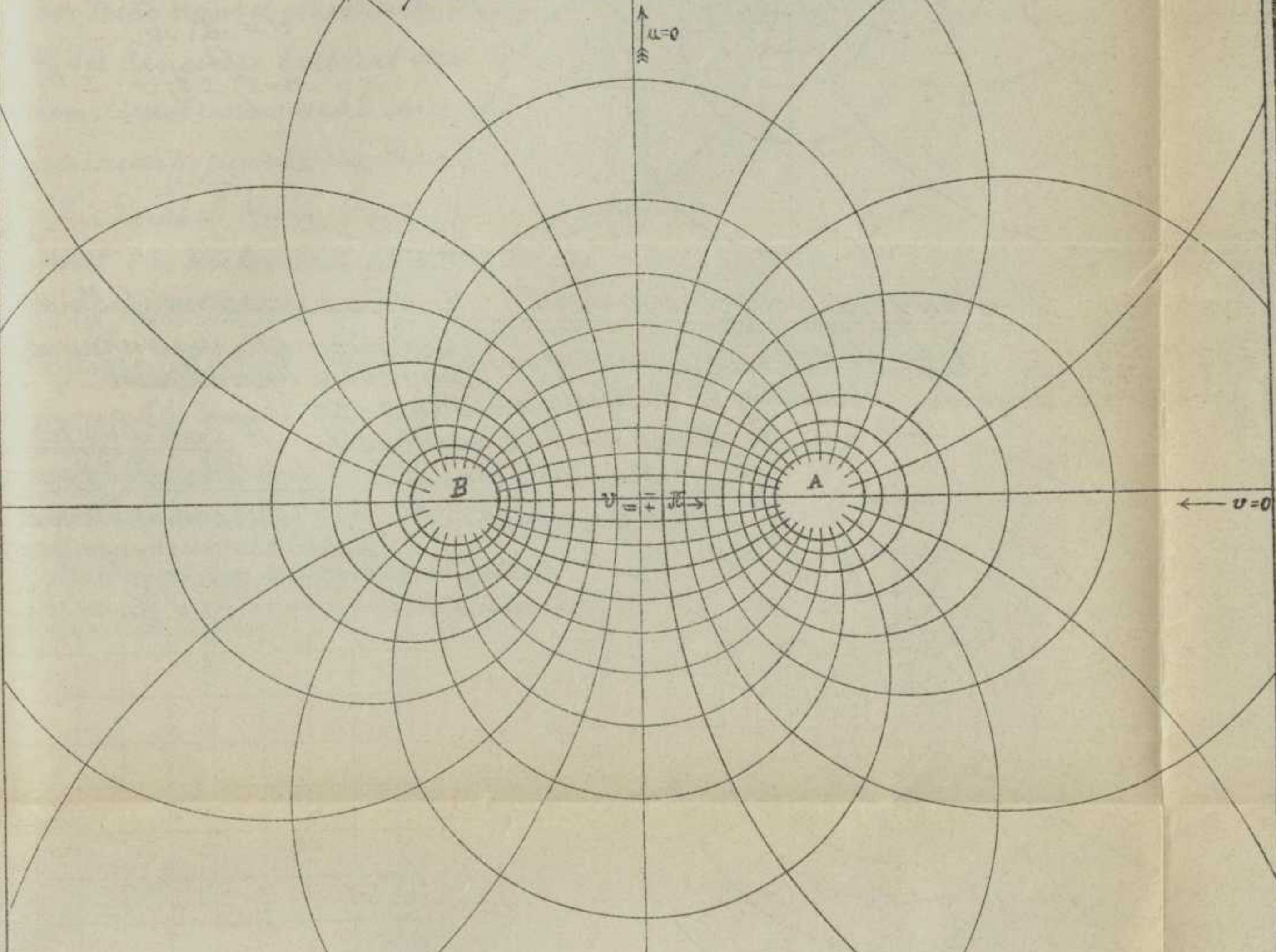
Masseinheit = 2,5 cm. Gezeichnet sind die den Parametern $\frac{\pi}{12} \cdot n$ entsprechenden Kurven.

## I. Ein hyperbolisches und ein elliptisches Kreisbüschel.

Grundpunkte getrennt im Endlichen: $x^2+y^2+1-2x\,\mathrm{cotg\,hyp}\,u=0$;

$$x^2+y^2-1+2y\,\mathrm{cotg}\cdot v=0.$$

Zugleich Abbildung des Streifens von $v=-\pi$ bis $v=+\pi$ der Ebene $w=u+iv$ durch $w=\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$; $z=x+iy$. Gezeichnet für $u=\frac{\pi}{12}\cdot n$; $n=0,\pm1,\dots\pm8$; und für $v=\frac{\pi}{12}\cdot n$; $n=0$; $\pm1$; $\dots\pm12$. $u$ ist Lognat des Abstandsverhältnisses $\frac{BP}{AP}$; $v$ der Peripheriewinkel $APB$.



## II. Zwei parabolische Kreisbüschel.

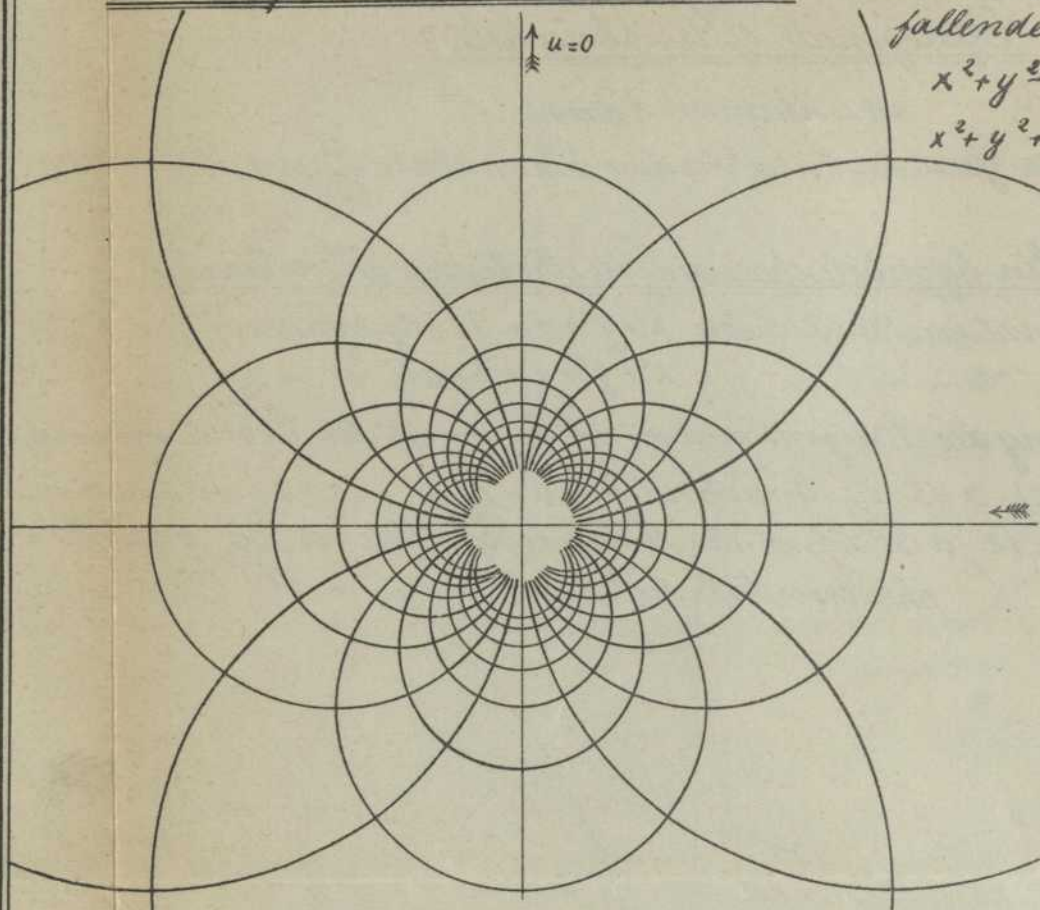
Zwei im Endlichen zusammenfallende Grundpunkte.

$$x^2+y^2-\frac{x}{u}=0.$$

$$x^2+y^2+\frac{y}{v}=0.$$

Zugleich Abbildung der Ebene $w=\frac{1}{z}$.

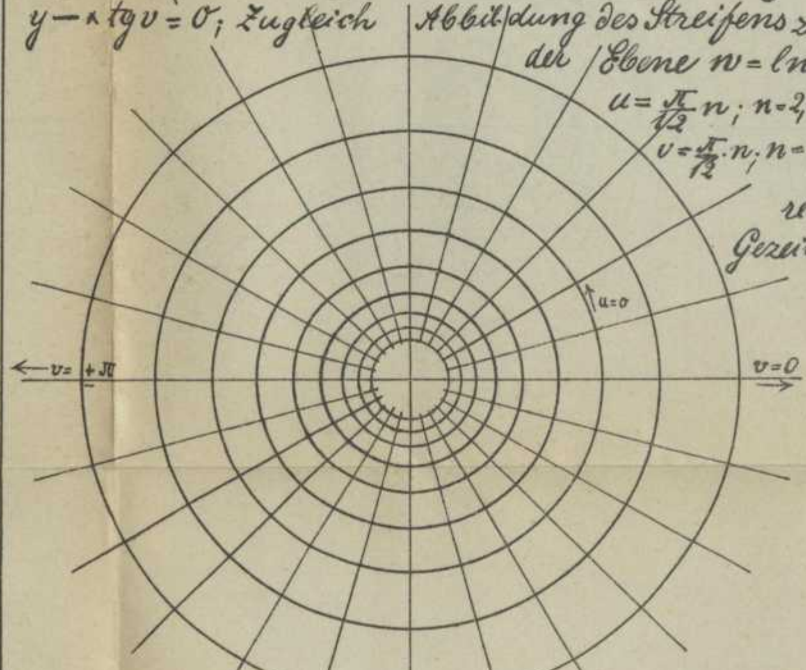
Gezeichnet für $u=\frac{\pi}{12}\cdot n$, $n=0,\pm 1,\cdots\pm 8$. $v=\frac{\pi}{12}\cdot n$, $n=0,\pm 1,\cdots\pm 8$.




## III. Konzentrische Kreise und Geradenbüschel (samt $g\infty$).

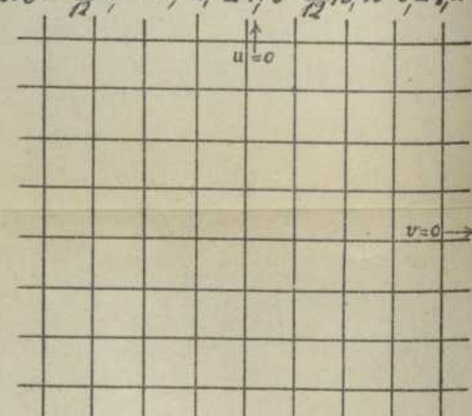
Zwei Paare zusammenfallender Grundpunkte, resp. ein Grundpunkt im Unendlichen.

$x^2+y^2-e^{2u}=0$; $y-x\,\mathrm{tg}\,v=0$; Zugleich Abbildung des Streifens zwischen $v=\pm\pi$ der Ebene $w=\ln z$. Gezeichnet für $u=\frac{\pi}{12}n$; $n=2,1,0,-1\ldots-6$. $v=\frac{\pi}{12}\cdot n$, $n=0,\pm 1\ldots\pm 12$.




## IV. Zwei Büschel von Parallelgeraden.

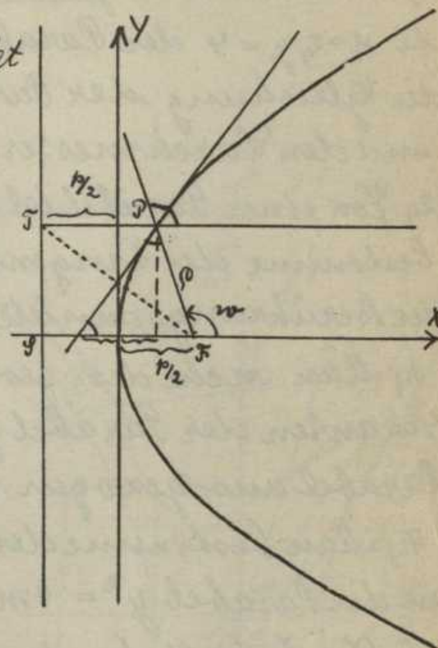
(samt $g_\infty$). Zwei im Unendlichen zusammenfallende reelle Grundpunkte. $x-u=v$, $y-v=0$. Gezeichnet für $u=\frac{\pi}{12}n$, $n=0,\pm 1,\ldots\pm 4$, $v=\frac{\pi}{12}n$, $n=0,\pm 1,\ldots\pm 4$.



12. XII. 10. Nr. 6

# Höhere Mathematik I.

## Die Parabel (apollonische).




1.) Die Polargleichung mit dem Brennpunkt F als Pol ist:

$$\rho = \frac{p}{1+\cos w}.$$

Die Scheitelgleichung der Parabel lautet:

$$y^2 = 2px.$$

2.) Die Tangentengleichung im Punkt $(x_1 y_1)$ ist:

$$y y_1 = p(x+x_1)$$

3.) Sätze: a.) Die Parabel liegt immer ganz auf einer Seite irgend einer ihrer Tangenten.

b.) Die Tangente halbiert den Winkel zwischen dem Brennstrahl und der durch den Berührungspunkt zur Parabelachse gezogenen ‖.

c.) Die Parabel kann aufgefaßt werden als Ellipse, deren einer Brennpunkt ins Unendliche gerückt ist.

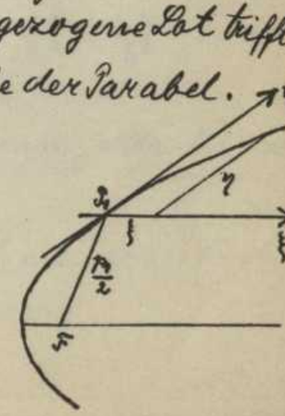
d.) Zu jeder Parabel gibt es eine als Direktrise bezeichnete zur Scheiteltangente ‖ Gerade von der Eigenschaft: Der Abstand eines beliebigen Kurvenpunktes von ihr ist dem Abstand vom Brennpunkt gleich.

e.) Das vom Brennpunkt auf eine beliebige Tangente gezogene Lot trifft diese stets im Schnittpunkt mit der Scheiteltangente der Parabel.

4.) Die Gleichung der Parabel in bezug auf eine Tangente und den zugehörigen Durchmesser ist:

$$\eta^2 = 2p_1\xi, \text{ wobei}$$

$p_1 = 2(\frac{p}{2}+x_1)$, den doppelten Abstand $P_1F$ bedeutet.



## Aufgaben.

1.) Man stelle die Gleichung der Tangente und Normale im Punkte $x_1=2, y_1=4$ der Parabel $y^2=8x$ auf. Ferner transformiere man die Gleichung der Parabel auf die Tangente in diesem Punkt und den Durchmesser durch ihn.

2.) Von einer Parabel ist gegeben Brennpunkt und Leitlinie. Man bestimme die Tangenten von einem Punkt an die Parabel und die Berührungspunkte, ohne die Parabel zu zeichnen.

3.) Man suche den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Sekanten der Parabel $y^2=2px$, die von dem Punkt $(x_1 y_1)$ der Parabel aus gezogen werden können.

4.) Man bestimme den Winkel der beiden vom Punkte $(x', y')$ an die Parabel $y^2 = 4mx$ gezogenen Tangenten. $\{tg\varphi = ?\}$

5.) Der Inhalt des durch 3 Tangenten einer Parabel gebildeten Dreiecks ist die Hälfte von dem Inhalt des Dreiecks der Verbindungslinien ihrer Berührungspunkte.

19. XII. 10. № 7

# Höhere Mathematik I.

## Die Hyperbel (apollonische).

I. Hyperbelgleichungen.

1.) Polargleichung: $\rho = \frac{p}{1+\varepsilon\cos w}$ $\varepsilon > 1$

2.) Gleichung der Hyperbel in rechtwinkeligen cartes. Koord.: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$

Gleichung der dazu konjugierten Hyperbel: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$

3.) Beziehungen zwischen a, b (Halbachsen), $c=\sqrt{a^2+b^2}$ (lineare Exzentrizität) und p (Halbparameter), ε (numerische Exzentrizität):

$$a=\frac{p}{\varepsilon^2-1} \qquad b=\frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \qquad c=\frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2-1}$$

$$p=\frac{b^2}{a} \qquad \varepsilon=\frac{c}{a}.$$

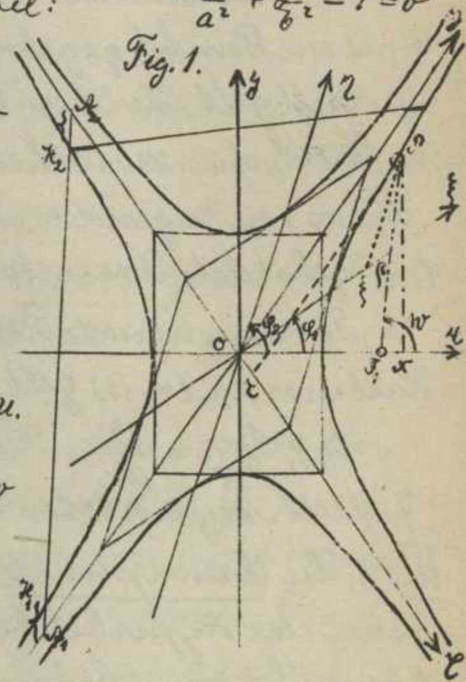


Fig. 1.

4.) Parameterform d. Hyperbel: $x=\frac{a}{\cos u}$; $y=b\,tg\,u$.

" d. konjug. " : $x=a\,tg\,v$; $y=\frac{b}{\cos v}$

5.) Gleichung der Hyperbel in bezug auf 2 konjugierte Durchmesser als Achsen:

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2}-\frac{\eta^2}{\beta^2}-1=0 \qquad \text{(vgl. III, 6)}$$

6.) Gleichung der Hyperbel in bezug auf die Asymptoten als Achsen: $4\xi\eta=c^2$

II. Gleichung der Tangente im Punkt $(x_1, y_1)$ an die Hyperbel $T_1$2: $\frac{x x_1}{a^2}-\frac{y y_1}{b^2}-1=0$

Gleichungen der Asymptoten: $y=+\frac{b}{a}$ $y=-b/a$.

III. 1.) Konjugierte Durchmesser sind solche, von denen jeder bei zum andern parallelen Sehnen halbiert.

2.) Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind parallel zur konjugierten Richtung des Durchmessers.

3.) Die Tangenten in den Endpunkten konjugierter Durchmesser bilden ein Parallelogramm, dessen Eckpunkte auf den Asymptoten liegen.

4.) Der Mittelpunkt einer Sehne ist zugleich der Mittelpunkt des zwischen den Asymptoten abgeschnittenen Stücks derselben. Daraus folgt: Auf jeder Hyperbelsehne sind die Abschnitte zwischen der Hyperbel und den Asymptoten einander gleich d.h. $A_1H_1 = A_2H_2$; $A_1H_2 = A_2H_1$ (siehe Fig. 1)
Hiemit: Konstruktion einer Hyperbel, von der die Asymptoten und ein Punkt gegeben sind.
Speziell gilt: Der Berührungspunkt einer Hyperbeltangente halbiert das zwischen den Asymptoten gelegene Stück derselben.

5.) Das von irgend einer Tangente und den beiden Asymptoten gebildete Dreieck hat konstanten Flächeninhalt.

6.) Für konjugierte Richtungen $(\varphi_1, \varphi_2)$ und die zugehörigen Halbmesser $(\alpha, \beta)$ gilt (vgl. Fig. 1):

$$tg\,\varphi_1 \cdot tg\,\varphi_2 = \frac{b^2}{a^2} \qquad \alpha^2 - \beta^2 = a^2 - b^2 \qquad \alpha\beta \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = ab$$

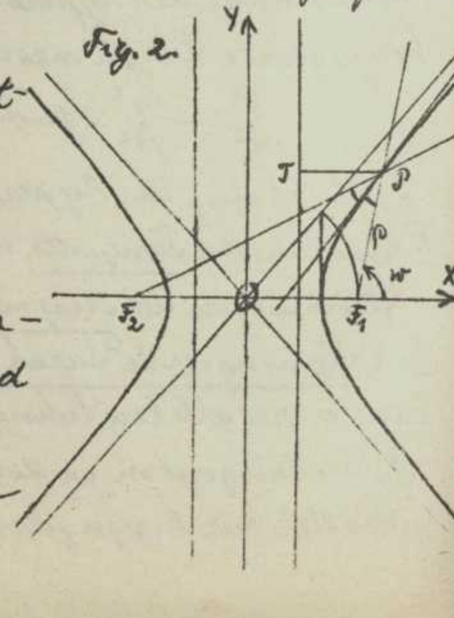
7.) Jede Asymptotenrichtung ist zu sich selbst konjugiert.

IV. 1.) Die Brennpunkte liegen auf der Achse der Hyperbel beiderseits vom Mittelpunkt im Abstand $c = \sqrt{a^2+b^2}$.
Für einen beliebigen Hyperbelpunkt ist $PF_2 - PF_1 = 2a$ (vgl. Fig. 2)

2.) Die Winkel zwischen den Brennstrahlen werden durch Tangente und Normale halbiert.

3.) Jedem Brennpunkt ist eine zur

Fig. 2.



Scheiteltangente parallele Direktrise zugeordnet von der Eigenschaft, daß $F_1P : PT = \varepsilon$.

Die Scheitelgleichung ist für die
Parabel: $y^2 = 2px$,
Ellipse: $y^2 = 2px - \frac{b^2}{a^2}x^2$,
Hyperbel: $y^2 = 2px + \frac{b^2}{a^2}x^2$, wobei $p = \frac{b^2}{a}$.

## Aufgaben.

1.) Die Asymptoten einer Hyperbel, deren reelle Achse $2a$ ist, bilden einen Winkel von 120°. Die Scheitel seien $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$. Auf der positiven $x$achse liegt im Abstand $a$ von $B$ der Punkt $C$. Man zeige, daß für einen beliebigen Hyperbelpunkt $P$ gilt: $\sphericalangle PCB = 2 \sphericalangle PAB$. Wie läßt sich dies zur exakten Dreiteilung eines Winkels verwerten?

2.) Man berechne die Gleichung der Verbindungsgeraden der Berührungspunkte der von dem Punkt $P_1(x_1, y_1)$ an die Hyperbel $x^2/a^2 - y^2/b^2 - 1 = 0$ gezogenen Tangenten und beweise, daß sich diese Gerade um einen Punkt dreht, wenn $P_1$ auf einer Geraden wandert. {Verwertung der Parameterform.}

3.) Gegeben die Hyperbel $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$. Man zeichne ihre Asymptoten und gebe deren Gleichung an, sowie die Gleichung der konjugierten Hyperbel; ferner zeichne man die Brennpunkte, gebe die Gleichung der Tangente und Normale in den Punkten, deren $x = 5$ ist, an; man transformiere die Hyperbelgleichung auf die Asymptoten als Achsen.

4.) Die Asymptoten einer Hyperbel sind $x+2y=0$ und $x-2y=0$. Weiter soll der Punkt $(3, 1)$ auf der Hyperbel liegen. Man gebe die Gleichung der Hyperbel an.

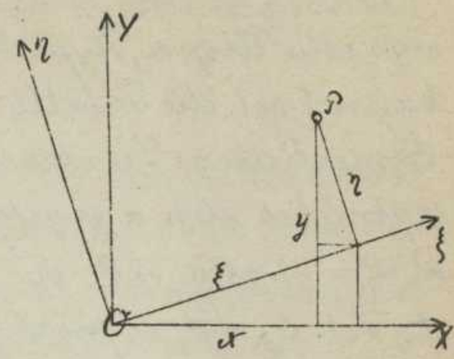
5.) Von einer Hyperbel sind eine Asymptote und drei Punkte gegeben. Man konstruiere die zweite Asymptote sowie die Achsen der Größe und Richtung nach.

---

9. I. 11. Nr. 8

# Höhere Mathematik I.

## I. Transformation der Koordinaten.




Für zwei gegen einander um den Winkel $\alpha$ verdrehte Koordinatensysteme $(X, Y)$ und $(\xi, \eta)$ gilt:

$$x = \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha \qquad \xi = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$
$$y = \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha. \qquad \eta = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Bemerkung: $x^2+y^2$; $x_1x_2+y_1y_2$, $x_1y_2-y_1x_2$ heißen Invarianten gegenüber einer Drehung des Koordinatensystems, weil $x^2+y^2=\xi^2+\eta^2$; $x_1x_2+y_1y_2 = \xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2$; $x_1y_2-y_1x_2=\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2$.

## II. Die allgemeinste Gleichung 2. Grades ist

$$\mathfrak{A}x^2+2\mathfrak{B}xy+\mathfrak{C}y^2+2\mathfrak{D}x+2\mathfrak{E}y+\mathfrak{F}=0 \qquad (1)$$

Durch die Parallelverschiebung des Koordinatensystems

$$x = a+\zeta \qquad a = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{E}-\mathfrak{C}\mathfrak{D}}{\Delta_2} \qquad b = \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{D}-\mathfrak{A}\mathfrak{E}}{\Delta_2} \qquad \Delta_2 = \mathfrak{A}\mathfrak{C}-\mathfrak{B}^2$$
$$y = b+\vartheta$$

läßt sich (1) auf die Form bringen:

$$\mathfrak{A}\zeta^2+2\mathfrak{B}\zeta\vartheta+\mathfrak{C}\vartheta^2+\frac{\Delta_3}{\Delta_2}=0 \quad (2) \qquad \Delta_3=\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{F}+2\mathfrak{B}\mathfrak{D}\mathfrak{E}-\mathfrak{A}\mathfrak{E}^2-\mathfrak{B}^2\mathfrak{F}-\mathfrak{C}\mathfrak{D}^2.$$

Die ausgeführte Transformation ist nur möglich für $\Delta_2 \neq 0$.

Ist also $\Delta_2 \neq 0$, so hat die vorgelegte Kurve einen Mittelpunkt
$\Delta_2 = 0$, " keinen ".

1.) Ist $\Delta_2 \neq 0$, so läßt sich durch die Transformation

$$\zeta = \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}-\mathfrak{C}}$$
$$\vartheta = \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha$$

d. h. durch eine Drehung des Koordinatensystems die Gleichung (2) auf die Form bringen:

$$\mathfrak{A}_1\xi^2+\mathfrak{C}_1\eta^2+\frac{\Delta_3}{\Delta_2}=0 \quad (3), \qquad \left.\begin{matrix}\mathfrak{A}_1\\ \mathfrak{C}_1\end{matrix}\right\}=\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{C}}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\mathfrak{A}+\mathfrak{C})^2-4(\mathfrak{A}\mathfrak{C}-\mathfrak{B}^2)};$$

was eine Ellipse, Hyperbel oder ein imaginärer Kegelschnitt sein kann [vgl. die Tabelle unten]

Bemerkung: Die Ausdrücke $\mathfrak{A}+\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{C}-\mathfrak{B}^2$ sind Invarianten gegenüber den ausgeführten Transformationen d.h. es ist $\mathfrak{A}_1+\mathfrak{C}_1=\mathfrak{A}+\mathfrak{C}$; $\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1-\mathfrak{B}_1^2=\mathfrak{A}\mathfrak{C}-\mathfrak{B}^2$.

2.) Ist $\Delta_2=0$, so führt man zweckmäßig zuerst die eben angegebene Drehung aus: $\left\{\begin{matrix}x=\xi\cos\alpha-\eta\sin\alpha\\ y=\xi\sin\alpha+\eta\cos\alpha\end{matrix}\right.$ $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}-\mathfrak{C}}$, wodurch nicht nur der Koeffizient von $\xi\eta$, sondern auch derjenige von $\eta^2$ verschwindet und (1) übergeht in:

$$\mathfrak{A}_1\cdot\xi^2+2\mathfrak{D}_1\cdot\xi+2\mathfrak{E}_1\cdot\eta+\mathfrak{F}=0.$$

Für $\mathfrak{E}_1\neq 0$ läßt sich dies schreiben:

$$\left(\xi+\frac{\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{A}_1}\right)^2+2\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{A}_1}\left(\eta+\frac{\mathfrak{F}}{2\mathfrak{E}_1}-\frac{\mathfrak{D}_1^2}{2\mathfrak{E}_1\mathfrak{A}_1}\right)=0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{x}^2+\frac{2\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{A}_1}\mathfrak{y}=0.$$

Das ist eine Parabel.

Für $\mathfrak{E}_1=0$ läßt sich die Gleichung schreiben

$$\left(\xi+\frac{\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{A}_1}\right)^2+\frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{F}-\mathfrak{D}_1^2}{\mathfrak{A}_1^2}=0$$

Dies ist ein Geradenpaar. [vgl. die Tabelle unten].

| | Eigentl. Kurve II. Ordn. $\Delta_3\neq 0$ | Zerfallende Kurve II. Ordn. $\Delta_3=0$ |
|---|---|---|
| $\Delta_2>0$ | Ellipse oder (1) Imaginäre Kurve | Imaginäres Paar sich schneid. Geraden |
| $\Delta_2<0$ | Hyperbel | Reelles Paar sich schneid. Geraden |
| $\Delta_2=0$ | Parabel | Paralleles Geradenpaar. (2) |

zu (1): $\Delta_3\neq 0$ $\Delta_2>0$

$\mathfrak{A}\cdot\Delta_3>0$ oder $(\mathfrak{C}\cdot\Delta_3>0)$ Imagin. Kurve

$\mathfrak{A}\cdot\Delta_3<0$ " $\mathfrak{C}\cdot\Delta_3<0$ Ellipse.

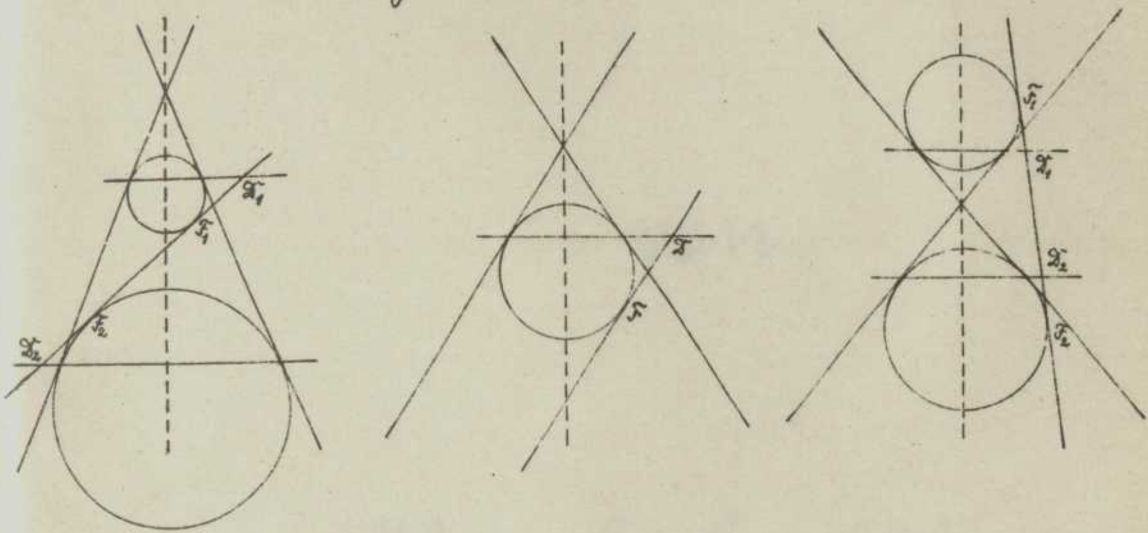
zu (2): $\Delta_3=0$ $\Delta_2=0$

$\mathfrak{A}\mathfrak{F}-\mathfrak{D}^2+\mathfrak{C}\mathfrak{F}-\mathfrak{E}^2\left\{\begin{matrix}>\\<\\=\end{matrix}\right\}0$ 2 imag. ∥ Gerade. / 2 reelle ∥ " . / 1 Doppelgerade.

An Hand vorstehender Zusammenstellung läßt sich die Art der vorgelegten Kurve II. Ordnung ohne Ausführung der angegebenen Transformationen bestimmen.

III. <u>Satz von Dandelin-Quetelet.</u>

Ein senkrechter Kreiskegel wird von einer beliebigen Ebene nach einer Kurve II. Ordnung geschnitten. Die Brennpunkte sind die Berührungspunkte derjenigen Kugeln, welche den Kegelmantel in einem Kreis und außerdem die Schnittebene berühren.




Ellipse. Parabel. Hyperbel.

$\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ sind die Leitlinien; $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ die Brennpunkte.

## <u>Aufgaben.</u>

I. Man diskutiere folgende Kurven 2. Ordnung:

1.) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x + 1 = 0$

2.) $2y^2 + 2xy + x = 0$

3.) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 6y + 9 = 0.$

II. $$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}.$$

1.) Man zeige, daß diese Gleichung einen Kegelschnitt darstellt.

2.) Man bestimme die Art des Kegelschnitts.

3.) Man untersuche seine Lage zu den Koordinatenachsen

4.) Man bestimme die Koordinaten des Berührpunktes einer Tangente, die mit der X-achse den Winkel $\varphi$ einschließt (Vorprüfung W. S. 1906).

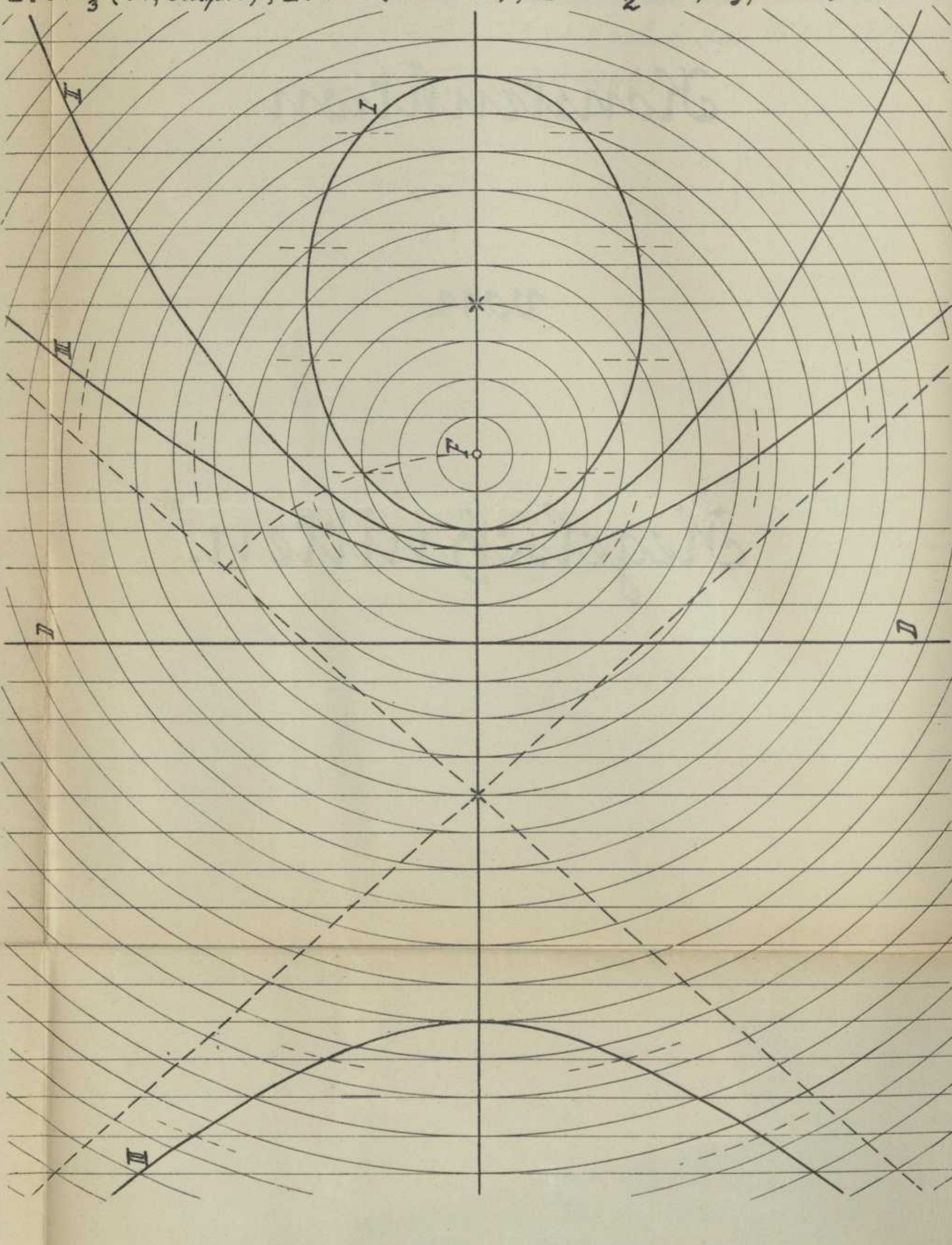
# Konstruktion

von

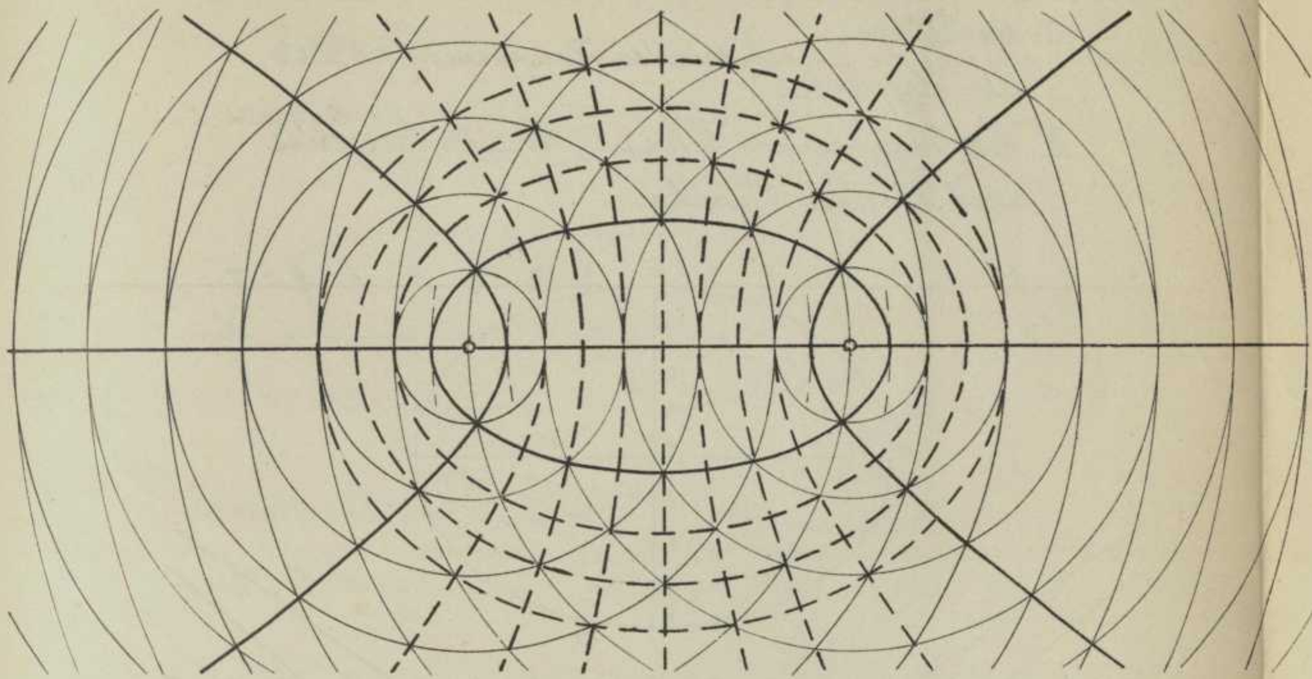
# Kegelschnitten.

Kegelschnitte aus einer Direktrise D, dem zugehörigen Brennpunkt F und dem Verhältnis der Abstände von F und von D (numerische Excentricität $= \varepsilon = \frac{e}{a}$)

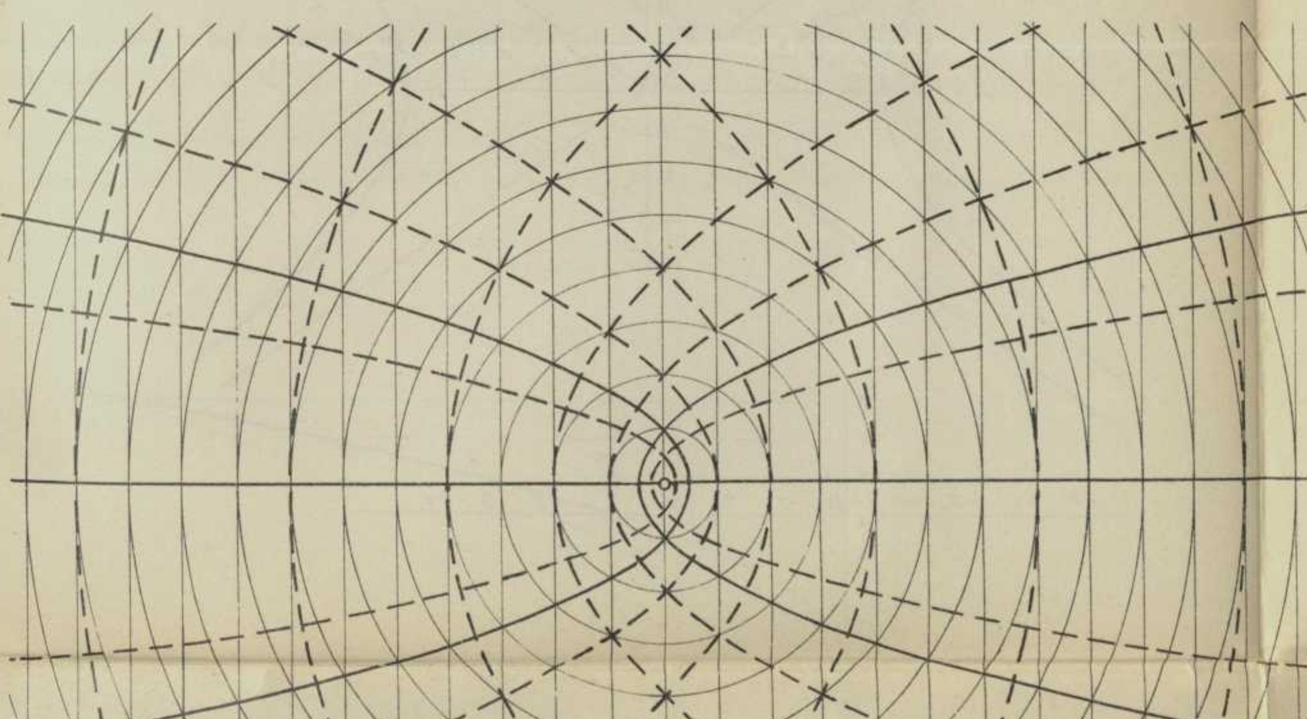
I. $\varepsilon = \frac{2}{3}$ (< 1, Ellipse); II. $\varepsilon = 1$ (Parabel); III. $\varepsilon = \frac{3}{2}$ (> 1, Hyperbel).



Confocale Ellipsen und Hyperbeln.

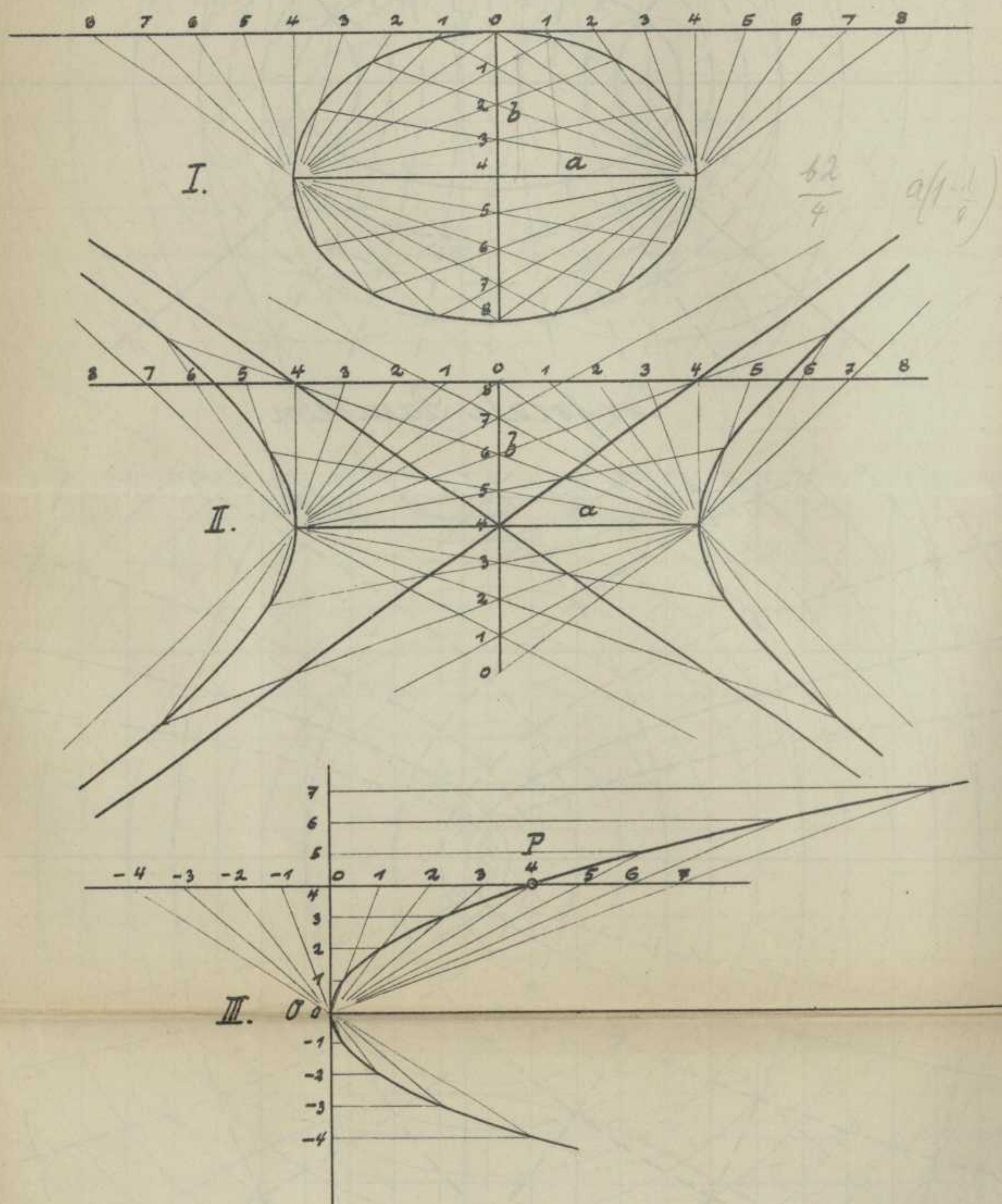


Confocale Parabeln.



# Konstruktionen durch Geradenbüschel.

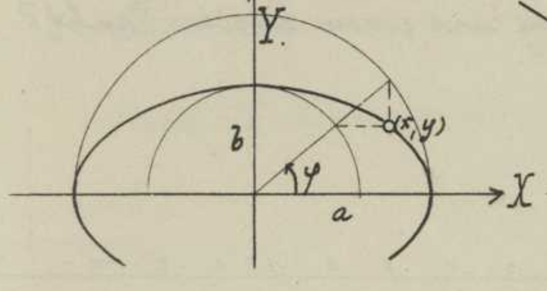
I. der Ellipse
II. der Hyperbel } aus den Hauptaxen 2a u. 2b.
III. der Parabel aus Scheitel, Scheiteltangente und einem Punkt.



# Parameter-Darstellung.

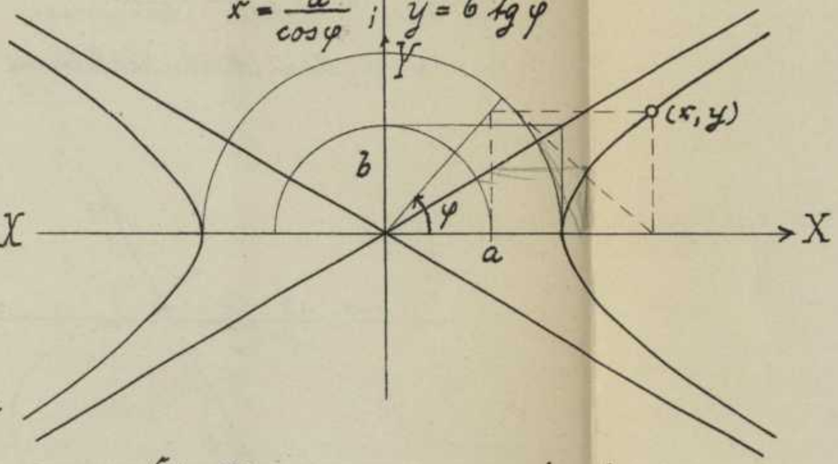
## I. der Ellipse

$x = a\cos\varphi$ ; $y = b\sin\varphi$

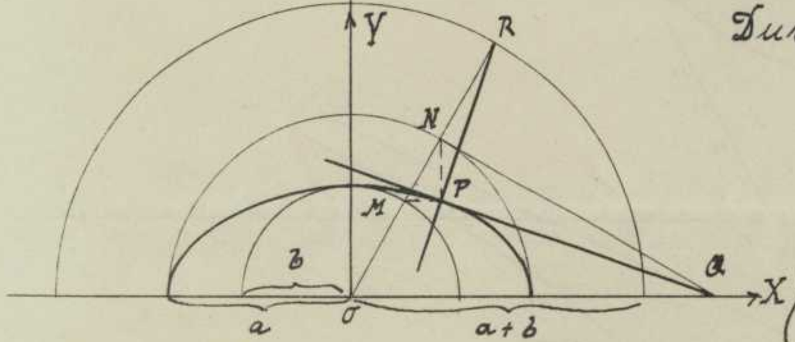



## I. der Hyperbel.

$x = \frac{a}{\cos\varphi}$ ; $y = b\,tg\,\varphi$

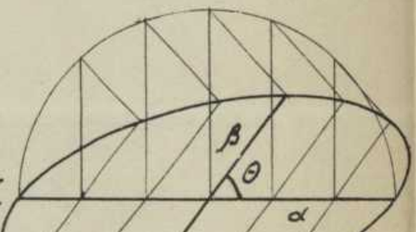



## Konstruktion der Tangente und Normale an die Ellipse.

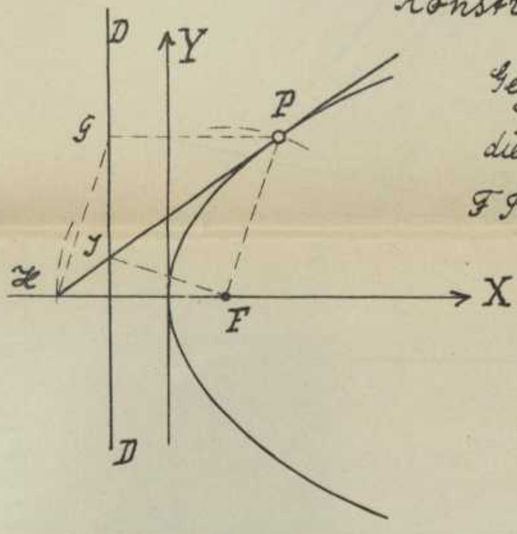



Man zieht PM und PN parallel den Axen und in N die Tangente an den Kreis; dann ist PQ die Tangente; RP die Normale.

## Die Ellipse aus 2 conjugierten Durchmessern und deren Winkel.




## Konstruktion der Parabeltangente.



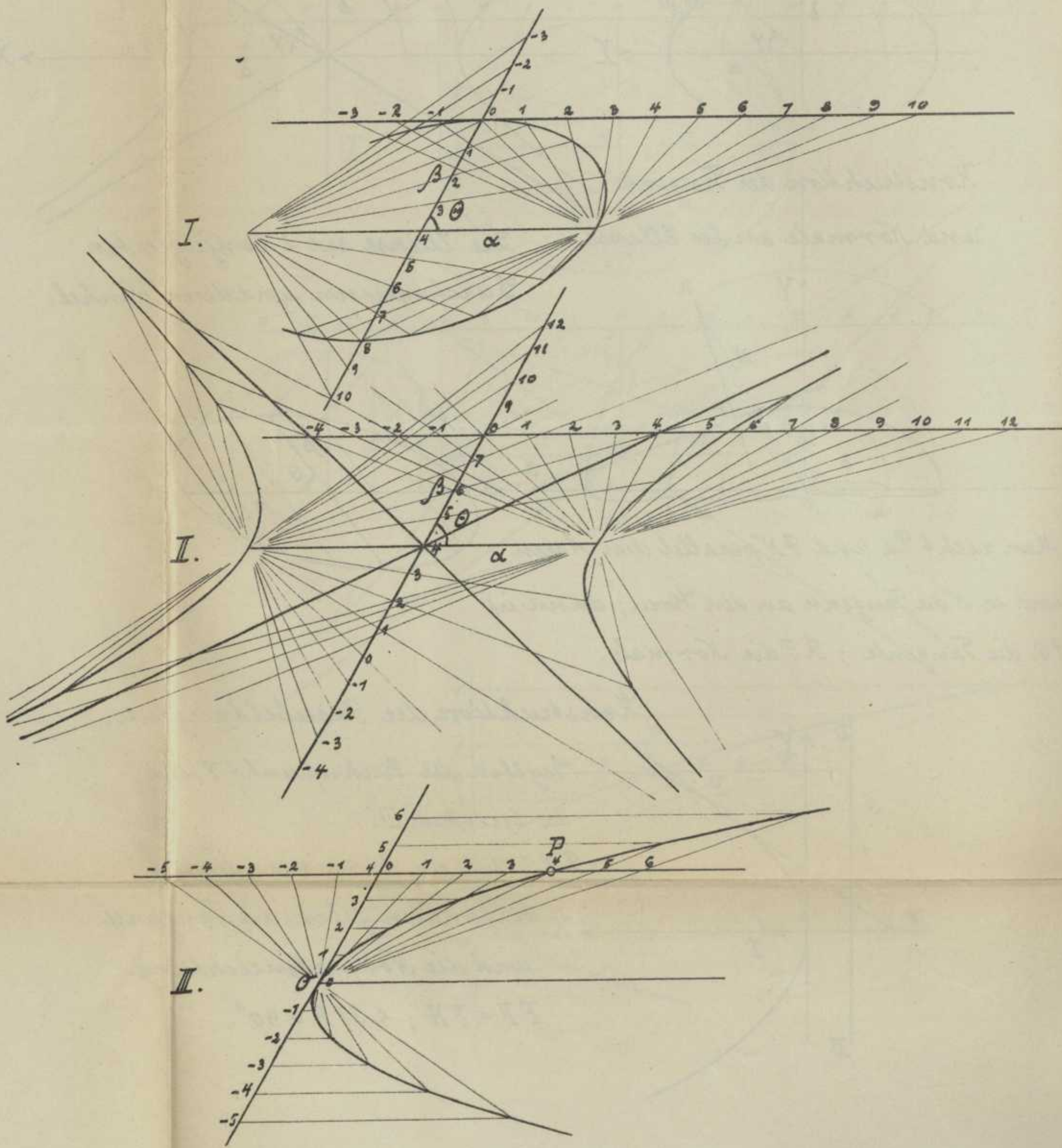

Gegeben der Brennpunkt F und die Directrix D.

FPGH ist ein Rhombus; dessen Diagonalen geben die Tangente und die Normalenrichtung.

$FP = FH$ ; $\sphericalangle JFP = 90^\circ$.

# Konstruktionen durch Geradenbüschel

I. der Ellipse } aus 2 conjugierten Durchmessern
II. der Hyperbel } $2\alpha$ und $2\beta$ und deren Winkel $\Theta$
III. der Parabel : aus einem Punkt O, der Tangente in O, der Axenrichtung und einem zweiten Punkt P.

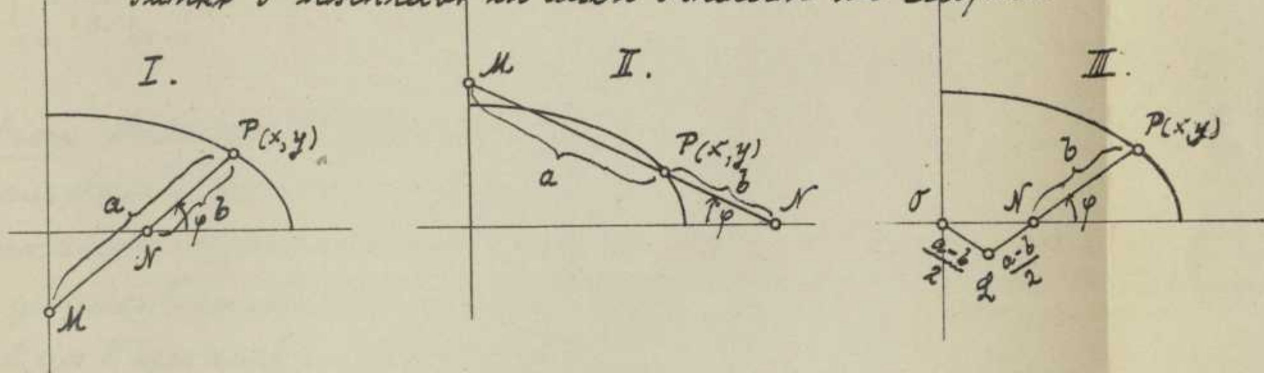


# Mechanische Erzeugung der Ellipse.

I u. II durch Führung zweier Punkte M u. N einer starren Stange in 2 Schlitzen.

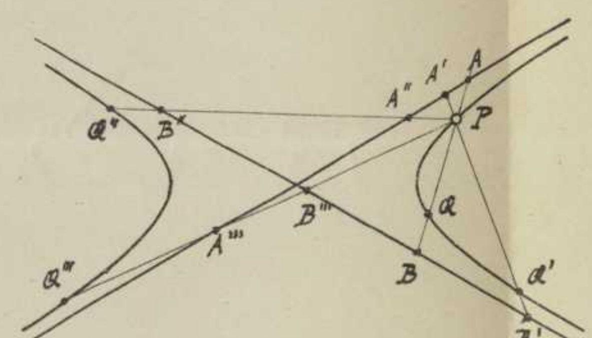
III. Gelenke in O und L, Schlitzführung von N.

Punkt P beschreibt in allen 3 Fällen die Ellipse.

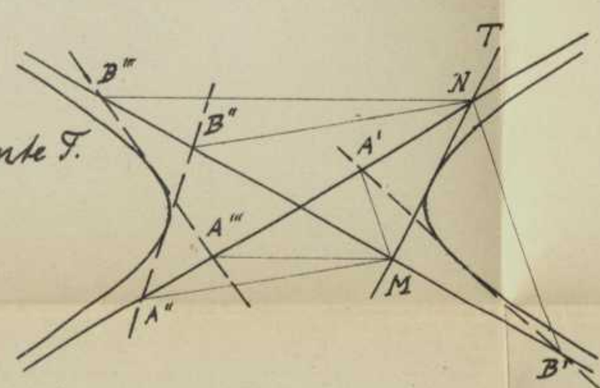



## Konstruktion der Hyperbel.

I. aus den beiden Asymptoten und einem Punkt P.
Man zieht PA beliebig durch P und macht PQ = AP.




II. aus den beiden Asymptoten und einer Tangente T.
Man zieht MA' beliebig durch M, dann NB' parallel MA', so ist auch A'B' eine Hyperbeltangente.



16. I. 11 Nr. 9

# Höhere Mathematik I.

## Elemente der Differentialrechnung.

### I. Zeichen der Differentialrechnung.

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$ heißt Differenzenquatient.

$$\left\{\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right\}_{x_2=x_1}=\left\{\frac{\Delta y}{\Delta x}\right\}_{\Delta x=0}=\left\{\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}\right\}_{h=0}=\frac{dy}{dx}$$ " Differentialquatient.

Definition. Unter dem Differentialquotient $dy/dx$ verstehen wir das, was aus dem Differenzenquotient wird, wenn wir in ihm die Differenz $\Delta x$ der Argumentwerte null setzen. – Die Geschwindigkeit eines in gerader Linie sich bewegenden Punktes ist der Differentialquotient des Weges nach der Zeit. – Ist die Gleichung einer Kurve in cartesischen Koordinaten durch $y=f(x)$ gegeben, so bestimmt der Wert des Differentialquotienten $dy/dx$ die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Kurventangente in diesem Punkt mit einer Parallelen zur X-achse einschließt.

### II. Differentiation rationaler Funktionen.

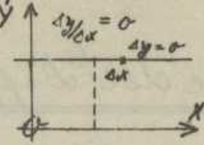
Die rationalen Funktionen teilt man in rational ganze und rational gebrochene ein.

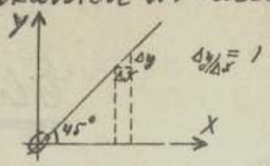
Definitionen. y heißt eine rationale ganze Funktion von x, wenn zu jedem x der zugehörige Wert von y aus x und Konstanten durch eine endliche Anzahl von Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen berechnet werden kann und zwar für alle Werte von x durch dieselben. – Bei einer rational gebrochnen Funktion kommt auch noch eine endliche Zahl von Divisionen in betracht.

Formeln. 1.) $\frac{dx^m}{dx} = m \cdot x^{m-1}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$; {vgl. II, 5b und III, 2}

speziell: 1a.) $\frac{dx^0}{dx} = 0$; der Differentialquotient einer Konstanten ist null.

1b.) $\frac{dx}{dx} = 1$;




2.) $\frac{d\,(a \cdot \varphi(x))}{dx} = a \cdot \frac{d\,\varphi(x)}{dx}$

3.) $\frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$, wo $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$.

Als Folgerung der Formeln 1.) bis 3.) ergibt sich:

$$\frac{d}{dx}(a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-2} x^2 + a_{m-1} x + a_m)$$
$$= m \cdot a_0 x^{m-1} + (m-1) a_1 x^{m-2} + (m-2) a_2 x^{m-3} + \ldots + 2 a_{m-2} x + a_{m-1}$$

4.) $\frac{d(u \cdot v)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$;

allgemein 4a.) $\frac{1}{u \cdot v \cdot w \cdot \ldots \cdot z} \cdot \frac{d(u \cdot v \cdot w \cdot \ldots \cdot z)}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dx} + \ldots + \frac{1}{z} \cdot \frac{dz}{dx}$.

Für $n$ Faktoren: $u = v = w = \ldots = z = \varphi(x)$ ergibt die letzte Formel:

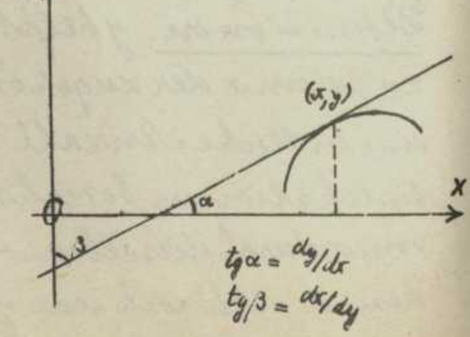
4b.) $\frac{d(u^n)}{dx} = n \cdot u^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$

5.) $\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v \cdot \frac{du}{dx} - u \cdot \frac{dv}{dx}}{v^2}$, wo $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$

speziell: 5a.) $\frac{d\left(\frac{1}{v}\right)}{dx} = -\frac{1}{v^2} \cdot \frac{dv}{dx}$

5b.) $\frac{d\left(\frac{1}{x^n}\right)}{dx} = -\frac{n}{x^{n+1}} = -n \cdot x^{-n-1}$; d.h. Formel (1) gilt auch für negative Exponenten.

5c.) $y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma x + \delta)^2}$.




## III. Differentiation irrationaler Funktionen.

1.) Inverse Funktionen. Ist $x = \varphi(y)$ die nach $x$ aufgelöste Funktion $y = f(x)$, so nennen wir die beiden Abhängigkeitsgesetze $f$ und $\varphi$ zu einander invers oder das eine die Umkehrung des anderen. — Für solche

Funktionen gilt die Differentiationsregel:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}.$$

2.) Differentiation einer Wurzel und einer Potenz mit beliebigem Exponenten.

$$\frac{d(x^{m/n})}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{m/n - 1}.$$

Daraus und aus II, 1 u. 5b folgt, daß

$$\frac{dx^m}{dx} = m \cdot x^{m-1}$$

für jede beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl gilt.

3.) Für die Differentiation einer Funktion y von einer Funktion u gilt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$ oder noch allgemeiner

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}.$$

## Aufgaben.

I.) Man gebe von der Funktion $y = \sqrt{1-x^2}$ die Herleitung des Differentialquotienten ohne Benützung der Differentiationsregeln.

II.) Man differentiiere die folgenden Funktionen und bringe die Resultate auf die angegebenen Formen:

1.) $y = 6x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 7.$
$dy/dx = 24x^3 - 2x^2 + \frac{1}{2}x.$

2.) $y = \frac{7x^6 + 15x^2 + 13}{6}.$
$dy/dx = x(7x^4 + 5).$

3.) $y = \frac{x}{x^2+1}$
$dy/dx = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

4.) $y = \frac{1}{1-x^2}$
$dy/dx = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$

5.) $y = \frac{1+x}{1-x}$
$dy/dx = \frac{2}{(1-x)^2}$

6.) $y = \frac{x^3}{(1-x^3)^2}$
$dy/dx = \frac{3x^2(1+x^3)}{(1-x^3)^3}$

7.) $y = x^2(5+8x^3)^4$
$dy/dx = 2x(5+8x^3)^3(5+56x^3)$

8.) $y = \frac{5-x^3+5x^6}{x^3}$
$dy/dx = \frac{15(x^6-1)}{x^4}$

9.) $y=(x^2+2)(3-x^3)$
$dy/dx = x(6-6x-5x^3)$

10.) $y=\frac{x^2+1}{x+1}$
$dy/dx = 1-\frac{2}{(x+1)^2}$

11.) $y=\sqrt{x^2-a^2}$
$dy/dx = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$

12.) $y = 1/\sqrt[3]{x}$
$dy/dx = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$

13.) $y=x^2\sqrt{4-x^2}$
$dy/dx = \frac{x(8-3x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$

14.) $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$
$dy/dx = \frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

15.) $y=\frac{1+\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}$
$dy/dx = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$

16.) $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
$dy/dx = \frac{-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}$

17.) $y=\frac{1+1/\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}$
$dy/dx = -\frac{2\sqrt{x}+7}{10x\sqrt{x}\sqrt[5]{x}}$.

18.) $y=(1+x^2)\sqrt{x^3-x}$
$dy/dx = \frac{1}{2\sqrt{x^3-x}}(7x^4-2x^2-1)$

19.) $y=\sqrt[3]{\frac{1-x}{(1+x)^2}}$
$dy/dx = \frac{x^2-2x-3}{3\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)^2}}$

20.) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\sqrt{x\sqrt{x}}$
$dy/dx = \frac{5}{12\sqrt[12]{x^7}}$

III.) Man differentiere die Funktion $y=\dfrac{\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2+1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}}{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}}$, nachdem man sie auf eine möglichst einfache Form gebracht hat. (Vorpr. W.S. 1910)

Resultat: $dy/dx = \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(x^2-\sqrt{x^4-1})$.

IV.) Unter welchem Winkel schneiden sich die Kurven $x=\sqrt{y}$ und $y=\sqrt{1-x^2}$?

V.) In welchen Punkten hat die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ Tangenten mit der Neigung 135° gegen die X-achse?

