

PROJETOS DE OPÇÕES REAIS COM INCERTEZAS CORRELACIONADAS

REAL OPTION PROJECTS WITH CORRELATED UNCERTAINTIES

LUIZ E. T. BRANDÃO

brandao@iag.puc-rio.br

JAMES S. DYER

jim.dyer@mcombs.utexas.edu

RESUMO

Ativos contingenciais tradicionalmente são precificados através do uso de portfólio replicantes ou por avaliação neutra a risco. Quando os mercados são incompletos, como ocorre em muitos projetos onde a empresa está sujeita a incertezas privadas, ou técnicas, não sistemáticas, esses riscos não podem ser hedgeados e o portfólio replicante não pode ser construído. Neste trabalho, propomos um método baseado nos procedimentos originalmente desenvolvidos por Copeland e Antikarov (2001), que fornece uma maneira prática e eficaz para avaliar projetos onde existe flexibilidade gerencial e correlação de incertezas usando o conceito de mercados parcialmente completos de Smith e Nau (1995). Para tanto, mostramos como técnicas de análise de árvore de decisão podem ser utilizadas para valorar projetos de opções reais de forma simples e intuitiva, e como o problema da correlação entre riscos de naturezas distintas podem ser resolvidos com esta metodologia através de um exemplo prático.

Palavras-chave: opções reais, incertezas correlacionadas, riscos privados.

ABSTRACT

Contingent claims are traditionally priced through the use of replicating portfolios, or risk neutral valuation. When markets are incomplete, as it occurs with many projects and is often the case with claims on real assets when firms are subject to private, project specific risks, these risks cannot be hedged and a replicating portfolio cannot be built. This paper proposes a modified approach that enhances the methodology originally developed by Copeland and Antikarov (2001) which provides a practical method to evaluate projects where management flexibility and correlated risks are present, using the concept of partially complete markets by Smith and Nau (1995).

Key words: real options, correlated uncertainties, private risks.

INTRODUÇÃO

É sabido que o método do fluxo de caixa descontado não é adequado para avaliar ativos contingenciais como opções sobre ativos financeiros e sobre ativos reais. A solução para o problema da avaliação de opções financeiras foi desenvolvida por Black e Scholes (1973) e Merton (1973), sendo que esta metodologia foi também estendida para a avaliação de projetos de ativos reais onde existe flexibilidade gerencial, conhecida como metodologia das opções reais, a partir do trabalho pioneiro de Tourinho (1979).

Ativos contingenciais são tradicionalmente precificados através do uso de um portfólio de ativos de mercado que replique o risco e os retornos do projeto em todos os estados da natureza. Dado que este portfólio replicante oferece exatamente os mesmos resultados que o projeto, de acordo com argumentos de não arbitragem, os seus preços devem ser idênticos. Uma condição necessária para que este portfólio possa ser construído é que o mercado seja completo para projeto, ou seja, que exista uma quantidade suficiente de ativos de mercado para montar o portfólio replicante. Quando este não é o caso, diz-se que o mercado é incompleto e não há como se determinar o valor do projeto sem que se estabeleçam premissas restritivas a respeito da função utilidade dos gerentes da empresa (Dixit e Pindyck, 1994, p. 152). Esse valor, de qualquer forma, seria o valor para o gerente e não um valor de mercado.

Riscos de mercado são provenientes de incertezas correlacionadas com o mercado e que podem ser *hedgeadas* através de negociação com ativos de mercado. Um exemplo é o risco decorrente da incerteza a respeito do preço futuro do petróleo num projeto de exploração e desenvolvimento de uma área de concessão. Para projetos onde o portfólio replicante pode ser construído e precificado, o mercado é completo e todos os riscos do projeto podem ser eliminados através de negociação com este portfólio. Por outro lado, mesmo que a incerteza básica do projeto seja de mercado, pode ocorrer que não exista um mercado ativo para este produto ou *commodity* em particular, ou pode haver incertezas que são específicas do projeto ou da empresa. Exemplos disso são a incerteza a respeito das reservas de petróleo de um novo campo produtor e a incerteza se uma agência reguladora irá ou não licenciar a empresa para lançar um novo produto ou serviço. Nesses casos, o portfólio replicante não pode ser construído e os mercados são incompletos para projetos que apresentam esses tipos de risco.

Quando o produto do projeto é uma *commodity* negociada no mercado, a solução-padrão na literatura de opções reais (Dixit e Pindyck, 1994; Trigeorgis, 1996) é usar esse ativo para *hedgear* os riscos do projeto e construir o portfólio replicante. Outro método é tratar o projeto sem considerar a flexibilidade como um ativo de mercado, assumindo-se que o seu valor presente é a melhor estimativa não tendenciosa do seu valor de mercado e usar o próprio projeto para criar o portfólio replicante (Copeland e Antikarov, 2001). Ambas metodologias

resolvem o problema através do uso de premissas que fazem com que o mercado se torne completo.

O problema do mercado incompleto somente pode ser resolvido diretamente através da adoção de premissas restritivas a respeito das funções utilidade dos gerentes e dos investidores. Smith e Nau (1995) introduzem o conceito de mercados parcialmente completos onde o mercado é completo para os riscos de mercado e os riscos privados não contêm nenhuma informação sobre eventos futuros. Isso implica que se Ω_t^m e Ω_{t-1}^p são os vetores de todos os estados possíveis das incertezas de mercado e privadas em t e $t-1$ respectivamente, então Ω_t^m e Ω_{t-1}^p são independentes. Dentro dessa estrutura, o componente de mercado do fluxo de caixa descontado do projeto é precificado através do uso da premissa do mercado completo, e o componente privado pode ser precificado assumindo-se a neutralidade ao risco. Isso é possível porque é padrão na literatura considerar que os riscos privados não são correlacionados com o mercado e, dessa forma, podem ser eliminados por um investidor que esteja adequadamente diversificado. Assim, não há porque atribuir um prêmio de risco para essas incertezas, dado que a não correlação significa que o seu Beta é zero.

