Радиостроение
Научно-практический журнал
http://www.radiovega.su

Ссылка на статью:
// Радиостроение. 2022. № 03. С. 14–24
DOI: **10.36027/rdeng.0322.0000207**
Представлена в редакцию: 09.04.2022

УДК 5.38

Организация самостоятельной работы студентов технического университета при освоении курса общей физики при выполнении домашнего задания на примере раздела «Магнитостатика»

Лунёва Л.А.[1,*], Макаров А.М.[1], Еркович О.С.[1], Есаков А.А.[1]

[*]lunevala2008@rambler.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Рассматриваются методические вопросы, связанные с организацией самостоятельной работы студента при изучении курса общей физики в техническом университете. Предложена оригинальная авторская методика расчёта параметров магнитного поля в проводниках с током в форме длинной толстостенной трубки из проводящего магнетика, в коаксиальном кабеле и двухполосной линии с токами, доступная для понимания студентам младших курсов при выполнении домашнего задания по разделу «Магнитостатика». Для демонстрации возможностей методики в учебном процессе представлен пример постановки задачи и рекомендаций для осуществления самостоятельного расчёта характеристик магнитного поля, а также анализа корректности полученных результатов решения для проводников с током в форме длинной толстостенной трубки из линейного, изотропного, проводящего и неоднородного магнетика с магнитной проницаемостью $\mu = f(r)$.

Ключевые слова: магнитное поле, векторы напряженности, индукции и намагниченности, магнитная проницаемость, поверхностный и объёмный токи намагничения

Введение

Цель дисциплины физика – формирование компетенций, направленных на развитие научного мировоззрения, представления о современной картине мира, приобретение фундаментальных знаний и овладение основными приёмами и методами познавательной деятельности как основы будущей профессиональной деятельности: производственно-технологической, научно-исследовательской, расчётно-проектной. Высокая профессиональная компетенция невозможна без фундаментальной подготовки по физике [1].

Для успешного освоения курса общей физики в техническом университете важную роль играют семинарские или практические занятия, на которых есть возможность не только изучать фундаментальные понятия, законы, современные классические теории, но и научиться практическим навыкам, приёмам и методам решения конкретных задач, проявляя наибольшую самостоятельность [2]. При этом необходимо сохранять достоинства традиционного практического занятия, но также максимально использовать методическое обеспечение, позволяющее организовать самостоятельную работу студентов как во время практического занятия, так и во внеаудиторное время.

Целью настоящей работы является разработка методического обеспечения для организации самостоятельной работы студента, обеспечивающего успешное освоение раздела «Магнитостатика», поддержку лекционного курса и семинарских занятий, а также формирование навыков организации самостоятельной учебной работы и осуществления самостоятельного контроля результатов решения физических задач, что является важным элементом формирования системы компетенций, предусмотренных стандартами подготовки инженеров в техническом университете.

На кафедре физики МГТУ им. Н.Э. Баумана разработаны и более десяти лет успешно применяются в учебном процессе в разделе «Электромагнетизм» курса общей физики методические указания к выполнению домашнего задания по темам «Электростатика. Магнитостатика. Электромагнитная индукция» [1]. Проявления электромагнетизма в самых разнообразных физических процессах определяют основополагающее место этого раздела курса общей физики в техническом университете. Следует отметить, что глубокое изучение физики электромагнитных явлений закладывает надёжный фундамент для дальнейшего освоения технических дисциплин. Важной особенностью раздела «Электромагнитные явления» в курсе общей физики является необходимость формирования междисциплинарных связей и демонстрация возможности принимать решения на основе полученных знаний фундаментальных законов физики.