VI.) Man stelle möglichst gute Bilder der Funktionen

1.) $y=\frac{x^2-2}{x^2-3}$ 2.) $y=\frac{x-1}{x^2-4}$ 3.) $y=\frac{x^3}{x^2-a^2}$ 4.) $y=\frac{(x-1)^2}{(x-2)^2}$ 5.) $y=\frac{1}{1+x^2}$

mit Zuhilfenahme ihrer Differentialquotienten her.

# Höhere Mathematik I.

## Elemente der Integralrechnung.

1.) Definition. Wenn $dF(x)/dx = f(x)$ ist, so ist $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ und heißt das unbestimmte Integral von $f(x)$. — C ist eine willkürliche Konstante, welche bei Anwendungen vermöge gegebener Nebenbedingungen (Anfangsbedingungen) bestimmt werden kann. C heißt Integrationskonstante.

2.) Nennen wir Funktionen ohne sprungweise Änderung ihrer Funktionswerte stetige Funktionen, so gelten die Sätze:

a.) Eine stetige Funktion, deren Differentialquotient überall null ist, ist notwendig eine Konstante.

b.) Zwei stetige Funktionen, deren Differentialquotienten übereinstimmen, können sich nur durch eine additive Konstante unterscheiden.

3.) Reduktionsformeln der Integralrechnung.

a.) $\int (u \pm v)\,dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx$, wo $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$

b.) $\int a\,f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$.

c.) $\int u \cdot \frac{dv}{dx} \cdot dx = u \cdot v - \int v \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx$, wo $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$.

(Integration nach Teilen oder partielle Integration)

d.) $\int f(z)\,dz = \int f(\varphi(x)) \cdot \frac{dz}{dx} \cdot dx$. (Integration durch Substitution)

4.) Jede rationale ganze Funktion kann vermöge (3a), (3b) und

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{integriert werden.}$$

Letzter Formel gilt für alle positiven und negativen, ganzen und gebrochenen Werte von n, nicht dagegen für $n = -1$.

5.) Definition.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

definiert das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$; $F(x)$ bedeutet dabei irgend eine derjenigen Funktionen, deren Differentialquotient gleich $f(x)$ ist.

Anwendung. Der von einer Kurve $y=f(x)$, der X-achse und den Ordinaten $x=a$, $x=x$ begrenzte Flächeninhalt $F(x)$ ist: $F(x)=\int_a^x f(x)\,dx = F(x)-F(a)$.

6.) Sätze über bestimmte Integrale:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad \frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx = f(b)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0 \qquad \frac{d}{da}\int_a^b f(x)\,dx = -f(a).$$

## Aufgaben.

I. Man werte die nachstehenden Integrale aus und prüfe die beigeschriebenen Lösungen durch Differentiieren.

1.) $\int(5-12x^3-4x^7)\,dx = 5x-3x^4-\frac{1}{2}x^8+C$

2.) $\int\frac{x^2-x}{5}\,dx = \frac{x^2}{30}(2x-3)+C$

3.) $\int\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}+C$

4.) $\int\left(24x^5-\frac{7}{x^2}+\frac{10}{x^6}+5\right)dx = \frac{1}{x^5}(4x^{11}+5x^6+7x^4-2)+C$

5.) $\int\frac{5-x}{x\sqrt{x}}\,dx = -\frac{2}{\sqrt{x}}(x+5)+C$

6.) $\int\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right)^3dx = \frac{2\sqrt{x}}{35}(5x^3-21x^2+35x-35)+C$

7.) $\int\sqrt{x-1}\,dx = \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}+C$

8.) $\int\frac{dx}{\sqrt{ax-b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax-b}+C$

9.) $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}+C$

10.) $\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx = \frac{2}{9}(1+x^3)\sqrt{1+x^3}+C$

11.) $\int\frac{2+x}{\sqrt[3]{3-x}}\,dx = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{(3-x)^2}\left(\frac{19}{2}+x\right)+C$

12.) $\int\frac{x}{1+\sqrt{1+x}}\,dx = (1+x)\left(\frac{2}{3}\sqrt{1+x}-1\right)+C$

13.) $\int\frac{x\,dx}{(5x+3)^{5/2}} = -\frac{2(5x+2)}{25(5x+3)^{3/2}}+C.$

14.) $\int x\sqrt[3]{3x+7}\,dx = \left(\frac{x}{7}-\frac{1}{4}\right)(3x+7)\sqrt[3]{3x+7}+C$

II. Man werte die bestimmten Integrale aus:

1.) $\int_0^1 x^3\,dx$ 2.) $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{dx}{x^2}$ 3.) $\int_a^b x^n\,dx$ 4.) $\int_{-1}^3\sqrt{1+x}\,dx$

III. Man diskutiere den Verlauf der Kurve $y=x^3+4x^2-3x-18$. Es ist jenes Flächenstück zu berechnen, welches von einem über der X-achse liegenden Kurvenstück und der X-achse begrenzt wird, sowie das von der Kurve, der X-achse und der Ordinate $x=-5$ begrenzte.

IV. Man berechne das von den Kurven $y=x^3$, $y=\frac{1}{x^3}$ und der Ordinate $x=2$ begrenzte Flächenstück.

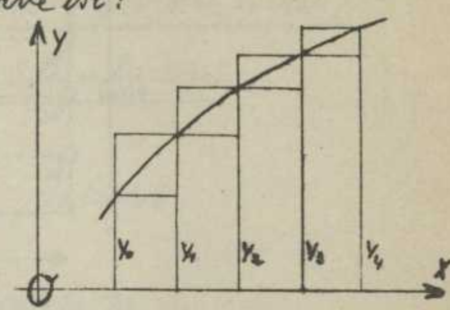
30.I.11. Nr. 11.

# Höhere Mathematik I.

## Näherungsweise Berechnung eines Flächeninhalts.

1.) Rechtecksformeln. Für eine steigende Kurve ist:

$$\int_a^b f(x)\,dx \begin{cases} < \dfrac{b-a}{n}\{y_1+y_2+\dots+y_n\} \\ > \dfrac{b-a}{n}\{y_0+y_1+\dots+y_{n-1}\}\end{cases}$$




2.) Trapezformel.

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{b-a}{n}\left\{\tfrac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\dots+y_{n-1}+\tfrac{1}{2}y_n\right\}.$$

3.) Simpson'sche Regel.

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \frac{b-a}{6n}\{y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\dots+2y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}\}$$

Speziell für drei Punkte, deren Abscissen $-1, 0, +1$ sind, gilt

$$\int_{-1}^{+1} y\,dx = \frac{b-a}{6}\{y_{-1}+4y_0+y_{+1}\} = \frac{1}{3}\{y_{-1}+4y_0+y_{+1}\}.$$

Diese Formel ist genau richtig für Parabeln 2. und 3. Ordnung.

Die Verwertung von Parabeln höherer Ordnung führt zu

4.) weiteren Formeln. Es gilt für eine

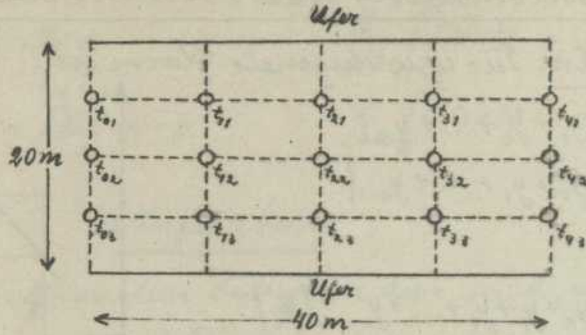
Parabel 4. bezw. 5. Ordnung: $\int_{-2}^{+2} y\,dx = \frac{b-a}{90}\{7(y_{-2}+y_{+2})+32(y_{-1}+y_{+1})+12y_0\}$

" 6. " 7. " $\int_{-3}^{+3} y\,dx = \frac{b-a}{840}\{41(y_{-3}+y_{+3})+216(y_{-2}+y_{+2})+27(y_{-1}+y_{+1})+272y_0\}$

oder nach einer von Weddle angegebenen Abänderung: $= \frac{b-a}{20}\{(y_{-3}+y_{+3})+5(y_{-2}+y_{+2})+(y_{-1}+y_{+1})+6y_0\}.$

## Aufgaben.

I. Ein Flußbett ist von parallelen, geradlinigen Ufern begrenzt. Die Tiefe des Wassers ist in fünf zu den Ufern senkrechten Querprofilen, die in Abständen von 10 m aufeinander folgen, gemessen worden. In jedem Profil wurden drei Lotungen in 5 m Abstand gemacht. Es soll




mittels der Simpsonschen Regel eine Näherungsformel zur Berechnung der zwischen den äußersten Querprofilen enthaltenen Wassermenge aus den 15 geloteten Wassertiefen aufgestellt werden. An den Ufern ist die Wassertiefe zu Null anzunehmen. (Die Kreise bezeichnen Lotungsstellen, die $t_{ik}$ die geloteten Wassertiefen)

[Vorprüfung, S.S. 1906]

II. Die Ellipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ habe die Achsen $a=12$ $b=5$. Man berechne die Länge des Ellipsenbogens zwischen der $y$-achse und der Ord. $x=10$.

III. Man gebe die Herleitung nachstehender Differentialquotienten:

1.) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)=\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2.$ 2.) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}.$

3.) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x}}}\right)=-\frac{7}{4x^2\sqrt[4]{x^3}}.$ 4.) $\frac{d}{dx}\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{x}}}=1/8\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{x}}}\cdot\sqrt{1-\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}.$

5.) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{a+x}}\right)=\frac{a}{x^2}\left(1+\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\right).$ 6.) $\frac{d}{dx}\sqrt{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{4\sqrt{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\,\sqrt{1-x^2}}.$

IV. Man werte die folgenden Integrale aus

1.) $\int\frac{3x\,dx}{(2+3x^2)^3}=-\frac{1}{4(2+3x^2)^2}+C$ 2.) $\int\frac{11x^3dx}{(5-9x^2)^3}=\frac{11\left(x^2-\frac{5}{6}\right)}{162(5-3x^2)^2}+C$

3.) $\int\frac{6x^5dx}{(5-7x^3)^3}=\frac{x^6}{5(5-7x^3)^2}+C$ 4.) $\int\sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx=4\sqrt{1+\sqrt{x}}\left\{\frac{(1+\sqrt{x})^2}{2}-\frac{1+\sqrt{x}}{3}\right\}+C.$

6. II. 11. Nr. 12.

# Höhere Mathematik I.

## Die Exponentialfunktion und der Logarithmus.

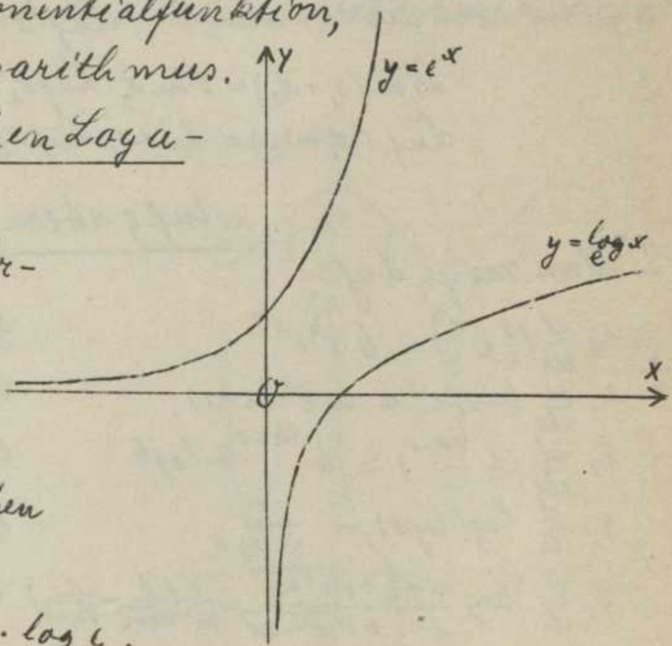
1.) Die Funktion $y = a^x$ heißt Exponentialfunktion.

Wählt man $a = e$ so, daß

$$\int_1^e \frac{d\eta}{\eta} = 1 \quad \text{d. h.} \quad e = 2{,}7183\ldots,$$ so heißt

$y = e^x = \exp x$ natürliche Exponentialfunktion,

$y = \log_e x$ natürlicher Logarithmus.




$e$ heißt Basis des natürlichen Logarithmussystems.

Bezeichnungen für den natürlichen Logarithmus:

log nat $x$; $\ln x$; $l x$; $\log x$.

2.) Übergang vom natürlichen Logarithmus zu einem solchen mit der Basis $a$.

$$\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \log_e x \cdot \log_a e.$$

$$\log_e 10 = \frac{1}{\log_{10} e} = 2{,}3026\ldots \qquad \log_{10} e = \frac{1}{\log_e 10} = 0{,}43429.$$

3.) Formeln: a.) $\dfrac{d \log x}{dx} = \dfrac{1}{x}$; $\quad \dfrac{d \log_a x}{dx} = \dfrac{1}{x \log a}$;

$$\frac{de^x}{dx} = e^x; \quad \frac{da^x}{dx} = a^x \log a; \quad \frac{de^{mx}}{dx} = m \cdot e^{mx}.$$

b.) $\int e^x dx = e^x + C$; $\int e^{mx} dx = \frac{1}{m} \cdot e^{mx} + C$; $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$;

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \log x + C & \text{für } x > 0 \\ \log(-x) + C & \text{"} \ x < 0 \end{cases} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log(x+\sqrt{x^2+1}) + C$$

$$\int x^m \cdot e^x\,dx = x^m \cdot e^x - m\int x^{m-1} e^x\,dx; \qquad \int x^m \log x\,dx = \frac{x^{m+1}\log x}{m+1} - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} + C.$$

4.) Die hyperbolischen Funktionen.

$$y = \operatorname{Cof} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \qquad \frac{d\operatorname{Cof} x}{dx} = \operatorname{Sin} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$y = \operatorname{Sin} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \qquad \frac{d\operatorname{Sin} x}{dx} = \operatorname{Cof} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Es gelten noch die Formeln: $\operatorname{Cof}^2 x - \operatorname{Sin}^2 x = 1$

$$\operatorname{Sin}(x_1 + x_2) = \operatorname{Sin} x_1 \cdot \operatorname{Cof} x_2 + \operatorname{Cof} x_1 \cdot \operatorname{Sin} x_2.$$

$$\operatorname{Cof}(x_1 + x_2) = \operatorname{Cof} x_1 \cdot \operatorname{Cof} x_2 + \operatorname{Sin} x_1 \cdot \operatorname{Sin} x_2.$$

## Aufgaben.

I. Man zeige, daß:

1.) $\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2} e^{x^4}\right) = 6x^3 e^{x^4}$

2.) $\frac{d}{dx}\left(6\sqrt[3]{e^{5x}}\right) = 10\sqrt[3]{e^{5x}}.$

3.) $\frac{d}{dx}(2-x)^2 e^x = x \cdot e^x \cdot (x-2)$

4.) $\frac{d}{dx} e^x\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x}\right) = \frac{e^x}{2x^4}(x^3 - 6).$

5.) $\frac{d}{dx}(6^{4x-1}) = 6^{4x-1} \cdot 4 \cdot \log 6$

6.) $\frac{d}{dx}(1-x)\log(1-x) = -1 - \log(1-x).$

7.) $\frac{d}{dx}\log(\log x) = \frac{1}{x\log x}$

8.) $\frac{d}{dx}\log\frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{1-x^2}$

9.) $\frac{d}{dx}\log\frac{x+1+\sqrt{x^2+2x}}{x^2-1+\sqrt{x^2-2x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)$

10.) $\frac{d}{dx}\log\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}.$

II. Man zeige durch Integrieren, daß

1.) $\int \frac{dx}{1-e^x} = \log\frac{e^x}{1-e^x} + C$

2.) $\int (e^{5x} + \sqrt{e^x})\,dx = \frac{e^{5x}}{5} + 2\sqrt{e^x} + C$

3.) $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(1+e^x)^3} + C.$

4.) $\int \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{3x}}\,dx = \frac{1-5e^{4x}}{5 \cdot e^{5x}} + C$

5.) $\int \frac{1-6(\log x)^2}{2x}\,dx = \log\sqrt{x} - (\log x)^3 + C$

6.) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+\log x}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+\log x)^2} + C$

7.) $\int x^3 \log x\,dx = \frac{x^4}{16}(\log x^4 - 1) + C$

8.) $\int \frac{\log x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}(1+\log x) + C$

9.) $\int x^3 e^x\,dx = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$

10.) $\int x^4 e^x\,dx = e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + C$

---

13. II. 11. Nr 13.

# Höhere Mathematik I.

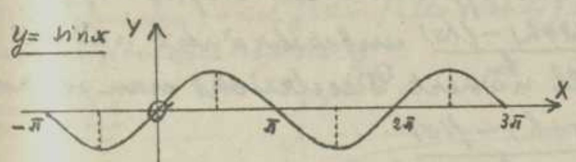
## I. Trigonometrische Funktionen.

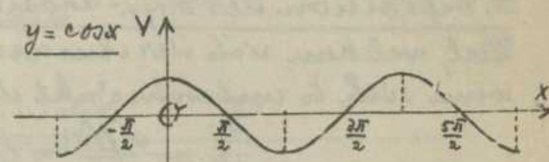
1.) Die Einheit des **Bogenmaßes** ist derjenige Winkel, dessen Bogen am Einheitskreis die Länge 1 hat. Er ist im Gradmaß $57^\circ 18'$!
Für die Umrechnung der beiden Winkelmaße ineinander gilt:

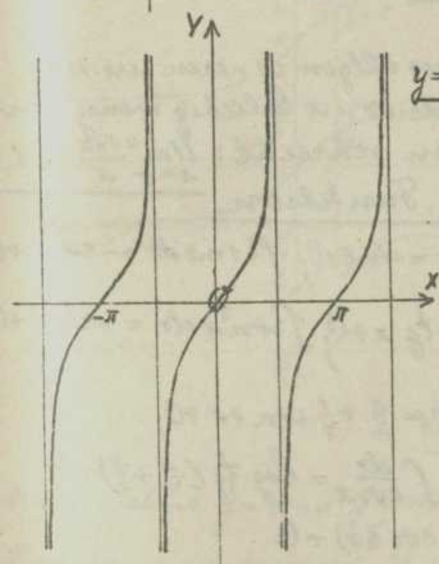
$\alpha^\circ \beta'$ sind im Bogenmaß: $\alpha \cdot \frac{\pi}{180} + \beta \cdot \frac{\pi}{180 \cdot 60} = \alpha \cdot 0{,}01745 + \beta \cdot 0{,}00029.$

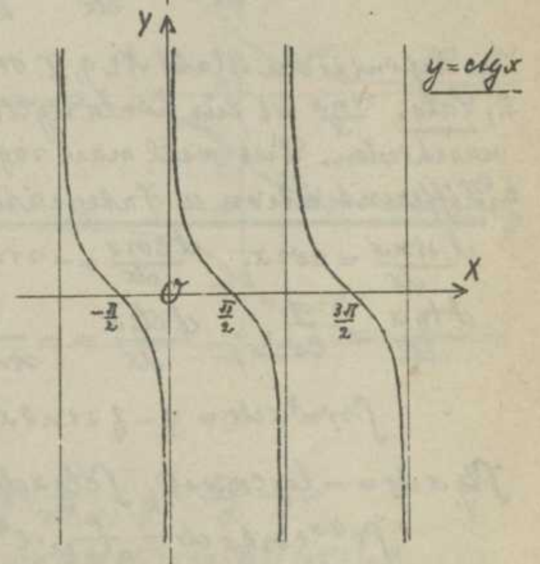
Der Bogen $x$ ist im Gradmaß: $\left(x \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ$ oder $\left(x \cdot \frac{180 \cdot 60}{\pi}\right)'$

2.) In der Analysis bedeutet $\sin x$ den Sinus desjenigen Winkels, der im Bogenmaß gemessen die Größe $x$ hat. Das gleiche gilt für die anderen trig. Funktionen.




3.) Eine Funktion, welche die Eigenschaft hat, ihren Funktionswert nicht zu ändern, wenn man die unabhängige Variable um eine bestimmte Konstante a vermehrt od. vermindert, heißt eine periodische Funktion mit der Periode a.

$y=\sin x$ und $y=\cos x$ sind periodische Funktionen von der Periode $2\pi$.
$y=\mathrm{tg}\,x$ " $y=\mathrm{ctg}\,x$ " " " " " " $\pi$.

Es gelten die Beziehungen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$ | $\sin(x+\pi)=-\sin x$ | $\sin(x+\frac{3\pi}{2})=-\cos x$ | $\sin(x+2\pi)=\sin x$ | $\sin(-x)=-\sin x$ |
| $\cos(x+\frac{\pi}{2})=-\sin x$ | $\cos(x+\pi)=-\cos x$ | $\cos(x+\frac{3\pi}{2})=\sin x$ | $\cos(x+2\pi)=\cos x$ | $\cos(-x)=\cos x$ |
| $\mathrm{tg}(x+\frac{\pi}{2})=-\mathrm{ctg}\,x$ | $\mathrm{tg}(x+\pi)=\mathrm{tg}\,x$ | $\mathrm{tg}(x+\frac{3\pi}{2})=-\mathrm{ctg}\,x$ | $\mathrm{tg}(x+2\pi)=\mathrm{tg}\,x$ | $\mathrm{tg}(-x)=-\mathrm{tg}\,x$ |
| $\mathrm{ctg}(x+\frac{\pi}{2})=-\mathrm{tg}\,x$ | $\mathrm{ctg}(x+\pi)=\mathrm{ctg}\,x$ | $\mathrm{ctg}(x+\frac{3\pi}{2})=-\mathrm{tg}\,x$ | $\mathrm{ctg}(x+2\pi)=\mathrm{ctg}\,x$ | $\mathrm{ctg}(-x)=-\mathrm{ctg}\,x$ |

| $x$ | $0$ | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ | $2\pi/3$ | $5\pi/6$ | $\pi$ | $3\pi/2$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
| $\mathrm{tg}\,x$ | $0$ | $\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $\infty$ | $-\sqrt{3}$ | $-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}$ | $0$ | $\infty$ | $0$ |
| $\mathrm{ctg}\,x$ | $\infty$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}$ | $0$ | $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | $-\sqrt{3}$ | $\infty$ | $0$ | $\infty$ |

4.) Die Differentiation der trigonom. Funktionen erfordert eine neue, erweiterte Definition des Diff.-Quotienten: Der Diff.-Quotient von $f(x)$ ist jener Wert, welchem sich der Ausdruck $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ unbeschränkt nähert, wenn sich $h$ unbeschränkt der Null nähert. Dies drückt man so aus,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h=0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Die Definition Blatt Nr. 9, I ordnet sich dieser allgemeineren unter.

5.) Satz. $\frac{\sin x}{x}$ ist für hinlänglich kleine Werte von $x$ beliebig wenig von eins verschieden. Dies will man sagen, wenn man schreibt: $\lim\limits_{x=0}\frac{\sin x}{x}=1$.

6.) Differentiation u. Integration trigonom. Funktion.

$$\frac{d\sin x}{dx}=\cos x;\quad \frac{d\cos x}{dx}=-\sin x \qquad \int\cos x\,dx=\sin x+C;\ \int\sin x\,dx=-\cos x+C$$

$$\frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x};\quad \frac{d\,\mathrm{ctg}\,x}{dx}=-\frac{1}{\sin^2 x} \qquad \int\frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}\,x+C;\ \int\sin^2 x\,dx=-\mathrm{ctg}\,x+C.$$

$$\int\sin^2 x\,dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C;\quad \int\cos^2 x\,dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C;$$

$$\int\mathrm{tg}\,x\,dx=-\log\cos x+C;\ \int\mathrm{ctg}\,x\,dx=\log\sin x+C;\ \int\frac{dx}{\cos x}=\log\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+C$$

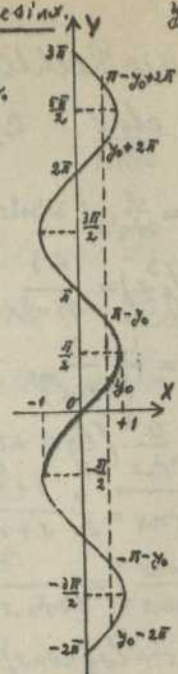
$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{a^2+b^2}\cdot e^{ax}\cdot(b\sin bx+a\cos bx)+C$$

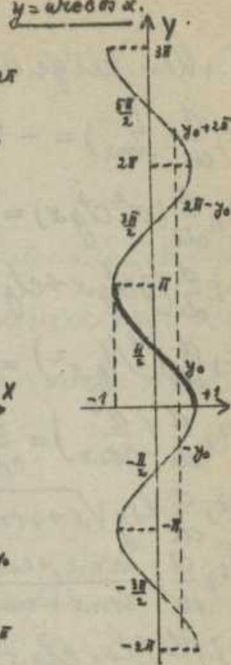
$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{1}{a^2+b^2}\cdot e^{ax}\cdot(-b\cos bx+a\sin bx)+C.$$

Satz. Jedes Integral aus einer rationalen Funktion von $\sin x$ und $\cos x$ kann man durch die Substitution $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ in das Integral einer rationalen Funktion von $t$ überführen, d. h.: $\int R(\cos x, \sin x)\,dx=\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$.

## II. Zyklometrische Funktionen heißen

die zu den trigon. Funktionen inversen Funktionen. Sie sind unendlich vieldeutig. Eindeutigkeit wird erzielt, indem man sogenannte „Hauptwerte" definiert: Dieselben sind in den Figuren durch die stärker ausgezogenen zugehörigen Kurven kenntlich gemacht.




Formeln.

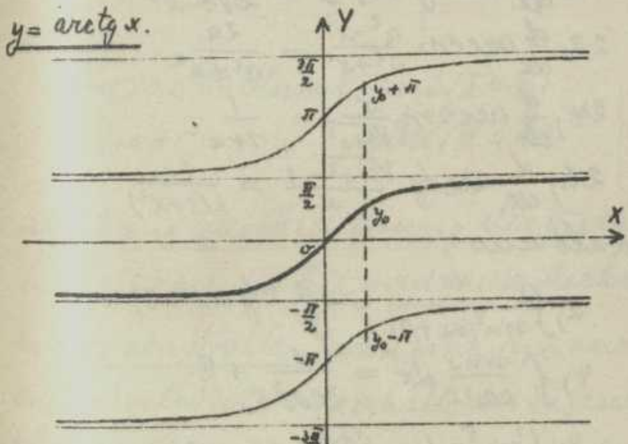
$$\frac{d\,\mathrm{arc\,sin}\,x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,; \qquad \frac{d\,\mathrm{arc\,tg}\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

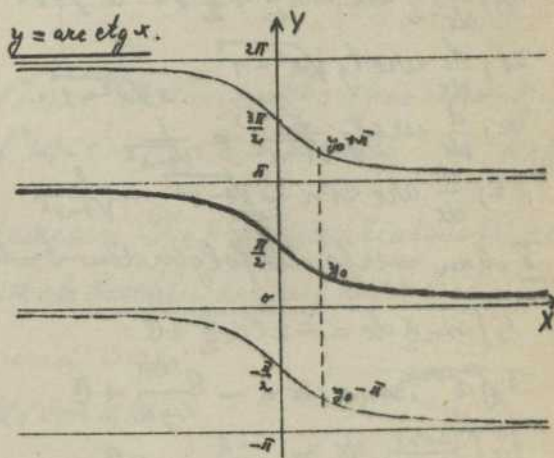
$$\frac{d\,\mathrm{arc\,cos}\,x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,; \qquad \frac{d\,\mathrm{arc\,cotg}\,x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{arc\,sin}\,x + C = -\mathrm{arc\,cos}\,x + C.$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arc\,tg}\,x + C = -\mathrm{arc\,cotg}\,x + C.$$

(Die Formeln sind jedenfalls richtig, wenn rechts die Hauptwerte stehen.)




## Aufgaben.

I. Man zeichne $y = \sin x$; $y = \sin 2x$; $y = \sin 3x$; $y = \frac{1}{\sin x}$; $y = \lg \sin x$

II. Man beweise daß $\mathrm{arc\,sin}\,\frac{28}{53} + \mathrm{arc\,sin}\,\frac{45}{53} = \frac{\pi}{2}$; $\mathrm{arc\,tg}\,(2-\sqrt{3}) + \mathrm{arc\,tg}\,(2+\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$

III. Man drücke die nachstehenden Funktionen durch $\mathrm{arc\,sin}\,x$ aus:

1, $\mathrm{arc\,cos}\,\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}$ 2, $\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 3, $\mathrm{arc\,sin}\,\frac{1}{2}(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})$.

IV. Man zeige die Richtigkeit folgender Differentiationsresultate:

1.) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = -\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x}$ 2.) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$ 3.) $\frac{d\, 2\sin^2\frac{x}{2}}{dx} = \sin x$

4.) $\frac{d}{dx}(x^2 \operatorname{ctg} x) = \frac{x}{\sin^2 x}(\sin 2x - x)$ 5.) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{x^n}\right) = -\frac{x\sin x + n\cos x}{x^{n+1}}$

6.) $\frac{d}{dx}(3\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^3 x) = \frac{-3}{\sin^4 x}$ 7.) $\frac{d}{dx}\sin(x\cos x) = \cos(x\cos x)(\cos x - x\sin x)$

8.) $\frac{d}{dx}(1/\operatorname{tg} x^2) = -\frac{2x}{(\sin x^2)^2}$ 9.) $\frac{d}{dx}(1/\operatorname{tg}^2 x) = -\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$ 10.) $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x) = \frac{4}{\sin^2 2x}$

11.) $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\cos x}\right) = \frac{a^x}{\cos x}(\lg a + \operatorname{tg} x)$ 12.) $\frac{d}{dx}\left(\log_{10}\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) = \frac{2\log_{10} e}{\cos x}$.

13.) $\frac{d}{dx}\log\sqrt{x+\sin x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\cos x}{x+\sin x}$ 14.) $\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{\sin^2 x} + \log\operatorname{tg} x + \lg\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{\sin^3 x\cdot\cos x}$.

15.) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right) = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$ 16.) $\frac{d}{dx}a^{\operatorname{tg} x} = a^{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{\lg a}{\cos^2 x}$.

17.) $\frac{d}{dx}(\log\operatorname{ctg} x + \log\sin x) = -\operatorname{tg} x$ 18.) $\frac{d}{dx}\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\cos x}$

19.) $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right) = \sqrt{a^2-x^2}$ 20.) $\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

21.) $\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ 22.) $\frac{d}{dx}\arccos\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2} = \frac{2a}{a^2+x^2}$.

23.) $\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 24.) $\frac{d}{dx}\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2}$

25.) $\frac{d}{dx}\arcsin 2x\sqrt{1-x^2} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$ 26.) $\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \frac{1}{2(1+x^2)}$

V. Man werte die folgenden Integrale aus:

1.) $\int\sin\frac{x}{2}\,dx = -2\cos\frac{x}{2} + C$ 2.) $\int\frac{dx}{\sin^2(\alpha x+\beta)} = -\frac{1}{\alpha}\operatorname{ctg}(\alpha x+\beta) + C$

3.) $\int a^{\cos x}\cdot\sin x\,dx = -\frac{a^{\cos x}}{\lg a} + C$ 4.) $\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx = \frac{1}{2\cos^2 x} + C$

5.) $\int\frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}\,dx = \frac{-2}{\sqrt{\sin x}} + C$ 6.) $\int\sin^5 x\,dx = \frac{\cos x}{15}(-15+10\cos^2 x - 3\cos^4 x) + C$

7.) $\int\operatorname{tg}^3 x\,dx = \log\cos x + \frac{1}{2\cos^2 x} + C$ 8.) $\int\frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right) + C$

9.) $\int\frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$ 10.) $\int\frac{(3+10x)\,dx}{(4+3x+5x^2)^2} = -\frac{1}{4+3x+5x^2} + C$

11.) $\int\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2 + C$ 12.) $\int\operatorname{arc\,ctg} x\,dx = x\operatorname{arc\,ctg} x + \log\sqrt{1+x^2} + C$

13.) $\int x\operatorname{arc\,tg} x\,dx = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg} x\,(1+x^2) - x\right) + C$ 14.) $\int\frac{x^2}{12+5x^2}\,dx = \frac{1}{5}\left(x - \frac{2}{5}\sqrt{15}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right) + C$.

20. II. 11. Nr 14.

# Höhere Mathematik I.

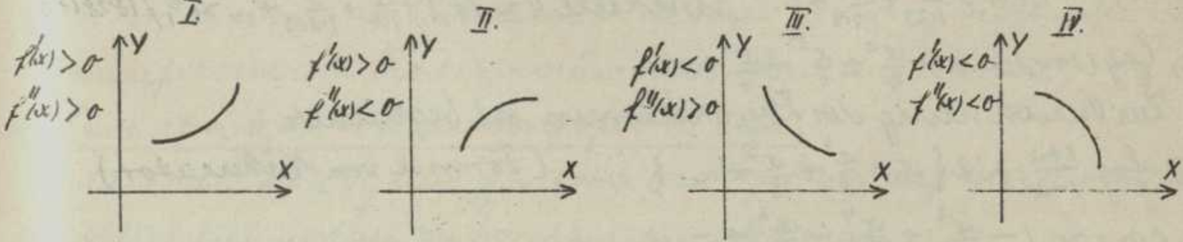
## 1.) Höhere Differentialquotienten.

$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ heißt als Funktion von $x$ I. Abgeleitete oder Derivierte von $f(x)$.

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{df'(x)}{dx} = f''(x)$ " II. Abgeleitete " Derivierte von $f(x)$

$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx} = f^{(n)}(x)$ " $n^{te}$ Abgeleitete " Derivierte von $f(x)$

### Geometrische Bedeutung der II. Abgeleiteten:

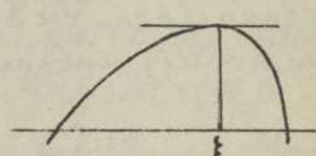



$f'(x)>0$: Die Kurve steigt (I. u. II.) $\quad$ $f''(x)>0$: Die Kurve ist konkav nach oben (I. u. III.)

$f'(x)<0$: " fällt (III. u. IV.) $\quad$ $f''(x)<0$: " konvex " (II. u. IV.)

Mechanische Bedeutung der II. Abgeleiteten: Der II. Differentialquotient des Weges nach der Zeit wird in der Mechanik als Beschleunigung definiert.

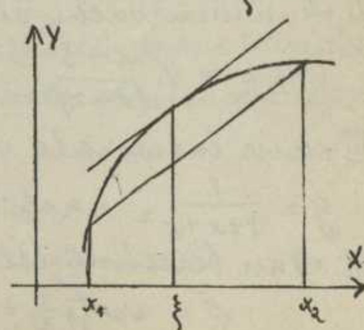
2.) Satz von Rolle. Wenn eine Funktion und ihre erste Abgeleitete innerhalb des Intervalls von $x_1$ bis $x_2$ sich stetig ändern und wenn $f(x_1)=0$ und $f(x_2)=0$ ist, so gibt es zwischen $x_1$ und $x_2$ mindestens einen Wert $x=\xi$ von der Art, daß $f'(\xi)=0$.




3.) Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

$$f(x) \sim f(x_1) + (x-x_1)\, f'(x_1)$$

$\sim$ bedeutet: „kann näherungsweise ersetzt werden durch."



4., Taylor'sche Formel.

$$f(x) \sim f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Die Maclaurin'sche Formel folgt hieraus als Spezialfall für $a=0$:

$$f(x) \sim f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1\cdot 2} f''(0) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

Die rationale ganze Funktion $n^{ten}$ Grades auf der rechten Seite hat mit der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x=a$ (Taylor'sche Formel) bezw. $x=0$ (Maclaurin'sche Formel) den Funktionswert sowie die n ersten Abgeleiteten gemein.

Spezielle Fälle:

a., Newton'sche Binomialformel.

$(1+x)^m \sim 1 + m\cdot x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3 + \dots$ ($m$ ist eine beliebige Zahl)

b.) $e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots$ ; speziell $e \sim 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots \sim 2{,}71828183$

c.) $\log_e (1+x) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \dots$

Zur Berechnung der Logaritumen ist bequemer:

$\log_e \frac{1+x}{1-x} \sim 2\left\{ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right\}$ (Formel von N. Mercator.)

d.) $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \dots$

e.) $\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \dots$

f.) $\arcsin x \sim x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5}{112}\cdot x^7 + \frac{35}{1152}\cdot x^9 + \dots$

g.) $\operatorname{arctg} x \sim x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - + \dots$

Sämtliche angegebene Entwicklungen sind genau richtig für $x=0$ und nur dafür. Die Entwicklungen von $e^x$, $\cos x$, $\sin x$ sind für alle Werte von $x$ brauchbar. Die Entwicklungen von $(1+x)^m$, $\log_e (1+x)$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ sind völlig unbrauchbar für $x > 1$.

## Aufgaben.

I. Man untersuche mit Hilfe der I. u. II. Abgeleiteten den Verlauf der Kurven:

1.) $y = 4\cdot\frac{x-3}{(x-2)^2}$ 2.) $y^2 = \frac{(c^2-x^2)^3}{c^2}$ 3.) $y = 2(e^x - e^{2x})$.

II. Man entwickle die Funktionen $y = \cos 3x$, $y = e^{\sin x}$, $y = \frac{1}{\cos x}$, $y = \log \cos x$, $y = \frac{1}{1+x+x^2}$ nach Potenzen von $x$.

III. Man berechne die Zahl $\pi$ mittels der Beziehungen

$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$ $\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$.

27. II. 11. Nr. 15

# Höhere Mathematik I.

## I. Maclaurin'sche Formel mit dem Lagrange'schen Rest.

$$f(x)=f(0)+x\cdot f'(0)+\frac{x^2}{1\cdot 2}f''(0)+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\underline{\underline{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)}}.$$

$\xi$ bedeutet eine zwischen $0$ und $x$ gelegene, nicht näher benannte Zahl, für welche die Formel genau richtig ist. Wählt man für $\xi$ einen solchen Wert, daß das Restglied den größtmöglichen Wert annimmt, so hat man eine obere Grenze, welche der wirklich auftretende Fehler nicht überschreiten kann.

## II. Division von Näherungsformeln.

1. Methode. Um $1/y$ aus $y \sim 1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3$ bis auf Glieder III. Ordnung einschließlich genau zu berechnen, setzt man

$$y \sim 1+z, \text{ wobei also } z=\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3.$$

Also wird $1/y \sim \frac{1}{1+z}=(1+z)^{-1} \sim 1-z+z^2-z^3$, wo man $z^2$ und $z^3$ bis auf Größen III. Ordnung genau zu berechnen hat.

2. Methode. Man setze $\frac{1}{y} \sim 1+Ax+Bx^2+Cx^3$; dann muß

$$(1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3)(1+Ax+Bx^2+Cx^3) \sim 1$$

bis auf Größen III. Ordnung einschließlich sein. Das liefert 3 Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Größen $A, B, C$.

Beginnt die vorgelegte Funktion mit einer beliebigen Konstanten oder dem linearen Glied $x$, so dividiert man zunächst mit dieser Konstanten bezw. $x$ durch und kann dann die eben besprochenen Methoden anwenden.

Mittels dieser Methoden kann man ableiten:

$$\operatorname{tg} x \sim x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\ldots \qquad \operatorname{cotg} x \sim \frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}-\ldots$$

$$\sec x=\frac{1}{\cos x} \sim 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\frac{277}{8064}x^8+\ldots$$

## III. Umkehrung von Näherungsformeln.

1. Methode. Für $y \sim x + \beta x^2 + \gamma x^3$ ist $x \sim y - \beta x^2 - \gamma x^3$ und die

1. Annäherung: $x \sim y$
2. " : $x \sim y - \beta y^2$
3. " : $x \sim y - \beta(y - \beta y^2) - \gamma x^3 = y - \beta y^2 + (2\beta - \gamma)x^3$

2. Methode. Man setze $x \sim y + B y^2 + C y^3$; dann muß

$$x \sim x + (\beta + B)x^2 + (\gamma + 2B\beta + C)x^3$$

sein bis auf Größen III. Ordnung einschließlich genau.[6] Das liefert 2 Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Größen $B$, $C$.

Ist die gegebene Funktion

$y \sim a_0 + \alpha x + \beta x^2 + \ldots$, so schreibt man dafür $\frac{y - a_0}{\alpha} \sim x + \frac{\beta}{\alpha} x^2 + \ldots$,

$y \sim x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \ldots$, " $\sqrt{y} \sim x(1 + \gamma x + \delta x^2)^{\frac{1}{2}} = x\left(1 + \frac{\gamma x + \delta x^2}{2} + \ldots\right)$

und kann die angegebenen Methoden anwenden.

## Aufgaben.

I. Man gebe für die inverse Funktion von $y = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ eine Näherungsformel an und leite aus den Näherungsformeln für $y = \sin x$ und $y = \operatorname{tg} x$ solche für die zugehörigen inversen Funktionen ab.

II. Man berechne die Näherungsformel für $y = e^{-x}$ aus derjenigen für $e^x$ durch Benützung von $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

III. Man leite durch Verwertung einerseits des impliziten andererseits des für $y$ expliziten Ausdrucks von $y^2 + y + x = 0$ eine Näherungsformel für $y$ ab.

IV. Man gebe Näherungsformeln für folgende Funktionen:

1.) $y = \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}$ 2.) $y = \frac{\log(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}}$ 3.) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$

6. III. 11. Nr. 16

# Höhere Mathematik I.

## I. Unbestimmte Formen.

Man sagt, eine Funktion erscheint für einen bestimmten Wert von $x$ in unbestimmter Form, wenn sich die Rechnung, welche der Funktionsausdruck fordert, für diesen Wert nicht ausführen läßt. Dabei können die unbestimmten Symbole

$\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0.\infty$; $\infty-\infty$ und $0^0$; $0^\infty$; $\infty^0$; $1^\infty$ auftreten.

1.) Bei algebraischen Funktionen führen 2 Methoden zu einem stetig (und das ist gerade für die Anwendungen wichtig) an die benachbarten Funktionswerte sich anschließenden Funktionswert:

a.) Durch algebraische Umformung (insbesondere durch Kürzen) kann man erreichen, daß der Ausdruck nicht mehr unbestimmt wird

b.) Man kann sich der Näherungsformeln bedienen. Die Entwicklung ist dabei immer so weit zu treiben, bis Glieder übrig bleiben, die sich nicht wegheben.

2.) Bei einer transzendenten Funktion $f(x)$, welche an einer Stelle $x = x_0$ eine unbestimmte Form annimmt, definiert man als Funktionswert an dieser Stelle den Grenzwert, dem sich diese Funktion nähert, wenn sich $x \to x_0$ nähert d. h.: $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Als Methode zur Berechnung solcher Unbestimmtheitstellen ergibt sich hieraus die Benützung von Näherungsformeln wie unter 1b.)

Diese Definition eines Funktionswertes an einer Unbestimmtheitsstelle umfaßt auch die für die algebraischen Funktionen gegebenen Definitionen.

3.) Funktionen, welche auf eine von den unbestimmten Formen: $0^0$; $0^\infty$; $\infty^0$; $1^\infty$ führen, müssen vor Anwendung der angegebenen Anweisungen logarithmiert werden. Dadurch erhält man für $0^{\infty}$ die Form $\infty.\infty$, für die übrigen dagegen $0.\infty$.

4.) Wichtige Grenzwerte, welche durch eine besondere Betrachtung bestimmt werden müssen.

a.) $\lim\limits_{x=+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$; $\lim\limits_{x=-\infty} \frac{e^{-x}}{x^n} = \pm\infty$ b.) $\lim\limits_{x=+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$; $\lim\limits_{x=-\infty} x^n \cdot e^x = 0$

c.) $\lim\limits_{x=+\infty} \frac{x^n}{\log x} = \infty \quad n > 0$ d.) $\lim\limits_{x=0} x^n \log x = 0 \quad n > 0$

## II. Maxima und Minima. — Exzeptionelle Fälle.

1.) Ein Maximum bezw. Minimum einer Funktion ist ein Funktionswert, der größer bezw. kleiner als die benachbarten Funktionswerte ist. Tritt innerhalb eines gewissen Bereiches sicher ein Maximum auf und hat $f'(x)=0$ innerhalb dieses Intervalls nur eine einzige Lösung, so ist dies die Stelle des maximalen Funktionswertes.

Allgemein gilt: Die Funktion $f(x)$ hat an der Stelle $x=x_0$ ein

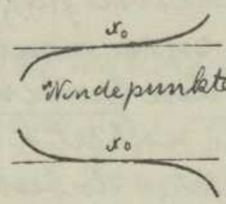
Maximum, wenn $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)<0$

Minimum, " $f'(x_0)=0$ " $f''(x_0)>0$.

2.) Für gewisse Werte $x=x_0$ können die I., II. und höheren Abgeleiteten zugleich verschwinden. Der Verlauf der Kurve ist im einzelnen folgender:

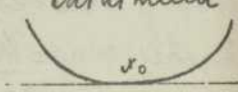
$f'(x_0)=0 \; f''(x_0)=0$
$f'''(x_0)>0$

$f'(x_0)=0 \; f''(x_0)=0$
$f'''(x_0)<0$



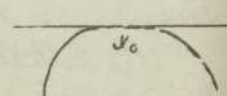

$f'(x_0)=0 \; f''(x_0)=0 \; f'''(x_0)=0$
$f^{IV}(x_0)>0$

Minimum




$f'(x_0)=0 \; f''(x_0)=0 \; f'''(x_0)=0$
$f^{IV}(x_0)<0$

Maximum.




Allgemeine Regel. Ist für einen $x$-Wert $f'(x)=0$ und man will untersuchen, ob für diesen $x$-Wert die Kurve ein Extremum hat, so bildet man für diesen Wert von $x$ so lange die Werte der höheren Ableitungen, bis man auf einen von Null verschiedenen trifft. Ist die Ableitung von ungerader Ordnung, so hat man kein Extremum, ist sie von gerader Ordnung, so hat man ein Minimum oder Maximum je nachdem der Wert der Abgeleiteten für die fragliche

Stelle positiv oder negativ wird.

## Aufgaben.

I. Man berechne die unbestimmten Formen:

1.) $y = \left\{ \frac{x^2+5x+6}{x^2+7x+12} \right\}_{x=-3}$ 2.) $y = \left\{ \frac{\sqrt{2x-x^4} - \sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}} \right\}_{x=1}$ 3.) $y = \left\{ \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a+b}}{\sqrt{a+cx} - \sqrt{a+c}} \right\}_{x=1}$

4.) $y = \left\{ \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n + (\sqrt{1+x^2}-x)^n - 2}{x^2} \right\}_{x=0}$ 5.) $y = \left\{ \frac{\lg(x^{2m}+x^m-1) - m \lg x}{x^2-1} \right\}_{x=1}$

6.) $y = \left\{ \frac{\sin 3x + 4\sin^3 x - 3\lg(1+x)}{(e^x-1)\sin x} \right\}_{x=0}$ 7.) $y = \left\{ \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x} \right\}_{x=0}$

8.) $y = \left\{ \frac{1+2\cos^3 x - 3\sqrt{\cos 2x}}{\sin^4 x} \right\}_{x=0}$ 9.) $y = \left\{ \frac{1-5\sin^2 x + 4\cos^5 x - 5\sqrt{\cos^3 2x}}{\sin^6 x} \right\}_{x=0}$

10.) $y = \left\{ \frac{3}{3x^4-x^6} - \frac{1}{x^3 \operatorname{arctg} x} \right\}_{x=0}$ 11.) $y = \left\{ \frac{\log x}{a + b\log\sin x} \right\}_{x=0}$

12.) $y = \left\{ \frac{\log(a+be^x)}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}} \right\}_{x=\infty}$ 13.) $y = \left\{ x^x \right\}_{x=0}$.

II. Die Gleichung einer Ellipse in Parameterform lautet

$$x = 16\cos\lambda \qquad y = 9\sin\lambda.$$

Man bestimme jene Tangenten, von welchen die Koordinatenachsen das kürzeste Stück abschneiden. Wie groß ist dasselbe?

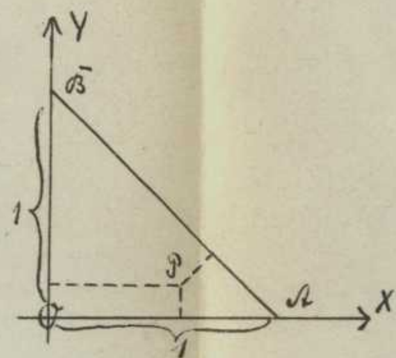
III. Der Mittelpunkt einer Ellipse ist geradlinig mit einem Peripheriepunkt verbunden und durch letzteren die Normale zur Kurve gelegt, wie muß der Punkt gewählt werden, wenn der Winkel zwischen jenem Radiusvektor und dieser Normalen ein Maximum sein soll?

IV. Man diskutiere den Verlauf der Kurve $y = 2x^3 - x^4$.

Platz No: Name:

# Höhere Mathematik I.

## Semestralprüfung.
## 9. III. 1911.




1.) Gegeben ist das rechtwinkelig-gleichschenkelige Dreieck $OAB$. Man suche den geometrischen Ort aller Punkte $P$ von der Eigenschaft, daß das doppelte Quadrat ihres Abstandes von der Hypotenuse $AB$ gleich der Summe der Quadrate ihrer Abstände von den Katheten $OA$ und $OB$ ist! Man bestimme den Verlauf des Ortes.

2.) Durch den linksliegenden Brennpunkt der Ellipse $9x^2+100y^2=900$ ist eine Sehne von der Länge 7 zu ziehen. Welches ist die Gleichung derselben?

3.) Man bestimme den ersten und zweiten Differentialquotient von:

a.) $y=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ b.) $y=\sqrt{\operatorname{arctg} x+\operatorname{arccotg} x}$ c.) $y=\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x$.

4.) Man werte die Integrale aus:

a.) $\int\left(\frac{5}{x^4}-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-4+7x^6\right)dx$ b.) $\int\frac{x\,dx}{1+x^4}$ Subst.: $x^2=z$ c.) $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

5.) Man berechne die von der Kurve $y=e^x(4x-x^2)$ und der Xachse zwischen $x=0$ und $x=4$ begrenzte Fläche und stelle eine Näherungsformel für den Koordinatenanfangspunkt auf.

(Die Aufgaben sind auf diesem Blatt zu bearbeiten)

2.V.11. Nr. 1.

# Höhere Mathematik II.

## Elemente der Reihenlehre.

1.) Nähert sich eine unbegrenzte Folge von Zahlen

$$s_0, s_1, s_2, \dots \quad s_n, \dots$$

einer bestimmten Zahl $\sigma$, so heißt diese Zahl $\sigma$ der Grenzwert der Folge und man schreibt

$$\sigma = \lim_{n=\infty} s_n.$$

Es kann nur eine derartige Zahl $\sigma$ geben. Existiert eine solche Zahl $\sigma$, so sagt man, die Folge der $s_n$ ist konvergent. Im entgegengesetzten Fall heißt die Folge divergent.

2.) Allgemeines Konvergenzprinzip.
Wenn man zu jeder gegebenen Größe $\varepsilon$ die Zahl $n$ so bestimmen kann, daß $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ wird für alle positiven $p$, dann hat die Folge einen Grenzwert.

3.) Die Aussage: Die unendliche Reihe von lauter positiven Größen

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \text{ in inf.}$$

hat die Summe $S$, bedeutet:
Man bilde die Summen der ersten aufeinander folgenden Glieder

$$a_0 = s_0$$
$$a_0 + a_1 = s_1$$
$$a_0 + a_1 + a_2 = s_2$$
$$\vdots$$
$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_n.$$

Hat die Folge der Summen $s_0, s_1, s_2 \dots s_n$ einen Grenzwert $\sigma$, so heißt die gegebene Reihe konvergent und $\sigma$ ihre Summe.

4.) Notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ {alle Glieder +} ist $\lim_{n=\infty} a_n = 0$

Ist außerdem von einer bestimmten Stelle an $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq c < 1$, so ist die Reihe konvergent,

ist dagegen $\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{(=)}{>} 1$, " divergent.

{Kriterium von Cauchy}

5.) Eine Reihe mit abwechselnden Vorzeichen konvergiert, wenn die Glieder von einer bestimmten Stelle an a.) beständig abnehmen b.) schließlich unter jede beliebige Grenze herabsinken. $\lim_{n=\infty} a_n = 0$

6.) Die folgenden W. S. Nr. 14, 4 a–e gebrachten Reihen haben die beigeschriebenen Konvergenzbereiche:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots \qquad 1 > x > -1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots \qquad +\infty > x > -\infty$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots \qquad 1 \geqq x > -1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \ldots \qquad +\infty > x > -\infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \ldots \qquad +\infty > x > -\infty$$

## Aufgaben.

1.) Man untersuche die folgenden Reihen auf ihre Konvergenz:

a.) $1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2\cdot 3\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \ldots$ b.) $1 + \frac{2}{9} + \frac{2\cdot 5}{9\cdot 11} + \frac{2\cdot 5\cdot 8}{9\cdot 11\cdot 13} + \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}{9\cdot 11\cdot 13\cdot 15} + \ldots$

c.) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{\pi}{16} + \ldots$

2.) Die Summe der n ersten Glieder einer unendlichen Reihe sei $S_n = \frac{2n+1}{3n+4}$. Man bestimme das allgemeine Glied sowie einige Anfangsglieder und gebe die Summe der unendlichen Reihe an.

3.) Für welche Werte von x konvergieren die Reihen:

a.) $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots$ b.) $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$

4.) Man summiere die Reihe $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$ unter Benützung der Identität $\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$. Welches ist die Summe der aus dieser endlichen Reihe sich ergebenden unendlichen Reihe?

9. V. 11. Nr. 2

# Höhere Mathematik II.

## Determinanten.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

heißt eine Determinante $n$. Grades. Man versteht darunter die algebraische Summe der $n!$ Produkte, die aus dem Diagonalglied $a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \cdots a_{nn}$ (Anfangsglied) durch Permutation der vordern (Zeilen-) oder hinteren (Kolonnen-) Indizes gewonnen werden; das Vorzeichen eines Gliedes ist positiv oder negativ, je nachdem die Zahl der in ihm vorkommenden „Inversionen" gerade oder ungerade ist. {4132 z. B. heißt eine gerade Permutation, weil 4 vor 1, 4 vor 3, 4 vor 2, 3 vor 2 steht.} In jedem Glied der Determinante kommt je ein Element aus jeder Zeile und jeder Kolonne vor.

Sätze über Determinanten.

Eine Determinante bleibt ungeändert, wenn man die Zeilen mit den Kolonnen vertauscht und umgekehrt.

Eine Determinante wechselt das Vorzeichen, wenn man in ihr zwei Reihen miteinander vertauscht.

Eine Determinante mit zwei gleichen Reihen ist null.

Es ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13} + a_{14} A_{14}$$

$A_{ik}$ heißt die zu $a_{ik}$ gehörige erste Unterdeterminante. Das zugehörige Vorzeichen wird in ihr miteingeschlossen gedacht. Sie wird erhalten, wenn man in dem gegebenen Det.-Schema die zu $a_{ik}$ gehörige Zeile und Kolonne streicht.

Umgekehrt ist

$$c_1 A_{11} + c_2 A_{12} + c_3 A_{13} + c_4 A_{14} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Multipliziert man die Unterdet., die zu den Elementen einer bestimmten Reihe gehören, mit den entsprechenden Elementen einer anderen Reihe und bildet die Summe dieser Glieder, so bekommt man null.

z. B. $0 = a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} + a_{24}A_{14}$.

Ein Faktor, der in allen Elementen einer Reihe vorkommt, kann als Faktor vor die ganze Determinante gesetzt werden.

Durch Addition einer mit einem beliebigen Faktor multiplizierten Reihe zu einer Parallelreihe wird der Wert der Determinante nicht geändert.

Wenn alle Elemente einer bestimmten Reihe Summen von je zwei Bestandteilen sind, so kann die Determinante als Summe zweier Determinanten geschrieben werden.

$$(\alpha_{11}+\beta_{11})A_{11} + (\alpha_{12}+\beta_{12})A_{12} + \dots = (\alpha_{11}A_{11} + \alpha_{12}A_{12} + \dots) + (\beta_{11}A_{11} + \beta_{12}A_{12} + \dots)$$

<u>Multiplikation von Determinanten.</u>

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}, & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}, & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}.$$

Dagegen ist

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23} \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{31} \\ b_{12} & b_{32} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{21} & b_{31} \\ b_{22} & b_{32} \end{vmatrix}.$$

<u>Auflösung eines Systems linearer Gleichungen.</u>

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 - c_1 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 - c_2 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 - c_3 &= 0 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 - c_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{14} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{41} & \cdots & a_{44} \end{vmatrix}$$

heißt die Determinante des Gleichungssystems.

Setzt man an Stelle einer Kolonne die entsprechenden konstanten Glieder der Gleichungen, so erhält man eine sog. <u>substituierte Determ.</u>

Macht man das gleiche für die 1. bezw. 2 Unterdeterminanten, so erhält man sogen. <u>1. und 2. substituierte Unterdeterminanten.</u>

Die folgende Übersicht veranschaulicht den Verlauf der allgemeinen Diskussion des obigen Gleichungssystems:

I.) $\Delta \neq 0$; eine Lösung

II.) $\Delta = 0$

A.) Substit. Determ. nicht alle $= 0$; keine Lösung

B.) " " alle $= 0$

1.) II Unter-Det. $A_{jk}$ nicht alle $= 0$; $\infty^1$ Lösungen (Eine Gleich. ist eine Folge der 3 anderen)

2.) " " alle $= 0$

a.) Subst. I. Unter-Det. nicht alle $= 0$; keine Lösung

b.) " " alle $= 0$

α.) II Unter-Det. $A_{jk,lm}$ nicht alle $= 0$; $\infty^2$ Lsg (2 Gleich. sind eine Folge der 2 andern)

β.) " " alle $= 0$

$\beta_1$.) Subst. II. Unter-Det. nicht alle $= 0$; keine Lösung

$\beta_2$.) " " alle $= 0$

$\beta_{21}$.) Koeff. $a_{jk}$ nicht alle $= 0$; $\infty^3$ Lsg (3 Gleich. sind eine Folge der vierten)

$\beta_{22}$) " " alle $= 0$

$\beta_{221}$) Konst. $c_i$ nicht alle $= 0$; keine Lösung

$\beta_{222}$) " " alle $= 0$; $\infty^4$ Lsg

Man beachte: Keine Lösung ist immer dann vorhanden, wenn alle Unter-Determinanten einer bestimmten Ordnung null und die substituierten Unter-Determinanten derselben Ordnung nicht null werden.

Für $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ heißen die Gleichungen homogen; in diesem Fall sind alle subst. Determinanten null.

Einige Anwendungen auf die ebene Geometrie.

1.) Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte $P_1(x_1 y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.) Bedingung, daß drei Punkte $P_1(x_1 y_1)$, $P_2(x_2 y_2)$, $P_3(x_3 y_3)$ auf einer Geraden liegen:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3.) Inhalt des Dreiecks $P_1(x_1 y_1) P_2(x_2 y_2) P_3(x_3 y_3)$: $\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

4.) Die für die Diskussion der allgemeinen Gleichung 2. Grades

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

wichtige Determinante $\Delta_3$ {vgl. W.S. Nr. 8} kann geschrieben werden

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = ACF - AE^2 - B^2F + 2BDE - CD^2.$$

## Aufgaben.

1.) Man berechne nach möglichster Vereinfachung die Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 28 & 33 & 8 \\ 40 & 54 & 13 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 30 & 20 & -15 \\ 20 & 15 & -10 \\ 10 & 10 & -5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} n+1 & n+2 & n+3 \\ n+2 & n+3 & n+4 \\ n+3 & n+4 & n+5 \end{vmatrix}.$$

2.) Man bestimme die Werte der Unbekannten $x, y, z$ aus den drei Gleichungen:

$$2x+3y-z-2=0$$
$$5x-7y+4z+6=0$$
$$4x+y+3z-14=0$$

3.) Drei Punkte $P_1(x_1y_1)$; $P_2(x_2y_2)$; $P_3(x_3y_3)$ sind gegeben. Durch den ersten Punkt soll eine Gerade gelegt werden, welche mit derjenigen Geraden parallel ist, die durch die beiden anderen Punkte geht.

4.) Man beweise, dass sich die drei Geraden $A_1x+B_1y+C_1=0$; $A_2x+B_2y+C_2=0$; $(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ in einem Punkte schneiden mittels Determinanten.

5.) Drei Gerade sind durch ihre Gleichungen gegeben. Die Fläche des eingeschlossenen Dreiecks soll durch die Konstanten der Gleichungen ausgedrückt werden.

6.) Man berechne

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \alpha^4 & \beta^4 & \gamma^4 & \delta^4 \end{vmatrix}.$$

16. V. 11. Nr. 3.

# Höhere Mathematik II.

## Elemente der analytischen Geometrie des Raumes.

(Fortsetzung zu W. S. Nr. 2, III).

### I. Gleichungen von Flächen und Linien.

1.) Eine Gleichung zwischen 3 Koordinaten: $F(x,y,z)=0$ od. $z=f(x,y)$ stellt eine Fläche dar.
Zwei Flächengleichungen, die nebeneinander bestehen:
$\left.\begin{array}{l} F_1(xyz)=0 \\ F_2(xyz)=0 \end{array}\right\}$ stellen eine Linie, nämlich die Schnittlinie der beiden Flächen dar. Alle aus den beiden Flächengleichungen abgeleiteten Gleichungen bedeuten Flächen, welche durch die Linie hindurchgehen. insbesondere: Die Elimination der Z-Koordinate liefert die Gleichung der Projektion der Raumkurve in die XY-ebene oder auch die Gleichung des projizierenden Zylinders.

2.) In Parameterform wird eine Raumkurve dargestellt durch 3 Gleichungen mit einem Parameter ($t$): $x=\varphi(t)$ $y=\chi(t)$ $z=\psi(t)$, eine Fläche durch 3 Gleichungen mit zwei Parametern ($u$ und $v$):

$$x=\varphi(u,v) \qquad y=\chi(u,v) \qquad z=\psi(u,v)$$

### II. Die Ebene.

1.) Sind $\alpha, \beta, \gamma$ die Neigungswinkel einer Ebene gegen die Koordinatenebenen („Stellungswinkel") und $p$ der Abstand des Ursprungs von derselben, so lautet die Hesse'sche Normalform der dadurch bestimmten Ebene:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

Die allgemeine lineare Gleichung dreier Veränderlichen: $ax+by+cz+d=0$ stellt stets eine Ebene dar, deren Normalform ist $\dfrac{ax+by+cz+d}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=0$
Das Vorzeichen der Wurzel ist so zu wählen, daß das konstante Glied negativ wird.
Spezieller Fall: Eine lineare homogene Gleichung $ax+by+cz=0$ stellt eine Ebene durch den Ursprung dar mit den Stellungswinkeln:
$\cos\alpha=\frac{a}{w}$, $\cos\beta=\frac{b}{w}$, $\cos\gamma=\frac{c}{w}$, wenn $w=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

2.) Den Abstand eines Punktes von einer Ebene erhält man, wenn man seine Koordinaten in die linke Seite der Hesse'schen Normalform einsetzt. Das Vorzeichen ist + oder − je nachdem der gegebene Punkt und der Koordinatenanfangspunkt auf verschiedenen Seiten bezw. auf der gleichen Seite der Ebene liegen.

3.) Sind $q$, $r$, $s$ bezw. die Abschnitte einer Ebene auf der $x$, $y$, $z$-achse, so lautet die Ebenengleichung

$$\frac{x}{q} + \frac{y}{r} + \frac{z}{s} - 1 = 0$$

4.) Die Gleichung der durch die 3 Punkte $P_1(x_1 y_1)$, $P_2(x_2 y_2)$, $P_3(x_3 y_3)$ gehenden Ebene lautet:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix} = 0$$

5.) Volumen $V$ des Tetraeders $P_1 P_2 P_3 P_4$:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 \end{vmatrix}$$

Das Tetraeder hat das positive Vorzeichen, wenn der Umlaufsinn des Dreiecks $P_2 P_3 P_4$ vom Punkte $P_1$ aus gesehen positiv ist. Analoges gilt bei Vertauschung der Ecken.

Speziell ist Tetraeder $O P_1 P_2 P_3$: $V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

6.) Die <u>drei Ebenen</u> $a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$

$a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$

$a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0$ können die aus folgender Übersicht ersichtlichen Lagen bezw. Bedeutungen haben:

I.) $\Delta \neq 0$; <u>eine</u> Lösg: Die 3 Ebenen schneiden sich in <u>einem</u> Punkt.

II.) $\Delta = 0$

A.) Subst. Dt. <u>nicht</u> alle $= 0$; <u>keine</u> Lsg: Die 3 Ebenen bilden die Seiten eines <u>Prismas</u>.

B.) " " alle $= 0$

1.) Unter-Dt. von $\Delta$ <u>nicht</u> alle $= 0$; $\infty^1$ Lsgn.: Die 3 Ebenen gehen durch eine Gerade hindurch.

2.) " alle $= 0$

a.) Subst. Unter-Dt. <u>nicht</u> alle $= 0$; <u>keine</u> Lsg: Die 3 Eb. sind zueinander parallel

b.) " " alle $= 0$

α.) Die $a_i$, $b_i$, $c_i$ <u>nicht</u> alle $= 0$; $\infty^2$ Lsgn: Die 3 Gleich. stellen dieselbe Ebene vor

oder: 2 Gleich. stellen dieselbe Eb. dar, während die 3te identisch erfüllt

" 1 " stellt die Ebene ", " die 2 anderen " " sind.

β.) Die $a_i$, $b_i$, $c_i$ alle $= 0$

$\beta_1$.) Die $d_i$ <u>nicht</u> alle $= 0$; <u>keine</u> Lsg: Eine Gleich. enthält einen Widerspruch

$\beta_2$.) " " alle $= 0$; $\infty^3$ Lsgn: alle Punkte des Raumes genügen den Gleich.

7.) Die <u>zwei Ebenen</u> $a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$; $a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$ sind <u>parallel</u>, wenn

$$a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$$

## III. Die Gerade.

1.) In allgemeiner Form ist eine Gerade gegeben durch die Angabe zweier beliebiger durch sie gehenden Ebenen: $\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{array}\right\}$.

Die Gleichung der Projektion in die XY-ebene lautet:

$$(a_1 c_2 - a_2 c_1)x + (b_1 c_2 - b_2 c_1)y + (d_1 c_2 - d_2 c_1) = 0$$

[Spezieller Fall: Spuren einer Ebene!]

2.) Parameterform einer Geraden durch den Punkt $P_1(x_1 y_1 z_1)$ mit den Richtungscosinusen $\lambda, \mu, \nu$:

$$x = x_1 + \lambda \cdot t, \quad y = y_1 + \mu t \qquad z = z_1 + \nu t.$$

## IV. Die Flächen zweiten Grades.

Gleichung der allgemeinen Fläche 2. Grades:

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} xz + 2a_{23} yz + a_{33} z^2 + 2a_{14} x + 2a_{24} y + 2a_{34} z + a_{44} = 0$$

Jede Fläche 2. Grades wird von jeder Ebene in einer Linie 2. Grades geschnitten.

Man unterscheidet die Flächen:

1.) Elliptischer Zylinder: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; für $a = b$: Kreiszylinder.

2.) Hyperbolischer " : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

3.) Parabolischer " : $y^2 - 2px = 0$

4.) Kegelfläche : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

5.) Ellipsoid : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ (dreiachsiges)

$a = b$: Rotationsell. $\left\{\begin{array}{l} c > a \text{ und } b: \text{verlängertes Rotationsellipsoid} \\ c < a \text{ " } b: \text{abgeplattetes (planetarisches) "} \end{array}\right.$

$a = b = c = r$ gibt die

5a.) Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$

6.) Einschaliges Hyperboloid: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

7.) Zweischaliges " : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

8.) Elliptisches Paraboloid: $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} - z = 0$

$p = q$: Rotationsparaboloid.