Existem, no entanto, projetos onde a distinção entre riscos de mercado e riscos privados não é clara, como no caso em que estas duas incertezas estão correlacionadas de alguma forma. Um exemplo disso é a incerteza a respeito das variações nos custos de aluguel de plataformas de perfuração de petróleo, que não podem ser *hedgeados* em nenhum mercado conhecido, mas que são, de alguma forma, correlacionados com os preços de petróleo.

Neste trabalho demonstramos como a correlação entre os riscos de mercado e os riscos privados pode ser analisada dentro da metodologia de ativos contingenciais quando riscos privados são correlacionados com o risco de mercado. Modelamos este problema em tempo discreto, utilizando probabilidades neutras a risco, numa solução computacional prática baseada no modelo de árvores binomiais. Essa solução difere da solução proposta por Smith e Nau (1995), no sentido em que Smith e Nau não consideram explicitamente o problema da correlação entre a incerteza privada e o mercado.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: após esta introdução introduzimos o conceito de análise por árvore de decisão através de um modelo binomial com probabilidades neutras a risco. A seguir apresentamos uma metodologia para a avaliação de projetos com risco privado correlacionado com o mercado e aplicamos o modelo para resolver um caso prático. Finalmente concluímos e apresentamos sugestões para pesquisas futuras.

AVALIAÇÃO DE OPÇÕES REAIS POR ÁRVORES DE DECISÃO

O valor de uma opção real se deve à flexibilidade gerencial presente em um projeto, que permite às empresas alterar os

fluxos de caixa futuros de forma a maximizar os seus retornos e minimizar as perdas esperadas à medida em que as incertezas são resolvidas ao longo do tempo. A flexibilidade de adiar o investimento em um projeto, por exemplo, pode ser modelada como uma opção de compra do projeto, onde o investimento necessário é o preço de exercício desta opção. Outras flexibilidades gerenciais típicas são a opção de alternar *inputs* e *outputs*, expandir, contrair, abandonar, suspender e retomar as operações em resposta a incertezas futuras. Devido ao fato de que essas flexibilidades têm características de opções, o método de fluxo de caixa descontado não consegue capturar esse valor, o que obriga o uso de métodos de apreçamento de opções.

A flexibilidade gerencial pode ser modelada através da análise de árvores de decisão (AAD) através da incorporação dos instantes de decisão, que permitem ao gerente maximizar o valor do projeto condicionado à informação disponível até aquele instante, depois que outras incertezas já foram resolvidas. Uma solução simplista para avaliar projetos de opções reais através de árvores de decisão é a de apenas incluir as decisões correspondentes às opções na árvore de incertezas do projeto e obter uma solução do problema utilizando a mesma taxa ajustada ao risco, apropriada para o projeto sem as opções de flexibilidade. Infelizmente, esta solução simplista é incorreta, uma vez que a otimização que ocorre nos nós de decisão altera os fluxos de caixa futuros esperados e, conseqüentemente, o risco do projeto. Em função disso, o desvio padrão dos fluxos de caixa do projeto sem opções difere do encontrado para o projeto com opções, e a taxa de desconto ajustada ao risco também irá se alterar. Projetos de opções reais, no entanto, podem ser resolvidos corretamente por AAD através do uso de probabilidades neutras a risco, onde descontamos os fluxos de caixa do projeto à taxa livre de risco e todo o ajuste ao risco necessário é feito nas probabilidades de cada estado da natureza representada pelos diversos galhos da árvore de decisão.

Ilustramos este conceito com um exemplo simples. Suponha um projeto de um período com dois estados que apresenta fluxos de caixa de \$120 e \$34 ao final de um ano, que possui uma taxa de desconto ajustada ao risco de 10%, e que pode ser implementado a um custo de \$50. O valor esperado deste projeto é de $\$70 = \{0.5(\$120) + 0.5(\$34)\} / 1.10$ e o seu VPL é de \$20, conforme ilustrado na Figura 1.

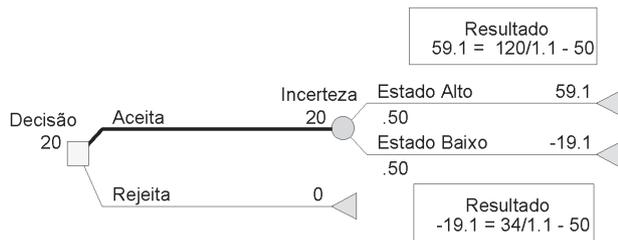


Figura 1 – Projeto com probabilidades reais e taxa de desconto ajustada ao risco.

Figure 1 – Project with objective probabilities and a risk-adjusted discount rate.

Suponhamos agora que a decisão de investir no projeto possa ser adiada até o próximo ano, depois que o verdadeiro estado da natureza seja revelado. Neste caso, a taxa de desconto original de 10% não pode ser utilizada, uma vez que o risco do projeto se alterou devido à presença da opção de adiar o investimento. Por outro lado, embora a taxa de desconto apropriada para o projeto com opções seja difícil de ser determinada devido ao efeito que estas opções têm sobre o risco do projeto, a taxa livre de risco pode ser facilmente observada no mercado, e que assumimos ser de 5% a.a.