При разработке методических указаний к разделу «Магнитостатика» особое внимание было уделено практическому использованию теоремы о циркуляции вектора напряжённости $\vec{H}$ магнитного поля для расчёта распределения напряжённости магнитного поля в пространстве и теоремы о циркуляции вектора намагниченности $\vec{J}$ в интегральной и дифференциальной формах для определения объёмных и поверхностных токов намагничивания. Следует заметить, что используя теоремы о циркуляции векторов $\vec{H},\vec{B},\vec{J}$ можно рассчитать параметры магнитных полей в проводниках с током в случаях, когда эти поля обладают пространственной симметрией (чаще всего плоской, цилиндрической или сферической) [2]. Использование этих теорем традиционно представляет сложности для студентов. Создание методики, обеспечивающей эффективное освоение этого материала, имеет большое значение при подготовке будущих инженеров, обеспечивая им базу для освоения общеинженерных и специальных дисциплин.

Структура индивидуального практического задания по теме «Магнитостатика», предназначенного для самостоятельного выполнения, включает краткую сводку теоретических сведений, методические рекомендации к решению задач, подробно обсуждаемый пример решения типовой задачи, включающий обсуждение способов проверки корректности полученных результатов. Приведенные сведения дополняют и расширяют теоретический материал, который студенты получают на лекциях по курсу общей физики в разделе «Электромагнетизм». Предлагаемая методика не только обеспечивает углубленное усвоение теоретического материала, но и вырабатывает у студентов навыки проведения самостоятельных теоретических расчётов. Заметим, что для решения задач применяется математический аппарат теории поля, доступный для понимания студентам второго курса технических университетов. Для обеспечения самостоятельности при выполнении домашнего задания каждый студент учебной группы получает собственный вариант домашнего задания. Индивидуальные условия задачи своего варианта студент может найти на сайте кафедры физики в разделе «Домашние задания, 3 семестр». Каждый вариант задачи характеризуется своим видом симметрии, своими видами зависимостей магнитной проницаемости среды $\mu = f(r)$ и своими параметрами задачи, необходимыми для её решения. В условиях предлагаемых задач заданы токи проводимости I по поверхностям устройства или распределение плотности $\vec{j}$ тока проводимости по поперечному сечению устройства, магнитное поле в котором подлежит исследованию.

Для эффективного освоения раздела «Магнитостатика» была предложена оригинальная авторская методика расчёта параметров магнитного поля в проводниках с токами в форме длинной толстостенной трубки из линейного, изотропного, проводящего и неоднородного магнетика с магнитной проницаемостью $\mu = f(r)$, в коаксиальном кабеле и двухполосной линии с токами, в которых пространство между проводниками также заполнено неоднородным магнетиком с магнитной проницаемостью $\mu = f(r)$. Разработанная методика учитывает возможности студентов младших курсов технического университета, а также междисциплинарные связи между естественнонаучными, математическими и общеинженерными дисциплинами. Представленные материалы предполагают знакомство студентов с учебными пособиями по курсу общей физики [3,4].

Для демонстрации возможностей методики в статье представлены подробные рекомендации по расчёту характеристик магнитного поля, а также анализа корректности полученных результатов решения для проводников с током в форме длинной толстостенной трубки из линейного, изотропного, проводящего и неоднородного магнетика с магнитной проницаемостью $\mu = f(r)$, в силу чего определяемые величины будут зависеть только от одной пространственной координаты – радиальной координаты r.

Методические рекомендации по расчету характеристик магнитного поля проводника с током в форме длинной толстостенной трубки круглого поперечного сечения из проводящего неоднородного магнетика

Постановка задачи

Проводник с током, равномерно распределённым по его постоянному поперечному сечению с плотностью $\vec{j}$, имеет форму длинной толстостенной трубки круглого поперечного сечения из проводящего магнетика, внешний и внутренний радиусы которой равны

R_0 и R соответственно. Магнитная проницаемость неоднородного магнетика в пространстве между внутренней и внешней поверхностями трубки изменяется по закону $\mu(r) = \dfrac{(R^n + r^n)}{2R^n}$, где r – расстояние от оси трубки (Рис.1). Параметры задачи $\vec{J}$, R_0 и R являются постоянными

Необходимо определить распределение модулей векторов индукции $\vec{B}$, напряжённости $\vec{H}$ магнитного поля и модуля вектора намагниченности $\vec{J}$ среды в зависимости от радиальной координаты $r \in (R; R_0)$, а также линейную плотность поверхностных токов намагничивания $\vec{i}'_{\text{пов}}$ на внутренней и внешней поверхностях трубки и распределение плотности объёмных токов намагничивания $\vec{j}'_{\text{об}}(r)$.

