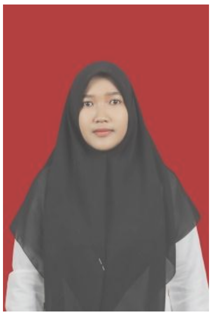
NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN MATRIKS *CENTROSYMMETRIC* BERORDO 3×3 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh:

APRILIA KHAIRUN NISA
11750424740



FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2022

LEMBAR PERSETUJUAN

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN MATRIKS *CENTROSYMMETRIC* BERORDO 3×3 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

TUGAS AKHIR

oleh:

APRILIA KHAIRUN NISA
11750424740

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 03 Juni 2022

Ketua Program Studi	Pembimbing
Wartono, M.Sc.	**Dr. Yuslenita Muda, M.Sc.**
NIP. 19730818 200604 1 003	NIP. 197701032007102001

LEMBAR PENGESAHAN

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN MATRIKS *CENTROSYMMETRIC* BERORDO 3 × 3 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

TUGAS AKHIR

oleh:

APRILIA KHAIRUN NISA
11750424740

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 03 Juni 2022

Pekanbaru, 03 Juni 2022
Mengesahkan

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Hartono, M.Pd.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19640301 199203 1 003	**NIP. 19730818 200604 1 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua : **Sri Basriati, M.Sc.**

Sekretaris : **Dr. Yuslenita Muda, M.Sc.**

Anggota I : **Fitri Aryani, M.Sc.**

Anggota II : **Corry Corazon Marzuki, M.Si.**

Lampiran Surat :
Nomor : Nomor 25/2021
Tanggal : 10 September 2021

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Aprilia Khairun Nisa
NIM : 11750424740
Tempat/Tgl. Lahir : Pekanbaru /04-April-1999
Fakultas/~~Pascasarjana~~ : Sains dan teknologi
Prodi : Matematika
Judul ~~Disertasi/Thesis~~/Skripsi/~~Karya Ilmiah lainnya~~*:
Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks Centrosymetric Berordo 3x3 Berpangkat Bilangan Bulat positif

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa :

1. Penulisan ~~Disertasi/Thesis~~/Skripsi/~~Karya Ilmiah lainnya~~* dengan judul sebagaimana tersebut di atas adalah hasil pemikiran dan penelitian saya sendiri.
2. Semua kutipan pada karya tulis saya ini sudah disebutkan sumbernya.
3. Oleh karena itu ~~Disertasi/Thesis~~/Skripsi/~~Karya Ilmiah lainnya~~* saya ini, saya nyatakan bebas dari plagiat.
4. Apa bila dikemudian hari terbukti terdapat plagiat dalam penulisan ~~Disertasi/Thesis~~/Skripsi/(~~Karya Ilmiah lainnya~~)* saya tersebut, maka saya besedia menerima sanksi sesua peraturan perundang-undangan.

Demikianlah Surat Pernyataan ini saya buat dengan penuh kesadaran dan tanpa paksaan dari pihak manapun juga.

Pekanbaru, 07-Juli-2022
Yang membuat pernyataan

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 METERAI TEMPEL 18FAJX924981977

Aprilia Khairun Nisa
NIM : 11750424740

*pilih salah satu sasuai jenis karya tulis

4

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 03 Juni 2022
Yang membuat pernyataan,

APRILIA KHAIRUN NISA
NIM. 11750424740

LEMBAR PERSEMBAHAN

"Dan mereka tidak mengetahui sesuatu apapun tentang ilmu (Nya), melainkan apa yang Dia kehendaki."

(QS Al-Baqarah : 255)

"Barang siapa yang keluar untuk menuntut ilmu, maka ia berada di jalan Allah hingga ia pulang"

(HR Tirmidzi)

Puji syukur kehadirat Allah Subhanahu Wa Ta'ala atas rahmat, karunia serta kasih sayangnya, sehingga Tugas Akhir ini bisa terselesaikan. Shalawat beserta salam saya haturkan kepada nabi Muhammad Shalallahu 'alaihi Wasalam semoga syafaatnya selalu tercurahkan kepada saya dan kita semua. Karya berupa Tugas Akhir ini saya persembahkan kepada :

Keluarga Saya

Terimakasih banyak kepada ayah dan ibu yang doanya, didikannya, nasehatnya, serta kasih sayangnya yang tak terkira kepada saya sehingga dapat membentuk saya seperti sekarang ini, dan terimakasih untuk adik-adik saya untuk dukungannya kepada saya atas apa yang saya lakukan.