Podemos também determinar um conjunto de probabilidades neutras a risco para o projeto original e utilizá-las para determinar o valor do projeto com a opção de adiamento, uma vez que o valor esperado para ambos os problemas é o mesmo (\$120 e \$34). Ao trocarmos as probabilidades reais pelas probabilidades neutras a risco, o VPL do projeto com opções pode ser determinado sem a necessidade de identificarmos a taxa de desconto apropriada para o projeto com opções. Neste exemplo, a probabilidade neutra a risco pode ser obtida resolvendo-se a equação $\$70 = (p_r(\$120) + (1 - p_r) (\$34)) / 1.05$ do projeto original, obtendo-se $p_r = 0.4593$.

O projeto com a opção de adiamento tem resultados líquidos de $\$120 - \$50 = \$70$ no estado alto e zero no estado baixo, respectivamente, conforme ilustrado na Figura 2, uma vez que não haverá investimento se o estado for baixo no ano 1. O VPL do projeto com a opção de adiamento será de $\$30.6 = [0.459(\$70) + 0.541(\$0)] / 1.05$, em vez dos \$20 obtidos anteriormente com o projeto sem opção, o que implica que o valor da opção de adiar é de \$10.62.

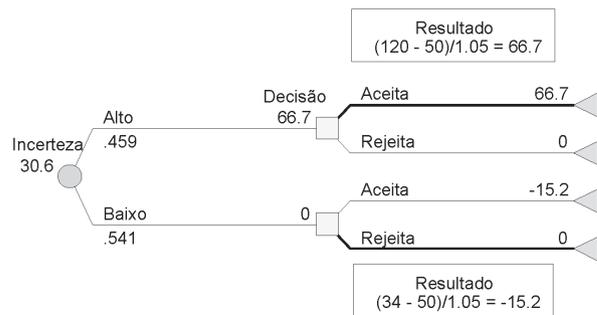


Figura 2 – Projeto com probabilidade neutra a risco e taxa livre de risco.

Figure 2 – Project with risk neutral probabilities and risk free discount rate.

O modelo AAD é baseado nos conceitos propostos por Copeland e Antikarov (2001), que são baseados em duas premissas-chave. A primeira é o MAD (*Marketed Asset Disclaimer*), onde assume-se que o valor presente do projeto é a melhor estimativa não tendenciosa do seu valor de mercado. A segunda é que as variações nos retornos dos projetos seguem um caminho aleatório. Apontamos para Copeland e Antikarov (2001) e Brandão e Dyer (2005) para uma discussão

mais detalhada dessas ideias. Apesar de ambas as premissas estarem sujeitas a uma série de restrições, adotaremos essa perspectiva para as finalidades desta discussão.

Seja V_i o valor de um projeto que não distribui dividendos no tempo i e V_{i+1}/V_i o seu retorno entre os períodos de tempo i e $i+1$. De acordo com a premissa do caminho aleatório dos retornos, $\ln(V_{i+1}/V_i)$ é normalmente distribuído, e definimos v e σ^2 , respectivamente como a média e a variância desta distribuição. Quando o intervalo de tempo é pequeno, este processo estocástico pode ser modelado como um Movimento Aritmético Browniano (MAB) na forma $d \ln V = v dt + \sigma dz$ onde $dz = \varepsilon \sqrt{dt}$ é o processo de Wiener padrão e $\varepsilon \approx N(0,1)$. Da mesma forma, variações em V_i serão lognormalmente distribuídas e podem ser modeladas como um processo estocástico de difusão Geométrico Browniano (MGB) na forma $dV = \mu V dt + \sigma V dz$ onde $\mu = v + \sigma^2/2$. A premissa do caminho aleatório dos retornos implica que as diversas incertezas do projeto podem ser combinadas para formar uma única incerteza representativa, que será a incerteza associada ao processo estocástico do valor do projeto V , e que os parâmetros desse processo podem ser obtidos através de uma Simulação de Monte Carlo dos fluxos de caixa do projeto.

O valor do projeto básico no tempo i é determinado simplesmente descontando-se os fluxos de caixa esperados $\{E[C_i], i = 1, 2, \dots, m\}$ à taxa de desconto ajustada ao risco μ , tal que $V_i = \int_0^m E[C(t)] e^{-\mu(t-i)} dt$. Se o projeto distribui dividendos na forma de fluxos de caixa para os seus acionistas, então esse valor irá decrescer a cada período pelo valor dos dividendos distribuídos. A distribuição de V_i pode ser inteiramente definida através da média e do desvio padrão dos retornos do projeto. Assumindo que os mercados são eficientes, comprar este projeto pelo seu valor presente garante um VPL igual a zero e o seu retorno esperado μ será idêntico à taxa de desconto ajustada ao risco do projeto. Nesse sentido, o retorno esperado do projeto é definido exogenamente para ser igual ao custo de capital da empresa, ou WACC. A volatilidade σ dos retornos pode ser determinada através de uma simulação de Monte Carlo do processo estocástico $d \ln V = v dt + \sigma dz$, onde $\% = \ln\left(\frac{V_{i+1}}{V_i}\right)$ e $E(\tilde{v}) = v$. O valor do projeto pode ser modelado no tempo como um MGB através do modelo binomial discreto de Cox *et al.* (1979) (CCR). O valor pré-dividendo do projeto em cada período e estado é dado por $V_{i,j} = V_0 u^{i-j} d^j$, onde i = período ($i = 0, 1, 2, \dots, m$), j = estado ($j = 0, 1, 2, \dots, i$) e $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ e $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ e são os parâmetros de acréscimo (Alto) e decréscimo (Baixo) do valor do projeto na malha binomial. De acordo com CRR, a probabilidade objetiva de um movimento para Alto é $p_u = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d}$. O processo estocástico de

tempo contínuo associado ao projeto que distribui dividendos é $dV = (\mu - \delta_i) V dt + \sigma V dz$, onde δ_i é a taxa de distribuição instantânea de dividendos no instante t . Em condições de incerteza, o valor pré-dividendo do projeto

V_{ij} no período i , estado j , é dado pela equação recursiva $V_{i,j} = V_0 u^{i-j} d^j \prod_{k=1}^{i-1} (1 - \delta_k)$, onde a probabilidade $P_{i,j}$ que o valor V_{ij} irá ocorrer é $P_{i,j} = \binom{i}{j} p^{i-j} (1-p)^j$.