9.) Hyperbolisches Paraboloid: $\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} - z = 0$

} p und q sind positiv

10.) Imaginäre Fläche: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$.

Die <u>Kugel</u> mit dem Radius $r$ und dem Mittelpunkt $(a, b, c)$ hat die Gleichung:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0$$

Die Gleichung jeder Kugel kann demnach auf die Form gebracht werden

$$x^2+y^2+z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

(Die Koeffizienten der quadratischen Glieder sind eins und das Glied mit $xyz$ fehlt!)

Umgekehrt wird eine Gleichung von der letzteren Form für

$$a_{14}^2+a_{24}^2+a_{34}^2-a_{44}\left\{\begin{array}{c}>\\=\\<\end{array}\right\}0 \quad \begin{array}{l}\text{von den Punkten einer Kugel mit dem Radius } r=\sqrt{a_{14}^2+a_{24}^2+a_{34}^2-a_{44}},\\ \text{nur von dem einen Punkt } (a_{14}, a_{24}, a_{34})\\ \text{überhaupt von keinem reellen Punkt erfüllt.}\end{array}$$

Auf dem einschaligen Hyperboloid und dem hyperbolischen Paraboloid liegen zwei Scharen reeller Geraden. (<u>Regelflächen</u>)

## <u>Aufgaben.</u>

<u>I.</u> Von einem Tetraeder seien die Gleichungen der vier ebenen Seitenflächen gegeben:

$$x+y+z=0; \qquad x+y-1=0; \qquad y+z-1=0; \qquad x+z-1=0$$

Man soll die Koordinaten 1.) der vier Ecken, 2.) des Schwerpunkts, 3.) der Mittelpunkte der umgeschriebenen und der eingeschriebenen Kugel bestimmen, 4.) das Volumen berechnen, 5.) die Gerade bestimmen, die zwei gegenüberliegende Kanten rechtwinkelig schneidet 6.), von dieser Geraden die Projektionen auf die drei Koordinatenebenen angeben, 7.) den kürzesten Abstand jener beiden Geraden von einander berechnen.

(Vorprüfungsaufgabe S.S. 1909)

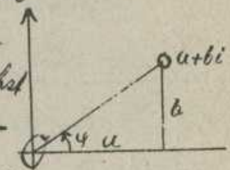
<u>II.</u> Man zeige, daß die Schnittkurve der beiden Ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \text{ und } \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}-1=0$$

auf einem Kegel und drei Zylindern zweiter Ordnung liegt.

# Höhere Mathematik II.

**Komplexe Zahlen.** Unter einer komplexen Zahl versteht man die Zusammenfassung zweier reeller Zahlen $a$ und $b$ zu dem Komplexe $a+bi$. $i$ dient dabei zunächst nur zur Unterscheidung der beiden Zahlen $a$ und $b$. Definiert man $i$ durch $i\cdot i=-1$, so bleiben für das Rechnen mit kompl. Zahlen die fundamentalen Gesetze des Rechnens mit den gewöhnlichen reellen Zahlen bestehen und man kann die Hauptrechnungsarten in der unten angegebenen Weise definieren. $i$ heißt laterale od. imaginäre Einheit.

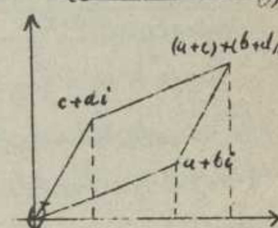



Jede kompl. Zahl kann in obiger Weise in der sogen. komplexen Zahlenebene gedeutet werden. Man gelangt so zur Darstellung der kompl. Zahlen durch Polarkoordinaten.

$a=r\cos\varphi$; $b=r\sin\varphi$ gibt $a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$; $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$; $r=|\sqrt{a^2+b^2}|$ (absoluter Betrag)

Die Aussage $a+bi=c+di$ ist identisch mit $a=c$; $b=d$

$a+bi$ und $a-bi$ heißen konjugiert komplexe Zahlen.



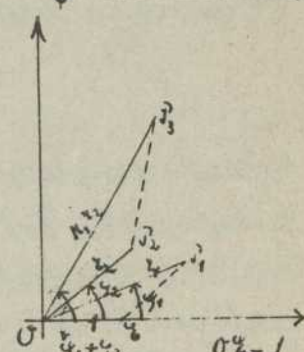

## Addition und Subtraktion zweier kompl. Zahlen.

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i.$$

## Multiplikation zweier komplexer Zahlen.

$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=r_1 r_2\{\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\}$$

Geometrische Deutung: $\Delta\, OEP_1 \sim \Delta\, OP_2P_3$




## Division zweier komplexer Zahlen.

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\}$$

## Moivre'sche Formel. $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$.

Die Formel gilt für jedes beliebige reelle $n$. Für gebrochene $n$ ergeben sich ebensoviele verschiedene Werte als der Nenner des Exponenten Einheiten enthält, z. B. ist speziell

$$\sqrt[n]{1}=(\cos 0+i\sin 0)^{1/n}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad \text{für } k=0,1,2,\dots\ n-1.$$

Das sind die $n$ Einheitswurzeln.

Beispiel: $\sqrt[3]{1}=\begin{cases}1\\ -\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\\ -\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\end{cases}$ $\quad \sqrt[4]{1}=\begin{cases}\pm 1\\ \pm i\end{cases}$ $\quad \sqrt[8]{1}=\begin{cases}\pm 1\\ \pm i\\ \frac{1}{2}\sqrt{2}(\pm 1\pm i)\end{cases}$

Aus der Moivre'schen Formel folgt:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\,\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\,\sin^4\varphi - + \dots$$

$$\sin n\varphi = n\cos^{n-1}\varphi\,\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\,\sin^3\varphi + - \dots$$

Euler'sche Formeln und Folgerungen daraus.

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \qquad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}) \qquad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$$

$$\cos ix = \frac{1}{2}(e^{-x}+e^{x}) = \operatorname{Cof} x \qquad \sin ix = \frac{1}{2i}(e^{-x}-e^{x}) = i\operatorname{Sin} x.$$

$$\cos^{2m+1} x = \frac{1}{2^{2m}}\left\{\cos(2m+1)x + \binom{2m+1}{1}\cos(2m-1)x + \binom{2m+1}{2}\cos(2m-3)x + \dots \binom{2m+1}{m}\cos x\right\}$$

$$\cos^{2m} x = \frac{1}{2^{2m-1}}\left\{\cos 2mx + \binom{2m}{1}\cos(2m-2)x + \binom{2m}{2}\cos(2m-4)x + \dots + \binom{2m}{m-1}\cos 2x + \frac{1}{2}\binom{2m}{m}\right\}$$

$$\sin^{2m+1} x = \frac{1}{2^{2m}}\left\{\sin(2m+1)x - \binom{2m+1}{1}\sin(2m-1)x + \binom{2m+1}{2}\sin(2m-3)x - + \dots + (-1)^m\binom{2m+1}{m}\sin x\right\}$$

$$\sin^{2m} x = \frac{1}{2^{2m-1}}\left\{\cos 2mx - \binom{2m}{1}\cos(2m-2)x + \binom{2m}{2}\cos(2m-4)x - + \dots \frac{(-1)^m}{2}\binom{2m}{m}\right\}$$

Der Logarithmus einer kompl. Zahl wird definiert auf Grund der Beziehung $e^{x+iy} = u+iv$ als

$$\log(u+iv) = \log r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \log r\cdot e^{i\varphi} = \log r + i\varphi = \log\left|\sqrt{u^2+v^2}\right| + i\cdot\operatorname{arctg}\frac{v}{u}.$$

Der Logarithmus ist unendlich vieldeutig, da zu dem auftretenden Bogen beliebige Vielfache von $2\pi$ addiert oder subtrahiert werden dürfen.

Folgerung: $\operatorname{arctg} w = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iw}{1-iw}$.

## Aufgaben.

1.) Man berechne u. konstruiere: $(3+4i)(5+7i)$; $(12-13i)(3-2i)$; $\frac{2+3i}{4-5i}$; $\frac{12-13i}{3-2i}$.

2.) Mit welcher Zahl ist der Vektor $3-4i$ zu multiplizieren, damit er sich um den Winkel $x$, speziell $45°, 90°, 180°, 270°$ in der positiven und negativen Richtung dreht?

3.) Man bringe $\sqrt[3]{-3+4i}$, $\frac{1+2i}{(1-i)^2} - \frac{1-2i}{(1+i)^2}$, $\log_{10}(1+2i)$, $i^i$ auf die Form $a+b\cdot i$ und berechne $\arccos 3$.

4.) Man beweise die Richtigkeit der Formel

$$\cos^5\alpha\cdot\sin^3\alpha = \frac{1}{2^7}(-\sin 8\alpha - 2\sin 6\alpha + 2\sin 4\alpha + 6\sin 2\alpha).$$

---

Berichtigung zu Nr. 3. Seite 4 Zeile 5 u. 6 v. o. muß es heißen: „... die Glieder mit $xy, yz; zx$ fehlen" statt „das Glied mit $xyz$ fehlt".

Nr. 5

30.V.11.

# Höhere Mathematik II.

## I. *Algebraische Gleichungen.*

1.) Jede Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades $f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ besitzt
im Gebiete der reellen und imaginären Größen $n$ Wurzeln (Lösun-
gen), wenn mehrfache Wurzeln entsprechend oft gezählt wer-
den. Ist $\alpha_i$ eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, so ist das Polynom
$f(x)$ durch $x - \alpha_i$ ohne Rest teilbar. Sind $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die $n$ Wurzeln
von $f(x) = 0$, so ist $f(x) \equiv a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) \ldots (x-\alpha_n)$.
$\alpha_k$ ist *r-fache Wurzel* einer Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades $f_n(x) = 0$, heißt,
es ist $f_n(x) \equiv (x-\alpha_k)^r \cdot f_{n-r}(x)$. $\alpha_k$ ist dann auch Wurzel der sämtlichen
Abgeleiteten bis zur $(r-1)^{\text{ten}}$ einschließlich. Speziell für eine
*Doppelwurzel* $\alpha$ ist also $f(\alpha) = 0$ und $f'(\alpha) = 0$. — In Gleichun-
gen *mit lauter* reellen Koeffizienten treten komplexe Wur-
zeln stets paarweis konjugiert auf. Das Produkt der Wur-
zelfaktoren zweier konjugiert komplexer Wurzeln ist
reell und positiv: $(x-a-bi)(x-a+bi) = (x-a)^2 + b^2$.

2.) Die Koeffizienten einer Gleichung sind *elementar-sym-
metrische Funktionen* der Wurzeln der Gleichung {Symme-
trische Funktion mehrerer Größen heißt jede Funktion, die
sich nicht ändert, wenn man diese Größen untereinander
irgendwie vertauscht.}

z. B. gilt für $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \equiv (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$

$$-a_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta \qquad -a_3 = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta$$

$$a_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta \qquad a_4 = \alpha\beta\gamma\delta.$$

Jede symmetrische Funktion der Wurzeln einer Gleichung
ist durch elementar-symmetrische Funktionen derselben
und damit durch die Koeffizienten der Gleichung rational
darstellbar.

3.) Ein gemeinsamer Faktor zweier Polynome $g(x)$ und $h(x)$ kann nach dem gewöhnlichen auch für Zahlen üblichen Divisionsverfahren auf folgende Weise gefunden werden:

$$\begin{array}{lllll}
g(x)\equiv h(x)\cdot q(x)+r(x) & r(x) \text{ ist von niedrigerem Grade als } & & & h(x)\\
h(x)\equiv r(x)\cdot q_1(x)+r_1(x) & r_1(x) & & " & r(x)\\
r(x)\equiv r_1(x)\cdot q_2(x)+r_2(x) & r_2(x) & & " & r_1(x)\\
\text{-----} & \vdots & & & \vdots\\
r_{n-2}(x)\equiv r_{n-1}(x)\cdot q_n(x)+r_n(x) & r_n(x) & & " & r_{n-1}(x)\\
r_{n-1}(x)\equiv r_n(x)\cdot q_{n+1}(x) & & & &
\end{array}$$

$r_n(x)$ ist der größte gemeinschaftliche Teiler von $g(x)$ und $h(x)$ und zwar in dem Sinn, daß jeder andere etwa auftretende Teiler ein Faktor von $r_n(x)$ ist.

4.) Sturm'scher Satz. $f(x)$ habe keine gleichen Wurzeln. $f'(x)$ sei die 1. Abgeleitete von $f(x)$. Man bilde das unter (3.) aufgestellte System von Identitäten für $f(x)$ und $f'(x)$, nehme aber die Reste immer mit entgegengesetzten Vorzeichen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= q(x)\cdot f'(x) - f_2(x)\\
f'(x) &= q_1(x)\cdot f_2(x) - f_3(x)\\
f_2(x) &= q_2(x)\cdot f_3(x) - f_4(x)\\
&\vdots\\
f_{n-1}(x) &= q_{n-1}(x)\cdot f_n \qquad f_n \text{ ist eine Konstante.}
\end{aligned}$$

Berechnet man die Zahlenwerte von:

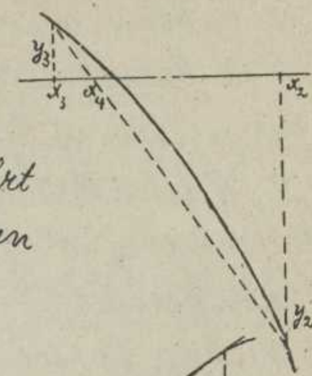
$$\left.\begin{array}{l} f(\alpha), f'(\alpha), f_2(\alpha) \dots \; f_{n-1}(\alpha) \; f_n \\ f(\beta), f'(\beta), f_2(\beta) \dots \; f_{n-1}(\beta) \; f_n \end{array}\right\}$$

für 2 gegebene Zahlen $\alpha$ und $\beta$ und zählt ab, wieviel Zeichenwechsel in der oberen, wieviele in der unteren Zeile vorkommen, so gibt die Differenz dieser Zeichenwechsel die Anzahl der zwischen $x=\alpha$ und $x=\beta$ liegenden reellen Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$.

## II. Näherungsweise Auflösung von Gleichungen.

1.) Hat man durch Probieren rohe Näherungswerte $x_2$ und $x_3$ gefunden, so führt zu genaueren Näherungswerten

2.) die Regel des doppelten falschen Ansatzes: für den besseren Näherungswert $x_4$ gilt



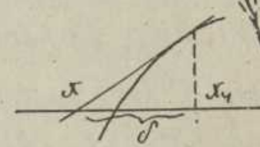

$$\frac{x_4 - x_3}{x_2 - x_4} = \frac{y_3}{-y_2} \quad \text{oder} \quad x_4 = x_3 - y_3 \cdot \frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3}$$

Nach mehrmaliger Anwendung dieser Regel führt im allgemeinen zu noch besseren Näherungswerten

3.) die Newton'sche Näherungsformel.

Setzt man $x = x_4 + \delta$, so ist $0 = f(x) \sim f(x_4) + \delta \cdot f'(x_4)$

$$\text{also} \quad \delta = -\frac{f(x_4)}{f'(x_4)}.$$




4.) Ist man mit einer geringen Annäherung zufrieden, so ist die folgende Methode der sukzessiven Approximation oft sehr bequem: Man bringt die gegebene Gleichung auf die Form $x = \varphi(x)$. {z. B. $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ auf die Form $x = \frac{x^3+1}{4x}$} und berechnet aufeinanderfolgende Näherungswerte, indem man jedesmal den unmittelbar zuvor berechneten Näherungswert in die rechte Seite einsetzt.

5.) Zur näherungsweisen Lösung eines Systems von Gleichungen, insbesondere eines Systems linearer Gleichungen liefert die Methode (4) eine bequeme Rechnung, wenn in jeder Gleichung der Koeffizient einer Unbekannten größer ist als diejenigen aller andern.

Beispiel: $6x - y = 12$; $-x + 5y = 5$ wird geschrieben

$$x = 2 + \frac{y}{6}; \quad x_1 \sim 2; \quad x_2 \sim 2 + \frac{y_1}{6} \qquad \text{u. s. w.}$$
$$y = 1 + \frac{x}{5}; \quad y_1 \sim 1; \quad y_2 \sim 1 + \frac{x_1}{5}$$

## Aufgaben.

1.) Vorgelegt ist die kubische Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Man stelle diejenige kubische Gleichung auf, deren Wurzeln

a.) bezw. gleich den Quadraten der Wurzeln der gegeb. Gleichung

b.) bezw. gleich den Produkten aus je zweien der Wurzeln der der gegebenen Gleichung sind.

2.) Welche Beziehung muß zwischen den Koeffizienten der Gleichung $x^3 + px + q = 0$ bestehen, damit sie zwei gleiche Wurzeln besitzt?

3.) Man berechne die reelle Wurzel der Gleichung $x^5 - 6x - 10 = 0$ auf 5 Dezimalstellen genau.

4.) Durch Anwendung des Sturm'schen Satzes trenne man die Wurzeln der Gleichung $x^5 + 6x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 28x - 15 = 0$ und berechne die positive darunter auf zwei Dezimalen genau.

5.) Man löse die transzendente Gleichung $x = \operatorname{tg} x$.

6.) Das Gleichungssystem $y^2 = 10(x-1)$. $x^2 = 20(y-2)$ ist durch sukzessive Approximation zu lösen.

---

13. VI. 11. Nr. 6

# Höhere Mathematik II.

## Aufstellung empirischer Formeln. Interpolation.

1.) Interpolation durch eine rationale ganze Funktion. Sind zu einer Anzahl von Werten $x_1, x_2 \ldots$ zugehörige Werte von Beobachtungen $y_1, y_2 \ldots$ gegeben, so kann man verlangen, es soll eine rationale ganze Funktion angegeben werden, welche von diesen Wertepaaren befriedigt wird. Es ist eine Funktion mit so vielen Gliedern zu nehmen als Beobachtungen vorliegen, z. B. hat man für 4 Beobachtungen:

$$a + bx_1 + cx_1^2 + dx_1^3 = y_1$$
$$a + bx_2 + cx_2^2 + dx_2^3 = y_2$$
$$a + bx_3 + cx_3^2 + dx_3^3 = y_3$$
$$a + bx_4 + cx_4^2 + dx_4^3 = y_4$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = \pm (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4).$$

Die unbekannten Koeffizienten $a, b, c, d$ sind aus diesem Gleichungssystem zu berechnen, was immer möglich ist, wenn $\Delta \neq 0$ ist d. h. wenn nicht zwei von den $x$ einander gleich sind. Die Auflösung geschieht am vorteilhaftesten durch wiederholte Subtraktion der Gleichungen von einander. Die Koeffizienten der höheren Potenzen von $x$ sind im allgemeinen mit größerer Genauigkeit zu berechnen als die der niedrigen Potenzen, weil sie mit ziemlich großen Koeffizienten multipliziert sind. Weichen die Beobachtungen von einer Geraden, die man zwischen die durch Punkte in einem rechtwinkeligen kartesischen Koordinatensystem dargestellten Beobachtungen hindurchlegen kann, nicht viel ab, so stellt man am besten zunächst eine Interpolationsformel für diese Abweichungen auf, die man auf graphischem Weg ermittelt hat. Am Schluß der Rechnung fügt man die Geradenordinaten wieder hinzu.

2.) Der Einfluß eines Beobachtungsfehlers auf die Schlußformel macht sich am stärksten bei den Koeffizienten der niedrigsten Potenzen geltend. Die Berechnung dieser Koeffizienten auf sehr viele Dezimalen ist bei ungenauen Beobachtungen demnach zwecklos.

3.) Zu einer gesonderten Berechnung der Terme gerader und derjenigen ungerader Ordnung gelangt man durch Verlegung des Anfangspunktes der Zählung der unabhängigen Veränderlichen in die Mitte des Beobachtungsintervalls und eventuelle Änderung des Maßstabes. Die zu berechnende Interpolationsformel

$$y = f(\xi) = \alpha + \beta\xi + \gamma\xi^2 + \delta\xi^3 + \varepsilon\xi^4 + \varphi\xi^5$$

kann dann geschrieben werden

$$y = \eta + \xi \cdot \bar{\eta}, \text{ wobei } \eta = \frac{1}{2}\{f(\xi) + f(-\xi)\} = \alpha + \gamma\xi^2 + \varepsilon\xi^4 + \dots$$
$$\bar{\eta} = \frac{1}{2\xi}\{f(\xi) - f(-\xi)\} = \beta + \delta\xi^2 + \varphi\xi^4 + \dots$$

Diese Methode ist merklich bequemer als die unter (1) angegebene, wenn das Zurückgehen auf den ursprünglich vorgelegte Anfangspunkt der Zählung nicht erforderlich ist.

4.) Die Bedeutung einer Interpolation. Man kann aus den Beobachtungen, die nur über ein begrenztes Intervall der unabhängigen Veränderlichen sich erstrecken weder vom mathematischen noch naturwissenschaftlichen Standpunkt aus über den Verlauf der zugehörigen Funktion außerhalb dieses Gebietes etwas schließen, man hat kein Recht zu extrapolieren. Rein mathematisch betrachtet ist es auch ganz und gar unzulässig zu interpolieren d. h. etwas über die Größe von nicht angegebenen Funktionswerten auszusagen. Naturwissenschaftlich hingegen hat man hiezu durchaus die Berechtigung.

5.) Die Interpolation durch Differenzenrechnung ist wertvoll, wenn es sich um die Berechnung einer ganzen Reihe von Werten (Tabellen) handelt. Ist die zu interpolierende Funktion in dem Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Tafelwerten $(x_1 y_1, x_2 y_2)$ näherungsweise durch eine lineare Funktion ersetzbar, so hat man zur Berechnung eines $y$ die Formel $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ oder kurz $\underline{\Delta y = a \cdot \Delta x}$, wenn $a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, $x-x_1 = \Delta x$, $y-y_1 = \Delta y$. Ist diese lineare Interpolation unzulässig, so hat man „höhere Differenzen" zur Interpolation heranzuziehen. Hat man etwa 5 in gleichen Intervallen beobachtete Funktionswerte $\{y_{-2}\, y_{-1}\, y_0\, y_1\, y_2\}$, so leitet man aus ihnen 1. Differenzen aufgrund der Definition: $\Delta y_{n+\frac{1}{2}} = y_{n+1} - y_n$ ab. Analog leitet man aus diesen 1. Differenzen 2. Differenzen und so fortfahrend immer höhere Differenzen ab. Man erhält so das Schema:

| Funktionswerte, | 1. Differenzen, | 2. Differenzen, | 3. Differenzen, | 4. Differenzen |
|---|---|---|---|---|
| $y_{-2}$ | | | | |
| | $\Delta y_{-\frac{3}{2}}$ | | | |
| $y_{-1}$ | | $\Delta^2 y_{-1}$ | | |
| | $\Delta y_{-\frac{1}{2}}$ | | $\Delta^3 y_{-\frac{1}{2}}$ | |
| $y_0$ | | $\Delta^2 y_0$ | | $\Delta^4 y_0$ |
| | $\Delta y_{\frac{1}{2}}$ | | $\Delta^3 y_{\frac{1}{2}}$ | |
| $y_1$ | | $\Delta^2 y_1$ | | |
| | $\Delta y_{\frac{3}{2}}$ | | | |
| $y_2$ | | | | |

Führt man noch die Bezeichnungen ein: $\Delta y_0 = \frac{1}{2}(\Delta y_{-\frac{1}{2}} + \Delta y_{\frac{1}{2}})$

$\Delta^3 y_0 = \frac{1}{2}(\Delta^3 y_{-\frac{1}{2}} + \Delta^3 y_{\frac{1}{2}})$, so kann man folgende Interpolationsformel aufstellen:

$$y = y_0 + x\left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^3 y_0}{6}\right) + x^2\left(\frac{\Delta^2 y_0}{2} - \frac{\Delta^4 y_0}{24}\right) + x^3\,\frac{\Delta^3 y_0}{6} + x^4\,\frac{\Delta^4 y_0}{24}.$$

NB. Diese Formel setzt voraus, daß höhere als 4. Diff. nicht zu berücksichtigen sind! Schreibt man dieselbe Formel für ein kleineres Teilintervall $\delta x$ an und beachtet die dabei eingeführte Maßstabänderung, so lassen sich durch Vergleich der Koeffizienten beider Formeln aus den $\Delta y$ die $\delta y$ berechnen und aus diesen rückwärts schließend die entsprechenden Funktionswerte interpolieren.

6.) Interpolation auf grund überzähliger Beobachtungen nach Cauchy.

Beispiel: Es soll die Funktion $y = x^3$ in dem Bereiche von 0 bis 4 durch

$y \sim a + bx + cx^2$ näherungsweise dargestellt werden.

Man kann ausgehen von dem Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{l|l} x=4 & a + 4b + 16c = 64 \\ =3 & a + 3b + 9c = 27 \\ =2 & a + 2b + 4c = 8 \\ =1 & a + b + c = 1 \\ =0 & a \qquad\qquad = 0 \end{array}\right\} (1)$$

(a) $a + 2b + 6c = 20$ folgt durch Add. aller Gleich. (1) u. nachherige Division mit 5.

$a = 20$ ist 1. Näherungswert für $a$.

$$\left.\begin{array}{r} 2b + 10c = 44 \\ b + 3c = 7 \\ -2c = -12 \\ \mp b \mp 5c = \mp 19 \\ \mp 2b \mp 6c = \mp 20 \end{array}\right\} (2)$$

(2) folgt durch Elimination des Koeff. $a$ aus (a) u. jeder Gleichung von (1).

$b$ muß in allen Gleichungen + gemacht werden.

(b) $b + 4c = 15$ folgt durch Add. aller Gleich. (2), in welchen $b$ vorkommt, u. nachherige Division mit 6.

$b = 15$ ist 1. Näherungswert für $b$

$$\left.\begin{array}{r} 2c = 14 \\ \mp c = \mp 8 \\ \mp 2c = \mp 12 \\ \mp c = \mp 4 \\ 2c = 10 \end{array}\right\} (3)$$

(3) folgt durch Elimination des Koeff. $b$ aus (b) u. jeder der Gleichungen von (2)

$c$ muß in allen Gleichungen + gemacht werden.

(c) $c = 6$ folgt durch Add. aller Gleich. (3) und nachherige Division mit 6.

$c = 6$ ist Näherungswert für $c$

$$\left.\begin{array}{r} +2 \\ -2 \\ 0 \\ +2 \\ -2 \end{array}\right\}$$ Fehler des Gleichungssystems (3) für $c = 6$.

$c = 6$ ergibt aus (b): $b = -9$ und diese beide Werte aus (a): $a = +2$
Die Näherungsfunktion ist $y = 2 - 9x + 6x^2$.

## Aufgaben.

1.) Man stelle allgemein die 1te, 2te, ... nte Differenz der Funktion $y = x^3 - x^2 + x - 1$ für ein um $\alpha = 2$ springendes $x$ als Funktion von $x$ dar. Welche Differenzenreihen werden zu 0?

2.) Ein Widerstand zur Messung hoher Temperaturen auf elektrischem Weg zeigt bei:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 200° | 400° | 600° | 800° | C |
| eine Widerstandszunahme von | 1,2 | 3,2 | 6,0 | 9,8 | Ohm. |

Man stelle mittels Differenzenrechnung eine Formel für die Beobachtungsreihe auf.

3.) Das Wasser hat bei

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| den Temperaturen | 0° | 2° | 4° | 6° | 8° | 10° |
| die Dichte | 0,999871 | 0,999969 | 1,000000 | 0,999970 | 0,999886 | 0,999747 |

Man stelle die Beobachtungsreihe durch eine Funktion 2. Grades dar.

4.) Ein belasteter Kupferdraht hat durch eine

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Mehrbelastung von | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | kg |
| eine Verlängerung von | 5,53 | 11,09 | 16,68 | 22,31 | 27,95 | mm |

erfahren. Durch welche rationale ganze Funktion 3. Grades lassen sich die Beobachtungen darstellen.

5.) Über die Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten ($\eta$) des Wassers von der Temperatur sind folgende Beobachtungen gemacht worden.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Temperatur $t°$: | 10° | 30° | 50° | 70° | 90° |
| $\eta \cdot 10^5$: | 1303 | 798 | 548 | 406 | 316. |

Man stelle diese Beobachtungsreihe durch eine rationale ganze Funktion möglichst gut dar.

20.VI.11. Nr. 7.

# Höhere Mathematik II.

## Interpolation (Fortsetzung).

### I. Trigonometrische Interpolation.

1.) Hilfssätze.

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{n+1}{2}x.$$

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx=\frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{n+1}{2}x.$$

$$1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{n}{2}x.$$

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

$$\sin\alpha+\sin(x+\alpha)+\sin(2x+\alpha)+\ldots+\sin(nx+\alpha)=\frac{\sin(\frac{n}{2}x+\alpha)\cdot\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2mk\pi}{n}=\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2mk\pi}{n}=\cos\frac{2m\pi}{n}+\cos\frac{4m\pi}{n}+\ldots+\cos 2m\pi=\begin{cases}0, \text{ wenn } \frac{m}{n} \text{ keine ganze Zahl ist.}\\ n, \text{ " } \frac{m}{n} \text{ eine " " ".}\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2mk\pi}{n}=\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2mk\pi}{n}=\sin\frac{2m\pi}{n}+\sin\frac{4m\pi}{n}+\ldots+\sin 2m\pi=0.$$

2.) Die Beobachtungen
$$x=0,\ \frac{2\pi}{n},\ \frac{4\pi}{n},\ \ldots\ \frac{2(n-1)\pi}{n}$$
$$y=y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_{n-1}$$

lassen sich durch eine Interpolationsformel der Form darstellen:

$$y=\frac{A_0}{2}+A_1\cos x+A_2\cos 2x+\ldots+A_m\cos mx$$
$$+B_1\sin x+B_2\sin 2x+\ldots+B_m\sin mx.$$

Dabei ist ganz allgemein {m und n willkürlich}:

$$\frac{1}{n}\sum_k y_k=\frac{A_0}{2}+A_n+A_{2n}+\ldots \quad \text{und} \quad \frac{1}{n}\sum_k y_k\cos\frac{2k\pi}{n}=\frac{1}{2}(A_1+A_{n-1}+A_{n+1}+A_{2n-1}+A_{2n+1}+\ldots)$$
u. s. w.

und speziell:

$$\frac{1}{n}\sum_k y_k=\frac{1}{2}A_0 \text{ für } m<n$$

$\frac{1}{n}\sum_k y_k \cos\frac{2k\pi}{n} = \frac{1}{2}A_1$ und $\frac{1}{n}\sum_k y_k \sin\frac{2k\pi}{n} = \frac{1}{2}B_1$ u.d. Voraussetz. $m < n-1$

$\frac{1}{n}\sum_k y_k \cos\frac{4k\pi}{n} = \frac{1}{2}A_2$ " $\frac{1}{n}\sum_k y_k \sin\frac{4k\pi}{n} = \frac{1}{2}B_2$ " $m < n-2$

$\vdots$ $\vdots$

$\frac{1}{n}\sum_k y_k \cos\frac{(m-1)2k\pi}{n} = \frac{1}{2}A_{m-1}$ " $\frac{1}{n}\sum_k y_k \sin\frac{(m-1)2k\pi}{n} = \frac{1}{2}B_{m-1}$ " $m < n-(m-1)$

$\frac{1}{n}\sum_k y_k \cos\frac{2mk\pi}{n} = \frac{1}{2}A_n$ " $\frac{1}{n}\sum_k y_k \sin\frac{2mk\pi}{n} = \frac{1}{2}B_m$ für $n = 2m+1$

jedoch $\frac{1}{n}\sum_k y_k \cos k\pi = A_m$ " $B_m = 0$ für $n = 2m$

Für die wirkliche Ausführung der Rechnung wählt man für $n$ womöglich eine gerade, am besten eine durch 4 teilbare Zahl. Die Zeiteinheit wählt man so, daß die Länge der Periode $2\pi$ wird.

3.) Verfahren von Fischer-Hinnen.

Soll auf grund von $n = r.s$ Beobachtungen: $\left\{\begin{matrix} x = k\cdot\xi \\ y = y_k \end{matrix}\right.$, $k = 0, 1, \dots (n-1)$ wobei $\xi = \frac{2\pi}{n}$ ist, eine Interpolationsformel von der Form

$$y = R_0 + R_1 \sin(x+\alpha_1) + R_2 \sin(2x+\alpha_2) + R_3 \sin(3x+\alpha_3) + \dots$$

aufgestellt werden, so kann man aus Ausdrücken der Form {es ist speziell $n = 3r$ gesetzt}:

$$Y_0 = y_0 + y_r + y_{2r} + \dots = 3R_0 + 3R_3 \sin\alpha_3 + 3R_6 \sin\alpha_6 + \dots$$
$$Y_1 = y_1 + y_{r+1} + y_{2r+1} + \dots = 3R_0 + 3R_3 \sin(3\xi+\alpha_3) + 3R_6 \sin(6\xi+\alpha_6) + \dots$$
$$Y_2 = y_2 + y_{r+2} + y_{2r+2} + \dots = 3R_0 + 3R_3 \sin(6\xi+\alpha_3) + 3R_6 \sin(12\xi+\alpha_6) + \dots$$

die einzelnen Schwingungen für sich berechnen. Man beginnt immer mit der Berechnung der höchsten Oberschwingung. Das konstante Glied drückt sich sehr einfach durch die Summe der Beobachtungen aus (vgl. oben).

Ist $y_{\frac{n}{2}+k} = -y_k$, d.h. ist die Kurve symmetrisch, so fallen die Glieder mit geraden Indizes weg.

II. Interpolation durch Exponentialfunktionen.

Liegen 4 aequidistante Beobachtungen $t = 0, 1, 2, 3$; $y = y_0, y_1, y_2, y_3$ einer sogen. Abklingungserscheinung vor, so benützt man am besten eine Interpolationsformel der Form:

$$y = \alpha e^{-\lambda t} + \beta e^{-\mu t}$$

Die unbekannten Größen $e^{-\lambda}$ und $e^{-\mu}$ können als Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$a z^2 - b z + c = 0$$ berechnet werden, wobei

$$a = \begin{vmatrix} y_0 & y_1 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} y_0 & y_1 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \qquad c = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Die unbekannten Koeffizienten $\alpha$ und $\beta$ können dann aus zweien von den 4 Bestimmungsgleichungen der Koeffizienten etwa $y_0 = \alpha + \beta$, $y_1 = \alpha \cdot (e^{-\lambda}) + \beta \cdot (e^{-\mu})$ berechnet werden.

Man hat 3 Fälle zu unterscheiden

1.) Sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung reell und voneinander verschieden, so ist der angegebene Rechnungsgang ohne weiteres anwendbar.

2.) Hat die quadratische Gleichung eine Doppelwurzel, so verwendet man den Ansatz $y = (\alpha + \beta t) e^{-\lambda t}$.

3.) Sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung konjugiert imaginär, so kommt man auf eine Interpolationsformel der Form $y = e^{-\lambda t}(A \cos \mu t + B \sin \mu t)$. {Gedämpfte Schwingung.}

## Aufgaben.

1.) Man stelle für die Beobachtungen $x = 0°;\ 72°;\ 144°;\ 216°;\ 288°$
$y = 1;\ 0{,}8968;\ -1{,}7601;\ 0{,}1421;\ -0{,}2788$
eine Interpolationsformel auf und zeichne die Funktion.

2.) Eine durch den Ursprung gehende periodische Funktion, welche symmetrisch in bezug auf den Punkt $x = \pi$ ist, und die Linien $x = \frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{3\pi}{2}$ zu Symmetrieachsen hat, soll aufgrund der Beobachtungen $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{5} \\ y_1 = 1{,}5790 \end{cases}$ $\begin{matrix} x_2 = \frac{2\pi}{5} \\ y_2 = 2{,}3686 \end{matrix}$ nach dem Verfahren von Fischer-Hinnen durch eine Interpolationsformel dargestellt werden. Man gehe in der Entwicklung bis zum Glied mit dem Index 5.

3.) Gesättigter Wasserdampf hat bei

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| den Temperaturen | 0° | 10° | 20° | 30° | C |
| bezw. eine Spannkraft von | 4,6 | 9,2 | 17,4 | 31,6 | mm Hg. |

Man stelle eine zweckmäßige Interpolationsformel für diese Angaben auf.

27. VI. 11. Nr. 8

# Höhere Mathematik II.

## Integration rationaler gebrochener Funktionen.

Unecht gebrochene Funktionen werden durch Division in eine Summe aus einer ganzen und einer echt gebrochenen Funktion zerlegt. Echt gebrochene Funktionen werden gewöhnlich {jedoch nicht immer!} in Partialbrüche zerlegt. Zu diesem Zwecke muß man zunächst den Nenner des Bruches in Faktoren zerlegen. Man hat dann:

1.) Für lauter einfache Wurzeln des Nenners hat man den Ansatz:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x)}{a_0(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\dots} \equiv \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma} + \dots,$$

wobei $A = \frac{\varphi(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{\varphi(\alpha)}{a_0(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\dots}$; $B = \frac{\varphi(\beta)}{f'(\beta)} = \frac{\varphi(\beta)}{a_0(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)\dots}$; $C = \frac{\varphi(\gamma)}{f'(\gamma)} = \frac{\varphi(\gamma)}{a_0(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\dots}$.

dabei ist $f'(\alpha) = \left\{\frac{df(x)}{dx}\right\}_{x=\alpha}$

2.) Für mehrfache Wurzeln muß der Ansatz verwendet werden:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^n(x-\beta)^m\dots} \equiv \frac{A}{(x-\alpha)^n} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{n-1}} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{n-2}} + \dots + \frac{A_{n-2}}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_{n-1}}{x-\alpha}$$
$$+ \frac{B}{(x-\beta)^n} + \frac{B_1}{(x-\beta)^{n-1}} + \frac{B_2}{(x-\beta)^{n-2}} + \dots + \frac{B_{n-2}}{(x-\beta)^2} + \frac{B_{n-1}}{x-\beta}.$$

3.) Will man für imaginäre Wurzeln eine reelle Zerlegung, so muß man setzen:

$$\frac{\varphi(x)}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}\{(x-\gamma)^2+\delta^2\}(x-\lambda)(x-\mu)\dots} \equiv \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{Cx+D}{(x-\gamma)^2+\delta^2} + \dots + \frac{L}{x-\lambda} + \frac{M}{x-\mu} + \dots$$

4.) Beim Vorkommen von mehrfachen quadratischen Faktoren setzt man:

z. B. $\frac{x^6}{(x^4+4)^2} \equiv \frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3}{(x^2-2x+2)^2} + \frac{E+Fx+Gx^2+Hx^3}{(x^2+2x+2)^2}$, wobei $x^4+4=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$

Sämtliche angeschriebene Partialbruchzerlegungen müssen identisch erfüllt sein. Die auftretenden Koeffizienten $A, B, \dots$ können demnach bestimmt werden, indem man

a.) eine Anzahl $x$-Werte, am einfachsten {soweit möglich!} Wurzelwerte von $f(x)=0$, links und rechts einsetzt oder

b.) die Koeffizienten gleich hoher Potenzen beider Seiten vergleicht.

Beide Methoden liefern die zur Bestimmung der Konstanten $A, B, \ldots$ notwendigen Gleichungen.

Integration der Partialbrüche

zu 1. u. 2.) $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\log|ax+b| + C$; speziell: $\int \frac{dx}{x-c} = \log|x-c| + C$.

" 3.) $\int \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx$ führt durch die Subst.: $x-\alpha = \beta \cdot t$ auf die Integrale:

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C \qquad \int \frac{t\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\log(1+t^2) + C.$$

" 4.) Man wendet auf die Partialbrüche der rechten Seite die soeben angegebene Substitution an und kommt auf ein Integral der Form:

$$\int \frac{A'+B't+C't^2+D't^3}{(t^2+1)^2}dt = \int \frac{B't+D't^3}{(t^2+1)^2}dt + \int \frac{A'+C't^2}{(t^2+1)^2}dt = J_1 + J_2$$

Bei $J_1$ führt die Substitution: $t^2+1 = u$; $t\frac{dt}{du} = \frac{1}{2}$ auf einfache Integrale.

" $J_2$ " " " $t = \operatorname{tg} u$; $\frac{dt}{du} = \frac{1}{\cos^2 u}$ auf trigon. Integrale.

NB. Wenn unter dem vorgelegten Integral nur gerade Potenzen von $x$ auftreten, so kann die Berechnung der Partialbruchkoeff. wesentlich vereinfacht werden, z. B. ist für das Beispiel unter 4.): $E = A$, $F = -B$, $G = C$, $H = -D$.

## Aufgaben.

Es sind die folgenden Integrale zu berechnen:

1.) $\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2} + C$. 2.) $\int \frac{3+10x}{(4+3x+5x^2)^2}dx = -\frac{1}{4+3x+5x^2} + C$.

3.) $\int \frac{x^5}{1+x^2}dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \log\sqrt{1+x^2} + C$. 4.) $\int \frac{dx}{x^2-2x-8} = \log\sqrt[6]{\frac{x-4}{x+2}} + C$.

5.) $\int \frac{3x+2}{x^2-x-2}dx = \frac{1}{3}\log C(x+1)(x-2)^8$. 6.) $\int \frac{x^2-2}{(x-1)^4}dx = \frac{1+3x-3x^2}{3(x-1)^3} + C$.

7.) $\int \frac{2x^2-1}{x^3-1}dx = \frac{1}{3}\log(x-1) + \frac{5}{6}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$.

8.) $\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}dx = \log x + \frac{1}{x^2+1} + C$.

---

Ergänzung zu Aufgabe 2 des vorigen Übungsblattes: Die gemachten Angaben genügen nicht zur Berechnung sämtlicher Glieder. Weitere notwendige Werte können aus der Gleichung der Funktion: $y = x(\pi - x)$ berechnet werden.

4.VIII.11. Nr. 9.

# Höhere Mathematik II.

## Integration irrationaler Funktionen.

1.) Das Integral einer rationalen Funktion von $x$ und $\sqrt[m]{ax+b}$:
$\int R(x, \sqrt[m]{ax+b})\,dx$ wird durch die Substitution: $ax+b=t^m$; $x=\frac{t^m-b}{a}$
auf das Integral einer rationalen Funktion von $t$ zurückgeführt.

2.) Eine rationale Funktion von $x$ und $X=\sqrt{ax^2+bx+c}$ kann stets in die Summe aus einer rationalen Funktion von $x$ und einer durch $X$ dividierten rationalen Funktion von $x$ zerlegt werden: $R(x,X)=r_1(x)+r_2(x)\cdot\frac{1}{X}$.
$r_1(x)$ wird nach den Angaben des vorigen Übungsblattes integriert, während $r_2(x)\cdot\frac{1}{X}$ durch Partialbruchzerlegung von $r_2(x)$ dreierlei Gattungen von Integralen liefern kann:

$$\text{I.)}\ \int g(x)\cdot\frac{dx}{X} \qquad \text{II.)}\ \int\frac{g_{n-1}(x)}{(x-\alpha)^n}\cdot\frac{dx}{X} \qquad \text{III.)}\ \int\frac{g_{2n-1}(x)}{\{(x-\alpha)^2+\beta\}^n}\cdot\frac{dx}{X}$$

$g(x)$, $g_{n-1}(x)$, $g_{2n-1}(x)$ bedeuten rationale ganze Funktionen.

Liegt ein solches Integral vor $\{\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\}$ so kann man dasselbe

1.) für $a>0$, $c-\frac{b^2}{4a}>0$ durch d. Subst. $\sqrt{a}(x+\frac{b}{2a})=\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}\cdot t$ auf d. Form $\int R_1(t,\sqrt{t^2+1})dt=\int R_1(t,T)dt$,

2.) " $a>0$, $c-\frac{b^2}{4a}<0$ " $\sqrt{a}(x+\frac{b}{2a})=\sqrt{-c+\frac{b^2}{4a}}\cdot t$ " $\int R_1(t,\sqrt{t^2-1})dt=\int R_1(t,T)dt$,

3.) " $a<0$, $c-\frac{b^2}{4a}>0$ " $\sqrt{-a}(x+\frac{b}{2a})=\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}\cdot t$ " $\int R_1(t,\sqrt{1-t^2})dt=\int R_1(t,T)dt$ bringen.

4.) Für $a<0$, $c-\frac{b^2}{4a}<0$ wird das Integral imaginär.

Zu I.) Nach Anwendung der soeben angegebenen Substitution kommt man

1.) für $T=\sqrt{t^2+1}$ durch d. Subst. $t=\frac{1}{2}(e^u-e^{-u})=\operatorname{Sin} u$, also $T=\frac{1}{2}(e^u+e^{-u})$, $\frac{dt}{du}=\frac{1}{2}(e^u+e^{-u})$,

2.) " $T=\sqrt{t^2-1}$ " $t=\frac{1}{2}(e^u+e^{-u})=\operatorname{Cos} u$, " $T=\frac{1}{2}(e^u-e^{-u})$, $\frac{dt}{du}=\frac{1}{2}(e^u-e^{-u})$,

3.) " $T=\sqrt{1-t^2}$ " $t=\sin u$, " $T=\cos u$, $\frac{dt}{du}=\cos u$

auf Fundamentalintegrale. In allen drei Fällen ist $\frac{1}{T}\frac{dt}{du}=1$.

Zu II.) Durch die Substitution $x-\alpha=\frac{1}{z}$, $x=\alpha+\frac{1}{z}$, $\frac{dx}{dz}=-\frac{1}{z^2}$ wird das Integral auf ein Integral der Form (I.) zurückgeführt.

NB. Für den Erfolg der Methode ist wesentlich, daß $g_{n-1}(x)$ von niedrigerem Grad ist als $(x-\alpha)^n$.

Kennt man die allgemeine Form des Resultats des zu lösenden Integrals, so ist es häufig zweckmäßig, dasselbe mit unbestimmten Koeffizienten anzusetzen, links und rechts zu differenzieren und die Koeffizienten gleich hoher Potenzen zu vergleichen. Das liefert die nötige Zahl Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten.

Dieses Verfahren ist vor allem zu empfehlen bei Integralen der Form $\int\frac{g_{n-1}(x)}{X^{2n+1}}\,dx$. Man hat den Ansatz:

$$\int\frac{g_{n-1}(x)}{X^{2n+1}}\,dx=\frac{g_{n-2}(x)}{X^{2n-1}}+A\int\frac{dx}{X}.$$

Zu III.) Siehe nächstes Blatt.

## Aufgaben.

Man berechne die Integrale:

1.) $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\arcsin(x-1)+C$

2.) $\int\frac{x^2}{3\sqrt[3]{x+2}}\,dx=\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{10}x+\frac{9}{10}\right)\sqrt[3]{(x+2)^2}+C.$

3.) $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$

4.) $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x+x^2)^3}}=\frac{\frac{2}{3}(1+2x)}{\sqrt{1+x+x^2}}+C$

5.) $\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)\sqrt{1+x^2}}=-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+C$

6.) $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{(1-x^2)^3}}=-\frac{1+4x^2-8x^4}{3x^3\sqrt{1-x^2}}+C$

7.) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{8}\log\left(1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}\right)+C$

8.) $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=-\frac{x}{4}(1-x^2)^{3/2}+\frac{1}{8}\arcsin x+\frac{x}{8}\sqrt{1-x^2}+C.$

---

11. VII. 11. Nr. 10

# Höhere Mathematik II.

## Integration irrationaler Funktionen. (Fortsetzung)

Ein Integral der Form (III) des vorigen Übungsblattes kann geschrieben werden $\int \frac{g_{2n-1}^{(x)}}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^n} \cdot \frac{dx}{X} = \frac{g_{2n-3}^{(x)}}{\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^{n-1}} + \int \frac{\bar{a}x+\bar{b}}{(x-\alpha)^2+\beta^2} \cdot \frac{dx}{X}$, wo $X = \sqrt{ax^2+bx+c}$.

Die Koeffizienten der rechten Seite werden bestimmt, indem man links und rechts differenziert und die Koeff. gleich hoher Potenzen von $x$ vergleicht {vgl. vorige. Blatt}.

Das Integral $\int \frac{\bar{a}x+\bar{b}}{(x-\alpha)^2+\beta^2} \cdot \frac{dx}{X}$ wird

1.) für den Fall, daß $X^2$ in reelle Faktoren zerlegbar ist $\{X^2 = a(x-\bar{\alpha})(x-\bar{\beta})\}$ für $a>0$ durch d. Subst. $\frac{x-\bar{\alpha}}{x-\bar{\beta}} = u^2$, für $a<0$ durch d. Subst. $\frac{x-\bar{\alpha}}{x-\bar{\beta}} = -u^2$ in das Integral einer rationalen Funktion von $u$ übergeführt;

2.) für den Fall, daß $X^2$ nicht reell zerlegbar ist, durch die Substitution $x = \frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\gamma t+\delta)^2}$ auf ein Integral der Form gebracht:

$$\int \frac{(at+b)dt}{(t^2+p^2)\sqrt{t^2+1}} = a\int \frac{t\,dt}{(t^2+p^2)\sqrt{t^2+1}} + b\int \frac{dt}{(t^2+p^2)\sqrt{t^2+1}} = a\cdot J_1 + b\cdot J_2$$

Von den Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind zwei willkürlich {jedoch so, daß die Transformationsformel noch einen Sinn hat} zu wählen und die beiden anderen so, daß die linearen Glieder im Nenner der zu integrierenden Funktion verschwinden.

$J_1$ führt auf ein Integral einer rationalen Funktion d. d. Subst.: $t^2+1 = u^2$

$J_2$ kann auf ein Integral der Form $J_1$ durch d. Subst.: $t = \frac{1}{u}$, $\frac{dt}{du} = -\frac{1}{u^2}$ zurückgeführt werden.

## Zur Integration trigonometrischer Funktionen [vgl. W.S. Nr 13. I, 6].

1.) Integrale der Form: $\int \sin^{2m}x \cos^{2n}x\,dx$ werden zweckmäßig nicht durch Rationalmachen mittels $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ [vgl. W.S. Nr. 13. I, 6] sondern durch Zurückgehen auf die Exponentialfunktion [vgl. S.S. Nr. 4] gelöst.

2.) $\int \frac{dx}{a+b\cos x}$ wird mittels $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$ auf die Form $2\int \frac{dt}{(a+b)+(a-b)t^2}$ gebracht, das nach Nr. 8 weiter behandelt wird.

# Das Rechnen mit Differentialien (unendlich kleinen Größen).

## I. Definitionen und Sätze über unendlich kleine Größen im allgemeinen.

1.) Definition. Eine Größe, die am Schluß einer Rechnung gleich null gesetzt werden oder unbegrenzt abnehmende Werte erhalten soll, heißt eine unendlich kleine Größe.

2.) Satz. Das Produkt aus einer unendlich kleinen Größe und einer Größe, die für $h=0$ endlich bleibt, ist selbst eine unendl. kleine Größe.

3.) Satz. Summe, Differenz und Produkt zweier unendlich kleinen Größen sind selbst unendlich klein.

4.) Definition. Zwei unendlich kleine Größen, deren Quotient endlich u. von null verschieden bleibt, heißen unendlich klein von derselben Ordnung.

5.) Definition. Wenn man verabredet, daß eine bestimmte unendlich kleine Größe als „unendlich klein von der ersten Ordnung" angesehen werden soll, so sagt man, die Potenz $h^n$ heißt von der $n^{ten}$ Ordnung unendlich klein; dann heißt auch jede Größe von der $n^{ten}$ Ordnung unendlich klein, die von derselben Ordnung unendlich klein ist wie $h^n$.

6.) Definition. Eine Gleichung zwischen zwei Polynomen, in welchen unendlich kleine Größen verschiedener Ordnung vorkommen, hat folgenden Sinn: man soll mit einer derjenigen Größen, die die niedrigste Ordnungszahl haben – nennen wir sie $h$ – dividieren, dann die Quotienten zweier unendlich kleiner Größen derselben Ordnung durch ihre endlichen Werte ersetzen u. $h$ gleich null setzen.

7.) Regel. In einem Polynom dürfen neben unendlich kleinen Größen bestimmter Ordnung solche höherer Ordn. weggelassen werden.

## II. Das Differential.

Festsetzung. Soll eine unabhängige Variable $x$ um eine unendlich kleine Größe vermehrt werden, so nennt man diese unendlich kleine Größe „das Differential von $x$" und bezeichnet sie mit $dx$ (was nicht als Produkt sondern wie ein einziges Zeichen anzusehen ist). Vermehren wir $x$ um $dx$, so bezeichnen wir die zugehörige Vermehrung irgendeiner Funktion $y$ von $x$ mit $dy$:

$$dy = f(x+dx) - f(x).$$

Definition. Wenn $dy$ mit $dx$ zugleich unendlich klein wird, so heißt $y$ eine stetige Funktion von $x$.

<u>Definition.</u> Ohne ausdrückliche Verabredung soll das Differential der unabhängigen Variabeln immer als unendlich kleine Größe I. Ordnung gelten.

<u>Definition.</u> Eine Funktion, deren Differential unendlich klein von der I. Ordnung ist, heißt <u>differentierbar</u>.

<u>Definition des Differentials II. Ordnung $d^2y$:</u>

$$f(x+2dx) = y + dy + (dy + d^2y)$$

Es ist:

$$d^2y = f''(x)\cdot dx^2$$

<u>Regel.</u> Das II. Differential der unabhängigen Variabeln ist als null anzusehen. Das Differential I. Ordnung von der unabhängigen Variabeln ist also wie eine Konstante zu behandeln.

<u>Formeln.</u>

1.) Für das „Differential $n^{ter}$ Ordn." eines Produkts $u\cdot v$ zweier Funktionen $u$ und $v$ gilt

$$d^n(u\cdot v) = u\cdot d^n v + \binom{n}{1} du\, d^{n-1}v + \binom{n}{2} d^2u\, d^{n-2}v + \ldots + \binom{n}{1} d^{n-1}u\, dv + d^n u\cdot v.$$

speziell: $d(u\cdot v) = u\cdot dv + v\cdot du,$

$$d^2(u\cdot v) = u\cdot d^2v + 2\,du\,dv + v\,d^2u.$$

2.) Es sei $y = f(z)$, $z = \varphi(x)$

dann ist $dy = f'(z)dz = f'(z)\cdot\varphi'(x)\,dx$

$$d^2y = f'(z)d^2z + f''(z)dz^2 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2y}{dz^2}\cdot\left(\frac{dz}{dx}\right)^2.$$

3.) Wenn man die ursprünglich abhängige Variable zur unabhängigen macht und umgekehrt, so braucht man die Formeln:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}\,; \qquad \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$$

4.) Ist eine Funktion in Parameterform gegeben: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3} \qquad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{\varphi''(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi''(t)}{[\psi'(t)]^3}.$$

## Aufgaben.

Man werte die folgenden Integrale aus und bringe die Resultate auf die angegebenen Formen:

1.) $\int \frac{dx}{(x^2+p^2)\sqrt{x^2-q^2}} = \frac{1}{2p\sqrt{p^2+q^2}} \cdot \log \frac{p\sqrt{x^2-q^2}+x\sqrt{p^2+q^2}}{p\sqrt{x^2-q^2}-x\sqrt{p^2+q^2}} + C$

2.) $\int \frac{1-x}{5x^2-18x+17} \cdot \frac{dx}{\sqrt{10x^2-22x+13}} = \frac{1}{\sqrt{35}} \cdot \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{10x^2+22x+13}}{(x-2)\sqrt{35}}$

3.) $\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x \, dx = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{3}\cos 3x - 2\cos x\right) + C = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$

4.) $\int \cos^2 x \cdot \sin^4 x \, dx = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}\sin 6x - \frac{1}{2}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x + 2x\right) + C$

5.) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx = 2x - \operatorname{tang} x + C$ 6.) $\int \frac{\cos 2x}{\sin x} dx = 2\cos x + \log \operatorname{tang} \frac{x}{2} + C$

7.) $\int \frac{\cos x}{x^2} dx = -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{\sin x}{x} dx + C$ 8.) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx = -x \operatorname{cotg} x + \log \sin x + C.$

14. VII. 11.

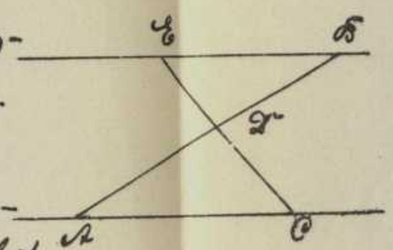
Platz Nr.

Name:

# Höhere Mathematik II.

## Semestralprüfung S. S. 1911.

1.) Es sind zwei Parallele in der Entfernung $h$, eine Transversale $AB$ und ein Punkt $C$ auf der einen Parallelen gegeben. Durch diesen Punkt $C$ soll eine zweite Transversale $CDE$ so geführt werden, daß die Summe der Inhalte der Dreiecke $ACD$ und $EDB$ möglichst klein wird. Wie groß ist das Minimum?




2.) Man berechne die folgenden unbestimmten Ausdrücke mittels Näherungsformeln:

a.) $y=\left[\dfrac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}\right]_{x=0}$; $y=\left[\dfrac{1-\cos x-\log\cos x}{x^2}\right]_{x=0}$; $y=\left[\dfrac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\dfrac{3}{x^4}\right]_{x=0}$:

3.) Wie ist der Wert von $\lambda$ zu wählen, damit die Gleichungen:

$$x+2\lambda y+1=0$$
$$\lambda x-4y-2=0$$
$$-3x+3y+\lambda=0$$

mit einander verträglich sind? {Die auftretende Gleichung 3. Grades hat eine einfache ganzzahlige Lösung. Es sind auch die anderen Wurzeln dieser Gleichung zu berechnen.}

4.) Man stelle die Gleichungen derjenigen Geraden auf, die auf der Ebene $15x+10y+6z=2$ rechtwinkelig steht und durch den Punkt $x_0=7$, $y_0=-2$, $z_0=5$ geht.

5.) Man beweise, daß $\dfrac{2}{i}\log\dfrac{(5+i)^4(-239+i)}{(5-i)^4(-239+i)}=\pi$ ist.

6.) Man berechne das Integral $\displaystyle\int\frac{-3x^2+24x-32}{(x-3)^2(x^2+4)}\,dx$.

{Die Bearbeitungen sind auf diesen Bogen zu schreiben.}

7. XI. 11. **Höhere Mathematik III.** № 1.

## Rechnen mit Differentialien in der Integralrechnung.

1) Die Gleichung $\int_a^b f(x)\,dx = (x_1-x_0)y_0 + (x_2-x_1)y_1 + \cdots + (x_n-x_{n-1})y_{n-1} = \Sigma y\cdot\Delta x$ (wobei $x_0 = a$, $x_n = b$ ist und $x_1, x_2, x_3, \ldots$ irgendwelche aufeinanderfolgende Zwischenwerte von $x$ und $y_\nu$ die zu $x_\nu$ gehörigen Funktionswerte bedeuten) sagt aus, daß sich die Summe $\Sigma y\cdot\Delta x$ dem Wert des Integrals unbegrenzt nähert, wenn $\Delta x$ unendlich klein wird. Man sagt daher auch: Ein bestimmtes Integral ist die Summe unendlich vieler unendlich kleiner Größen $y\cdot dx$

2) Nach dieser Auffassung folgt sofort aus $d(u\cdot v) = u\cdot dv + v\cdot du$ oder $u\cdot dv = d(u\cdot v) - v\cdot du$ durch Integration der frühere Satz (H. M. I. № 10) über partielle Integration:

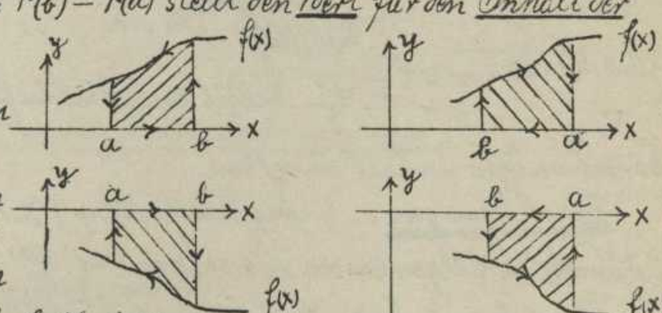
$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du.$$

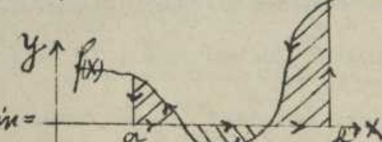
3) Durch Einführung einer anderen Integrationsvariabeln $z$ mittelst der Gleichung $x = \varphi(z)$, woraus folgt $dx = \varphi'(z)\,dz$ in $\int f(x)\,dx$ ergibt sich auch der Satz von der Integration durch Substitution (H. M. I № 10), welcher häufig in der umgekehrten Form benützt wird:

$$\int f[\varphi(z)]\cdot\varphi'(z)\cdot dz = \int f(x)\,dx.$$

4) Satz: Der Grenzwert einer Summe unendlich vieler unendlich kleiner Größen wird nicht geändert, wenn man zu jeder der unendlich kleinen Größen eine unendlich kleine Größe höherer Ordnung hinzufügt oder wegnimmt. (Oder zu jedem Element einer endlichen Anzahl dieser unendlich vielen unendlich kleinen Größen eine unendlich kleine Größe derselben Ordnung hinzufügt oder wegnimmt.)

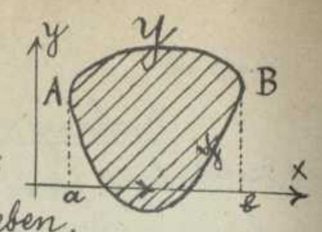
5) Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ stellt den Wert für den Inhalt der schraffierten Fläche dar, falls derselbe mit dem Plus- oder Minuszeichen versehen wird, je nachdem die Fläche positiv oder negativ umlaufen wird. Diese Regel ist namentlich dann zu beachten, wenn die Kurve $y = f(x)$ im Intervall teils oberhalb, teils unterhalb der x-Achse verläuft.




6) Für den Inhalt der durch eine geschlossene Kurve ein=

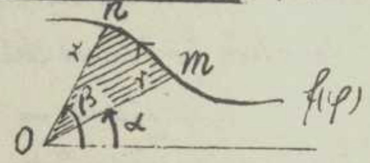
gefaßten Fläche gilt: $\underline{\text{Fläche} = \int_a^b Y dx - \int_a^b y dx = \int_a^b (Y-y) dx}$



Dabei bedeutet $Y$ bezw. $y$ der von den Punkten $A$ und $B$ begrenzte obere bezw. untere Teil der Kurve.

7) Ist die Kurve $y = f(x)$ in <u>Parameterform</u> durch $\begin{matrix} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{matrix}$ gegeben, so wird die Formel für den Flächeninhalt zwischen den Ordinaten $\begin{matrix} x = a = \varphi(t_1) \\ x = b = \varphi(t_2) \end{matrix}$ : $\underline{\text{Fläche}} = \underline{\int_{t=t_1}^{t=t_2} \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt}$

8) Schließlich, bei Darstellung der Kurve $y = f(x)$ in <u>Polarkoordinaten</u> $r = f(\varphi)$ wird der Ausdruck für die Fläche $OMN = \frac{1}{2} \int_{\varphi=\alpha}^{\varphi=\beta} r^2 d\varphi$

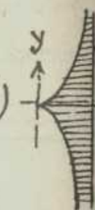


## <u>Aufgaben.</u>

1) Berechne den Inhalt der nachfolgend begrenzten Flächenteile:

a) $r^2 = a^2 \cdot \cos 2\varphi$ (Lemniskate)

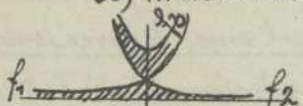
b) $(2a - x)\, y^2 = x^3$ (Cissoide)



c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

d) Kreisabschnitt

e) $f_1 = e^x$, $f_2 = e^{-x}$, $f_3 = e^x + e^{-x}$



f) Die Fläche, oben begrenzt von der Kurve $y = \frac{1}{x}$, unten von der Kurve $y = \frac{1}{x+1}$, seitlich von den Geraden $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

g) Das von den Kurven $y_1 = \sin x$ und $y_2 = -\left(\frac{x^2}{\pi^2} + 1\right)$ begrenzte schraffierte Flächenstück.

2) Die Kurve $\begin{matrix} x = t^2 \\ y = t - \frac{t^3}{3} \end{matrix}$ bildet eine Schleife (von $t = -\sqrt{3}$ bis $t = +\sqrt{3}$). Man berechne den Inhalt derselben.

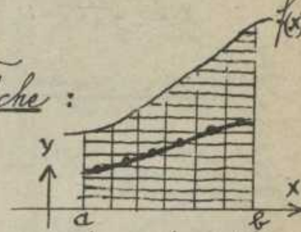
<u>Berichtigungen</u>: 1) Auf Blatt №9 (H.M.II) ist die letzte Formel unrichtig und durch die allgemeinere zu ersetzen: $\int \frac{g_k^{(x)}}{X^{2n+1}} dx = \frac{g_l^{(x)}}{X^{2n-1}} + A \int \frac{dx}{X}$, wobei $l$ die größere der beiden Zahlen $k-1$ und $2n-1$ bedeutet. Ferner gilt $\int g_k^{(x)} X^{2n+1} dx = g_{k+2n+1}^{(x)} \cdot X + A \int \frac{dx}{X}$.

2) Im ersten Ausdruck auf der rechten Seite der ersten Gleichung auf Blatt №10 (H.M.II) ist im Zähler $X$ zu ergänzen.

14. XI. 1911. Höhere Mathematik III. № 2.

## Formeln.

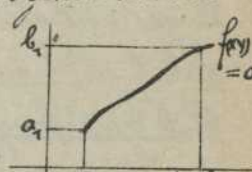
1, Koordinaten des Schwerpunktes einer ebenen homogenen Fläche:




$$X = \frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx} \; ; \qquad Y = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{\int_a^b y\,dx}.$$

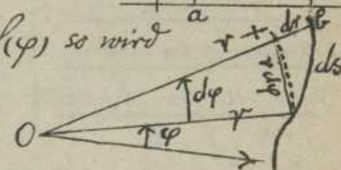
Satz: Um den Schwerpunkt des gesamten Systems zu bestimmen, zerlegt man dasselbe in einzelne Teile deren Schwerpunkte für sich ermittelt werden. Dann verfährt man so, wie wenn die Massen der einzelnen Teile in diesen Schwerpunkten vereinigt wären. So ist die in der Figur angedeutete Schwerpunktsbestimmung identisch mit derjenigen einer nicht homogenen Kurve.

2, Bogenlänge einer ebenen Kurve $f(x,y) = 0$ oder $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t). \end{cases}$



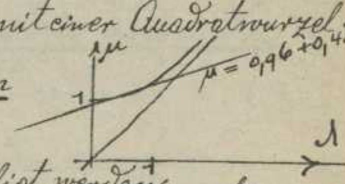

$$S = \int_a^b ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx = \int_{a_1}^{b_1} \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\cdot dy$$

Ist die Kurve in Polarkoordinaten definiert als $r = f(\varphi)$ so wird die Bogenlänge $S = \int \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$




Satz: Die Berechnung einer Bogenlänge kann auf diejenige eines Flächeninhaltes zurückgeführt werden.

NB! Die näherungsweise Auswertung bestimmter Integrale mit einer Quadratwurzel im Integranden kann oft durch Anwendung der Poncelet'schen Näherungsformel $\mu = \sqrt{1+\lambda^2} \sim 0{,}96 + 0{,}4\lambda$, $0 < \lambda < 1$ bewerkstelligt werden.




3, Koordinaten des Schwerpunktes eines ebenen Kurvenbogens: $X = \frac{\int_a^b x\rho\,ds}{\int_a^b \rho\,ds}$

(Masse des Bogenelementes $= \rho \cdot ds$.)