Sahabat Saya

Terimakasih untuk selalu ada disaat masa sulit saya,selalu menjadi pendengar untuk semua keluh kesah saya, selalu memberikan masukkan atas apa yang saya lakukan, dan selalu memotivasi saya untuk melakukan hal baik.

Dosen Program Studi Matematika

Terimakasih pak, buk atas ilmu yang diberikan kepada saya, terimakasih pak, buk selalu memberikan masukannya nasehatnya dan motivasinya kepada saya, terkhususnya kepada ibu Dr.Yuslenita Muda, M.Sc dimana di sela-sela kesibukannya selalu menanggapi pertanyaan saya, selalu menyempatkan waktu untuk membimbing saya, serta memberikan masukkan dan sarannya yang membangun untuk penulisan tugas akhir ini.

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN MATRIKS CENTROSYMMETRIC BERORDO 3 × 3 BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF

APRILIA KHAIRUN NISA
11750424740

Tanggal Sidang : 03 Juni 2022
Tanggal Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks *centrosymmetric* bentuk khusus. Matriks *centrosymmetric* merupakan matriks yang simetri terhadap pusat susunan elemennya atau dengan kata lain sebuah matriks dikatakan *centrosymmetric* jika entrinya memenuhi $a_{ij} = a_{n-i+1,n-j+1}$. Berdasarkan hasil perhitungan diperoleh perbedaan vektor eigen pada $n = 1$ dengan vektor eigen pada $n \geq 2$.

Kata Kunci : matriks *centrosymmetric*, nilai eigen,vektor eigen.

EIGEN VALUE AND EIGEN VECTOR CENTROSYMMETRIC MATRIX OF ORDER 3×3 TO THE POWER OF POSITIVE

APRILIA KHAIRUN NISA
11750424740

Date of Final Exam : 3th June 2022
Date of Graduation :

Department of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas St. No. 155 Pekanbaru - Indonesia

ABSTRACT

The main aims of this study is to determine the eigenvalues and eigenvectors in centrosymmetric a special form matrix. Centrosymmetric is a matrix that is symmetrical about the center of the arrangement of its elements or in other words a matrix is said to be centrosymmetric if the entries meet $a_{ij} = a_{n-i+1,n-j+1}$. based on calculation result. The difference between the eigenvector in $n = 1$ and eigenvector in $n \geq 2$.

Keywords *: centrosymmetric matrix, eigen values, eigenvector.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Bersyukur kepada Allah *subhanahu wata'ala* karena atas limpahan rahmat serta kasih sayangnya Tugas Akhir ini bisa terselesaikan dengan judul **"Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks *Centrosymmetric* Berordo 3 × 3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif".** shalawat serta salam dihadiahkan kepada Nabi Muhammad *shalallahu 'alaihi* wasalam yang atas pertolongannya ilmu pengetahuan dapat kita rasakan sampai saat ini.

Terimakasih juga saya ucapkan kepada semua pihak yang membantu proses penyusunan tugas akhir ini. kepada ayah dan ibu terimakasih atas nasehat, perhatian dan kasih sayangnya. Kemudian ucapan terimakasih sebanyak-banyaknnya untuk:

1. Bapak Prof. Dr. Hairunas, M.Ag. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Hartono, M.Pd. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Bapak Wartono, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc. selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
5. Ibu Dr. Yuslenita Muda, M.Sc selaku pembimbing yang atas bimbingan, arahan, serta memotivasinya yang selalu tercurahkan kepada saya, saya dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
6. Ibu Fitri Aryani, M.Sc dan Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si Selaku Penguji yang atas kritik dan sarannya sehingga tugas akhir ini dapat diselesaikan.
7. Seluruh dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

8. Keluarga saya atas dukungannya selama sehingga saya dapat menyelesaikan penelitian ini.
9. Sahabat terkhusus Ulfa Mawaddah, Anggi Taysa Nabila, Melvy Utari Permadhi, Desi Ramayani, dan May Hofa Safitri.
10. Teman-teman Fakultas Sains dan Teknologi Khususnya Program Studi Matematika Angkatan 2017.