Neste trabalho escolhemos modelar as opções como função dos fluxos de caixa do projeto, embora a modelagem como função do valor do projeto seja equivalente. Esses fluxos de caixa são denominados por nós como pseudofluxos de caixa ($C_{i,j}$), uma vez que não representam os fluxos de caixa esperados (estáticos) do projeto, mas os fluxos em cada estado da natureza j a cada período i . Esses fluxos serão função dos fluxos de caixa estáticos do projeto C_i ($i = 1, 2, \dots, m$), de μ e dos parâmetros u e d do modelo binomial. A sua definição matemática é dada pelas equações apresentadas em (1):

$$\left. \begin{aligned} C_{1,j} &= \frac{C_1}{1 + \mu} u^{1-j} d^j & \left. \begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned} \right\} i = 1 \\ C_{i+1,j} &= \frac{C_{i+1}}{C_i(1 + \mu)} \cdot C_{i,j} u & \left. \begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned} \right\} i = 2, 3, \dots, m \quad j = 0, 1, 2, \dots, i \\ C_{i+1,j+1} &= \frac{C_{i+1}}{C_i(1 + \mu)} \cdot C_{i,j} d & \left. \begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Dado que estamos utilizando as probabilidades neutras a risco $p_r = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$, esses fluxos de caixa são descontados à taxa livre de risco para determinação do valor presente do projeto no instante $t = 0$.

INCERTEZAS CORRELACIONADAS

Situações onde existe correlação entre riscos de mercado e riscos privados trazem um nível adicional de complexidade para o problema da determinação do valor do projeto. Se os riscos envolvem apenas riscos de mercado, essa correlação pode ser modelada na simulação, e as incertezas consolidadas numa única, modelada, por sua vez, no processo lognormal de difusão do valor do projeto V , conforme definido anteriormente. Quando essas incertezas são de natureza distinta, como é o caso de incertezas sistemáticas e não sistemáticas, a sua modelagem conjunta não pode ser realizada, uma vez que a sua evolução temporal é distinta. Por exemplo, à medida que uma província mineral é pesquisada por uma mineradora, a incerteza sobre o volume da jazida, que é uma incerteza privada, diminui, enquanto que o mesmo não acontece com a incerteza a respeito do preço de mercado do minério, que é uma incerteza de mercado. Por esse motivo, estas incertezas precisam ser modeladas separadamente.

Consideremos o caso em que esses dois tipos de incertezas são correlacionados de alguma forma através de um fator de correlação ρ , conforme, como, por exemplo, no caso dos custos de uma plataforma de exploração e os preços do petróleo mencionados na introdução. Para resolver esse problema, iremos modelar essas duas incertezas de formas distintas,

explicitando a dependência e a correlação entre elas através do modelo binomial de CRR.

Seja V o valor de um projeto sujeito a risco de mercado e P uma incerteza adicional no tempo t , μ_V e μ_P as suas respectivas taxas de crescimento, σ_V e σ_P a volatilidade de cada processo e dz_V e dz_P o processo de Wiener padrão de V e P respectivamente. O processo de difusão destes riscos é dado por:

$$dV = \mu_V V dt + \sigma_V V dz_V \quad \text{onde} \quad dz_V = \varepsilon_V \sqrt{dt}$$

$$dP = \mu_P P dt + \sigma_P P dz_P \quad dz_P = \varepsilon_P \sqrt{dt}, \quad \varepsilon_i \sim N(0,1)$$

com correlação $\rho_{V,P} = \rho_{dz_V, dz_P} = E[dz_V dz_P] / dt$

Uma vez que estaremos usando probabilidades neutras a risco para obter uma solução, podemos substituir a taxa de crescimento pela taxa livre de risco $r = r(t)$, e o processo se torna $dV = rVdt + \sigma_V V dz_V$ e $dP = rPdt + \sigma_P P dz_P$. A cada nó da malha binomial, cada incerteza possui dois estados possíveis, de forma que teremos quatro estados a cada período de tempo, cada um com probabilidade p_i , $i = 1,2,3,4$, conforme ilustrado na Figura 3.

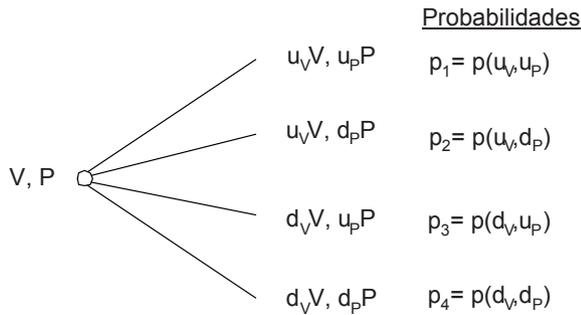


Figura 3 – Estados e probabilidades.
Figure 3 – States and probabilities.