$\rho = \varphi(x) = \psi(y)$ $\qquad Y = \frac{\int_a^b y\cdot\rho\,ds}{\int_a^b \rho\,ds}$

## Raumkurven.

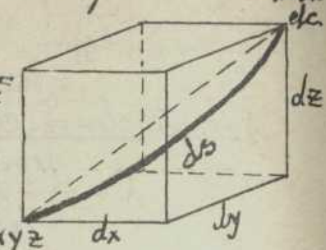
1, Eine Raumkurve ist als [gewöhnlich unvollständiger] Schnitt zweier Flächen bestimmt.

$$\varphi(x,y,z) = 0$$
$$\psi(x,y,z) = 0.$$

Die Elimination von $z$ aus diesen beiden Gleichungen liefert die Projektion der Kurve auf die $xy$-Ebene.

2, Setzt man $x=\varphi(t)$, so können mittelst der vorausgehenden Gleichungen auch $y$ und $z$ als Funktionen des Parameters $t$ dargestellt werden und die Kurve ist definiert durch

$$x=\varphi(t)\ ; \quad y=\psi(t)\ ; \quad z=\chi(t)\ .$$




3, Bogenelement einer Raumkurve: $ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$

Bogenlänge $S=\int_a^b ds$

Schwerpunktskoordinaten

$\rho=f(t)$ = Masse pro Längeneinheit.

$$\begin{cases} M\cdot X=\int_a^b \rho\cdot x\cdot ds \\ M\cdot Y=\int_a^b \rho\cdot y\cdot ds \\ M\cdot Z=\int_a^b \rho\cdot z\cdot ds \end{cases} \qquad M=\int_a^b \rho\cdot ds$$

4, Ist die Bogenlänge $S$ als $f(t)$ mittelst obiger Formel gefunden, so kann die Bogenlänge selbst als ein von einem bestimmten Anfangspunkt an zu zählender Parameter statt $t$ in die Kurvengleichung eingeführt werden.

5, Die Richtungscosinus der Tangente der Kurve:

$$\begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{dx}{ds}=x'=\dfrac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} \\ \cos\beta=\dfrac{dy}{ds}=y' \\ \cos\gamma=\dfrac{dz}{ds}=z' \end{cases}$$

Gleichung der Tangente in einem bestimmten Punkt $x, y, z$ der Kurve.

$$\frac{\xi-x}{\cos\alpha}=\frac{\eta-y}{\cos\beta}=\frac{\zeta-z}{\cos\gamma}.$$

NB! Es ist $\dfrac{dx}{ds}=\dfrac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}$ ; $\dfrac{d^2x}{ds^2}=\dfrac{\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{ds}{dt}-\frac{d^2s}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}$.

6, Gleichung der Schmiegungsebene (Oskulationsebene) in einem bestimmten Punkt $x, y, z$ der Kurve:

$$\begin{vmatrix} \xi-x & \eta-y & \zeta-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0=a\xi+b\eta+c\zeta+d.$$

7, Die Richtungscosinus der auf der Schmiegungsebene im Punkt $xyz$ der Kurve senkrechten Geraden, der Binormalen (Stellungscosinus der Schmiegungsebene)

$$\cos\lambda=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ ; \quad \cos\mu=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ ; \quad \cos\nu=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ ;$$

$a=dy\,d^2z-dz\,d^2y$

$b=dz\,d^2x-dx\,d^2z$ also $a:b:c=\left\|\begin{matrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{matrix}\right\|.$

$c=dx\,d^2y-dy\,d^2z$

$$a^2+b^2+c^2=[dx^2+dy^2+dz^2][d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2]-[dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z]^2$$

$$=[ds]^2[d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2]-[ds\cdot d^2s]^2 \quad \text{also}$$

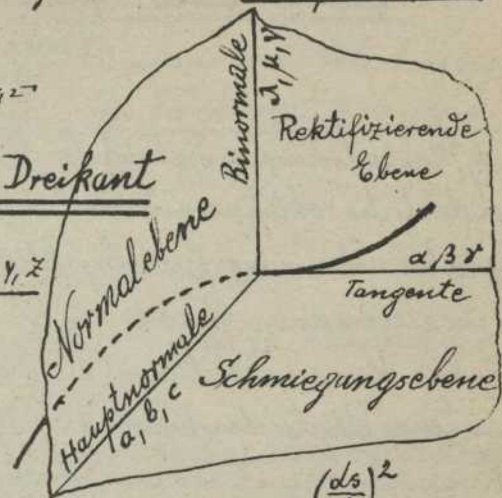
$$a^2+b^2+c^2=(ds)^2[d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2-d^2s^2]$$

8) Die Richtungscosinus der in der Schmiegungsebene befindlichen Normalen zur Kurve der Hauptnormalen (Stellungscosinus der rektifizierenden Ebene)

$$\cos a = \frac{x''}{w}$$

$$\cos b = \frac{y''}{w} \qquad w = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

$$\cos c = \frac{z''}{w}$$




## Begleitendes Dreikant

Gleichung der rektifizierenden Ebene im Punkt $x, y, z$

$$(\xi - x)\frac{d^2x}{ds^2} + (\eta - y)\frac{d^2y}{ds^2} + (\zeta - z)\cdot\frac{d^2z}{ds^2} = 0$$

Gleichung der Normalebene im Punkt $x, y, z$

$$(\xi - x)\cos\alpha + (\eta - y)\cos\beta + (\zeta - z)\cos\gamma = 0$$

9) Radius der 1. Krümmung der Kurve $\rho_1 = \frac{ds}{dw} = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}} = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2}}$

Radius der 2. Krümmung (Torsionsradius) der Kurve

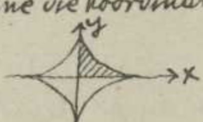
$$\rho_2 = \frac{ds}{dW} = \frac{1}{\rho_1^2 \cdot \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}} = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^6}{\rho_1^2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^2z}{dt^2} \\ \frac{d^3x}{dt^3} & \frac{d^3y}{dt^3} & \frac{d^3z}{dt^3} \end{vmatrix}}$$

NB! Für eine ebene Kurve im Raum ist $|\vdots\vdots\vdots| = 0$ für jeden Kurvenpunkt.

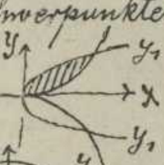
## Aufgaben.

1) Man berechne die Koordinaten des Schwerpunktes der folgenden schraffierten Flächenstücke

a) Astroide
$x = a\cos^3\varphi$
$y = a\sin^3\varphi$

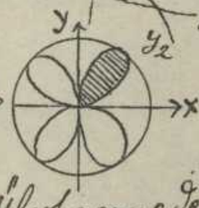



b)

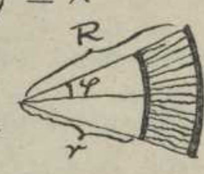



$y_1 \equiv y^4 = x^3$
$y_2 \equiv y^4 = x^5$

d) $r^2 = a^2 \sin^2 2\varphi$




c) Kreisringstück




2) Schwerpunkt der Cardioide $r = a(1 - \cos\varphi)$ (Übertragung der allgemeinen auf diesem Blatt stehenden Formeln für die Schwerpunktskoordinaten auf den Fall daß die gegebene Kurve (Begrenzungskurve) in Polarkoordinaten vorliegt.

3) Bogenlänge eines Stückes der Tractrix: $x = c \cdot \log\left[\frac{c+\sqrt{c^2-y^2}}{y}\right] - \sqrt{c^2-y^2}$
(von $\begin{matrix} x=0 \\ y=c \end{matrix}$ bis $\begin{matrix} x=x_0 \\ y=y_0 \end{matrix}$) ferner eines Stückes der Kettenlinie $y = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathcal{H}}{\gamma}\left[e^{\frac{\gamma}{\mathcal{H}}\cdot x} + e^{-\frac{\gamma}{\mathcal{H}}x}\right]$
(von $\begin{matrix} x=0 \\ y=\frac{\mathcal{H}}{\gamma} \end{matrix}$ bis $\begin{matrix} x=x_0 \\ y=y_0 \end{matrix}$)

4) Man bestimme a) die Tangente b) die Normalebene c) die Schmiegungsebene und die Binormale d) die rektifizierende Ebene und die Hauptnormale e) den Radius der ersten und der zweiten Krümmung f) die Projektionen auf die Koordinatenebenen der Kurve $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$ im allgemeinen Punkt $t=t_0$. (Kubische Ellipse).

5) Eine Kurve sei bestimmt als Durchschnitt eines parabolischen Zylinders $4ax=(y+z)^2$ und eines elliptischen Kegels $4x^2+3y^2-3z^2=0$. Man drücke die Koordinaten durch den Parameter $x+y=t$ aus und berechne den Bogen der Kurve zwischen dem Anf.-Punkt und dem Punkt $t_1$. Endlich bestimme man die Projektionen der Kurve auf die Koord.-Eb.

6) Die Gleichung einer Raumkurve sei $\begin{cases} x=2t \\ y=t^2 \\ z=2t^3 \end{cases}$ Man suche den Ort der Mittelpunkte der Sehnen die Punkte der Kurve verbinden, denen die Parameterwerte $t$ und $2t$ entsprechen.

7) Man untersuche die Kurve $x=e^t\cos at$, $y=e^t\sin at$, $z=b\cdot e^t$ (conische Spirale) und schreibe die Gleichung der Kurve so, daß der Bogen vom Anfangspunkt $t=-\infty$ an gerechnet Parameter wird. Ferner zeige man, daß sie auf dem Kegel $x^2+y^2-\frac{z^2}{b^2}=0$ liegt, die Erzeugenden desselben unter konstantem Winkel schneidet und auf die $xy$-Ebene projiziert eine logarithmische Spirale giebt.

8) Die Flächen $x^2+y^2=a^2$ und
$y^2+z^2=a^2$ schneiden sich in einer Raumkurve. Man bestimme deren Gleichung und Projektion auf die $xz$-Ebene.

9) Man bestimme die Bogenlänge der Raumkurve $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=t^{\frac{3}{2}} \end{cases}$ und beschreibe ihren Verlauf auf dem Zylinder $x^2+y^2=1$.
Wie würde die Gleichung der Kurve lauten, wenn man den Cylinder in die $yz$-Ebene abwickelt? Man bestimme auch für diese Abwicklung die Bogenlänge u. vergleiche sie mit der zuerst gefundenen.

21. XI. 11. **Höhere Mathematik III.** № 3.

## Funktionen von zwei oder mehreren Veränderlichen.

1) Definition der nach den voneinander unabhängigen Variabeln $x$ bezw. $y$ genommenen partiellen Differentialquotienten der Funktion $z = f(x,y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = f_1(x,y).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y = 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = f_2(x,y).$$

2) Unter dem totalen Differential der Funktion $z = f(x,y)$ nämlich

$$dz = f_1(x,y)\cdot dx + f_2(x,y)\cdot dy$$

versteht man die Änderung, welche $z$ bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung erleidet, wenn sich $x$ um $dx$, $y$ um $dy$ ändert, wobei $dx$ und $dy$ als unendlich kleine Grössen von derselben Ordnung zu betrachten sind.

3) Umkehrung des Satzes vom totalen Differential: Wenn es auf irgend eine Weise gelingt, das totale Differential einer Funktion $z = f(x,y)$ in der Form zu schreiben $dz = p\cdot dx + q\cdot dy$, dann sind $p$ und $q$ die partiellen Differentialquotienten $f_1$ bezw. $f_2$. (Es ist also nicht möglich, das totale Differential auf verschiedene Arten zu schreiben.)

4) Ist $\left.\begin{aligned} z &= f(x,y) \\ x &= \varphi(u,v) \\ y &= \psi(u,v) \end{aligned}\right\}$ so gilt $\quad \alpha) \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$

und, wie aus Vertauschung der Buchstaben $x$ und $y$ mit $u$ bezw. $v$ daraus folgt

$$\beta) \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

Andererseits erhält man durch Auflösung des Gleichungssystems $\alpha)$ nach $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\gamma) \begin{cases} \Delta\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u} \\[2ex] \Delta\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u} \end{cases}$$

Dabei bedeutet

$$\Delta \equiv \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \equiv \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

die Funktionaldeterminante oder die Jacobische Determinante

Durch Vergleich der Koeffizienten von $\frac{\partial z}{\partial u}$ und $\frac{\partial z}{\partial v}$ in β) und γ) ergibt sich:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\Delta}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial x}{\partial v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-1}{\Delta}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\Delta}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}$$

welche Gleichungen der für Funktionen von einer Veränderlichen geltenden Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ entsprechen.

Ist $u = \varphi(u)$ allein, so gilt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u}}\\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial v}}\end{aligned}\right\}\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \sigma.$$

Für den Übergang von Cartesischen- zu Polarkoordinaten mittelst $\begin{matrix}x = r\cos\varphi\\ y = r\sin\varphi\end{matrix}$ gilt

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}} = r$$

und allgemein besteht der Satz: Löst man bei einer Funktionaldeterminante die Rolle der Variabeln vertauschen, so erhält man den reziproken Wert.

Ist $\begin{cases}x = u\\ y = \psi(x,v)\\ z = f(x,y)\end{cases}$ so gilt: $\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{v=const.} = \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{y=const.} + \left[\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{v=const.}$

Ein partieller Differentialquotient ist erst dann völlig bestimmt, wenn man nicht nur die Variable angibt, nach welcher differentiiert werden soll, sondern auch die Variable, welche dabei konstant bleibt.

5) Angenommen u und v sind von x allein abhängig. Dann gilt

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

6) Höhere partielle Differentialquotienten der Funktion $z = f(x,y)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{11}(x,y);\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f_{12}(x,y);\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = f_{21}(x,y);\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{22}(x,y)\ \text{etc.}$$

Satz: $f_{12} = f_{21}$, $f_{123} = f_{132} = f_{213} = f_{231} = f_{312} = f_{321}$ etc.

Aufgaben: 1) Man bilde $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ für α) $z = \frac{y\log x}{x\log y}$

β) $z = \arccos\frac{xy + y^3 - 3x^2y}{x - y}$ γ) $z = \frac{1}{\sqrt{\cos xy}}$ δ) $z = \frac{e^{xy} + yx}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2) Man transformiere den Differentialausdruck $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ in Polarkoordinaten.

3) Es ist $u = f(v)$ und $v = \varphi(x,y)$. Man berechne $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ und $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}$ und drücke sie durch die Differentialquotienten von f und φ aus!

28. XI. 1911. Höhere Mathematik III. № 4

## Die Taylorsche Reihe für 2 Veränderliche.

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + h f_1 + k \cdot f_2 + \frac{1}{2!}\left[h^2 f_{11} + 2hk f_{12} + k^2 f_{22}\right] + \frac{1}{3!}\left[h^3 f_{111} + 3h^2 k f_{112} + 3hk^2 f_{122} + k^3 f_{222}\right] + \dots$$

$$= \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{h^m}{m!} \cdot \frac{k^n}{n!} \frac{\partial^{m+n} f(x,y)}{\partial x^m \partial y^n} = \sum_{r=0}^{r=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{r!}\left[\frac{r!}{r-n!\,n!} h^{r-n} \cdot k^n \frac{\partial^r f}{\partial x^{r-n} \partial y^n}\right].$$

NB! Man erkennt sofort, daß die Reihe für 3 Veränderliche geschrieben werden könnte

als $$f(x+h, y+k, z+l) = \sum_{r=0}^{r=\infty} \sum_{m=0}^{m=r} \sum_{n=0}^{n=r-m} \frac{1}{r!}\left[\frac{r!}{r-m-n!\,m!\,n!} h^{r-m-n} k^m l^n \frac{\partial^r f(x,y,z)}{\partial x^{r-m-n} \partial y^m \partial z^n}\right].$$

u. s. f. Dabei ist unter $\frac{\partial^0 f}{\partial x^0 \partial y^0}$ und unter $\frac{\partial^0 f}{\partial x^0 \partial y^0 \partial z^0}$ die betreffende Funktion $f(x,y)$ bzw. $f(x,y,z)$ selbst verstanden.

## Differentiation impliciter Funktionen.

Aus dem Satz vom totalen Differential folgt für den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ der Funktion $f(x,y)=0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-f_1}{f_2} \qquad \text{ferner}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{f_2^3}\left[f_{11} f_2^2 - 2 f_{12} f_1 f_2 + f_{22} f_1^2\right].$$

Gleichung der Tangente und Normale an die durch $f(x,y)=0$ definierte Kurve im Punkt $x\,y$ derselben

**Tangente** $\equiv (\xi - x) f_1(x,y) + (\eta - y) f_2(x,y) = 0$; **Normale** $\equiv (\xi - x) f_2(x,y) - (\eta - y) f_1(x,y) = 0$

**Krümmungsradius** im Punkt $x, y$: $$\rho = \frac{\left[f_1^2 + f_2^2\right]^{\frac{3}{2}}}{f_{11} f_2^2 - 2 f_{12} f_1 f_2 + f_{22} f_1^2}$$

Der Nenner kann auch geschrieben werden als $$-\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{12} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

## Theorie der Maxima und Minima einer Funktion von 2 Veränderlichen.

Für hinlänglich kleine $h$ und $k$ wird das Vorzeichen der Differenz

$$f(x+h, y+k) - f(x,y) = h f_1 + k \cdot f_2 + \frac{1}{2!}\left[h^2 f_{11} + 2hk f_{12} + k^2 f_{22}\right] + \dots$$

durch dasjenige der Summe $h f_1 + k f_2$ bestimmt. Daraus folgt der **Satz**: Die notwendige

Bedingung für das Vorhandensein eines Extrems (Maximums oder Minimums) von $f(x,y)$ an einer bestimmten Stelle $x,y$ ist das gleichzeitige Verschwinden von $f_1$ und $f_2$ an dieser Stelle.

Aus der Schreibweise für die Glieder 2. Ordnung:

$$\frac{1}{2}\left[h^2 f_{11} + 2hk f_{12} + k^2 f_{22}\right] \equiv \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{f_{11}}\left\{\left[h f_{11} + k f_{12}\right]^2 + k^2\left[f_{11} f_{22} - f_{12}^2\right]\right\}$$

folgt dann weiter der Satz: Wenn die Glieder 2. Ordnung nicht alle für die betrachtete Stelle verschwinden, und die Determinante

$f_{11} f_{22} - f_{12}^2$ ist $< 0$, so findet weder ein Maximum noch ein Minimum daselbst statt

wenn $f_{11} f_{22} - f_{12}^2 > 0$ ist $\begin{cases} \text{u. } f_{11} \text{ u. } f_{22} \text{ beide } > 0 \text{ sind so hat } f \text{ ein Minimum} \\ \text{" " " " } < 0 \text{ " " " " " Maximum} \end{cases}$

an der betrachteten Stelle.

NB! Der Fall $f_{11} f_{22} - f_{12}^2 > 0$ und $f_{11}$ und $f_{22}$ von verschiedenem Vorzeichen kann nicht eintreten.

## Theorie der Maxima und Minima mit Nebenbedingungen.

$\alpha$) Für welche Werte der Variabeln $x, y$ hat die Funktion $z = f(x,y)$ ein Extrem wenn nur solche Werte der Variabeln zugelassen werden, welche der Bedingung $\varphi(x,y) = 0$ genügen? Satz: Maxima und Minima können nur da stattfinden, wo eine der beiden Gleichungen $\begin{cases} h f_1 + k f_2 = 0 \\ h\varphi_1 + k\varphi_2 = 0 \end{cases}$ eine Folge der anderen ist also da, wo die Determinante $f_1\varphi_2 - f_2\varphi_1$ verschwindet, also wenn die beiden Gleichungen $\begin{cases} f_1 + \lambda\varphi_1 = 0 \\ f_2 + \lambda\varphi_2 = 0 \end{cases}$ nebeneinanderbestehen. (Es ist also nicht nötig, dass $f_1$ und $f_2$ beide für sich verschwinden). Daher die Regel: Man verfährt wie wenn $f + \lambda\varphi$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen wäre, bestimmt also aus $\begin{rcases} f_1 + \lambda\varphi_1 = 0 \\ f_2 + \lambda\varphi_2 = 0 \end{rcases}$ $x$ und $y$ als Funktionen des Parameters $\lambda$ und setzt die erhaltenen Werte in

$\varphi = 0$ ein, aus welcher Gleichung sich $\lambda$ bestimmt.

$\beta$) Analog verfährt man, wenn $z = f(x, y, t, u)$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll, wenn $x, y, t, u$ an die Nebenbedingungen $\varphi(x, y, t, u) = 0$ und $\psi(x, y, t, u) = 0$ geknüpft sind. Die Gleichung

$h \cdot f_1 + k \cdot f_2 + l \cdot f_3 + m \cdot f_4 = 0$ muß erfüllt sein, wenn $\begin{cases} h\varphi_1 + k\varphi_2 + l\varphi_3 + m\varphi_4 = 0 \\ h\psi_1 + k\psi_2 + l\cdot\psi_4 + m\psi_4 = 0 \end{cases}$ stattfinden

Daraus ergibt sich die <u>Regel</u>: Aus dem Gleichungssystem

$$\begin{cases} f_1 + \lambda\varphi_1 + \mu\cdot\psi_1 = 0 \\ f_2 + \lambda\varphi_2 + \mu\cdot\psi_2 = 0 \\ f_3 + \lambda\varphi_3 + \mu\cdot\psi_3 = 0 \\ f_4 + \lambda\varphi_4 + \mu\cdot\psi_4 = 0 \end{cases}$$

sind $x, y, u, t$ als Funktionen von $\lambda$ und $\mu$ zu bestimmen und in $\varphi = 0$, $\psi = 0$ einzusetzen, woraus $\lambda$ und $\mu$ berechnet werden.

Es ist ersichtlich, wie bei einer $f(x, y, z)$ mit 2 Nebenbedingungen etc. zu verfahren wäre.

## Aufgaben.

1) Man schreibe die Taylorsche Reihe für 3 Veränderliche bis zu den Gliedern 4. Ordnung nach der Formel des Übungsblattes hin.

2) Welches sind die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes der Kurve $x^3 + y^3 - axy = 0$ im allgemeinen Punkt $x, y$ derselben?

3) Ein Körper setzt sich aus einem Kreiscylinder vom Radius $R$ und der Höhe $H$ und einem darauf gesetzten Kreiskegel von demselben Radius und der Höhe $h$ zusammen. Wie müssen $R$, $H$, $h$ gewählt werden, damit der Körper bei gegebenem Volumen die kleinstmöglichste Oberfläche besitzt?

4) Man setze die Entfernung irgend zweier Punkte der beiden Geraden
$$x = r_1 z + \rho_1 \qquad x = r_2 \cdot z + \rho_2$$
$$y = s_1 z + \sigma_1 \qquad y = s_2 \cdot z + \sigma_2$$
an und bestimme dann diejenigen Punkte, deren Entfernung ein Minimum ist.

5) Welche Punkte der Hyperbel $\frac{x^2}{3} - y^2 - 1 = 0$ sind vom Punkt $x = 3\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$ am wenigsten entfernt?

6) Gegeben das Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.
Gesucht ist a) das größte Parallelepiped das man demselben einbeschreiben kann, wenn die Kanten des Parallelepipeds den Koordinatenachsen parallel sind
b) das kleinste Tetraeder, welches von den 3 Koordinatenebenen und einer Tangentialebene an das Ellipsoid gebildet wird.

7) Die Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks sind gemessen worden und ergeben die Werte $a$, $b$, $c$. Die Zahlen $a$, $b$, $c$ sollen so korrigiert werden, daß die Summe der Quadrate der Korrekturen ein Minimum wird.

8) auf der Verbindungslinie der Mitten zweier Kugeln von den Radien $r$ und $R$ einen Punkt so zu finden, daß die Summe der von ihm aus beleuchteten Kugelflächen ein Maximum wird. $a > R + r$

5. XII. 11. **Höhere Mathematik III.** № 5.

## Singuläre Punkte einer ebenen algebraischen Kurve.

Definition: Ein singulärer Punkt einer algebraischen Kurve $F(x,y)=0$ ist ein solcher, dessen Koordinaten $x, y$ die Gleichungen $f_1=0, f_2=0$ gleichzeitig befriedigen. (Vorausgesetzt ist, daß $F(x,y)=0$ bereits vereinfacht ist.) Aus der Taylorschen Entwicklung:

$$(1)\quad F(x+dx,\, y+dy)-F(x,y)=\frac{1}{2}\left\{F_{11}\,dx^2+2f_{12}\,dx\,dy+F_{22}\,dy^2\right\}+\cdots\cdots$$

ist die Bedingung dafür zu erkennen, daß der Punkt $x, y$ und der benachbarte $x+dx,\, y+dy$ auf der Kurve liegen:

$$F_{22}\,y'^2+2f_{12}\,y'+f_{11}=0 \quad \text{oder} \qquad (2)\quad y'=\frac{-1}{F_{22}}\left\{F_{12}\pm\sqrt{F_{12}^2-F_{11}F_{22}}\right\}.$$

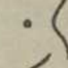
Im Falle $F_{12}^2-F_{11}F_{22}=0$ ist für einen zu dem Kurvenpunkt $x, y$ benachbarten Punkt $x+dx,\, y+dy$ der $xy$-Ebene der Ausdruck

$$(3)\quad F(x+dx,\, y+dy)=\frac{1}{2}F_{11}\left\{dx+\frac{F_{12}}{F_{11}}dy\right\}^2+\cdots$$

für hinlänglich kleine $dx$ und $dy$ von gleichem Vorzeichen wie $f_{11}$, so daß von einem solchen Kurvenpunkt aus alle Richtungen außer einer einzigen in das positive bezw. negative Gebiet führen, in welche die Kurve die Ebene zerlegt. Aus (1), (2) und (3) folgt die Definition:

Wenn in einem Punkt der Kurve die ersten Ableitungen $f_1$ und $f_2$ beide verschwinden, nicht aber alle zweite Ableitungen, dann nennt man den Punkt einen Doppelpunkt der Kurve und unterscheidet von diesen Doppelpunkten 3 Arten:

I) Wenn $f_{11}f_{22}-f_{12}^2<0$: Knotenpunkt: 

II) " " " $>0$: Isolierter Punkt: 

III) " " " $=0$: Spitze: 

Verschwinden die Glieder $f_{11}, f_{12}, f_{22}$ alle, so hat man die Glieder 3. Ordnung in der Entwicklung (1) zu berücksichtigen, und gelangt so zur Diskussion 3-facher Kurvenpunkte etc.

Sei die Kurvengleichung von der Form:

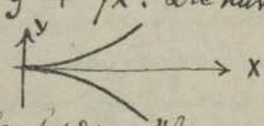
$$0=ax+by+cx^2+2dxy+ey^2+fx^3+\cdots$$

so liefern die gleich Null gesetzten linearen Glieder die Gleichung der Tangente im Koordinatenanfangspunkt: $a\xi+b\cdot\eta=0$.

Angenommen, im Koordinatenanfangspunkt seien $f_1=a$ und $f_2=b$ beide gleich Null, und die Glieder 2. Ordnung ein vollständiges Quadrat, so kann eine solche Kurvengleichung durch eine lineare Transformation auf die Form gebracht werden:

$$0=y^2+fx^3+gx^2y+hxy^2+k\cdot y^3+l\cdot x^4+\cdots\cdots$$

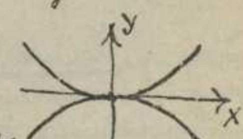
Angenommen 1) $f\neq 0$. Dann kann die dadurch definierte Kurve in der $xy$-Ebene unter der Voraussetzung, daß $x$ von der 1. Größenordnung, $y$ " " $3/2$. " " " angenommen werden, für hinlänglich kleine $x$ und $y$ ersetzt werden (näherungsweise) durch $0=y^2+fx^3$. Die Kurve hat im Koordinatenanfangspunkt das Aussehen einer Spitze:





2) $f=0$. Unter der Voraussetzung: (für hinlänglich kleine $x$ und $y$) $x$ von der 1. Ordnung, $y$ " " 2. " " groß, lautet die näherungsweise Darstellung der Kurve in der Nähe des Punktes $x=0,\ y=0$

$$0=y^2+gx^2y+lx^4=(y+\alpha x^2)(y+\beta x^2)$$





α) Die Kurve hat im Koordinatenanfangspunkt eine Selbstberührung, sobald die Faktoren reell sind. Führt die Zerlegung

β) auf 2 komplexe Faktoren, so hat man es mit einem isolierten Kurvenpunkt zu tun, in welchem jedoch eine ganz bestimmte Tangente vorhanden ist.

$\gamma$) Der Fall, daß die beiden Faktoren einander gleich sind. Die Kurvengleichung lautet dann

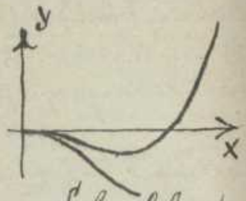
$$0 = (y+\alpha x^2)^2 + hxy^2 + ky^3 + mx^3y + nx^2y^2 + pxy^3 + qy^4 + rx^5 +$$

Versucht man, dieselbe für hinlänglich kleine x und y durch einen Ausdruck von der Form

$$y = -\alpha x^2 + \eta x^2$$

zu befriedigen, so findet man, daß

$$\eta = \pm \gamma x^{\frac{1}{2}}$$ angenommen werden muß.




Die Näherungskurve ist demnach:

$$y = -\alpha x^2 \pm \gamma x^{\frac{5}{2}}$$

und die Kurve hat im Koordinatenanfangspunkt das Aussehen einer sog. Schnabelspitze.

## Untersuchung des Verhaltens einer Fläche die durch den Koordinatenanfangspunkt hindurchgeht in der Nähe dieses Punktes.

Angenommen, $z = f(x,y)$ läßt sich in der Umgebung des Koordinatenanfangspunktes durch die Taylorsche Reihe darstellen:

$$z = ax + by + \frac{1}{2}\left[cx^2 + 2dxy + ey^2\right] + \cdots$$

Für hinlänglich kleine x und y können die Glieder 2. Ordnung gegen diejenigen 1. Ordnung vernachlässigt werden. Demgemäß lautet die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $x=0,\ y=0$

$$z = ax + by$$

Satz: In einem nicht singulären Punkt besitzt die Fläche eine bestimmte Tangentialebene durch die sie dort in erster Annäherung ebenso ersetzt werden kann wie eine Kurve durch ihre Tangente in einem Kurvenpunkt.

Satz: Wenn durch einen Punkt einer Fläche alle möglichen Schnittebenen gelegt werden und in jeder dieser Schnittebenen in dem Punkt die Tangente an die Schnittkurve konstruiert wird, so liegen alle diese Tangenten in der Tangentialebene der Fläche in diesem Punkt.

## Flächenkrümmung.

Angenommen, es sei die Tangentialebene zur xy-Ebene gemacht worden. $(a=0,\ b=0)$. Dann wird die Taylorsche Entwicklung

$$z = \frac{1}{2}(cx^2 + 2dxy + ey^2) + \cdots\cdots$$

Man erkennt: Da für hinlänglich kleine x und y die Glieder 3. Ordnung gegen diejenigen 2. Ordnung vernachlässigt werden können, so wird die Fläche in 2ter Annäherung durch obiges Paraboloid dargestellt. (Näherungsparaboloid).

Zur Untersuchung der verschiedenen durch den Anfangspunkt hindurchgehenden ebenen Schnitte der Fläche im Koord.-Anfangspunkt wird der Hilfssatz benützt: Hat die Gleichung einer ebenen Kurve die Form $z = \frac{1}{2}cx^2$, so ist die Krümmung derselben im Koord.-Anf. Punkt $\frac{1}{\rho} = c$.

Durch Einführung neuer rechtwinkliger Koordinaten $\xi, \eta$ kann die Gleichung des Näherungsparaboloids auf die Form gebracht werden: $z = \frac{1}{2}\left[\gamma\xi^2 + \delta\eta^2\right]$.

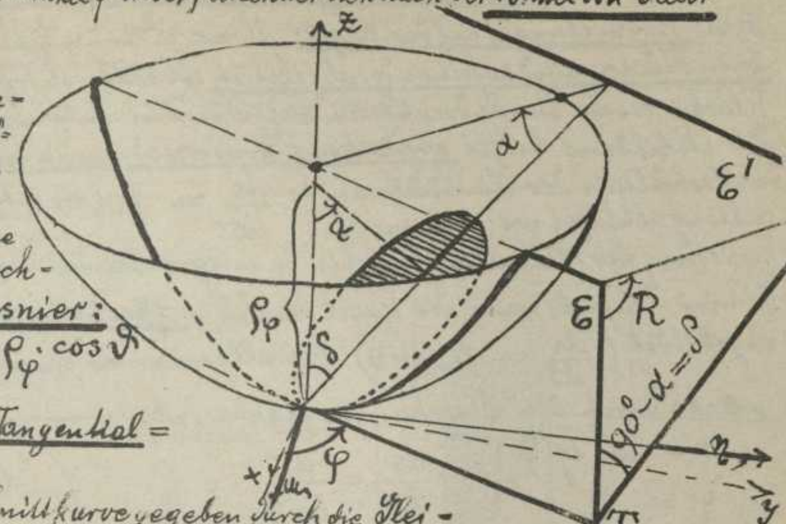
Die $\xi z$-Ebene und die $\eta z$-Ebene schneiden die Fläche nach Kurven, deren Krümmungsradien nach obigem Satz die Werte

$$\rho_1 = \frac{1}{\gamma}\ ;\quad \rho_2 = \frac{1}{\delta}\ ,$$ besitzen.

Diese sog. Hauptkrümmungsradien der Fläche in diesem Punkt besitzen (unter Berücksichtigung des Vorzeichens) den größten und kleinsten Wert, welchen der Krümmungradius irgend eines Normalschnittes der Fläche (hervorgerufen durch ~~einen~~ Schnitt welcher die Flächennormale, in unserem Fall die z-Achse enthält.) in jenem Punkt bezüglich der Nachbarschnitte annehmen kann.

Der Krümmungsradius $\rho_\varphi$ irgend eines Normalschnittes der Fläche, dessen erzeugende Schnitt ebene $\mathcal{E}$ mit dem ersten Hauptschnitt den Winkel $\varphi$ bildet, berechnet sich nach der Formel von Euler

$$\frac{1}{\rho_\varphi} = \frac{\cos^2\varphi}{\rho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho_2}$$




und der Krümmungsradius eines beliebigen schiefen Schnittes der Fläche, dessen erzeugende Schnittebene $\mathcal{E}'$ aus der xy-Ebene dieselbe Spur ausschneidet und gegen die xy-Ebene unter dem Winkel $\alpha$ geneigt ist, berechnet sich aus der Formel von Meusnier:

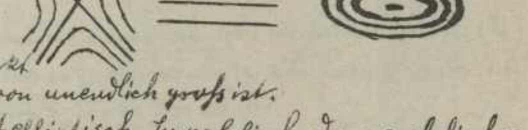
$$\rho_{\varphi\alpha} = \rho_\varphi \cdot \sin\alpha = \rho_\varphi \cdot \cos\delta$$

Schnittkurve der Fläche mit der Tangentialebene.

In erster Annäherung ist die Schnittkurve gegeben durch die Gleichung $\sigma = \frac{1}{2}(\gamma\xi^2 + \delta\eta^2)$. Daher der Satz: Jede Tangentialebene schneidet die Fläche in einer Kurve welche im Berührpunkt der Fläche im allgemeinen einen Doppelpunkt hat, welcher Knotenpunkt oder isolierter Doppelpunkt ist, je nachdem $\gamma$ und $\delta$ verschiedenes oder gleiches Vorzeichen besitzen. ($\delta$ oder $\gamma = 0$, Spitze).

Schnittkurve einer Fläche mit einer Ebene parallel (und unendlich benachbart) zur Tangentialebene

Man unterscheidet zwischen elliptischen, hyperbolischen oder parabolischen Flächenpunkten je nachdem die Schnittkurve einer zur Tangentialebene parallelen und derselben benachbarten Ebene mit der Fläche einer Ellipse, Hyperbel oder 2 parallelen Geraden ähnlich ist; oder je nachdem die beiden Hauptkrümmungsradien der Fläche in dem betr. Punkt gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind oder einer davon unendlich groß ist.

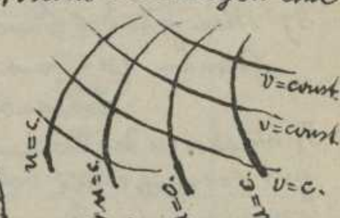


Andere Formulierung: die Fläche ist in einem Punkt elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch gekrümmt, je nachdem das Gauß'sche Krümmungsmaß der Fläche d.h. der Ausdruck $K = \frac{1}{\rho_1\rho_2}$ $>0$, $<0$ oder $=0$ ist. Unter der mittleren Krümmung einer Fläche in einem Punkt versteht man den Ausdruck $M = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$.

Parameterdarstellung einer Fläche.

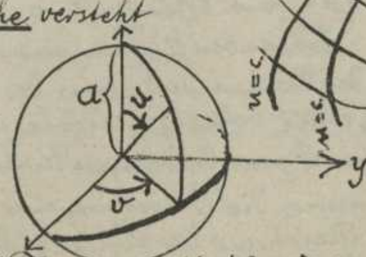
$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u,v) \\ y &= \chi(u,v) \\ z &= \psi(u,v) \end{aligned}\right\}$$

Jede Beziehung zwischen u und v bestimmt mit diesen Gleichungen eine auf der Fläche liegende Kurve. Unter den Koordinatenlinien auf der Fläche versteht man die Linien $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$




Die Parameterdarstellung der Kugel ist beispielsweise

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cdot\sin u\cdot\cos v \\ y &= a\cdot\sin u\cdot\sin v \\ z &= a\cdot\cos u \end{aligned}\right\}$$




Die Entfernung zweier benachbarter Flächenpunkte ist $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$. Dabei bedeuten:

$$E = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2; \quad F = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\chi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}; \quad G = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2.$$

und heißen die Fundamentalgrößen 1. Ordnung der Flächentheorie.

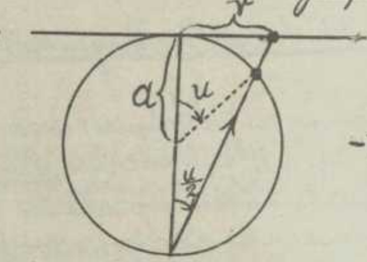
Z. B. Bogenelement auf der Kugel: $ds^2 = u^2 \sin^2 u \{dU^2 + dv^2\}$ wobei $U = \log tg \frac{u}{2}$.

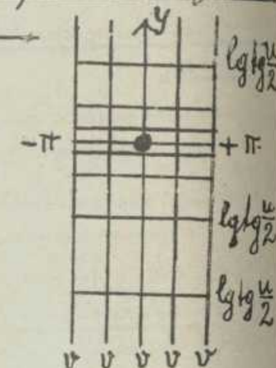
Zwei Flächen sind aufeinander abgebildet, sobald durch irgend ein Gesetz ein Punkt der einen Fläche einem Punkt der anderen zugeordnet ist und umgekehrt.

Die Abbildung heißt winkeltreu (konform) oder in den kleinsten Teilen ähnlich, wenn das Verhältnis der Linienelemente $\frac{ds}{d\sigma} = f(u, v)$ ist, also nicht von der Fortschreitungsrichtung abhängt, was sich aus der Forderung der Winkeltreue ergibt. In entsprechenden Punkten gilt dann: $E : F : G = E' : F' : G'$

So wird beispielsweise die Kugel durch die Merkatorprojektion konform auf die Ebene abgebildet ($\frac{ds}{d\sigma} = a . \sin u$) oder allgemeiner durch die stereographische Projektion welche durch die Gleichungen gegeben ist:

$$\left.\begin{aligned} r &= 2a . tg \frac{u}{2} \\ \varphi &= v \end{aligned}\right\} \quad \frac{ds}{d\sigma} = \frac{a}{\cos^2 \frac{u}{2}} .$$




## Aufgaben.

1) Diskussion der Singularitäten der Kurven:

α) $y^2 = \frac{x^4}{1+x^2}$ β) $x^4 - 4y^4 - y(x^2 - y^2) = 0$

γ) $2x^4 + y^4 - ay^3 - 4a^2x^2 - 3a^2y^2 + a^3y + 2a^4 = 0$

δ) $(x^2+y^2)^2 - 2axy^2 = 0$. ε) $x^2y^2 + y^4 - a^2x^2 = 0$

2) Man bestimme den Krümmungsradius der Schnittkurve des Paraboloids $z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}\right)$ mit einer Ebene die a) durch die z-Achse geht und mit der xz-Ebene den $\sphericalangle$ 60° bildet b) durch den 0-Punkt geht und mit der x- bezw. y-Achse die $\sphericalangle$ 45° bezw. 30° bildet. (Die Krümmungsradien sind für den 0-Punkt zu berechnen!)

3) Man fasse die Erde als Rotationsellipsoid auf mit den Achsen $a = b = 1$, $c = 1 - \varepsilon$ (wobei $\varepsilon = \frac{1}{300}$) und bestimme die ~~Haupt~~krümmungsradien derselben für München. (Man wird natürlich den Null-Meridian durch München legen. Geographische Breite $90° - u = 48° 9'$. Einheit $= \frac{20000}{\pi}$ km)

4) Man gebe die Gleichung der Schraubenfläche $z = k . \text{arc tg} \frac{y}{x}$ in Parameterform an. ($u$ = const. Erzeugende, $v$ = const. Schnittlinien der Schraubenflächen mit auf der xy Ebene senkrechten Kreiszylindern)

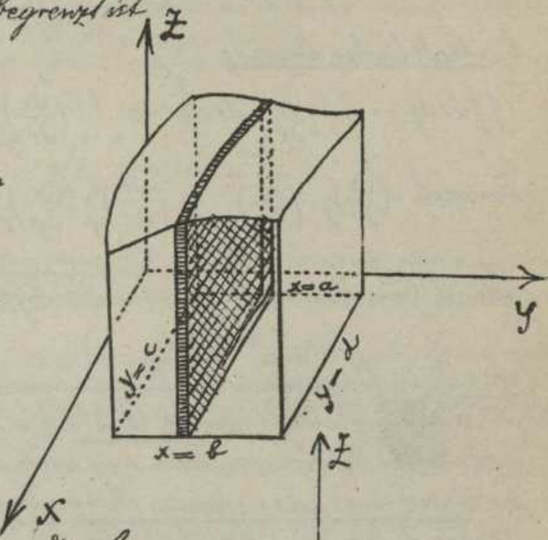
5) Welches ist der Cosinus und Sinus des Winkels, welchen die Parameterkurven $u$ = const. und $v$ = const. einer beliebigen Fläche miteinander einschließen und welches ist der Cosinus zwischen 2 ganz beliebigen Richtungen auf der Fläche?

6) Man bestimme die Gleichung einer beliebigen Rotationsfläche in Parameterform ferner die Gleichung der Röhrenflächen (Diese entstehen dadurch, daß sich ein Kreis von gegebenem Radius $a$ so längs einer gegebenen Kurve $\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \chi(t) \\ z &= \psi(t) \end{aligned}\right\}$ fortschiebt, daß die Kurve durch seinen Mittelpunkt geht und seine Ebene stets senkrecht zur Kurve verbleibt.

12. XII. 11. Höhere Mathematik III. № 6.

## Mehrfache Integrale.

### 1, Anwendung der Doppelintegrale auf Volumenberechnung.




Beispiele. a) Das Volumen des Raumes, welcher begrenzt ist

1, Von der xy-Ebene (Grundfläche),

2, Von der Fläche $z = f(x,y)$ (Deckfläche),

3, Von den beiden zur yz-Ebene parallelen Ebenen
$x = a$ und $x = b$

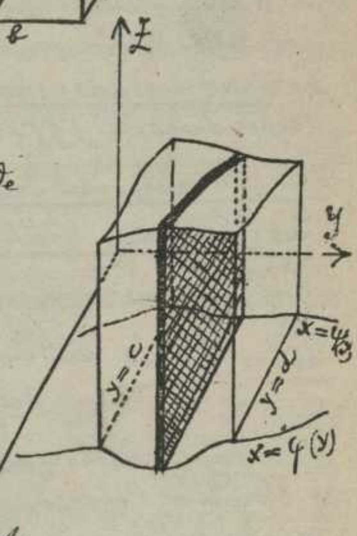
4, Von den beiden zur xz-Ebene parallelen Ebenen
$y = c$ und $y = d$

wird dargestellt durch das Doppelintegral

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)\,dx \right\} dy \equiv \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy.$$

b) Treten an Stelle der Ebenen $x = a$ und $x = b$ die Zylinder $x = \varphi(y)$ und $x = \psi(y)$, so wird das entsprechende Volumen dargestellt durch

$$\int_c^d \left\{ \int_{x=\varphi(y)}^{x=\psi(y)} f(x,y)\,dx \right\} dy = \int_c^d \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

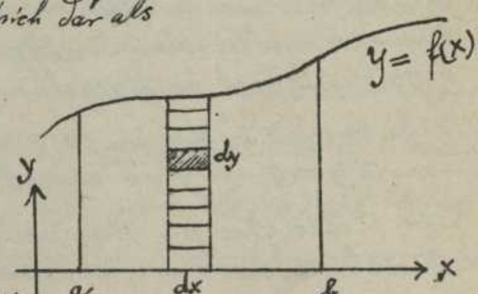



### 2, Anwendung der Doppelintegrale zur Schwerpunktsbestimmung nicht homogener Flächen.

Die auf die Flächeneinheit reduzierte Masse der Fläche im Punkt x,y werde durch die Funktion $\rho = F(x,y)$ bestimmt.

Die Gesamtmasse der nebenbezeichneten Fläche stellt sich dar als

$$M = \int_a^b \left\{ \int_{y=0}^{y=f(x)} F(x,y)\,dy \right\} dx$$



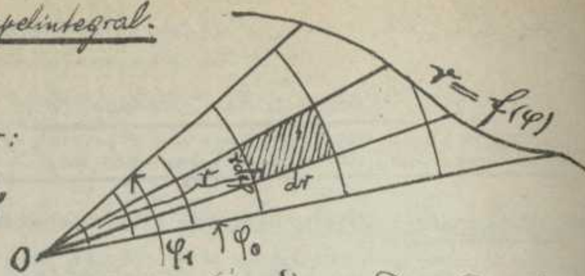

ferner die statischen Momente derselben in bezug auf die y- und x-Achse:

$$M \cdot X = \int_a^b \left\{ \int_{y=0}^{y=f(x)} F(x,y) \cdot x \cdot dy \right\} dx \quad \text{bezw.}$$

$$M \cdot Y = \int_a^b \left\{ \int_{y=0}^{y=f(x)} F(x,y) \cdot y \cdot dy \right\} dx,$$ woraus sich die Schwerpunktskoordinaten X u. Y bestimmen.

3, Einführung neuer Integrationsvariabeln in das Doppelintegral.

Beispiel: Einführung von Polarkoordinaten.




a) Aus der geometrischen Anschauung folgt unmittelbar:

$$\iint \varrho\, dx\, dy = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\int_{r=0}^{r=f(\varphi)} \varrho \cdot r\,dr\cdot d\varphi$$

b, Analytischer Beweis:

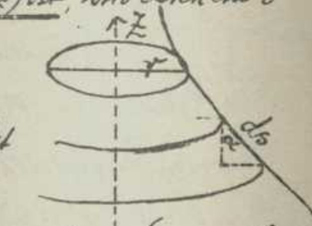
$$\iint dx\,dy = \iint \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_{y=c} dr\,dy = \iint \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_{y=c}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)_{r=c} dr\,d\varphi;$$ Nun ist $$\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_{\varphi} = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_{y} + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{r}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)_{\varphi}$$

demnach $$\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_{y}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)_{r} = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_{\varphi}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)_{r} - \underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{r}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)_{\varphi}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)_{r}}_{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)_{r}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)_{\varphi}} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r \quad (\text{III}\ 3).$$

Durch Einsetzen ergibt sich also wieder obiges Resultat.

Satz: Die Einführung neuer Variable in ein Doppelintegral darf nicht durch Einführung der totalen Differentiale für $dx$ und $dy$ gemacht werden. Satz: Beim Doppelintegral darf die Integrationsreihenfolge nur bei Veränderung der Grenzen vertauscht werden.

Die Masse eines Körpers, dessen Dichtigkeit eine Funktion des Ortes $\rho(x,y,z)$ ist, wird durch ein 3-faches Integral $\iiint \rho\, dx\, dy\, dz$ berechnet.




Fälle, in welchen sich die Anzahl der Integrale reduziert.

Das Volumen einer Rotationsfläche $z = f(\sqrt{x^2+y^2}) = f(r)$ wird vermittelst der Formel

$$\text{Vol} = \pi\int_{z_0}^{z_1} r^2\, dz$$ und die Oberfläche einer Rotationsfläche mittels $$\text{Ob} = 2\pi\int \frac{r\,dz}{\cos\alpha} = 2\pi\int r\cdot ds$$ ausgewertet.

Aufgaben.

1) Gegeben ist die Fläche $z = \frac{1-y^2}{1+x^2}$. Man diskutiere die Gestalt der Fläche in ihrem Verlaufe oberhalb der xy-Ebene durch Betrachtung ihrer Horizontalschnitte sowie ihrer Schnitte mit den 3 Koord.-Ebenen. Man berechne das Volumen des Körpers der zwischen der Fläche als oberer Begrenzung und der xy-Ebene eingeschlossen ist, sowie das Volumen des Körpers, der sich über dem von den Geraden $y=0$; $y=x$; $x=1$ der xy-Ebene begrenzten Dreieck bis zur gegebenen Fläche erhebt. (Vorprüfung 1901)

2) Man berechne das Volumen, das zwischen der Fläche $z = y^2\cdot e^{-x^2}$, der xy-Ebene und den 3 Ebenen $x=0$, $y=1$; $x-y=0$ eingeschlossen ist.

3) Die Parabel $y^2 = p\cdot x$ rotiere um die x-Achse. Man berechne Volumen und Oberfläche des durch die Ebene $x = x_0$ abgeschnittenen endlichen Teiles des Rotationsparaboloids und vergleiche die erhaltenen Resultate mit denjenigen, die für den eingeschriebenen Rotationskegel von derselben Grundfläche und Höhe gelten würden. Ferner bestimme man den Schwerpunkt dieser Paraboloidfläche.

19. XII. 11. Höhere Mathematik III. № 7.

## Theorie der Differentialgleichungen.

1) Definition: Man nennt eine Gleichung zwischen der unabhängigen Veränderlichen $x$, der abhängigen Veränderlichen $y$ und beliebig hohen Differentialquotienten von $y$ nach $x$, also eine Gleichung von der Form

$$\psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

eine gewöhnliche (totale) Differentialgleichung, und zwar eine gewöhnliche Differentialgleichung, insofern nur gewöhnliche, keine partiellen Differentialquotienten in ihr vorkommen. Ist der höchste vorkommende Differentialquotient der $n$te $\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)$, so sagt man, die Differentialgleichung sei von der $n$ten Ordnung.

Eine Differentialgleichung integrieren heißt, die Gesamtheit der Funktionen $y = f(x)$ zu finden, welche so beschaffen sind, daß die Gleichung identisch (für alle Werte von $x$) erfüllt ist, wenn man darin für $y$ diese Funktion und für $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... ihre Differentialquotienten einsetzt.

## I. Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung.

$$\psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Eine Funktion $y = f(x)$, welche der Differentialgleichung genügt, nennt man ein Integral (partikuläres Integral) der Differentialgleichung.[N.B.] Das allgemeine Integral, von dem alle partikulären Integrale nur Spezialfälle sind, enthält bei einer Differentialgleichung erster Ordnung eine willkürliche Konstante $C$, durch deren Annahme als irgend eine Zahl die partikulären Integrale hervorgehen. Das allgemeine Integral stellt also geometrisch eine Kurvenschar in der $xy$-Ebene dar.

N.B.! Da das Wort Integral hier in einem weiteren Sinn gebraucht wird als bisher so nennt man die bisher gebrauchten Integrale Quadraturen. Die Integration einer Differentialgleichung wird als fertig betrachtet, wenn es gelingt, die Lösung auf Quadraturen zurückzuführen.

mit einem Parameter $C$. Aus diesem System von Integralkurven erhält man eine partikuläre Integralkurve, indem der betreffende Parameter $C_0$ aus einer bestimmten Nebenbedingung, welcher die partikuläre Integralkurve genügen soll, gewonnen wird.

## Zwei einfache Fälle von Differentialgleichungen erster Ordnung:

In der Differentialgleichung kommt außer $\frac{dy}{dx}$ nur entweder $x$ oder $y$ vor. Diese Aufgabe ist die der früher behandelten Integralrechnung. Denn aus

$F(x,y')=0$ bezw. $F(y,y')=0$ folgt durch Auflösung nach $y'$, bezw. $x$ $y'=f(x)$ bezw. $y'=f(y)$ und daraus durch Integration

$$y=\int f(x)\,dx + C \quad \text{bezw.} \quad x=\int \frac{1}{f(y)}\cdot dy + C$$

## Methode der Separation oder der Trennung der Variabeln.

Eine Differentialgleichung von der Form

$$\varphi_1(x)\,\psi_1(y) = \varphi_2(x)\cdot\psi_2(y)\cdot\frac{dy}{dx}$$ wird durch Separation der Variabeln auf die Form gebracht

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\cdot dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}\cdot dy$$ und ergibt als allgemeines Integral:

$$\int\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx = \int\frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy + C$$

## Homogene Differentialgleichungen.

Definition der homogenen Funktionen: Eine rationale ganze Funktion von 2 oder mehreren Veränderlichen ist dann und nur dann homogen, wenn die Summe der Exponenten der Variabeln in allen Gliedern des Ausdruckes dieselbe ist. Wenn die Summe $= n$ ist, so nennt man die Funktion homogen vom $n$ten Grad. Eine Funktion $F(x,y)$ ist homogen, (die Funktion braucht nicht rational zu sein) wenn sie sich durch die Substitution $\frac{y}{x}=z$ auf die Form bringen läßt $F(x,y) = x^{s}\cdot\Phi(z)$

Die Differentialgleichung $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

ist homogen, wenn durch obige Substitution $M$ und $N$ übergehen in $\begin{cases} M(x,y) = x^{m}\varphi(z) \\ N(x,y) = x^{m}\psi(z)\end{cases}$

## Fortsetzung.

Ausnahmefall: $\mu = -\lambda$.

In diesem Fall hat die Gleichung $y' + \lambda y = e^{\mu x}$ ein partikuläres Integral $y = x\cdot e^{-\lambda x}$

und das allgemeine Integral $y = (x+C)e^{-\lambda x}$

d) P konstant, Q eine trigonometrische Funktion.

Die Differentialgleichung $y' + \lambda y = a\cdot\sin\mu x$

hat ein partikuläres Integral von der Form $y = \alpha\cdot\cos\mu x + \beta\cdot\sin\mu\cdot x$

und das allgemeine Integral
$$y = \frac{a}{\mu^2+\lambda^2}\left[\lambda\sin\mu x - \mu\cos\mu x\right] + C\cdot e^{-\lambda x}$$

welches auch in der Form geschrieben werden kann:
$$y = \frac{a}{\sqrt{\mu^2+\lambda^2}}\left[\sin(\mu x - \varphi)\right] + C\cdot e^{-\lambda x}$$

wenn $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\mu}{\lambda}$ gesetzt wird.

## Methode der Variation der Konstanten.

Die Reduktion der linearen Differentialgleichung mit zweitem Glied $\left\{\; y' + Py = Q\right.$

auf eine lineare Differentialgleichung ohne zweites Glied kann gemäß der Methode der Variation der Konstanten auch in folgender Weise ausgedrückt werden:

Sei $u = e^{-\int P dx}$ ein partikuläres Integral der letzteren: $y' + Py = 0$; $y = C.u$ das allgemeine Integral derselben. Man betrachte nun C nicht mehr als konstant, sondern als eine unbekannte Funktion von x, und suche dieselbe so zu bestimmen, daß der Differentialgleichung mit zweitem Glied durch die Substitution $y = C(x)\cdot u$ genügt wird. Dann erhält man für $C = \int Q\cdot e^{\int P dx} dx + C_1$ und man erkennt, daß bei dieser Formulierung C dieselbe Rolle spielt wie die Funktion v bei der Methode auf pag. 4.

## Geometrische Probleme, deren Lösung die Integration einer Differentialgleichung 1. Ordnung erfordert.

Gegeben sei eine einfach unendliche Schar von Kurven. Wie findet man die Differentialgleichung der sie alle genügen?

Regel: Um aus der endlichen Gleichung eines Kurvensystems

$$F(x, y, C) = 0$$

die Differentialgleichung derselben abzuleiten, differentiiere man die vorgegebene Gleichung implizite nach $x$ bei konstantem $C$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' = 0$$

und eliminiere $C$ aus der so erhaltenen Gleichung und $f = 0$.

## Aufgaben.

1, Man integriere die Differentialgleichungen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x+1}; \quad \frac{dy}{dx} = 3 \cdot \frac{y}{x}; \quad \frac{dy}{dx}(a^2 - x^2) = xy; \quad \frac{dy}{dx} \sin x \sin y = \cos x \cos y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}; \quad (x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0; \quad x \cdot \frac{dy}{dx} = y + x \cdot \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

2, Man zeige, daß $2y = Cx^2 - \frac{1}{C}$ das allgemeine Integral der Differentialgleichung $x\,dy - y\,dx = dx\sqrt{x^2+y^2}$ ist, und bestimme diejenigen partikulären Integralkurven, welche durch den Punkt $x = 1, y = 1$ hindurchgehen.

3, Ein Kurvensystem ist dadurch definiert, daß jede einzelne Kurve geometrischer Ort für alle Punkte der $xy$-Ebene ist, deren Entfernungen von 2 gegebenen Punkten $+e, 0; -e, 0$ ein konstantes Verhältnis besitzen. Wie lautet die Differentialgleichung des Kurvensystems?

4, Durch geeignete Verschiebung des Koordinatenanfangspunktes forme man die Diff.-Gl. $(2x - 3y + 4)dx + (x+y-1)dy = 0$ in eine homogene Diff.-Gl. um.

5, Der Strom $J$ in einem unverzweigten Leiter vom Ohmschen Widerstand $R$ und dem konstanten Selbstinduktionskoeffizienten $L$ mit sinusförmiger Endspannung von der Periodenzahl $n = \frac{1}{T}$ und der Form $E = A \cdot \sin \alpha t$ $(\alpha = 2\pi n)$ ist an die Differentialgleichung geknüpft

$$R \cdot J = A \cdot \sin \alpha t - L \cdot \frac{dJ}{dt}$$

Man berechne die Phasenverschiebung, Betrag der Zeit, in der Periodendauer ausgedrückt, um welche der Verlauf der Stromstärke hinter der Spannung zurückbleibt.

Beispiel: $R = 110\,\Omega$, $L = 0{,}35$ Henry, $n = 50$, $A = 110$ Volt.

6, Gesucht sind die Kurven, bei denen die Länge der Subtangente im Punkt $x, y$ gleich der 3fachen Abszisse $x$ ist.

7, Man integriere: $x \cdot y' - 2y + 3x = 0$; $y' + \frac{1}{3} y \cdot \sin x - \sin x \cos x = 0$; $y' + 2\frac{y}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$.

Mit Hilfe von $\begin{cases} y = xz \\ dy = x\cdot dz + z\cdot dx \end{cases}$ geht dann diese Differentialgleichung in eine separierbare Differentialgleichung über und hat das allgemeine Integral

$$\lg nat.\, x = -\int \frac{\psi(z)\,dz}{\varphi(z) + z\cdot\psi(z)} + C$$

## Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung.

Man nennt eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung linear, wenn $y$ und $y'$ nur in der ersten Ordnung auftreten, also wenn sie von der Form ist

$$y' + P\cdot y = Q$$

$P$ und $Q$ bedeuten dabei beliebige Funktionen von $x$ allein.

1. Fall: $Q = 0$.

$$y' + P\cdot y = 0$$

heisst die lineare Differentialgleichung erster Ordnung ohne zweites Glied und wird durch Separation der Variabeln integriert, wodurch man erhält:

$$y = C\cdot e^{-\int P dx}$$

Spezielle Fälle a) $P = const. = -\lambda$ führt auf die Differentialgleichung der Abklingungserscheinungen: $y' = \lambda y$ also $y = c\cdot e^{\lambda x}$

b) $P$ ist eine rationale ganze Funktion ersten Grades.

Die Differentialgleichung $y' \pm (a + bx)\,y = 0$ hat zur Lösung

$$y = C\cdot e^{\mp(ax + b\frac{x^2}{2})}$$

c) $P$ ist von der Form $\frac{1}{a+bx}$.

Die Differentialgleichung $y' \pm \frac{y}{a+bx} = 0$ hat zur Lösung

$$y = C\cdot(a+bx)^{\mp\frac{1}{b}}$$

2. Fall:

Die lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit zweitem Glied: $y' + P\cdot y = Q$ wird durch die Substitution $y = w\cdot z$ gelöst, wobei über $w$ so verfügt, dass es der linearen Differentialgleichung ohne zweitem Glied

$$w' + Pw = 0$$

genügt, also die Form hat $w = C \cdot e^{-\int P dx}$

Der zweite Faktor $z$ ergibt sich dann aus der Gleichung $w \cdot z' = Q$.

Das gesuchte allgemeine Integral der Differentialgleichung mit zweitem Glied ist demnach

$$y = e^{-\int P dx} \cdot \int Q \cdot e^{\int P dx} \cdot dx + C_1 \cdot e^{-\int P dx}$$

Aus der Form dieser Lösung ergibt sich der Satz:

Das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung erster Ordnung mit zweitem Glied wird erhalten, wenn man zu irgend einem partikulären Integral der Differentialgleichung mit zweitem Glied das allgemeine Integral der entsprechenden Differentialgleichung ohne zweites Glied hinzufügt.

Spezielle Fälle:

a) P und Q sind konstant.

Die Differentialgleichung $y' + \lambda y = a$ $\lambda$, $a$ konstant

hat die Lösung $y = \frac{a}{\lambda} + C \cdot e^{-\lambda x}$

b) P konstant, Q eine rationale ganze Funktion.

Die Differentialgleichung $y' + \lambda y = ax^2 + bx + c$

hat ein partikuläres Integral von der Form $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Die Konstanten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ werden nach Bildung von $y' = 2\alpha x + \beta$ und Einsetzen von $y$ und $y'$ in die Differentialgleichung durch Gleichsetzen der Koeffizienten gleich hoher Potenzen von $x$ von

$$2\alpha x + \beta + \lambda(\alpha x^2 + (\beta x + \gamma)) = ax^2 + bx + c$$ erhalten.

Allgemeines Integral: $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma + C \cdot e^{-\lambda x}$

c) P konstant, Q eine Exponentialfunktion

Die Differentialgleichung $y' + \lambda y = e^{\mu x}$

hat ein partikuläres Integral von der Form

$y = \alpha \cdot e^{\mu x}$. Die Konstante $\alpha$ bestimmt sich auf obigem Wege als $\alpha = \frac{1}{\mu + \lambda}$

Daher Allgemeines Integral: $y = \frac{1}{\mu + \lambda} \cdot e^{\mu x} + C \cdot e^{-\lambda x}$

9. I. 12. **Höhere Mathematik III.** № 9

Die Diskriminantenkurve (Enveloppe, Umhüllende) einer Kurvenschar $F(x, y, C) = 0$ wird durch Elimination des Parameters $C$ aus
$$F(x, y, C) = 0$$
$$\frac{\partial F(x, y, C)}{\partial C} = 0$$
gewonnen.

Die dadurch erhaltene Kurve berührt nicht nur alle Kurven des Systems sondern ist auch der Ort der singulären Punkte derselben.

Die Diskriminantenkurve einer Differentialgleichung 1. Ordnung, $^n$ten Grades $F(x, y, p) = 0$, in welcher also $p = \frac{dy}{dx}$ in der $^n$ten Potenz und in keiner höheren Potenz vorkommt (nachdem die Differentialgleichung in $p$ rational gemacht worden ist), trennt diejenigen Gebiete der $xy$-Ebene voneinander, in welchen die Differentialgleichung eine bestimmte Anzahl reeller Richtungen definiert, und wird infolgedessen durch Elimination von $p$ aus den beiden Gleichungen
$$\left.\begin{aligned} F(x, y, p) &= 0 \\ \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ gefunden.}$$

Satz: Wenn eine Enveloppe der Integralkurven der Differentialgleichung vorhanden ist, so gehört sie auch mit zur Diskriminantenkurve der Differentialgleichung. Der übrige Teil der Diskriminantenkurve ist im allgemeinen Ort der Spitzen der Integralkurven.

Definition: Unter einer singulären Lösung (einem singulären Integral) der Differentialgleichung $F(x, y, C) = 0$ versteht man eine Gleichung $\varphi(x, y) = 0$, welche, wie jedes partikuläre Integral, ebenfalls die Differentialgleichung befriedigt, aber im Gegensatz zu einem partikulären Integral nicht durch Spezialisierung der Konstanten $C$ aus dem allgemeinen Integral $\Phi(x, y, C) = 0$ der Differentialgleichung hervorgeht.

Um die singulären Lösungen der Differentialgleichung $F(x, y, p) = 0$ zu finden, stellt man die Gleichung der Diskriminantenkurve der Differentialgleichung auf, und sieht dann zu, ob diese Diskriminantenkurve, oder die eigentlichen Bestandteile, in welche dieselbe zerfällt, der Differentialgleichung genügen oder nicht. Genügt ein solcher Bestandteil der Differentialgleichung, so ist er ein singuläres Integral derselben (kann aber ausnahmsweise auch ein partikuläres Integral sein). Dieser Bestandteil ist dann Enveloppe der Integralkurven. Genügt er der Differentialgleichung nicht, so ist er Ort der Spitzen der Integralkurven (In höheren Ausnahmefällen kann es sein, daß ein

Teil der Diskriminantenkurve zugleich Ort der Spitzen und singuläres Integral darstellt.)

## Die Clairaut'sche Differentialgleichung.

Die spezielle Clairaut'sche Gleichung hat die Form $y = x\cdot p + X(p)$

Durch Differentiation nach $x$ entsteht daraus eine Gleichung, welche in 2 Faktoren zerfällt:

$$q\,(x + X'(p)) = 0$$

Der eine dieser Bestandteile: $q = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ stellt eine Differentialgleichung 2. Ordnung vor, welche $\infty^2$ Lösungen hat: $y = c\cdot x + d$; $\infty^1$ dieser Gleichungen: $y = c\cdot x + X(c)$ befriedigen auch die gegebene Gleichung und stellen das allgemeine Integral der speziellen Clairaut'schen Gleichung dar, also ein Geradensystem. Der zweite Bestandteil $x = -X'(p)$ stellt eine Diff.-Gl. 1. O. dar. Unter ihren $\infty$ vielen Integralen gibt es auch eines, das der gegebenen Clairaut'schen Gleichung genügt und das singuläre Integral derselben liefert. Es ist die Enveloppe des Geradensystems und in Parameterform durch die Gleichungen

$$\begin{cases} x = -X'(p) \\ y = -p\,X'(p) + X(p) \end{cases}$$

definiert.

Die allgemeine Clairaut'sche Gleichung: $y = x\cdot\varphi(p) + X(p)$ geht durch Differentiation nach $x$ über in $p = x\cdot\varphi'(p)\cdot\frac{dp}{dx} + \varphi(p) + X'(p)$ welche Diff. Gl. 1. O. für $p$ durch Iteration integriert wird.

## Aufgaben.

1, Man suche die Enveloppe der Wurfparabeln, welche von einem Punkt aus mit gleicher Geschwindigkeit nach allen Richtungen hin fortgeschleuderte Geschosse beschreiben.