Penelitian ini dikerjakan seoptimal mungkin oleh penulis. Tetapi sangat memungkinkan adanya kesalahan dalam penyampaian materi atau penulisan sehingga diharapkan kritik serta saran dari berbagai pihak agar lebih sempurnanya penelitian ini.

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Pekanbaru, 03 Juni 2022

APRILIA KHAIRUN NISA
NIM. 11750424740

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Nilai eigen adalah nilai sebenarnya dari sebuah matriks berukuran $n\ x\ n$, sedangkan vektor eigen merupakan vektor kolom tidak nol yang jika dikalikan dengan matriks berukuran $n\ x\ n$ akan membentuk vektor lain yang mempunyai kelipatan dari vektor itu sendiri. Dalam ilmu geometri vektor eigen yang sejajar dengan nilai eigen yang tidak nol menunjukkan ke mana arah ia direnggangkan, dan nilai eigen merupakan variabel yang merenggangkannya.

Persamaan dengan variabel λ yang diaplikasikan untuk menghitung nilai eigen dan vektor eigen disebut persamaan karakteristik sebuah matriks, yaitu

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x, \\ Ax - \lambda\, x &= 0. \end{aligned} \qquad (\mathbf{1.1})$$

Persamaan (1.1) menunjukkan bahwa A merupakan matriks berukuran $n \times n$, λ melambangkan nilai eigen dan x melambangkan vektor eigen. Diketahui sifat identitas matriks dimana $xI = x$, dimana I merupakan matriks identitas, maka

$$\begin{aligned} Ax - \lambda I x &= 0. \\ (A - \lambda I)x &= 0. \end{aligned} \qquad (\mathbf{1.2})$$

Sehingga diperoleh $(A - \lambda\, I)$ tidak memiliki invers atau $\det(A - \lambda I) = 0$, dengan $x \neq 0$.

Perhitungan vektor eigen dan nilai eigen dapat dilakukan dibeberapa jenis matriks salah satunya pada matriks *centrosymmetric*. Matriks *centrosymmetric* merupakan matriks persegi yang simetris terhadap pusat susunan elemennya, atau lebih tepatnya sebuah matriks dikatakan *centrosymmetric* jika elemen dari matriks a_{ij} memenuhi persamaan,

$$a_{ij} = a_{n-i+1,n-j+1}, \text{ untuk } i, j \in \{1, \dots, n\}, \qquad (1.3)$$

Artikel [1] menyatakan secara ekuivalen sebuah matriks A berordo $n \times n$ dapat dikatakan *skew-centrosymmetric* atau matriks yang condong ke arah *centrosymmetric* jika $AJ = JA$, dengan J merupakan matriks pertukaran.

Sebelum mengetahui nilai eigen dan vektor eigen matriks *centrosymmetric*, pada artikel [2] pernah ditemukan nilai eigen dan vektor eigen matriks bujur sangkar ajaib, dimana sebelumnya diberikan matriks bujur sangkar

$$A = \begin{bmatrix} 8+9i & 1+2i & 6+7i \\ 3+4i & 5+6i & 7+8i \\ 4+5i & 9+10i & 2+3i \end{bmatrix}, \text{ dan}$$

$$B = \begin{bmatrix} 16-17i & 2-3i & 3-4i & 13-14i \\ 5-6i & 11-12i & 10-11i & 8-9i \\ 9-10i & 7-8i & 6-7i & 12-13i \\ 4-5i & 14-15i & 15-16i & 1-2i \end{bmatrix},$$

maka dengan menggunakan metode salihu diperoleh nilai eigen dari matriks A dan B berbentuk bilangan kompleks dan vektor eigen $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ untuk matriks A dan $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ untuk matriks B.