O tamanho dos movimentos em direção a cada estado (u_V, u_P, d_V, d_P) e o valor das probabilidade p_i devem ser tais que a distribuição de probabilidade discreta convirja para a distribuição lognormal bivariada quando o intervalo de tempo tende a zero. Isso pode ser obtido equiparando-se o primeiro e o segundo momento e a correlação dos modelos binomial e contínuo, conforme sugerido por Boyle *et al.* (1989). Analogamente a CRR, fazemos $u_j d_j = 1$, e $u_j = e^{\sigma_j \sqrt{\Delta t}}$, $j = V, P$. Para determinar as probabilidade condicionais de uma distribuição bivariada, utilizamos o logaritmo natural das variáveis de forma a simplificar a análise. Pode ser demonstrado através de um processo de Ito que o logaritmo de um MGB é um MAB na forma:

$$\ln dV = dx_V = \left(r - \frac{\sigma_V^2}{2} \right) dt + \sigma_V dz_V$$

$$\ln dP = dx_P = \left(r - \frac{\sigma_P^2}{2} \right) dt + \sigma_P dz_P \quad \text{onde} \quad dz_i = \varepsilon_i \sqrt{dt}, \quad \varepsilon_i \sim N(0,1)$$

Discretizando o intervalo de tempo, temos:

$$\Delta x_V = v_V \Delta t + \sigma_V \Delta z_V \quad \text{onde} \quad v_i = r - \frac{\sigma_i^2}{2}$$

$$\Delta x_P = v_P \Delta t + \sigma_P \Delta z_P$$

A média, a variância e a correlação do processo de tempo contínuo são:

$$E[\Delta x_V] = E[v_V \Delta t + \sigma_V \Delta z_V] = v_V \Delta t$$

$$E[\Delta x_P] = E[v_P \Delta t + \sigma_P \Delta z_P] = v_P \Delta t$$

$$Var[\Delta x_V] = E[\Delta x_V^2] - E^2[\Delta x_V]$$

Mas como $E^2[\Delta x_V] = (v_V \Delta t)^2 = 0$, ficamos com

$$Var[\Delta x_V] = E[\Delta x_V^2] = \sigma_V^2 \Delta t$$

$$Var[\Delta x_P] = \sigma_P^2 \Delta t$$

e finalmente,

$$E[\Delta x_V \Delta x_P] = \sigma_V \sigma_P E[\Delta z_V \Delta z_P], \text{ mas}$$

$$\rho \Delta t = E[\Delta z_V \Delta z_P], \text{ então}$$

$$E[\Delta x_V \Delta x_P] = \sigma_V \sigma_P \rho \Delta t$$

A distribuição binomial fornece:

$$E[\Delta x_V] = p_1 \Delta x_V + p_2 \Delta x_V + p_3 (-\Delta x_V) + p_4 (-\Delta x_V)$$

$$E[\Delta x_V] = (p_1 + p_2) \Delta x_V - (p_3 + p_4) \Delta x_V$$

$$E[\Delta x_P] = p_1 \Delta x_P + p_2 (-\Delta x_P) + p_3 \Delta x_P + p_4 (-\Delta x_P)$$

$$E[\Delta x_P] = (p_1 + p_2) \Delta x_P - (p_3 + p_4) \Delta x_P$$

$$E[\Delta x_V^2] = [E[p_1 \Delta x_V^2 + p_2 \Delta x_V^2 + p_3 (-\Delta x_V)^2 + p_4 (-\Delta x_V)^2]]$$

$$E[\Delta x_V^2] = \Delta x_V^2$$

$$E[\Delta x_P^2] = \Delta x_P^2$$

$$E[\Delta x_V \Delta x_P] = p_1 \Delta x_V \Delta x_P - p_2 \Delta x_V \Delta x_P - p_3 \Delta x_V \Delta x_P + p_4 \Delta x_V \Delta x_P$$

$$E[\Delta x_V \Delta x_P] = (p_1 - p_2 - p_3 + p_4) \Delta x_V \Delta x_P$$

Igualamos o primeiro e o segundo momento da distribuição discreta aos da distribuição contínua. Igualando também as correlações e fazendo com que a soma das probabilidades seja um, obtemos o seguinte sistema de seis equações e seis incógnitas:

$$\begin{cases} v_V \Delta t = (p_1 + p_2) \Delta x_V - (p_3 + p_4) \Delta x_V & (1) \\ v_P \Delta t = (p_1 + p_2) \Delta x_P - (p_3 + p_4) \Delta x_P & (2) \\ \sigma_V^2 \Delta t = \Delta x_V^2 & (3) \\ \sigma_P^2 \Delta t = \Delta x_P^2 & (4) \\ \sigma_V \sigma_P \rho \Delta t = (p_1 - p_2 - p_3 + p_4) \Delta x_V \Delta x_P & (5) \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 & (6) \end{cases}$$

A solução deste sistema é dado por:

$$\Delta x_V = \sigma_V \sqrt{\Delta t} \quad \text{and} \quad \Delta x_P = \sigma_P \sqrt{\Delta t}$$

$$p_1 = \frac{1}{4} \left(1 + \left(\frac{v_V}{\sigma_V} + \frac{v_P}{\sigma_P} \right) \sqrt{\Delta t} + \rho \right) \quad (1)$$

$$p_2 = \frac{1}{4} \left(1 + \left(\frac{v_V}{\sigma_V} - \frac{v_P}{\sigma_P} \right) \sqrt{\Delta t} - \rho \right) \quad (2)$$

$$p_3 = \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{v_V}{\sigma_V} - \frac{v_P}{\sigma_P} \right) \sqrt{\Delta t} - \rho \right) \quad (3)$$

$$p_4 = \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{v_V}{\sigma_V} + \frac{v_P}{\sigma_P} \right) \sqrt{\Delta t} + \rho \right) \quad (4)$$

As probabilidades condicionais podem ser obtidas a partir das probabilidades conjuntas dos riscos de mercado e dos riscos privados.