2, Das Dreieck zwischen der Tangente einer Kurve und den beiden Achsen ist durch den Abschnitt der Tangente auf der Ordinatenachse ($= y - x\cdot\frac{dy}{dx}$) und $\frac{dy}{dx}$ bestimmt. Es sollen diejenigen Kurven bestimmt werden, für welche a) der Inhalt des Dreiecks, b) das Stück der Tangente zwischen Berührpunkt und Achse c) die Summe der Abschnitte der Tangente auf den Achsen konstant ist.

3) Gegeben ist ein Kreis und ein Punkt außerhalb oder innerhalb desselben oder auf dem Kreis gelegen. Man bestimme die Brennkurve (die Umhüllende der Strahlen, welche von dem Punkt ausgehen und vom Kreis reflektiert werden) für jeden der 3 Fälle.

4, Man suche die Diskriminantenkurven der Differentialgleichungen: a) $p^2 + 2\frac{y}{x}p + 1 = 0$ b) $p^2 - \frac{y}{x} = 0$ c) $p^2 - xy = 0$ d) $y\cdot p^3 - x\cdot p + 1 = 0$ und prüfe ihre Bestandteile, darauf, ob sie singuläre Integrale oder Ort der Spitzen der Integralkurven sind.

5, Von einem Punkt P welcher den Abstand a von einem Wasserspiegel hat treffen alle möglichen Lichtstrahlen auf denselben. Man bestimme die Umhüllende der rückwärtigen Verlängerungen der im Wasser gebrochenen Strahlen (Brech. Verh. $= \frac{4}{3}$)

6) Man integriere: $y = p\cdot x + p^2$; $y = p\cdot x + (p')^3$; $y = p^3 + p$.

2. I. 12. **Höhere Mathematik III.** № 8.

## Isogonale Trajektorien.

1, Definition: Unter den isogonalen Trajektorien eines Kurvensystems versteht man ein anderes Kurvensystem von der Art, daß jede Kurve desselben jede Kurve des gegebenen Systems unter ein und demselben bestimmten Winkel schneidet. Von besonderer Wichtigkeit sind die

orthogonalen Trajektorien einer Kurvenschar $F(x,y,C)=0$.

Die Differentialgleichung derselben geht durch Elimination von $C$ aus

$$F(x,y,C)=0 \quad \text{und} \quad y' = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$$

hervor.

Die Differentialgleichung der Evolventen einer Kurve $F(\xi,\eta)=0$ bestimmt man demnach durch Elimination von $\xi,\eta$ aus

$$F(\xi,\eta)=0;\quad (x-\xi)\frac{\partial F}{\partial \xi}+(y-\eta)\frac{\partial F}{\partial \eta}=0;\quad \frac{\partial F}{\partial \xi}\cdot dy-\frac{\partial F}{\partial \eta}\cdot dx=0$$

Für die Differentiation eines Integrals nach der oberen Grenze bezw. nach einem Parameter

gelten folgende Sätze:

$$1,\ \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi = f(x) \qquad 2,\ \frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x=\varphi(t)} f(\xi)\,d\xi = f(x)\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$3,\ \frac{\partial}{\partial t}\int_{x_0}^{x} f(\xi,t)\,d\xi = \int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(\xi,t)}{\partial t}\cdot d\xi$$

$$4,\ \frac{\partial}{\partial t}\int_{x_0=\psi(t)}^{x_1=\varphi(t)} f(\xi,t)\,d\xi = f(x_1,t)\frac{dx_1}{dt} - f(x_0,t)\frac{dx_0}{dt} + \int_{x_0=\psi(t)}^{x_1=\varphi(t)}\frac{\partial f(\xi,t)}{\partial t}\cdot d\xi$$

<u>Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die linke Seite der Differentialgleichung $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ das vollständige Differential $dF$ einer Funktion $F(x,y)$ vorstellt.</u>

1. Notwendige Bedingung: Es muß sein $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$

Diese Bedingung ist auch hinreichend zur Ermittlung der Funktion $F$. Denn aus $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M$ folgt

$$F = \int_{x_0}^{x} M(\xi, y)\,d\xi + X(y);$$

die willkürliche Funktion $X(y)$ bestimmt sich aus der Bedingung

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(\xi,y)}{\partial y}\,d\xi + \frac{dX(y)}{dy} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(\xi,y)}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{dX(y)}{dy}$$

zu $X = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy$

<u>Resultat</u>: Wenn die Funktionen $M$ und $N$ der obigen Bedingung genügen, so ist $M\,dx + N\,dy$ das vollständige Differential der Funktion

$$F = \int_{x_0}^{x} M(\xi, y)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy$$

<u>Definition des Multiplikators der Differentialgleichung $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$</u>

Wenn die Differentialgleichung $M\,dx + N\,dy = 0$ mit einem solchen Faktor $\mu(x,y)$ multipliziert wird, so daß: $\left\{\begin{array}{l} \mu \cdot M = \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \mu \cdot N = \dfrac{\partial F}{\partial y} \end{array}\right.$ wird, also die linke Seite der Differentialgleichung ein exaktes Differential darstellt, so nennt man $\mu$ einen <u>Multiplikator (Eulerschen Multiplikator)</u> der Differentialgleichung.

<u>Bestimmung sämtlicher Multiplikatoren welche zu einer Differentialgleichung gehören.</u>

Die Bedingung $\dfrac{\partial(\mu \cdot M)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu \cdot N)}{\partial x}$ oder

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)+M\frac{\partial \mu}{\partial y}-N\frac{\partial \mu}{\partial x}=0$$

stellt für den Multiplikator $\mu$ eine lineare homogene partielle Differentialgleichung 1. Ordnung dar, welche noch sehr viel mehr Lösungen als eine gewöhnliche Diff.-Gl. 1. O. besitzt.

Satz: Ist $F(x,y)=C$ allgemeine Lösung einer Diff.-Gl 1. Ordnung, so ist auch $\Phi[F(x,y)]=C$ diese allgemeine Lösung.

Satz: Wenn man 2. Multiplikatoren einer Differentialgleichung $Mdx+Ndy=0$ kennt die sich nicht nur um einen konstanten Faktor voneinander unterscheiden, dann gibt der Quotient der beiden Multiplikatoren, nachdem er einer Konstanten gleich gesetzt ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung; denn aus

$$\begin{aligned}\mu_1(Mdx+Ndy)&=dF\\ \mu_2(Mdx+Ndy)&=d\Phi\end{aligned}\quad \text{folgt}\quad \frac{\mu_2}{\mu_1}=\frac{d\Phi}{dF}=\frac{d\Phi(F)}{dF}=\psi(F)=C.$$ Nach obigem Satz ist aber $\psi(F)=C$ allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Satz: Die beiden Probleme, die vorgelegte Diff.-Gl. zu integrieren und einen Multiplikator von ihr zu finden, sind ganz gleichbedeutend. Denn kann man die Diff.-Gl. integrieren, so kennt man einen Multiplikator derselben und umgekehrt, wenn man einen Multiplikator kennt, dann kann sie integriert werden.

Aufsuchen aller Differentialgleichungen, welche einen Multiplikator von gegebener Form zulassen.

Speziell: Eine Differentialgleichung $Mdx+Ndy$, welche einen Multiplikator zuläßt, der nur vom Verhältnis $z=\frac{y}{x}$ abhängt; hat die Eigenschaft, daß

$$\frac{x^2}{Mx+Ny}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=f(z) \text{ allein ist}$$

Diese Bedingung ist immer erfüllt, wenn die Differentialgleichung homogen ist. Ist

$$\begin{aligned}M&=x^n\cdot\varphi(z)\\ N&=x^n\cdot\psi(z)\end{aligned}$$ so bestimmen sich die Multiplikatoren $\mu$ aus

$$\frac{d\lg\mu}{dz}=\frac{\varphi'-n\psi+z\cdot\psi'}{\varphi+z\psi}$$

## Aufgaben.

1 Man bestimme die Orthogonaltrajektorien der Kurvensysteme

a) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = C$

b) $r^m = c.\cos m\varphi$  NB! Bedingung: $r.\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_{II} = -\frac{1}{r.\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_{I}}$

2) Man suche die Evolventen der Parabel $y^2 = x$.

3) Man zeige, daß die linken Seiten von

a) $2x(x-y)dx + (y-x^2)dy = 0$

b) $\left(e^x(1-y) + \log y\right)dx + \left(\frac{x}{y} - e^x\right)dy = 0$

totale Differentiale sind, und integriere die Differentialgleichungen.

4) Man suche Eigenschaften der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ welche einen Multiplikator von der Form $z = f(x^2+y^2)$ zuläßt.

5) Die Differentialgleichung $(y+xy^2)dx + (x-x^2y)dy = 0$ läßt einen nur von $x.y$ abhängigen integrierenden Faktor zu. Man integriere die Differentialgleichung:

7) Auf einer grossen dünnen Kupferplatte sind zwei Elektroden A und B aufgesetzt. Die Kurven gleichen elektrischen Potentials haben dann angenähert die Gleichung $\frac{r_1}{r_2} = \text{const.}$, wenn $r_1$ und $r_2$ die Entfernungen von A und B bedeuten. Man suche die Strömungskurven, welche senkrecht zu den Äquipotentialkurven verlaufen.

8) Zur Repetition: Ein Boot wird beim Übersetzen eines Flusses mit der konstanten Geschwindigkeit a stets nach ein und demselben Punkte des jenseitigen Ufers hingerudert. Welche Kurve beschreibt das Boot, wenn das Wasser überall die Geschwindigkeit b besitzt.

16. I. 12. Höhere Mathematik III. № 10

## Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Satz: Das allgemeine Integral einer (totalen) gewöhnlichen Differentialgleichung $n^{ter}$ Ordnung enthält $n$ willkürliche Konstante. Es stellt geometrisch ein $n$-fach unendliches System von Kurven in der $xy$-Ebene dar, so daß man einem partikulären Integral desselben beispielsweise die Bedingung auferlegen kann, es soll durch $n$ beliebig gewählte Punkte in der $xy$-Ebene hindurchgehen.

## Einfache spezielle Fälle von Differentialgleichungen 2. Ordnung.

(Infolge ihrer Anwendung in der Mechanik werde im Folgenden als unabhängige Variable die Zeit $t$ und als abhängige Variable der Weg $y$ verstanden.)

a) $y'' = f(t)$ (Die auf den Punkt wirkende Kraft ist in ihrer Abhängigkeit von der Zeit bekannt)

Integral: $y = y_0 + v_0 t + \int_0^t \left[\int_0^t f(t)\,dt\right] dt$.

Speziell: $y'' = c$ (freier Fall) Integral: $y = y_0 + c \cdot t + \frac{1}{2} c t^2$

b) $y'' = f(y)$ (Die auf einen Punkt wirkende Kraft ist in ihrer Abhängigkeit vom Ort bekannt)

Gibt durch Integration zunächst: $\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \int f(y)\,dy + \mathcal{H}$

(Mech. Deutung: Die Summe aus der kinetischen u. potentiellen Energie bleibt bei einer solchen Bewegung konstant)

Integral: $t = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + 2\mathcal{H}}} + \mathcal{H}_1$

Speziell: $y'' = -\frac{1}{y^2}$ (Die auf den Punkt wirkende Kraft ist dem Quadrat d. Entfernung umgekehrt proportional)

Das Integral $t = \int \sqrt{\frac{y}{2(1+\mathcal{H}y)}}\,dy + \mathcal{H}_1$ führt (für $\mathcal{H}<0$) durch die Substitution $y + \frac{1}{2\mathcal{H}} = \frac{1}{2\mathcal{H}} \cdot \cos u$ aufgelöst auf den speziellen Fall $t = \frac{1}{\sqrt{-2\mathcal{H}}}(u - \sin u) + t_0$ der allgemeinen Keplerschen Gleichung

c) $y'' = f(y')$ (Bewegung eines Punktes unter alleinigen Berücksichtigung der Reibungskräfte.) Auflösung in Parameterform: $t = \int \frac{dy'}{f(y')} + C_1$; $y = \int \frac{y'\,dy'}{f(y')} + C_2$

Spezieller Fall 1: $y'' = -y'$ Lösung: $y = y_0 + y'_0(1 - e^{-t})$ ($y'$ nimmt beständig ab)

" " " 2: $y'' = g - y'$ (Bew. Gl. eines in Luft oder Wasser fallenden Körpers)

Hier nimmt $g - y' = C_1 e^{-t}$ beständig ab

Lösung: $y = gt + C_1 e^{-t} + C_2$

d) $y'' = f(t, y')$ (Die Kraft hängt von der Geschwindigkeit und Zeit ab)

Stellt eine Diff. Gl. 1. O. für $y'$ dar.

e) $y'' = f(y, y')$ kann geschrieben werden als Diff. Gl. 1. O. für $y'$: $y'\frac{dy'}{dy} = f(y, y')$

## Lineare Differentialgleichungen $n^{ter}$ Ordnung.

Man versteht darunter solche Diff.-Gl. in welcher die abhängige Variable und ihre Differentialquotienten nur in der 1. O. auftreten und nicht miteinander multipliziert vorkommen, also Gleichung von der Form: $\frac{d^n y}{dt^n} + p_1 \cdot \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots\cdots + p_{n-1}\frac{dy}{dt} + p_n \cdot y = p_{n+1}$

($p_1, p_2, \cdots p_{n+1}$ sind Funktionen von $t$ allein)

Ist $p_{n+1} = 0$, so sagt man, die Diff.-Gl. sei homogen oder eine lineare Diff.-Gl. ohne $2^{tes}$ Glied. Ist $p_{n+1} \neq 0$ so ist sie eine nicht homogene lineare Diff.-Gl. oder eine lineare Diff.-Gl. mit $2^{tem}$ Glied.

## Differentialgleichung der ungedämpften freien Schwingungen: $y'' = p \cdot y$

Spezieller Fall: $y'' = -\omega^2 \cdot y$

hat das allgemeine Integral $y = A \cdot \sin\omega(t - t_0)$

Man nennt $\frac{2\pi}{\omega} = T$ die Schwingungsdauer; $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$ die Frequenzzahl; $t_0$ bedeutet einen der Momente, bei welchem das Pendel durch die Ruhelage hindurchgeht; $A$ heißt die maximale Elongation.

Zwei spezielle Lösungen, die zu bestimmten Anfangs-Bedingungen gehören:

1, Für $t = 0$. ist $y = y_0$, $y' = 0$ $\Big\}$ $y = y_0 \cos\omega t$. 2, Für $t = 0$ ist $y = 0$, $y' = y'_0$ $\Big\}$ $y = \frac{y'_0}{\omega}\sin\omega t$

Für eine lineare Diff.-Gl. $n$ter Ordnung gilt der Satz: Wenn man eine Lösung mit irgend einer Konstanten multipliziert, erhält man wieder eine Lösung und die Summe zweier Integrale ist wieder ein Integral. Speziell stellt

$C_1 y_1 + C_2 y_2$ das allgemeine Integral einer linearen Diff.- Gl. 2. Ordnung dar, wenn $y_1$ und $y_2$ partikuläre Integrale derselben sind.

Anwendung: Das allgemeine Integral von $y'' = -\omega^2 y$ kann geschrieben werden als

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{y_0'}{\omega} \sin \omega t$$

wenn $y_0$ und $y_0'$ für $t = 0$ (der Anfangslage) gegeben sind. Diese Diff.- Gl. definiert daher eine hin- und hergehende Bewegung; die erzeugende Kraft ist proportional der Entfernung von der Ruhelage, aber gegen dieselbe hingerichtet. Die Periode ist von der Stärke der erzeugenden Kraft abhängig, dagegen hängt die Amplitude nur von den Anf. Bedingungen ab.

## Die Differentialgleichung der gedämpften freien Schwingungen:

$$y'' = -\omega^2 y - 2ay' \qquad \text{oder} \qquad y'' + 2ay' + \omega^2 y = 0$$

wird durch die allgemeine Diff.- Gl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und ohne 2tes Glied dargestellt. $2a$ heißt der Dämpfungsfaktor.

Man findet 2 partikuläre Integrale der Diff.- Gl. wenn man setzt $y = e^{\lambda t}$, wobei $\lambda$ eine der Wurzeln der „determinierten Gleichung" $\lambda^2 + 2a\lambda + w^2 = 0$ darstellt. Je nach dem Vorzeichen der Diskriminante $a^2 - w^2$ dieser Gleichung hat man 3 Fälle zu unterscheiden

I) $a > \omega$ Die beiden Wurzeln $\lambda_1$ u. $\lambda_2$ sind reell und $< 0$
allgemeines Integral: $y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$
$y$ nimmt mit wachsender Zeit rasch ab; der Punkt erreicht „aperiodisch" die Ruhelage ($y = 0$). Dasselbe gilt für

II) $a = w$. Also $\lambda_1 = \lambda_2 = -a$.
allgemeines Integral: $y = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-at}$

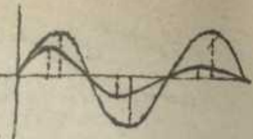
} Fall starker Dämpfung (keine eigentliche Schwingung).

III) $a < \omega$ Also $\lambda_1 = -a + \delta i$; $\lambda_2 = -a - \delta i$; das allgemeine Integral ist

$$y = e^{-at}\{C_1 \cos^{i\delta} + C_2 \cos^{-i\delta}\} = e^{-at}\{A \cos \delta t + B \sin \delta t\} = R e^{-at} \cdot \cos \delta (t - t_0)$$

Dabei bedeuten: $A = C_1 + C_2 = R \cos \delta t_0$ ; $\delta = \sqrt{w^2 - a^2}$
$B = i(C_1 - C_2) = R \sin \delta t_0$

Durch das Auftreten der Dämpfung wird demnach die Schwingungsdauer vergrößert. ($\delta < w$). Das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Ausschläge $\frac{R_1}{R_2} = e^{\frac{a\pi}{\delta}}$; $\log \frac{R_1}{R_2} = \frac{a\pi}{\delta}$ heißt das logarith



mische Dekrement. Aus dem bekannten logarithmischen Dekrement und der bekannten Schwingungsdauer kann $w$ berechnet werden.

Die Allgemeine lineare Differentialgleichung $n^{ter}$ Ordnung ohne zweites Glied und mit konstanten Koeffizienten:

$\frac{d^n y}{dt^n} + p_1 \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + p_{n-1} \frac{dy}{dt} + p_n y = 0$ hat zum allgemeinen Integral: $y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$ wo die $\lambda$ die $n$ als verschieden vorausgesetzten Wurzeln der „charakteristischen Gleichung" $n^{ten}$ Grades: $\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n \lambda = 0$ darstellen. Zwei komplexe Wurzeln dieser Gleichung $\lambda_1 = \gamma + \delta i$, $\lambda_2 = \gamma - \delta i$ geben Veranlassung das ihnen im allgemeinen Integral entsprechende Aggregat $C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ durch $e^{\gamma t} \cdot (A \cos \delta t + B \sin \delta t)$ oder durch $R e^{\gamma t} \cos \delta (t - t_0)$ zu ersetzen, wo $A$ und $B$ bezw. $R$ und $t_0$ die beiden an Stelle von $C_1$ u. $C_2$ getretenen willkürlichen Konstanten sind. Sind $\nu$ Wurzeln der charakteristischen Gleichung einander gleich, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_\nu$, so tritt an Stelle der $\nu$ entsprechenden Summanden $C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_\nu e^{\lambda_\nu t}$ im allgemeinen Integral der Ausdruck:

$$e^{\lambda_1 t} \{ C_1 + C_2 t + \dots + C_\nu t^{\nu - 1} \} .$$

Aufgaben! 1) Die Bewegung eines Punktes gehe nach der Differentialgleichung vor sich: $y'' + 4y' + y = 0$; Für $t = 0$ sei $y_0 = 1$; $y_0' = -3{,}5$. Wann geht der Punkt das erstemal durch seine Ruhelage hindurch, und wann kehrt er um, um sich derselben aperiodisch zu nähern?

2) Man integriere: a) $y'' = \frac{1}{t} + \sin t$, b) $y'' = (y')^3$; c) $y'' = 2e^{-y}$
d) $y'' = \frac{y'}{1+t}$; e) $y'' = \frac{y \cdot y'^2}{1 - y^2}$

3) Bei einer Kurve projiziert sich der Krümmungsradius, vom Kurvenpunkte bis zum zugehörigen Krümmungsmittelpunkte gezeichnet, stets in der konstanten Länge $a$ auf die Ordinatenachse. Man suche die Kurve!

4) Man integriere die durch a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ b) $y'' + y' + y = 0$
c) $y'' + 4y' + 4y = 0$ definierten Schwingungen!

5) Man integriere: a) $y^{(IV)} \mp a^4 y = 0$; $y''' + y'' + y' + y = 0$;

6) Auf einer beliebigen Bahnkurve bewegt sich ein Mensch, der an einem Seile von der Länge $a$ eine Last nachzieht. Man stelle die Differentialgleichung der „Traktrix"-Kurve auf, welche die Last dabei beschreibt! Als Bahnkurve sei hierauf speziell angenommen a) Gerade b) Kreis

23. I. 12. Höhere Mathematik III. № 11.

## I, Die Differentialgleichung der ungedämpften erzwungenen Schwingungen.

1) Wirkt auf ein ungedämpfte freie Schwingungen ausübendes System eine Konstante äußere Kraft ein, so wird die entstehende Bewegung des Systems durch die Differentialgleichung bestimmt

$$(1) \qquad y'' + \omega^2 y = g_1 .$$

Das System vollführt alsdann freie, ungedämpfte Schwingungen um eine durch die Gleichung
$\eta = y - \frac{g_1}{\omega^2}$ definierte neue Ruhelage. Denn vermöge dieser Substitution geht (1) über in $\eta'' + \omega^2 \cdot \eta = 0$, so daß sich als allgemeine Lösung von (1) ergibt

$$(2) \qquad y_1 = \frac{g_1}{\omega^2} + \left(y_0 - \frac{g_1}{\omega^2}\right)\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \qquad \text{also}$$

$$y_1' = -\left(y_0 - \frac{g_1}{\omega^2}\right)\omega\sin\omega t + v_0\cos\omega t ,$$

wobei, wie früher $y_0$ und $v_0$ die Werte für den Ausschlag bezw. für die Geschwindigkeit zur Zeit $t=0$ bedeuten.

2) Angenommen, die störende äußere Kraft sei nicht konstant, sondern eine Funktion der Zeit, nämlich $f(t)$. Dann kann man die Differentialgleichung

$$(3) \qquad y'' + \omega^2 y = f(t)$$

auf folgende Arten lösen:

a) Man kann annehmen, daß während einer gewissen Zeit von $t=0$ bis $t=\tau$ die konstante äußere Kraft $g_1$ auf das System wirke, während der Zeit von $t=\tau$ bis $t=2\tau$ die konstante äußere Kraft $g_2$, von $t=2\tau$ bis $t=3\tau$ die konstante Kraft $g_3$ u. s. f. Stellt man sich nun nach 1) für jeden dieser Zeiträume die allgemeine Lösung (2) der betreffenden Differentialgleichung (1) auf, so kann man durch Grenzübergang, wenn das Zeitintervall $\tau$ hinlänglich klein genommen wird, zur allgemeinen Lösung der Differentialgleichung (3) in folgender Weise gelangen:

Während des ersten Zeitraumes gilt die Lösung (2), während des zweiten Zeitraumes ($t=\tau$ bis $t=2\tau$) gilt

$$(4) \qquad y_2 = \frac{g_2}{\omega^2} + A_2\cos\omega t + B_2\sin\omega t \quad \text{und} \quad y_2' = -A_2\omega\sin\omega t + B_2\omega\cos\omega t$$

Zur Zeit $t=\tau$ müssen (als Forderung des stetigen Überganges) beide Lösungen übereinstimmen, man erhält durch Gleichsetzung 2 Gleichungen zur Bestimmung von $A_2$ und $B_2$:

$$\frac{g_1}{\omega^2} + \left(y_0 - \frac{g_1}{\omega^2}\right)\cos\omega\tau + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega\tau = \frac{g_2}{\omega^2} + A_2\cos\omega\tau + B_2\sin\omega\tau$$

$$-\left(y_0 - \frac{g_1}{\omega^2}\right)\omega\sin\omega\tau + v_0\cos\omega\tau = -A_2\omega\sin\omega\tau + B_2\omega\cos\omega\tau .$$

Man findet so, daß sich die für den 2^ten Zeitraum geltende Lösung $y_2$ durch die für den 1. Zeitraum geltende Lösung $y_1$ in folgender Weise darstellen lässt:

$$y_2 = \frac{g_2 - g_1}{\omega^2}\left[1 - \cos(\omega t - \omega\tau)\right] + y_1$$ ferner ist

$$y_3 = \frac{g_3 - g_2}{\omega^2}\left[1 - \cos(\omega t - \omega\tau)\right] + y_2$$ u. s. f. Die ruckweise Änderung der äußeren Kraft bewirkt jedesmal ein derartiges Zusatzglied. Angenommen, die äußere Kraft sei in gegebener Weise von der Zeit abhängig, sei gleich $f(t)$, so daß $\begin{cases} g_1 = f(0) \\ g_2 = f(\tau) \\ g_3 = f(2\tau) \end{cases}$ und für ein unendlich kleines Zeitintervall $g_2 - g_1 = [f'(\tau)]_{t=0} \cdot d\tau$ wird, so kann das bei stetig sich ändernder Kraft auftretende Zusatzglied in der allgemeinen Form $\frac{f(\tau)}{\omega^2}\{1 - \cos(\omega t - \omega\tau)\}d\tau$ geschrieben werden, so daß also im ganzen von der Zeit $t=0$ bis $t=t$ zu der Lösung $y_1$ hinzugetreten ist:

$$\int_0^t \frac{f(\tau)}{\omega^2}\{1 - \cos(\omega t - \omega\tau)\}d\tau.$$ Als allgemeine Lösung der Diff.-Gl. (3) ergibt sich demnach:

$$(5)\quad \underline{y = y_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\sin(\omega t - \omega\tau)\,d\tau.}$$

b) Man nimmt als allgemeine Lösung der Diff.-Gl. an:

$$y = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$\cos\omega t$ und $\sin\omega t$ sind 2 partikuläre Integrale der Differentialgleichung „ohne zweites Glied": $y'' + \omega^2 y = 0$; Legt man den beiden noch unbestimmten Funktionen von $t$, $A$ und $B$, noch die zweite Bedingung: $A'\cos\omega t + B'\sin\omega t = 0$ (für alle Werte von $t$) auf, so findet man, daß der Differentialgleichung mit 2tem Glied durch einen obigen Ausdruck genügt wird, wenn man $A$ und $B$ aus $A'\cos\omega t + B'\sin\omega t = 0$ und

$$A'\frac{d\cos\omega t}{dt} + B'\frac{d\sin\omega t}{dt} \equiv -A'\omega\sin\omega t + B'\omega\cos\omega t = f(t)$$ bestimmt.

Man findet für
$$\begin{cases} A = -\frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau + y_0 \\ B = +\frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau + \frac{v_0}{\omega} \end{cases}$$

<u>Methode der Variation der Konstanten.</u>

Man kann das Integrationsresultat (5) auch so aussprechen: <u>Man erhält das allgemeine Integral von (3) [allgemein: einer linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung mit zweitem Glied], indem man zu dem allgemeinen Integral der entsprechenden Differentialgleichung ohne zweites Glied noch irgendein partikuläres Integral der Differentialgleichung mit zweitem Glied hinzufügt.</u>

<u>Spezieller Fall</u>: Angenommen die Kraft, welche auf das System wirkt, ändert sich selbst

ten $z, z', z'', z''', z''''$ aus den beiden gegebenen Gleichungen und den 4 anderen:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\cdot y' + \frac{\partial F_1}{\partial y'}\cdot y'' + \frac{\partial F_1}{\partial y''}\cdot y''' + \frac{\partial F_1}{\partial z}\cdot z' + \frac{\partial F_1}{\partial z'}\cdot z'' + \frac{\partial F_1}{\partial z''}\cdot z''' = F_3 = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\cdot y' + \frac{\partial F_2}{\partial y'}\cdot y'' + \frac{\partial F_2}{\partial y''}\cdot y''' + \frac{\partial F_2}{\partial z}\cdot z' + \frac{\partial F_2}{\partial z'}\cdot z'' + \frac{\partial F_2}{\partial z''}\cdot z''' = F_4 = 0$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial t} + \cdots\cdots \qquad \cdots + \frac{\partial F_3}{\partial z'''}\cdot z'''' = F_5 = 0$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial t} + \cdots\cdots \qquad \cdots + \frac{\partial F_4}{\partial z'''}\cdot z'''' = F_6 = 0$$

erhalten werden.

## Integration 2er linearen Diff.-Gl. 2. Ord. mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + a_1 y' + b_1 z' + c_1 y + d_1 z = 0$$

$$z'' + a_2 y' + b_2 z' + c_2 y + d_2 z = 0$$

Man erkennt, daß $y = A e^{\lambda t}$, $z = B e^{\lambda t}$ zwei partikuläre Integrale der Diff.-Gl. sind, wenn $\lambda$, $A$, $B$ aus den beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda^2 + a_1\lambda + c_1)A + (b_1\lambda + d_1)B &= 0 \\ (a_2\lambda + c_2)A + (\lambda^2 + b_2\lambda + d_2)B &= 0 \end{aligned}\right\} (7)$$

bestimmt werden können. D. h. $\lambda$ muß eine Wurzel der Gleichung 4. Grades $\begin{vmatrix} \lambda^2 + a_1\lambda + c_1 & b_1\lambda + d_1 \\ a_2\lambda + c_2 & \lambda^2 + b_2\lambda + d_2 \end{vmatrix} = 0$ sein.

**I. Fall: Die Gleichung hat 4 voneinander verschiedene reelle Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.**

Dann hat das allgemeine Integral die Form

$$y = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + A_3 e^{\lambda_3 t} + A_4 e^{\lambda_4 t}$$

$$z = A_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 C_2 e^{\lambda_2 t} + A_3 C_3 e^{\lambda_3 t} + A_4 C_4 e^{\lambda_4 t}$$

Dabei bedeuten $C_1, C_2, C_3, C_4$ die Werte des Verhältnisses $\frac{B}{A}$ welche sich aus den Gleichungen (7) ergeben, sobald eine der Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ darin eingesetzt wird.

**II. Fall: Die Gleichung hat 2 konjugiert komplexe Wurzeln und 2 reelle Wurzeln.**

Es sei $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Für diese Werte berechnen sich aus (7)

$$\begin{cases} A = R e^{i\varphi}; & \bar{A} = R e^{-i\varphi} \\ C = \rho e^{i\psi}; & \bar{C} = \rho e^{-i\psi} \end{cases}$$

so daß an Stelle der Terme $A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$, $A_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 C_2 e^{\lambda_2 t}$ im allgemeinen Integral jetzt $2Re^{\alpha t}\cdot\cos(\beta t + \varphi)$ bzw. $2Re^{\alpha t}\cdot\rho\cdot\cos(\beta t + \varphi + \psi)$ treten, in welchen

$\rho$ und $\psi$ aus den Gleichungen (7) sich berechnende bestimmte Werte darstellen, während $R$ und $\varphi$ die willkürlichen Integrationskonstanten bedeuten, welche aus den Anfangsbedingungen hervorgehen.

## Aufgaben.

1) Man integriere a) $y''' - y'' + y' - y = 2\cos\frac{x}{2} + x$; b) $y'' + 2ay' + y = \sin x$, wo $a$ eine positive Konstante bedeutet; welche Formen nimmt das allgemeine Integral an für die 3 Fälle $a < 1$; $a = 1$; $a > 1$? (Vorprüfung 1911); c) $y'' - y = \frac{1}{2}e^{-2x}$ d) $y'' - y' + \frac{1}{2}y = x^2 + 1$

2) Die Entladung eines Kondensators, dessen Kapazität $C$ beträgt, durch einen Leiter vom Widerstande $w$ und der Selbstinduktion $L$, geht nach der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{w}{L}\cdot\frac{di}{dt} + \frac{i}{L\cdot C} = 0$$

vor sich. Wie gestaltet sich diese Entladung je nach den Werten von $w$, $L$ bei gegebenem $C$?

3) Die elektrischen Schwingungen in einem mit Kapazität und Selbstinduktion behafteten Stromkreis, welcher einer sich sinusartig ändernden Wechselspannung ausgesetzt ist, ($E = a\cdot\sin\omega t$) gehen nach der Differentialgleichung vor sich:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{w}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{L\cdot C} = \frac{a}{L}\,\omega\cdot\cos\omega t.$$

Wie ändert sich die Stromstärke und Phasenverschiebung mit wechselnder Selbstinduktion im Falle einer Wechselspannung $a = 3000\ V$, Kreisfrequenz $\omega = 300$, eines Widerstandes $w = 200\ \Omega$ und einer Kapazität $C = 2$ Mikrofarad.

4) Man integriere a) $\frac{dx}{dt} + y = 0$, $\frac{dy}{dt} + z = 1$, $\frac{dz}{dt} + x = t$ b) $\begin{cases} y'' + y' + 2z = 0 \\ z'' + y' + y + z = 0 \end{cases}$

5) Man integriere: $y'' + \omega^2 y = t^2$ (für $t = 0$ sei $y = y_0$; $y' = v_0$)

6) Ein Punkt $P_1$ bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit $a$ auf der x-Achse, ein 2ter Punkt $P_2$ verfolgt ihn mit der konstanten Geschwindigkeit $b$, so daß die Richtung von $P_2$ stets auf $P_1$ hinzielt. Welche Kurve beschreibt $P_2$?

## Berichtigungen.

Blatt № 1. Aufgabe 1c) lies $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$; Aufgabe 1g) lies $y_2 = -\left(\frac{x^2}{\pi^2} - 1\right)$. № 2. lies in 7) pag. 2: $c = \cdots - dy\,dx^2$ in 4) pag. 3 lies in der Formel für $\rho_1 = \frac{\cdot}{\sqrt{\cdots - \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)^2}}$ in Aufgabe 5) lies $z + y = t$. № 3. pag. 2 Mitte, lies statt $\left[\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{v=const.}$ richtig: $\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{x=const}\cdot\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{v=const.}$ № 4. pag. 2. Ergänze in der aus der allgemeinen Clairautschen Gleichung durch Differentiation erhaltenen Gleichung nach $X'(p)$: „$\frac{dp}{dx}$ und nach 1. Ord.: mit 2. Glied" und ließ statt Separation: „Quadraturen"

---

periodisch. Die Gleichung

$$(6) \qquad y'' + \omega^2 y = E\cos\nu t$$

hat die Lösung

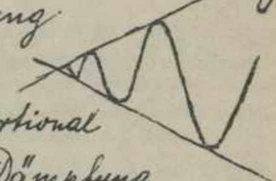
$$y = A\cos\omega t + B\sin\omega t + E\cdot\frac{\cos\nu t}{\omega^2 - \nu^2}$$

Die einwirkende periodische Kraft erzeugt demnach im System erzwungene Schwingungen von derselben Periode, welche sich mit den Eigenschwingungen des Systems kombinieren. Die Amplitude der erzwungenen Schwingungen kann nicht wie diejenigen der Eigenschwingungen durch Wahl der Anfangsbedingungen beliebig groß oder klein gemacht werden, und ist bei gegebener äußeren Kraft unabhängig davon, wie das freie System in Bewegung gebracht wird. Ist 1) $\omega > \nu$, die Periode der störenden Kraft also größer als die der Eigenschwingungen, so stimmen die erzeugten erzwungenen Schwingungen mit denjenigen der äußeren Kraft auch in der Phase überein.

Ist 2) $\omega < \nu$, die Periode der störenden Kraft also kleiner als die der Eigenschwingungen, so ist zwischen der äußeren Kraft und der durch sie bewirkten erzwungenen Schwingungen ein Phasenunterschied von $180^\circ$ vorhanden.

Ist 3) $\omega = \nu$, stimmt also die Periode der äußeren Kraft mit derjenigen der Eigenschwingungen überein, so wird die Amplitude der erzwungenen Schwingungen unendlich groß. In diesem Fall hat Gleichung (6) die Lösung

$$y = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{E}{2\omega}\cdot t\cdot\sin\omega t.$$



Die erzwungene Schwingung hat demnach eine mit der Zeit proportional wachsende Amplitude. (Dabei ist vorausgesetzt, daß 1) keine Dämpfung (Reibung) vorhanden ist und 2) daß beide Perioden $\omega$ und $\nu$ genau übereinstimmen).

II) Die Differentialgleichung der gedämpften erzwungenen Schwingungen.

$$y'' + 2ay' + \omega^2 y = f(t) \text{ speziell } = E\cdot\cos\nu t$$

Es wird also speziell angenommen, daß auf ein System, welches imstande ist Eigenschwingungen auszuführen, wenn Dämpfung vorhanden ist, eine periodische äußere Kraft einwirkt. Auch in diesem Fall setzt sich das allgemeine Integral zusammen durch Superposition der freien Schwingungen ohne Wirkung der äußeren Kraft (allgemeines Integral der Diff.-Gl. ohne zweites Glied, Blatt № 10) und der erzwungenen Schwingungen (partikuläres Integral der Diff.-Gl. mit zweitem Glied).

Als partikuläres Integral kann man ansetzen:

$$y = A\cdot\cos(\nu t + \delta).$$

Man findet, daß $A$ und $\delta$ durch die Gleichungen

$$A(\omega^2 - \nu^2) = E\cos\delta$$
$$-2A\nu\cdot a = E\sin\delta$$

bestimmt werden:

$$A = \frac{E}{\sqrt{(\omega^2-\nu^2)^2 + 4a^2\nu^2}}$$

$$\operatorname{tg}\delta = -\frac{2a\nu}{\omega^2-\nu^2}.$$

Die erzwungene Schwingung hat demnach dieselbe Periode wie die äußere Kraft und eine nur von der äußeren Kraft und der Periode der Eigenschwingungen bestimmte Amplitude aber gegenüber dem Fall ohne Dämpfung eine Phasenverschiebung. Das Maximum tritt nicht ein zu der Zeit, wo die äußere Kraft ihr Maximum erreicht, sondern vorher oder nachher. Die Amplitude der erzwungenen Schwingungen ist um so größer, je weniger die Periode der äußeren Kraft von der Periode der freien oder Eigenschwingungen des Systems abweicht, sie wird aber nie unendlich groß und nie so groß als im Fall ohne Dämpfung.

Der Fall, daß sich 2 schwingende Systeme gegenseitig beeinflussen führt auf die Lösung eines

## Systems von Differentialgleichungen mit 2 Unbekannten

### (Simultane Differentialgleichungen).

Durch fortgesetztes Differentiieren der beiden Diff.-Gl. nach der unabhängigen Variabeln $t$ kann man genügend viele Diff.-Gl. erhalten um eine der beiden abhängigen Variablen samt allen ihren Differentialquotienten eliminieren zu können und man wird auf diese Weise eine gewöhnliche Differentialgleichung $n$ter Ordnung für die übrig gebliebene abhängige Variable erhalten, in welcher also nur noch diese Variable, ihre Ableitungen nach $t$ und die unabhängige Variable selbst steht.

Satz: Ein System von Differentialgleichungen zwischen mehreren Variabeln kann ersetzt werden (mit Hilfe von Differentiationen und Eliminationen) durch eine Diff.-Gl. höherer Ordnung für 1 Variable.

Satz: Auch kann eine Diff.-Gl. $n$ter Ordnung durch ein System von Diff.-Gl. 1ter Ordnung ersetzt werden.

So kann $F(t, y, y', y'', y''') = 0$ ersetzt werden durch $\underbrace{y' = z;\ z' = u;\ F(t, y, z, u, u') = 0}$.

Aus dem System von Diff.-Gl. 2. Ordnung

$$\left.\begin{aligned} F_1(t, y, y'', z, z', z'') &= 0 \\ F_2(t, y, y'', z, z', z'') &= 0 \end{aligned}\right\}$$

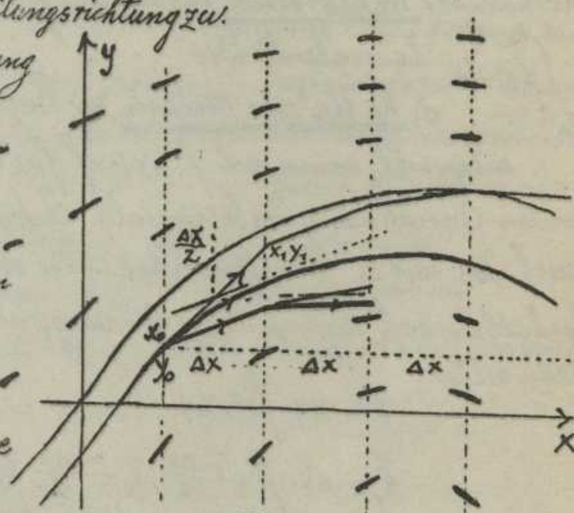
kann eine gewöhnliche Differ.-Gl. 4. Ordnung für $y$ durch 2-malige Differentiation jeder dieser Gleichungen nach der unabhängigen Variabeln $t$ und durch Elimination der 5 Unbekann=

30. I. 12. Höhere Mathematik III. № 12

## Näherungsweise Integration von Differentialgleichungen.

### I. Methode der schrittweisen Integration (der speziellen Lösungen).

a) Die Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ weist (sobald man $f(x,y)$ als eine einwertige Funktion ansieht) jedem Punkt der xy-Ebene eine Fortschreitungsrichtung zu.




Die Aufgabe der Integration dieser Differentialgleichung besteht darin, diese $\infty^2$ Linienelemente zu $\infty^1$ Kurvenzügen zusammenzufassen, so daß in jedem Punkt der Kurve die Richtung der Tangente mit der Richtung des Linienelementes übereinstimmt. Man wird daher ein Integral der Gleichung graphisch näherungsweise auf folgende Art bekommen: Man folgt von einem bestimmten Punkt $x_0 y_0$ der Ebene aus der Richtung welche sich für diesen Punkt aus der Differentialgleichung berechnet um ein kleines Stück bis zum Punkt $\begin{cases} x_1 = x_0 + \Delta x_0 \\ y_1 = y_0 + \Delta x_0 \cdot f(x_0, y_0) \end{cases}$ Von $x_1, y_1$ aus schreitet man wieder in der sich für $x_1 y_1$ aus der Diff.-Gl. ergebenden Richtung ein Stück fort etc. Regel: Will man wissen, mit welcher Genauigkeit sich der dadurch erhaltene Kurvenzug der wahren Integralkurve, die von $x_0 y_0$ ausgeht, anschließt, so konstruiert man sich einen neuen Kurvenzug, indem man jedesmal um die Hälfte des Weges in Richt. des Linienelements fortschreitet. Weicht der neue Weg von dem alten nur wenig ab, so kann man schließen, daß auch die Integralkurve von dem zuerst konstruierten Weg im allgemeinen nur wenig abweicht. Ist $y = f(x)$ allein, so ist dieses Näherungsverfahren (wenn die Abszissendifferenzen der benutzten Punkte jedesmal $= \Delta x$ sind) zur Berechnung der Ordinate des Endpunktes $y_n$ aus der Anfangsordinate $y_0$ identisch mit der Rechtecksformel zur angenäherten Berechnung des Integrals $y = \int^{x_n} f(x)\,dx$.

b) Rungesche Methode. Statt vom Punkt $x_0 y_0$ in einer Richtung fortzuschreiten, welche sich für denselben aus der Diff.-Gl. berechnet, erhält man eine bessere Näherung für $y_1$ wenn man von $x_0 y_0$ in einer dem Punkt $x_0 + \frac{\Delta x_0}{2}, y_0 + \frac{\Delta x}{2} f(x_0 y_0)$ entsprechenden Richtung fortschreitet. Es ist dann nicht wie im vorigen Fall $\Delta y = \Delta x f(x_0, y_0)$ sondern

$$\Delta y = \Delta x\, f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta x}{2} f(x_0, y_0)\right) = \Delta x\, f(x_0, y_0) + \left(f_1' \frac{\Delta x}{2} + f_2' \frac{\Delta x}{2} \cdot f\right) \cdot \Delta x$$

bis auf mit $\Delta x^2$ multiplizierte Glieder (inclusiv) genau. Der wahre Zuwachs $\Delta y$, welchen die Ordinate der vom Punkt $x_0 y_0$ ausgehenden Integralkurve $y = F(x)$ erleidet, wenn in der Richtung der $x$ um $\Delta x$ fortgeschritten wird, ist $\Delta y = f \cdot \Delta x + f' \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + f'' \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \ldots\ldots$!
Man erkennt, daß die Methode a) nur das erste Glied dieser Entwicklung berücksichtigt, und die Methode b) auch das zweite Glied. Reduziert sich $f(x,y)$ auf $f(x)$ allein, so ist diese Methode der Trapezformel zur näherungsweisen Berechnung des bestimmten Integrals $\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$ äquivalent. Die

c) Kutta'sche Methode zur Berechnung der Ordinate $y_n$ beim Ausgehen von $x_0 y_0$ entspricht, wenn sich $f(x,y)$ auf $f(x)$ reduziert, der Simpsonischen Regel zur näherungsweisen Berechnung des bestimmten Integrals $\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$. Diese Methode berücksichtigt auch das mit $\Delta x^3$ behaftete Glied in der obigen Taylorschen Entwicklung und ist deshalb bis auf Größen dieser Ordnung (inclusiv) genau. Die Regel ist die:
Man bilde

$$k = \Delta x\, f(x_0, y_0)$$

$$k_1 = \Delta x \cdot f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 + \frac{\Delta x}{2} \cdot f(x_0, y_0)\right) \quad (\equiv \Delta y \text{ im Fall } b))$$

$$k_2 = \Delta x \cdot f(x_0 + \Delta x, y_0 + k)$$

$$k_3 = \Delta x \cdot f(x_0 + \Delta x, y_0 + k_2)$$

$$k_4 = \frac{k + k_3}{2}$$

dann wird $\Delta y = k_1 + \frac{1}{3}(k_4 - k_1)$.

NB! Man kann auch sagen, daß die Methoden a), b), c) bezw. fordern, die Näherungskurve soll mit der Integralkurve im Punkt $x_0 y_0$ im 1ten, im 1ten und 2ten, und in den 3 ersten Diff.-Quot. übereinstimmen.

## II, Integration durch Reihenentwicklung.

a) Fordert man von der Näherungskurve, sie soll im Punkt $x_0 y_0$ in sämtlichen Diff.-Quot. mit der durch denselben hindurchgehenden Integralkurve übereinstimmen, so gelangt man dazu, für die Näherungskurve die Taylorsche Entwicklung anzusetzen:

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + y_0'' \cdot \frac{(x-x_0)^2}{2!} + y_0''' \frac{(x-x_0)^3}{3!} + \ldots$$

wobei sich im Fall einer Diff.-Gl. $n$ter O. die Koeffizienten $y_0^{(n)}, y_0^{(n+1)}$, etc aus der Diff.-Gl. berechnen, wenn $x_0, y_0, y_0' \ldots y^{(n-1)}$ festgesetzt sind. So bestimmen sich bei einer Diff.-Gl. 1. O.: $y' = f(x,y)$, $f''$ und $f'''$ aus

$$f' = f_1 + f_2 \cdot f = y''$$

$$f'' = f_{11} + 2 f_{12} \cdot f + f_{22} \cdot f^2 + f_2 \cdot f' = y'''.$$

Die Lösung gilt, so lange die Reihe konvergiert. Betrachtet man in obiger Formel etwa $y_0$ als eine willkürlich zu wählende Größe, so stellt die Formel das allgemeine Integral der Diff.-Gl. $y' = f(x,y)$ dar, und zwar die Entwicklung der einzelnen Integralkurven für ihre Punkte mit der bestimmten Abszisse $x_0$, wobei $y_0$ die Rolle der willkürlichen Konstanten $C$ spielt.

b) Häufig wird man es vorziehen, der Diff.-Gl. durch eine Reihe $y = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$ mit unbestimmten Koeffizienten $a_i$, welche nach ganzen Potenzen von $x$ fortschreitet, zu genügen versuchen. Durch Identifizierung der Koeffizienten von gleich hohen Potenzen von $x-x_0$ auf beiden Seiten der Diff.-Gl. können die Koeffizienten $a_i$ bestimmt, bezw. (bei einer Diff.-Gl. $n$ter Ord.) durch die $n$ ersten Koeffizienten, welche unbestimmt bleiben, ausgedrückt werden. Der Integrationsansatz $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$ führt z.B. bei der spezialisierten Diff.-Gl. für die Zylinderfunktionen

$$y'' + \frac{y'}{x} + y = 0$$

wenn man beachtet, daß für $x=0$ auch $y'=0$ sein muß, zu der nach ganzen Potenzen von $x$ fortschreitenden Lösung, welche für alle Werte $x$ konvergiert

$$y = A\left[1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 \frac{1}{(2!)^2} - \left(\frac{x}{2}\right)^6 \frac{1}{(3!)^2} + - \dots\right] = A\sum \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

worin $A$ eine willkürliche Konstante bedeutet.

c) Die verallgemeinerte (Besselsche) Diff.-Gl. für Zylinderfunktionen 1. Art

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{x^2}\right)y = 0$$

ist ein Beispiel für diejenigen Diff.-Gl. der durch eine Reihe genügt werden kann, die nach Potenzen von $x$ fortschreitet, welche nicht ganzzahlige Exponenten enthalten. Indem man dafür den Ansatz macht: $y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \dots$ und fordert, die Reihe soll nach steigenden Exponenten von $x$ fortschreiten, muß man $\alpha = \alpha_0$ annehmen und erhält:

$$1)\; y = A\cdot x^{\alpha_0}\left[1 - \frac{1}{1\cdot(\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot 2\,(\alpha+1)(\alpha+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\,(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots\right.$$

ferner genügt auch

$$2)\; y = A_1\cdot x^{-\alpha}\left[1 - \frac{1}{1(1-\alpha)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{1\cdot 2\,(1-\alpha)(2-\alpha)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\,(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots\right.$$

der Diff.-Gl. Da die Diff.-Gl. linear und homogen ist, so stellt 1) + 2) das allgemeine Integral derselben dar, und zwar dann, wenn $\alpha$ keine ganze Zahl und auch nicht $0$ ist. Ist $\alpha$ eine positive oder negative ganze Zahl oder $0$, so geben 1) + 2) auch Integrale aber nicht die allgemeinsten.

d) Eine weitere Gattung von Lösungen durch Reihenentwicklung sei am Beispiel der

speziellen Besselschen Diff.-Gl. $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$ erläutert.
Diese Diff.-Gl. soll durch eine Reihe genügt werden, welche nach negativen Exponenten von x fortschreitet, also für sehr große Werte von x eine Lösung gibt. Zu diesem Zweck führt man die Diff.-Gl. durch die Substitution $y = \mathfrak{A}e^{ix}$ (wobei $\mathfrak{A}$ eine noch zu bestimmende Funktion von x ist) über in $\frac{d^2\mathfrak{A}}{dx^2} + (2i + \frac{1}{x})\frac{d\mathfrak{A}}{dx} + \frac{i}{x}\mathfrak{A} = 0$
in welche Diff.-Gl. substituiert wird $\mathfrak{A} = C_0 x^{-\alpha} + C_1 x^{-\alpha-1} + C_2 x^{-\alpha-2} + \cdots$
welche auf die Lösung führt $y = C_0 \cdot e^{ix} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\left\{1 - \frac{i}{8}\cdot\frac{1}{x} - \frac{9}{2!\,8^2}\frac{1}{x^2} + \frac{i \cdot 9 \cdot 25}{3!\,8^3}\cdot\frac{1}{x^3} + \cdots\right.$
Setzt man $C_0 = A + iB$, trennt Reelles und Imaginäres, so nimmt die Lösung die Form an

$$y = \frac{A\cos x - B\sin x}{\sqrt{x}}\left\{1 - \frac{9}{2!\,8^2}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{9\cdot 25\cdot 49}{4!\,8^4}\frac{1}{x^4} - + \cdots\right.$$

$$+ \frac{A\sin x + B\cos x}{\sqrt{x}}\left\{\frac{1}{8x} - \frac{9\cdot 25}{3!\,8^3}\cdot\frac{1}{x^3} + \frac{9\cdot 25\cdot 49\cdot 81}{5!\,8^5}\cdot\frac{1}{x^5} - + \cdots\right.$$

welche das <u>allgemeine Integral der spezialisierten Besselschen Diff.-Gl.</u> darstellt.
NB! A und B können in geeigneter Weise so bestimmt werden, daß die Lösung unter b) erscheint. Diese asymptotische Lösung konvergiert im Gegensatz zu jener Lösung für große Werte von x sehr rasch.

## Aufgaben.

1) Man beweise, daß der Ausdruck in I c) $\Delta y = k_1 + \frac{1}{3}(k_4 - k_1) = f\Delta x + f'\cdot\frac{\Delta x^2}{2!} + f''\cdot\frac{\Delta x^3}{3!}$
wenn noch die 3. Potenzen von $\Delta x$ berücksichtigt werden.
2) Vorgelegt sei $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{4y}$. Wie lautet das allg. Integral und dasjenige partikuläre Integral, das durch $x = 0$, $y = 1$ erfüllt ist. Man suche 2 Näherungskurve nach jeder der Methoden I a), b), c) durch Zeichnung, indem man für $\Delta x = 1$ annehme und vergleiche die Näherungskurven mit der partikulären Lösung und im Falle I a) auch mit der für $\Delta x = \frac{1}{2}$ erhaltenen Näherungskurve
3) Man integriere durch Reihenentwicklung a) $\frac{dy}{dx} = y^2 + x^2$ b) $y' = \frac{y^2}{x^2} - x^2 + 1$
c) $(1-x^2)y'' - 2xy' + (n+1)\cdot n\cdot y = 0$ (Diff.-Gl. der Kugelfunktionen 1. Art)
4) Man integriere a) $(1-x^2)y'' - xy' + k^2y = 0$ durch die Substitution $x = \cos t$,
b) $(a+bx)^2y'' + m(a+bx)y' + ny = 0$ α) durch d. Substitution $a + bx = e^t$ β) indem man zeige, daß die Diff.-Gl. 2 part. Integrale von der Form $y = (a+bx)^\rho$ bei passender Wahl von ρ hat.
c) $(a+bx)^2y'' + m(a+bx)y' + ny = Mx + N$ indem man ein partikuläres Integral durch Probieren sucht!

0. II. 12. Höhere Mathematik III. № 13

## Fortsetzung der Beschreibung der Methoden zur näherungsweisen Integration von Diff.-Gl.

## III. Methode der sukzessiven Approximationen.

In gewissen Fällen kann man zur näherungsweisen Integration von Diff.-Gl. ein Verfahren einschlagen, das der Methode der sukzessiven Approximation zur numerischen Berechnung einer Wurzel einer Gleichung in x entspricht. (H. M. II № 5). Soll beispielsweise

(1) $$y'' + y = \alpha \cdot y^3$$ wo $\alpha$ eine kleine Größe bedeutet

näherungsweise integriert werden, so kann man sukzessive die Gleichungen lösen

(1a) $y_1'' + y_1 = 0$ Lösung $y_1 = \cos t$ als erste Annäherung

(1b) $y_2'' + y_2 = \alpha y_1^3$ ist hieraus $y_2$ als zweite Annäherung berechnet, so gibt

(1c) $y_3'' + y_3 = \alpha y_2^3$ eine noch bessere Annäherung $y_3$ u. s. f.

Nach einer von Lindstedt angegebenen Methode können auf den rechten Seiten auftretende Zusatzglieder, welche nicht in der Natur der Erscheinung liegen, welche von der Diff.-Gl. beherrscht wird, entfernt werden. So würde man durch das Auftreten von $\cos^3 t$ auf der rechten Seite von ($1_b$) geneigt sein, zu glauben, daß Schwingungen auftreten, welche mit wachsender Zeit fortwährend zunehmen (da das Glied dieselbe Periode wie die freien Schwingungen besitzt). Um die Periode der störenden Kraft zu korrigieren schreibt man nach Lindstedt (1) in der Form:

(1′) $$y'' + y(1+\alpha\mu) = \alpha\mu y + \alpha y^3$$

worin $\mu$ eine noch zu bestimmende Konstante bedeutet.

Durch Auflösung von ($1'_a$) $$y_1'' + y_1 \cdot (1+\alpha\mu) = 0$$ erhält man als erste Näherung: $y_1 = \cos w$, wenn $w = \sqrt{1+\alpha\mu} \cdot t$ gesetzt wird. Die Konstante $\mu$ wird dann aus der Forderung bestimmt, daß in der Gleichung

($1'_b$) $$y_2'' + y_2 \cdot (1+\alpha\mu) = \alpha\mu \cos w + \alpha \cdot \frac{\cos 3w - 3\cos w}{4}$$

das auf der rechten Seite stehende Glied, welches $\cos w$ enthält und den Ausschlag unendlich zu vergrößern strebt, fortfällt. ($1'_b$) geht dann über in ($1'_b$): $y_2'' + y_2 \cdot (1+\frac{3}{4}\alpha) = \frac{\alpha}{4} \cos 3w$.

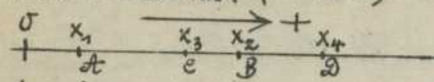
Als zweite Annäherung ergibt sich daraus

$$y_2 = \cos w - \frac{\alpha}{32\,(1+\frac{3}{4}\alpha)} \cos 3w$$

welche Lösung kein der Zeit proportionales Glied enthält. Wollte man $y_2$ zu einer 3. Annäherung benützen, so müßte man die Periode abermals korrigieren, u. s. f. (Zur Herstellung von $y_2$ wurde der Hilfssatz benützt: Genügt $z_1$ der Gleichung $z'' + az = \varphi(t)$ und genügt $z_2$ der Gleichung $z'' + az = \psi(t)$ so folgt, daß $z_1 + z_2$ der Gleichung genügt: $z'' + az = \varphi(t) + \psi(t)$)

# Projektive Geometrie.

**1) Das Doppelverhältnis von 4 Punkten.** Unter dem Doppelverhältnis der 4 Punkte $ABCD$ versteht man den Ausdruck $(ABCD) = (x_1 x_2 x_3 x_4) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}$.




Von den $4! = 24$ Doppelverhältnissen, welche man aus den 4 Punkten bilden kann sind nur 6 verschieden, weil immer je 4 derselben einander gleich sind. Denn greift man ein beliebiges Doppelverhältnis heraus, z.B. $(ABCD)$, so gilt:

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

Das Doppelverhältnis bleibt ungeändert, wenn man

a) Die 4 Punkte in 2 Paare teilt und die Elemente beider Paare für sich vertauscht

b) Wenn man die 2 Paare miteinander vertauscht

c) Wenn man beide Operationen miteinander ausführt.

Ist $(ABCD) = \Delta$, so ist $(ABDC) = \frac{1}{\Delta}$ und $(ACBD) = 1 - \Delta$. d.h.

d) Wenn man in einem Doppelverhältnisse die Glieder von nur 1 Paar miteinander vertauscht, so erhält man den reziproken Wert desselben.

e) Wenn man in einem Doppelverhältnis die beiden mittleren Glieder miteinander vertauscht, so erhält man 1 — den Wert des Doppelverhältnisses.

Die 6 voneinander verschiedenen Doppelverhältnisse lassen sich demnach in einfacher Weise durch bloß eines von ihnen ausdrücken. Ist $\Delta$ der Wert desselben, so sind die Werte der übrigen

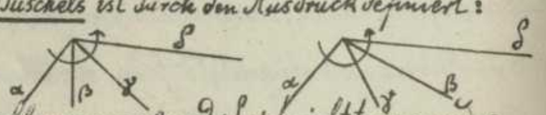
$$\frac{1}{\Delta},\ 1-\Delta,\ \frac{1}{1-\Delta},\ \frac{\Delta-1}{\Delta},\ \frac{\Delta}{\Delta-1}.$$

Spezielle Fälle: α) $(ABC\infty) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}$ also gleich dem Verhältnis, in welchem C die Strecke AB teilt.

β) $(A\,1\,0\,\infty) = A$; d.h. Das Doppelverhältnis eines beliebigen Punktes $A\ (=x_1)$ mit den 3 Punkten $1, 0, \infty$ ist gleich $x_1$ selbst.

**2) Das Doppelverhältnis von 4 Strahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eines Büschels** ist durch den Ausdruck definiert:

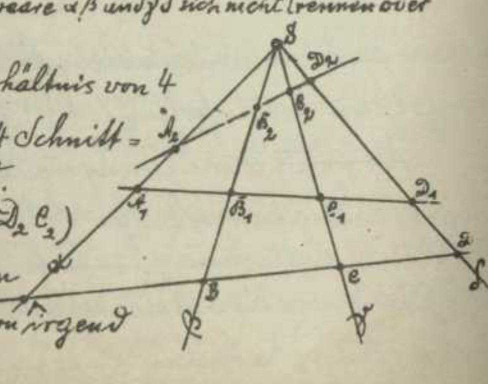
$$(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{\sin\alpha\gamma}{\sin\beta\gamma} : \frac{\sin\alpha\delta}{\sin\beta\delta}$$




NB! Das Doppelverhältnis wird + oder −, je nachdem die Strahlenpaare $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ sich nicht trennen oder trennen.

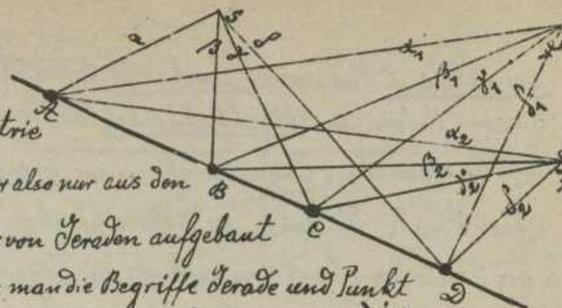
**3) Fundamentalsatz der projektiven Geometrie.** Das Doppelverhältnis von 4 Strahlen eines Büschels ist gleich dem analog gebildeten der 4 Schnittpunkte, welche irgendeine Gerade mit den 4 Strahlen liefert.

$$(ABCD) = (\alpha\beta\gamma\delta) = (A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_2 B_2 D_2 C_2)$$

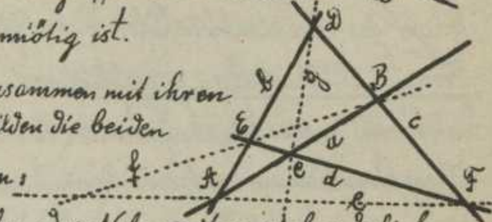



ferner: Das Doppelverhältnis von 4 Punkten einer Geraden ist gleich dem analog gebildeten D. V. der 4 Strahlen, welche von irgend einem Punkte nach den 4 Punkten gezogen werden können.

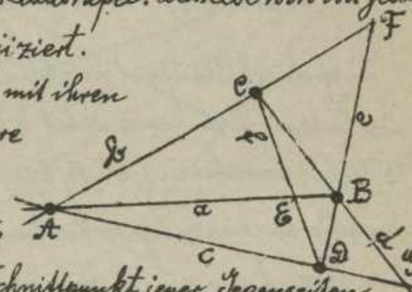
$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (ABCD) = (\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1) = (\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2)$$



4) Prinzip der Dualität. Jedem Satz der projektiven Geometrie der Ebene, welcher keine metrischen Beziehungen enthält der also nur aus den Operationen des Verbindens von Punkten und des Schneidens von Geraden aufgebaut ist, kann man einen zweiten Satz gegenüberstellen, indem man die Begriffe Gerade und Punkt mit einander vertauscht und für welchen ein eigener Beweis unnötig ist.



5) Ein vollständiges Vierseit heißen jede 4 Gerade der Ebene zusammen mit ihren 6 Schnittpunkten. Die 4 gegebenen Geraden a, b und c, d bilden die beiden Paare Gegenseiten, die 6 Schnittpunkte die 3 Paare Gegenecken: C, D; E, B; A, F, welche miteinander verbunden die 3 Diagonalen oder Nebenseiten g, f und e liefern. Satz: Zwei Gegenecken und die Schnittpunkte der Verbindungslinien der beiden anderen Gegeneckenpaare mit der Verbindungslinie des ersten Gegeneckenpaars bilden ein harmonisches Quadrupel. Dasselbe wird von jedem Eckpunkt des Vierseits durch ein harmonisches Strahlenbüschel projiziert.

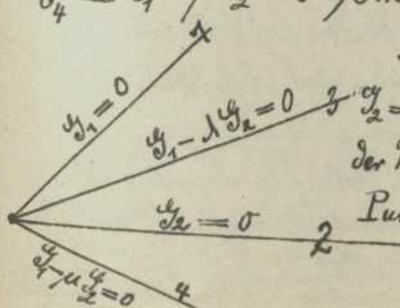


6) Ein vollständiges Viereck heißen jede 4 Punkte der Ebene zusammen mit ihren 6 Verbindungslinien. Die 4 Punkte A, B und C, D bilden die beiden Paare Gegenecken, die 6 Verbindungslinien die 3 Paare Gegenseiten c, d; e, b; a, f, welche zum Schnitt gebracht die 3 Nebenecken G, F u. E liefern. Satz: Zwei Gegenseiten und die Strahlen, welche den Schnittpunkt jener Gegenseiten mit den noch übrigen Nebenecken verbinden, bilden ein harmonisches Büschel. Dasselbe wird von jeder Linie des Vierecks in 4 harmonischen Punkten geschnitten.

7) Sind die Gleichungen von 4 Strahlen durch einen Punkt in der Form gegeben

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= 0 \\ G_2 &= 0 \\ G_3 &\equiv G_1 - \lambda G_2 = 0 \\ G_4 &\equiv G_1 - \mu G_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

so haben die Faktoren $\lambda$ und $\mu$ an und für sich keine geometrische Bedeutung (wenn die Geraden $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ nicht in der Normalform gegeben sind) Aber der Quotient $\frac{\lambda}{\mu}$ ist gleich dem Doppelverhältnis $(G_1 G_2 G_3 G_4)$ der 4 Strahlen in dieser Reihenfolge. $\left(= \frac{\sin 1,3}{\sin 2,3} : \frac{\sin 1,4}{\sin 2,4}\right)$

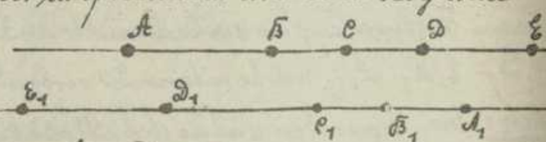



NB! Bezeichnen $\Gamma_1 = 0$ und $\Gamma_2 = 0$ die Gleichungen der Geraden $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ in der Normalform, so bezeichnet für die Gerade $\Gamma_1 - \lambda \Gamma_2 = 0$ der Parameter $\lambda$ das konstante Verhältnis der senkrechten Abstände eines Punktes dieser Geraden von $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ also das Sinusteilverhältnis $k = \frac{\sin(1,3)}{\sin(2,3)}$ der Geraden $G_1 - \lambda G_2 = 0$ im Winkel $(1,2)$.

Definitionen. Unter einer Punktreihe versteht man die Gesamtheit aller Punkte die auf einer geraden Linie liegen. Unter einem Strahlenbüschel die Gesamtheit der Geraden die durch einen Punkt hindurchgehen und in einer Ebene liegen. Unter einem Ebenenbüschel die Gesamtheit der Ebenen die alle durch eine Gerade, die Achse des Ebenenbüschels hindurchgehen. (Grundgebilde I. Stufe).

Die Gerade bezeichnet man auch als den Träger der Punktreihe und den Punkt oder die Ebene als den Träger des Strahlenbüschels.