Perhitungan nilai eigen dan vektor eigen dengan metode berbeda dapat dilihat pada artikel [3]. Pada artikel ini perhitungan nilai eigen dan vektor eigen dilakukan pada matriks interval $\tilde{C} = \begin{bmatrix} [3,4] & [1,5] & [0,0] & [3,4] \\ [2,3] & [3,7] & [1,5] & [1,1] \\ [0,0,] & [5,6] & [3,4] & [1,1] \\ [1,1] & [1,2] & [1,2] & [2,4] \end{bmatrix}$ dengan metode pangkat. Diperoleh nilai eigen $\tilde{\lambda}_1 = [1.82,18.92]$, $\tilde{\lambda}_2 = [3.67,15.62]$, $\tilde{\lambda}_3 = [4.28,15.83]$, $\tilde{\lambda}_4 = [1.82,18.32]$, dan vektor eigen untuk $\tilde{\lambda}_4$ adalah $\tilde{v} = \begin{bmatrix} [0.1,1.36] \\ [1,1] \\ [0.37,1.47] \\ [0.1,0.92] \end{bmatrix}$.

Oleh karena penelitian ini nantinya akan menggunakan matriks *centrosymmetric*, penulis membaca beberapa karakter dari matriks *centrosymmetric* yang dibahas oleh Berny Pebo Tomasouw ditahun 2016 [4].

Lebih lanjut tahun 2020 artikel [5] menjelaskan determinan matriks *centrosymmetric* ${A_3}^n$, dimana

$$(A_3)^n = \begin{bmatrix} a^n & na^n & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & na^n & a^n \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

dengan bentuk umum determinan matriks *centrosymmetric* $(A_3)^n$, yaitu

$$|{A_3}^n| = a^{3n}. \quad (1.5)$$

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, penulis ingin meneliti bentuk umum nilai eigen dan vektor eigen matriks *centrosymmetric* berordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif, dikarenakan matriks *centrosymmetric* ini memiliki struktur dan susunan yang unik. Dimana $a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{31} = a_{32} = a_{33} = a$ dan $a_{21} = a_{23} = 0$ atau dapat ditulis sebagai berikut :

$${A_3}^n = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & 0 \\ a & a & a \end{bmatrix}^n, \text{ dengan } a \in R \text{ dan } n \in R \text{ positif}, \quad (1.6)$$

Dengan menggunakan matriks pada Persamaan (1.6) penulis mengajukan proposal penelitian berjudul **"Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks *Centrosymmetric* Berordo 3 × 3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif"**.

1.2 Rumusan Masalah

Penelitian ini akan menyelesaikan masalah bagaimana cara menentukan bentuk umum nilai eigen dan vektor eigen untuk matriks *centrosymmetric* berordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dari penelitian ini adalah matriks yang aplikasikan merupakan matriks pada Persamaan (1.6) dan hanya berpangkat bilangan bulat positif.

1.4 Tujuan Masalah

Tujuan dari penelitian ini adalah menemukan bentuk umum nilai eigen dan vektor eigen dari matriks *centrosymmetric* berordo 3×3 berpangkat n.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat capai dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. Untuk Penulis

Penelitian ini bermanfaat untuk mengembangkan ilmu yang telah diajarkan sebelumnya mengenai persoalan aljabar linear terkhusus untuk persoalan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks *centrosymmetric*.

b. Untuk Masyarakat

Harapannya penelitian ini digunakan sebagai tumpuan dalam mengatasi masalah perhitungan nilai eigen dan vektor eigen pada matriks *centrosymmetric*.

1.6 Sistematika Penelitian

Sistematika penulisan laporan Tugas Akhir ini terdiri dari beberapa pokok permasalahan yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Bab Ini akan menguraikan latar belakang pemilihan judul, masalah yang akan dibahas, tujuan , manfaat, dan sistematika penelitian.

BAB II LANDASAN TEORI

Dalam Bab ini akan dibahas teori yang berkaitan dengan determinan matriks, karakteristik matriks *centrosymmetric*, induksi matematika, nilai eigen, dan vektor eigen.

BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini membahas apa saja tahapan dalam menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks *centrosymmetric* berordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini berisi tahapan-tahapan dalam menentukan bentuk umum nilai eigen dan vektor eigen matriks *centrosymmetric* berordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif.

BAB V PENUTUP

Isi dari Bab V adalah kesimpulan dan saran dari hasil penelitian yang diteliti oleh penulis.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Determinan Matriks

Determinan merupakan selisih perkalian antara elemen-elemen dari diagonal sekunder dengan perkalian elemen-elemen dari diagonal utama. Sebuah penelitian dari artikel [6] menyatakan bahwa melalui pendekatan geometri nilai determinan matriks berordo 2×2 dapat dinyatakan sebagai luas suatu bidang datar (jajarangenjang), dan determinan matriks berordo 3×3 dapat dinyatakan sebagai volume suatu balok. Menurut rumus tertentu determinan disimbolkan dengan $\det(A)$ atau $|A|$. Pada penelitian ini determinan dibutuhkan dalam perhitungan nilai eigen. Perhitungan determinan pada penelitian ini dilakukan dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor.

Definisi 2.1 [7] Misalkan A adalah matriks kuadrat. Fungsi determinan dinyatakan oleh det, dan kita definisikan $\det(A)$ atau $|A|$ sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A jumlah $\det(A)$ kita namakan determinan A

2.1.1 Metode Ekspansi Kofaktor

Kofaktor merupakan hasil kali minor dengan suatu angka yang besarnya menurut suatu aturan yaitu $(-1)^{i+j}$ dengan i merupakan baris dan j merupakan kolom. Kofaktor suatu elemen baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A dilambangkan dengan C_{ij}.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \tag{2.1}$$

Dengan M_{ij} merupakan minor sebuah matriks.

Teorema 2.1 [8] Determinan dari suatu matriks sama dengan jumlah perkalian elemen-elemen dari sebarang baris/kolom dengan kofaktor-kofaktornya.

Secara matematis dinyatakan dengan :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} kof(A_{ij}) = a_{i1}(C_{i1}) + a_{i2}(C_{i2}) + \cdots + a_{in}(C_{in}) \tag{2.2}$$

dimana i sebarang didefinisikan ekspansi baris ke-i atau

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} kof(A_{ij}) = a_{1j}(C_{1j}) + a_{2j}(C_{2j}) + \cdots + a_{nj}(C_{nj}) \qquad (2.3)$$

dan j sebarang didefinisikan ekspansi kolom ke-j. dan (C_{ij}) adalah kofaktor dari sebuah matriks dengan baris ke-i dan kolom ke-j.

Contoh 2.2 [8] Hitung determinan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$,

dengan menggunakan Teorema 2.1, maka dilakukan ekspansi di kolom pertama karena pada kolom pertama memuat lebih banyak nol sehingga memudahkan kita dalam perhitungan nya.

Ekspansi kolom ke-1 :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, kof(A_{ij}) = (-1)^{1+1} 2. \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} + (-1)^{1+2} 0. \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} +$$

$$(-1)^{1+3} 0. \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} + (-1)^{1+4)} 0. \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, kof(A_{ij}) = \ 2. \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} - 0. \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} -$$

$$0 \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, kof(A_{ij}) = \ 2. \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Karena hasil kofaktor sebelumnya masih berupa matriks maka kita lakukan lagi ekspansi kofaktor. Untuk mempermudah kita dalam mendapatkan determinannya maka dilakukan ekspansi baris pertama karena baris pertama memiliki elemen nol yang lebih banyak dari pada baris dan kolom lainnya.

Ekspansi baris ke-1

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, kof\left(A_{ij}\right) = (-1)^{1+1}2.0\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} + (-1)^{1+2}2.3\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} +$$

$$(-1)^{1+3}2.0\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya dilakukan perkalian a_{in} dengan $kof\,(A_{in})$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, kof\left(A_{ij}\right) = 2.0\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} - 2.3\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} + 2.0\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$= 0 - 6.(-6) + 0.$$

$$= 36.$$

2.2 Matriks *Centrosymmetric*

Matriks yang simetri terhadap pusat susunan elemennya disebut matriks *centrosymmetric*. Artikel [9] menyatakan Sebuah matriks A berordo $n \times n$ yang memiliki entri a_{ij} dikatakan *centrosymmetric* jika entrinya memenuhi $a_{ij} = a_{n-i+1,n-j+1}$.