$$P(P_i | V_j) = \frac{P_k}{P(V_j)} \quad ((j = u, d) i = u, d), \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad \text{onde } P(V_u) = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} e$$

$$P(P_i \cap V_j) = p_k \quad (j = u, d) i = u, d \quad k = 1, 2, 3, 4$$

$$P(P_u | V_u) = \frac{1 + \left(\frac{v_y + v_p}{\sigma_y + \sigma_p} \right) \sqrt{\Delta t} + \rho}{4P(V_u)} \quad P(P_u | V_d) = \frac{1 + \left(\frac{v_y - v_p}{\sigma_y - \sigma_p} \right) \sqrt{\Delta t} - \rho}{4P(V_d)}$$

$$P(P_d | V_u) = \frac{1 - \left(\frac{v_y - v_p}{\sigma_y - \sigma_p} \right) \sqrt{\Delta t} - \rho}{4P(V_u)} \quad P(P_d | V_d) = \frac{1 - \left(\frac{v_y + v_p}{\sigma_y + \sigma_p} \right) \sqrt{\Delta t} + \rho}{4P(V_d)}$$

Equações (12)

EXEMPLO

Ilustramos essa metodologia para a avaliação de projetos de opções reais através de um projeto com quatro períodos. Para tanto, utilizamos um *software* de árvore de decisão que tem a limitação de representar a malha binomial sem a sua característica recombinante, embora sem prejuízo para a solução obtida. O resultado é uma árvore com um grande número de nós devido à duplicação desnecessária, mas que fornece uma interface visual conveniente e flexível para o problema. Consideramos inicialmente o caso de um projeto sujeito apenas a uma incerteza de mercado e, em seguida, analisamos o efeito sobre o valor do projeto da inclusão de uma incerteza privada correlacionada com a incerteza de mercado.

PROJETO SUJEITO À INCERTEZA DE MERCADO

Suponha que uma empresa tenha desenvolvido um novo produto e que está decidindo se deve investir na produção e na comercialização deste produto. Devido à natureza extremamente competitiva deste mercado, a vida útil do produto é estimada em apenas quatro anos. A Tabela 1 apresenta a

Tabela 1 – Fluxo de caixa esperado do projeto.

Table 1 – Project expected cash flows.

	0	1	2	3	4
Receita		1000	1080	1166	1260
Custo Variável		(400)	(432)	(467)	(504)
Custo Fixo		(240)	(240)	(240)	(240)
Depreciação		(300)	(300)	(300)	(300)
LAJIR		60	108	160	216
Impostos	50%	(30)	(54)	(80)	(108)
Depreciação		300	300	300	300
Investimento	(1,200)				
Fluxo de Caixa	(1,200)	330	354	380	408
VPO =	1,157		WACC =	10%	
Invest =	(1,200)				
VPL =	(43)				

planilha de cálculo com as projeções de receita e os fluxos de caixa esperados do projeto. A taxa de desconto ajustada ao risco é de 10% a.a. e a taxa livre de risco é de 5% a.a.

Assumimos que o valor presente do projeto de \$1.157 é a melhor estimativa não tendenciosa do seu valor de mercado e é o valor do caso base. Dado que o investimento necessário é de \$1.200, o projeto tem VPL negativo, o que indica que não deve ser implementado.

Assumimos que o projeto está sujeito a uma única fonte de incerteza, qual seja, o valor futuro das suas receitas, embora outras incertezas de mercado possam também ser incorporadas com facilidade ao modelo através da inclusão das suas distribuições de probabilidades na simulação. Se o processo das receitas R segue um MGB com média $\alpha_R = 7.70\%$ (equivalente a uma taxa de crescimento discreta de 8.0%) e volatilidade $\sigma_R = 30\%$, podemos obter uma estimativa da volatilidade do projeto através de uma Simulação de Monte Carlo dos seus fluxos de caixa e computando o desvio padrão de $v^0 = \ln \left(\frac{V_1^0}{V_0} \right)$. Com os parâmetros acima, a volatilidade do projeto será $\sigma = 24.8\%$. Finalmente, assumimos que os retornos do projeto são normalmente distribuídos, de forma que o valor do projeto terá distribuição lognormal que poderá ser aproximada através de uma malha binomial.

A modelagem da aproximação binomial requer que determinemos os valores de u , d e da probabilidade neutra a risco p_n , de acordo com as equações definidas anteriormente. Os pseudofluxos de caixa do projeto são determinados de acordo com as equações apresentadas em , e o valor do projeto é calculado aplicando-se os procedimentos-padrão de programação dinâmica implementadas em uma árvore binomial, descontando-se os fluxos de caixa esperados à taxa livre de risco. Note-se que o valor do projeto obtido com probabilidades neutras a risco e taxa livre de risco é idêntico ao valor calculado pela planilha do fluxo de caixa descontado, onde foi utilizada a taxa de desconto ajustada ao risco (WACC).

Note-se que os valores de σ , μ , r e dos fluxos de caixa do projeto C_i podem ser inseridos como parâmetros do modelo de árvore de decisão, com todas as equações necessárias incorporadas dentro da estrutura da árvore. Na prática, a estruturação do modelo de árvore de decisão pode ser bastante simplificada pelo desenvolvimento de modelos de árvore binomial padrão para qualquer número de períodos.

Uma vez que os parâmetros estocásticos do projeto estão determinados e a árvore de decisão está construída, as opções do projeto podem ser incorporadas com facilidade. Suponha que o projeto possa ser abandonado daqui a dois ou três anos por um valor terminal constante de \$350 e que exista uma opção de expandir o projeto em 30% no ano 2 a um custo de \$100. Com a representação da árvore binomial, estas opções podem ser inseridas simplesmente adicionando as decisões apropriadas nos períodos em que ocorrem. O modelo da árvore de decisão é apresentado na Figura 4.