Zwei Punktreihen heißen projektiv, wenn sie eindeutig Punkt für Punkt dadurch aufeinander bezogen sind, daß je vier Punkte der einen Punktreihe und die vier entsprechenden der anderen das gleiche Doppelverhältnis besitzen. Es muß sein




$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1)$$
$$(ABCE) = (A_1B_1C_1E_1)$$
$$(ABCF) = (A_1B_1C_1F_1) \quad \text{etc.}$$

Satz: Alle Doppelverhältnisse der Punkte einer Punktreihe, lassen sich ableiten aus den Doppelverhältnissen, welche die Punkte mit 3 bestimmt ausgewählten Punkten der Punktreihe haben. Man kann daher 3 Punkte auf der einen und 3 Punkte auf der anderen Punktreihe beliebig annehmen ($A, B, C$ und $A_1, B_1, C_1$) und jeden 4. Punkt auf der einen zu jedem 4. Punkt auf der anderen eindeutig so bestimmen, daß obige Gleichungen erfüllt sind. Daher ist die projektive Beziehung zweier Grundgebilde I. Stufe durch Angabe von je 3 Elementen bestimmt.

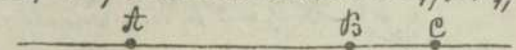
## Aufgaben.

1) Man integriere nach der auf dem Üb. Bl. angegebenen Methode näherungsweise die Pendelgleichung $\varphi'' = -\frac{g}{l}\sin\varphi$ worin man substituiere $\sin\varphi \sim \varphi - \frac{\varphi^3}{9}$ (für kleine $\varphi$)

2) Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks seien in der Normalform $\Gamma_1 = 0$, $\Gamma_2 = 0$, $\Gamma_3 = 0$

a) Man stelle die Gleichungen der Höhen und Mittellinien auf und beweise daß die ersten sowohl als die letzteren durch je einen gemeinsamen Punkt gehen.

b) Man beweise den allgemeinen Satz: Sind $A, B, C$ die Ecken des durch obige Geraden bestimmten Dreiecks, $A_1, B_1, C_1$ Punkte auf den $A, B, C$ gegenüberliegenden Seiten und es besteht die Beziehung $AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 = -AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1$ so schneiden sich $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ in einem Punkt. (Satz von Ceva 1678)




3) Gegeben sind die Punkte $A, B, C$ (siehe Fig.) Man untersuche den Verlauf des Doppelverhältnis $(ABCD)$ wenn $D$ die Punktreihe durchläuft und konstruiere einen Punkt $D$, so daß $(ABCD) = -\frac{2}{3}$.

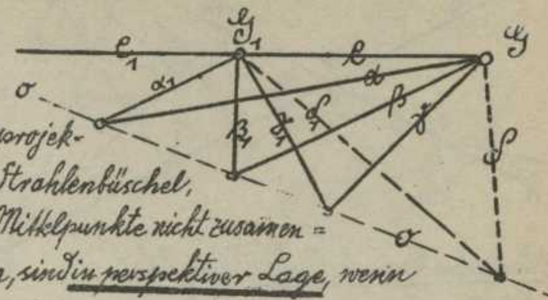
4) Ist $(ACBD) = -1$ und $M$ die Mitte von $AB$ so gilt: $MC \cdot MD = MA^2 = MB^2$

5) Auf 2 Geraden sind die Punkte mit den Entfernungen vom Schnittpunkte 2, 4, 5 und 1, 2, 3 einander zugeordnet. Welcher Punkt der 2. Geraden entspricht dem Punkte a) 5 b) 9, der ersten?
(projektive Zuordnung)


1) Zwei projektive Punktreihen, welche nicht zusammenfallenden Trägern angehören, sind in perspektiver Lage, wenn

1) irgend 2 entsprechende Punkte in ihrem Durchschnitt vereinigt liegen ($E E_1$) oder

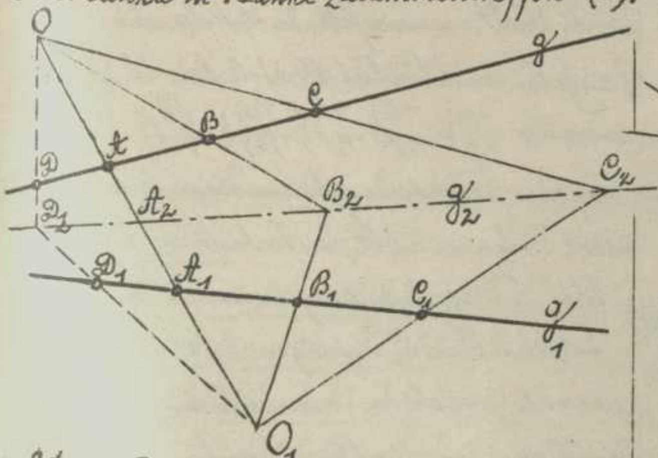
2) irgend 3 Verbindungslinien einander entsprechender Punkte in 1 Punkt zusammentreffen (O).

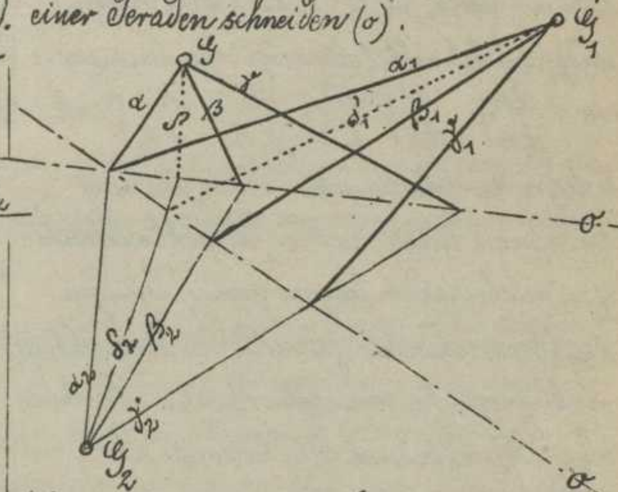



1) Zwei projektive Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte nicht zusammenfallen, sind in perspektiver Lage, wenn

1) irgend 2 entsprechende Strahlen in der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte vereinigt liegen ($\varepsilon\varepsilon_1$) oder

2) irgend 3 entsprechende Strahlenpaare sich auf einer Geraden schneiden ($\sigma$).




2) Satz: 2 Punktreihen $g(A, B, C \dots)$ und $g_1(A_1, B_1, C_1 \dots)$ sind projektiv aufeinander bezogen, wenn sie beide perspektiv auf eine 3te Punktreihe $g_2(A_2 B_2 C_2 \dots)$ bezogen sind.

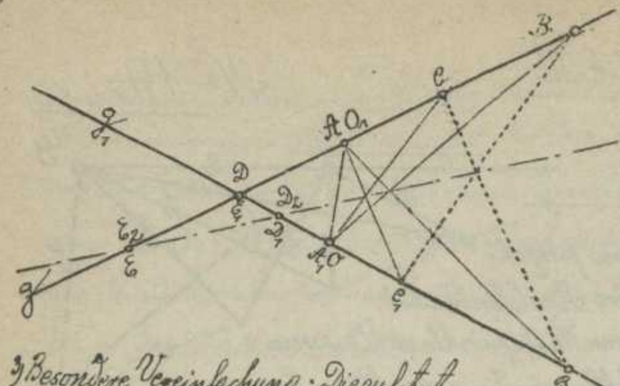
$$(ABCD) = (A_2 B_2 C_2 D_2)$$
$$(A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_2 B_2 C_2 D_2) \quad \text{folglich}$$
$$(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1).$$

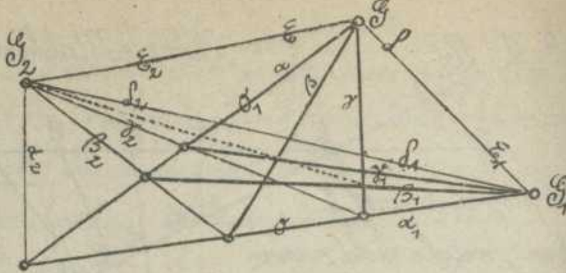
(Verwendung zur Konstruktion des zu einem Punkt D der einen Punktreihe entsprechenden Punktes $D_1$ auf der anderen).

2. Satz: 2 Strahlenbüschel $S(\alpha\beta\gamma \dots)$ und $S_1(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \dots)$ sind projektiv aufeinander bezogen, wenn sie beide perspektiv auf ein 3tes Strahlenbüschel $S_2(\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \dots)$ bezogen sind.

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \delta_2)$$
$$(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1) = (\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \delta_2) \quad \text{folglich}$$
$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \delta_1).$$

(Verwendung zur Konstruktion des einem Strahl $\delta$ des einen Strahlbüschels entsprechenden Strahls $\delta_1$ des anderen).



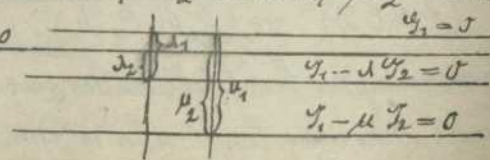




3) <u>Besondere Vereinfachung</u>: Die auf $A A_1$ beliebig gewählten Mittelpunkte $O$ und $O_1$ fallen auf $A_1$ bezw. auf $A$. Aus der Figur ist unmittelbar folgender <u>Satz</u> abzulesen: Hat man 2 projektive Punktreihen $A, B, C \dots$ und $A_1, B_1, C_1 \dots$ auf 2 festen Trägern $g$ und $g_1$ und betrachtet alle möglichen Linienpaare wie $\left.\begin{matrix}AB_1\\A_1B\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}AC_1\\A_1C\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}AD_1\\A_1D\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}BC_1\\C_1B\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}BD_1\\DB_1\end{matrix}\right\}$ etc. so liegen die Schnittpunkte, welche jedes dieser Linienpaare liefert, auf der „Perspektivitätsachse" $g_2$, welche aus den Trägern $g$ und $g_1$ diejenigen Punkte ausschneidet, ($E$ und $D_1$), die den im Schnittpunkt von $g$ und $g_1$ vereinigten Punkten entsprechen ($E_1$ und $D$) und dadurch völlig bestimmt ist.

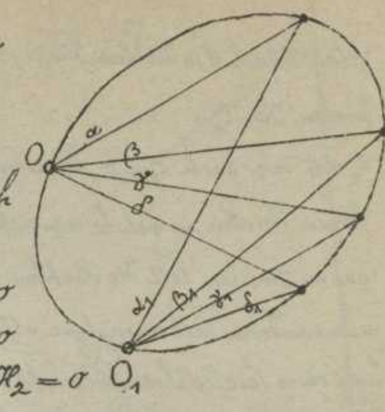
3) <u>Besondere Vereinfachung</u>: Die durch den Schnittpunkt von $\alpha$ und $\alpha_1$ beliebig gezogenen Träger $O$ und $O_1$ fallen auf $\alpha_1$ bezw. auf $\alpha$. Aus der Figur ist unmittelbar folgender <u>Satz</u> zu erkennen: Hat man 2 projektive Strahlenbüschel $\alpha, \beta, \gamma \dots$ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \dots$ die von 2 nicht zusammenfallenden Mittelpunkten $S$ und $S_1$ ausgehen und betrachtet alle möglichen Schnittpunktspaare wie $\left.\begin{matrix}\alpha\beta_1\\\alpha_1\beta\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}\alpha\gamma_1\\\alpha_1\gamma\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}\alpha\delta_1\\\alpha_1\delta\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}\beta\gamma_1\\\beta_1\gamma\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}\beta\delta_1\\\beta_1\delta\end{matrix}\right\}$ etc. so gehen die Verbindungslinien dieser Schnittpunktpaare durch einen Punkt, das „Zentrum der Perspektivität" $S_2$, dessen Verbindungslinien mit den Mittelpunkten $S$ und $S_1$ diejenigen Strahlen darstellen ($\varepsilon$ und $\delta_1$), welche den in der Verbindungslinie von $S$ mit $S_1$ vereinigten Strahlen entsprechen ($\varepsilon_1$ und $\delta$) und welches dadurch bestimmt ist.

4) <u>Ausdehnung von Satz 7) des Üb. Bl. № 13 auf den Fall von 4 parallelen Geraden</u>, also auf den Fall, daß der Träger des Strahlenbüschels der dazugehörigen Strahlen unendlich fern liegt.

Sind
$$\left.\begin{aligned} S_1 &= 0 \\ S_2 &= 0 \\ S_1 - \lambda S_2 &= 0 \\ S_1 - \mu S_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$
die Gleichungen von 4 zueinander parallelen Geraden, so haben die Faktoren $\lambda$ und $\mu$ für sich keine geometrische Bedeutung (wenn $S_1=0$ und $S_2=0$ nicht auf die Normalform gebracht sind). Aber der Quotient $\frac{\lambda}{\mu}$ ist gleich dem Doppelverhältnis der Abstände der Geraden $S_1 - \lambda S_2 = 0$ und $S_1 - \mu S_2 = 0$ von den Geraden $S_1 = 0$ und $S_2 = 0$.




nämlich gleich $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} : \frac{\mu_1}{\mu_2}$.




5) Sind 2 von $O$ bezw. $O_1$ ausgehende Strahlenbüschel durch Angabe je 3er sich entsprechenden Strahlen $\alpha\beta\gamma$ bezw. $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ projektiv aufeinander bezogen, so kann man den geometrischen Ort der Schnittpunkte je zweier sich entsprechenden Strahlen analytisch folgendermaßen bestimmen:

Seien die Gleichungen von $\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{matrix}\right.$ bezw. $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{J}_1 = 0\\ \mathfrak{J}_2 = 0\\ \mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2 = 0\end{matrix}\right.$, von $\left\{\begin{matrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ \gamma_1\end{matrix}\right.$ bezw. $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{H}_1 = 0\\ \mathfrak{H}_2 = 0\\ \mathfrak{H}_1 - \mathfrak{H}_2 = 0\end{matrix}\right.$

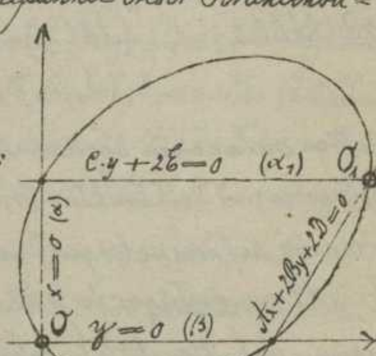
(welche Darstellungsweise von $\gamma$ und $\gamma_1$ aus $\alpha, \beta$ und $\alpha_1, \beta_1$ immer bewerkstelligt werden kann) so ist die Gleichung eines beliebigen Strahles $\delta$ des ersten Büschels und die des entsprechenden Strahles $\delta_1$ des zweiten " " "

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{J}_1 - \lambda\mathfrak{J}_2 = 0,\\ \mathfrak{H}_1 - \lambda\mathfrak{H}_2 = 0\end{matrix}\right\} \quad (A)$$

(Denn vermöge des Satzes 7) № 13, ist $\lambda = (\alpha\beta\delta\gamma) = (\alpha_1\beta_1\delta_1\gamma_1)$.

Durch Elimination von $\lambda$ aus den beiden Gleichungen ergibt sich die Gleichung des geometrischen Ortes der Schnittpunkte je 2er entsprechenden Strahlen der beiden projektiv aufeinander bezogenen Büschel: $\mathfrak{J}_1\mathfrak{H}_2 - \mathfrak{J}_2\mathfrak{H}_1 = 0$ also eine Kurve 2ter Ordnung, welche durch die beiden Scheitel $O$ und $O_1$ der Büschel hindurchgeht.

6) Auch die Umkehrung gilt: Jeder beliebige Kurve 2ter O. kann angesehen werden als der geometrische Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projektiven Strahlenbüschel. (Dabei können noch 2 beliebige Punkte des Kegelschnittes als Mittelpunkte dieser Strahlenbüschel angenommen werden) Der Beweis folgt einfach daraus, daß die Gleichung eines Kegelschnittes, von dem der Einfachheit halber angenommen werden kann, er gehe durch den Koordinaten-Anf.-Punkt,:




$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey = 0$$ etwa in der Form geschrieben werden kann

$$x(Ax + 2By + 2D) + y(Cy + 2E) = 0,$$ wobei dann die x- und y-Achse an Stelle von $\mathfrak{J}_2 = 0$ bezw. von $\mathfrak{J}_1 = 0$ and die Geraden $Ax + 2By + 2D = 0$ und die zur x-Achse Parallele $Cy + 2E = 0$ an Stelle von $\mathfrak{H}_2 = 0$ bezw. $\mathfrak{H}_1 = 0$ treten können.

7) Spezielle Fälle von 5). An die Stelle der erzeugenden Strahlenbüschel $O$ und $O_1$ können auch Parallelstrahlenbüschel

treten. Rückt $O$ in das Unendliche, so nehmen die Gleichungen (A) die Form an

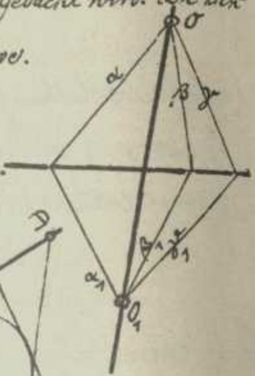
Rücken $O$ und $O_1$ " " " " " " " " "

$c_1 = 0$ oder auch $c_2 = 0$ bedeuten die Gleichung der unendlich fernen Geraden, in welche man sich in dem ersten Fall den Strahl $\alpha$

$$\begin{cases} c_1 - \lambda \mathcal{Y}_2 = 0 \\ \mathcal{H}_1 - \lambda \mathcal{H}_2 = 0 \end{cases}$$

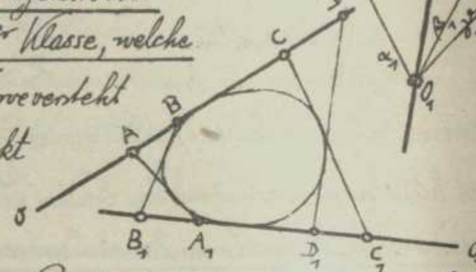
$$\begin{cases} c_1 - \lambda \mathcal{Y}_2 = 0 \\ \mathcal{H}_1 - \lambda c_2 = 0 \end{cases}$$

und im zweiten Fall die Strahlen $\alpha$ und $\beta_1$ verlegt denkt, und zwar so daß sie in dem ersten Fall parallel zu $\beta, \gamma_1 \ldots$ in dem anderen Fall einmal parallel zu diesen und dann auch parallel zu $\alpha_1, \gamma_1, \delta_1, \ldots$ gedacht wird. Die Richtung eines Parallelstrahlbüschels entspricht der Richtung einer Asymptote der erzeugten Kurve.



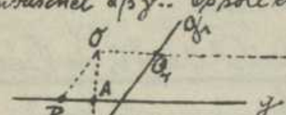
Sind die beiden erzeugenden Büschel perspektiv, so zerfällt der Kegelschnitt in 2 Gerade, in den perspektivischen Durchschnitt $A, B, C, \ldots$ und in die Verb.-Linie der Mittelpunkte $O$ u. $O_1$.

8) Der dualistische Satz zu 5) lautet: Das Erzeugnis zweier projektiven nicht aufeinanderliegenden Punktreihen ist eine Kurve 2ter Klasse, welche die beiden Träger $o$ und $o_1$ berührt. (Unter der Klasse einer Kurve versteht man die Anzahl der Tangenten an dieselbe, welche durch 1 Punkt hindurchgehen).



## Aufgaben.

1) Gegeben ein Strahlenbüschel $\alpha\beta\gamma$.. Es soll eine dazu projektive Punktreihe mit denselben in perspektive Lage gebracht werden!



2) Gegeben seien 2 projektive Punktreihen auf $g$ und $g_1$. $R$ und $Q_1$ seien die Punkte auf $g$ und $g_1$, welche den unendlich fernen Punkten von $g_1$ bezw. $g$ entsprechen. Man beweise, daß $AR \cdot A_1Q_1 = BR \cdot B_1Q_1 = CR \cdot C_1Q_1$ etc und konstruiere die Punkte $J$ und $J_1$ so, daß $RJ = Q_1J_1$, ferner Streckenabschnitte, welche gleich lang sind ($AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$ etc)

3) Ist $(ABCD_1) = \delta_1$; $(ABCD_2) = \delta_2$; $(ABCD_3) = \delta_3$; $(ABCD_4) = \delta_4$, man beweise, daß dann

$$(D_1 D_2 D_3 D_4) = \frac{\delta_1 - \delta_3}{\delta_2 - \delta_3} : \frac{\delta_1 - \delta_4}{\delta_2 - \delta_4} \,.$$ (Verifikation dieser Beziehung)

4) Man zeichne einen Kegelschnitt, der a) durch 5 Punkte b) durch 5 Tangenten gegeben ist.

5) Gegeben sind die 5 Punkte: $(1,0)$; $(0,1)$; $(0,0)$; $(-2,-1)$; $(-7,-2)$. Man bestimme die Gleichung der Kurve 2ter Ordnung, auf dem sie liegen, durch Aufstellung der Gleichungen 2er projektiven Strahlenbüschel.

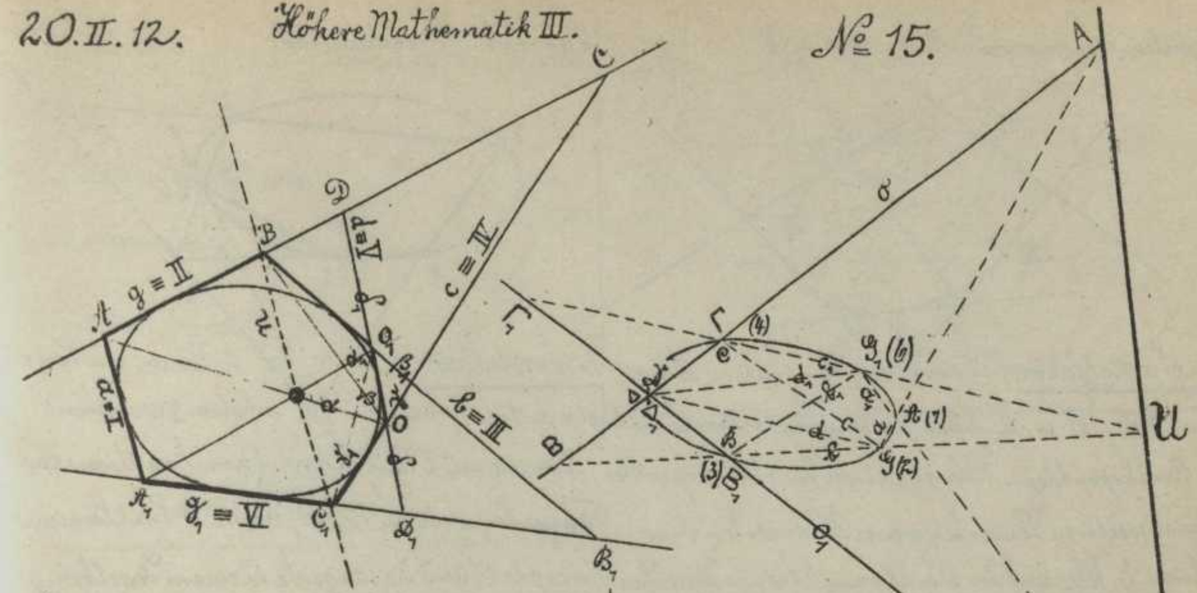
6) Dreht man einen Träger der beiden projektiven Punktreihen in perspekt. Lage von Aufg. 2 um den gemeinsamen Schnittpunkt $E, E_1$, so beschreibt das Zentrum der Perspektivität einen Kreis. Beweis, und dualisieren!

7) Zwischen 4 harmonischen Punkten $ABCD$ besteht die Relation $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$ Beweis!

8) Gegeben eine Strecke und eine zu ihrer Richtung parallele Gerade. Man soll die Strecke mit Hilfe des Lineals allein in 2, 3, 4, 5.. gleiche Teile teilen! (Lösung mit Hilfe der Konstr. vollst. Vierseite)

9) Durch einen Punkt im Innern eines Parallelogramms eine Parallele zu einem Seitenpaar mit Lineal allein zu ziehen!

20.II.12. Höhere Mathematik III. № 15.



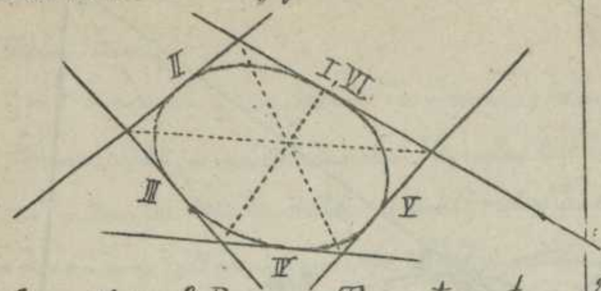

<u>Satz von Brianchon</u> (1806) Irgend 6 Tangenten ($a, g, b, c, d, g_1$ oder I, II, III, IV, V, VI) einer Kurve 2. Klasse liefern, auf irgendeine Weise numeriert ein der Kurve umbeschriebenes Sechsseit in welchem sich die Verbindungslinien der Schnittpunkte je zweier Gegenseiten (I II u. IV V; II III u. V VI, III IV u. VI I) in einem Punkt schneiden (<u>Brianchon'scher Punkt</u>). In der Figur sind $g$ u. $g_1$ die Träger der projektiven Punktreihen $ABCD$ bezw. $A_1 B_1 C_1 D_1$. Verlegt man in den Schnitt von $d$ mit $b$ bezw. mit $c$ die Mittelpunkte $O_1$ bezw. $O$ zweier perspektiven Strahlenbüschel indem man von $O_1$ aus $A_1 B_1 C_1 D_1$ durch $\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1\, \delta_1$ und von $O$ aus $ABCD$ durch $\alpha\, \beta\, \gamma\, \delta$ projiziert, so ist $u$ der perspektive Durchschnitt.

<u>Satz von Paskal</u> (1640): Sind 6 beliebige Punkte ($A, G, B, C, D, G_1$ oder 1, 2, 3, 4, 5, 6) auf einer Kurve 2. Ordnung gegeben und numeriert man dieselben auf irgend eine Weise zu einem einbeschriebenen Sechseck, so liegen die 3 Schnittpunkte je zweier Gegenseiten des Sechsecks (1,2 u. 4,5; 2,3 u. 5,6; 3,4 und 6,1) auf einer Geraden (<u>Paskalsche Linie</u>). In der Figur seien $G$ und $G_1$ die Mittelpunkte der projektiven Strahlenbüschel $a, b, c, d$ und $a_1, b_1, c_1, d_1$. Legt man in die Verbindungslinie von $D$ mit $B$ bezw. mit $C$ die Träger $o_1$ bezw. $o$ zweier perspektiven Punktreihen, welche auf $o_1$ von $a_1, b_1, c_1, d_1$ und auf $o$ von $a, b, c, d$ als die Punkte $A_1, B_1, \Gamma_1, \Delta_1$ bezw. $A, B, \Gamma, \Delta$ ausgeschnitten werden, so ist $U$ das Zentrum der Perspektivität.

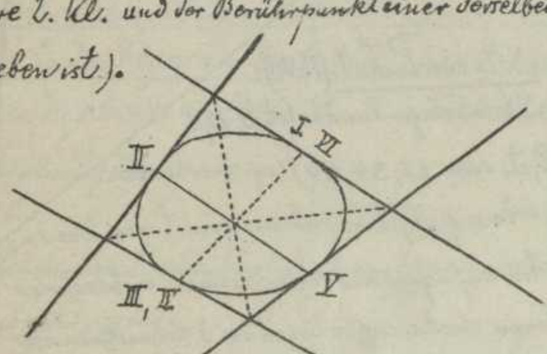
<u>1. Spezialfall:</u> 2 Tangenten, I und VI fallen zusammen. Fünfseit mit Berührpunkt. (Konstruktion des Berührpunktes einer Tangente, wenn 5 Tan=

<u>1. Spezialfall:</u> 2 Punkte, 1 und 6 fallen zusammen Fünfeck mit Tangente in 1 Ecke. (Konstruktion der Tangente in einem Punkt, wenn 5 Punkte der

genten einer Kurve 2. Kl. gegeben sind.

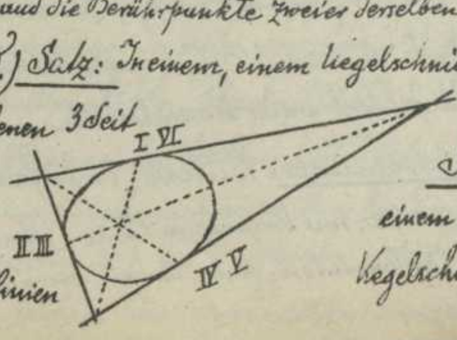



2. Spezialfall: 2 Paare von Tangenten, etwa I und VI; III u. II fallen zusammen. Vierseit mit 2 Berührpunkten. (Konstruktion des Berührpunktes einer weiteren Tangente, wenn 4 Tangenten einer Kurve 2. Kl. und der Berührpunkt einer derselben gegeben ist).

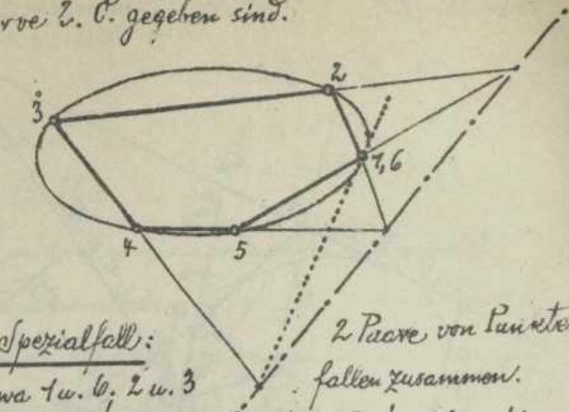



Satz: Ist einem Kegelschnitt ein 4seit umbeschrieben, so gehen die Verbindungslinien der Berührpunkte der Gegenseiten durch einen Punkt, durch welchen auch die Verbindungslinien der Gegenecken gehen.

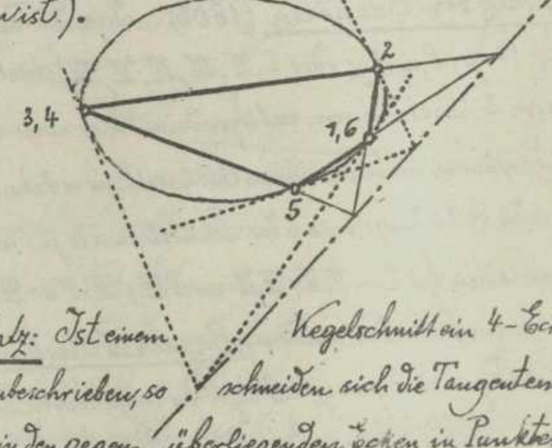
3. Spezialfall: 3 Paare von Tangenten I u. VI, II u. III, IV u. V fallen zusammen. Dreiseit mit 3 Berührpunkten in den Seiten. (Konstruktion des 3ten Berührpunktes, wenn 3 Tangenten und die Berührpunkte zweier derselben gegeben sind.) Satz: In einem, einem Kegelschnitt umbeschriebenen 3seit schneiden sich die Verbindungslinien




Kurve 2. O. gegeben sind.



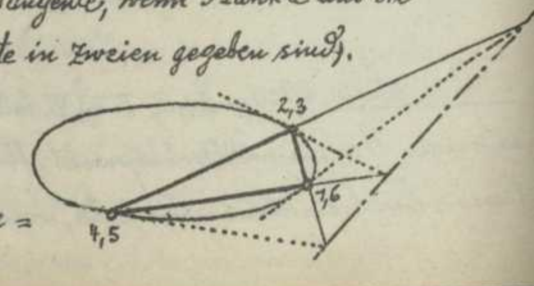

2. Spezialfall: etwa 1 u. 6; 2 u. 3 2 Paare von Punkten fallen zusammen. Viereck mit 2 Tangenten. (Konstruktion der Tangente in einem Punkt, wenn 4 Punkte einer Kurve 2. O. und die Tangente in einem derselben gegeben ist).




Satz: Ist einem Kegelschnitt ein 4-Eck einbeschrieben, so schneiden sich die Tangenten in den gegenüberliegenden Ecken in Punkten, welche mit den Schnittpunkten der Gegenseiten des Vierecks in einer Geraden liegen.

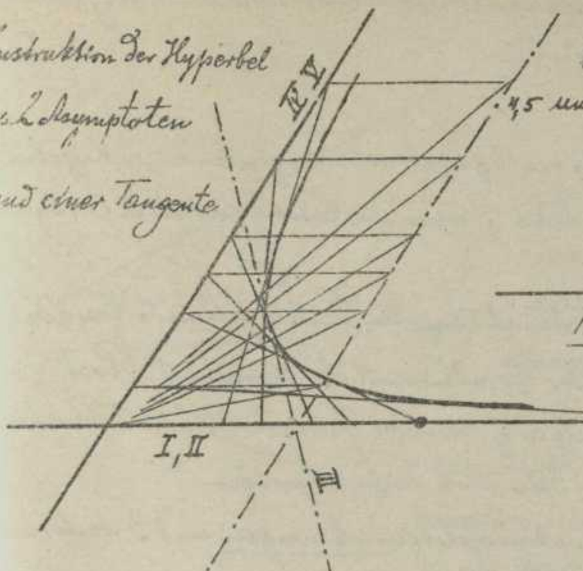
3. Spezialfall: 3 Paare von Punkten 1 u. 6; 2 und 3; 4 und 5 fallen zusammen. Dreieck mit den 3 Tangenten in den Ecken. (Konstruktion der 3ten Tangente, wenn 3 Punkte und die Tangente in zweien gegeben sind.)

Satz: In einem einem Kegelschnitt einbe=

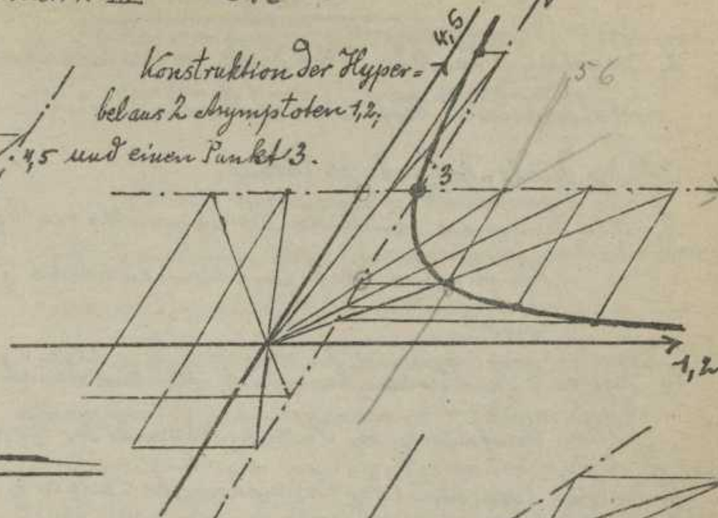


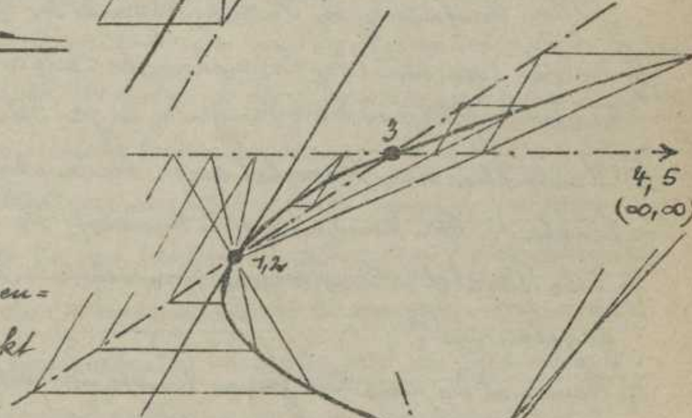
20. II. 12 Höhere Mathematik III № 15 Fortsetzung

Konstruktion der Hyperbel aus 2 Asymptoten und einer Tangente

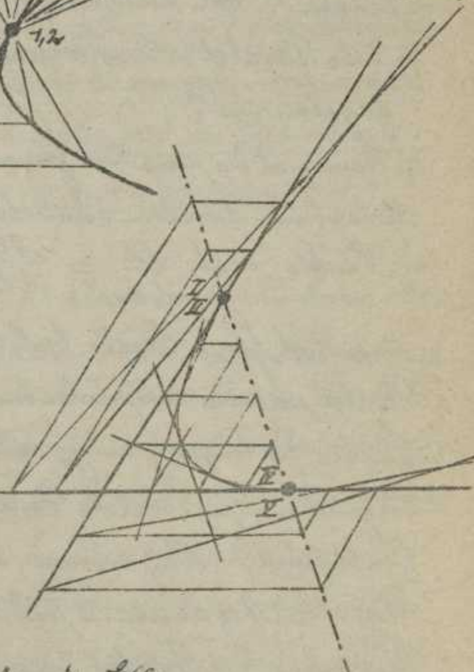



Konstruktion der Hyperbel aus 2 Asymptoten 1,2, und einem Punkt 3.

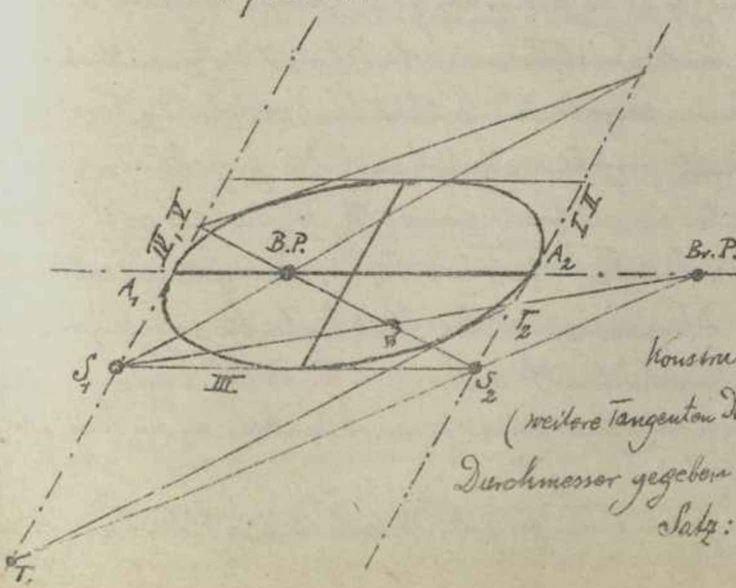



Konstruktion der Parabel aus der Achsenrichtung, einer Tangente mit Berührpunkt und einem weiteren Punkt.



Konstruktion der Parabel aus 2 Tangenten und ihren beiden Berührpunkten.




Konstruktion der Ellipse (weitere Tangenten derselben) wenn 2 konjugierte Durchmesser gegeben sind.

Satz: $A_1T_1 \cdot A_2T_2 = A_1S_1 \cdot A_2S_2$

## Aufgaben.

1, Gegeben 5 Punkte. Mit Hilfe des Pascalschen Satzes weitere Punkte des Kegelschnittes welcher dadurch bestimmt ist zu konstruieren.

2, Die duale Aufgabe zu lösen.

3, Man konstruiere sämtliche Berührpunkte von 5 gegebenen Tangenten eines Kegelschnittes. Was für eine Configuration entsteht, wenn die Konstr. mittels d. Br. S. gemacht wird?

4, Gegeben 5 Punkte einer Kurve 2. O. und eine durch einen der Punkte gehende Gerade. Man konstruiere den 2. Schnittpunkt der Geraden mit der Kurve 2. O. (Pask. Satz!)

5, Welche Form nimmt der Brianchonsche Satz an, wenn die Kurve 2. Kl. in 2 Strahlenbüschel zerfällt und die 6 Tangenten zu je 3en sich darin schneiden?

6, Konstruktion einer Hyperbel aus den beiden Asymptotenrichtungen und 3 weiteren Punkten. (Man konstruiere sich zunächst die Asymptoten!)

7, Eine Parabel zu konstruieren, von welcher 3 Punkte und die Achsenrichtung gegeben ist!

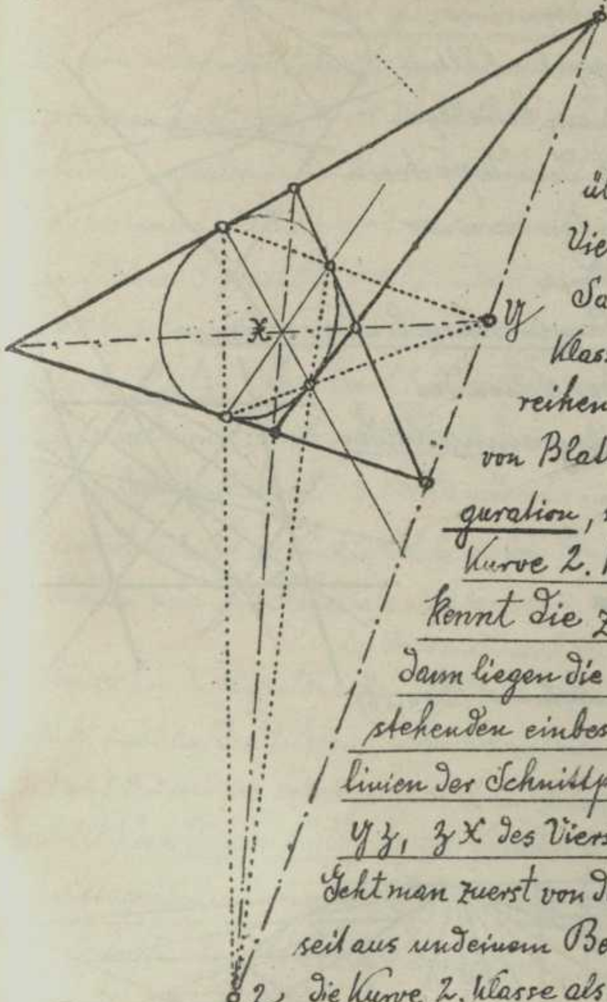
8, Wenn sich die unendlich fernen Punkte 2er projektiver Punktreihen entsprechen, so nennt man dieselben ähnliche Punktreihen. Sind $A, A_1$, $B, B_1$ etc einander entsprechende Punkte, so ist $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BD}{B_1D_1}$ etc. Da nun die Parabel die unendlich ferne Gerade berührt, so ist die unendlich ferne Gerade Tangente an die Parabel und die entsprechenden Punkte, welche sie verbindet, sind die unendlich fernen Punkte der Träger $g$ und $g_1$ der beiden projektiven Punktreihen, welche die Parabel definieren und welche demnach projektiv ähnlich sind. Die projektiven ähnlichen Punktreihen werden erzeugt, indem man 2 Punktepaare $M, M_1$ und $N, N_1$ auf den Trägern beliebig annimmt und die Strecken $\overline{MN}$ und $\overline{M_1N_1}$ darauf verschiebt. Man konstruiere die Parabel, wenn 2 Tangenten und ihre Berührpunkte gegeben sind, mit Hilfe ähnlicher projektiver Punktreihen!

9) Konstruktion beliebig vieler Punkte eines Kegelschnittes aus 3 Punkten u. den Tangenten in 2en derselben. Duale Aufgabe!

10, Die 3 Schnittpunkte entsprechender Seiten zweier perspekt. Dreiecke liegen auf 1 Geraden. Beweis!

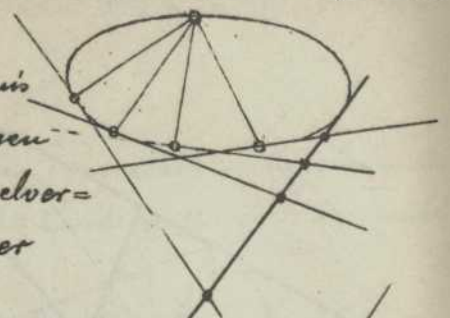
der Ecken mit den Berührpunkten der gegenüber- liegenden Seiten in einem Punkt.

schriebenen Dreieck schneiden die Tangenten in den Ecken desselben die gegenüberliegenden Seiten in 3 Punkten die einer Geraden angehören.



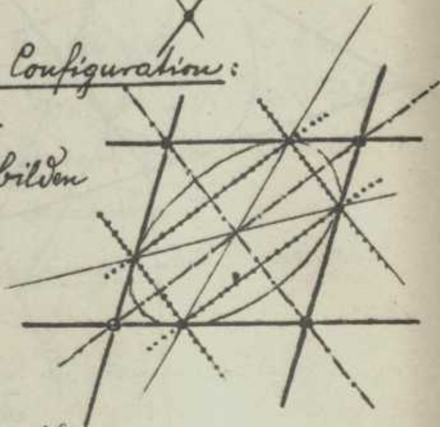

Durch Vereinigung der beiden dualen Sätze über das umbeschriebene Vierseit und das einbeschriebene Viereck (Spezialfall 2) und mit Anwendung des Satzes, daß auf irgend 2 Tangenten einer Kurve $2^{ter}$ Klasse die übrigen Tangenten projektive Punktreihen ausschneiden und des Satzes unter 3) (links) von Blatt 14 ergibt sich die Mac-Laurin'sche Konfiguration, welche folgendes besagt: Hat man ein einer Kurve 2. Klasse umbeschriebenes Vierseit und man kennt die zu den Tangenten gehörigen 4 Berührpunkte dann liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten des so entstehenden einbeschriebenen Vierecks auf den Verbindungslinien der Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten XY, YZ, ZX des Vierseits.

Geht man zuerst von dem einer Kurve 2. Klasse umbeschriebenen Vierseit aus und einem Berührpunkt auf einer dieser Tangenten (wodurch die Kurve 2. Klasse als Umhüllungsgebilde der Verb.-Linien projektiver Punktreihen bestimmt ist) und nachher von dem einer Kurve 2. Ordnung einbeschriebenen Viereck aus indem man die 4 Berührpunkte der 4 Tangenten der Kurve 2. Klasse dazu benützt und eine dieser nämlichen Tangenten (wodurch die Kurve 2. Ordnung als Erzeugnis der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projektiver Strahlbüschel bestimmt ist) und konstruiert man im ersten Fall zu jeder weiteren Tangente den Berührpunkt und im 2. Fall zu jedem weiteren Punkt die Tangente, so stimmt der so erhaltene Ort der Berührpunkte mit der Kurve $2^{ter}$ Ordnung und das im 2. Fall erhaltene Umhüllungsgebilde der Tangenten mit der Kurve $2^{ter}$ Klasse identisch überein (Beweis mit Benützung obiger Configuration, welche aus den im 1. und 2. Fall gegebenen Stücken konstruiert das nämliche Resultat gibt). Satz: Die Berührpunkte der Tangenten einer Kurve 2. Klasse liegen auf einer Kurve 2. Ordnung und die Tangenten einer Kurve zweiter Ordnung bilden eine Kurve 2. Klasse. (Gemeinsamer Name: Kegelschnitt)



Folgerung: Das Doppelverhältnis von 4 Punkten eines Kegelschnittes (darunter versteht man das Doppelverhältnis der 4 Strahlen, welche die 4 Punkte mit einem beliebigen Punkt des Kegelschnittes verbinden) ist gleich dem Doppelverhältnis der 4 Punkte in welchen die 4 Tangenten von einer beliebigen 5ten Tangente geschnitten werden.

Spezieller Fall der umstehenden Mac-Laurin'schen Configuration:



Die Verbindungslinien der Berührpunkte der Seiten des einem Kegelschnitt umbeschriebenen Parallelogramms bilden ein einbeschriebenes Parallelogramm.

## Konstruktionen von Kegelschnitten.

Die Ellipsengleichung $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$

bezogen auf 2 konjugierte Durchmesser als Achsen (2a u. 2b) liefert, in der Form geschrieben

1) $(bx-ab)(bx+ab)-(ay)(-ay)=0$

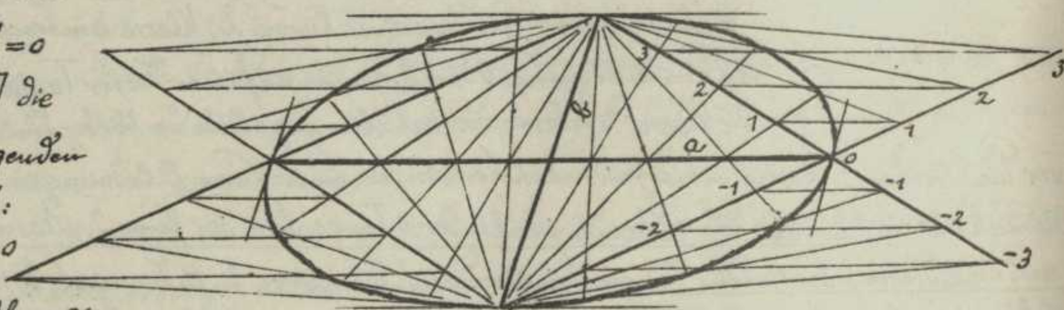
Durch Vergleich mit

$J_1H_2-J_2H_1=0$

[№ 14; (5)] die beiden erzeugenden Strahlbüschel:

$b(x-a)-\lambda ay=0$

$-ay-\lambda(x+a)b=0$




welche eine Konstruktion der Ellipse geben wie sie auf dem Beiblatt „Konstruktion von Kegelschnitten" pag. 4 I verzeichnet ist (Statt der beiden konjug. Durchmesser a, b sind dort speziell die Achsen zur Konstruktion verwendet) oder pag. 5. I.

2) $(bx+ay+ab)(bx+ay-ab)-(bx-ay+ab)(-bx+ay+ab)=0$ durch denselben Vergleich die beiden erzeugenden Büschel: $+bx-ay+ab-\lambda(bx+ay+ab)=0$

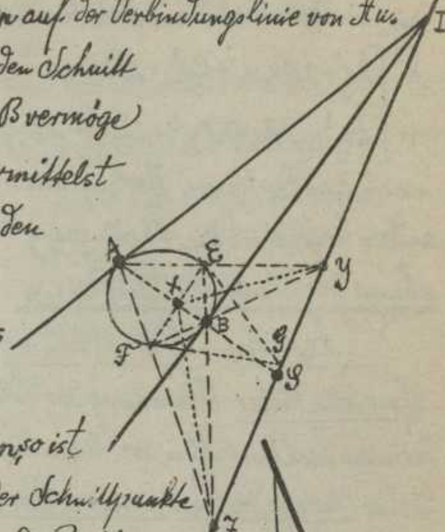
$-bx-ay+ab-\lambda(bx-ay-ab)=0$

Konstruktion veranschaulicht obige Figur.

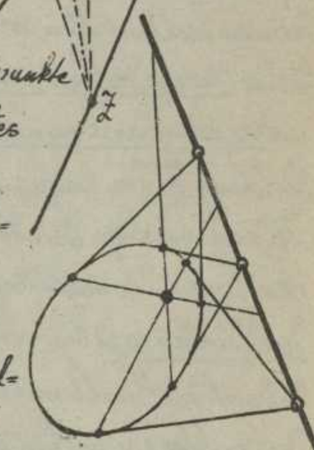
27. II. 12. Höhere Mathematik III № 16.

## Pol und Polare.

Läßt man in der nebenstehenden Figur die 2 Punkte $A, B$ und den auf der Verbindungslinie von $A$ u. $B$ gelegenen Punkt $x$ fest, so ist die Gerade $DYZ$ festgelegt (durch den Schnitt der beiden Tangenten in $A$ u. $B$ und durch Punkt $S$ welcher auf $AB$ vermöge der Beziehung $(AXBS) = -1$ bestimmt ist). Man erkennt vermittelst eines früheren Satzes (№ 15 p. 3): Dreht man die Sehne $XE$ um den Punkt $X$, so bewegt sich Punkt $S$ auf der festen Geraden $DYZ$.




Daher der Satz: Jedem Punkt $X$ in der Ebene eines Kegelschnitts ist eine bestimmte Gerade die Polare des Punktes $X$ von folgender Eigenschaft zugeordnet: 1) Zieht man durch $x$ irgendwie Sehnen, so ist der geometrische Ort der Punkte welche zu dem Punkt $x$ bezüglich der Schnittpunkte der Sehnen mit dem Kegelschnitt harmonisch liegen, die Polare des Punktes
2) Wenn man durch die Endpunkte $(E, F)$ einer solchen Sehne die Tangenten an den Kegelschnitt zieht, so liegt deren Schnittpunkt auch auf der Polaren. Ebenso erkennt man (wenn man 2 Tangenten $AD$ und $BD$ und eine beliebige durch ihren Schnitt $D$ gehende Gerade $DYZ$ festhält) den dualen Satz: Zu jeder Geraden $YZ$ in der Ebene eines Kegelschnitts gehört ein bestimmter Punkt $X$, der Pol der Geraden $YZ$ von der Eigenschaft: 1, Zieht man von irgend einem Punkt der Geraden aus die beiden Tangenten an den Kegelschnitt und verbindet ihre Berührpunkte, so geht die Verbindungslinie durch den Punkt $x$.



2) Zieht man wieder die beiden Tangenten, und konstruiert sich zu denselben und der Geraden $YZ$ die 4. harmonische Gerade, so geht dieselbe durch den Punkt $X$. (Enveloppe dieser Geraden)
Aus den beiden Sätzen folgt: Liegt ein Punkt $X$ auf der Polaren eines Punktes $Z$, dann liegt auch $Z$ auf der Polaren von $X$. Das Dreieck $XYZ$ in obiger Figur, welches aus den Nebenecken des einbeschriebenen Viereckes besteht, hat die Eigenschaft, daß jede der 3 Ecken Pol der gegenüberliegenden Seite ist und jede der 3 Seiten Polare der gegenüberliegenden Ecke. Ein Dreieck von dieser Eigenschaft nennt man ein Polardreieck.

Analytische Behandlung der Polarentheorie. Zu diesem Zweck sucht man die Teilverhältnisse $\lambda_1$ und $\lambda_2$, in welchen die Verbindungsgerade zweier Punkte $x_1, y_1$ und $x_2, y_2$ durch die Kurve

geschnitten wird. Man hat also die Koordinaten eines Schnittpunktes: $x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}$, $y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda}$
in die Kegelschnittsgleichung

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F \equiv K(x,y) = 0$$

einzusetzen und die entstehende Gleichung 2ten Grades in $\lambda$:

$$\lambda^2\left[Ax_2^2 + 2Bx_2y_2 + Cy_2^2 + 2Dx_2 + 2Ey_2 + F\right] - 2\lambda\left[Ax_1x_2 + B(x_1y_2 + x_2y_1) + Cy_1y_2 + D(x_1+x_2) + E(y_1+y_2) + F\right]$$
$$+ \left[Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2Dx_1 + 2Ey_1 + F\right] \equiv \lambda^2 \cdot K(x_2,y_2) - 2\lambda\, L(x_1y_2 + y_1x_2) + K(x_1,y_1) = 0$$

nach $\lambda$ aufzulösen. Verlangt man, daß jeder der beiden Punkte $x_1y_1$ und $x_2y_2$ auf der Polare des andern liegt, so ist die Bedingung dafür $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1$ oder $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Daher lautet die Gleichung der Polaren des Punktes $x_1y_1$: $L(x_1y + y_1x) = 0$ oder

$$(Ax_1 + By_1 + D)x + (Bx_1 + Cy_1 + E)y + Dx_1 + Ey_1 + F = 0$$

Spezielle Fälle: Gleichung der Polaren des Koordinaten Anf. Punktes: $Dx + Ey + F = 0$,
des in der Richtung $\frac{y_1}{x_1} = m$ liegenden unendlich fernen Punktes: $(A+Bm)x + (B+Cm)y + D + Em = 0$
Da der Mittelp. des Kegelschnittes Pol der $\infty$ fernen Geraden ist (man vergl. die spez. Fig. auf p. 4 von № 15) und die Polare des $\infty$ fernen Punktes ein Durchmesser ist, so stellt obige Gleichung diejenige des zur Richtung $\frac{y}{x} = m$ konjugierten Durchmessers des Kegelschnittes dar.

Ist eine beliebige Gerade durch ihre Gleichung von der Form $ux + vy + 1 = 0$ gegeben, so nennt man die negativen Reziproken der Achsenabschnitte $u$ und $v$ die Linienkoordinaten der Geraden und bei veränderlichen $u$ und $v$, und festen $x,y$ stellt dann die obige Gleichung diejenige des durch den Punkt mit den Koordinaten $x$ und $y$ gehenden Strahlenbüschels dar, die Gleichung des Punktes $x,y$ in Linienkoordinaten $u$ und $v$. Durch Angabe der Linienkoordinaten $u$ und $v$ ist die Gerade genau so bestimmt, wie der Punkt durch Angabe der Punktkoordinaten $x$ und $y$.

Faßt man obige Gerade als Polare auf so bestimmen sich die Koordinaten des Pols aus den Koordinaten der Geraden mit Hilfe der Gleichungen:

$$\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + D &= m\cdot u \\ Bx_1 + Cy_1 + E &= m\cdot v \\ Dx_1 + Ey_1 + F &= m \end{aligned} \qquad \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \delta \\ \beta & \gamma & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \zeta \end{array}$$

welche durch Koeffizientenvergleichung von $L(x_1y + y_1x) = 0$ mit $m(ux + vy + 1) = 0$ hervorgehen. Bezeichnet man mit $\Delta$ die Diskriminante der Kegelschnittsgleichung

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

so sind die Koordinaten des Pols:

$$x_1 = \frac{m(\alpha u + \beta v + \delta)}{\Delta} \qquad \Delta = \left|\begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}\right| = m(\delta u + \varepsilon v + \zeta)$$

$$y_1 = \frac{m(\beta u + \gamma v + \varepsilon)}{\Delta}$$

Dabei bedeuten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ die mit Vorzeichen genommenen Unterdeterminanten von $\Delta$, welche zu den Buchstaben $A, B, C, D, E, F$ bezw. gehören. Z.B. $\alpha = \begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix}$; $\beta = -\begin{vmatrix} B & D \\ E & F \end{vmatrix}$ etc.
So bestimmen sich die Koordinaten des Pols der $\infty$ fernen Geraden ($u = 0, v = 0$) zu

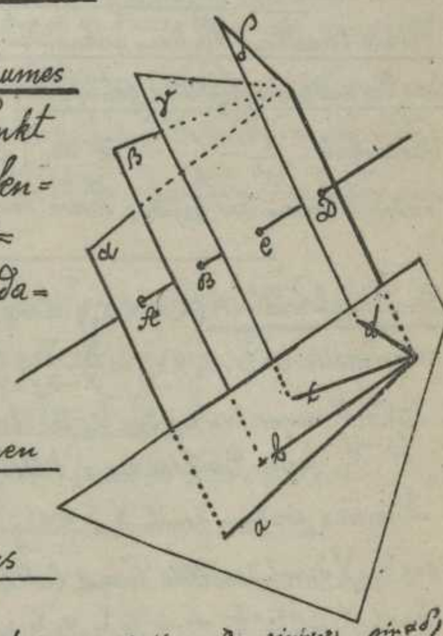
$$x_1 = \frac{\delta}{\zeta} \qquad y_1 = \frac{\varepsilon}{\zeta}$$

welches die Koordinaten des Mittelpunktes des Kegelschnittes darstellen.

Soll die Gerade $ux + vy + 1 = 0$ Tangente an den Kegelschnitt werden, so muß ihr Pol ein Punkt der Geraden sein, die Koordinaten $x_1, y_1$ des Pols müssen obiger Gleichung genügen. Das gibt die Bedingung, welche die Linienkoordinaten $u$ und $v$ der Tangenten eines Kegelschnittes erfüllen müssen: $\alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 + 2\delta u + 2\varepsilon v + \zeta = 0$ oder

$$\begin{vmatrix} A & B & D & u \\ B & C & E & v \\ D & E & F & 1 \\ u & v & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

welche die Gleichung des Kegelschnittes in Linienkoordinaten darstellt.

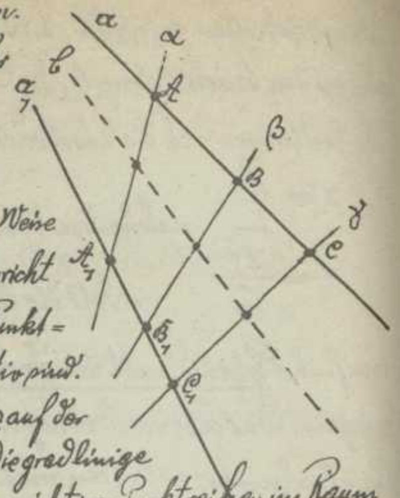



Zur projektiven Geometrie des Raumes sei folgendes bemerkt: Die Gesamtheit der durch einen Punkt des Raumes hindurchgehenden Strahlen heißt ein Strahlenbündel und die Gesamtheit der durch den Punkt hindurchgehenden Ebenen heißt ein Ebenenbündel. Es gilt der fundamentale Satz: Das Doppelverhältnis von 4 Ebenen eines Ebenenbüschels ist gleich dem Doppelverhältnis der 4 Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit den 4 Ebenen und gleich dem Doppelverhältnis der 4 Strahlen des Strahlenbüschels, welches durch eine beliebige Ebene aus dem Ebenenbüschel ausgeschnitten wird.

$$(\alpha\beta\gamma\delta) = (ABCD) = (abcd)$$

NB! $(\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)} : \frac{\sin\alpha\delta}{\sin\beta\delta}$

Die Schnittlinien entsprechender Ebenen zweier projektiver Ebenenbüschel bilden eine geradlinige Fläche 2. Ordnung. Sind die Gleichungen der beiden erzeugenden Ebenenbüschel in der Form gegeben: $\mathcal{J}_1 - \lambda \mathcal{J}_2 = 0$, $\mathcal{H}_1 - \lambda \mathcal{H}_2 = 0$ so ist die Gleichung der Fläche $\mathcal{J}_1 \mathcal{H}_2 - \mathcal{J}_2 \mathcal{H}_1 = 0$. Schreibt man letztere Gleichung in der Form: $(\mathcal{J}_1 - \lambda \mathcal{J}_2)\mathcal{H}_2 - (\mathcal{H}_1 - \lambda \mathcal{H}_2)\mathcal{J}_2 = 0$, so erkennt




man, daß die beiden Achsen der erzeugenden Büschel auf der Fläche liegen. Seien a und $a_1$ diese beiden Achsen. b sei eine durch den Schnitt entsprechender Ebenen dieser beiden Ebenenbüschel mit den Achsen a und $a_1$ hervorgebrachte Gerade auf der Fläche. Durch einen beliebigen Punkt A von a kann eine und nur eine Gerade gezogen werden, welche sowohl b als auch $a_1$ schneidet. Auf diese Weise wird dem Punkt A auf a eindeutig $A_1$ auf $a_1$ zugeordnet und umgekehrt entspricht $A_1$ nach demselben Verfahren wieder A. Man kann sich so auf a und $a_1$ 2 Punktreihen verschaffen welche sich ein-eindeutig entsprechen, daher projektiv sind. Die Geraden $\alpha, \beta, \gamma$, welche entsprechende Punkte verbinden, liegen ganz auf der Fläche, da sie je 3 Punkte mit derselben gemein haben. Man kann daher die gradlinige Fläche 2. O. dadurch erzeugen, daß man entsprechende Punkte zweier projektiver Punktreihen im Raum miteinander verbindet. Die Geraden $a, b, a_1 \dots$ und $\alpha, \beta, \gamma$ schneiden sich untereinander nicht. Man erkennt den Satz: Auf einer geradlinigen Fläche 2ter Ordnung liegen 2 Systeme gerader Linien. 2 Gerade desselben Systems schneiden sich nicht, aber jede Gerade des einen Systems wird von jeder Geraden des anderen Systems getroffen. So sind z. B. die beiden Geradensysteme auf dem hyperbolischen Paraboloid $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2z = \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)-2z\cdot 1 = 0$ die Schnittlinien entsprechender Ebenen der beiden Paare von Ebenenbüschel

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\lambda\cdot 2z&=0 \\ 1-\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)&=0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\lambda 2z&=0 \\ 1-\lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)&=0 \end{aligned}\right\}$$

---

Das Doppelverhältnis $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ ist eine lineare gebrochene Funktion von x, wenn 3 Punkte festgehalten werden u. einer variiert: $(x_1 x_2 x x_4) = \frac{x-x_1}{x-x_2} : \frac{x_4-x_1}{x_4-x_2}$. Umgekehrt kann jeder lineare gebr. Ausdruck von x: $\frac{ax+b}{bx+d}$ angesehen werden als der Ausdruck eines Doppelverhältnisses welches der Punkt x mit 3 gewissen festen Punkten $x_1 x_2 x_3$ bildet $\left(\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}}\cdot\frac{a}{c}\right)$. Wenn man den Punkt nicht durch seine Abszisse x sondern durch $X = \frac{ax+b}{cx+d}$ bestimmt, dann kann man das Doppelverhältnis von 4 Punkten aus den X durch dieselbe Formel bestimmen wie aus den x. Wird dem Punkt $x_1$ ein Punkt $X_1$ eindeutig zugewiesen durch $X_1 = \frac{ax_1+b}{cx_1+d}$ ebenso $x_2, X_2$, $x_3 X_3$ $x_4, X_4$ durch die entsprechende Formel, so gilt: $(X_1 X_2 X_3 X_4) = (x_1 x_2 x_3 x_4)$.

D. h. Wenn man 2 Punktreihen auf 2 Geraden hat, durch ihre Abszissen x bezw. X ausgedrückt, so kann man immer durch eine gebrochene lineare Funktion die beiden Punktreihen projektiv aufeinander beziehen. Eine gegebene projektive Beziehung kann immer durch Bestimmung der 3 Konstanten in der Form einer linearen gebrochenen Funktion $X = \frac{ax+b}{cx+d}$ angegeben werden.

Aufgaben. 1) Konstruktion der Polare zum Pol und des Pols zur Polare, wenn der Kegelschnitt a) durch 5 Punkte b) durch 5 Tangenten gegeben ist.

2) Konstruktion von weiteren Punkten eines Kegelschnittes, wenn derselbe gegeben ist: a) durch 3 Punkte, 1 Pol mit Polare b) durch 1 Polardreieck und 2 Punkte.