Definisi 2.2 [4]**.** Diberikan $A \in M_n$. Rotasi matriks A dilambangkan dengan A^R dan didefinisikan sebagai :

$$A^R = J_n A J_n.$$

Dari Definisi 2.2 diketahui A merupakan suatu matriks berukuran $n \times n$, A^R merupakan rotasi dari matriks A, dan J_n merupakan matriks contra-identitas atau dapat ditulis $J_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ⋰ & 1 & 0 \\ \vdots & ⋰ & ⋰ & ⋰ & \vdots \\ 0 & 1 & ⋰ & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Definisi 2.3 [4]**.** Diberikan matriks S berorde $n \times n$. Matriks S disebut *centro*-simetris jika memenuhi

$$S^R = S.$$

Definisi 2.3 menjelaskan sebuah matriks dikatakan *centrosymmetric* jika entri dari rotasi matriks S berukuran $n \times n$ sama dengan entri dari matriks S berukuran $n \times n$ dimana S^R merupakan rotasi matriks berukuran $n \times n$ dan S merupakan matriks berukuran $n \times n$.

Lema 2.1 [4].

i. Jika $S = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ maka S adalah matriks *centro*-simetris.

ii. Jika $S = \begin{bmatrix} a & c & b \\ d & e & d \\ b & c & a \end{bmatrix}$ maka S adalah matriks *centro*-simetris.

Contoh 2.4 [4] Matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$, maka matriks A merupakan matriks *centro*-simetris karena, $S = S^R$, dengan S^R merupakan rotasi dari matriks S maka:

$$S = S^R,$$

$$S = J_n S J_n,$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 3 \end{bmatrix},$$

Terbukti $S = S^R$.

2.3 Induksi Matematika

Induksi matematika merupakan cara memvalidasi sebuah usulan yang berhubungan dengan bilangan bulat. Atau suatu kesimpulan yang ditarik sesuai dengan pernyataan yang benar sehingga pernyataan lainnya seperti pernyataan khusus juga benar, artikel [10] menyatakan bahwasanya induksi matematika digunakan secara ekstensif untuk membuktikan hasil tentang berbagai objek diskrit luas.

Definisi 2.4 [11] Misalkan $p(n)$ adalah proposisi prihal bilangan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n. Akan ditunjukkan,

1. $p(1)$ benar, dan
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$. Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Langkah 1 dinamai basis induksi, dan langkah ke 2 dinamai langkah induksi.

Contoh 2.5 [12] Gunakan induksi matematik untuk membuktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2

Penyelesaian:

i. Basis induksi: Untuk $n = 1$, jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah $1^2 = 1$. Ini benar karena jumlah satu buah bilangan bulat positif pertama adalah 1

ii. Langkah induksi: Andaikan $p(n)$ benar, yaitu pernyataan

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Adalah benar (hipotesis induksi). Kita perlihatkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

Juga benar. Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) &= [1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)] \\ &\quad + (2n + 1) \\ &= n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Karena langkah basis dan langkah induksi keduanya telah diperlihatkan benar, maka jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.5 [13] Misalkan A matriks $n \times n$. Skalar λ didefinisikan dengan nilai eigen atau nilai karakteristik (*characteristic value*) dari A jika dijumpai vektor taknol x, sehingga $Ax = \lambda x$. Vektor x dikatakan vektor eigen atau vektor karakteristik dari λ.

Contoh 2.7 [14] Diberikan sebuah matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ dan sebuah vektor $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, maka hasil kali dari matriks A dan skalar v adalah

$$\begin{aligned} Av &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} \\ &= 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda\, v \end{aligned}$$

Dapat dilihat nilai eigen dari matriks A adalah 5 dan vektor eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Teorema 2.3 [15] Jika A merupakan sebuah matriks $n \times n$ dan λ merupakan sebuah bilangan real, maka pernyataan berikut ekuivalen .