A partir do modelo da Figura 4, é gerada a árvore de decisão completa e calculado o valor do projeto. Com as opções, o valor

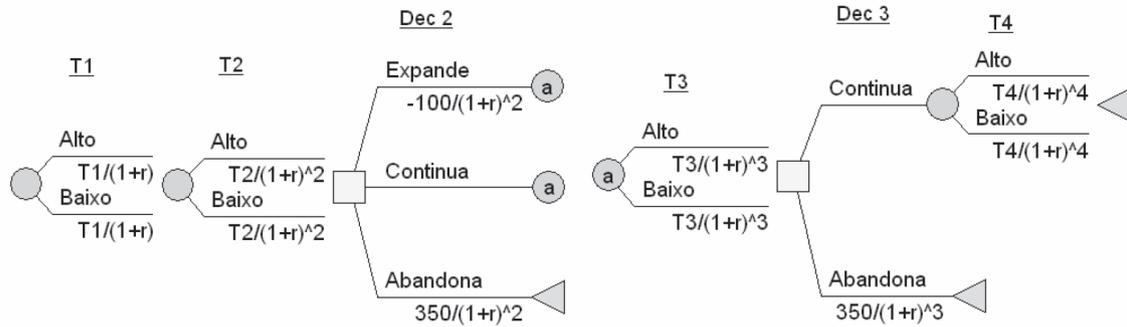


Figura 4 – Modelo da árvore de decisão com as opções de expandir e abandonar.
Figure 4 – Decision tree model with the options to expand and abandon.

do projeto, calculado usando a mesma probabilidade neutra a risco, aumenta para \$1.280, e a opção de expandir será exercida em todos os estados do ano 2 exceto um, enquanto a opção de abandono será exercida apenas no ano 3, como pode ser observado nas linhas em negrito. Mais opções e períodos podem ser acrescidos de forma simples e direta, utilizando-se o modelo aqui apresentado. A Figura 5 ilustra os três primeiros períodos da árvore de decisão do projeto com os seus respectivos valores.

PROJETO SUJEITO A INCERTEZAS CORRELACIONADAS

No caso de incertezas de mercado e privadas correlacionadas, consideramos o conceito de mercados parcialmente completos de Smith e Nau (1995) e decompomos o fluxo de caixa do projeto em seus componentes de risco de mercado e risco privado. Cada um deles é calculado separadamente usando modelos de apuração de opções em mercados completos para a porção de mercado e assumindo neutralidade a risco para a porção privada, considerando um investidor diversificado.

A teoria financeira busca sempre obter valores de mercado para os ativos que estão sendo precificados e assume que a empresa e/ou os seus acionistas estão suficientemente diversificados de forma a serem neutros em relação a riscos privados, uma vez que estes riscos podem ser eliminados através de uma estratégia de diversificação adequada. Nesse caso, riscos privados, específicos da empresa ou do projeto, devem ser computados a seu valor esperado e descontados à taxa livre de risco para estimar o valor de mercado do projeto. Por outro lado, o proprietário de uma pequena empresa familiar ou empregados e gerentes que obtêm a sua renda da empresa na qual trabalham, e também investem a maior parte da sua riqueza em ações desta empresa, podem não estar suficientemente diversificados. Nesse caso, o valor do projeto para esses investidores em particular pode ser obtido adotando-se uma função utilidade que reflita as preferências ao risco específicas desses agentes para valorar o risco privado.

Em nosso exemplo, o risco privado se deve ao fato de que os fluxos de caixa do projeto são afetados pela eficiência da planta industrial de fabricação do projeto, que, por sua vez, é correlacionada com a tecnologia de fabricação adotada. Como

a tecnologia de fabricação é um risco que não pode ser diversificado no mercado, constitui um risco privado cuja taxa de desconto apropriada não pode ser determinada a não ser que se estabeleçam premissas restritivas a respeito da utilidade da empresa. Por outro lado, se considerarmos que a empresa ou seus acionistas já estão adequadamente diversificados, então podemos adotar o conceito de neutralidade ao risco mencionado anteriormente. Assumimos também que a eficiência da planta é positivamente correlacionada com o valor do projeto, uma vez que um maior fluxo de caixa proveniente de um maior volume de vendas poderá gerar economias de escala e maiores investimentos em tecnologia de fabricação.

Assumimos que a planta opera com uma eficiência média de 80%, volatilidade de 0.10 e correlação $\rho = 0.20$. As probabilidades condicionais para os riscos privados são determinados através das equações, que são adicionadas como nós de incerteza em cada período. A Figura 6 ilustra o modelo referente ao caso base.

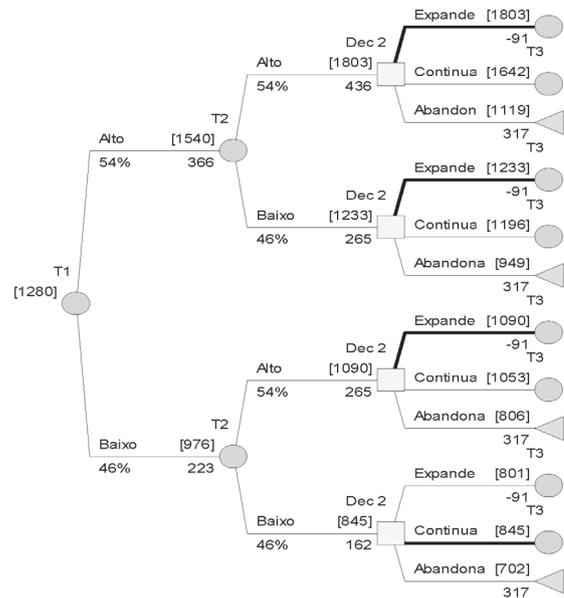


Figura 5 – Árvore de decisão com as opções de expandir e abandonar.
Figure 5 – Decision tree with the options to expand and abandon.