5. III. 12 Höhere Mathematik III. No 17

## Kollineation. (Letztes Blatt).

Die allgemeinste Form einer kollinearen Beziehung (perspektiven Abbildung) zweier Ebenen aufeinander ist durch die Gleichungen gegeben:

$$X = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_3x+b_3y+c_3} \qquad Y = \frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_3x+b_3y+c_3}$$

oder, nach x und y aufgelöst:

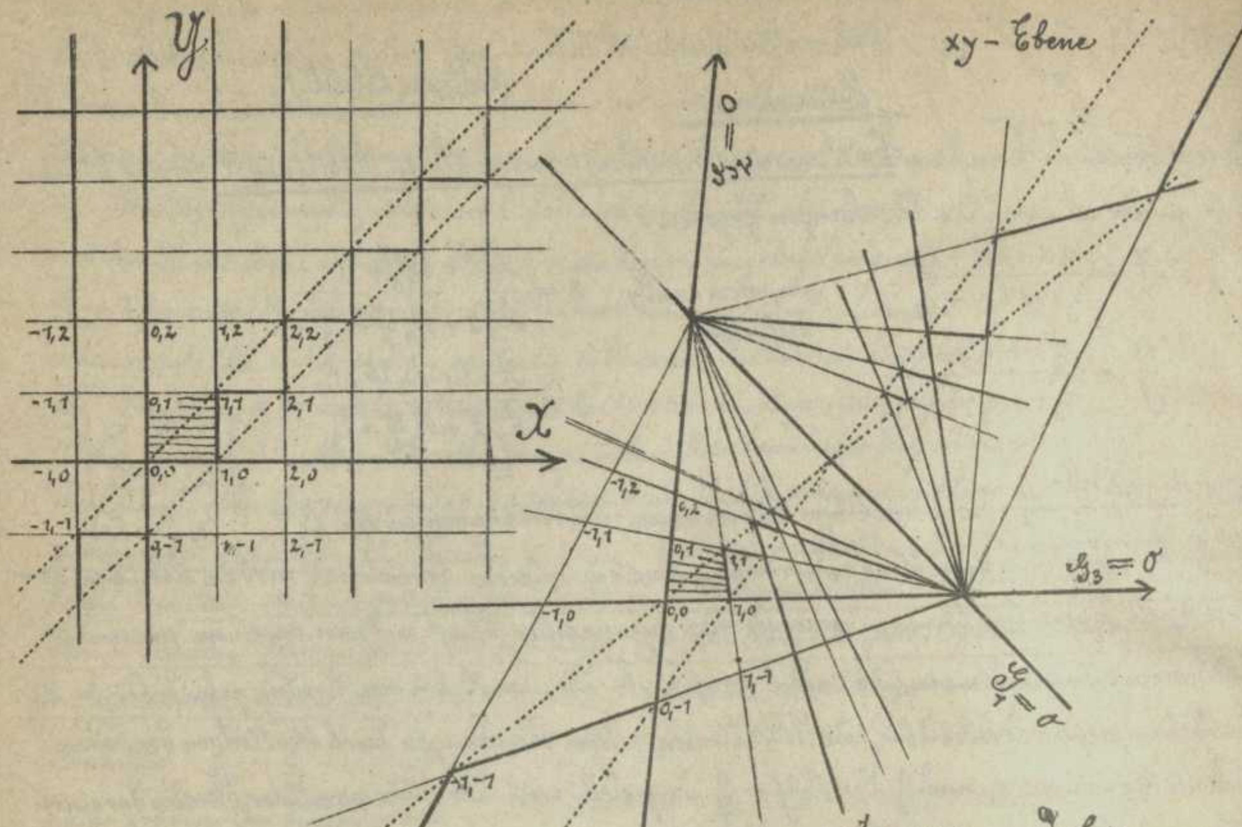
$$x = \frac{A_1X+B_1Y+C_1}{A_3X+B_3Y+C_3} \qquad y = \frac{A_2X+B_2Y+C_2}{A_3X+B_3Y+C_3}$$

wobei die $A_1, B_1, A_2$, etc die (mit Vorzeichen versehenen) Unterdeterminanten von $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ sind. Jeder Geraden der einen Ebene entspricht eine Gerade der anderen. Geometrisch wird die Abbildung dadurch erzielt, daß man beide Ebenen in passende Lage gegeneinander bringt und nun von einem passenden Zentrum aus die eine Ebene auf die andere projiziert. Die unendlich fernen Geraden gehen dabei in im Endlichen gelegene Geraden über, die Fluchtlinien, deren Gleichungen durch Nullsetzen der beiden Nenner $a_3x+b_3y+c_3$ und $A_3X+B_3Y+C_3$ dargestellt sind. Die Bilder paralleler Geraden der einen Ebene schneiden sich auf der Fluchtlinie der anderen.

Die perspektive Abbildung zweier Ebenen aufeinander ist bestimmt durch je ein Viereck in den beiden Ebenen welche sich entsprechen sollen, da dadurch die 8 in den obigen Formeln auftretenden Koeffizienten (wesentlichen) bestimmt sind. Durch Konstruktion eines Möbius'schen Netzes kann man aus den beiden sich entsprechenden Vierecken durch Ziehen von Linien allein jeden Punkt der Ebene mit rationalen Koordinaten erreichen, wenn die Koordinaten der 4 Ecken durch rationale Zahlen gegeben sind.

Die umstehenden Figuren veranschaulichen die perspektive Abbildung zweier Ebenen aufeinander. Dieselbe ist durch die Annahme bestimmt, daß sich die Eckpunkte der schraffierten Vierecke entsprechen. Dem quadratischen Netz der XY-Ebene entspricht das verzeichnete Möbius'sche Netz in der xy-Ebene. Den Geraden $\mathfrak{G}_2=0$, $\mathfrak{G}_3=0$, $\mathfrak{G}_1=0$ in der xy-Ebene entspricht $X=0$, $Y=0$ und die unendlich ferne Gerade in der XY-Ebene.

Entspricht $\mathfrak{G}_1-\mathfrak{G}_2=0$ der Geraden $X=1$
$\mathfrak{G}_1-\mathfrak{G}_3=0$ " " " $Y=1$, so entspricht d. 4. Strahl $\mathfrak{G}_1-\lambda\mathfrak{G}_2$ des Büschels $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{G}_1=0\\ \mathfrak{G}_1-\mathfrak{G}_2=0\\ \mathfrak{G}_2=0\end{matrix}\right.$
die Gerade $X=\lambda$ und analog dem 4. Strahl $\mathfrak{G}_1-\mu\mathfrak{G}_3=0$ des Büschels $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{G}_1=0\\ \mathfrak{G}_1-\mathfrak{G}_3=0\\ \mathfrak{G}_3=0\end{matrix}\right.$
die Gerade $Y=\mu$ in der XY-Ebene.




## Spezialisierung der kollinearen Beziehung.

Wenn die unendlich fernen Geraden in beiden Ebenen einander nicht entsprechen, dann können die Gleichungen der Kollineation durch geeignete Wahl der Koord.-Achsen in beiden Ebenen auf die einfache Form gebracht werden:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \frac{c_1}{x} \\ \mathfrak{Y} &= \frac{b_2 \cdot y}{x} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x &= \frac{c_1}{\mathfrak{X}} \\ y &= \frac{c_1}{b_2} \cdot \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}} \end{aligned}\right\}$$

(Einfachste Form der perspektiven Abbildung wenn die unendl. fernen Geraden sich nicht entsprechen).

Man kann auch sagen, obige allgemeine Kollineationsformeln drücken eine Beziehung zwischen Punkten nicht voneinander verschiedenen sondern ein und derselben Ebene aus. Dabei kommt es dann 3 mal vor, daß einander entsprechende Punkte zusammenfallen. Die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_3 x + b_3 y + c_3 &= \rho \\ a_1 x + b_1 y + c_1 &= \rho x \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= \rho y \end{aligned}$$

bestehen nämlich nur für diejenigen Werte von $\rho$ nebeneinander, welche Wurzeln von

$$\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 - \rho \\ a_1 - \rho & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \rho & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

sind. Je nachdem diese Gleichung 3 reelle Wurzeln oder nur 1 reelle Wurzel hat, entsprechen sich 3 Punkte und ihre Verbindungslinien (Ein Dreieck) selbst oder nur 1 Punkt und eine Gerade (Als Verbindungslinie der beiden Punkte $\frac{x+iy}{x-iy} \equiv \frac{\mathfrak{X}+i\mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}-i\mathfrak{Y}}$ welche den

# Höhere Mathematik III. №17

## Fortsetzung.

Punkte gehen in Punkte, Gerade in Gerade über. Die unendlich fernen Ebenen gehen in die Fluchtebenen über, deren Gleichungen durch das Nullsetzen der Nenner $a_4 x + b_4 y + c_4 z + d$ bezw. $A_4 X + B_4 Y + C_4 Z + D_4$ dargestellt sind. Die Bilder paralleler Ebenen bilden ein Büschel, dessen Achse in der Fluchtebene liegt. Faßt man umstehende Formeln als Transformationsformeln für die Punkte eines und desselben Raumes auf, so bleiben dabei 4 Punkte fest. Es gehen dann die 4 Kanten des dadurch bestimmten Tetraeders in sich über. Der Fall räumlicher Perspektive (perspektiver Kollineation) tritt dann ein, wenn sich je 2 entsprechende Ebenen in einer Geraden schneiden, welche alle in einer Ebene, der Perspektivitätsebene liegen und die Verbindungslinie entsprechender Punkte durch ein und denselben Punkt, das Perspektivitätszentrum hindurchgehen. Indem man dieses Perspektivitätszentrum zum Ursprung des Koord.-Systems macht [$X=0, Y=0, Z=0$ entspricht $x=0, y=0, z=0$] und eine Koord.-Ebene [$Y=0$] parallel zur Fluchtebene [$y=-c$] nimmt, so gehen die allg. Gleichungen der Kollineation über in

**Theaterperspektive.**

$$X = \frac{c \cdot x}{y+c}, \quad Y = \frac{c \cdot y}{y+c}, \quad Z = \frac{c \cdot z}{y+c} \quad \text{oder, nach } x, y, z \text{ aufgelöst} \quad x = \frac{cX}{c-Y}, \quad y = \frac{c \cdot Y}{c-Y}, \quad z = \frac{c \cdot Z}{c-Z}$$

[Die Frontebene] $y=0$, bildet sich kongruent in die Ebene $Y=0$ ab. Der Raum von $y=0$ bis $y=\infty$ bildet sich in den Raum von $Y=0$ bis zur Fluchtebene $Y=c$ ab. Ebenen $y=$ const. werden in Ebenen $Y=$ const. ähnlich abgebildet im Verhältnis $\frac{c}{c+y}$.

## Konforme Abbildung.

Die $XY$-Ebene und $xy$-Ebene sind vermittelst der Funktionen $X = f(x,y)$, $Y = \varphi(x,y)$ dann konform aufeinander abgebildet, wenn das Vergrößerungsverhältnis $\frac{dS}{ds}$ für alle von entspr. Punkten ausgehenden Wegstrecken $dS$ bezw. $ds$ dasselbe ist.

$$\frac{dS^2}{ds^2} = \frac{\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2\right]dx^2 + 2\left[\frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}\right]dx\,dy + \left[\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2\right]dy^2}{dx^2 + dy^2} = [m(x,y)]^2$$

wobei $m$ nur von $x$ u. $y$ nicht von $\frac{dy}{dx}$ abhängig sein darf. Es muß also sein:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y} = 0 \\ &\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 = m^2 \end{aligned}\right.$$

Diese beiden Gleichungen sind offenbar auch erfüllt, wenn man setzt:

$$\text{(A)} \quad \left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} &= \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \frac{\partial X}{\partial y} &= -\frac{\partial Y}{\partial x} \end{aligned}\right\}$$

Ist nun $Z = X + iY = f(x+iy) = f(z)$, so bestehen die Gleichungen

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{dZ}{dz} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = i\frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = i\frac{\partial Z}{\partial y}$$

substituiert man hier für $Z = X + iY$, trennt Reelles und Imaginäres, so folgen die Gleichungen (A).

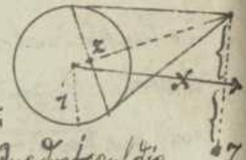
Resultat: Man bekommt eine konforme Abbildung einer Ebene auf eine andere, wenn man die kartesischen Koordinaten eines Punktes der einen Ebene zu der komplexen Größe $z = x + iy$ zusammenfaßt und ebenso die kartesischen Koordinaten der anderen Ebene zu einer komplexen Größe $Z = X + iY$ zusammenfaßt und wenn man dann $Z$ irgend einer Funktion $f(z)$ gleichsetzt.

Speziell stellt

1) $Z = z + a$ (a reell oder komplex) eine Parallelverschiebung der Ebene in der Richtung und um die Länge der Strecke 0a dar. (0 ist Koord.-Anf.-P.)

2) $Z = az$ α) wenn a ein Zahl vom absol. Betrag 1 ist $a = \cos\varphi + i\sin\varphi$ eine Drehung d. Ebene um den Nullpunkt durch den Winkel φ dar ($Z = iz$ ist eine Drehung um 90°, $Z = -z$ eine solche um 180° etc.)

β) wenn a allgemein komplex, also von der Form $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ist, eine Drehung um den Nullpunkt durch den Winkel φ und eine Streckung von ihm aus im Verhältnis $|a| : 1$. (Ähnlichkeitstransformation mit dem Nullpunkt als Ähnlichkeitszentrum).




3) $Z = \frac{1}{z}$ oder $X = \frac{x}{x^2+y^2}$ ; $Y = \frac{-y}{x^2+y^2}$ die Transformation durch reziproke Radien in bezug auf den Einheitskreis oder auch Spiegelung am Einheitskreis dar.

Eine Fläche wird konform auf eine Ebene dadurch abgebildet, daß man ihr Längenelement-Quadrat auf die Form zu bringen sucht $ds^2 = m(U,V)\{dU^2 + dV^2\}$. (Blatt № 5) Um die Kugel konform auf die Ebene abzubilden, nimmt man eine Funktion des Argumentes $\psi + i\log\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ und setzt $Z = f(\psi + i\log\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2})$. Speziell ist die durch $Z = \psi + i\log\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ dargestellte Abbildung als Merkator-Projektion bekannt (Blatt № 5)

## Aufgaben.

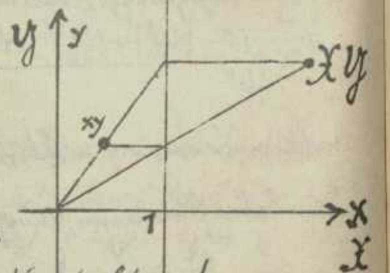
1) Wenn 2 Ebenen affin aufeinander bezogen sind, so stehen die Flächeninhalte der Dreiecke in konstantem Verhältnis. Beweis! Ferner bleibt das Längenverhältnis zweier paralleler Strecken ungeändert. Beweis!

2) Man bestimme die Achsenrichtungen der Deformation: $X = x + y\cos\varphi$ ; $Y = y\cdot\sin\varphi$

3) Man zeichne in der XY-Ebene ein quadratisches Netz (Quadratseite = 1) und das Diagonalnetz. Wie sieht das entsprechende Netz in der xy-Ebene aus, wenn beide Ebenen gemäß den Formeln

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{1}{x} \\ Y &= \frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{X} \\ y &= \frac{Y}{X} \end{aligned}\right\}$$

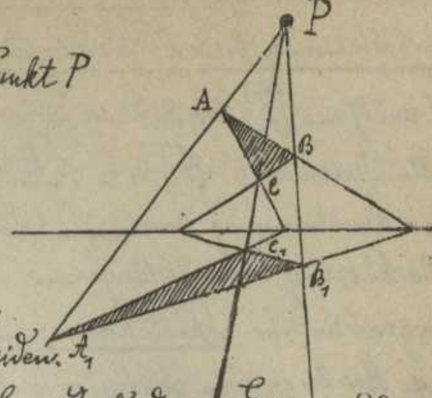
perspektivisch aufeinander abgebildet sind. Man beweise die Richtigkeit der nebenstehenden Konstruktion!




ev. 4.) Man diskutiere die durch $Z = z^2$ vermittelte konforme Abbildung der Z-Ebene auf d. z-Ebene!

5) Von einem Kegelschnitt sind die Tangenten gegeben $x = 0$; $y = 0$; $x = 1$; $y = 1$; $x + y - \frac{3}{2} = 0$. Welches ist seine Gleichung in Linienkoordinaten? Wie lautet die Gleichung der Parabel $y^2 = px$; der Ellipse und Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$; des Kreises $x^2+y^2=r^2$ in Linienkoordinaten?

beiden konjugiert komplexen Wurzeln der Gleichung entsprechen.
Im Falle einer Doppelwurzel dieser Gleichung entspricht ein Punkt $P$ der Ebene (das Zentrum) sich selbst und außerdem alle Punkte einer geraden Linie. In diesem Fall gehen die Verbindungslinien einander entsprechender Punkte $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ alle durch das Zentrum, während sich $AB$ u. $A_1B_1$, $BC$ und $B_1C_1$, $AC$ und $A_1C_1$ in Punkten der geraden Linie schneiden.




Wenn die Kollineation so beschaffen ist, daß sich die unendlich ferne Gerade der $xy$-Ebene und diejenige der $XY$-Ebene einander entsprechen, so nennt man diese Beziehung der beiden Ebenen aufeinander **Affinität**. Die affine Abbildung zweier Ebenen aufeinander ist durch die Formeln gegeben:

$$[A] \quad \left.\begin{aligned} X &= a_1x + b_1y + c_1 \\ Y &= a_2x + b_2y + c_2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \Delta x &= A_1X + B_1Y + C_1 \\ \Delta y &= A_2X + B_2Y + C_2 \end{aligned}\right\} \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{etc.}$$

(p. 1)

Hier entsprechen parallelen Geraden der einen Ebene parallelen Geraden der anderen. Einem Kegelschnitt entspricht wieder ein solcher. Da die Mittelpunkte der Kegelschnitte die Pole der unendlich fernen Geraden sind, so werden demnach 2 Kegelschnitte so abgebildet, daß ihre Mittelpunkte einander entsprechen. Demnach entsprechen auch konjugierten Durchmessern des einen Kegelschnittes konjugierten Durchmessern des anderen. Ein Kreis geht in einen Kegelschnitt über und die Achsen dieses Kegelschnittes in ein Paar zueinander senkrechte Kreisdurchmesser. Durch Parallelverschiebung der Achsen können die Gleichungen der Affinität auf die Form gebracht werden:

$$[B] \quad \left.\begin{aligned} X &= a_1x + b_1y \\ Y &= a_2x + b_2y \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \Delta\cdot x &= b_2X - b_1Y \\ \Delta\cdot y &= -a_2X + a_1Y \end{aligned}\right\} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Dreht man die Koord.-A. der $XY$-Ebene in die Richtungen der Achsen derjenigen Ellipse der $XY$-Ebene in welche ein Kreis um den Koordinatenanfangspunkt der $xy$-Ebene übergeht, und die Koord.-Achsen der $xy$-Ebene in die Richtungen der entsprechenden aufeinander senkrechten Kreisdurchmesser, so gehen die Gleichungen der Affinität über in diejenigen der homogenen linearen Deformation:

$$\left.\begin{aligned} X &= ax \\ Y &= by \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x &= \frac{X}{a} \\ y &= \frac{Y}{b} \end{aligned}\right\}$$

Die durch die Gleichungen [B] dargestellte allgemeinste lineare homogene Deformation (der $xy$-Ebene in die $XY$ Ebene) setzt sich demgemäß zusammen
1, Aus einer Drehung
2, Aus einer Compression oder Dilatation in 2 zueinander senk=

rechten Richtungen. Analytisch bestimmen sich diese beiden Richtungen aus dem Nebeneinanderbestehen der beiden Gleichungen: $\alpha X + \beta Y = 0$, $\beta X - \alpha Y = 0$. Nach Substitution der Werte für $X$ und $Y$ aus [B] ergibt diese Forderung die Gleichung: $\beta^2[a_1a_2 + b_1b_2] + \alpha\beta[a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2] - \alpha^2[a_1a_2 + b_1b_2] = 0$ zur Bestimmung der beiden (stets reellen) Richtungen $\frac{\beta}{\alpha}$. Im Falle $a = b$ ist die Verkürzung bezw. Verlängerung in beiden Koord.-Richtungen dieselbe. Die Affinität geht in gewöhnliche Ähnlichkeitstransformation über, und speziell wenn $a = b = 1$, in Kongruenz. Bei der ersteren geht jeder Punkt in seinen entsprechenden durch Streckung vom Koord.-Anf.-Punkt aus und bei der letzteren durch bloße Verschiebung über.

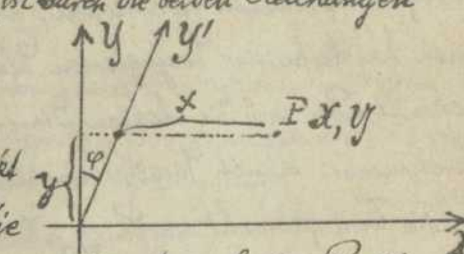
Bei der affinen Transformation gibt es ein sich selbst entsprechendes Dreieck, dessen einer Eckpunkt im Endlichen liegt, die beiden anderen aber, da sich die $\infty$ fernen Geraden entsprechen, im Unendlichen. Jeder endlich gelegene Punkt geht wieder in einen solchen über.

Durch Vergleich der Formeln [B] mit den Transformationsformeln $\begin{cases} X = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$ erkennt man, daß die homogene Deformation eine reine Drehung darstellt, wenn

1) $a_2 = -b_1$
2) $b_2 = a_1$
3) $a_2^2 + b_2^2 = 1$

ist. Eine spezielle Deformation ist durch die beiden Gleichungen bestimmt:

$$X = x + by$$
$$Y = y$$




Setzt man hier $b = \operatorname{tg}\varphi$, so geht jeder Punkt $X Y$ aus den entsprechenden $x, y$ dadurch hervor, daß man die $Y$-Achse um den Winkel $\varphi$ dreht und von den den Ordinaten $y = Y$ entsprechenden Punkten auf Parallelen zur $X$-Achse das entsprechende $x$ aufträgt.

Die kollineare Beziehung (Abbildung) zweier Räume $x, y, z$ und $X, Y, Z$ (aufeinander) wird durch die Formeln vermittelt:

$$X = \frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4} \qquad x = \frac{A_1X + B_1Y + C_1Z + D_1}{A_4X + B_4Y + C_4Z + D_4}$$

$$Y = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4} \quad \text{oder, nach } x, y, z \text{ aufgelöst} \quad y = \frac{A_2X + B_2Y + C_2Z + D_2}{A_4X + B_4Y + C_4Z + D_4}$$

$$Z = \frac{a_3x + b_3y + c_3z + d_3}{a_4x + b_4y + c_4z + d_4} \qquad z = \frac{A_3X + B_3Y + C_3Z + D_3}{A_4X + B_4Y + C_4Z + D_4}$$

wobei die $A_1, B_1, C_2$ etc. die zu $a_1, b_1, c_2$ gehörigen (mit Vorzeichen versehenen) Unterdeterminanten von
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$
sind.

Platz No.  Name:

Note:

# Höhere Mathematik III.

## Semestralprüfung.

29. II. 1912.

1) Wie lautet die Gleichung der Raumkurve in Parameterform welche entsteht, wenn die Kurve in der yz-Ebene: $z^2 = y - 1$ mit ihrer Ebene auf den Zylinder $x^2 + y^2 = 1$ aufgewickelt wird? Welches ist die Gleichung der Schmiegungsebene, der rektifizierenden Ebene, die erste und zweite Krümmung in dem Punkt der Kurve, welcher bei der Aufwicklung fest bleibt $(t = 0)$?

2) Welche Singularität besitzt die Kurve: $y^2 + x^2y^2 - x^4 + x^6 = 0$ im Koordinatenanfangspunkt? Man zeichne den ungefähren Verlauf der Kurve!

3) Man stelle die Gleichung der Orthogonalkurven des Kurvensystems

$$^{e}\log y = \frac{x^2}{2y^2} + C$$

auf und zeichne den angenäherten Verlauf des Systems der Orthogonalkurven!

4) Man integriere die Diff.-Gleichungen

a) $xy' + y = x\,{}^{e}\log x$

b) $y'' + 4y' + 4y = 16e^{2x} + 9e^{x} + \cos x$

5) Man integriere die simultanen Systeme von Diff.-Gleichungen:

a)
$$\begin{aligned} x' + z &= 0 \\ y' + x &= t \\ z' + y &= 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} y'' + y' + z &= 0 \\ z'' - z' + 2y &= 0 \end{aligned}$$

6) Gegeben sind 4 Punkte eines Kegelschnittes und in einem derselben die Tangente. Man konstruiere die Tangenten in den anderen 3 Punkten und die weitere Tangente, welche sich von einem beliebigen Punkt der gegebenen Tangente an den Kegelschnitt ziehen läßt!

(Die Aufgaben sind auf diesem Blatt zu bearbeiten)

Arbeitszeit: 1½ Stunde.

7. V. 12. № 1.

## Übungsaufgaben zur Analytischen Mechanik.

### Integration von Differentialgleichungen geradliniger Bewegungen.[x)]

1) Geradlinige Bewegung eines Punktes unter dem Einfluß einer elastischen Kraft:

$$x'' = -k^2 \cdot x$$

$x$ bedeutet den Abstand eines Punktes von seiner Ruhelage, zu der er mit einer diesem Abstand proportionalen Kraft zurückgetrieben wird. $k^2$ ist positiv und spielt die Rolle einer Elastizitätskonstanten. Für $t=0$ sei $x=x_0$, $v=v_0$.
Man beschreibe die Bewegung des Punktes mit Hilfe der Integrationsresultate!

2) Geradlinige Bewegung eines Punktes unter kombiniertem Einfluß der Schwere und einer elastischen Kraft:

$$x'' + k^2 \cdot x = g$$

Bewegungsgleichung eines an einem elastischen Faden (oder einer Feder) aufgehängten materiellen Punktes. Für $t=0$ sei $x=x_0$, $v=v_0$.

3) Geradlinige Bewegung eines Punktes unter Einfluß der Schwere und eines der Geschwindigkeit proportionalen Widerstandes:

$$x'' + k^2 \cdot x' = g \qquad (t=0;\ x=0;\ v=v_0)$$

4) Geradlinige Bewegung eines Punktes unter Einfluß der Schwere und eines dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen Widerstandes:

$$x'' + k^2 \cdot x'^2 = g$$

NB! Man substituiere in 3) und 4) $x' = v$.
in 4) außerdem $\frac{k^2}{g} = \mu^2$; $\mu \cdot v = w$; $g \cdot \mu = c$. $(t=0;\ w=w_0\ (v=v_0))$

---

x) Man vergleiche zu den Aufgaben 1) 2) 3) 5) 7) 8) deren genaue Besprechung auf Blatt № 10 und № 11 von H. M. III. W.-S. 1911/12.

5) Gedämpfte geradlinige Schwingungen eines materiellen Punktes unter dem Einfluß einer der Entfernung von der Ruhelage proportionalen elastischen Kraft und der Geschwindigkeit proportionalen Dämpfung

$$x'' + 2ax' + k^2 x = 0$$

Man unterscheide die 3 Fälle: $a > k$, $a = k$, $a < k$. $a$ ist der „Dämpfungsfaktor."

6) Dieselbe Aufgabe, wenn der Widerstand des Mediums dem Quadrate der Geschwindigkeit gleich gesetzt wird.

$$x'' + a(x')^2 + k^2 \cdot x = 0 \qquad a > 0, \text{ konstant.}$$

NB! Man differentiiere nach $t$:

$$x''' + 2a x'' \cdot x' + k^2 \cdot x' = 0,$$

setze dann: $x'' + \frac{k^2}{2a} = y$,

woraus folgt: $x''' = y'$, so geht die Diff.-Gl. über in $y' + 2ay \cdot x' = 0$

Mit Hilfe von $y = C \cdot e^{-2ax}$ suche man dann die allgemeine Lösung.

Unter welchen Bedingungen kommt eine Schwingung zustande?

7) Erzwungene Schwingungen ohne Dämpfung:

$$x'' + k^2 x = f(t)$$

Auf einen materiellen Punkt wirkt eine der Entfernung von der Ruhelage proportionale elastische Kraft ein, und ferner eine in gegebener Weise von der Zeit abhängige äußere Kraft. Man gebe die Form des allgemeinen Integrals an und führe die Integration für den speziellen Fall $f(t) = \sin pt$ aus.

8) Wirkt außerdem noch auf den Punkt eine der Geschwindigkeit proportionale Dämpfung ein, so wird diese erzwungene Schwingung mit Dämpfung durch die Diff.-Gl. bestimmt

$$x'' + 2ax' + k^2 x = f(t)$$

Speziell: $f(t) = \sin pt$!

22. V. 12. №2.

## Übungsaufgaben zur Analytischen Mechanik.

1, Von einem Punkt aus werden gleichzeitig mehrere Teilchen mit gleichgroßer Geschwindigkeit $v_0$ nach verschiedenen Richtungen geworfen, doch so, daß die durch die Anfangsgeschwindigkeit und die Schwere bestimmte Ebene dieselbe für alle Teilchen ist. Wird diese Ebene als xy-Ebene angenommen, und festgesetzt, daß die Richtung der Schwere in die Richtung der negativen y-Achse fällt, so lauten die Diff.-Gl. der Bewegung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0\ ;\ \frac{d^2y}{dt^2} = -g\ .$$

Man integriere die Diff.-Gl., suche die Enveloppe der Wurflinien und den geometrischen Ort der Scheitelpunkte und Brennpunkte derselben. Man beweise, daß die Teilchen sich in jedem Augenblicke auf einem Kreis befinden, dessen Mittelpunkt derjenige Punkt ist, in welchem sich ein gleichzeitig frei fallendes Teilchen befindet.

2, Ein Teilchen in der xy-Ebene wird mit der Geschwindigkeit $v_0$ in bestimmter Richtung fortgestoßen. Welche Bahn beschreibt es, wenn es zum Koordinatenanfangspunkt mit einer Kraft hingezogen wird, welche der Entfernung vom Koord.-Anf.-P. proportional ist?

3, Man untersuche die Bewegung auf der Cykloide, wenn angenommen wird, daß diese in einer vertikalen Ebene mit der Konkavität nach oben liegt, der Scheitel zum Koord.-Anf.-P. gemacht wird, und die y-Achse positiv nach oben gerechnet wird! Der Radius des erzeugenden Kreises sei a.

4, Ein schwerer Punkt wird auf einem horizontalen Kreiszylinder vom Radius a parallel zur Achse mit der Geschwindigkeit $v_0$ fortgestoßen. Man beschreibe die Bewegung desselben!

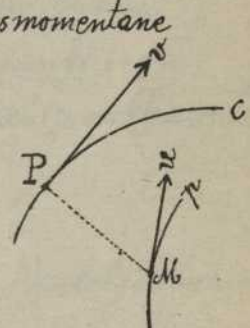
NB! Von der Reibung ist überall abzusehen.

18. VI. 12. **Übungsaufgaben zur Analytischen Mechanik.** № 3.

1) Man beweise den Satz: Gleiten die Schenkel eines Winkels eines beweglichen Systems über zwei Punkte des festen Systems, so kann die Bewegung auch dadurch erzeugt werden, daß ein Kreis mit seiner inneren Seite auf einem halb so großen Kreise rollt; jeder Systempunkt beschreibt eine Paskal'sche Curve, die in eine Kardioide oder in einen Kreis übergeht, je nachdem der Systempunkt auf dem rollenden Kreise oder in dem Scheitel des Winkels liegt. (Kardioidische Bewegung eines ebenen Systems, Umkehrung der elliptischen Bewegung)

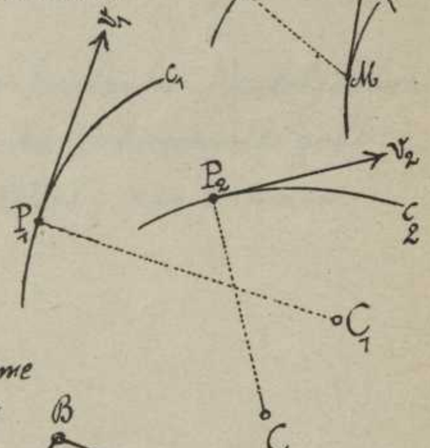
2) Die Bahn eines Punktes $P$ des beweglichen Systems im festen System sei die Kurve $c$. Die Geschwindigkeit desselben an einer Stelle der Bahn sei $= v$. Das momentane Drehzentrum sei $M$ und die Polkurve im festen System sei $p$. Wie

a) findet man den Krümmungsradius $\rho$ der Kurve $c$ im Punkte $P$, wenn noch die Polwechselgeschwindigkeit $u$ bekannt ist, mit welcher $M$ seine Lage auf der festen Polkurve $p$ ändert?



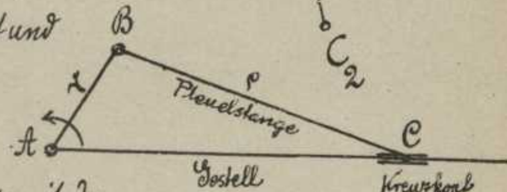

Wie findet man aus dieser Konstruktion umgekehrt

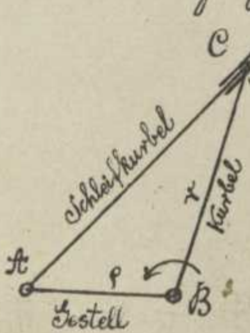
b) die Polwechselgeschwindigkeit $u$ in einem Moment aus den Geschwindigkeiten $v_1$ und $v_2$ und den Krümmungszentren der Bahnen $c_1$ und $c_2$ zweier Punkte des beweglichen Systems im festen System?




3) Die Kurbel $AB$ rotiere gleichförmig um $A$. Man bestimme

a) rechnerisch und durch Konstruktion Geschwindigkeit und Beschleunigung des Kreuzkopfes $C$ am Gestell $AC$. (Schubkurbelgetriebe.)




b) Die Kurbel $BC$ rotiere gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um $B$. Welches ist Geschwindigkeit und Beschleunigung der Schleifkurbel $AC$?

c) Die Schleifkurbel rotiere gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$. Geschwindigkeit und Beschleunigung der Kurbel? (Schleifkurbelgetriebe).

2. VI. 12. **Übungsaufgaben zur Analytischen Mechanik.** № 4

1, Ein schwerer Stab, der als eine Linie betrachtet werden kann, schwingt um eine horizontale durch den einen Endpunkt gehende Achse. Seine Länge ist 3a, sein Gewicht m.g, und seine Dichtigkeit ist der Entfernung vom Aufhängepunkt proportional. Bestimme die reduzierte Pendellänge und den Druck auf die Achse.

2, Wo hat man einen kleinen Körper von gegebener Masse auf der Geraden, welche den Aufhängungspunkt eines Pendels mit dem Schwerpunkt verbindet, anzubringen, um die reduzierte Pendellänge so viel als möglich zu verkleinern?

3, Ein homogener Umdrehungskörper rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um eine freie Achse, welche durch den Schwerpunkt geht, und mit der Achse des Körpers den Winkel $\theta$ bildet; man bestimme die Kräfte!

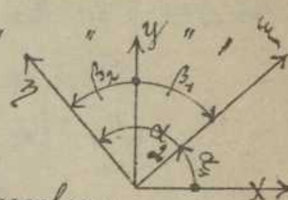
0. V. 12. **Höhere Mathematik IV.** № 1

## I, Koordinatentransformationen im Raume.

1) Die Transformation: $\left.\begin{array}{l}\xi = x - a\\ \eta = y - b\\ \zeta = z - c\end{array}\right\}$ stellt eine Parallelverschiebung des $xyz$-Koordinaten-Syst. nach den Punkt $\left.\begin{array}{l}x=a\\ y=b\\ z=c\end{array}\right\}$ als Anf.-Punkt eines (neuen) $\xi\eta\zeta$-Koord.-Systems dar.

2) In der Ebene war eine Drehung des $xy$-Koord.-Systems in ein $\xi\eta$-Koord.-System durch die Formeln gegeben: $\begin{array}{l}\xi = x\cos\alpha + y\sin\alpha\\ \eta = -x\sin\alpha + y\cos\alpha\end{array}$, wobei $\alpha$ den Winkel der posit. $\xi$-Achse mit der pos. $x$-Achse bedeutet.

Sind $\alpha_1$ und $\beta_1$ die Winkel, welche die pos. $\xi$-Achse mit den positiven alten Koord.-Achsen bildet
" $\alpha_2$ " $\beta_2$ " " " " " $\eta$-Achse " " " " " " ",
so gehen diese Gleichungen über in $\begin{array}{l}\xi = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1\\ \eta = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2\end{array}$.

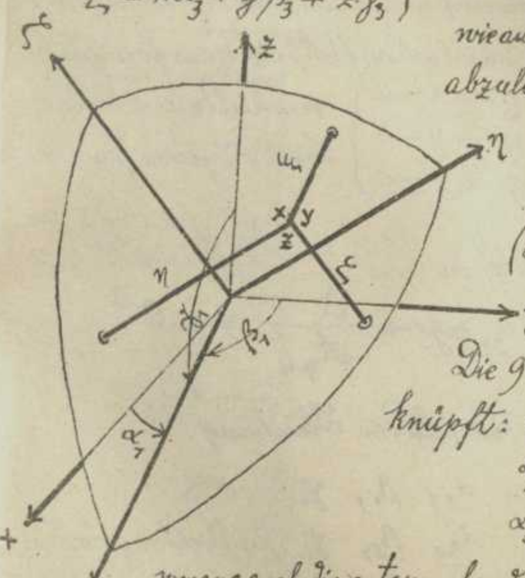



3) Analog ist eine Drehung des $xyz$-Koord.-Syst. in ein $\xi\eta\zeta$-Koord.-System durch die Formeln gegeben:

$$(A)\quad \left.\begin{array}{l}\xi = x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1\\ \eta = x\alpha_2 + y\beta_2 + z\gamma_2\\ \zeta = x\alpha_3 + y\beta_3 + z\gamma_3\end{array}\right\}$$

worin abkürzend mit $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ die Richtungscosinus der positiv. $\xi$-Achse bezüglich der positiv. alten Koord.-Achsen bezeichnen. u.s.f., wie aus dem nebenstehenden Schema abzulesen ist.

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $\xi$ | $\alpha_1$ | $\beta_1$ | $\gamma_1$ |
| $\eta$ | $\alpha_2$ | $\beta_2$ | $\gamma_2$ |
| $\zeta$ | $\alpha_3$ | $\beta_3$ | $\gamma_3$ |




Umgekehrt ist natürlich:

$$(B)\quad \left.\begin{array}{l}x = \xi\alpha_1 + \eta\alpha_2 + \zeta\alpha_3\\ y = \xi\beta_1 + \eta\beta_2 + \zeta\beta_3\\ z = \xi\gamma_1 + \eta\gamma_2 + \zeta\gamma_3\end{array}\right\}$$

Die 9 Richtungscosinus sind durch die 6 Relationen verknüpft:

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 = 1 \qquad \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2 = 0$$
$$\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2 = 1 \qquad \alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3 = 0$$
$$\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2 = 1 \qquad \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3 = 0$$

woraus auch die entsprechenden abgeleitet werden können:

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 = 1 \qquad \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3 = 0$$
$$\alpha_2^2+\beta_2^2+\beta_3^2 = 1 \text{ etc.,} \qquad \alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3 = 0 \text{ etc.,}$$

Im Falle eines Rechtssystems (wie unseres Koordinatensystem) ist $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = +1$

Bei einem Linkssystem wäre $\Delta = -1$.

Durch Auflösung von (A) nach $x, y, z$ und Vergleich mit (B) folgt:

$\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2$

$\alpha_2 = \beta_3\gamma_1 - \gamma_3\beta_1$ etc; Es ist also jedes Glied von $\Delta$ gleich der mit Vorzeichen versehenen dazugehörigen Unterdeterminante.

## II, Diskussion der allgemeinen Fläche 2. Ordnung:

$$(A) \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

Sei $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ die Determinante dieser allgemeinen Gleichung 2. Grades in 3 Variabeln, und $A_{ik}$ seien die zu $a_{ik}$ gehörigen Unterdeterminanten ($a_{ik} = a_{ki}$). Dann hat man folgende

### Einteilung der Flächen 2. Ordnung:

$$\left.\begin{array}{l} A_{44} \neq 0 : \text{Mittelpunktsflächen} \\ A_{44} = 0 : \text{Parabolische Flächen} \end{array}\right\}$$

### 1, Transformation der Mittelpunktsflächen auf die Normalform.

Die Koordinaten des Mittelpunktes der Fläche: $a, b, c$ berechnen sich aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}a + a_{12}b + a_{13}\cdot c + a_{14} = 0 \\ a_{21}a + a_{22}b + a_{23}\cdot c + a_{24} = 0 \\ a_{31}a + a_{32}b + a_{33}\cdot c + a_{34} = 0 \end{array}\right\}$$

Übt man nämlich auf (A) die Transformation aus: $\left.\begin{array}{l} \xi = x - a \\ \eta = y - b \\ \zeta = z - c \end{array}\right\}$ verschiebt man also das Koord.-System parallel zu sich nach den durch diese Gleichungen bestimmten Punkt $a, b, c$, so geht (A) über in

$$(B) \quad a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + 2a_{12}\xi\eta + 2a_{13}\xi\zeta + 2a_{23}\eta\zeta + \frac{\Delta}{A_{44}} = 0$$

Versteht man ferner unter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die stets reellen Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

und unter $\begin{array}{lll} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{array}$ die Richtungscosinus, welche sich aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 0 &= (a_{11}-\lambda)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma \\ 0 &= a_{21}\alpha + (a_{22}-\lambda)\beta + a_{23}\gamma \\ 0 &= a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33}-\lambda)\gamma \\ &\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1 \end{aligned}\right\}$$

dadurch bestimmen, daß man $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ nacheinander durch $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \lambda_1$, $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2\ \lambda_2$, $\alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3\ \lambda_3$ ersetzt, so geht durch die Drehung des Koord.-Systems:

$$(C)\left\{\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta \\ \mathfrak{y} &= \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta \\ \mathfrak{z} &= \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta \end{aligned}\right.$$

Gleichung (B) über in die gewünschte <u>Normalform</u>:

$$(D)\quad \lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2 + \frac{\Delta}{A_{44}} = 0.$$

## 2, <u>Transformation eines Paraboloids auf Hauptebenen u. Scheiteltangentialebene.</u>

Ist $A_{44} = 0$, so hat die Fläche (A) entweder keinen im Endlichen gelegenen Mittelpunkt oder unendlich viele. In diesem Falle ist eine der Wurzeln $\lambda$, sagen wir $\lambda_3 = 0$. Man beginnt zuerst mit einer Drehung des Koordinatensystems, durch Anwendung derselben Formeln (C) auf (A) nur ist jetzt statt $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ darin $x, y, z$ zu setzen. Unter Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen wird dann durch die Drehung die dem Werte $\lambda_3 = 0$ entsprechende Hauptachsenrichtung zur Z-Achse. Gleichung (A) geht dann über in

$$(E)\quad \lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + 2m\xi + 2n\eta + 2p\zeta + a_{44} = 0$$

worin zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} a_{14}\alpha_1 + a_{24}\beta_1 + a_{34}\gamma_1 &= m \\ a_{14}\alpha_2 + a_{24}\beta_2 + a_{34}\gamma_2 &= n \\ a_{14}\alpha_3 + a_{24}\beta_3 + a_{34}\gamma_3 &= p \end{aligned}\right\}$$

gesetzt worden ist. (NB! Die Richtungscosinus berechnen sich natürlich wie oben.)

Hierauf führt man die Parallelverschiebung des Koord.-Systems aus:

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \mathfrak{x} - \frac{m}{\lambda_1} \\ \eta &= \mathfrak{y} - \frac{n}{\lambda_2} \\ \zeta &= \mathfrak{z} - \frac{1}{2p}\left\{a_{44} - \frac{m^2}{\lambda_1} - \frac{n^2}{\lambda_2}\right\}, \end{aligned}\right.$$

wodurch (E) in die gewünschte <u>Normalform</u> übergeht:

$$\lambda_1\mathfrak{x}^2 + \lambda_2\mathfrak{y}^2 + 2p\cdot\mathfrak{z} = 0.$$

3, <u>Der Asymptotenkegel einer Mittelpunktsfläche</u> hat die Gleichung:

$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0$; er ist imaginär, und nur dann imaginär, wenn gleichzeitig $\left\{\begin{array}{l} a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \\ a_{11}A_{44} > 0 \end{array}\right.$ ist.

4, Tabelle zur Diskussion der Flächen 2. Ordnung.

| $A_{44}$ | $\Delta$ | Art der Fläche | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lessgtr 0$ | $< 0$ | Ellipsoid oder Zweischaliges Hyperboloid | Hängt ab von der Realität des Asymptotenkegels (siehe oben) | Mittelpunktsflächen |
| | $> 0$ | einschaliges Hyperboloid oder imaginäre Fläche 2. O. | | |
| | $= 0$ | reeller oder imaginärer Kegel 2. O. (siehe oben) | | |
| $= 0$ | $< 0$ | elliptisches Paraboloid | | Parabolische Flächen. |
| | $> 0$ | hyperbolisches Paraboloid | | |
| | $= 0$ | Zylinder, wenn nicht alle $A_{ik}$ verschwinden (jedoch immer $A_{14}A_{24}A_{34}$) | | |
| | | Ebenenpaar, wenn alle $A_{ik}$ verschwinden | | |
| | | Doppelebene, wenn alle $A_{ik}, lm$, d.h. alle Unterdeterminanten 2. Grades von $\Delta$ verschwinden. | | |

## Aufgaben.

1, Man bringe die Gleichungen folgender Flächen auf die Normalform:
$\alpha$) $4x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 2\sqrt{3}\,yz \pm 1 = 0$; $\beta$) $x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 2z - 1 = 0$, nachdem sie zuerst auf ihre Realität untersucht worden sind. Welches sind die Winkel, welche die Hauptachsenrichtungen mit den ursprünglichen Koordinatenrichtungen bilden?

2, Man diskutiere: $\alpha$) $xy + zx - 1 = 0$; $\beta$) $xy - zx + yz = 0$; $\gamma$) $xy - zy - xz - 1 = 0$;
$\delta$) $z^2 + xy + xz + zy + x - y - 1 = 0$; $x^2 + y^2 - z^2 + 2x + 2y - 2z - 1 = 0$; $z^2 - \cancel{2y} - \cancel{2x} = 0$.

3, Man diskutiere die Gestalt der Flächen $\frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} + \frac{z^2}{c^2-\lambda} - 1 = 0$, wenn der Parameter $\lambda$ von $-\infty$ bis $+\infty$ variiert!

4, Zur Repetition: Man bestimme den Wert des Integrals $-\int_0^\infty \frac{dx}{(1-\sqrt[3]{x})^4}$;
Wie groß muß ein Abszissenwert $x$ genommen werden, damit eine an der Stelle $x$ gezogene Parallele zur $y$-Achse den durch das Integral dargestellten Flächeninhalt halbiert?
Man bestimme den Wert mit Hilfe einer Näherungsmethode auf 2 Dezimalen genau! (Adm. 1912)

14. V. 12. Höhere Mathematik IV № 2.

## Repetitionsaufgaben.

1) Vorgelegt sei die Gleichung einer Parabel: $y^2 = 2p(x+a)$.
Eine Tangente der Parabel schneidet die x-Achse im Punkt $P_1$ und die y-Achse im Punkt $P_2$. Durch $P_1$ wird eine Parallele zur y-Achse und durch $P_2$ eine Parallele zur x-Achse gezogen, welche sich in einem Punkt P schneiden. Welches ist die Gleichung des geometrischen Ortes der Punkte P, welche auf diese Weise für die unendlich vielen Tangenten der Parabel erhalten werden? Welches sind die Koordinaten der Maxima, Minima und der Wendepunkte dieses geometrischen Ortes? Man zeichne das System der geometrischen Örter, welche man auf diese Weise bekommt, wenn die Konstante a als veränderlich gedacht wird, die Parabel also ohne Drehung längs der x-Achse verschoben wird. Auf welchen Kurven liegen die Maxima, Minima und Wendepunkte der geometrischen Örter? Wie lautet die Diff.-Gleichung des Systems der geometrischen Örter? (Admission W.-S. 1912)

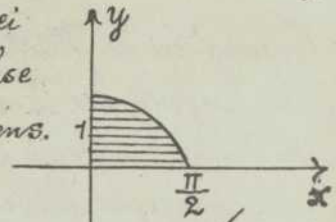
2) Auf der Fläche von der Gleichung: $a^2x + ay^2 + z^3 = 3a^3$
soll ein im ersten Oktanten gelegener Punkt so ermittelt werden, daß die Summe seiner Koordinaten ein Maximum wird. Wie groß ist dieses Maximum? Man berechne den Abstand dieses Punktes von der Tangentialebene der Fläche im Punkte $x = y = z = a$. Man gebe den allgemeinen Verlauf der Fläche innerhalb des ersten Oktanten an. (Admission W.-S. 1912)

3) Man zeichne den Verlauf der durch die Gleichung: $y = \dfrac{x^2-5}{(x^2-1)^2}$ definierten Kurve in der xy-Ebene. Wo hat die Kurve Maxima, Minima und Wendepunkte? Welches ist der Krümmungsradius der Kurve im Punkt $x = 0$, $y = -5$? Man berechne den Flächeninhalt

$$\int_{\sqrt{5}}^{\infty} y\,dx\,!$$

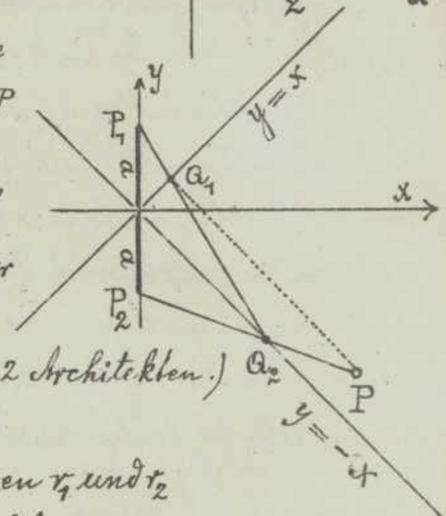
(Admission W.-S. 1912, f. Architekten)

4) Von der Kosinuslinie mit der Gleichung: $y = \cos x$, sollen für die Abscissen $x = 0$, $x = \pm\frac{\pi}{4}$, $x = \pm\frac{\pi}{2}$ Ordinate, Tangentenrichtung, Krümmungsradius und Krümmungsmittelpunkt berechnet und gezeichnet werden. Man gebe hiernach den ungefähren Verlauf der Evolute des Stückes der Kosinuskurve zwischen $x = -\frac{\pi}{2}$ und $x = +\frac{\pi}{2}$ an. Man berechne das Volumen, welches bei Drehung des schraffierten Flächenstücks um die y-Achse entsteht, sowie die Lage des Schwerpunktes dieses Volumens.




(Admission W. S. 1912)

5) Auf die in der nebenstehenden Figur ersichtlichen Weise werden die Punkte eines Kegelschnittes konstruiert. ($Q_1P$ ist parallel zur Geraden $y = -x$.) Man leite dessen Gleichung aus der Konstruktion ab und bringe sie auf die Normalform. Man gebe auch die Gleichungen der Asymptoten des Kegelschnittes an und zeichne den ungefähren Verlauf desselben! (Admission W. S. 1912 Architekten.)




6) Man beweise den Satz: Das Produkt aus den Längen $r_1$ und $r_2$ der beiden nach einem Punkt einer Ellipse oder Hyperbel gezogenen Brennstrahlen ist gleich dem Quadrate des zu dem Punkt gehörigen konjugierten Halbmessers.

7) Man integriere die Diff.-Gleichung: $xy'' + 2y' = x^2$.

8) Man beweise, daß die durch Elimination von $y'$ aus
$$\left.\begin{array}{l} f(x, y, y') = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} + y' \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array}\right\}$$
hervorgehende Gleichung diejenige Kurve definiert, welche die Wendepunkte der Integralkurven von $f(x, y, y') = 0$ ausschneidet.

9) Wo liegen die Wendepunkte und Spitzen der Integralkurven von $y'^2 + x^2 - 1 = 0$? Welches ist der ungefähre Verlauf dieser Integralkurven?

22. V. 12. Höhere Mathematik IV. № 3

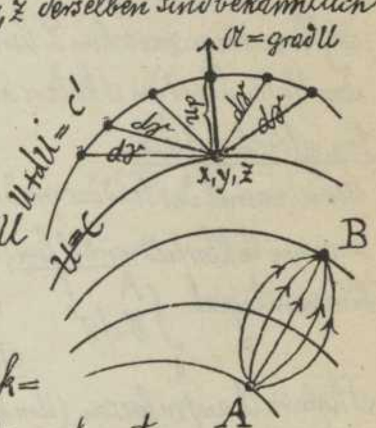
## Theorie der Felder.

Unter einem Feld versteht man die Verteilung einer skalaren oder vektoriellen Größe (Feldgröße) in der Ebene oder im Raum.

Mit einem räumlichen skalaren Feld hat man zu tun, wenn jedem Punkt des Raumes durch die Feldgröße $U = f(x, y, z)$ ein ganz bestimmter Zahlenwert zugeordnet ist.

Alle Punkte des Raumes, für welche dieser Zahlenwert der nämliche ist, gleich $C$, liegen auf der „Niveaufläche": $U = f(x,y,z) = C$.

Die Richtungscosinus der Normalen dieser Niveaufläche im Punkt $x, y, z$ derselben sind bekanntlich durch das Gleichungssystem bestimmt:




$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \cos\beta = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial U}{\partial y} \\ \cos\gamma = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial U}{\partial z} \\ \lambda = \sqrt{\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \end{cases}$$

Demnach steht der durch die Gleichung

$$\mathfrak{A} = i\frac{\partial U}{\partial x} + j\cdot\frac{\partial U}{\partial y} + k\frac{\partial U}{\partial z} = \operatorname{grad} U = \nabla U$$

definierte Vektor (der Gradient des Skalars $U$) in jedem Punkt senkrecht zu der durch den Punkt hindurchgehenden Niveaufläche.[1] Man erkennt auch: Der Gradient ist nach der Richtung hingewiesen, in welcher $U$ am raschesten ansteigt, also dem „Gefälle" von $U$ entgegengesetzt.

Geht man in der Richtung $\mathfrak{r}$ vom Punkt $x, y, z$ der Niveaufläche $U = C$ (vom „Aufpunkt") um $d\mathfrak{r}$ zu einem Punkt auf der benachbarten Niveaufläche $U = C'$ über (in der Figur ist angenommen $C' > C$), so gilt jedesmal

$$1)\quad dU = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot dz = \operatorname{grad} U \cdot d\mathfrak{r}$$

(unabhängig vom Weg $d\mathfrak{r}$), wenn $dx, dy, dz$ die Komponenten von $d\mathfrak{r}$ auf die Koordinatenachsen bedeuten. Dieses skalare Produkt geht in ein gewöhnliches über, wenn auf dem Gradienten im Aufpunkt $x, y, z$ selbst fortgeschritten wird. Bezeichnet man den kürzesten Abstand der Niveaufläche $U + dU = C'$ von diesem Punkt mit $dn$, so gilt also auch

$$dU = \operatorname{grad} U \cdot dn \quad \text{oder} \quad \left|\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}\right| = |\operatorname{grad} U| = \frac{dU}{dn}, \quad \text{d.h.}$$

---

[1] Das Zeichen $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\cdot\frac{\partial}{\partial z}$ nennt man den „Hamiltonschen Operator."

Die Größe des Gradienten ist dem senkrechten Abstand zweier Niveauflächen umgekehrt proportional. Sie gibt in einem Punkt den auf die Längeneinheit bezogenen Wert des größten Gefälles an.

Durch Integration folgt aus (1): Das „Linienintegral":

$$\int_A^B \mathfrak{A}\, d\mathfrak{r} = \int_A^B \operatorname{grad} U\, d\mathfrak{r} = U_B - U_A .$$

Da das Produkt $\mathfrak{A}\,d\mathfrak{r}$ die Arbeit darstellt, welche die Kraft $\mathfrak{A}$ auf dem Wege $d\mathfrak{r}$ leistet, so sagt diese Gleichung folgendes aus: Ordnet man mit Hilfe der Gradientenbildung jedem Punkt des zum Skalar $U$ gehörigen skalaren Feldes einen Vektor $\mathfrak{A} = \operatorname{grad} U$ zu, so daß also dem skalaren Feld ein Vektorfeld zugewiesen wird, und deutet den Vektor $\mathfrak{A}$ als eine Kraft, so ist die Arbeit, welche $\mathfrak{A}$ auf dem Wege zwischen 2 Punkten $A$ und $B$ des Feldes von $U$ leistet, unabhängig vom Wege, und gleich dem Unterschied des Skalars in $A$ und $B$. Für einen im Feld geschlossenen Weg ist die Arbeit des Gradienten gleich Null.

Man nennt das Feld des grad $U$ (der Potentialfunktion $U$) ein wirbelfreies Feld. Allgemein nennt man ein Vektorfeld wirbelfrei, wenn für einen jeden im Feld verlaufenden geschlossenen Weg das Linienintegral $\int_A^A \mathfrak{V}\, d\mathfrak{r}$ verschwindet, im anderen Fall nennt man das Feld ein Wirbelfeld.

Satz: Ein wirbelfreies Feld ist stets als das Feld des Gradienten eines Skalars $U$ aufzufassen (Umkehrung des obigen Satzes). Denn wenn in einem gewissen Bereich das Integral $\int_{x_0y_0z_0}^{xyz} \mathfrak{V}\, d\mathfrak{r}$ vom Wege unabhängig ist, so ist durch $U_{(xyz)} = U_{(x_0y_0z_0)} + \int_{x_0y_0z_0}^{xyz} \mathfrak{V}\, d\mathfrak{r}$ ein Skalar $U$ von der verlangten Eigenschaft bis auf eine additive Konstante eindeutig definiert und $\mathfrak{V}$ ist der Gradient des skalaren Feldes.x) In diesem Fall kann $\mathfrak{V}$ in der Form dargestellt werden: $\mathfrak{V} = u \cdot i + v \cdot j + w \cdot k$

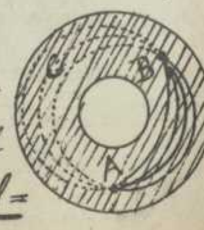
wobei $\begin{cases} u = \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ v = \dfrac{\partial U}{\partial y} \\ w = \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$ ist, und die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Vektorfeld ($\mathfrak{V}$) wirbelfrei ist, besteht in dem Verschwinden der 3 Ausdrücke

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \,;\quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \,;\quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} .$$

Anders formuliert:

---

x) Vorausgesetzt ist, daß der Bereich, in welchem man einen Vektor $\mathfrak{A}$ von dieser Beschaffenheit bestimmt hat, ein „einfach zusammenhängender" ist. Hat er etwa eine ringförmige Gestalt, (Wulst) so wird zwar $\int_A^B \mathfrak{A}\, d\mathfrak{r}$ für alle von $A$ nach $B$ auf derselben Seite des Ringes verlaufenden Wege denselben Wert annehmen, jedoch wird das Integral einen davon verschiedenen Wert annehmen, wenn auf den in der Figur punktierten Wegen integriert wird. In diesem Fall ist $U$ eine viel=



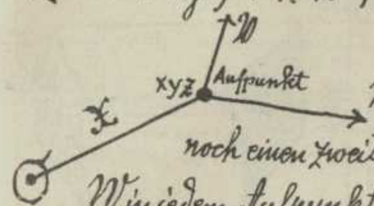
Ist ein Vektorfeld durch die Gleichung $\mathfrak{V} = f(\mathfrak{X})$ definiert, wobei

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{V} = i\cdot u + j\cdot v + k\cdot w \\ \mathfrak{X} = i\cdot x + j\cdot y + k\cdot w\end{array}\right\}$$

gesetzt ist, und ordnet man jedem Aufpunkt durch die Beziehung

$$\mathfrak{W} = \operatorname{curl}\mathfrak{V} = \operatorname{rot}\mathfrak{V} = i\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) =$$

$$\mathfrak{W} \quad = i\cdot W_1 + j\cdot W_2 + k\cdot W_3$$




noch einen zweiten Vektor, den <u>Wirbelvektor $\mathfrak{W}$</u> zu, so ist das <u>Verschwinden des Vektors $\mathfrak{W}$ in jedem Aufpunkt</u> notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Vektorfeld ($\mathfrak{V}$) wirbelfrei ist. Es ist dann nach dem vorangehenden: $\mathfrak{V} = \operatorname{grad} U$ und $\operatorname{curl}\operatorname{grad} U \equiv 0$

<u>Ist das Vektorfeld ein Wirbelfeld</u>, so kann man den Wert des Linienintegrals $\int_A^A \mathfrak{V}\,d\mathfrak{r}$ genommen um eine hinreichend kleine, den Aufpunkt einschließende Linie als <u>Maß der Wirbelstärke im Aufpunkt</u> betrachten. Integriert man in positivem Sinn um ein Rechteck in der xy-Ebene, in dessen Mittelpunkt der Koord.-Anfangspunkt liegen möge, so ist der Wert obigen Linienintegrals durch

$$\int_A^A \mathfrak{V}\,d\mathfrak{r} = a\cdot b\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

dargestellt, wenn a und b die Seiten des Rechteckes sind, und zwar um so genauer dargestellt, je kleiner das betreffende Rechteck ist. Dividiert man durch den Flächeninhalt $a\cdot b$ und läßt denselben unendlich klein werden, so definiert der Grenzwert $W_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ die im Koord. Anf. P. O herrschende Wirbelstärke um die z-Achse. Analog bezeichnen $W_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$ und $W_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$ die Wirbelstärken um die y- bezw. um die x-Achse im Punkt O.

Man erkennt: Die Gesamtarbeit $dL$ der Kraft $\mathfrak{V}$ auf einem geschlossenen Weg, der ein Oberflächenelement $df$ umkreist, ist <u>$dL = df.\ \operatorname{curl}\mathfrak{V}$.</u>

<u>Superposition von skalaren Feldern.</u> Hat man durch die Potentialfunktionen $U_1$ und $U_2$ zwei skalare Felder vorgelegt, so kann man durch Addition der jedem Punkt zugeordneten Skalaren $U_1$ und $U_2$ ein neues Feld $\overline{U} = U_1 + U_2$ erzeugen. Die Niveauflächen der Felder $U_1 \pm U_2 = \overline{U}_{1,2}$ werden von jeder Ebene in den <u>Diagonalnetz</u> des durch $U_1 = C$ und $U_2 = C$ in der Ebene erzeugten Netzes geschnitten.

Aus der Definition des Gradienten folgt: $\operatorname{grad}\overline{U}_{1,2} = \operatorname{grad}(U_1 \pm U_2) = \operatorname{grad} U_1 \pm \operatorname{grad} U_2$

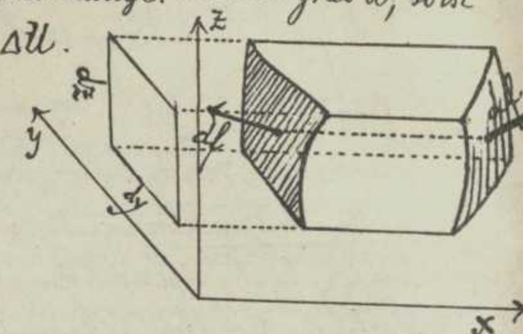
Faßt man den Vektor $\mathfrak{V}$ eines Vektorfeldes als Geschwindigkeit einer stationär strömenden

---

<u>deutige Funktion von xyz</u> und die auf dem geschlossenen Weg ABCA geleistete Arbeit ist nicht gleich Null.

inkompressiblen Flüssigkeit auf, so ist: $\operatorname{div} \mathfrak{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$
die in der Umgebung des Aufpunktes pro Raum- und Zeiteinheit neu auftretende Flüssigkeitsmenge. Ist $\mathfrak{V} = \operatorname{grad} U$, so ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{V} = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U.$$




__Gauß'scher Satz für Vektorfelder:__

$$\underset{\text{Oberfl.}}{\iint} \mathfrak{V} \cdot d\mathfrak{f} = \underset{\text{Raum}}{\iiint} \operatorname{div} \mathfrak{V} \cdot dx\, dy\, dz$$

Dabei bedeutet $d\mathfrak{f}$ ein unendlich kleiner Vektor, der dem Oberflächenelement eines Körpers, (dessen Oberfläche von jeder Parallelen zu einer der Koord.-Achsen nur 2 mal getroffen wird), so zugeordnet ist, daß er die Richtung der nach außen zeigenden Normalen und als Größe die Fläche des Elementes besitzt.

## Aufgaben.

1) Die „Kraftlinien" eines Vektorfeldes sind durch das simultane System von Diff.-Gl. definiert: $dx : dy : dz = u : v : w$ und die „Wirbellinien" durch
$dx : dy : dz = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) : \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) : \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$; $(\mathfrak{V} = i \cdot u + j \cdot v + k \cdot w)$.
Man bestimme Kraft- und Wirbellinien des Drehfeldes: $\mathfrak{V} = \omega(-iy + jx)$

2) Die Orthogonaltrajektorien der Flächen $U = \text{const}$ (die „Gefällslinien") sind durch das simultane System: $dx : dy : dz = \frac{\partial U}{\partial x} : \frac{\partial U}{\partial y} : \frac{\partial U}{\partial z}$ bestimmt. Man bestimme die Gleichungen der Gefällslinien von $U \equiv z - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C$.

3) In 2 Punkten $x = a$ und $x = -a$ der x-Achse befinden sich a) gleiche b) entgegengesetzt gleiche Elektrizitätsmengen. Man zeichne die Potentialflächen!

4) Welches ist die Größe und Richtung der Strömungsgeschwindigkeit in einem ebenen Feld mit dem Geschwindigkeitspotential $U = \log r$?

5) Man zeige, daß das Vektorfeld $\mathfrak{V} = i x + j \cdot y + k \cdot z$ wirbelfrei ist, und bestimme hierauf das Potential $U$, dessen Gradient $\mathfrak{V}$ ist.

6) Berechne das Potential einer gleichm. mit Masse belegten Kreisscheibe in bezug auf einen Punkt der Achse.

7) Es ist: $\operatorname{div} \operatorname{curl} \mathfrak{V} = 0$. Welche Bedeutung hat die Gleichung hydrodynamisch?

11. VI. 12. *Höhere Mathematik IV.* № 4

## Partielle Differentialgleichungen 1ter Ordnung.

Unter einer partiellen Diff.-Gl. versteht man eine Beziehung zwischen einer abhängigen Variabeln, mehreren unabhängigen Variabeln und den partiellen Ableitungen der ersten nach den letzteren. Ist der höchste in der Gleichung vorkommende Diff.-Quotient der $n$te, so heißt die Gleichung eine solche von der $n$ten Ordnung.