Кроме того, необходимо выполнить проверку корректности полученных результатов.

Постановка задачи в таком виде позволяет наглядно показать основные приёмы вычислений характеристик векторных и скалярных полей. Студенты на практике осваивают математический аппарат теории поля на примере конкретной задачи. Данная постановка задач позволяет получить необходимое количество вариантов для индивидуальных домашних заданий.

Пример методических указаний к решению задачи

Проанализируем зависимость магнитной проницаемости среды от координат, имеющую вид дробно-рациональной функции

$$\mu = \mu(r) = \frac{(R^n + r^n)}{2R^n}, \ \mathrm{n} = 2, \tag{1}$$

$$\frac{R_0}{R} = \frac{3}{2}. \tag{2}$$

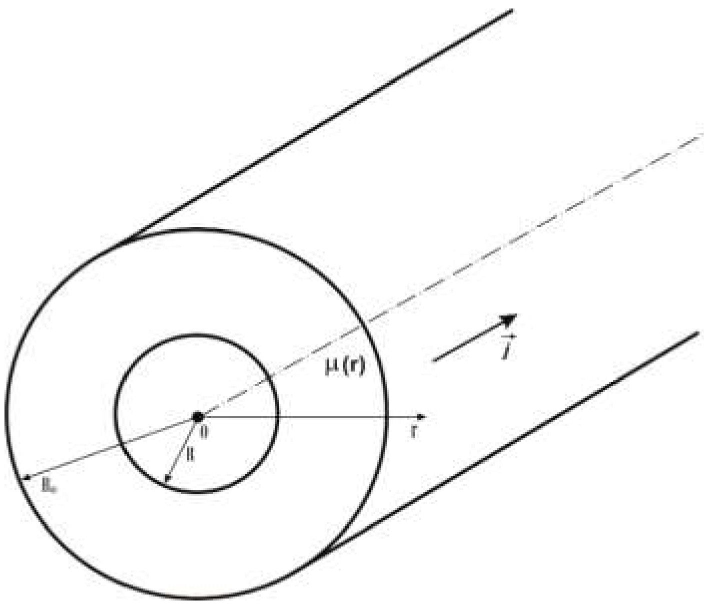

Рис.1

Преобразуем выражение для магнитной проницаемости $\mu(r)$ с учётом заданного соотношения (2):

$$\mu = \frac{1}{2} + \frac{r^2}{2R^2}. \qquad (3)$$

Анализируя выражение (3) видим, что материал данной трубки является парамагнетиком.

Расчёт характеристик магнитного поля начнём с определения вектора напряжённости $\vec{H}$ магнитного поля материала трубки. По условию задачи вектор плотности тока проводимости $\vec{j}$ параллелен оси трубки (рис.2). Из симметрии задачи следует, что силовые линии вектора $\vec{H}$ в рассматриваемом случае должны иметь вид окружностей с центром на оси трубки и лежащих в плоскости поперечного сечения трубки [2]. Модуль вектора $\vec{H}$ должен быть одинаков во всех точках на одинаковом расстоянии r от оси трубки. Для определения напряжённости поля $\vec{H}$ внутри трубки воспользуемся теоремой о циркуляции вектора $\vec{H}$:

$$\oint\limits_L (\vec{H}, d\vec{\ell}) = \int\limits_S (\vec{j}, d\vec{s}).$$

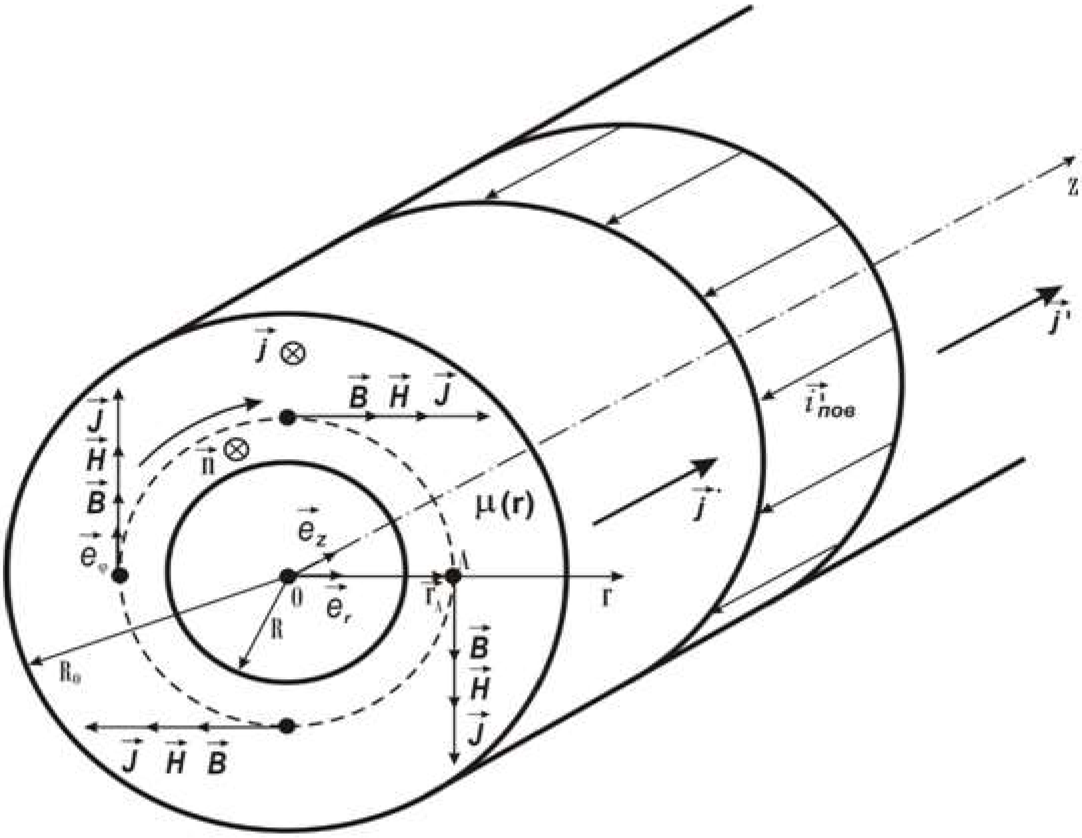

Рис.2

В качестве контура интегрирования L выбираем одну из указанных выше окружностей радиуса $r_a \in (R\,;\, R_0)$, в каждой точке которой вектор $\vec{H}$ касателен к ней. Направления вектора $\vec{j}$ и вектора единичной нормали $\vec{n}$ к плоскости, ограниченной контуром L, совпадают, причём направление $\vec{n}$ связано с направлением обхода по контуру (на рис.2 показано дугой со стрелкой) правилом правого винта. По теореме о циркуляции вектора $\vec{H}$ для контура L получаем:

$$H 2\pi r_a = j(\pi r_a^2 - \pi R^2),$$

откуда, опуская индекс a (так как r_a выбран произвольно, то последнее соотношение справедливо для любого $R < r < R_0$), для модуля напряжённости магнитного поля H получаем

$$H = \frac{j(r^2 - R^2)}{2r}, \quad R < r < R_0. \tag{4}$$

Следует заметить, что магнитное поле внутри трубки при $r < R$ отсутствует, а снаружи - при $r > R_0$ - модуль напряжённости магнитного поля H определяется зависимостью

$$H = \frac{5jR^2}{8r}, \quad r > R_0, \tag{5}$$

что также легко показать с помощью теоремы о циркуляции вектора $\vec{H}$. Отметим, что при переходе через границу $r = R_0$ напряжённость магнитного поля H не испытывает скачка: по условию задачи на боковых поверхностях трубки поверхностные токи проводимости отсутствуют.