(a) λ adalah sebuah nilai eigen dari A.

(b) Sistem persamaan $(\lambda I - A)x = 0$ mempunyai solusi non trivial .

(c) terdapat sebuah vektor taknol x pada R^n sedemikian rupa sehingga $Ax = \lambda x$.

(d) λ adalah sebuah solusi dari persamaan karakteristik $\det(\lambda I - A) = 0$.

Bukti: Dijelaskan pada buku Anton Rorres edisi 8 halaman 384-388.

Contoh 2.9 [8] Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

Temukan nilai eigen dan ruang eigen dari matriks A.

Penyelesaian :

$$\det(A - I\lambda) = det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda - 1)^2.$$

Jadi, polinom karakteristik mempunyai akar $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Ruang eigen untuk $\lambda_1 = 0$ adalah $N(A)$, yang kita tentukan melalui cara biasa ,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dengan menetapkan $x_3 = \alpha$, kita dapatkan bahwa $x_1, x_2, x_3 = \alpha$. Jadi ruang eigen yang sejajar dengan $\lambda_1 = 0$ terdiri dari seluruh vektor yang berbentuk $\alpha(1,1,1)^T$. Untuk mendapatkan ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$, kita harus menyelesaikan sistem $(A - I)x = 0$.

Tetapkan $x_2 = \alpha$ dan $x_3 = \beta$, kita akan mendapatkan $x_1 = 3\alpha - \beta$. Jadi, ruang eigen yang sesuai dengan $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ memuat vektor dengan bentuk,

$$\begin{pmatrix} 3\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur yang berpedoman kepada buku, jurnal-jurnal, dan website.

3.2 Prosedur Penelitian

Prosedur yang dilakukan untuk menyelesaikan permasalahan pada penelitian ini adalah:

1. Diberikan matriks *centrosymmetric* bentuk khusus pada Persamaan (1.6).
2. Memangkatkan matriks *centrosymmetric* bentuk khusus berordo 3×3 dengan $n = 1$ sampai dengan $n = 8$.
3. Menduga bentuk umum dari matriks *centrosymmetric* ${A_3}^n$.
4. Membuktikan bentuk umum dari matriks *centrosymmetric* ${A_3}^n$ menggunakan induksi matematika.
5. Menentukan determinan dari matriks $({A_3}^n - I\lambda)$ dengan metode kofaktor.
6. Menentukan nilai eigen matriks ${A_3}^n$.
7. Menduga bentuk umum nilai eigen matriks ${A_3}^n$.
8. Membuktikan bentuk umum nilai eigen ${A_3}^n$ dengan pembuktian langsung.
9. Menentukan vektor eigen dari matriks ${A_3}^n$.
10. Menduga bentuk umum vektor eigen dari matriks ${A_3}^n$.
11. Membuktikan bentuk umum vektor eigen dari matriks ${A_3}^n$ dengan pembuktian langsung.
12. Mengaplikasikan bentuk umum yang diperoleh untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks *centrosymmetric* ${A_3}^n$ bentuk khusus ke dalam contoh soal.

.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Penelitian dalam Bab IV menyimpulkan bentuk umum nilai eigen untuk matriks $A_3{}^n = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & a & 0 \\ a & a & a \end{bmatrix}^n$ adalah $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = a^n,$ dan $\lambda_3 = 2^n a^n$ dan bentuk umum vektor eigen pada $n = 1$ yaitu $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ untuk $n \geq 2$ vektor eigennya berupa $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

5.2 Saran

Dalam pembahasan dikemukakan bahwasanya perhitungan determinan hanya dilakukan dengan metode kofaktor dan perhitungan nilai eigen dan vektor eigen hanya menggunakan bilangan bulat positif. Harapannya penelitian berikutnya dapat menggunakan metode seperti aturan sarrus, aturan segitiga, reduksi baris dalam perhitungan determinan dan menemukan nilai eigen dan vektor eigen dengan bilangan selain bilangan bulat positif seperti bilangan desimal, negatif, bilangan berpangkat, ataupun bilangan lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] M. Klin, A. Munemasa, M. Muzychuk, and P. H. Zieschang, “Directed strongly regular graphs obtained from coherent algebras,” *Linear Algebra Appl.*, vol. 377, no. 1–3, pp. 83–109, 2004, doi: 10.1016/j.laa.2003.06.020.