Considerando um investidor diversificado, podemos esperar que o valor do projeto seja menor do que no caso anterior, uma vez que a eficiência média é menor do que 100%. Resolvendo a árvore de decisão, obtemos um valor de \$1.058 para o caso base, comparado com os \$1.157 obtidos anteriormente.

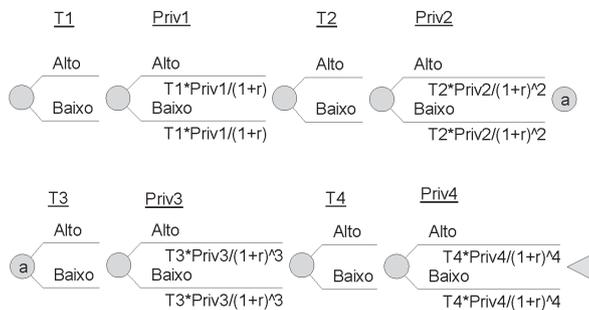


Figura 6 – Risco privado: caso base.
Figure 6 – Private risk: base case.

As opções do projeto podem ser determinadas inserindo-se os nós de decisão apropriados em cada período de tempo. O modelo de árvore de decisão é apresentado na Figura 7, e a solução desta árvore fornece um valor de \$1.181.

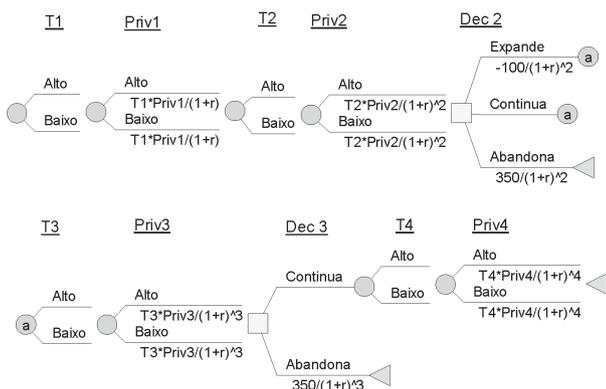


Figura 7 – Modelo com risco privado correlacionado.
Figure 7 – Model with correlated private risk.

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Neste trabalho, propomos uma metodologia para avaliação de projetos de opções reais que incorpora ferramentas de análise de árvore de decisão com o intuito de apresentar uma forma mais intuitiva de valorar estes ativos e estender esta metodologia para o caso de correlação de incertezas de naturezas distintas. O método proposto representa uma maneira simples e direta de implementar a metodologia de avaliação por opções reais através do uso de ferramentas-padrão de árvore de decisão facilmente disponíveis no mercado. Através da modelagem explícita das correlações, privadas ou não, dentro do problema, uma estimativa mais precisa do valor do projeto, que leva em conta as diferentes naturezas destas incertezas, pode ser obtida. As árvores de decisão oferecem também a vantagem de uma

modelagem visual e representação lógica que facilitam a intuição a respeito do processo de valoração do projeto.

Mesmo para modelos simples como o apresentado aqui, o tamanho da árvore de decisão cresce rapidamente. Para grande parte dos problemas práticos, a complexidade da árvore de decisão pode ser tal que a sua visualização completa se torna impossível. No entanto, mesmo problemas em que o número de nós chega à casa de dezenas de milhões podem ser resolvidos ainda com tempo de processamento razoável utilizando esta metodologia. Maiores eficiências computacionais podem ser obtidas, utilizando-se de algoritmos codificados especificamente para cada problema, embora ao custo da interface visual da modelagem.

A restrição mais relevante a esta metodologia é o uso das premissas que dão suporte à metodologia proposta por Copeland e Antikarov (2001) para avaliação de projetos de opções reais, uma vez que o uso de árvores de decisão representa apenas uma melhoria computacional para esta metodologia, embora elas sejam largamente adotadas na prática.

REFERÊNCIAS

- BLACK, F.; SCHOLES, M. 1973. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81:637-659.
- BOYLE, P.; EVNINE, J.; GIBBS, S. 1989. Numerical evaluation of multivariate contingent claims. *Review of Financial Studies*, 2:241-250.
- BRANDÃO, L.; DYER, J. 2005. Decision analysis and real options: A discrete time approach to real option valuation. *Annals of Operations Research*, 135(1):21-39.
- COPELAND, T.; ANTIKAROV, V. 2001. *Real options*. Nova York, Texere LLC, 372 p.
- DIXIT, A.; PINDYCK, R.S. 1994. *Investment under uncertainty*. Princeton, Princeton University Press, 468 p.
- COX, J.; ROSS, S.; RUBINSTEIN, M. 1979. Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7:229-264.
- MERTON, R. 1973. The theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4:141-183.
- SMITH, J.E.; NAU, R.F. 1995. Valuing risky projects: Option pricing theory and decision analysis. *Management Science*, 14(5):795-816.
- TOURINHO, O.A.F. 1979. *The valuation of reserves of natural resources: An option pricing approach*. Berkeley, CA. Tese de Ph.D. University of California, 103 p.
- TRIGEORGIS, L. 1996. *Real options - managerial flexibility and strategy in resource allocation*. Cambridge, MIT Press, 427 p.

Submissão: 14/05/2007

Aceite: 24/11/2008

LUIZ E.T. BRANDÃO

PUC-Rio
Rua Marquês de São Vicente 225, Gávea
22451-900, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

JAMES S. DYER

McCombs School of Business
University of Texas at Austin
78712, Austin, TX, USA