Определим модуль вектора магнитной индукции $\vec{H}$ с учётом зависимости (4) для H и зависимости (1) для магнитной проницаемости $\mu(r)$ линейного, изотропного и неоднородного магнетика:

$$B = \mu\mu_0 H = \frac{\mu_0 j(r^4 - R^4)}{4R^2 r}, \quad R < r < R_0. \tag{6}$$

В рассматриваемой задаче магнетик неоднородный, но изотропный и линейный, поэтому соотношение между намагниченностью $\vec{J}$ среды и напряжённостью $\vec{H}$ магнитного поля: $\vec{J} = \chi\vec{H}$, где $\chi -$ магнитная восприимчивость вещества, остаётся справедливым. Итак, значение магнитной индукции $\vec{B}$ в материале трубки при $r \in (R\,;\, R_0)$ определено соотношением (6), а снаружи при $r > R_0$ зависимость модуля магнитной индукции $B(r)$ от радиальной координаты принимает вид:

$$B = \mu_0 H = \frac{5\mu_0 jR^2}{8r}.$$

Найдём модуль вектора намагниченности $\vec{J}$ при $r \in (R\,;\, R_0)$:

$$J = \chi H = (\mu - 1)H = \frac{j(r^2 - R^2)^2}{4R^2 r}. \tag{7}$$

Намагниченность $\vec{J}$ снаружи трубки при $r > R_0$ равна нулю, так как в этой области магнетик отсутствует и $\chi = 0$. Внутри трубки при $r < R$ намагниченность $\vec{J}$ тоже равна нулю, в частности, по этой же причине.

Ориентация векторов $\vec{H}, \vec{B}$ и $\vec{J}$ в пространстве показана на рис.2.

Таким образом, полевые характеристики магнитного поля в материале трубки при $r \in (R; R_0)$ и снаружи при $r > R_0$ определены, а при $r < R$ магнитное поле отсутствует.

Плотность объёмного тока намагничивания $\vec{j}$, распределённого по объёму магнетика, найдём, используя дифференциальную форму теоремы о циркуляции вектора намагниченности $\vec{J}$:

$$\mathbf{rot}\,\vec{J} = \vec{j}\,',$$

а выражение для оператора **rot** применительно к цилиндрическим координатам имеет вид:

$$\mathbf{rot}\,\vec{J} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial J_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial (rJ_\varphi)}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial J_r}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rJ_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial J_r}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z \tag{8}$$

Легко заметить, что в рассматриваемом примере $J_r = J_z = 0$ *и* $\frac{\partial J_\varphi}{\partial z} = 0$, поэтому в правой части соотношения (8) только в составляющей по оси $0z$ остаётся первое слагаемое

$$(\mathbf{rot}\,\vec{J})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial (rJ_\varphi)}{\partial r}.$$

Подставляя в последнее соотношение зависимость проекции вектора намагниченности среды J_φ от радиальной координаты по формуле (7), где $J_\varphi = J$ и выполняя соответствующие операции, для проекции вектора плотности объёмного тока намагничивания $(\vec{j}\,')_z$ имеем:

$$(\vec{j}\,')_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{dr}\left(r\frac{j(r^2 - R^2)^2}{4R^2 r}\right) = \left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right)j. \tag{9}$$

Следует заметить, что правая часть зависимости (9) в области $r \in (R; R_0)$ является величиной положительной и для рассматриваемого случая, если $\vec{J} \uparrow\uparrow \vec{H}$ (для парамагнетика), векторы плотности тока проводимости $\vec{j}$ и плотности объёмного тока намагничивания $\vec{j}\,'$ совпадают по направлению.

Для определения линейной плотности поверхностных токов намагничивания воспользуемся теоремой о циркуляции вектора намагниченности $\vec{J}$:

$$\oint_L (\vec{J}, d\vec{\ell}) = I' \tag{10}$$

Применим теорему о циркуляции вектора $\vec{J}$ к бесконечно малому контуру ABCD (рис.3), расположенному в плоскости, перпендикулярной оси Oz. Криволинейные отрезки контура AB и CD представляют собой дуги окружностей радиусов R_0^+ и R_0^-, а прямолинейные отрезки контура BC и DA пренебрежимо малы по сравнению с длинами отрезков AB и CD контура. Тогда в правой части соотношения (10) при вычислении тока намагничивания I', который пронизывает элементарную площадку, ограниченную этим контуром, можно не учитывать ток, распределённый по объёму магнетика, т.к. его вклад в I' пренебрежимо мал, а рассматривать только поверхностный ток намагничивания, вектор линейной плотности которого обозначим $\vec{i}'_{пов}$. По этой же причине (в общем случае) можно пренебречь вкладом в циркуляцию вектора $\vec{J}$ по боковым сторонам BC и DA (а в условиях нашей конкретной задачи

$$\int_{BC}(\vec{J},d\vec{l}) = \int_{DA}(\vec{J},d\vec{l}) = 0$$

- ещё и по причине ортогональности векторов $\vec{J}$ и $d\vec{l}$ в каждой точке отрезков BC и DA контура).