I, Die lineare partielle Diff.-Gl. erster Ordnung mit 2 unabhängigen Variabeln:

$$(1)\quad P_{(x,y,z)}\frac{\partial z}{\partial x}+Q_{(x,y,z)}\frac{\partial z}{\partial y}-R_{(x,y,z)}=0.$$

Die Funktion $z=\varphi(x,y)$ heißt dann ein Integral (eine Integralfläche) derselben, wenn die Diff.-Gleichung für $z=\varphi(x,y)$ identisch für alle Werte von $x$ und $y$ erfüllt ist. Nun hat die Normale im Punkt $x,y,z$ der Fläche $z=\varphi(x,y)$:

$$(2)\quad \frac{\xi-x}{\frac{\partial z}{\partial x}}=\frac{\eta-y}{\frac{\partial z}{\partial y}}=\frac{\zeta-z}{-1}$$ die Richtungscosinus: $\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma=\frac{\partial z}{\partial x}:\frac{\partial z}{\partial y}:-1$;

Bestimmt man ferner eine andere Gerade, ebenfalls durch den Punkt $x,y,z$ der Fläche $z=\varphi(x,y)$ durch:

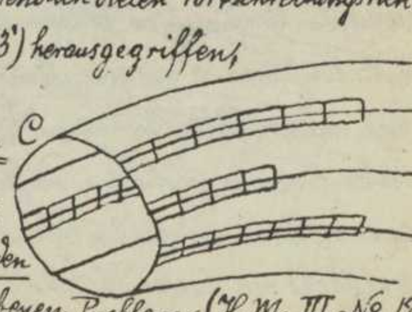
$$(3)\quad \frac{\xi-x}{P_{(x,y,z)}}=\frac{\eta-y}{Q_{(x,y,z)}}=\frac{\zeta-z}{R_{(x,y,z)}}$$, also mit den Richtungscosinus: $\cos l:\cos m:\cos n=P:Q:R$

so sagt die Diff.-Gl. (1) aus: Die Flächennormalen aller Integralflächen von (1) stehen im Punkt $x,y,z$ rechtwinklig zu der ganz bestimmten Richtung (3) oder

$$(3')\quad \frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$ Diese Richtung ist also eine der $\infty^1$ Fortschreitungsrichtungen in der Tangentialebene der Fläche $z=\varphi(x,y)$ im Punkt $x,y,z$ derselben, welche an die Bedingung geknüpft sind:

$$(4)\quad \frac{\partial z}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot dy-dz=0.$$

Von diesen unendlich vielen Fortschreitungsrichtungen wird eben durch die Diff.-Gl. (1) eine ganz bestimmte (3') herausgegriffen; und eine Integralfläche von (1) ist dadurch charakterisiert, daß jede Tangentialebene derselben im Berührpunkt $x,y,z$ die Richtung (3') enthält. (3') bestimmt in jedem Punkt des Raumes ein Linienelement, also $\infty^3$ Linienelemente, und die Integration des Systems der beiden totalen simultanen Diff.-Gl. (3') besteht [analog wie beim ebenen Problem (H. M. III № 12)]



in der Zusammenfassung der $\infty^3$ Linienelemente zu $\infty^2$ Raumkurven, von denen immer $\infty^1$ eine Integralfläche von (1) überdecken (<u>Charakteristiken der linearen Diff.-Gl. (1)</u>) Eine solche Integralfläche wird demnach aus $\infty^1$ Charakteristiken gebildet, und man erhält eine Integralfläche, indem man irgendwie aus den $\infty^2$ Integralkurven $\infty^1$ willkürlich herausgreift; etwa dadurch, daß man eine Kurve C (siehe Figur) angibt, durch welche die Charakteristiken hindurchgehen sollen. Analytisch geschieht die Absonderung von $\infty^1$ Integralkurven folgendermaßen: Seien die Lösungen von (3'): (5) $y = f_1(x, c_1, c_2)$, $z = f_2(x, c_1, c_2)$, unter $c_1$ und $c_2$ die beiden willkürlichen Integrations konstanten verstanden. Für bestimmte Werte von $c_1$ und $c_2$ wird dann als Schnitt dieser beiden Flächen eine der $\infty^2$ Integralkurven definiert. Eine Gesamtheit von $\infty^1$ Int.-Kurven erhält man, wenn man etwa $c_2 = \psi(c_1)$ setzt, unter $\psi$ eine willkürliche Funktion verstanden und aus den Gleichungen:

$$(5') \quad \begin{cases} y = f_1(x, c_1, \psi(c_1)) \\ z = f_2(x, c_1, \psi(c_1)) \end{cases}$$

$c_1$ eliminiert. Diese Fläche stellt dann ein <u>partikuläres</u> Integral von (1) dar, und wird von den $\infty^1$ Integralkurven (5') überdeckt. Löst man (5) nach $c_1$ und $c_2$ auf:

$$\begin{cases} c_1 = F_1(x, y, z) \\ c_2 = F_2(x, y, z) \end{cases}$$

, setzt irgendeine willkürliche Funktion $\Phi(c_1, c_2) = 0$ fest, so ist

$$\Phi\{F_1(x,y,z),\ F_2(x,y,z)\} = 0$$

<u>das allgemeine Integral</u> von (1), weil es eine willkürliche Funktion $\Phi$ enthält. Je nach dem Wert von $\Phi$ erhält man <u>verschiedene partikuläre Integrale</u>

## II. <u>Die nichtlineare partielle Diff.-Gl. erster Ordnung mit 2 unabhängigen Variabeln:</u>

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0, \qquad \text{wobei } p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y} \text{ bedeuten.}$$

Unter einem <u>Flächenelement</u>: $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0$ versteht man ein durch den Punkt $x_0\, y_0\, z_0$ hindurchgehendes unendlich kleines Ebenenstück dessen Lage bezüglich der Koord.-Ebenen durch $p_0\, q_0$ bestimmt ist. Durch einen Punkt gehen demnach $\infty^2$ Flächenelemente hindurch, und der ganze Raum enthält $\infty^5$ Flächenelemente. Von diesen $\infty^5$ Flächenelementen des Raumes werden durch obige Beziehung (1) $\infty^4$ ausgesondert. Von diesen $\infty^4$ ausgeschiedenen Flächenelementen gehen $\infty^1$ durch einen beliebigen Punkt des Raumes und umhüllen dort einen <u>Elementarkegel</u>, dessen Spitze der Punkt ist.

Bei den linearen partiellen Diff.-Gl. artet dieser Kegel in ein <u>Ebenenbüschel</u> aus, wie es in umstehender Figur veranschaulicht ist. Versteht man unter einer Integralfläche von (1) eine Fläche $z = \varphi(x,y)$, deren sämtliche $\infty^2$ Flächenelemente die Diff.-Gl. (1) befriedigen, so verlangt das Integrationsproblem von (1) alle Flächen zu finden, die in allen ihren Punkten den Elementkegel berühren, der den Punkten $x_0 y_0 z_0$ durch (1): $F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0$ zugeordnet ist. (Oder die Zusammenfassung von je $\infty^2$ der $\infty^4$ Flächenelemente zu einer Integralfläche auf alle möglichen Arten.)

Die Gesamtheit von $\infty^2$ Integralflächen von (1): $f(x, y, z, a, b) = 0$ bildet ein vollständiges Integral der Diff.-Gl. Daraus kann man alle überhaupt möglichen Integralflächen von (1) ableiten. Ist nämlich $z = \varphi(x,y)$ eine Integralfläche, so können 3 Fälle eintreten: I, $z = \varphi(x,y)$ hat alle ihre Flächenelemente mit einer der Flächen $f(x,y,z,a,b) = 0$ gemein, ist also mit darin enthalten. II, $z = \varphi(x,y)$ hat je $\infty^1$ Flächenelemente mit jeder einzelnen Fläche von gewissen $\infty^1$ Flächen der Schar $f(x,y,z,a,b) = 0$ gemein. Dann ist sie Umhüllende der gewissen $\infty^1$ Flächen. III, $z = \varphi(x,y)$ hat mit jeder einzelnen Fläche der Schar $f(x,y,z,a,b) = 0$ nur 1 Element gemein, berührt also jede dieser Flächen in einem Punkt. Sie ist dann als Umhüllende der $\infty^2$ Flächen der vollständigen Lösung durch Elimination von a und b aus

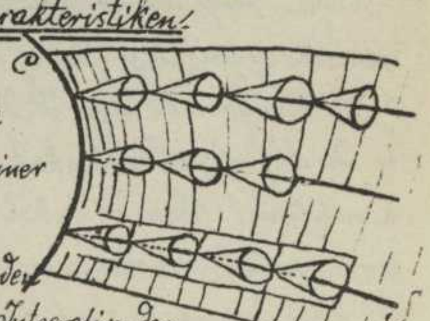
$$\left\{ \begin{array}{l} f(x,y,z,a,b) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial a} = 0 \,; \quad \dfrac{\partial f}{\partial b} = 0 \end{array} \right.$$

bestimmt. Sie heißt dann: Das singuläre Integral der Diff.-Gl.

ad II: Wählt man aus der Schar von $\infty^2$ Flächen $f(x,y,z,a,b) = 0$ dadurch $\infty^1$ Flächen aus, indem man zwischen den Konstanten a, b irgendeine Beziehung $b = \psi(a)$ festsetzt, so bekommt man die Umhüllende dieser $\infty^1$ Flächen durch Elimination von a aus

(2) $\quad f(x,y,z,a,b) = 0 \,; \quad \dfrac{\partial f}{\partial a} + \dfrac{\partial f}{\partial \psi} \cdot \dfrac{\partial \psi}{\partial a} = 0$. Diese Umhüllende ist natürlich ebenfalls Integralfläche. Man nennt die durch die Formeln (2), welche noch die willkürliche Funktion $\psi$ enthalten, definierten Umhüllenden von je $\infty^1$ in der vollständigen Lösung enthaltenen Integralflächen das allgemeine Integral der Diff.-Gl. weil man durch den Umhüllungsprozeß abgesehen von den $\infty^2$ in der allgemeinen Lösung enthaltenen Integralflächen und der singulären Lösung sämtliche Integralflächen ableiten kann. Für $\psi$ eine spezielle Funktion angenommen, gibt ein partikuläres Integral der Diff.-Gl. (1).

## Integration der part. Diff.-Gl. 1. O. mittels der Charakteristiken.




Reiht man die Linienelemente auf einer Integralfläche aneinander, längs welchen der durch die Diff.-Gl. in jedem der Flächenpunkte definierte Elementarkegel die Integralfläche berührt, so erhält man $\infty^1$ Kurven auf einer Integralfläche, die man Charakteristiken der Diff.-Gl. nennt. Die Flächenelemente einer Integralfläche längs einer auf derselben liegenden Charakteristik bilden einen Charakteristischen Streifen S. Auch die Integration der nichtlinearen part. Diff.-Gl. (1) läßt sich mit Hilfe der Integration eines Systems totaler Diff.-Gl., welches eben die Charakteristiken bestimmt, wie bei einer linearen Diff.-Gl. durchführen.

Die Charakteristiken der Diff.-Gl. $F(x,y,z,p,q)=0$ sind durch das System der 4 simultanen totalen Diff.-Gleichungen:

$$\frac{dx}{F_p}=\frac{dy}{F_q}=\frac{dz}{F_p\cdot p+F_q\cdot q}=\frac{dp}{-F_x-F_z\cdot p}=\frac{dq}{-F_y-F_z\cdot q}$$

bestimmt. Dieses System hat 4 voneinander unabhängige Integrale. $F$ selbst ist ein solches. Sind $\Psi_1(x,y,z,p,q)=c_1$, $\Psi_2(x,y,z,p,q)=c_2$, $\Psi_3(x,y,z,p,q)=c_3$ die 3 anderen voneinander unabhängigen (und auch von $F$ unabhängigen) Integrale des Systems, so ergeben sich die endlichen Gleichungen der Charakteristiken durch Elimination von $p$ und $q$ aus $F=0$, $\Psi_1=c_1$, $\Psi_2=c_2$, $\Psi_3=c_3$ in der Form:

$$\Phi_1(x,y,z,c_1,c_2,c_3)=0$$
$$\Phi_2(x,y,z,c_1,c_2,c_3)=0.$$

Es gibt demnach $\infty^3$ verschiedene Charakteristiken. Durch beliebige Auswahl von $\infty^1$ derselben erhält man ein Integral von $F(x,y,z,p,q)=0$.

## Aufgaben.

1) Man integriere: a) $xz\cdot p+yz\cdot q=x\cdot y$; b) $p-z\cdot q=x+y$ c) $z\cdot p+x\cdot q+x=0$; welche Integralfläche wird von der Kurve $x+y=r$, $z=0$ aufgefangen? (im letzten Fall c))

2) Bei welchen Flächen verhalten sich die Abschnitte der Tangentialebene im Punkt $x,y,z$ auf der $x$- und $y$-Achse stets wie $x:y$? Welche spezielle Fläche dieser Art schneidet die Ebene $x=z$ in der Parabel $z=\frac{1}{3}y^2$?

3) Als vollständige Lösung nehme man die $\infty^2$ Ebenen an, die vom Anf.-Punkt den Abstand 1 haben. Wie lautet die Diff.-Gl.? Man gebe das allgemeine, das singuläre u. ein partikul. Int. an.

4) Gegeben ist die Diff.-Gl. $z-px-qy-\frac{p^2+q^2}{2}=0$. Man bestimme die charakt. Streifen, zeige daß die Trägerkurven Tangenten an das Paraboloid $z=-\frac{x^2+y^2}{2}$ sind und gebe eine vollständige Lösung an.

5) Man integriere die Diff.-Gl. der Kanalflächen: $z^2(1+p^2+q^2)-1=0$.

6) Die Abflußgeschwindigkeit in einem Gerinne sei der Quadratwurzel aus der Wasserhöhe $y$ proportional. Wegen der Undichtigkeit des Gerinnes möge in der Zeiteinheit eine der Wasserhöhe proportionale Wassermenge verloren gehen. Man untersuche den Verlauf des Abflusses.

7) Man versuche die auf Blatt № 8 von H.M. III. pag. 3 angegebene partielle Diff.-Gl. für den integrierenden Faktor $\mu$ zu lösen.

8) Wie findet man die Gleichung für den Elementarkegel in einem Punkt, wenn $F(x,y,z,p,q)=0$ gegeben ist?

$y = p^2 + 2p^3$.

$p = 2pp' + 6p^2p' = 2p'(p + 3p^2)$

$2p' = \frac{1}{1+3p}$, $2\,dp(1+3p) = dx$

$\frac{1-t^2}{2t^2}\,dt : \frac{-1+t^2}{2t}$

$p^2 - 2p\frac{x}{y} + 1 = 0$

$2p + 3p^2 = x - C$

$p = \frac{x}{y} \pm \sqrt{\frac{x^2}{y^2} - 1}$ $\quad x = 2p + 3p^2 + C$

$= \frac{-dt}{t}$

$y = p^2 + 2p^3$

$p = (2p + 6p^2)p'$ $\quad x = \int dp\,(2+6p) = 2p + 3p^2 + C$ $\quad = -\ln t$

$x - x_0 = 2p + 3p^2 \cancel{+ C}$ | $p$

$y = p^2 + 2p^3$ | $2$

$p(x-x_0) - 2y = \cancel{3}p^3$

$2p^3 + p^2 - y = 0$ | $3$

$-3 \quad 3p^2 + 2p - (x - x_0) = 0$ | $2p$

$\cancel{3p^2} - p^2 - 3y + 2p(x - x_0) = 0$

$\frac{y}{x} = z$

$y = xz$

$p^2 - 2p(x - x_0) + 3y = 0$ | $3$

$3p^2 + 2p - (x - x_0) = 0$ | $-1$

$-xz' + z = z + \sqrt{z^2 - 1}$

$\ln x = \ln\left(\sqrt{z^2 - 1} - z\right)$

$\cancel{2p(1} \quad -2p(1 + 3(x - x_0)) + 9y = 0$

$\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{dx}{x}$

$\frac{x}{y} = z$, $y = \frac{x}{z}$, $p = \frac{-xz' + z}{z^2}$

$p = \frac{9y}{2(1 + 3(x - x_0))}$ $\quad x = \sqrt{\frac{x^2}{y^2} - 1} - \frac{x}{y}$

$x' = 2 + 6p$

$x - x_0 = \frac{9y}{1 + 3(x - x_0)} + 3\frac{81y^2}{4(1 + 3(x - x_0))^2}$

$z = \sqrt{z^2 - 1} = z + t$

$p = xz' + z$

$p = -\frac{1}{3}$

$-1 = 2zt + t^2$

$4(x - x_0)(1 + 3(x - x_0))^2 + \quad xy = \sqrt{x^2 - y^2} - x \quad 3, 0.$

$z = -\frac{1 - t^2}{2t}$

~~Obstatur~~ Diujulte ).. : $x^2(y-1)^2 = x^2 - y^2$

$y = p^2 + 2p^3$

1) $y = 0$ ~~Erste~~ Einhüllende. $2p + 6p^2 = 0$, 1) $p = 0$, 2) $p = -\frac{1}{3}$

2) $y = \frac{1}{27}$. Ort d. Spitzen. $x^2y^2 - 2x^3y + y^2 = 0$

$\frac{1}{9} - \frac{2}{27} = \frac{1}{27}$

$x^2y - 2x^3 + y = 0$

$p = 0 \quad x = 1 \quad x' = 0$

$y^2 - x^2 = 0$

Spitzen. $y' = 0$

$p$

$y^2 + x^2 - 2x^2y = 0$

$xz' + z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z}$

$x = 1 + p^2$.

$x = 1 + p^2$

$y\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{2x^2}{y} = 0$,

$\cancel{1 =} 2p \cdot p'$,

$\frac{1}{p} = 2p \cdot \frac{dp}{dy}$, $dy = 2p^2 dp$

$\cancel{x = p + C}$

$y = \frac{2p^3}{3} + C$

$p = \sqrt{x - 1}$

$\sqrt{x - 1} = z$

$dz = \frac{-2t\,dt}{2t}$

$2z\,dz = dx$

$y - y_0 = \frac{2}{3}\sqrt{x-1}^3$, $(y - y_0)^2 = \frac{4}{9}(x-1)^3$.

$\frac{(1+t^2)\,dt}{2t^2}$

$y = \int dx\,\sqrt{x - 1} = \int 2z\,dz \cdot z = \frac{2}{3}z^3$

$y - y_0 = \frac{2}{3}\sqrt{x-1}^3$

$2py - 2x = 0$, $p = \frac{x}{y}$ $\quad \frac{2 - 2t^2}{4t^2} = \frac{1 - t^2}{2t^2}\,dt$ $\quad \frac{-2t(2t) + (1-t^2)2\frac{1}{2}dt}{4t^2}\,dt$

576

Saal 37. 2 Uhr

$$\cancel{p} = \cancel{p} + (x+1)p' - 2pp'$$

$$p'(x+1) = 2pp'$$

$2dy = (x+1)dx$ 1) $p' = 0$ $y' = \text{const}$

$$n\left(1 - \frac{n^2+2n+1}{n^2+3n}\right)$$

$y = ax + b$

$$ax + b = (x+1)a - a^2$$

$$n\left(\frac{\cancel{n^2} + \cancel{3}n - \cancel{n^2} - \cancel{2n} - 1}{n^2+3n}\right) = \frac{n^2-n}{n^2+3n} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}$$

$$ax + b = ax + a - a^2$$

$$b = a(1-a)$$

$$\frac{1+\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)(n+3)} = \frac{1}{n+3}$$

$y = C(x+1-C)$

$4y = \frac{(x+1)^2}{4}$ Sing. Lös.

$4p = 2(x+1)$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + 3\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$p^3 - 7p + 6 = 0$$

1) $p = 1$

2) $p = 2$

3) $p = -3$

$$(p^3 - 7p + 6) : (p-1) = p^2 + p - 6$$

$p^3 - p^2$

$p^2 - 7p$

$p^2 - p$

$-6p + 6$

1) $y = x + C_1$

2) $y = 2x + C_2$

3) $y = 3x + C_3$

~~Elektronen: Kenntnis~~

$$y = xp + p(1-p)$$

$$\cancel{p} = xp' + \cancel{p} + p' - 2pp'$$

$p' = 0$

$0 = x + 1 - 2p$

$$y = \frac{(x+1)(x+1)}{2} - \frac{(x+1)^2}{4} = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$$

18. VI. 12. Höhere Mathematik IV. № 5

## Lineare partielle Differentialgleichungen 2ter O. mit konstanten Koeffizienten.

a) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ hat die Lösung: $z = X(x)\cdot y + X_1(x)$;

b) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ " " " : $z = X(x) + Y(y)$;

c) Die Differentialgleichung der schwingenden Saite: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$,

wobei x den Abstand eines schwingenden Punktes von einem willkürlichen Anf.-Punkt, t die Zeit von einem willkürlichen Moment an gemessen und u den Ausschlag bedeutet, kann durch die Substitution: $x + t = \xi$, $y - t = \eta$ nach d'Alembert u. Euler in die Diff.-Gl.: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ übergeführt werden und hat daher

als Lösung: $u = \Phi(x+t) + \Psi(x-t)$ ............ (1)

wobei $\phi$ und $\psi$ zwei willkürliche Funktionen ihres Arguments bedeuten.

Die Funktionen $\phi$ und $\psi$ werden aus den Anf.-Bedingungen der Bewegung bestimmt. Es genügt, für $t=0$ den Ausschlag u (die Gestalt der Saite) und die Geschwindigkeit $\frac{\partial u}{\partial t}$ sämtlicher Punkte der Saite zu kennen. Es sei demnach für den Anfang:

$t = 0$; $u = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t} = g(x)$.

Man hat dann: $\phi(x) + \psi(x) = f(x)$

$\phi'(x) - \psi'(x) = g(x)$ oder: $\phi(x) - \psi(x) = \int_0^x g(x)dx + \phi(0) - \psi(0)$

woraus folgt: $\Phi(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + \int_0^x g(x)dx + \phi(0) - \psi(0)\right]$

$\psi(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) - \int_0^x g(x)dx - \phi(0) + \psi(0)\right]$

also:

$$(2) \qquad u = \Phi(x+t) + \psi(x+t) = \frac{1}{2}f(x+t) + \frac{1}{2}f(x-t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(x)\,dx$$

welcher Ausdruck der Diff.-Gleichung identisch genügt, wenn die Funktion $f(x) = u$ überall einen bestimmten zweiten und $g(x)$ überall einen bestimmten ersten Diff.-Quot. hat. Ist 1) von den beiden Funktionen $\phi$ und $\psi$ nur eine von Null verschieden, ist also $u = \phi(x+t)$, so sagt diese Gleichung aus, daß derselbe Ausschlag, der zur Zeit t an der Stelle x vorhanden ist, zur Zeit t+dt an der Stelle x−dx stattfindet: Der Bewegungszustand schreitet mit der konst. Geschwindigkeit 1 von rechts nach links. Ist 2) $u = \psi(x-t)$ dann schreitet analog der Bew.-Zust. von links nach rechts. 3) Die allgemeine Lösung $u = \phi(x+t) + \psi(x-t)$ setzt sich daher zusammen aus der Übereinanderlagerung zweier Bewegungen von welchen die erste beständig nach links, die zweite beständig nach rechts vorschreitet.

### I) Fall der unendlich langen Saite.

Dann ist $f(x)$ und $g(x)$ für jeden Wert von x bestimmt und u durch (2) für alle Zeiten definiert.

1) Angenommen, $g(x) = 0$ für alle Werte von x und $f(x)$ habe nur für eine kleine Stelle um den Nullpunkt

einen von Null verschiedenen Wert: $f(x) \neq 0$, wenn $-b < x < +b$, und $g(x)$ immer $= 0$.

Dann lautet die Lösung (2):

$$u=\frac{1}{2}\left[f(x+t)+f(x-t)\right].$$

Betrachtet man dann irgendeinen festen Wert von $t$, so gilt:

nur, wenn $-t-b < x < -t+b$, ist $f(x+t) \neq 0$

nur, wenn $t-b < x < t+b$, ist $f(x-t) \neq 0$.

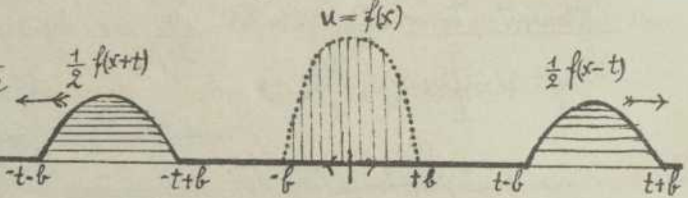
Wenn also $t > b$ ist, so ist $u=0$, wenn keine dieser beiden Ungleichungen erfüllt ist, also

wenn
1) $x < -t-b$ oder:
2) $-t+b < x < t-b$ oder:
3) $x > t+b$

dann $u = 0$, und: $u$ ist nur dann von Null verschieden, wenn eine der beiden sich ausschließenden Ungleichungen erfüllt sind.

Resultat:

Es teilt sich die ursprüngliche Ausbuchtung der Saite in 2 halb so große, welche mit der Geschwindigkeit 1 nach links bezw. nach rechts fortschreiten. Außerhalb dieser fortschreitenden Welle befindet sich die Saite im Gleichgewicht.




B. Eine durch $u=f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}=g(x)$ willkürlich gegebene Anfangsstörung braucht sich nicht immer in 2 Partialstörungen nach beiden Richtungen fortzupflanzen, sondern unter bestimmten Bedingungen tritt eine Fortpflanzung entweder nur nach der einen oder nur nach der anderen Richtung ein. Eine Fortpflanzung nach beiden Seiten tritt, wie Formel (2) zeigt, dann immer ein, wenn die Anf.-Geschw. in jedem Punkt gleich dem Diff.-Quot. des Anf.-Ausschlages nach der Zeit gleich ist, also wenn: $\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x) = \frac{\partial u}{\partial t} = g(x)$; Dann lautet (2): $u = f(x+t) + f(x-t)$.

Diese Bedingung ist aber realisiert, sobald eine Anf. Störung sich völlig in 2 Teile getrennt hat. In dem einen Teil ist dann beständig: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$ und in dem andern beständig: $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}$. Um eine Störung herzustellen, die nur nach der einen oder nur nach der andern Seite fortschreitet, sind bestimmte Bedingungen zwischen $f(x)$ und $g(x)$ herzustellen. Diese sind aber völlig realisiert, sobald sich die Störung in einer nach links u. einer nach rechts gehenden Fortschreitung ausbreitet.

Aufgaben.

1) Man leite die Diff.-Gl. der Saitenschwingungen ab, indem man annehme, daß die Saite an 2 Punkten A und B mit der Spannung P befestigt sei, aus der Ruhelage gebracht werde und zwar in so kleine Entfernung aus derselben, daß die Änderung der Spannung gegenüber der ursprünglichen zu vernachlässigen ist.

2) Man führe $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ in $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ über!

3) Man diskutiere nach Beispiel A) den Fall: $f(x)=0$ für alle Werte von $x$, ebenso $g(x)=0$ außerhalb $-b<x<+b$.

4) Zur Repetition: a) Gesucht ist das Volumen des Körpers, begrenzt von der Fläche $z = \cos(x+y)$, der $z$-Ebene, und den Ebenen $x=a$; $x=b$; $y=c$; $y=d$! b) Man suche die Diskriminantenkurve der Diff.-Gl.:
$y+(y-x)y'+(a-x)y'^2=0$. Ist sie singuläre Lösung? c) $y = x^2 + y'^2$ (durch Differenzieren!)

25. VI. 12. Höhere Mathematik IV. №6

## II, Fall der begrenzten Saite.

A) Einseitig begrenzte Saite. Angenommen, die Saite erstrecke sich längs der positiven x-Achse ins Unendliche. Ferner sei $g(x)$ stets $= 0$, und $f(x)$ nur für die Stelle $a < x < b$ von Null verschieden, wo $a$ und $b$ 2 positive Zahlen bedeuten. Dann lautet die allgemeine Lösung:

$$(1) \quad u = \frac{1}{2} f(x+t) + \frac{1}{2} f(x-t)$$

wobei $f$ zunächst nur für positive Werte des Argumentes definiert ist.

Die Nebenbedingung: $u$ beständig $= 0$ für $x = 0$, also:

$$(2) \quad 0 = \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2} f(-t)$$

erlaubt dann, die Funktion $f$ auch für irgendein negatives Argument zu definieren:

$$(2') \quad f(-t) = -f(t);$$

Infolge dieser Beziehung ist dann nicht nur:

$f(x) \neq 0$, wenn: (4) $a < x < b$

sondern auch: $f(x) \neq 0$, " (5) $-b < x < -a$.

Der erste Bestandteil von (1) stellt eine Welle $W_1$ dar, welche nach links geht und existiert, so lange (4') $a < x+t < b$, also $a-t < x < b-t$

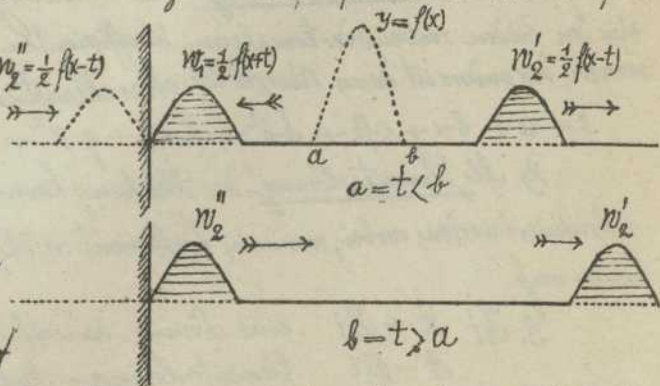
Diese Welle $W_1 = \frac{1}{2} f(x+t)$ verschwindet aber, sobald $t = b$ wird, da es dann kein positives $x$ mehr gibt, für das die Ungleichung (4') auch nur teilweise erfüllt ist. Ungleichung (5) ist für Welle $W_1$ für kein positives $x$ erfüllt.

Der zweite Bestandteil von (1) stellt eine Welle $W_2 = \frac{1}{2} f(x-t)$ dar, welche nach rechts fortschreitet.

Für diese Welle ist die Bedingung (4'') $a+t < x < b+t$ immer erfüllt; die Bedingung:

(5'') $-b < x-t < -a$ oder:

$-b+t < x < -a+t$ beginnt sich für positive Werte von $x$ zu erfüllen, sobald $t = a$ wird und ist von $t = b$ ab vollständig erfüllt. Die Welle $W_2$ besteht also aus zwei Partialwellen: $W_2'$ und $W_2''$. $W_2'$ schreitet von Anfang an nach rechts, $W_2''$ ist anfänglich $= 0$, schreitet von der negativen Seite der x-Achse kommend nach rechts, und diese gedachte Welle erscheint reell für $t = b$ an dem begrenzten Saitenende in demselben Moment als die von rechts nach links fortschreitende Welle $W_1$ dieses Ende erreichend, dort verschwindet. Sie stellt die zu $W_1$ reflektierte Welle dar.




B. Die Diskussion der beiderseits begrenzten Saite erfolgt analog. Sind die Grenzen $x = 0$ und $x = 1$, so ist $f(x,$

nur für dieses Intervall zunächst definiert. <u>Die Grenzbedingungen:</u> $0=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(t)$

erlauben dann, die Definition von $f(x)$ über das Intervall $0=\frac{1}{2}f(1+t)+\frac{1}{2}f(1-t)$

$0<x<1$ hinaus beliebig auszudehnen, zunächst für das Intervall $1<x<2$, dann für $-1<x<0$ u.s.f.

c') <u>Die allgemeine Diff.-Gl. der schwingenden Saite:</u>

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{worin } a^2=\frac{P}{q\cdot\sigma}=\frac{\text{Spannung}}{\text{Querschnitt}\times\text{Dichte}}$$

bedeutet, wird durch die Substitution $a\cdot t=\tau$ auf den behandelte Form: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}$ zurückgeführt.

c) <u>Die Differentialgleichung:</u>

$$a\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+c\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

wo $a, b, c$ Konstante bedeuten, kann durch die Substitution $\xi=\alpha x+\beta t$, $\eta=\gamma x+\delta t$ ebenfalls auf die Form: $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$ gebracht werden; Die Konstanten $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ müssen so gewählt werden, daß $\frac{\alpha}{\beta}=\lambda_1$, $\frac{\gamma}{\delta}=\lambda_2$ als Wurzeln der Gleichung $\lambda^2 a+2b\lambda+c=0$ erscheinen.

d) Der spezielle Fall von c): $a=c=1$, $b=0$ führt zur

<u>Laplace'schen Diff.-Gl.:</u> $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ mit der Lösung: $u=f_1(x+iy)+f_2(x-iy)$.

Sowohl der reelle Teil $U$ als auch der rein imaginäre Teil $V$ einer analytischen Funktion komplexen Argumentes $f(x+iy)=U(x,y)+iV(x,y)$ genügt dieser Diff. Gl.

e) <u>Die lineare partielle Diff.-Gl. beliebiger Ordnung mit konstanten Koeffizienten:</u>

$$0=a\cdot u+b\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+c\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+d\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+g\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\cdots$$

1) Eine „<u>Elementarlösung</u>" der Gleichung ist ein Ausdruck von der Form: $\underline{u=e^{\alpha x+\beta t}}$.
Von den beiden reellen oder komplexen Koeffizienten $\alpha$ und $\beta$ kann der eine willkürlich angenomen werden, der andere ist dann Wurzel der charakteristischen oder determinierenden Gleichung:

$$0=a+b\alpha+c\cdot\beta+d\cdot\alpha^2+f\cdot\alpha\beta+g\cdot\beta^2+\cdots$$

2) Als „<u>Elementarlösung</u>" der Gleichung kann auch ein Ausdruck von der Form: $\underline{u=\cos\alpha x\cos\beta t}$ substituiert werden, wobei, wenn ein Koeffizient willkürlich angenommen wird, der andere analog bestimt werden muß.

3. Ist $A+Bi$ eine Lösung der Diff. Gl., so ist auch $A-Bi$ Elementarlösung. Aus dem Superpositionsprinzip, welches bei linearen Diff.-Gleichungen anwendbar ist, folgt dann der <u>allgemeine Satz</u>: <u>Wenn man von einer komplexen Lösung $(A+Bi)$ nur den reellen Teil $(A)$ für sich nimmt oder nur den Faktor $(B)$ von $i$ für sich nimmt, so bekommt man wieder eine Lösung der Differentialgleichung.</u>

f) Die Differentialgleichung der Wärmeleitung in einem Stab, wenn von der Wärmeabgabe nach außen abgesehen wird: $\frac{\partial u}{\partial \tau} = a \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, wobei $u$ die Temperatur, $\tau$ die Zeit, $a = \frac{k}{\rho c} = \frac{\text{Wärme Leitfähigkeit}}{\text{Dichte} \times \text{spez. Wärme}}$ bedeuten. $a$ heißt die Temperaturleitungsfähigkeit.

Wir substituieren $a \cdot \tau = t$

und benutzen die Form: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ Die Substitution $u = e^{Ax+Bt}$ zeigt, daß $u = e^{Ax+A^2t}$ Elementarlösung ist.

Setzt man: 1) $B = A^2 = -\alpha^2$, so wird die Elementarlösung, wenn wir der reelle Teil davon benützt wird: $u = \cos\alpha x \cdot e^{-\alpha^2 t}$ welches El. Lösung der Diff. Gl. ist, wenn die Temperaturverteilung für $t = 0$ gegeben ist.

(Z. B. Das Problem der Wärmeausbreitung in einem Stab von der Länge $\frac{\pi}{\alpha}$, wenn die Enden $\pm\frac{\pi}{2\alpha}$ auf der Temperatur $u = 0$ gehalten werden)

Setzt man 2) $B = A^2 = 2i\beta_1$ und $A = \alpha_1 + i\alpha_2$, so ist $u = e^{-\sqrt{\beta_1}x(1+i)} \cdot e^{2i\beta_1 t}$ oder mit Beschränkung auf den reellen Teil:

$$u = e^{-\sqrt{\beta_1}\cdot x} \cdot \cos(2\beta_1 t - \sqrt{\beta_1} x)$$

Diese Lösung gilt für einen Stab (oder überhaupt für ein lineares Medium) der nach außen keine Wärme abgibt und an dessen Anfangspunkt die Temperatur eine harmonische Schwingung durchmacht, und dient insbesondere zur Diskussion der Fortpflanzung der täglichen und jährlichen Temperaturschwankungen in das Erdinnere. Diese Temperaturschwankung ist (für $x = 0$) gegeben durch: $u = \cos 2\beta_1 t$

Die Amplitude der Temperaturänderung ist an der Oberfläche ($x = 0$) $= 1$, in der Tiefe $x$ gleich $e^{-\sqrt{\beta_1}x}$, sie nimmt also exponentiell mit der Tiefe ab. Die Periode der Temp.-Schwankung $T = \frac{\pi}{\beta_1}$; In Verbindung mit dem vorigen folgt daraus, daß die Amplitud. der täglichen Temperaturschwankungen (großes $\beta_1$) rascher mit der Tiefe abnehmen als diejenigen der jährlichen Temperaturschwankungen (kleines $\beta_1$) welche tiefer in das Erdinnere eindringen. Die Maxima der Temperatur, welche an der Oberfläche zur Zeit $t_1 = \frac{n\pi}{\beta_1}$ auftreten, treten in einer bestimmten Tiefe $x$ erst auf, wenn $2\beta_1 t - \sqrt{\beta_1} x = 2n\pi$ also wenn:

$$t = \frac{x}{2\sqrt{\beta_1}} + t_1$$ d.h. um die Zeit $\frac{x}{2\sqrt{\beta_1}}$ später als an der Oberfläche. Nennen wir

$\frac{x}{\frac{x}{2\sqrt{\beta_1}}}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle, $= 2\sqrt{\beta_1} = 2\sqrt{\frac{\pi}{T}}$, so erkennt man, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit um so größer ist, je kleiner die Schwingungsdauer ist. Es pflanzen sich deshalb die täglichen Änderungen viel schneller in die Tiefe fort als die jährlichen Änderungen.

## Aufgaben.

1) Man leite die Diff.-Gl. der Wärmebewegung: $\frac{\partial u}{\partial t} = a\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\cdot u$ in einem Stab ab, wenn die Enden desselben auf den konstanten Temperaturen $t_1$ und $t_2$ gehalten werden, der Stab die Länge $l$, den Querschnitt $q$ und die Wärmeleitungsfähigkeit $k$ besitzt, und sich in einem Medium von konstanter Temperatur $t_3$ befindet. An dasselbe gibt er eine Wärmemenge ab, welche der Temperaturdifferenz zwischen Stab und Umgebung und der Oberfläche proportional ist.
Dann zeige man, daß obige Diff.-Gl. durch die Substitution $u = v\cdot e^{-bt}$ in $\frac{\partial v}{\partial u} = a\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ übergeht.

2) Man integriere: a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + 2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, b) $u + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0$

3) Man zeige, daß sowohl der reelle, als der imaginäre Teil von $\varphi = (x+iy)^3$ der Laplaceschen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ genügt.

4) Bei einer mittleren Jahrestemperatur von 10° und einer Jahresamplitude von 40° zeigt ein Thermometer in 10 m Bodentiefe eine Schwankung von nur 0,2°. Man berechne daraus das Temperaturleitungsvermögen der betr. Bodenschicht (a). Wie tief dringt der Frost ein? Wann wird die äußerste Frostgrenze erreicht?

5) Wie tief dringt eine tägliche Temperaturschwankung von 12° in diesen Boden ein, bis sie auf 0,1° abgeschwächt ist?

### Zur Repetition:

1) $x^2\cdot y'' + 3xy' + y = x + 1$. 2) $(1-x^2)y'' - xy' = 0$ (H. M. III. № 12. pag. 4.)

3) Man berechne das Volumen desjenigen Stückes des über dem Kreise $x^2+y^2=1$ errichteten Kreiszylinders, das zwischen den Grenzflächen $z = 0$ und $z = \sqrt{4-(x+1)^2-y^2}$ eingeschlossen ist.

4) Durch einen gegebenen Punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$ lege man eine Ebene so, daß ihre Schnittkurve mit dem Hyperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ sich in der xy-Ebene als Kreis projiziert!

5) Gegeben ist die Parabel: $y^2 = 2px$. Man bestimme die Halbachsen a und b einer Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ so, daß die Ellipse durch den Brennpunkt der Parabel geht und beide Kurven sich senkrecht schneiden!

6) Durch Differentiation nach dem Parameter leite man aus $\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{4a}$ ein neues bestimmtes Integral ab! ebenso aus $\int_0^\infty e^{-nz}\,dz = \frac{1}{n}$! H. M. III. c № 8

7) Man integriere: $y' = \log y + x$; $y'' = xy^2$ durch Reihenentwicklung (beim ersten Beispiel für $y_0 = 1$); $y\cdot y'' = y'^2$; $2y\log x\cdot dy + (\frac{y^2}{x}+1)\,dx = 0$; $y = 2px + \frac{1}{p^3}$!

2.VI.12. Höhere Mathematik IV. № 7.

# Fouriersche Reihen.

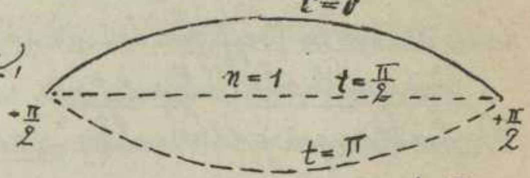
Als Vorbemerkung: Nach Blatt № 6 $e_2$ ist:

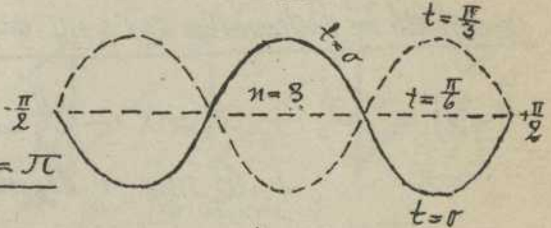
$$u = \cos nt \cdot \cos nx$$

Elementarlösung von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (Brook Taylor). Schwingt eine Saite von der Länge $l = \pi$ mit den festen Endpunkten $x = -\frac{\pi}{2}$ und $x = +\frac{\pi}{2}$ nach diesem Gesetz, so befindet sie sich in stehender Schwingung. Für $n = 1$ gibt das obige Gesetz diejenige Schwingung der Saite an, welche dem Grundton derselben entspricht, und für $n = 3, = 5, = 7$ etc. harmonischen Obertönen entsprechende Schwingungen. (Fig. $n = 1$, $n = 3$)

Die Schwingungszahlen dieser Töne sind bezw: $\frac{1}{2l}, \frac{3}{2l}, \frac{5}{2l}, \frac{7}{2l}$ etc.

Derartige Lösungen nennt man die zu den Endpunkten $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = +\frac{\pi}{2}$ ausgezeichnete Lösungen, und die dazugehörigen Zahlen $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$ die Eigenwerte des betr. Problems.




Als Lösung des allgemeinen Problems der stehenden Schwingungen einer Saite von der Länge $\pi$ und den festen Endpunkten $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$ kann dann angesetzt werden:

$$u = \sum_1^\infty n \left( A_n \cdot \cos nt + B_n \cdot \sin nt \right) \cdot \sin nx$$

(Lösung von Daniel Bernoulli).

Die Saite gibt hier den Grundton ($n = 1$) an und gleichzeitig alle ihre Obertöne ($n = 2, 3, 4, 5, \ldots$) Diese Gleichung entspricht demnach bei einer zweckmäßigen Anzahl von Gliedern einem bestimmten Klang der Saite.

Aus dieser Darstellung folgt, daß sich die willkürlich gegebene Anfangslage $f(x)$ und die willkürlich angenommene Anfangsgeschwindigkeit der Saitenteilchen

$g(x)$ durch zusammengesetzte sinus-Linien ausdrücken lassen:

$$\left.\begin{aligned} f(x) = u_{t=0} &= \sum_1^\infty A_n \cdot \sin nx \\ g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}_{t=0} &= \sum_1^\infty n B_n \sin nx . \end{aligned}\right\}$$

Dieses Problem führt demnach zu der allgemeinen Frage:
Kann eine beliebig vorgegebene Funktion $f(x)$ in einem Intervall, etwa $-\pi \leq x \leq +\pi$ durch eine Reihe der Form: $f(x) = \sum_0^\infty A_n \cos nx = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \cdots\cdots$

oder auch von der Form: $f(x) = \sum_0^\infty B_n \sin nx = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \cdots\cdot$
mit beliebiger Genauigkeit dargestellt werden?

Auf Blatt № 7 von H.M. II ist bereits gezeigt worden, wie durch eine endliche Anzahl von Punkten $x_i, y_i$ der $xy$-Ebene, deren Abszissen $x_i$ einem bestimmten Intervall, etwa $-\pi < x_i < +\pi$ angehören eine solche periodische zusammengesetzte Sinus- oder Cosinuslinie gelegt werden kann und wie die Koeffizienten in den endlichen Reihen zu berechnen sind (<u>Trigonometrische Interpolation</u>). Die Ausdehnung auf den Fall unendlich vieler Punkte, (<u>Beobachtungen</u>) führt auf die <u>Darstellung einer beliebig vorgegebenen Funktion $f(x)$ innerhalb des Intervalles $-\pi \leq x \leq +\pi$ durch eine sogenannte Fouriersche Reihe</u>:

$$\begin{aligned} f(x) = A_0 &+ A_1 \cos x + A_2 \cdot \cos 2x + A_3 \cos 3x + \cdots\cdot \\ &+ B_1 \sin x + B_2 \cdot \sin 2x + B_3 \sin 3x + \cdots\cdot \end{aligned} \qquad (A)$$

## Hilfsformeln:

1) $$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0 \qquad \text{in jeden Fall von } m, n.$$

2) $$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{wenn } m \neq n \\ \pi & \text{,, } m = n \neq 0 \\ 2\pi & \text{,, } m = n = 0 \end{cases}$$

3. $$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{wenn } m \neq n \\ \pi & \text{,, } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{,, } m = n = 0 \end{cases}$$

Angenommen, es sei möglich, $f(x)$ in eine Reihe (A) zu entwickeln, und angenommen, diese Reihe sei so beschaffen, daß es erlaubt ist, dieselbe gliedweise zu integrieren, so gelangt man durch Multiplikation der beiden Seiten von (A) mit $f(x)$ und gliedweise Integration zu folgenden Werten der Koeffizienten:

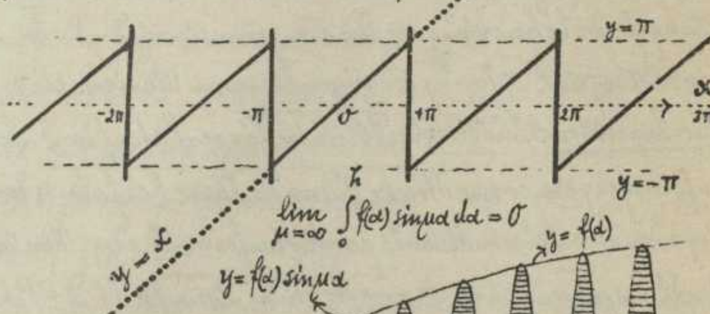
$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx\,; \quad (n \neq 0) \qquad A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx\,; \qquad B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx\,;$$

Wenn also eine derartig beschaffene Entwicklung möglich ist, dann haben die Koeffizienten diese Werte. (A) nimmt dann die Form an:

$$f(x) = A_0 + \sum_1^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\left\{\cos nx\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha + \sin nx\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha\right\} \text{ oder}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cdot\cos n(x-\alpha)\,d\alpha$$

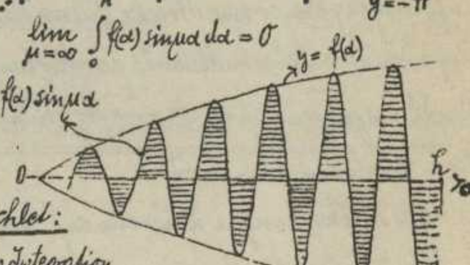
Die Entwicklung gilt nur für das Intervall zwischen $-\pi$ und $+\pi$, außerhalb desselben nicht. Setzt man beispielsweise $f(x) = x$, so stellt in der Figur der stark gezeichnete periodische Kurvenzug, die durch die Reihe definierte Funktion dar, welche mit $f(x)$ nur innerhalb des Intervalles $-\pi$ und $+\pi$ übereinstimmt.




Die Gleichung:

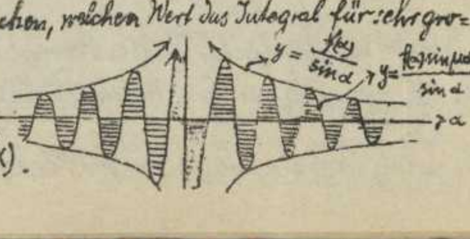
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\alpha\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}\alpha\cdot\cos n(x-\alpha)\,d\alpha = x$$

ist daher nur richtig, solange $x$ im Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$ bleibt.




Grundidee des Beweises der Konvergenz der Fourierschen Reihe nach Dirichlet:

Man betrachtet zunächst eine endliche Summe, bei welcher die Reihenfolge von Integration und Summation vertauschbar ist. Dann kommt es darauf an das nach Summation unter dem Integralzeichen erhaltene Integral: $\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin\mu\alpha}{\sin\alpha}\,d\alpha$ zu betrachten, und zu sehen, welchen Wert das Integral für sehr große Werte von $\mu$ annimmt.




Dieses Integral konvergiert, wie die beiden Figuren veranschaulichen, für $\alpha=0$ gegen $2\pi\cdot f(0)$ also, wenn an Stelle von $\alpha$, $x-\alpha$ gesetzt wird, gegen $2\pi f(x)$.

Transformation der Reihe für ein beliebiges Intervall. Durch die Substitution $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\pi}\cdot\xi$ wird das Intervall $\xi$ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ auf das Intervall $x$ zwischen $a$ und $b$ punktweise umkehrbar eindeutig transformiert. $\xi = \frac{2\pi}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$

Dann wird auch $\alpha = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\pi}\beta$; $d\alpha = \frac{b-a}{2\pi}\,d\beta$

$\beta = \frac{2\pi}{b-a}\left\{\alpha - \frac{a+b}{2}\right\}$; $d\beta = \frac{2\pi}{b-a}\cdot d\alpha$. Soll nun $f(x)$ für das Intervall von $a$ bis $b$ in eine Fouriersche Reihe entwickelt werden, so führe man statt $x$, $\xi$ ein. Dann geht $f(x)$ über in $\varphi(\xi)$ und man erhält:

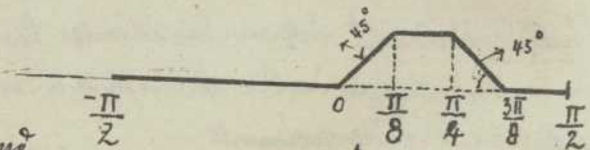
$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\beta)\,d\beta + \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\beta)\cos(n\xi - n\beta)\,d\beta$$

$$= f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(\alpha)\,d\alpha + \frac{2}{b-a}\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\int_a^b f(\alpha)\cos\left\{(nx - n\alpha)\frac{2\pi}{b-a}\right\}d\alpha$$

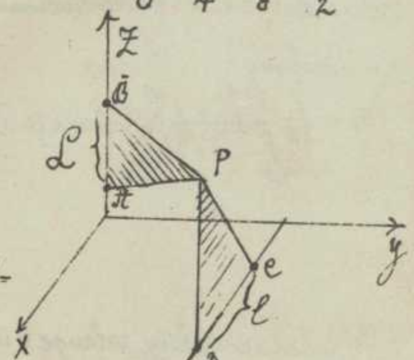
## Aufgaben.

1) Man entwickle a) $y = x$; b) $y = x^2$ c) $y = \sin\frac{x}{2}$ d) $y = \cosh x$ in Fouriersche Reihen von der Periode $2\pi$ oder auch einer beliebigen Periode.

2) Ein Linienzug besteht im Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$ aus den nebengezeichneten Geradenstücken. Man gebe die Entwicklung des Linienzuges in sin. und cos. Reihen an! (Typus der angeschlagenen Klaviersaite)




Zur Repetition: 1) Eine Strecke $AB$ von der Länge $L$ ist auf der $Z$-Achse aufgetragen, ebenso eine Strecke $CD$ von der Länge $l$ auf einer in der $xy$-Ebene liegenden der $x$-Achse im Abstand $a$ parallel laufenden Geraden. Man sucht einen Punkt $P$, so gelegen, daß die Summe der beiden Dreiecke $PCD + PAB$ inhaltlich möglichst klein wird.




2) Stelle die Gleichungen der Geraden auf, deren Punkte von den 3 festen Punkten $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)(x_3\, y_3\, z_3)$ gleichen Abstand haben.

3) Die Kurve: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $z = \frac{a\cdot b}{2}\sin 2t$ entsteht durch die Durchdringung des Paraboloids $z = xy$ mit einem Zylinder von elliptischer Basis. Beweis! Man berechne die erste Krümmung im Punkte $t = 0$.

4) $\frac{z^2}{y}\cdot p + x\cdot q = \frac{x}{z}$; Welche Fläche enthält die Gerade $x = z$, $y = 1$ in sich?

5) Art, Größe u. Lage von der Fläche: $2x^2 + 2xz + y^2 + z^2 - 4z = 1$ zu bestimmen!

9. VII. 12. Höhere Mathematik IV. Letztes Blatt. № 8

## I. Fortsetzung zu dem Abschnitt: Fourier'sche Reihen.

Im Falle einer Geraden Funktion: $f(x) = f(-x)$ vereinfacht sich die Fourier'sche Entwicklung, indem die Sinusglieder verschwinden und die Koeffizienten der Cosinusglieder durch Integrale, erstreckt über das Intervall $x = 0$ bis $x = \pi$ ausgedrückt werden. Man erhält:

$$f(-x) = f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\alpha)\,d\alpha + \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty{}_n \cos nx \int_0^\pi f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha$$

Cosinusentwicklung

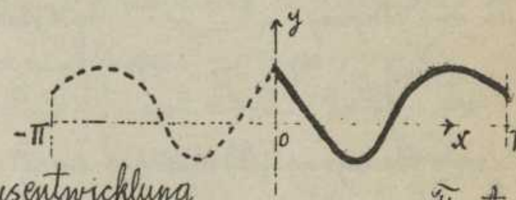



Fig. A

giltig im Intervall $-\pi < x < +\pi$

Analog im Fall einer ungeraden Funktion:

$$f(x) = -f(-x) = B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x + \cdots\cdots$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty{}_n \sin nx \int_0^\pi f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha$$

Sinusentwicklung

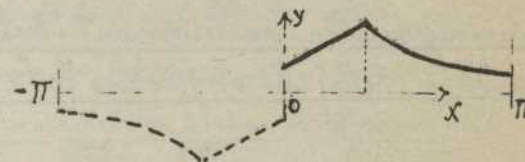
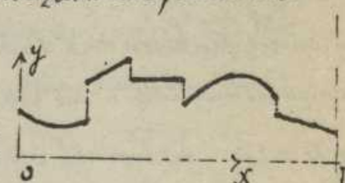



Fig. B

giltig im Intervall $-\pi < x < +\pi$.

Wenn daher eine einigermaßen vernünftige Funktion im Intervall $x=0$ bis $x=\pi$ vorgeschrieben ist (die sich aus mehreren verschiedenen Funktionen abwechslungsweise zusammensetzen kann, auch eine endliche Anzahl endlicher Sprünge besitzen darf), so kann diese Funktion im Intervall $x=0$ bis $x=\pi$ in eine Reihe entwickelt werden, die nur nach den Cosinus der ganzzahligen Vielfachen von $\pi$ oder nur nach den Sinus derselben fortschreitet. Im ersten Fall (Fig. A) stellt die Reihe für negative Werte von $x$ zwischen $-\pi$ und $0$ $f(-x) = f(x)$ dar, im zweiten Fall (Fig. B) $f(-x) = -f(x)$.




## II. Verwendung trigonometrischer Reihen zur Untersuchung partieller Differentialgleichungen unter vorgegebenen Grenzbedingungen.

Beispiel: Die Differentialgleichung der transversalen Schwingungen eines elastischen Stabes:

$$\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

läßt sich zunächst durch die Substitution $\pi x = l\xi$; $\tau = \frac{a\pi^2}{l^2}\cdot t$

überführen in: $\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = -\frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4}$

$x$ bedeutet die Abszisse
$t$ " " Zeit
$u$ " " ein vertikaler Maßstab
$a^2$ " " eine Konstante.
$l$ " " die Länge des Stabes

Angenommen, es sei an den Enden $\xi = 0$ und $\xi = \pi$ des Stabes stets


(A) $\begin{cases} u = 0 \text{ und } \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0 \end{cases}$ und am Anfang ($t=0$) sei $\begin{cases} u = f(\xi) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \end{cases}$ (B)

Die Elementarlösung: $u = \cos n^2\tau \cdot e^{\alpha_n \xi}$ genügt der Differentialgleichung unter der Bedingung: $n^4 = \alpha_n^4$. Infolgedessen erhält die Elementarlösung die allgemeinere Gestalt:

$$u = \cos n^2\tau \left\{ A_n e^{ni\xi} + B_n e^{-ni\xi} + \Gamma_n \cdot e^{n\xi} + \Delta_n \cdot e^{-n\xi} \right\} = \cos n^2\tau \left\{ \mathfrak{A}_n \cos n\xi + \mathfrak{B}_n \sin n\xi + \mathfrak{C}_n \mathfrak{Cof}\, n\xi + \mathfrak{D}_n \mathfrak{Sin}\, n\xi \right\}$$

Infolge der Bedingung (A) ergibt sich $\sin n\pi = 0$, also $n$ ganz; ferner $\mathfrak{A}_n = 0$, $\mathfrak{C}_n = 0$, $\mathfrak{D}_n = 0$.

Daher $u = \cos n^2\tau \cdot \sin n\xi \cdot \mathfrak{B}_n$ und infolge von (B) ist für $\tau = 0$: $u = f(\xi) = \sum_{1}^{\infty} \mathfrak{B}_n \sin n\xi$

Unter den gemachten Voraussetzungen ist deshalb der Ausschlag $u$ an irgendeiner Stelle $\xi$ und zu irgendeiner Zeit $\tau$ gegeben durch die Reihe: $u = \sum_{1}^{\infty} \mathfrak{B}_n \cdot \sin n\xi \cdot \cos n^2\tau$

## III. Variationsrechnung.

### 1) Variation eines einfachen Integrals: $\mathfrak{J} = \int_a^b \mathfrak{F}(x, y, y') \cdot dx$.

Eine Funktion $y = f(x)$ soll so bestimmt werden, daß, wenn man statt $y$ die Funktion $f(x)$ und statt $y'$ ihre Ableitung in das Integral $\mathfrak{J}$ einsetzt, das Integral einen größeren, bezw. kleineren Wert bekommt, als wenn man für $y$ eine andere Funktion von $x$ und statt $y'$ die Ableitung derselben einsetzt.

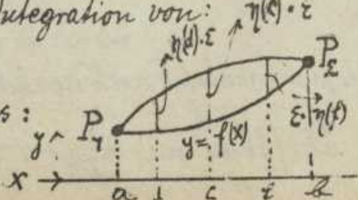
Bezeichnet man mit $\varepsilon$ eine kleine Größe[1] und mit $\eta$ eine willkürliche Funktion von $x$ (so daß man sich in $y + \varepsilon \cdot \eta$ das Produkt $\varepsilon \cdot \eta$ als Ordinatenzuwachs an der Stelle $x$ denken kann)[2], so kann die Aufgabe so formuliert werden: Wie muß $y$ gewählt werden, damit: $\mathfrak{J}_\varepsilon = \int_a^b \mathfrak{F}(x, y + \varepsilon\cdot\eta, y' + \varepsilon\eta') \cdot dx$ für alle hinlänglich kleinen $\varepsilon$ $\mathfrak{J}_\varepsilon$ kleiner ausfällt als $\mathfrak{J}$, wie auch die Funktion $\eta$ gewählt wird. Angenommen, es sei erlaubt, $\mathfrak{F}(x,y,y')$ nach Potenzen von $\varepsilon$ in eine Taylor'sche Reihe zu entwickeln, so ergibt sich:

$$\mathfrak{J}_\varepsilon - \mathfrak{J} = \varepsilon \cdot \int_a^b \left\{ \eta \cdot \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} + \eta' \cdot \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y'} \right\} \cdot dx + \varepsilon^2 [\ \ ],$$

wenn wir uns auf die erste Potenz von $\varepsilon$ beschränken. Nach partieller Integration von:

$$\int_a^b \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y'} \cdot \eta' \cdot dx = \left[ \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y'} \cdot \eta \right]_a^b - \int_a^b \eta \cdot \frac{d \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y'}}{dx} \cdot dx$$

folgt daraus:




1) positiv oder negativ, konstant.  2) Siehe Figur

$$J_\varepsilon - J = \varepsilon\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\eta\right]_a^b + \int_a^b \eta\cdot\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d\frac{\partial F}{\partial y'}}{dx}\right\}dx\right\} + \varepsilon^2[\ ]$$

Sind die Endpunkte $P_1$ und $P_2$ vorgeschrieben, bleiben sie also während der Variation $y + \varepsilon\cdot\eta$ von $y$ fest, so muß $\eta$ an den Endpunkten $= 0$ sein. Dann fällt das erste Glied in der Klammer weg. Das Vorzeichen von $J_\varepsilon - J$ wird dann für hinlänglich kleine $\varepsilon$ durch das Glied mit $\varepsilon\cdot\int_a^b \eta\cdot\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d\frac{\partial F}{\partial y'}}{dx}\right\}dx$ bestimmt. Wenn also dieses Integral nicht für alle denkbaren $\eta$ gleich Null ist, dann kann die Differenz $J_\varepsilon - J$ bei geeigneter Wahl von $\varepsilon$ sowohl positiv als negativ gemacht werden und das Integral ist weder ein Maximum noch ein Minimum. D. h., wenn für die gesuchte Funktion $y$ das Integral ein Maximum oder ein Minimum sein soll, dann muß das Integral für jede gedachte Funktion $\eta$ gleich Null sein. Angenommen nun, die Klammer $\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d\frac{\partial F}{\partial y'}}{dx}\right\}$ wäre für das zu bestimmende $y$ nicht gleich Null, dann könnte man $\eta$, das doch willkürlich ist, überall so wählen, daß es überall da positiv wäre, wo $\{\ \}$ positiv ist, und überall da negativ wäre, wo $\{\ \}$ negativ ist. Das Integral wäre dann sicher nicht $= 0$. Resultat: <u>Die Funktion $y$ kann nur dann das Integral zu einem Maximum oder Minimum machen, wenn sie die Differentialgleichung 2. Ordnung: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d\frac{\partial F}{\partial y'}}{dx} = 0$ befriedigt.</u>

<u>Beispiel</u>: Bestimmung einer Meridiankurve zwischen 2 Punkten der $xy$-Ebene, so daß der bei der Rotation um eine der Achsen entstehende Rotationskörper möglichst kleine Oberfläche besitzt. (Katenoid).

2) <u>Variation eines Doppelintegrals</u>: $J = \int_a^b\int_c^d F(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y})\,dx\,dy$

Eine Funktion $z = f(x,y)$ soll so bestimmt werden, daß, wenn man statt $z$ diese Funktion und statt $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ ihre partiellen Ableitungen in das Integral einsetzt, dasselbe einen größeren oder auch einen kleineren Wert bekommt, als für irgend welche andere Funktionen $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Die Rechnung verläuft analog wie unter 1): $J_\varepsilon = \int_a^b\int_c^d F(x, y, z+\varepsilon\cdot\eta, \frac{\partial z}{\partial x}+\varepsilon\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}+\varepsilon\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y})\,dx\cdot dy$

unter $\eta$ irgendeine Funktion von $x$ und $y$ verstanden, welche die Art des Variierens für jedes Wertepaar $x, y$ angibt. Versteht man wie früher unter $\begin{cases} p = \frac{\partial z}{\partial x} \\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\end{cases}$ so kommt:

$$J_\varepsilon - J = \varepsilon\cdot\int_a^b\int_c^d\left(\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\eta + \frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)dx\,dy + \varepsilon^2[\ ],$$

welcher Ausdruck nach partieller Integration übergeht in $\varepsilon\cdot\int_a^b\int_c^d \eta\cdot\left\{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial\frac{\partial F}{\partial p}}{\partial x} - \frac{\partial\frac{\partial F}{\partial q}}{\partial y}\right\}dx\,dy + \varepsilon^2[\ ]$

Resultat: <u>Nur unter der Bedingung:</u>

$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial\frac{\partial F}{\partial p}}{\partial x} - \frac{\partial\frac{\partial F}{\partial q}}{\partial y} = 0$, <u>welche eine partielle Diff.-Gl. 2. O. für $z$ darstellt, kann $z$ das Integral zu einem Maximum oder Minimum machen.</u>

<u>Beispiel</u>: Das Problem der Minimalflächen.

## 5, Variation eines Integrals mit Nebenbedingung.

In dem Integral: $J = \int_a^b F(x, y, z, y', z')\,dx$ wobei $y' = \frac{dy}{dx}$, $z' = \frac{dz}{dx}$,

sollen $y$ und $z$ als Funktionen von $x$ so bestimmt werden, daß das Integral ein Maximum oder ein Minimum wird, wenn außerdem noch die Bedingung: $\varphi(x, y, z) = 0$ stattfindet.

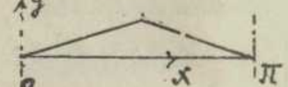
Resultat: Aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d\frac{\partial F}{\partial y'}}{dx} &= \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d\frac{\partial F}{\partial z'}}{dx} &= \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \varphi(x, y, z) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

welche gewöhnliche Diff.-Gl. 2. Ordnung für $y$ und $z$ darstellen, müssen $y$, $z$ und ein Parameter $\lambda$ als Funktionen von $x$ bestimmt werden. Die in der Lösung auftretenden 2 Konstanten können dazu benutzt werden, um eine Lösung zu finden, welcher 2 gegebene Flächenpunkte genügen.

Beispiel: Bestimmung der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten $P_1$ und $P_2$ der Fläche $\varphi(x,y,z) = 0$ in der Form: $y = f(x)$, $z = \psi(x)$

## Aufgaben.




1, Man entwickle den gezeichneten Linienzug, der aus Stücken der Geraden $y = \frac{x}{2}$ und $y = -\frac{1}{2}(x - \pi)$ zusammengesetzt ist, in eine Cosinus- und in eine Sinusreihe.

Zur Repetition: 1, Man berechne das Volumen eines Körpers welcher begrenzt ist: unten von der $xy$-Ebene, oben von der Fläche $z = x \cdot y$, seitlich von den Ebenen $y = x$ und $y = 2x$ und den Zylinderwänden $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2$. Und zwar in kartesischen Koordinaten und in ebenen Polarkoordinaten.

2, Durch die Gerade $\left.\begin{matrix} x = 1 \\ y = z \end{matrix}\right\}$ lege man eine Tangentialebene an das Hyperboloid $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{9} = 1$.

3, Für die logarithmische Spirale $r = e^{\varphi}$ und die hyperbolische Spirale $r = \frac{a}{\varphi}$ berechne man das zwischen 2 Radienvektoren gelegene Flächenstück und Bogenstück. (Vekt. $\varphi_1, \varphi_2$)

4, Die beiden Kurven $y = \sin x$ und $y = \frac{1}{4}\sin 3x$ rotieren um die $x$-Achse. Man suche das Volumen des zwischen beiden erzeugten Flächen liegenden Rotationskörpers (zwischen $x = 0$ und $x = \pi$ zu rechnen)

5, Man beweise, daß die Normalen der Kurve $x = a\{\cos t + t \sin t\}$; $y = a\{\sin t - t \cos t\}$ den Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ berühren!

6, Wenn 2 Ellipsoide von demselben Mittelpunkt und denselben Achsenrichtungen eine Achsenlänge gemein haben, so durchsetzen sie sich in einer ebenen Kurve.

7, Die Gerade $\left.\begin{matrix} x = rz + \rho \\ y = sz + \sigma \end{matrix}\right\}$ rotiert um die $z$-Achse. Man suche die Gleichung der Rotationsfläche (Die zwischen $x^2 + y^2$ und $z$ für jeden Punkt der Geraden best. Relation

Platz No.

# Höhere Mathematik IV.

Name:

## Semestralprüfung.

Note:

## 12. VII. 1912.

1) Man transformiere die Fläche 2ter Ordnung:

$$2x^2 + 2xz + 2y^2 + 2z^2 - 6x - 6z + 5 = 0$$

auf ihre Normalform und gebe die Lage der Hauptachsen bezüglich der ursprünglichen Koordinatenachsen an. Figur!

2) Man zeige, daß das Vektorfeld:

$$\mathfrak{V} = i(y+z) + j\cdot x + k\cdot x$$

wirbelfrei ist.
Welches ist die Potentialfunktion? Welcher Art sind die Potentialflächen? Welches ist die Größe des Vektors in jedem Aufpunkt?
Man bestimme die Kraftlinien des Vektorfeldes.
Von welcher linearen partiellen Diff.-Gleichung 1ter Ordnung sind dieselben die Charakteristiken? Man bestimme demgemäß diejenige Fläche, welche das System der Potentialflächen orthogonal schneidet, und durch die Parabel:

$$y = 1$$
$$x^2 = 2z$$

hindurchgeht.

3) Man integriere:

a) $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} + (y-z)\dfrac{\partial z}{\partial y} - z = 0$

b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} + 3\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

c) $u - 3\cdot\dfrac{\partial u}{\partial t} - 2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$ (hier lediglich Aufsuchen von Elementarlösungen)

4)

Fig. 1.

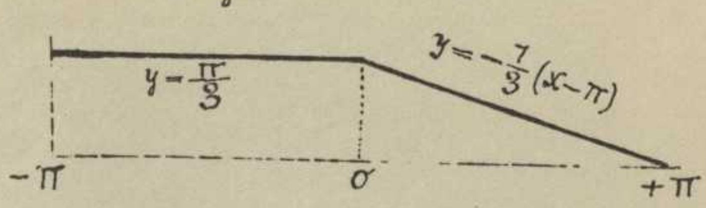
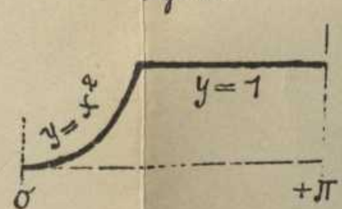



Fig. 2.




Man stelle nebenstehende aus einzelnen Kurvenstücken bestehende Linienzüge näherungsweise durch trigonometrische Reihen dar und zwar:

a) die Linie der Figur 1 durch eine Fouriersche Reihe

b) " " " 2 durch eine Sinusentwicklung und auch durch eine Cosinusentwicklung!