[2] F. Aryani, R. Azwanti, and D. Maisyitah, “Nilai Eigen Dan Vektor Eigen Dari Matriks Kompleks Bujursangkar Ajaib,” vol. 1, no. 2, pp. 10–16, 2015.

[3] Y. E. Pratiwi, M. Kiftiah, and E. W. Ramadhani, “Penentuan Nilai Eigen dan Vektor Eigen Matriks Interval,” vol. 6, no. 2, pp. 17–26, 2017.

[4] B. P. Tomasouw, “Karakteristik matriks centro -simetris,” vol. 10, pp. 69–76, 2016.

[5] A. N. Rahma and S. M. Jauza, “Determinan Matriks Centrosymmetric Bentuk Khusus Ordo Berpangkat Bilangan Bulat Positif Dengan Kofaktor,” vol. 6, no. 2, pp. 89–96, 2020.

[6] R. Yeni and M. D. H. Gamal, “Penafsiran Determinan secara Geometri,” pp. 978–979.

[7] A. T. M.Swasti, *Aljabar Linear*. UNIPMA Press, 2020.

[8] T. Sujono, *Teori dan Aplikasi Aljabar Linear*. 2010.

[9] H. G. Davies and G. A. Hicks, “Determinants and matrices,” *Mathematics for scientific and technical students*. pp. 503–523, 2019, doi: 10.4324/9781315838380-16.

[10] C. Jacob, “Induksi Matematis,” vol. 59, p. 22.

[11] F. Sains, D. A. N. Teknologi, U. Islam, N. Sultan, and S. Kasim, “Metode Kondensasi Chio,” 2020.

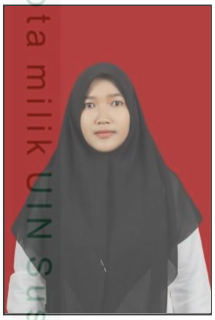
[12] M. Rinaldi, *Matematika Diskrit*, Edisi ketiga. 2009.

[13] K. Kuttler, “Linear algebra,” *Methods in Molecular Biology*, vol. 930. pp. 429–473, 2013, doi: 10.1007/978-1-62703-059-5_19.

[14] A. Barra, “Aljabar Linear Elementer: Vektor dan Nilai Eigen,” 2020. https://www.youtube.com/watch?v=8y-eUS4gOdI&feature=youtu.be.

[15] H. Anton and C. Rorres, *Elementary Linear Algebra, Applications Version, 9th Edition*. 2005.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis bernama Aprilia Khairun Nisa dilahirkan di Pekanbaru pada 4 April 1999. Penulis adalah anak pertama dari empat bersaudara dari pasangan Bapak Suwardi dan Ibu Irma Merianti. Penulis menyelesaikan Pendidikan formal Sekolah Dasar di Sekolah Dasar Negeri 010 Bangkinang Kota pada tahun 2011. Kemudian penulis melanjutkan pendidikan Sekolah Menengah Pertama di Sekolah Menengah Pertama Negeri 3 Kampar dan selesai pada 2014 dan di tahun yang sama penulis melanjutkan pendidikan di Sekolah Menengah Atas Negeri Bangkinang dan lulus pada tahun 2017. Dan melanjutkan studi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau Fakultas Sains dan Teknologi Program Studi Matematika.

Dalam masa pembelajaran penulis melakukkan proses belajar mengenai program studi Matematika, melaksanakan kegiatan Kerja Praktek (KP) di Jurusan Matematika dengan judul "Perhitungan Profit Asuransi Unit Link dengan Surrender Value Menggunakan Metode Prifit Testing" dengan dosen pembimbing bapak Aprijon, S.Si, M.Ed.