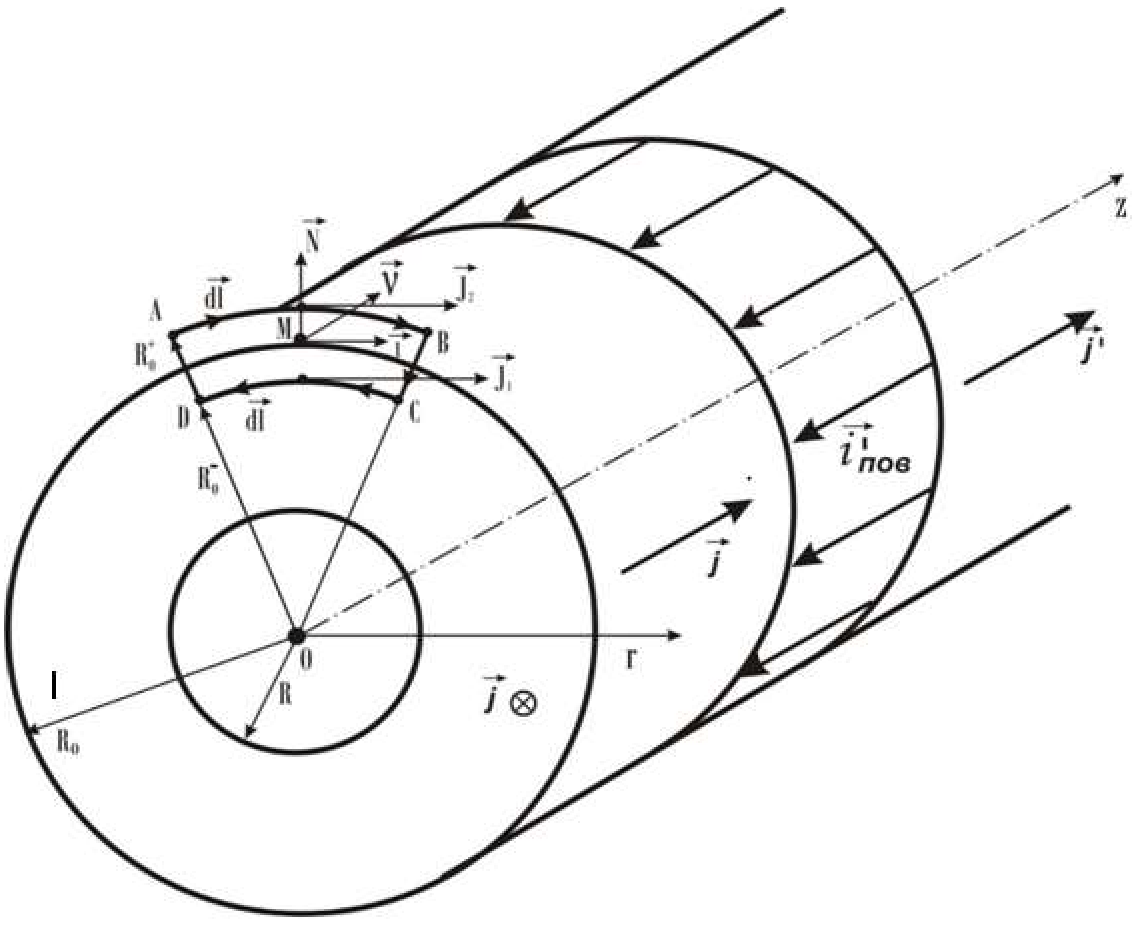

Рис.3

Учитывая значимость данного вопроса, целесообразно подробно проанализировать ориентацию единичных векторов нормали и касательных направлений на поверхности раздела магнетиков для описываемой задачи (см. рис.3). На рисунке введены следующие обозначения: $\vec{N}$ единичный вектор нормали к элементу поверхности раздела двух магнетиков (в рассматриваемой задаче это поверхность раздела «магнетик- вакуум») в окрестности точки наблюдения М, $\vec{t}$единичный вектор, лежащий в касательной плоскости к поверхности раздела в точке наблюдения, а единичный вектор $\vec{\nu}$ лежит также в этой касательной плоскости и является ортогональным к вектору нормали $\vec{N}$ и выбранному касательному направлению – вектору $\vec{t}$. Легко заметить, что в условиях рассматриваемой задачи вектор $\vec{\nu}$ перпендикулярен плоскости элементарного контура ABCD и обуславливает положительное направление обхода этого контура, циркуляция вектора намагниченности $\vec{J}$ по которому лежит в основе вывода локального соотношения для касательных компонент вектора $\vec{J}$ на границе раздела двух магнетиков. Это соотношение выполняется в каждой точке поверхности раздела S.

Итак, в рассматриваемом приближении циркуляция вектора намагниченности $\vec{J}$ по бесконечно малому контуру ABCD будет равна

$$\oint_{ABCD}(\vec{J},d\vec{l}\,)=(J_{2t}-J_{1t})l. \tag{11}$$

Как было показано выше, правая часть теоремы о циркуляции вектора $\vec{J}$ представляет собой только поверхностный ток намагничивания $I'_{пов}$, где линейная плотность поверхностного тока намагничивания $\vec{i}'_{пов}$ в условиях рассматриваемой задачи определена соотношением:

$$dI'_{пов}=(\vec{i}'_{пов},\vec{\nu})dl=(\vec{i}\,'_{пов})_{\nu}\,dl.$$

Отсюда следует, что под линейной плотностью $i'_{пов}$ поверхностных токов намагничивания понимается количество электричества, протекающего в единицу времени через единицу длины отрезка, расположенного на поверхности, по которой течёт ток намагничивания, и перпендикулярного направлению тока [2]. Тогда для поверхностного тока намагничивания $I'_{пов}$ получаем следующее соотношение:

$$I'_{пов}=\int_0^l(\vec{i}'_{пов})_{\nu}\,dl. \tag{12}$$

Предельным переходом из соотношения (12) с учётом равенства (11) получаем граничное условие, которому в данной задаче должен удовлетворять вектор намагниченности $\vec{J}$ на границе раздела двух магнетиков:

$$J_{2t}-J_{1t}=(\vec{i}'_{пов})_{\nu} \tag{13}$$

где J_{1t} и J_{2t} - касательные компоненты вектора $\vec{J}$ в первой и второй средах. Итак, локальное условие (13) является прямым следствием теоремы о циркуляции вектора намагниченности $\vec{J}$. Заметим, что в правой части соотношения (13) индекс ν может быть заменен индексом z, так как в условиях рассматриваемой задачи направление, задаваемое ортом $\vec{\nu}$, и направление оси 0z совпадают.

Применительно к нашей задаче рассмотрим внешнюю цилиндрическую поверхность S раздела радиуса $R_0 = \frac{3}{2}R$. Здесь среда 1 – это область пространства, заполненного магнетиком, а среда 2 – вакуум. В первой среде в каждой точке поверхности раздела касательная компонента J_{1t} вектора намагниченности $\vec{J}$ определяется зависимостью (7), во второй среде $J_{2t} = 0$, т.к. $\vec{J}_2 = \chi\vec{H}$ а магнитная восприимчивость χ для вакуума равна нулю. Тогда из локального соотношения (13) с учётом зависимости (7) имеем:

$$(\vec{i}\,'_{пов})_z = -\frac{25}{96}Rj. \qquad (14)$$

Можно показать, что на внутренней поверхности трубки, также являющейся поверхностью раздела «магнетик – вакуум», поверхностный ток намагничивания отсутствует. В данном случае из зависимости (7) при $r = R$ следует, что $J_{1t} = 0$, а $J_{2t} = 0$, т.к. вторая среда – вакуум. Поэтому из локального соотношения (13) на поверхности раздела двух сред следует, что поверхностный ток намагничивания на внутренней поверхности трубки отсутствует.

Полученные результаты позволяют записать для вектора $\vec{\boldsymbol{i}}'_{пов}$ линейной плотности поверхностных токов намагничивания в условиях рассматриваемой задачи следующее равенство:

$$\vec{i}\,'_{пов} = (\vec{i}\,'_{пов})_z\,\vec{\nu},$$

т.е. ток намагничивания на внешней поверхности трубки направлен противоположно току намагничивания, распределённому по объёму магнетика. Заметим, что векторы $\vec{\boldsymbol{i}}'_{пов}$ и $\vec{J}$ взаимно перпендикулярны.

В качестве контрольной операции проделанной работы необходимо провести проверку полученных результатов на соответствие основных законов магнитостатики. Найдём суммарный ток намагничивания, используя при этом найденные зависимости (9) и (14). Итак,

$$I' = \int_0^{2\pi R_0} i'_{пов}\,dl + \int_S \left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right) j\,2\pi\, r\,dr = -\frac{25}{32}\pi R^2 j + 2\pi\, j\left[\frac{r^4}{4R^2} - \frac{r^2}{2}\right]_R^{R_0} = 0\,, \qquad (15)$$

где первое слагаемое в правой части соотношения (15) представляет собой поверхностный ток намагничивания, текущий в отрицательном направлении оси 0z, а второе - ток намагничивания, распределённый по объёму магнетика и текущий в противоположном направлении.

Следует отметить, что вектор $\vec{i}'_{\text{пов}}$ линейной плотности поверхностных токов намагничивания в рассматриваемой задаче имеет только одну составляющую - по оси Oz. Это подтверждается результатами расчётов, которые находятся в согласии с положением, что вне магнетика магнитные поля обоих токов намагничивания (поверхностного и объёмного токов намагничивания) компенсируют друг друга.

Результаты, полученные в соотношении (15), подтверждают правильность проведённого анализа рассматриваемого физического устройства.

Заключение

Рассмотренные в настоящей работе методические рекомендации к выполнению домашнего задания по разделу «Магнитостатика», использованные при изучении курса физики в Московском государственном техническом университете им. Н.Э. Баумана, достоверно обеспечивают повышение результативности самостоятельной работы студентов младших курсов. Их внедрение в учебный процесс позволяет сформировать не только дисциплинарные компетенции, связанные с освоением фундаментальных физических законов и их применением при решении конкретных задач, но и общекультурные компетенции, связанные с формированием навыков самообразования, самоконтроля, самостоятельного получения и осмысления информации, а также навыков представления результатов работы в виде отчета. Работа полезна для углублённого изучения указанного раздела курса общей физики, обеспечивает сохранение интереса к предметной области в процессе обучения, а также обеспечивает необходимый уровень знаний для сдачи рубежного контроля и экзамена. Представленная методика может быть рекомендована к использованию при освоении курса физики в технических университетах.

Список литературы

1. Лунёва Л.А., Тараненко С.Н., Козырев А.В., Голубев В.Г., Купавцев А.В. Методические указания к выполнению домашнего задания по курсу общей физики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 55 с.
2. Иродов И..Е. Электромагнетизм. Основные законы. – М.: Изд-во Бином, 2015. – 319 с.
3. Мартинсон Л.К., Морозов А.Н., Смирнов Е.В. Электромагнитное поле. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. – 422 с.
4. Макаров А.М., Лунёва Л.А., Макаров К.А. Теория и практика классической электродинамики. – М.: Изд-во URSS, 2019. – 774 с.